$\boxed{2}$ ［新潟大］

一般項が $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

３　　［大阪大］

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している。5 点 A，B，C，D，E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

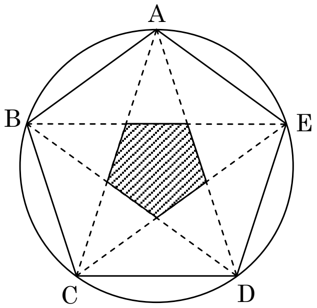
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$$ を求めよ。



斜線部分が R_2

２　　　　［新潟大］

(1)　$n \geqq 2$ のとき，$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)n \leqq 1\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n = n^{n-1}$ となり，

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leqq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

(2)　$\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(3)　2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle b_n = \log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log\frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと，

$$b_n = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!}\left(\frac{1}{k^k n^{k-1}}\right)^n = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!} - \log k^k n^{k-1}$$

$$= \frac{1}{n}\log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\} - k\log k - (k-1)\log n$$

$$= \frac{1}{n}\{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn)\} - (k-1)\log n - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (k-1)n\log n\} - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\{\log(n+1) + \log(n+2) + \cdots + \log(kn) - (kn-n)\log n\} - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n} + \log\frac{n+2}{n} + \cdots + \log\frac{n+(k-1)n}{n}\right\} - k\log k$$

$$= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right) + \log\left(1+\frac{2}{n}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{(k-1)n}{n}\right)\right\} - k\log k$$

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \int_0^{k-1}\log(1+x)\,dx - k\log k$$

$$= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^{k-1} - \int_0^{k-1}dx - k\log k$$

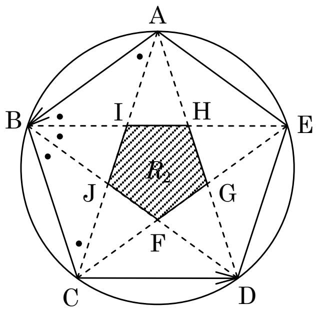
$$= k\log k - (k-1) - k\log k = 1-k$$

よって，$\displaystyle\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{b_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$ である。

［解　説］

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも，各問の相互関係もあまり感じられません。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］



(1)　5 点 A, B, C, D, E は円周を 5 等分しているので,

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}$$

これより，右図のように，対角線の交点を F，G，H，I，J とおくと，△ABC と△AIB は相似となり，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AI}=\mathrm{AC}:\mathrm{AB}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}+\angle\mathrm{DBC}$ であるので，$\angle\mathrm{CIB}=\angle\mathrm{CBI}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=y$ とすると,

$$\mathrm{AI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CB}=y-x\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$x:(y-x)=y:x$ となり，$x^2=y(y-x)\ \cdots\cdots\cdots ③$

(2)　③より，$y^2-xy-x^2=0$ となり，$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\ \cdots\cdots\cdots ④$

また，AD // BC，$\mathrm{AD}=y$，$\mathrm{BC}=x$ なので，④から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\vec{c}$ となり,

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

(3)　R_2 の 1 辺 IJ の長さは，$\mathrm{IJ}=\mathrm{AJ}-\mathrm{AI}=x-(y-x)=2x-y$ となるので，④から,

$$\mathrm{IJ}=2x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　相似な図形 R_{n+1} と R_n の面積比は，(3)より $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ であるので,

$$S_{n+1}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{1+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{9-3\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

［解 説］

正五角形を題材とした有名問題です。三角関数をベースに考えなくてもよいように，相似に着目させる誘導がついています。