10　［京都大・文］

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。

11　　　　［東京大・理］

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

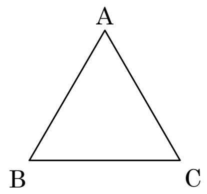
(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。

$\boxed{12}$　［広島大・理］

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0<p<1$ である。このとき, 右図のような正三角形の3頂点A, B, Cを次の規則で移動する動点Rを考える。



コインを投げて表が出ればRは反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出ればRは時計まわりに隣の頂点に移動する。

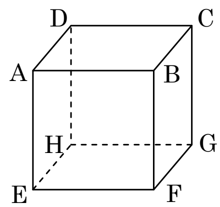
Rは最初Aにあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときにRがAに初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_2, P_3 を求めよ。

(2)　P_{2m}, P_{2m+1} $(2\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときにRがAに2度目に戻る確率 Q を求めよ。

$\boxed{13}$ ［名古屋大・文］



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

$\boxed{10}$ ［京都大・文］

(1) さいころを n 回振り，出た目の最大値を M，最小値を L としたとき，$M-L=1$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$ の場合である。

まず，$(L,\ M)=(1,\ 2)$ のときは，出た目がすべて 1 または 2 のいずれかという事象から，1 だけおよび 2 だけという事象を除いたものより，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

また，他の場合も同様なので，$M-L=1$ である確率は，

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2) $M-L=5$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 6)$ の場合だけである。

そこで，出た目がすべて 1 以上 5 以下の事象を A，2 以上 6 以下の事象を B とすると，$M-L=5$ である確率は，

$$1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$
$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

［解　説］

余事象の考え方がポイントである確率の有名問題です。頭を整理するには，図を書くと効果的です。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大・理］

(1)　点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ $A,\ B,\ C,\ D$ とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回, b 回, c 回, d 回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6\ \cdots\cdots\text{①},\quad b-d=a-c\ \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2)　(1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$$a+b+c+d=6\ \cdots\cdots\text{③},\quad a-c=0\ \cdots\cdots\text{④},\quad b-d=0\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$$(0,\ 3,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2,\ 1),\ (3,\ 0,\ 3,\ 0)$$

すると，求める確率は，

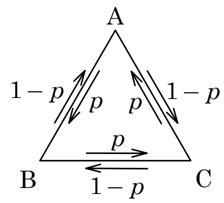
$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

［解　説］

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

12　　　　［広島大・理］

(1)　まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは，$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ または $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}$ から，その確率 P_2 は,



$$P_2=p(1-p)+(1-p)p=2p(1-p)$$

また，R が 3 回目に A に初めて戻るのは，$\mathrm{A}\to\mathrm{B}\to\mathrm{C}\to\mathrm{A}$ または $\mathrm{A}\to\mathrm{C}\to\mathrm{B}\to\mathrm{A}$ から，その確率 P_3 は,

$$P_3=p^3+(1-p)^3=1-3p+3p^2$$

(2)　R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→B→⋯→C→B→A または A→C→B→C→B→C→⋯→B→C→A から，その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m}=p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p)+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p=2p^m(1-p)^m$$

また，R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは，A→B→C→B→C→⋯→B→C→A または A→C→B→C→B→⋯→C→B→A から，その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned}P_{2m+1}&=p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2\\&=p^3\{p(1-p)\}^{m-1}+(1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1}\\&=(1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

(3)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，(2)より，$P_{2m}=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1}=\left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて，R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

(i)　R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m}P_{2N+3-2m}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(ii)　R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は，$P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

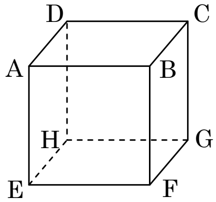
(i)(ii)より, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

$$Q=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}=2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}=\frac{N}{2^{2N}}$$

［解　説］

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

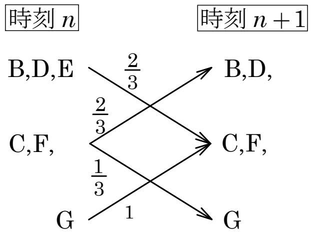
$\boxed{13}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**［名古屋大・文］**



(1)　時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C, F, H のいずれかにいる確率 q_n，A に戻らず G にいる確率 r_n について，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③$$



ここで，$p_1=1$，$q_1=r_1=0$ なので，①②③より，

$$p_2=\frac{2}{3}q_1=0,\ \ q_2=\frac{2}{3}p_1+r_1=\frac{2}{3},\ \ r_2=\frac{1}{3}q_1=0$$

$$p_3=\frac{2}{3}q_2=\frac{4}{9},\ \ q_3=\frac{2}{3}p_2+r_2=0,\ \ r_3=\frac{1}{3}q_2=\frac{2}{9}$$

(2)　$n\geqq 2$ のとき，①より $p_n=\frac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n=\frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1}+\frac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1}=\frac{7}{9}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots④$

さて，④に $n=2k$ を代入すると $q_{2k+1}=\frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1}=q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=0$

$$p_{2k}=\frac{2}{3}q_{2k-1}=0,\ \ r_{2k}=\frac{1}{3}q_{2k-1}=0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\frac{7}{9}q_{2k}$ となり，$q_{2k}=q_2\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\ \ r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0$ (n が奇数)，$q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (n が偶数)

また，$n=2k+1$ のとき，$k-1=\frac{n-3}{2}$ から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\ \ p_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\ \ r_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

(3)　時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は，$m\geqq 2$ のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$ のときは，$s_1=\frac{1}{3}p_1=\frac{1}{3}$ である。

［解　説］

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。