《2018 入試対策》

神戸大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された神戸大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 ，2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 神戸大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 次の 2 つの条件を満たす x の 2 次式 $f(x)$ を考える。

(i) $y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る

(ii) $\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)dx=15$

以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

(2) 2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β の満たす関係式を求めよ。

(3) (2)における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ。[2017]

2 a を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2) $y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ。また，そのときの $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(3) $a=2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を求めよ。[2016]

3 実数 $a,\ b$ に対して，$f(x)=a(x-b)^2$ とおく。ただし，a は正とする。放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=-4x+4$ に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ の最大値 $M(a)$ と，最小値 $m(a)$ を求めよ。

(3) a が正の実数を動くとき，$M(a)$ の最小値を求めよ。[2010]

4 a を正の実数とし，$f(x)=-a^2x^2+4ax$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2) 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 3)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$ を端点とする線分を l とする。曲線 $y=f(x)$ と線分 l (端点を含む)が共有点をもつような a の値の範囲を求め，数直線上に図示せよ。[2009]

5　x の 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし，a, b, c は定数で $a\neq 0$ とする。

(1)　実数 α，β について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2)　実数 α，β について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ。

[2008]

6　$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（p, q は実数）を求めよ。

(2)　整数 a，b，c を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2006]

7　a を正の実数とする。関数 $f(x)=ax^2+(1-2a)x$ が次の 2 つの条件

(i)　$-3\leqq x<0$ のとき，$f(x)\geqq -1$

(ii)　$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq 0$

をともに満たすような a の値の範囲を求めよ。　[2005]

8　次の問いに答えよ。

(1)　点 $(1,\ 0)$ を通って傾きが -4 の直線と，関数 $y=x^2-4x$ のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2)　2 つの関数 $y=x^2-4x$，$y=k(x-a)$ のグラフが，どんな k の値に対しても $-2\leqq x\leqq 2$ の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

[2000]

■ 微分と積分

1　t を正の実数とする。$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ。

(2)　$f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。　[2017]

2 a を正の実数とする。2 つの放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるとし，2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。 [2012]

3 実数 $x,\ y$ に対して，等式 $x^2+y^2=x+y$ ……①を考える。$t=x+y$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ①の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) x と y が①の等式を満たすとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) x と y が①の等式を満たすとする。$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$ を t を用いた式で表せ。また，F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。 [2011]

4 xy 平面における曲線 $C:y=x^2$ と直線 $l:y=ax$ （a は正の定数）について，次の問いに答えよ。

(1) l と平行な，C の接線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2) 原点 O と m の距離を a を用いて表せ。

(3) l と C の交点のうち O 以外のものを P とする。線分 OP を 1 辺とする四角形 OPQR が長方形となるように，m 上に 2 点 Q，R をとる。この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ。 [2007]

5 a を正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $y=\left|x^2-a|x|\right|$ のグラフをかけ。

(2) $F(a)=\displaystyle\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx$ を求めよ。

(3) $F(a)$ の最小値を求めよ。 [2005]

6　a を正の実数とする。関数 $f(x)=-x^2+ax$ について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を通る接線の方程式を a, t を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{A}(-a,\ 4a^2-5a+2)$ から曲線 $y=f(x)$ へ接線が 2 本引けることを示せ。

(3)　その 2 本の接線のうち接点の x 座標が大きい方の接線を l, 接点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ とする。このとき, $0<t<a$ を満たすための a の範囲を求めよ。

(4)　$a=1$ のとき, 直線 $x=-1$, 接線 l と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2004]

7　a は 1 より大きい定数とする。関数 $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)$ について, 次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとする。2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが, 点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき, a の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。a が(1)で求めた値をとるとき, 曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2003]

8　a を正の定数として, 関数 $f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f'(x)\geqq 0$ が区間 $0\leqq x\leqq 2$ で成り立つとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(2)のとき, 区間 $0\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ。　[2001]

9　a, b, c, d は実数として, x の整式 $f(x),\ g(x)$ が以下の条件を満たしているとする。

$$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d$$
$$\int_a^x\{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2$$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。　[1999]

10　$a>0$ とする。関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき, 次の各問いに答えよ。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　$M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1 $s,\ t$ を $s<t$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする。以下の問いに答えよ。

(1) s と t の間の関係式を求めよ。

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする。u と v の間の関係式を求めよ。

(3) $s,\ t$ が変化するとき，v の最小値と，そのときの $u,\ s,\ t$ の値を求めよ。　[2015]

2 $a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

(1) a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2) $b-a\geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3) 斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

[2013]

3 座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l は線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　[2012]

4 実数 t に対して，xy 平面上の直線 $l_t : y=2tx-t^2$ を考える。次の問いに答えよ。

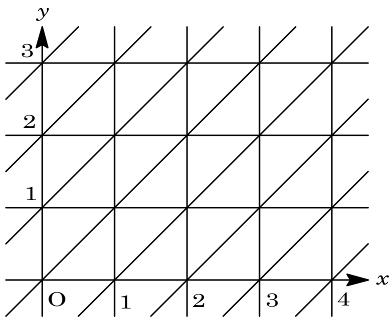
(1) 点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) t が $|t|\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。[2006]

5 実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。　[2002]



6　xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ について, A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし, m, n は負でない整数であるとする。　[2000]

■ 図形と計量

1　xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1, 2)で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle\mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a, 四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2)　S を a と θ を用いた式で表せ。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20\leqq S\leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。　[2011]

■ ベクトル

1　四面体 OABC において，P を辺 OA の中点，Q を辺 OB を $2:1$ に内分する点，R を辺 BC の中点とする。P, Q, R を通る平面と辺 AC の交点を S とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　比 $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$ を求めよ。

(3)　四面体 OABC を 1 辺の長さが 1 の正四面体とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$ を求めよ。[2016]

2 空間において，原点 O を通らない平面α上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$のとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$が，平面$\alpha$と垂直であることを示せ。 [2014]

3 空間において，2 点$\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$を通る直線をlとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P をl上に，点 Q をz軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$がベクトル$(3,\ 1,\ -1)$と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2) 点 R をl上に，点 S をz軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$が$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$およびベクトル$(0,\ 0,\ 1)$の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3) R, S を(2)で求めた点とする。点 T をl上に，点 U をz軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$が$\vec{v}$と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。 [2013]

4 空間内に 4 点 O, A, B, C があり，

$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=4,\ \angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

であるとする。3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OH を下ろす。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$と表すとき，$r, s, t$を求めよ。

(2) 直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき，長さの比$\mathrm{CH}:\mathrm{HD}$，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}$をそれぞれ求めよ。 [2010]

5 以下の問いに答えよ。

(1) xy平面において，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$とする。このとき，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の面積を求めよ。

(2) xyz空間において，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}},\ \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$とする。このとき，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の体積を求めよ。 [2009]

6　平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle\mathrm{XOY}<180°$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c}=t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}+\dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおく。$\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{AB}=4$ のとき，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2006]

7　三角形 OAB において，辺 OA, 辺 OB の長さをそれぞれ a, b とする。また，角 AOB は直角でないとする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を k とおく。次の問いに答えよ。

(1)　直線 OA 上に点 C を，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a, k, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2)　$a=\sqrt{2}$，$b=1$ とする。直線 BC 上に点 H を，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，u と v をそれぞれ k で表せ。　[2005]

8　平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を $2:3$ に内分する点を M，辺 AB を $2:3$ に内分する点を N，辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を L とし，AL と CN の交点を P とする。次の問いに答えよ。

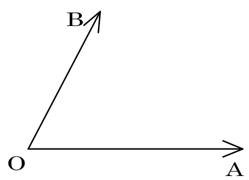
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$, t を用いて表せ。

(2)　3 点 P, M, D が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。　[2004]

9　3 点 O, A, B は，一直線上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P を $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$（$t$ は実数）を満たす点とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$，t で表せ。

(2)　点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$s$ は実数）を満たす点とする。P と Q の中点を M とする。t, s が $0\leqq t\leqq 1$, $0\leqq s\leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 M の存在する範囲を図示せよ。



[2001]

10　三角形 ABC において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　実数 s，t が $0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

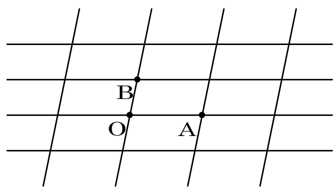
(b)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

(2)　(1)の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

[2000]

11　合同な平行四辺形を平面にしきつめて，図のように 2 組の平行線からなる格子を作り，その各交点を格子点と呼ぶ。

図のような 3 つの格子点 O, A, B について $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$ はすべて整数であるとする。このとき，どの 2 つの格子点 P, Q に対しても $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ は整数となることを示せ。　[1999]



12　座標空間内の 8 点 O(0, 0, 0)，A(2, 0, 0)，B(2, 2, 0)，C(0, 2, 0)，P(0, 0, 1)，Q(2, 0, 1)，R(2, 2, 1)，S(0, 2, 1) を頂点とする直方体を考える。次の各問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{D}=(x,\ y,\ 1)$ を面 PQRS 上の点とするときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を x, y およびベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ がベクトル $\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ と直交するための条件を x, y を用いて表せ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$ である D の中で $|\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ が最小となるような D を与える x, y の値を求めよ。

[1998]

■ 整数と数列

1 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が$a_1=5$，$b_1=7$を満たし，さらにすべての実数xとすべての自然数nに対して

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) $c_n=3^{n-1}$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $c_n=n$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。 [2015]

2 $a,\ b,\ c$を1以上7以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊) 3辺の長さが$a,\ b,\ c$である三角形と，3辺の長さが$\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1) $a=b>c$であり，かつ条件(＊)を満たす$a,\ b,\ c$の組の個数を求めよ。

(2) $a>b>c$であり，かつ条件(＊)を満たす$a,\ b,\ c$の組の個数を求めよ。

(3) 条件(＊)を満たす$a,\ b,\ c$の組の個数を求めよ。 [2015]

3 2次方程式$x^2-x-1=0$の2つの解をα，βとし，

$$c_n=\alpha^n+\beta^n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) nを2以上の自然数とするとき，$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$となることを示せ。

(2) 曲線$y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4$の極値を求めよ。

(3) 曲線$y=c_1x^2-c_3x+c_2$と，x軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2014]

4 $m,\ n\ (m<n)$を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$とおく。3辺の長さが$a,\ b,\ c$である三角形の内接円の半径をrとし，その三角形の面積をSとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a^2+b^2=c^2$を示せ。

(2) rを$m,\ n$を用いて表せ。

(3) rが素数のときに，Sをrを用いて表せ。

(4) rが素数のときに，Sが6で割り切れることを示せ。 [2014]

5　a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　ab が 3 の倍数であるとき, a または b は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

(3)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。　[2010]

6　1 から n までの自然数 $1, 2, 3, \cdots, n$ の和を S とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば, S が偶数であることを示せ。

(2)　S が偶数ならば, n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3)　n を 8 で割った余りが 3 または 4 ならば, S が 4 の倍数でないことを示せ。

[2008]

7　次の問いに答えよ。

(1)　漸化式 $x_{n+1}-a=-2x_n+2a$ （a は定数）で定まる数列 x_1, x_2, x_3, $\cdots$ の一般項 x_n を x_1, a を用いて表せ。

(2)　xy 平面において曲線 $C : y=f(x)=x^3-3ax^2$ （a は定数）を考える。C 上に点 $\mathrm{P_1}(t_1,\ f(t_1))$ をとる。ただし, $t_1 \neq a$ とする。$\mathrm{P_1}$ における C の接線と C の交点のうち, $\mathrm{P_1}$ と異なるものを $\mathrm{P_2}(t_2,\ f(t_2))$ とする。t_2 を t_1, a を用いて表せ。

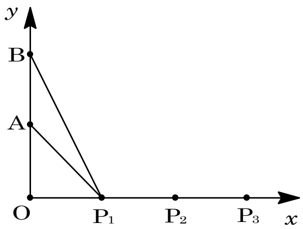
(3)　さらに, $\mathrm{P_2}$ における C の接線と C の交点のうち, $\mathrm{P_2}$ と異なるものを $\mathrm{P_3}$ とする。以下, 同様に $\mathrm{P_4}$, $\mathrm{P_5}$, $\mathrm{P_6}$, $\cdots$ を定める。$\mathrm{P_1}$, $\mathrm{P_2}$, $\mathrm{P_3}$, $\cdots$ はすべて相異なることを示せ。　[2007]

8　初項が 1 で公差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$n \geqq 3$ のとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$S_n=94$ となる n と d がちょうど 1 組ある。その n と d を求めよ。

(2)　$S_n=98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。　[2004]

9 座標平面上に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A(0,\ 1)$，$B(0,\ 2)$ をとる。自然数 k に対し点 P_k の座標を $(k,\ 0)$ とする。自然数 n に対し，$2n$ 本の線分 AP_1，AP_2，…，AP_n，BP_1，BP_2，…，BP_n により分けられる第 1 象限の部分の個数を a_n とする。たとえば $n=1$ のとき，図のように第 1 象限が 3 つの部分に分けられるので $a_1=3$ である。次の問いに答えよ。



(1)　a_2，a_3 の値を求めよ。

(2)　a_{n+1} を a_n と n を用いて表し，その理由を述べよ。

(3)　a_n を n を用いて表せ。　[2003]

10 数列 $\{a_n\}$ は，初項 a および公差 d が整数であるような等差数列であり，$8 \leqq a_2 \leqq 10$，$14 \leqq a_4 \leqq 16$，$19 \leqq a_5 \leqq 21$ を満たしている。このような数列 $\{a_n\}$ をすべて求めよ。　[2002]

11 2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列を a_1，a_2，a_3，……，a_n，……とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1)　1003 は数列 $\{a_n\}$ の第何項か。

(2)　a_{2000} の値を求めよ。

(3)　m を自然数とするとき，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までの和を求めよ。

[1999]

■ 確率

1 $\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$ とする。座標空間内の動点 P が原点 O から出発し，正四面体のサイコロ（1, 2, 3, 4 の目がそれぞれ確率 $\dfrac{1}{4}$ で出る）をふるごとに，出た目が $k\,(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ のときは $\overrightarrow{v_k}$ だけ移動する。すなわち，サイコロを n 回ふった後の動点 P の位置を P_n として，サイコロを $(n+1)$ 回目にふって出た目が k ならば，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$ である。ただし，$P_0=O$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　点 P_2 が x 軸上にある確率を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{P_0P_2} \perp \overrightarrow{P_2P_4}$ となる確率を求めよ。

(3)　4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率を求めよ。　[2017]

2 さいころを 4 回振って出た目を順に a, b, c, d とする。以下の問いに答えよ。

(1) $ab \geqq cd + 25$ となる確率を求めよ。

(2) $ab = cd$ となる確率を求めよ。 [2016]

3 赤色, 緑色, 青色のさいころが各 2 個ずつ, 計 6 個ある。これらを同時にふるとき,

赤色 2 個のさいころの出た目の数 r_1, r_2 に対し $R = |r_1 - r_2|$

緑色 2 個のさいころの出た目の数 g_1, g_2 に対し $G = |g_1 - g_2|$

青色 2 個のさいころの出た目の数 b_1, b_2 に対し $B = |b_1 - b_2|$

とする。次の問いに答えよ。

(1) R がとりうる値と, R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ。

(2) $R \geqq 4$, $G \geqq 4$, $B \geqq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ。

(3) $RGB \geqq 80$ となる確率を求めよ。 [2013]

4 袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている。4 つの数 0, 3, 6, 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする。次のようなルールをもつ, 1 人で行うゲームを考える。

[ルール] 袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく。ただし, 一度取り出したカードは袋に戻さないものとする。取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき, その時点で負けとし, それ以降はカードを取り出さない。途中で負けとなることなく, すべてのカードを取り出せたとき, 勝ちとする。

以下の問いに答えよ。

(1) 2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(2) 3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(3) このゲームで勝つ確率を求めよ。 [2011]

5　以下の問いに答えよ。

(1)　A, B の 2 人がそれぞれ,「石」,「はさみ」,「紙」の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで, 双方の「手」によって勝敗を決める。「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け,「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け,「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ。

(2)　上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加えて, 4 種類目の「手」として「水」を加える。「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A, B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとするとき, A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ。

(3)　上の 4 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加え, さらに第 5 の「手」として「土」を加える。B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき, A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには,「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか。ただし, 同じ「手」どうしの場合, しかもその場合のみ引き分けとする。　[2009]

6　次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面において, 円 $(x-a)^2+(y-b)^2=2c^2$ と直線 $y=x$ が共有点をもたないための a, b, c の条件を求めよ。ただし, a, b, c は定数で $c\neq 0$ とする。

(2)　1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数を, 順に a, b, c とする。a, b, c が(1)で求めた条件を満たす確率を求めよ。　[2008]

7　次の問いに答えよ。

(1)　1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する。この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2007]

8　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $x^2+y^2+ax+by+3c=0$ が円を表すための a, b, c の条件を求めよ。

(2)　1 つのサイコロを 2 回振って出た目の数を, 順に a, b とする。$c=1$ とするとき, a, b の組が(1)の条件を満たす場合は何通りあるか。

(3)　1 つのサイコロを 3 回振って出た目の数を, 順に a, b, c とする。a, b, c が(1)の条件を満たす確率を求めよ。　[2002]

■ 論証

1　以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 $x,\ y$ に対して，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y}\geqq 2$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。

(2)　n を自然数とする。n 個の正の実数 a_1，…，a_n に対して

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right)\geqq n^2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。　[2012]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

次の 2 つの条件を満たす x の 2 次式 $f(x)$ を考える。

(i)　$y=f(x)$ のグラフは点 $(1,\ 4)$ を通る

(ii)　$\displaystyle\int_{-1}^{2} f(x)\,dx=15$

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $f(x)=0$ の 2 つの解を α，β とするとき，α と β の満たす関係式を求めよ。

(3)　(2)における α，β がともに正の整数となるような $f(x)$ をすべて求めよ。[2017]

解答例

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと，条件(i)から，$f(1)=4$ なので，

$$a+b+c=4 \cdots\cdots\cdots①$$

また，条件(ii)から，$\displaystyle\int_{-1}^{2}(ax^2+bx+c)\,dx=15$ なので，

$$\frac{a}{3}(8+1)+\frac{b}{2}(4-1)+c(2+1)=15,\ \ a+\frac{b}{2}+c=5 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より $\dfrac{b}{2}=-1$ となり，$b=-2\cdots\cdots③$から $f(x)$ の 1 次の項の係数は -2 である。

(2)　①③より $a+c=6$ となり，$f(x)=ax^2-2x+6-a$

ここで，$f(x)=0$ の 2 つの解が α，β より，

$$\alpha+\beta=\frac{2}{a}\cdots\cdots\cdots④,\ \ \alpha\beta=\frac{6-a}{a}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$\alpha\beta=3(\alpha+\beta)-1$，$\alpha\beta-3\alpha-3\beta=-1\cdots\cdots\cdots⑥$

(3)　⑥を変形して，$(\alpha-3)(\beta-3)=8\cdots\cdots\cdots⑦$

ここで，α，β はともに正の整数なので，$\alpha-3\geqq-2$，$\beta-3\geqq-2$ となり，

$$(\alpha-3,\ \beta-3)=(1,\ 8),\ (2,\ 4),\ (4,\ 2),\ (8,\ 1)$$

よって，$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (5,\ 7),\ (7,\ 5),\ (11,\ 4)$

(i)　$(\alpha,\ \beta)=(4,\ 11),\ (11,\ 4)$ のとき

④より，$a=\dfrac{2}{\alpha+\beta}=\dfrac{2}{15}$ となり，$f(x)=\dfrac{2}{15}x^2-2x+\dfrac{88}{15}$

(ii)　$(\alpha,\ \beta)=(5,\ 7),\ (7,\ 5)$ のとき

④より，$a=\dfrac{2}{\alpha+\beta}=\dfrac{1}{6}$ となり，$f(x)=\dfrac{1}{6}x^2-2x+\dfrac{35}{6}$

コメント

解と係数の関係を媒介にして作られた不定方程式を解く頻出問題です。

問　題

a を正の定数とし，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通るときの a の値を求めよ。また，そのときの $y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(3)　$a=2$ とする。すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つような実数 b のとり得る値の範囲を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=\left|x^2+2ax+a\right|=\left|(x+a)^2-a^2+a\right|$ に対して，

(i)　$-a^2+a<0\ (a>1)$ のとき

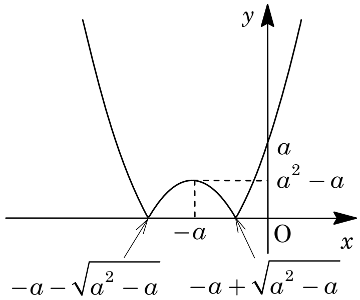
$-a-\sqrt{a^2-a}<x<-a+\sqrt{a^2-a}$ において，

$$f(x)=-x^2-2ax-a=-(x+a)^2+a^2-a$$

$x\leqq -a-\sqrt{a^2-a}$，$-a+\sqrt{a^2-a}\leqq x$ において，

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

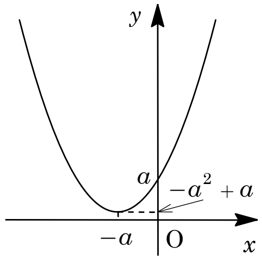
よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(ii)　$-a^2+a\geqq 0\ (0<a\leqq 1)$ のとき

$$f(x)=x^2+2ax+a=(x+a)^2-a^2+a$$

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x)$ のグラフが点 $(-1,\ 2)$ を通ることより，

$$2=\left|1-2a+a\right|,\ \left|1-a\right|=2,\ 1-a=\pm 2$$

$a>0$ から $1-a=-2$ となり，$a=3$

このとき，(1)の(i)の場合に対応し，$f(x)=\left|x^2+6x+3\right|$

そこで，$\alpha=-3-\sqrt{6}$，$\beta=-3+\sqrt{6}$ とおくと，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれる図形の面積 S は，

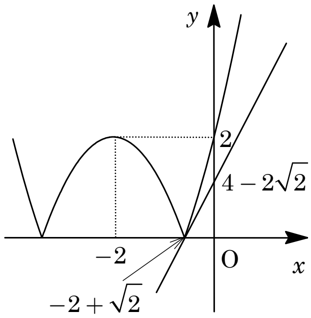
$$S=\int_{\alpha}^{\beta}(-x^2-6x-3)\,dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{6}\right)^3=8\sqrt{6}$$

(3)　$a=2$ のとき，$f(x)=\left|x^2+4x+2\right|$ となる。

さて，$y=x^2+4x+2$ のグラフ上の $x=t$ における接線の傾きが 2 とすると，$y'=2x+4$ から，

$$2t+4=2,\ t=-1$$



すると，$-1<-2+\sqrt{2}$ から，$y=f(x)$ のグラフがつねに直線 $y=2x+b$ の上側にあり，しかも b の値が最大になるのは，上図の位置関係の場合である。

すなわち，すべての x に対して $f(x)\geqq 2x+b$ が成り立つ b のとり得る値は，$b\leqq 4-2\sqrt{2}$ である。

コメント

絶対値つきの関数のグラフについての基本問題です。(3)では，図だけで処理をするには微妙な感じでしたので，まず数式を用いて確認をしています。

問　題

実数 a, b に対して，$f(x)=a(x-b)^2$ とおく。ただし，a は正とする。放物線 $y=f(x)$ が直線 $y=-4x+4$ に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) $0\leqq x\leqq 2$ において，$f(x)$ の最大値 $M(a)$ と，最小値 $m(a)$ を求めよ。

(3) a が正の実数を動くとき，$M(a)$ の最小値を求めよ。　[2010]

解答例

(1) $f(x)=a(x-b)^2$ に対して，$y=f(x)$ と $y=-4x+4$ を連立して，

$$a(x-b)^2=-4x+4\,,\ \ ax^2-2(ab-2)x+ab^2-4=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より, $(*)$が重解をもつので,

$$D/4=(ab-2)^2-a(ab^2-4)=0\,,\ \ ab-a-1=0$$

$a>0$ より，$b=\dfrac{a+1}{a}$

(2) (1)より，$f(x)=a\left(x-\dfrac{a+1}{a}\right)^2$ となり, $a>0$ から，$\dfrac{a+1}{a}=1+\dfrac{1}{a}>1$ である。

すると, $0\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最大値 $M(a)$，最小値 $m(a)$ は,

(i) $1+\dfrac{1}{a}\leqq 2$ $(a\geqq 1)$ のとき

$$M(a)=f(0)=\frac{(a+1)^2}{a}\,,\ \ m(a)=f\left(\frac{a+1}{a}\right)=0$$

(ii) $1+\dfrac{1}{a}>2$ $(0<a<1)$ のとき

$$M(a)=f(0)=\frac{(a+1)^2}{a}\,,\ \ m(a)=f(2)=a\left(2-\frac{a+1}{a}\right)^2=\frac{(a-1)^2}{a}$$

(3) (2)より，$M(a)=\dfrac{(a+1)^2}{a}=a+\dfrac{1}{a}+2\geqq 2+2=4$

等号が成立するのは，$a=\dfrac{1}{a}$ すなわち $a=1$ のときである。

したがって，$M(a)$ の最小値は 4 である。

コメント

2 次関数の最大・最小に関する基本問題です。

問　題

a を正の実数とし，$f(x)=-a^2x^2+4ax$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　2 点 A$(2,\ 3)$，B$(3,\ 3)$ を端点とする線分を l とする。曲線 $y=f(x)$ と線分 l (端点を含む)が共有点をもつような a の値の範囲を求め，数直線上に図示せよ。

[2009]

解答例

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ において，$f(x)=-a^2x^2+4ax=-a^2\left(x-\dfrac{2}{a}\right)^2+4$ ……(＊)より，

(i)　$0<\dfrac{2}{a}\leqq 3\ \left(a\geqq\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$f(x)$ は $x=\dfrac{2}{a}$ のとき，最大値 4 をとる。

(ii)　$\dfrac{2}{a}>3\ \left(0<a<\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$f(x)$ は $x=3$ のとき，最大値 $-9a^2+12a$ をとる。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=3$ との共有点は, (＊)より,

$$-a^2\left(x-\frac{2}{a}\right)^2+4=3\,,\ \left(x-\frac{2}{a}\right)^2=\frac{1}{a^2}$$

よって，$x=\dfrac{2}{a}\pm\dfrac{1}{a}$ から，$x=\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{3}{a}$ となる。

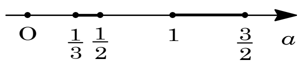
この共有点が線分 $l:\ y=3\ (2\leqq x\leqq 3)$ 上にある条件は,

(i)　$2\leqq\dfrac{1}{a}\leqq 3$ のとき　$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

(ii)　$2\leqq\dfrac{3}{a}\leqq 3$ のとき　$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{3}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$，$1\leqq a\leqq\dfrac{3}{2}$

数直線上に図示すると，右図の太線部となる。



コメント

(2)では，予測に反して，解が簡単な式となります。なお，最後の数直線上での図示は何を意味するのでしょうか。

問　題

x の 2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ とその導関数 $f'(x)$ について，次の問いに答えよ。ただし, a, b, c は定数で $a\neq 0$ とする。

(1)　実数 α，β について，$f(\alpha)=f(\beta)$ ならば $|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ であることを示せ。

(2)　実数 α，β について，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ ならば $f(\alpha)=f(\beta)$ であることを示せ。

[2008]

解答例

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f'(x)=2ax+b$

$f(\alpha)=f(\beta)$ のとき，$a\alpha^2+b\alpha+c=a\beta^2+b\beta+c$ より，

$$a(\alpha^2-\beta^2)+b(\alpha-\beta)=0\,,\ (\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$\alpha=\beta$ のとき

明らかに，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ は成立する。

(ii)　$\alpha\neq\beta$ のとき

$(*)$より，$b=-a(\alpha+\beta)$ となり，$f'(x)=2ax-a(\alpha+\beta)$ から，

$$f'(\alpha)=2a\alpha-a(\alpha+\beta)=a(\alpha-\beta)\,,\ f'(\beta)=2a\beta-a(\alpha+\beta)=-a(\alpha-\beta)$$

よって，$f'(\alpha)=-f'(\beta)$ より，$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ が成立する。

(2)　$|f'(\alpha)|=|f'(\beta)|$ のとき，$f'(\alpha)=\pm f'(\beta)$

(i)　$f'(\alpha)=f'(\beta)$ のとき

$2a\alpha+b=2a\beta+b$ より，$a(\alpha-\beta)=0$

$a\neq 0$ から $\alpha=\beta$ となり，$f(\alpha)=f(\beta)$ が成立する。

(ii)　$f'(\alpha)=-f'(\beta)$ のとき

$2a\alpha+b=-2a\beta-b$ より，$b=-a(\alpha+\beta)$ となり，

$$f(\alpha)-f(\beta)=a\alpha^2+b\alpha+c-(a\beta^2+b\beta+c)=(\alpha-\beta)\{a(\alpha+\beta)+b\}=0$$

よって，$f(\alpha)=f(\beta)$ が成立する。

コメント

2 次関数とその導関数についての性質を証明する基本問題です。

問　題

$\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ とする。ただし，i は虚数単位である。次の問いに答えよ。

(1)　α を解にもつような 2 次方程式 $x^2+px+q=0$（$p,\ q$ は実数）を求めよ。

(2)　整数 $a,\ b,\ c$ を係数とする 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ について，解の 1 つは α であり，また $0\leqq x\leqq 1$ の範囲に実数解を 1 つもつとする。このような整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2006]

解答例

(1)　実数係数の 2 次方程式の 1 つの解が $\alpha=\dfrac{3+\sqrt{7}i}{2}$ であるとき，もう 1 つの解は $\overline{\alpha}=\dfrac{3-\sqrt{7}i}{2}$ であるので，

$$\alpha+\overline{\alpha}=3,\ \ \alpha\overline{\alpha}=\frac{9+7}{4}=4$$

よって，α，$\overline{\alpha}$ を解とする 2 次方程式は，解と係数の関係より，

$$x^2-3x+4=0$$

(2)　まず，x^3+ax^2+bx+c を x^2-3x+4 で割ると，

$$x^3+ax^2+bx+c=(x^2-3x+4)(x+a+3)+(3a+b+5)x+(-4a+c-12)$$

ここで，3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は，解として α，$\overline{\alpha}$ をもつので，

$$3a+b+5=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ -4a+c-12=0\cdots\cdots\cdots②$$

このとき，もう 1 つの解は，$x=-a-3$ となり，条件より，

$$0\leqq -a-3\leqq 1,\ \ -4\leqq a\leqq -3$$

すると，a は整数より，$a=-4,\ -3$

$a=-4$ のとき，①より $b=7$，②より $c=-4$ となり，また $a=-3$ のとき，①より $b=4$，②より $c=0$ となり，$b,\ c$ も整数である。

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-4,\ 7,\ -4),\ (-3,\ 4,\ 0)$

コメント

複素数と方程式の基本題です。(2)では，3 次方程式の解と係数の関係を利用するという手もあります。

問　題

a を正の実数とする。関数 $f(x)=ax^2+(1-2a)x$ が次の 2 つの条件

(i)　$-3\leqq x<0$ のとき，$f(x)\geqq -1$

(ii)　$x\geqq 0$ のとき，$f(x)\geqq 0$

をともに満たすような a の値の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

$f(x)=ax^2+(1-2a)x=a\left(x-\dfrac{2a-1}{2a}\right)^2-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}$ より，

(i)　$\dfrac{2a-1}{2a}<0$ $\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

まず，$f(0)=0$ より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ という条件は成立している。

(i-i)　$\dfrac{2a-1}{2a}\geqq -3$ $\left(\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$-3\leqq x<0$ のとき $f(x)\geqq -1$ なので，$f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)=-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}\geqq -1$

$$(2a-1)^2\leqq 4a,\ 4a^2-8a+1\leqq 0,\ \frac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

すると，$\dfrac{1}{8}\leqq a<\dfrac{1}{2}$ と合わせて，$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a<\dfrac{1}{2}$

(i-ii)　$\dfrac{2a-1}{2a}<-3$ $\left(0<a<\dfrac{1}{8}\right)$ のとき

$-3\leqq x<0$ のとき $f(x)\geqq -1$ なので，$f(-3)=15a-3\geqq -1$

すると，$a\geqq\dfrac{2}{15}$ となるが，$0<a<\dfrac{1}{8}$ と合わせると, a は存在しない。

(ii)　$\dfrac{2a-1}{2a}=0$ $\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$ より，条件に適する。

(iii)　$\dfrac{2a-1}{2a}>0$ $\left(a>\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$f\left(\dfrac{2a-1}{2a}\right)=-\dfrac{(2a-1)^2}{4a}<0$ より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ という条件に反する。

(i)〜(iii)より，$\dfrac{2-\sqrt{3}}{2}\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$

コメント

場合分けの練習問題です。グラフを念頭において，論理を進めていくことがポイントです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線と，関数$y=x^2-4x$のグラフとの共有点の座標を求めよ。

(2)　2 つの関数$y=x^2-4x$，$y=k(x-a)$のグラフが，どんな k の値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつようなaの値の範囲を求めよ。

[2000]

解答例

(1)　点$(1,\ 0)$を通って傾きが-4の直線は，$y=-4(x-1)$ ………①

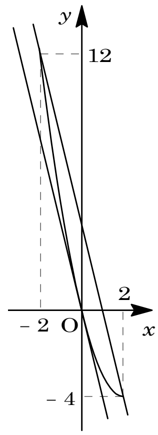
①と$y=x^2-4x$ ……②の共有点は，

$$-4(x-1)=x^2-4x,\quad x^2-4=0,\quad x=\pm 2$$

$x=2$のとき，①より$y=-4$なので，共有点$(2,\ -4)$

$x=-2$のとき，①より$y=12$なので，共有点$(-2,\ 12)$

(2)　②より，$y=(x-2)^2-4$となり，$-2\leqq x\leqq 2$の範囲でグラフを書くと，右図の曲線のようになる。



また，$y=k(x-a)$は点$(a,\ 0)$を通って傾きがkの直線を表し，$k=-4$，$a=1$のとき，(1)より②と$(2,\ -4)$，$(-2,\ 12)$で交わる。

よって，$a=1$のときは，右図より，どんな k の値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつ。

また，②より$y'=2x-4$なので，$x=0$で$y'=-4$から原点における②の接線は$y=-4x$となる。そして，$a=0$のときは，どんなkの値に対しても原点が共有点となる。

さて，$a<0$, $1<a$のときは，$k=-4$とすると$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で共有点をもたない。

さらに，$0<a<1$のとき，$k\leqq -4$では$a<x<2$で，$k\geqq -4$では$-2<x<a$で少なくとも 1 つの共有点をもつ。

以上より，どんな k の値に対しても$-2\leqq x\leqq 2$の範囲で少なくとも 1 つの共有点をもつ条件は，$0\leqq a\leqq 1$である。

コメント

(2)は最初，y を消去して方程式の解の配置で考えました。しかし，かなり複雑なので，方針を変更してグラフを書くと，(1)が大きなヒントとなっていることがわかりました。

問　題

t を正の実数とする。$f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $2t^3-3t^2+1$ を因数分解せよ。

(2) $f(x)$ が極小値 0 をもつことを示せ。

(3) $-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を t の式で表せ。　[2017]

解答例

(1) $2t^3-3t^2+1=(t-1)(2t^2-t-1)=(t-1)^2(2t+1)$

(2) $f(x)=x^3+3x^2-3(t^2-1)x+2t^3-3t^2+1$ に対して,

$$f'(x)=3x^2+6x-3(t^2-1)$$
$$=3\{x^2+2x-(t+1)(t-1)\}$$
$$=3(x+t+1)(x-t+1)$$

x	$\cdots$	$-t-1$	$\cdots$	$t-1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$t>0$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになり，極小値は，(1)の結果を利用して，

$$f(t-1)=(t-1)^3+3(t-1)^2-3(t+1)(t-1)^2+(t-1)^2(2t+1)$$
$$=(t-1)^2(t-1+3-3t-3+2t+1)=0$$

(3) まず，極大値および $-1\leqq x\leqq 2$ における境界値を求めておくと，

$$f(-t-1)=-(t+1)^3+3(t+1)^2+3(t-1)(t+1)^2+2t^3-3t^2+1$$
$$=(t+1)^2(-t-1+3+3t-3)+2t^3-3t^2+1$$
$$=(t+1)^2(2t-1)+2t^3-3t^2+1=4t^3$$
$$f(-1)=-1+3+3t^2-3+2t^3-3t^2+1=2t^3$$
$$f(2)=8+12-6t^2+6+2t^3-3t^2+1=2t^3-9t^2+27$$

ここで，$f(x)=0$ とおくと，$(x-t+1)^2(x+2t+1)=0$ となり，

$$x=t-1,\ -2t-1$$

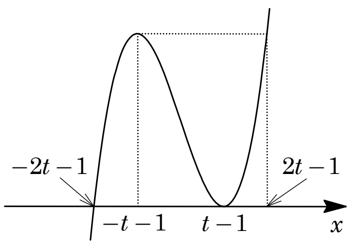
また，$f(x)=4t^3$ とおくと，

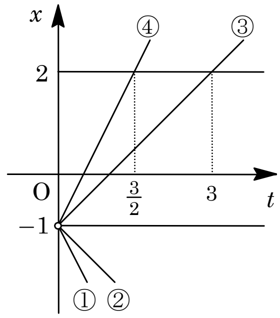
$$x^3+3x^2-3(t^2-1)x-2t^3-3t^2+1=0$$

すると，$(x+t+1)^2(x-2t+1)=0$ となり，

$$x=-t-1,\ 2t-1$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。





さて，$t>0$ において，$x=-1,\ 2$ と $x=-2t-1$ ……①，$x=-t-1$ ……②，$x=t-1$ ……③，$x=2t-1$ ……④との関係をまとめると，右図のようになる。

これより，$-1\leqq x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値 m と最大値 M を求めるために，t の範囲を $0<t\leqq\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{3}{2}<t\leqq 3$，$t>3$ と場合分けをする。

(i)　$0<t\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

このとき，$-2t-1<-t-1<-1<t-1<2t-1\leqq 2$ となる。

すると，$f(2)>f(2t-1)=f(-t-1)>f(-1)$ から，

$$m=f(t-1)=0,\ M=f(2)=2t^3-9t^2+27$$

(ii)　$\dfrac{3}{2}<t\leqq 3$ のとき

このとき，$-2t-1<-t-1<-1<t-1\leqq 2<2t-1$ となる。

ここで，$f(2)-f(-1)=-9t^2+27=-9(t-\sqrt{3})(t+\sqrt{3})$ となり，

(ii-i)　$\dfrac{3}{2}<t\leqq\sqrt{3}$ のとき

$f(2)\geqq f(-1)$ より，$m=f(t-1)=0$，$M=f(2)=2t^3-9t^2+27$

(ii-ii)　$\sqrt{3}<t\leqq 3$ のとき

$f(2)<f(-1)$ より，$m=f(t-1)=0$，$M=f(-1)=2t^3$

(iii)　$t>3$ のとき

このとき，$-2t-1<-t-1<-1<2<t-1<2t-1$ となるので，

$$m=f(2)=2t^3-9t^2+27,\ M=f(-1)=2t^3$$

(i)～(iii)をまとめて，

$$m=0\ (0<t\leqq 3),\ m=2t^3-9t^2+27\ (t>3)$$

$$M=2t^3-9t^2+27\ (0<t\leqq\sqrt{3}),\ M=2t^3\ (t>\sqrt{3})$$

コメント

3 次関数の微分と増減が題材の頻出問題ですが，内容はかなり繁雑です。そのため，場合分けの前に，入念に準備を行いました。ただ，$t>0$ なので，やりすぎたきらいもありますが。

問　題

a を正の実数とする。2 つの放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ が異なる 2 点で交わるとし，2 つの放物線によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) $S(a)$ を a を用いて表せ。

(3) $S(a)$ の最大値とそのときの a の値を求めよ。 [2012]

解答例

(1) 放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-3a$ ……①，$y=-\dfrac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2$ ……②を連立して，

$$\frac{1}{2}x^2-3a=-\frac{1}{2}x^2+2ax-a^3-a^2,\ x^2-2ax+a^3+a^2-3a=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

異なる 2 交点をもつことより，

$$D/4=a^2-(a^3+a^2-3a)=-a^3+3a>0,\ a(a+\sqrt{3})(a-\sqrt{3})<0$$

すると, $a>0$ より，$0<a<\sqrt{3}$

(2) ③の 2 つの解を，$\alpha=a-\sqrt{-a^3+3a}$，$\beta=a+\sqrt{-a^3+3a}$ とおくと，放物線①②によって囲まれる部分の面積 $S(a)$ は,

$$S(a)=\int_\alpha^\beta -(x^2-2ax+a^3+a^2-3a)dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{-a^3+3a}\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-a^3+3a}\right)^3$$

(3) $f(a)=-a^3+3a$ とおくと，$S(a)=\dfrac{4}{3}\left(\sqrt{f(a)}\right)^3$ となり,

$$f'(a)=-3a^2+3=-3(a+1)(a-1)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は $a=1$ のとき最大値 2 をとる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	2	$\searrow$	

よって，$S(a)$ の最大値は $\dfrac{4}{3}(\sqrt{2})^3=\dfrac{8}{3}\sqrt{2}$ であり，このとき $a=1$ となる。

コメント

超頻出の問題です。計算ミスが致命傷になります。

問　題

実数 x, y に対して, 等式 $x^2+y^2=x+y$ ……①を考える。$t=x+y$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) ①の等式が表す xy 平面上の図形を図示せよ。

(2) x と y が①の等式を満たすとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

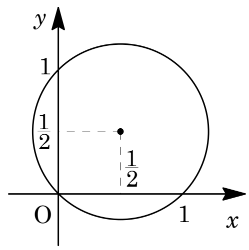
(3) x と y が①の等式を満たすとする。$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2$ を t を用いた式で表せ。また, F のとりうる値の最大値と最小値を求めよ。　[2011]

解答例

(1) 条件より, $x^2+y^2=x+y$ ……①を変形すると,

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

よって, 中心 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$, 半径 $\frac{1}{\sqrt{2}}$ の円を表し, 図示すると, 右図のようになる。



(2) ①の等式を満たす x と y に対して, $t=x+y$ ……②のとりうる値の範囲は, 円①と直線②が共有点をもつ条件として求められ,

$$\frac{\left|\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-t\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}\leqq\frac{1}{\sqrt{2}},\ \ |1-t|\leqq 1$$

よって, $0\leqq t\leqq 2$ となる。

(3) ①②より, $x^2+y^2=x+y=t$ から, $2xy=(x+y)^2-(x^2+y^2)=t^2-t$ となり,

$$F=x^3+y^3-x^2y-xy^2=(x+y)(x^2-xy+y^2)-xy(x+y)$$
$$=(x+y)(x^2-2xy+y^2)$$
$$=t(t-t^2+t)=-t^3+2t^2$$

すると, $\frac{dF}{dt}=-3t^2+4t=-t(3t-4)$

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	2
$\frac{dF}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
F	0	$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	0

これより, F の増減は右表のようになり, F の最大値は $\frac{32}{27}$, 最小値は 0 である。

コメント

条件づけられた最大・最小問題です。基本的な問題に誘導が付いています。

問　題

xy 平面における曲線 $C : y = x^2$ と直線 $l : y = ax$ （a は正の定数）について，次の問いに答えよ。

(1) l と平行な，C の接線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2) 原点 O と m の距離を a を用いて表せ。

(3) l と C の交点のうち O 以外のものを P とする。線分 OP を 1 辺とする四角形 OPQR が長方形となるように，m 上に 2 点 Q，R をとる。この長方形の面積が 2 となるときの a の値を求めよ。 [2007]

解答例

(1) $C : y = x^2$ ……①に対して，$y' = 2x$

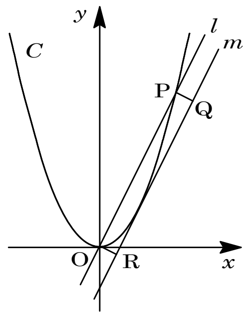
さて，接点を $(t,\ t^2)$ とするとき，接線の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2$$

この接線が，$l : y = ax$ ……②と平行なので，

$$2t = a,\quad t = \frac{a}{2}$$

よって，接線 $m : y = ax - \frac{a^2}{4}$



(2) 原点 O と $m : ax - y - \frac{a^2}{4} = 0$ との距離 d は，

$$d = \frac{\left|-\frac{a^2}{4}\right|}{\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}}$$

(3) C と l の交点は，①②より，$x^2 = ax$ から，$x = 0,\ a$

すると，$\mathrm{P}(a,\ a^2)$ より，$\mathrm{OP} = \sqrt{a^2 + a^4} = a\sqrt{1+a^2}$

さて，長方形 OPQR の面積は，

$$\mathrm{OP}\cdot d = a\sqrt{1+a^2}\cdot\frac{a^2}{4\sqrt{a^2+1}} = \frac{a^3}{4}$$

条件より，$\frac{a^3}{4} = 2$ なので，$a = 2$ である。

コメント

接線を題材とした基本を確認する問題です。

問　題

a を正の実数とする。次の問いに答えよ。

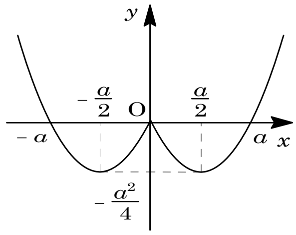
(1)　$y=\left|x^2-a|x|\right|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(a)=\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx$ を求めよ。

(3)　$F(a)$ の最小値を求めよ。　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[2005]

解答例

(1)　まず，$y=x^2-a|x|$ ……①に対して，



$$y=x^2-ax=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\quad(x\geqq 0)$$

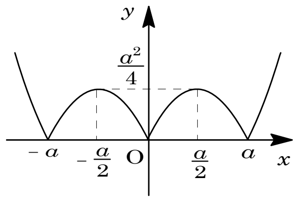
$$y=x^2+ax=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}\quad(x<0)$$

よって，①のグラフは右図のようになる。

すると，$y=\left|x^2-a|x|\right|$ ……②に対して，

$$y=x^2-a|x|\quad(x^2-a|x|\geqq 0)$$

$$y=-x^2+a|x|\quad(x^2-a|x|<0)$$



よって，②のグラフは，①のグラフの $y<0$ の部分を x 軸について折り返したものとなり，図示すると，右図のようになる。

(2)　②のグラフは y 軸対称なので，

$$F(a)=\int_{-1}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx=2\int_{0}^{1}\left|x^2-a|x|\right|dx=2\int_{0}^{1}\left|x^2-ax\right|dx$$

(i)　$0<a<1$ のとき

$$F(a)=2\int_{0}^{a}-(x^2-ax)\,dx+2\int_{a}^{1}(x^2-ax)\,dx$$

$$=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^a+2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_a^1$$

$$=-\frac{2}{3}a^3+a^3+\frac{2}{3}(1-a^3)-a(1-a^2)=\frac{2}{3}a^3-a+\frac{2}{3}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$$F(a)=2\int_{0}^{1}-(x^2-ax)\,dx=-2\left[\frac{x^3}{3}-\frac{a}{2}x^2\right]_0^1=-\frac{2}{3}+a$$

(3)　(2)より，$0<a<1$ のとき，

$$F'(a)=2a^2-1$$

すると，$F(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$F'(a)$		$-$	0	$+$	
$F(a)$	$\frac{2}{3}$	↘		↗	$\frac{1}{3}$

また，$a \geqq 1$のとき，$F(a) \geqq F(1) = \dfrac{1}{3}$なので，$F(a)$の最小値は，

$$F\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{2}{3} = \frac{1}{3}(2-\sqrt{2})$$

コメント

場合分けの練習問題です。

問　題

a を正の実数とする。関数 $f(x)=-x^2+ax$ について次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ を通る接線の方程式を $a,\ t$ を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{A}(-a,\ 4a^2-5a+2)$ から曲線 $y=f(x)$ へ接線が 2 本引けることを示せ。

(3)　その 2 本の接線のうち接点の x 座標が大きい方の接線を l，接点を $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ とする。このとき，$0<t<a$ を満たすための a の範囲を求めよ。

(4)　$a=1$ のとき，直線 $x=-1$，接線 l と曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$f(x)=-x^2+ax$ より，$f'(x)=-2x+a$

これより，点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線の方程式は，

$$y-(-t^2+at)=(-2t+a)(x-t),\quad y=(-2t+a)x+t^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①が点 $\mathrm{A}(-a,\ 4a^2-5a+2)$ を通るとき，

$$4a^2-5a+2=(-2t+a)(-a)+t^2,\quad t^2+2at-5a^2+5a-2=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の判別式を計算すると，

$$D/4=a^2-(-5a^2+5a-2)=6a^2-5a+2=6\left(a-\frac{5}{12}\right)^2+\frac{23}{24}>0$$

よって，②は異なる 2 つの実数解をもち，接点は 2 つ存在する。すなわち，点 A から曲線 $y=f(x)$ へ接線を 2 本引くことができる。

(3)　$g(t)=t^2+2at-5a^2+5a-2$ とおくと，$g(t)=0$ の大きい方の解が，接線 l の接点の x 座標である。放物線 $y=g(t)$ の軸が $t=-a<0$ であることに注意すると，この解が $0<t<a$ にある条件は，

$$g(0)=-5a^2+5a-2<0\ \cdots\cdots\cdots③,\quad g(a)=-2a^2+5a-2>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

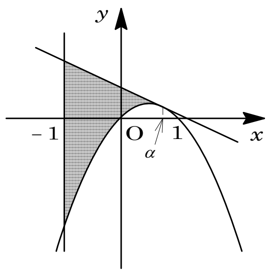
③は $5a^2-5a+2>0$ となり，$D=25-40<0$ から，つねに成立する。

④より，$2a^2-5a+2<0$，$(2a-1)(a-2)<0$ なので，$\frac{1}{2}<a<2$

したがって，求める条件は $\frac{1}{2}<a<2$ である。

(4)　$a=1$ のとき，②は $t^2+2t-2=0$ となり，大きい方の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となる。

ここで，$\alpha=-1+\sqrt{3}$ とおくと，接線 l は，①より $y=(-2\alpha+1)x+\alpha^2$ となるので，求める面積 S は，



$$S=\int_{-1}^{\alpha}\{(-2\alpha+1)x+\alpha^2-(-x^2+x)\}dx$$
$$=\int_{-1}^{\alpha}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx=\int_{-1}^{\alpha}(x-\alpha)^2dx$$
$$=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_{-1}^{\alpha}=-\frac{1}{3}(-1-\alpha)^3=\sqrt{3}$$

コメント

頻出のものです。細かく誘導がつけられています。

問　題

a は 1 より大きい定数とする。関数 $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ は $x=\alpha$ と $x=\beta$ $(\alpha<\beta)$ で極値をとるとする。2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾きが，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾きと等しいとき, a の値を求めよ。

(2) $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ とする。a が(1)で求めた値をとるとき，曲線 $y=f'(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 [2003]

解答例

(1) $f(x)=(x+a)(x+1)(x-a)=x^3+x^2-a^2x-a^2$ より，$f'(x)=3x^2+2x-a^2$

条件から，$f'(x)=0$ は 2 つの実数解 $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ をもつので，

$$\alpha+\beta=-\frac{2}{3},\ \alpha\beta=-\frac{a^2}{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで, 2 点 $(\alpha,\ f(\alpha))$，$(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ線分の傾きは,

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{(\beta^3+\beta^2-a^2\beta-a^2)-(\alpha^3+\alpha^2-a^2\alpha-a^2)}{\beta-\alpha}$$

$$=\frac{(\beta-\alpha)(\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2)-(\beta-\alpha)(\beta+\alpha)-a^2(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta-a^2\cdots\cdots\cdots②$$

また，点 $(-1,\ 0)$ における曲線 $y=f(x)$ の接線の傾き $f'(-1)=1-a^2$ は，条件より，②と等しいので,

$$(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+\alpha+\beta-a^2=1-a^2$$

①より，$\dfrac{4}{9}+\dfrac{1}{3}a^2-\dfrac{2}{3}=1$，$\dfrac{1}{3}a^2=\dfrac{11}{9}$，$a^2=\dfrac{11}{3}$

$a>1$ より，$a=\sqrt{\dfrac{11}{3}}=\dfrac{\sqrt{33}}{3}$

(2) $f'(x)=3(x-\alpha)(x-\beta)$ より，

$$S=-\int_\alpha^\beta f'(x)\,dx=-3\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}+\frac{4}{3}\cdot\frac{11}{3}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{2}\left(\frac{48}{9}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{32\sqrt{3}}{9}$$

コメント

微積分の基本問題です。複雑な計算も必要ありません。

問　題

a を正の定数として，関数 $f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　$f'(x)\geqq 0$ が区間 $0\leqq x\leqq 2$ で成り立つとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(2)のとき，区間 $0\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)|$ の最大値を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$f(x)=(x-1)\{4x^2-(6a-4)x+12a-11\}$ より,

$$f'(x)=4x^2-(6a-4)x+12a-11+(x-1)\{8x-(6a-4)\}$$
$$=12x^2-12ax+18a-15$$

(2)　区間 $0\leqq x\leqq 2$ で $f'(x)\geqq 0$ が成り立つ条件は, (1)より,

$$f'(x)=12\left(x-\frac{a}{2}\right)^2-3a^2+18a-15\ (a>0)$$

(i)　$0<\dfrac{a}{2}\leqq 2\ (0<a\leqq 4)$ のとき　$f'\left(\dfrac{a}{2}\right)=-3a^2+18a-15\geqq 0$ より,

$a^2-6a+5\leqq 0$,　$1\leqq a\leqq 5$

$0<a\leqq 4$ と合わせると，$1\leqq a\leqq 4$

(ii)　$\dfrac{a}{2}>2\ (a>4)$ のとき　$f'(2)=-6a+33\geqq 0$ より，$a\leqq\dfrac{11}{2}$

$a>4$ と合わせると，$4<a\leqq\dfrac{11}{2}$

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$1\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}$

(3)　(2)より，$1\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}$ のとき，区間 $0\leqq x\leqq 2$ で $f(x)$ は単調に増加する。

ここで，$f(0)=-12a+11<0$，$f(2)=13$ なので，区間 $0\leqq x\leqq 2$ における $|f(x)|$ の最大値は，$|f(0)|=-(-12a+11)=12a-11$ または $|f(2)|=13$ である。

(i)　$12a-11<13\ (1\leqq a<2)$ のとき　最大値は，$|f(2)|=13$

(ii)　$12a-11\geqq 13\ \left(2\leqq a\leqq\dfrac{11}{2}\right)$ のとき　最大値は，$|f(0)|=12a-11$

コメント

微分法についての基本問題です。(3)は $f(1)=0$ に注目すると，グラフを書くまでもありません。

問　題

a, b, c, d は実数として，x の整式 $f(x)$, $g(x)$ が以下の条件を満たしているとする。

$$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$$
$$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d$$
$$\int_a^x\{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2$$

このとき $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。 [1999]

解答例

条件より，$f(x)+g(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ………①

$f'(x)+g'(x)=bx^2+cx+d$ ………②

$\int_a^x\{f(t)-g(t)\}dt=x^3-ax^2+ax-2$ ………③

①より，$f'(x)+g'(x)=3ax^2+2bx+c$

②と比べて，$3a=b$, $2b=c$, $c=d$，すなわち $b=3a$, $c=d=6a$ ………④

④を①に代入して，$f(x)+g(x)=ax^3+3ax^2+6ax+6a$ ………⑤

また，③の両辺を微分して，$f(x)-g(x)=3x^2-2ax+a$ ………⑥

③の両辺に $x=a$ を代入して，$a^3-a^3+a^2-2=0$, $a=\pm\sqrt{2}$ ………⑦

⑤⑥より，$f(x)=\dfrac{a}{2}x^3+\dfrac{3a+3}{2}x^2+2ax+\dfrac{7}{2}a$

$g(x)=\dfrac{a}{2}x^3+\dfrac{3a-3}{2}x^2+4ax+\dfrac{5}{2}a$

⑦を代入し，複号同順として，

$$f(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x^3\pm\frac{3\sqrt{2}\pm3}{2}x^2\pm2\sqrt{2}x\pm\frac{7}{2}\sqrt{2}$$
$$g(x)=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}x^3\pm\frac{3\sqrt{2}\mp3}{2}x^2\pm4\sqrt{2}x\pm\frac{5}{2}\sqrt{2}$$

コメント

解の方針に迷うところはありません。ただ，⑦の値を先に⑤式と⑥式に代入して $f(x)$, $g(x)$ を求めようとすると，計算がゴチャゴチャしてしまいます。

問　題

$a>0$ とする。関数 $f(x)=|x^3-3a^2x|$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とするとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$M(a)$ を a を用いて表せ。

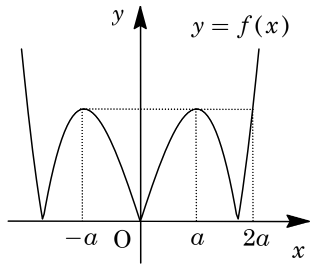
(2)　$M(a)$ を最小にする a の値を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$g(x)=x^3-3a^2x$ とすると，$f(x)=|g(x)|$

$$g'(x)=3x^2-3a^2=3(x+a)(x-a)$$

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$g'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	$\nearrow$	$2a^3$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$



$g(x)=2a^3$ の解は，$x^3-3a^2x-2a^3=0$ から，

$$(x+a)^2(x-2a)=0,\ x=-a,\ 2a$$

また，$f(-x)=f(x)$ より，$f(x)$ の $-1\leqq x\leqq 1$ における最大値は $0\leqq x\leqq 1$ における最大値と一致する。

(i)　$2a<1$ $\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$M(a)=f(1)=|g(1)|=g(1)=1-3a^2$$

(ii)　$2a\geqq 1$ かつ $a<1$ $\left(\frac{1}{2}\leqq a<1\right)$ のとき

$$M(a)=f(a)=|g(a)|=-g(a)=2a^3$$

(iii)　$a\geqq 1$ のとき

$$M(a)=f(1)=|g(1)|=-g(1)=3a^2-1$$

(2)　最大値 $M(a)$ は連続的に変化し，$0<a<\frac{1}{2}$ のときは単調減少，$a\geqq\frac{1}{2}$ のときは単調増加することより，$M(a)$ が最小となるのは $a=\frac{1}{2}$ のときである。

コメント

関数のグラフを書き，極値や区間の境界値を比較して最大値を求める問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

問　題

$s,\ t$ を $s<t$ を満たす実数とする。座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあるとする。以下の問いに答えよ。

(1) s と t の間の関係式を求めよ。

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とする。u と v の間の関係式を求めよ。

(3) s, t が変化するとき，v の最小値と，そのときの u, s, t の値を求めよ。　[2015]

解答例

(1) 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$，$\mathrm{B}(s,\ s^2)$，$\mathrm{C}(t,\ t^2)$ が一直線上にあることより，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s-1,\ s^2-2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(t-1,\ t^2-2)$ から，

$$(s-1)(t^2-2)-(t-1)(s^2-2)=0,\ \ st(t-s)-(t^2-s^2)+2(t-s)=0$$

ここで，$s<t$ より $t-s>0$ となり，$st-(t+s)+2=0$ ………①

(2) 線分 BC の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とすると，$u=\dfrac{s+t}{2}$，$v=\dfrac{s^2+t^2}{2}$ となり，

$$s+t=2u\ \text{………②},\ \ s^2+t^2=2v\ \text{………③}$$

②③より，$(2u)^2-2st=2v$ となり，$st=2u^2-v$ ………④

②④を①に代入すると，$2u^2-v-2u+2=0$，$v=2u^2-2u+2$ ………⑤

(3) ②④より，$s,\ t$ は x についての 2 次方程式 $x^2-2ux+(2u^2-v)=0$ ……⑥の異なる 2 つの実数解より，

$$D/4=u^2-(2u^2-v)>0,\ \ v>u^2\ \text{………⑦}$$

⑤⑦から，$2u^2-2u+2>u^2$，$u^2-2u+2>0$ となるが，この不等式の左辺は，$u^2-2u+2=(u-1)^2+1>0$ となり，つねに成立する。

よって，⑤より，$v=2\left(u-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2}$ となり，$u=\dfrac{1}{2}$ のとき v は最小値 $\dfrac{3}{2}$ をとる。

このとき，⑥から，s, t は $x^2-x-1=0$ の 2 つの解となり，$s<t$ より，

$$s=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \ t=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$$

コメント

誘導が丁寧についている問題です。なお，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通り，放物線 $y=x^2$ 上の異なる 2 点を結ぶ線分の中点 M の軌跡と考えると，⑦は明らかとなります。

問　題

$a,\ b,\ c$ は実数とし，$a<b$ とする。平面上の相異なる 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ が，辺 AB を斜辺とする直角三角形を作っているとする。次の問いに答えよ。

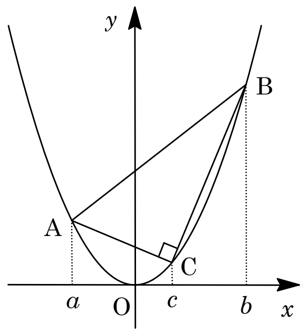
(1)　a を $b,\ c$ を用いて表せ。

(2)　$b-a\geqq 2$ が成り立つことを示せ。

(3)　斜辺 AB の長さの最小値と，そのときの A, B, C の座標をそれぞれ求めよ。

[2013]

解答例



(1)　$\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(a-c,\ a^2-c^2)=(a-c)(1,\ a+c)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(b-c,\ b^2-c^2)=(b-c)(1,\ b+c)$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ なので，$1+(a+c)(b+c)=0$

$$(a+c)(b+c)=-1\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$a=-c-\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots②$

(2)　②より，$b-a=b+c+\dfrac{1}{b+c}\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$b+c<0$ とすると，①より $a+c>0$ となり $b<-c<a$ であるが，これは $a<b$ に反するので，$b+c>0$ である。

すると，③より，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$b-a=b+c+\frac{1}{b+c}\geqq 2\sqrt{(b+c)\cdot\frac{1}{b+c}}=2$$

なお，等号は $b+c=1$ のときに成立する。

(3)　$\mathrm{AB}=\sqrt{(b-a)^2+(b^2-a^2)^2}=\sqrt{(b-a)^2\{1+(b+a)^2\}}=(b-a)\sqrt{1+(b+a)^2}$

ここで，(2)より $b-a\geqq 2$ であり，$(b+a)^2\geqq 0$ であるので，

$$\mathrm{AB}\geqq 2\sqrt{1+0}=2$$

等号が成立するのは，$b-a=2$ かつ $b+a=0$，すなわち $a=-1$，$b=1$ のときである。このとき，$b+c=1$ から $c=0$ となる。

よって，AB の最小値は 2 であり，このとき $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0)$ となる。

コメント

(3)では大雑把に評価して，細部を詰めています。この方法が，いつもうまくいくとは限りませんが。

問　題

座標平面上に 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(-1,\ 0)$ と直線 l があり，A と l の距離と B と l の距離の和が 1 であるという。以下の問いに答えよ。

(1) l は y 軸と平行でないことを示せ。

(2) l は線分 AB と交わるとき，l の傾きを求めよ。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，l と原点との距離を求めよ。　[2012]

解答例

(1) l が y 軸と平行であるとき，k を実数として，$l: x=k$ とおくと，A$(1,\ 0)$ と l の距離が $|k-1|$，B$(-1,\ 0)$ と l の距離が $|k+1|$ となる。条件より，

$$|k-1|+|k+1|=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

ところが，$|k-1|+|k+1|=|1-k|+|k+1| \geqq |(1-k)+(k+1)|=2$ であるので，①を満たす k は存在しない。よって，l は y 軸と平行でない。

(2) (1)より，$l: y=mx+n$，すなわち $mx-y+n=0$ とおく。

すると，l は線分 AB と交わることより，$(m+n)(-m+n) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，A と l の距離が $\dfrac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$，B と l の距離が $\dfrac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}$ となるので，

$$\frac{|m+n|}{\sqrt{m^2+1}}+\frac{|-m+n|}{\sqrt{m^2+1}}=1,\ |m+n|+|-m+n|=\sqrt{m^2+1}$$

$$(m+n)^2+(-m+n)^2+2|(m+n)(-m+n)|=m^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$m^2+2n^2-2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$3m^2=1$

よって，l の傾きは，$m=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) l が線分 AB と交わらないとき，$(m+n)(-m+n)>0 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$m^2+2n^2+2(m+n)(-m+n)=1$ となり，$-m^2+4n^2=1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

すると，l と原点との距離 d は，⑤より，

$$d=\frac{|n|}{\sqrt{m^2+1}}=\frac{|n|}{\sqrt{4n^2}}=\frac{|n|}{2|n|}=\frac{1}{2}$$

コメント

点と直線についての問題です。方針がうまく立つように誘導がつけられているおもしろい問題です。なお，②と④は，正領域・負領域の考え方を利用しています。

問　題

実数 t に対して, xy 平面上の直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1) 点 P を通る直線 l_t はただ 1 つであるとする。このような点 P の軌跡の方程式を求めよ。

(2) t が $|t| \geqq 1$ の範囲を動くとき, 直線 l_t が通る点 $(x,\ y)$ の全体を図示せよ。[2006]

解答例

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ を通る直線 $l_t : y = 2tx - t^2$ ……①がただ 1 つである条件は, ①を t の方程式としてみたとき, ただ 1 つの解をもつことに対応する。

①より, $t^2 - 2xt + y = 0$ となり,

$$D/4 = x^2 - y = 0$$

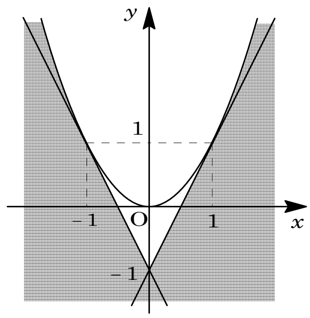
よって, 点 P の軌跡の方程式は, $y = x^2$ ……②である。

(2) ①と②の共有点は, $2tx - t^2 = x^2$ より,

$$(x - t)^2 = 0,\ x = t$$

これより, 直線①は, 放物線②の点 $(t,\ t^2)$ における接線である。

そこで, t が $|t| \geqq 1$ すなわち $t \leqq -1$, $1 \leqq t$ の範囲を動くとき, ①において, $l_1 : y = 2x - 1$, $l_{-1} : y = -2x - 1$ であることを利用すると, 直線 l_t の通過領域は右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



コメント

直線①は, 放物線②の点 $(t,\ t^2)$ における接線です。このためのヒントが(1)の役割でしょうが, 気付きにくい部分です。もっとも, この点を無視しても, 直線②の通過領域は, 有名な実数解条件として求めることができます。

問　題

実数 t に対して，xy 平面上の直線 $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ は，t の値によらずある円 C に接しているものとする。次の問いに答えよ。

(1) 円 C の方程式を求めよ。また，接点の座標を求めよ。

(2) t が $t\geqq 1$ の範囲を動くとき，直線の通過する範囲を図示せよ。　[2002]

解答例

(1) $(1-t^2)x-2ty=1+t^2$ ……①より，$(1-t^2)x-2ty-1-t^2=0$ ……①′

円 C の中心を $(a,\ b)$，半径を r とすると，①′が接することより，

$$\frac{|(1-t^2)a-2tb-1-t^2|}{\sqrt{(1-t^2)^2+4t^2}}=r,\quad \frac{|(-a-1)t^2-2bt+a-1|}{\sqrt{1+2t^2+t^4}}=r$$

$$(-a-1)t^2-2bt+a-1=\pm r(1+t^2)\ \cdots\cdots\text{②}$$

②がどんな t に対しても成立する条件は，

$$-a-1=\pm r,\ -2b=0,\ a-1=\pm r$$

これより，$-a-1=a-1$ から $a=0$，また $b=0$ となり，$r>0$ から $r=1$ である。

よって，円 C の方程式は，$x^2+y^2=1$ である。

すると，①を $\dfrac{1-t^2}{1+t^2}x+\dfrac{-2t}{1+t^2}y=1$ と変形すると，接点の座標は $\left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{-2t}{1+t^2}\right)$ となる。

(2) 接点を $(x,\ y)$ とおくと，(1)より $x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ ……③，$y=\dfrac{-2t}{1+t^2}$ ……④

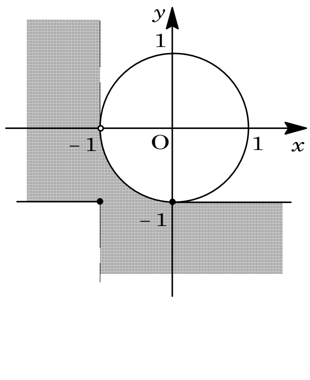
③より，$x=-1+\dfrac{2}{1+t^2}$ となり，$t\geqq 1$ で $0<\dfrac{2}{1+t^2}\leqq 1$ より，$-1<x\leqq 0$ となる。

④より，$y=\dfrac{-2}{\frac{1}{t}+t}$ となり，$t\geqq 1$ で $t+\dfrac{1}{t}\geqq 2\sqrt{t\cdot\dfrac{1}{t}}=2$

（等号は $t=1$ のとき）より，$-1\leqq y<0$ である。

よって，接点は円 C 上の $-1<x\leqq 0$，$-1\leqq y<0$ の部分にある。

以上より，直線①の通過領域は右図の網点部となる。なお，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



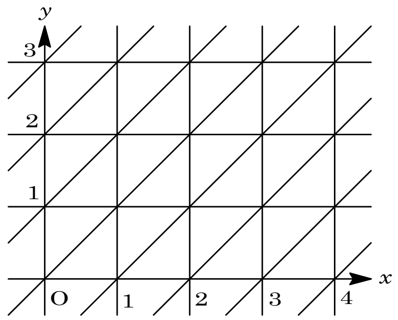
コメント

直線の通過領域を求める有名問題です。(1)の誘導があるために，(2)はずいぶん解きやすくなっています。

問　題

xy 平面全体が右図のような直線の配列で埋められているとする。

このとき，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ について，A から P に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値を m と n を用いて表せ。ただし，m, n は負でない整数であるとする。



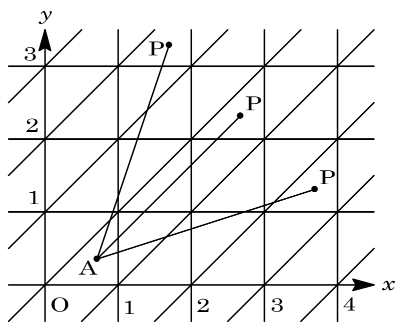
[2000]

解答例

点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$ から点 $\mathrm{P}\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)$ に至るのに横切らなければならない直線の本数の最小値は，線分 AP が横切る直線の本数に等しい。

まず，線分 AP は y 軸に平行な直線を m 本横切り，x 軸に平行な直線を n 本横切る。

また，$y=x$ に平行な直線については，m と n の大小関係によって横切る直線の本数が決まる。



そこで，$f(x,\ y)=y-x-k$ とし，条件を満たす整数 k の個数を求める。

(i)　$m=n$ のとき

線分 AP は，$y=x$ に平行な直線を横切らないので，求める直線の本数は $m+n$ となる。

(ii)　$m<n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)>0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)<0$ となるので，

$$n+\frac{1}{3}-m-\frac{2}{3}-k>0,\ \ \frac{1}{3}-\frac{2}{3}-k<0$$

よって $-\dfrac{1}{3}<k<n-m-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-m-1$ なので，$n-m$ 個存在する。

すなわち，線分 AP は，$n-m$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切ることより，求める直線の本数は $m+n+n-m=2n$ となる。

(iii) $m>n$ のとき

$f\left(m+\dfrac{2}{3},\ n+\dfrac{1}{3}\right)<0$ かつ $f\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)>0$ から，$n-m-\dfrac{1}{3}<k<-\dfrac{1}{3}$ となり，これを満たす整数 k は $k=n-m,\ n-m+1,\ \cdots,\ -1$ なので，$m-n$ 個存在する。

すなわち，線分 AP は，$m-n$ 本の $y=x$ に平行な直線を横切るので，求める直線の本数は $m+n+m-n=2m$ となる。

コメント

どこまで論理をかけばよいのか迷ってしまう問題です。時間があれば丁寧に，なければ直観的に，というのが妥当な線でしょう。

問　題

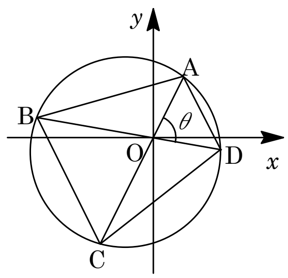
xy 平面上に相異なる 4 点 A, B, C, D があり，線分 AC と BD は原点 O で交わっている。点 A の座標は(1, 2)で，線分 OA と OD の長さは等しく，四角形 ABCD は円に内接している。$\angle\mathrm{AOD}=\theta$ とおき，点 C の x 座標を a，四角形 ABCD の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 OC の長さを a を用いた式で表せ。また，線分 OB と OC の長さは等しいことを示せ。

(2) S を a と θ を用いた式で表せ。

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ とし，$20\leqq S\leqq 40$ とするとき，a のとりうる値の最大値を求めよ。　[2011]

解答例



(1) 3 点 A, O, C は同一直線上にあり，点 A(1, 2)で，点 C の x 座標が a から，C(a, $2a$) とおくことができる。ただし，$a<0$ である。これより，

$$\mathrm{OC}=\sqrt{a^2+(2a)^2}=\sqrt{5}|a|=-\sqrt{5}a$$

また，方べきの定理から，$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OC}=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OD}$

すると，条件より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ なので，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$

(2) (1)より，$\mathrm{AC}=\mathrm{BD}=\sqrt{5}-\sqrt{5}a=\sqrt{5}(1-a)$ より，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\sqrt{5}(1-a)\right\}^2\sin\theta=\frac{5}{2}(1-a)^2\sin\theta$$

(3) $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$S=\dfrac{5}{2}(1-a)^2\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{4}(1-a)^2$

条件より，$20\leqq S\leqq 40$ なので，$20\leqq\dfrac{5}{4}(1-a)^2\leqq 40$ となり，

$$16\leqq(1-a)^2\leqq 32,\quad 4\leqq 1-a\leqq 4\sqrt{2},\quad 1-4\sqrt{2}\leqq a\leqq -3$$

したがって，a のとりうる値の最大値は -3 である。

コメント

対角線の長さとその交角をもとに，四角形の面積を導く有名な問題です。注意しなくてはいけないのは，a が負ということです。

問　題

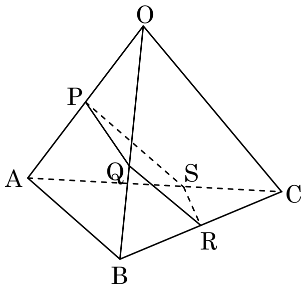
四面体OABCにおいて, Pを辺OAの中点, Qを辺OBを$2:1$に内分する点, Rを辺BCの中点とする。P, Q, Rを通る平面と辺ACの交点をSとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$をそれぞれ$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を用いて表せ。

(2)　比$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|$を求めよ。

(3)　四面体OABCを1辺の長さが1の正四面体とするとき, $|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|$を求めよ。[2016]

解答例



(1)　PはOAの中点, QはOBを$2:1$に内分する点, RはBCの中点であり, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}$$

(2)　P, Q, Rを通る平面と辺ACの交点Sに対し, $|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=k:1-k$とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=(1-k)\vec{a}+k\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また, s, tを実数として, (1)の結果より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+s\overrightarrow{\mathrm{PQ}}+t\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{2}\vec{a}+s\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}\Big)+t\Big(-\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}\vec{c}\Big)$$

$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\Big)\vec{a}+\Big(\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\Big)\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$は1次独立なので,

$$1-k=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots③,\ \ 0=\frac{2}{3}s+\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots④,\ \ k=\frac{t}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

③⑤より, $1-\frac{t}{2}=\frac{1}{2}-\frac{s}{2}-\frac{t}{2}$となり, $s=-1$

④に代入すると, $-\frac{2}{3}+\frac{t}{2}=0$から$t=\frac{4}{3}$となり, ⑤から$k=\frac{2}{3}$なので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AS}}|:|\overrightarrow{\mathrm{SC}}|=\frac{2}{3}:\frac{1}{3}=2:1$$

(3)　1辺の長さが1の正四面体OABCに対し,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて, $\overrightarrow{\mathrm{QS}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{c}-\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{1}{3}(\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c})$より, $|\overrightarrow{\mathrm{QS}}|=\frac{1}{3}|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|$となり,

$$|\vec{a}-2\vec{b}+2\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+4|\vec{b}|^2+4|\vec{c}|^2-4\vec{a}\cdot\vec{b}-8\vec{b}\cdot\vec{c}+4\vec{c}\cdot\vec{a}$$

$$=1+4+4-4\cdot\frac{1}{2}-8\cdot\frac{1}{2}+4\cdot\frac{1}{2}=5$$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{QS}}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。

コメント

空間ベクトルの四面体への応用について，参考書の例題の掲載されるような典型題です。

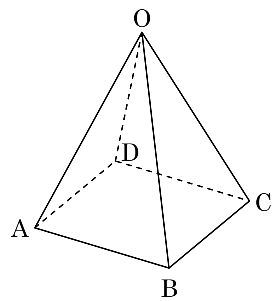
問　題

空間において，原点 O を通らない平面α上に 1 辺の長さ 1 の正方形があり，その頂点を順に A, B, C, D とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を用いて表せ。

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$のとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$が，平面$\alpha$と垂直であることを示せ。 [2014]

解答例



(1) 正方形 ABCD に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$とおくと，①より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$

すると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2)=0\cdots\cdots\cdots②$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})$$
$$=-2(|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})=0$となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0\cdots\cdots\cdots⑤$

よって，②⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は平面$\alpha$上の平行でない 2 つのベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$と垂直になるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$は平面$\alpha$と垂直である。

コメント

(2)を図形的に考えると，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$から点 O は線分 AB の垂直二等分面上，$\mathrm{OB}=\mathrm{OC}$から線分 BC の垂直二等分面上，すると点 O はこの 2 つの平面の交線上の点となります。ここで，正方形 ABCD の中心 H とおくと$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$は平面$\alpha$に垂直になり，また$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4\overrightarrow{\mathrm{OH}}$であることから題意成立です。ただ，どちらにせよ，不思議なことは「1 辺の長さ 1 の正方形」という条件をストレートに利用していないことです。

問　題

空間において，2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線を l とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 P を l 上に，点 Q を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ がベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行になるときの P と Q の座標をそれぞれ求めよ。

(2)　点 R を l 上に，点 S を z 軸上にとる。$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ およびベクトル $(0,\ 0,\ 1)$ の両方に垂直になるときの R と S の座標をそれぞれ求めよ。

(3)　R，S を(2)で求めた点とする。点 T を l 上に，点 U を z 軸上にとる。また，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ は零ベクトルではなく，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないとする。$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ が $\vec{v}$ と平行になるときの T と U の座標をそれぞれ求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ -1,\ 0)$ より，k を実数として，直線 l は，

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 1,\ 0)+k(-1,\ -1,\ 0)=(-k,\ 1-k,\ 0)$$

さて，l 上に点 P，z 軸上に点 Q とると，p，q を実数として，$\mathrm{P}(-p,\ 1-p,\ 0)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ q)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(p,\ p-1,\ q)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ はベクトル $(3,\ 1,\ -1)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=l(3,\ 1,\ -1)$　(l は実数)から，

$$p=3l,\ p-1=l,\ q=-l$$

すると，$l=\dfrac{1}{2}$，$p=\dfrac{3}{2}$，$q=-\dfrac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}\left(0,\ 0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

(2)　l 上に点 R，z 軸上に点 S とると，r，s を実数として，$\mathrm{R}(-r,\ 1-r,\ 0)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ s)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=(r,\ r-1,\ s)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\vec{z}=(0,\ 0,\ 1)$ に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{z}=0$ から，

$$-r-r+1=0,\ s=0$$

すると，$r=\dfrac{1}{2}$，$s=0$ から，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{S}(0,\ 0,\ 0)$ となる。

(3)　l 上に点 T，z 軸上に点 U とると，t，u を実数として，$\mathrm{T}(-t,\ 1-t,\ 0)$，$\mathrm{U}(0,\ 0,\ u)$ と表せるので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=(t,\ t-1,\ u)$ となる。

ここで，$\vec{v}=(a,\ b,\ c)\neq\vec{0}$ は $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ に垂直ではないので，$\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}\neq 0$ から，

$$\frac{1}{2}a-\frac{1}{2}b\neq 0,\ a-b\neq 0$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}$ は $\vec{v}=(a,\ b,\ c)$ と平行なので，$\overrightarrow{\mathrm{TU}}=m(a,\ b,\ c)$　(m は実数)から，

$$t=ma,\ t-1=mb,\ u=mc$$

すると，$m(a-b)=1$ より，$m=\dfrac{1}{a-b}$ となり，$t=\dfrac{a}{a-b}$，$u=\dfrac{c}{a-b}$ から，

$$\mathrm{T}\left(-\frac{a}{a-b},\ -\frac{b}{a-b},\ 0\right),\ \mathrm{U}\left(0,\ 0,\ \frac{c}{a-b}\right)$$

コメント

同じような問題が 3 題も続きます。上の解答例は，意味を考えずに，ただ計算を行ったにすぎません。

問　題

空間内に 4 点 O, A, B, C があり，

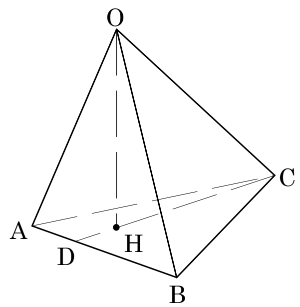
$$\mathrm{OA}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{OC}=4,\ \angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=\frac{\pi}{3}$$

であるとする。3 点 A, B, C を通る平面に垂線 OH を下ろす。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すとき，r, s, t を求めよ。

(2) 直線 CH と直線 AB の交点を D とするとき，長さの比 CH : HD，AD : DB をそれぞれ求めよ。　[2010]

解答例



(1) 条件より，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=|\vec{c}|=4$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=3\cdot4\cos\frac{\pi}{3}=6,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot4\cos\frac{\pi}{3}=8$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ とするとき，H は平面 ABC 上にあるので，$r+s+t=1$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ より，$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$

$$r(3^2-6)+s(6-4^2)+t(6-8)=0$$

$$3r-10s-2t=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=0$ より，$(r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c})\cdot(\vec{a}-\vec{c})=0$

$$r(3^2-6)+s(6-8)+t(6-4^2)=0,\ 3r-2s-10t=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①②より $13s+5t=3$，②③より $s=t$ となるので，$s=t=\dfrac{1}{6}$

①から，$r=1-\dfrac{1}{6}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{2}{3}$

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{2}{3}\vec{a}+\dfrac{1}{6}\vec{b}+\dfrac{1}{6}\vec{c}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{6}\vec{c}-\vec{c}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}-\frac{5}{6}\vec{c}=\frac{2}{3}(\vec{a}-\vec{c})+\frac{1}{6}(\vec{b}-\vec{c})$$

$$=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{6}=\frac{5}{6}\cdot\frac{4\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{5}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，直線 CH と直線 AB の交点が D より，④から，

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{4\overrightarrow{\mathrm{CA}}+\overrightarrow{\mathrm{CB}}}{5},\ \overrightarrow{\mathrm{CH}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$$

よって，AD : DB = 1 : 4，CH : HD = 5 : 1 である。

コメント

空間ベクトルの四面体への適用という頻出の問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1) xy 平面において，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$とする。このとき，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の面積を求めよ。

(2) xyz 空間において，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}},\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$とする。このとき，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\leqq 1$$

を満たす点 P 全体のなす図形の体積を求めよ。　[2009]

解答例

(1) 条件より，$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2\leqq 1$

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}})^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2\leqq 1\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1$から，$(*)$より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq 1$

よって，点 P は点 O を中心とする半径 1 の円の内部または周上にあり，点 P 全体のなす図形の面積 S は，

$$S=\pi\cdot 1^2=\pi$$

(2) (1)と同様にすると$(*)$が成り立ち，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{3}=1$から，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2\leqq 1$

よって，点 P は点 O を中心とする半径 1 の球の内部または周上にあり，点 P 全体のなす図形の面積 V は，

$$V=\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{4}{3}\pi$$

コメント

まず，正射影ベクトルを横目に見ながら，(1)を成分計算して結論を導き，(2)へと進みました。しかし，この後，待ち構える計算量に押されてしまい，方向転換をして，上の解となったわけです。

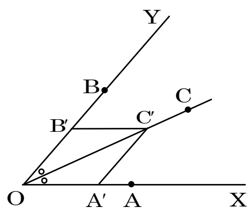
問　題

平面上に原点 O から出る，相異なる 2 本の半直線 OX, OY をとり，$\angle\mathrm{XOY} < 180^\circ$ とする。半直線 OX 上に O と異なる点 A を，半直線 OY 上に O と異なる点 B とり，$\vec{a} = \overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　点 C が $\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にあるとき，ベクトル $\vec{c} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はある実数 t を用いて $\vec{c} = t\left(\dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|} + \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}\right)$ と表されることを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線と $\angle\mathrm{XAB}$ の二等分線の交点を P とおく。$\mathrm{OA} = 2$，$\mathrm{OB} = 3$，$\mathrm{AB} = 4$ のとき，$\vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2006]

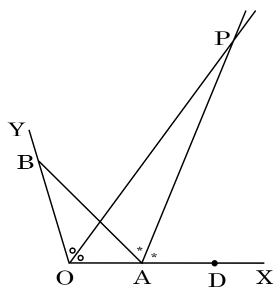
解答例



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} = \dfrac{\vec{a}}{|\vec{a}|}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \dfrac{\vec{b}}{|\vec{b}|}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ は，それぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ と同じ向きの単位ベクトルである。

これから，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}} = \overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ とすると，線分 OC′ は OA′，OB′ を隣り合う 2 辺とするひし形の対角線となる。

よって，t を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\overrightarrow{\mathrm{OC'}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OA'}} + \overrightarrow{\mathrm{OB'}})$ である点 C は，$\angle\mathrm{XOY}$ の二等分線上にある。



(2)　$|\vec{a}| = 2$，$|\vec{b}| = 3$ なので，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b}}{3}\right) \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，OD の中点を A として，点 D を定義すると，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}| = 2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 4$ から，実数 s を用いて，(1)より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\left(\frac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2} + \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{4}\right) = \vec{a} + s\left(\frac{\vec{a}}{2} + \frac{\vec{b} - \vec{a}}{4}\right)$$

$$= \left(1 + \frac{s}{4}\right)\vec{a} + \frac{s}{4}\vec{b} \cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$ は 1 次独立なので，①②より，$\dfrac{t}{2} = 1 + \dfrac{s}{4} \cdots\cdots③$，$\dfrac{t}{3} = \dfrac{s}{4} \cdots\cdots④$

③④より，$\dfrac{t}{2} = 1 + \dfrac{t}{3}$，$t = 6$

よって，①から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 6\left(\dfrac{\vec{a}}{2} + \dfrac{\vec{b}}{3}\right) = 3\vec{a} + 2\vec{b}$

コメント

角の二等分線をひし形の対角線として表現する有名問題です。なお，(2)の点 P は，三角形 OAB の傍心の 1 つです。

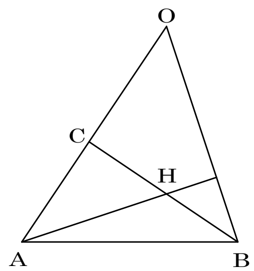
問　題

三角形 OAB において，辺 OA，辺 OB の長さをそれぞれ a，b とする。また，角 AOB は直角でないとする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を k とおく。次の問いに答えよ。

(1) 直線 OA 上に点 C を，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を a, k, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2) $a=\sqrt{2}$，$b=1$ とする。直線 BC 上に点 H を，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と垂直になるようにとる。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，u と v をそれぞれ k で表せ。　[2005]

解答例



(1) 条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=b$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k$

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ から，

$$(t\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0,\quad a^2t-k=0$$

よって，$t=\dfrac{k}{a^2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{k}{a^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

(2) $a=\sqrt{2}$ なので，(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

H は BC 上にあるので，p を定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=p\cdot\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots①$$

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{2}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ なので，

$$\left\{p\cdot\frac{k}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-p)\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right\}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0,\quad \frac{p}{2}k^2+(1-p)-k=0$$

まとめると，$(k^2-2)p=2k-2$

ここで，$k=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|\cos\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{2}\cos\angle\mathrm{AOB}$ から，$k\neq\pm\sqrt{2}$ となり，

$$p=\frac{2k-2}{k^2-2}\cdots\cdots\cdots②$$

一方，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdots\cdots\cdots③$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は 1 次独立なので，①②③から，

$$u=p\cdot\frac{k}{2}=\frac{k(k-1)}{k^2-2},\quad v=1-p=\frac{k(k-2)}{k^2-2}$$

コメント

平面ベクトルの図形への応用についての基本問題です。

問　題

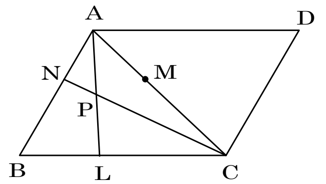
平行四辺形 ABCD において，対角線 AC を $2:3$ に内分する点を M，辺 AB を $2:3$ に内分する点を N，辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を L とし，AL と CN の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{c}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$，t を用いて表せ。

(2) 3 点 P, M, D が一直線上にあるとき，t の値を求めよ。　[2004]

解答例

(1) P は CN と AL の交点なので，k, l を実数として，



$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=k\cdot\frac{3}{5}\vec{a}+(1-k)\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(1-l)\vec{a}+lt\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，①②より，

$$\frac{3}{5}k=1-l\ \cdots\cdots\cdots③，\ 1-k=lt\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $l=1-\dfrac{3}{5}k$，④に代入して，$1-k=t\left(1-\dfrac{3}{5}k\right)$

$$(3t-5)k=5(t-1)，\ k=\frac{5(t-1)}{3t-5}$$

①より，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{3(t-1)}{3t-5}\vec{a}-\dfrac{2t}{3t-5}\vec{c}$

(2) まず，$\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{3}{5}\vec{a}+\dfrac{2}{5}\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{BD}}=\vec{a}+\vec{c}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{MD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{3}{5}\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

$$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\overrightarrow{\mathrm{BD}}-\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\frac{-2}{3t-5}\vec{a}+\frac{5t-5}{3t-5}\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

3 点 P, M, D が一直線上にある条件は，m を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{PD}}=m\overrightarrow{\mathrm{MD}}$ より，

$$\frac{-2}{3t-5}\vec{a}+\frac{5t-5}{3t-5}\vec{c}=\frac{2}{5}m\vec{a}+\frac{3}{5}m\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，$\dfrac{-2}{3t-5}=\dfrac{2}{5}m$，$\dfrac{5t-5}{3t-5}=\dfrac{3}{5}m$

よって，$-6=2(5t-5)$ から，$t=\dfrac{2}{5}$

コメント

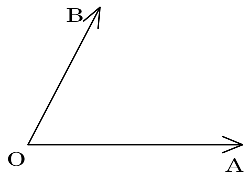
基本的な頻出問題です。(1)はメネラウスの定理を用いても OK です。

問　題

3 点 O, A, B は，一直線上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OA}} + 3\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$ とおく。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P を $\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$（$t$ は実数）を満たす点とする。このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t で表せ。

(2)　点 Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 2s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$（$s$ は実数）を満たす点とする。P と Q の中点を M とする。t，s が $0 \leqq t \leqq 1$，$0 \leqq s \leqq 1$ を満たしながら変化するとき，点 M の存在する範囲を図示せよ。



[2001]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BP}} = t\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}} = t(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} + t(\overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}) = \vec{b} + t(2\vec{a} + 3\vec{b} - \vec{b}) = \vec{b} + 2t(\vec{a} + \vec{b})$$

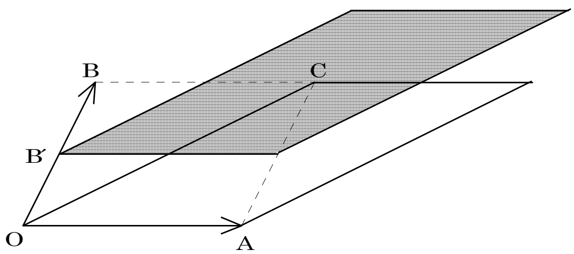
(2)　PQ の中点が M より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}) = \frac{1}{2}\{\vec{b} + 2t(\vec{a} + \vec{b}) + 2s\vec{a}\} = \frac{1}{2}\vec{b} + t(\vec{a} + \vec{b}) + s\vec{a}$$

ここで，$\frac{1}{2}\vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$\vec{a} + \vec{b} = \overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB'}} + t\overrightarrow{\mathrm{OC}} + s\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

すると, $0 \leqq t \leqq 1$, $0 \leqq s \leqq 1$ より，点 M は OA, OC を隣り合う 2 辺とする平行四辺形の内部または辺上を $\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$ の方向に平行移動した領域に存在する。図示すると右図の網点部となる。



コメント

神戸大頻出のベクトルと領域の融合問題です。本年度は，基本中の基本というレベルです。

問　題

三角形 ABC において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\vec{b}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　実数 s，t が $0\leqq s+t\leqq 1$，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ の範囲を動くとき，次の各条件を満たす点 P の存在する範囲をそれぞれ図示せよ。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$

(b)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$

(2)　(1)の各場合に，点 P の存在する範囲の面積は三角形 ABC の面積の何倍か。

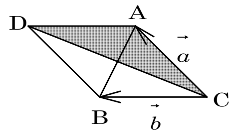
[2000]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\vec{a}+t(\vec{a}+\vec{b})$……(a)に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{a}+\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CA}}+t\overrightarrow{\mathrm{CD}}\quad(0\leqq s+t\leqq 1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$$

よって，点 P は△ADC の内部または周上に存在する。



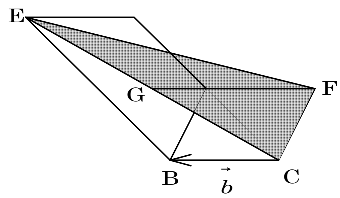
次に，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=(2s+t)\vec{a}+(s-t)\vec{b}$……(b)に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s(2\vec{a}+\vec{b})+t(\vec{a}-\vec{b})$$

$\overrightarrow{\mathrm{CE}}=2\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{CF}}=\vec{a}-\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=s\overrightarrow{\mathrm{CE}}+t\overrightarrow{\mathrm{CF}}\quad(0\leqq s+t\leqq 1,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$$

よって，点 P は△CEF の内部または周上に存在する。



(2)　(a)の場合は，△ADC = △ABC より，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 1 倍となる。

(b)の場合は，$\mathrm{GF}=\dfrac{3}{2}\mathrm{AF}=\dfrac{3}{2}\mathrm{BC}$，$\mathrm{EB}=2\mathrm{AC}$ より，

$$\triangle\mathrm{EFC}=\left(\frac{3}{2}\times 2\right)\triangle\mathrm{ACF}=3\triangle\mathrm{ABC}$$

よって，点 P の存在する範囲の面積は△ABC の 3 倍となる。

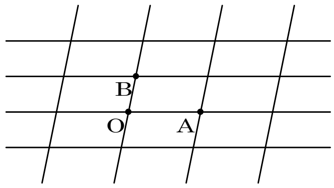
コメント

一般的に難しめの問題が多いベクトルと領域の融合題ですが，本問は基本の確認が主となっています。

問　題

合同な平行四辺形を平面にしきつめて，図のように 2 組の平行線からなる格子を作り，その各交点を格子点と呼ぶ。

図のような 3 つの格子点 O, A, B について$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$はすべて整数であるとする。このとき，どの 2 つの格子点 P, Q に対しても$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$は整数となることを示せ。　[1999]



解答例

まず，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$………①

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2$はすべて整数なので，①より$2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$は整数となる。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$は 1 次独立であり，2 点 P, Q は格子点なので，s, t, u, v を整数として，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$は次のように表せる。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=u\overrightarrow{\mathrm{OA}}+v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=|(u-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

$$=(u-s)^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2(u-s)(v-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(v-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の右辺の各項はすべて整数なので，任意の格子点 P, Q に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$は整数となる。

コメント

不気味なくらい簡単に証明ができてしまいます。何か「ひとひねり」あるのではないかと勘ぐってしまいます。

問　題

座標空間内の 8 点 O(0, 0, 0), A(2, 0, 0), B(2, 2, 0), C(0, 2, 0), P(0, 0, 1), Q(2, 0, 1), R(2, 2, 1), S(0, 2, 1) を頂点とする直方体を考える。次の各問いに答えよ。

(1) $D=(x,\ y,\ 1)$ を面 PQRS 上の点とするときベクトル $\overrightarrow{OD}$ を $x,\ y$ およびベクトル $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OC}$, $\overrightarrow{OP}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OD}$ がベクトル $\overrightarrow{CQ}$ と直交するための条件を $x,\ y$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{CQ}$ である D の中で $|\overrightarrow{OD}|$ が最小となるような D を与える $x,\ y$ の値を求めよ。　[1998]

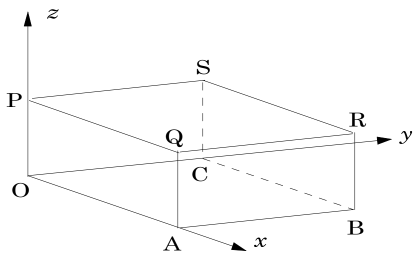
解答例

(1) $\overrightarrow{OD}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}$　$(0\leqq s\leqq 1,\ 0\leqq t\leqq 1)$ とおく。

$$(x,\ y,\ 1)=s(2,\ 0,\ 0)+t(0,\ 2,\ 0)+(0,\ 0,\ 1)$$

$$x=2s,\ \ y=2t\ \cdots\cdots\cdots①$$

よって，$\overrightarrow{OD}=\dfrac{x}{2}\overrightarrow{OA}+\dfrac{y}{2}\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OP}$



(2) $\overrightarrow{CQ}=(2,\ 0,\ 1)-(0,\ 2,\ 0)=(2,\ -2,\ 1)$

$\overrightarrow{OD}\perp\overrightarrow{CQ}$ より，$\overrightarrow{OD}\cdot\overrightarrow{CQ}=0$

よって，$2x-2y+1=0$

(3) (2)より，$y=x+\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$

$$|\overrightarrow{OD}|^2=x^2+y^2+1=x^2+\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+1=2x^2+x+\frac{5}{4}=2\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{8}$$

ここで，$0\leqq s\leqq 1$, $0\leqq t\leqq 1$ で①より，$0\leqq x\leqq 2$, $0\leqq y\leqq 2\ \cdots\cdots\cdots③$

すると，$x=0$ のとき $|\overrightarrow{OD}|^2$ は最小となるが，このとき②から $y=\dfrac{1}{2}$ となり，これは③をみたす。よって，$(x,\ y)=\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とき $|\overrightarrow{OD}|$ は最小値をとる。

コメント

本問の(2)の設問「ベクトル $\overrightarrow{OD}$ がベクトル $\overrightarrow{CQ}$ と直交する」というのは，高校数学の立場に翻訳すると「ベクトル $\overrightarrow{OD}$ がベクトル $\overrightarrow{CQ}$ と垂直である」ということでしょう。

問　題

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$が$a_1=5$，$b_1=7$を満たし，さらにすべての実数 x とすべての自然数nに対して

$$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt$$

を満たすとする。以下の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$c_n=3^{n-1}$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$c_n=n$のとき，数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　すべての実数xに対して，$x(a_{n+1}x+b_{n+1})=\displaystyle\int_{c_n}^{x+c_n}(a_nt+b_n)dt$より，

$$a_{n+1}x^2+b_{n+1}x=\left[\frac{a_n}{2}t^2+b_nt\right]_{c_n}^{x+c_n}=\frac{a_n}{2}(x^2+2c_nx)+b_nx$$
$$=\frac{a_n}{2}x^2+(a_nc_n+b_n)x$$

よって，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$……①，$b_{n+1}=a_nc_n+b_n$……②

すると，①より，$a_1=5$なので，$a_n=5\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$………③

(2)　$c_n=3^{n-1}$のとき，②③より，$b_{n+1}=5\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}+b_n$となり，$n\geqq2$で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5\left(\frac{3}{2}\right)^{k-1}=7+5\cdot\frac{\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-1}{\frac{3}{2}-1}=10\left(\frac{3}{2}\right)^{n-1}-3$$

なお，この式は$n=1$のときも成立する。

(3)　$c_n=n$のとき，②③より，$b_{n+1}=5n\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}+b_n$となり，$n\geqq2$で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}5k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}=7+5\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$$

ここで，$S=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}k\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1}$とおくと，

$$S-\frac{1}{2}S=1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$
$$=\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{1-\frac{1}{2}}-(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=2-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$S=4-2(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}=4-(n+1)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}$ となり，

$$b_n=7+5\left\{4-(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=27-5(n+1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

コメント

いかめしい設定ですが，内容は漸化式を解くことだけです。また，複雑な式変形を要求されることもなく，ミスに要注意というレベルです。

問　題

a, b, c を 1 以上 7 以下の自然数とする。次の条件(＊)を考える。

(＊)　3 辺の長さが a, b, c である三角形と，3 辺の長さが $\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{b}$，$\dfrac{1}{c}$ である三角形が両方とも存在する。

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(2)　$a>b>c$ であり，かつ条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。

(3)　条件(＊)を満たす a, b, c の組の個数を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　条件より，a, b, c は 1 以上 7 以下の自然数である。

さて，$a=b>c$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり，$a+b>c$，$b+c>a$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は，すべて満たされている。

すると，(＊)を満たす条件は，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ であり，$a=b>c$ から $\dfrac{2}{a}>\dfrac{1}{c}$ となる。

これより，$(a,\ c)$ の条件は，$a>c$ かつ $a<2c$ より，$c<a<2c$ となり，

$$(a,\ c)=(3,\ 2),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (6,\ 4),\ (7,\ 4),\ (6,\ 5),\ (7,\ 5),\ (7,\ 6)$$

したがって，(＊)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は 9 個である。

(2)　$a>b>c$ のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}<\dfrac{1}{c}$ となり，$a+b>c$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は，すべて満たされている。

すると，(＊)を満たす条件は，$b+c>a$ ……①かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$ ……②である。

まず，①より $b>a-c$，②より $\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-c}{ac}$ すなわち $b<\dfrac{ac}{a-c}$ となり，

$$a-c<b<\frac{ac}{a-c}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$a>b>c$ から $2\leqq b\leqq 6$，また $a-c\geqq 2$ に注意すると，$3\leqq b\leqq 6$ となる。

(i)　$b=3$ のとき　$a>3>c$ であり，③より $a-c=2$ かつ $ac>6$ となり，

$(a,\ c)=(4,\ 2)$

(ii)　$b=4$ のとき　$a>4>c$ であり，③より $a-c<4<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>8$ のとき　$(a,\ c)=(5,\ 3)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>12$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3)$

(iii) $b=5$ のとき　$a>5>c$ であり，③より $a-c<5<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>10$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 4)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>15$ のとき　$(a,\ c)=(6,\ 3)$，$(7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$ かつ $ac>20$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 3)$

(iv) $b=6$ のとき　$a>6>c$ であり，③より $a-c<6<\dfrac{ac}{a-c}$

(a)　$a-c=2$ かつ $ac>12$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 5)$

(b)　$a-c=3$ かつ $ac>18$ のとき　$(a,\ c)=(7,\ 4)$

(c)　$a-c=4$ かつ $ac>24$ のとき　この場合を満たす $(a,\ c)$ は存在しない。

(d)　$a-c=5$ かつ $ac>30$ のとき　この場合を満たす $(a,\ c)$ は存在しない。

(i)～(iv)より，(∗)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は 9 個である。

(3)　まず $a>b=c$ のとき，$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ となり，$a+b>c$，$c+a>b$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}$，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>\dfrac{1}{a}$，$\dfrac{1}{c}+\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}$ は，すべて満たされている。

すると，(∗)を満たす条件は，$b+c>a$ であり，$a>b=c$ から $2c>a$ となる。

これより，$(a,\ c)$ の条件は，$a>c$ かつ $a<2c$ より $c<a<2c$ となり，(1)の結果から，(∗)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は 9 個である。

次に，$a=b=c$ のとき，$\dfrac{1}{a}=\dfrac{1}{b}=\dfrac{1}{c}$ となり，(∗)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組は明らかに 7 個である。

以上より，a, b, c の大小関係も考えて，条件(∗)を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，

$$9\times3+9\times3!+9\times3+7=115$$

コメント

忍耐強く解いていくタイプの問題です。特に，(2)については，解答例では b の値で場合分けをしましたが，a や c の値でもさほど変わりません。途中で浮気心が出てしまうとマズイことになります。

問　題

2 次方程式$x^2-x-1=0$の 2 つの解をα，βとし，

$$c_n=\alpha^n+\beta^n,\ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$$

とおく。以下の問いに答えよ。

(1) nを 2 以上の自然数とするとき，$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$ となることを示せ。

(2) 曲線$y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4$の極値を求めよ。

(3) 曲線$y=c_1x^2-c_3x+c_2$と，x軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2014]

解答例

(1) α，βは，$x^2-x-1=0$の解より，$\alpha^2-\alpha-1=0$，$\beta^2-\beta-1=0$となり，

$$\alpha^{n+1}=\alpha^n+\alpha^{n-1},\ \beta^{n+1}=\beta^n+\beta^{n-1}\quad(n\geqq 2)$$

すると，$\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}=(\alpha^n+\beta^n)+(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$より，$c_{n+1}=c_n+c_{n-1}$

(2) まず，解と係数の関係より，

$$c_1=\alpha+\beta=1,\ c_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=1-2\cdot(-1)=3$$

(1)より，$c_3=c_2+c_1=3+1=4$，$c_4=c_3+c_2=4+3=7$となり，

$$y=c_1x^3-c_3x^2-c_2x+c_4=x^3-4x^2-3x+7$$

$$y'=3x^2-8x-3=(3x+1)(x-3)$$

すると，右表より，y は$x=-\frac{1}{3}$のとき極大値$\frac{203}{27}$をとり，$x=3$のとき極小値-11をとる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	$\frac{203}{27}$	$\searrow$	-11	$\nearrow$

(3) $y=c_1x^2-c_3x+c_2$は，(2)より，$y=x^2-4x-3=(x-1)(x-3)$となり，x 軸とで囲まれた図形の面積Sは，

$$S=-\int_1^3(x-1)(x-3)\,dx=\frac{1}{6}(3-1)^3=\frac{4}{3}$$

コメント

数列と微積分の 2 つの分野から構成された基本的な問題です。(2)と(3)については，係数が簡単でしたので，まずそれを代入して計算をしています。

問　題

$m,\ n\,(m<n)$ を自然数とし，$a=n^2-m^2$，$b=2mn$，$c=n^2+m^2$ とおく。3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ である三角形の内接円の半径を r とし，その三角形の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a^2+b^2=c^2$ を示せ。

(2) r を $m,\ n$ を用いて表せ。

(3) r が素数のときに，S を r を用いて表せ。

(4) r が素数のときに，S が 6 で割り切れることを示せ。 [2014]

解答例

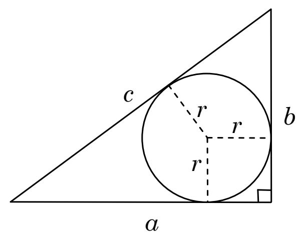
(1) $a^2+b^2=(n^2-m^2)^2+(2mn)^2=n^4+2m^2n^2+m^4=(n^2+m^2)^2=c^2$

(2) (1)より，3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ の三角形は，斜辺の長さが c の直角三角形なので，内接円の半径を r とすると，

$$(a-r)+(b-r)=c$$

$$r=\frac{1}{2}(a+b-c)=\frac{1}{2}(n^2-m^2+2mn-n^2-m^2)$$

$$=mn-m^2=m(n-m)\cdots\cdots\cdots(*)$$



(3) まず，三角形の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}ab=mn(n^2-m^2)$

r が素数のとき，$(*)$より，$(m,\ n-m)=(1,\ r)$，$(r,\ 1)$

(i) $(m,\ n-m)=(1,\ r)$ のとき　$n-1=r$ から，$n=r+1$

$$S=1\cdot(r+1)\{(r+1)^2-1\}=r(r+1)(r+2)$$

(ii) $(m,\ n-m)=(r,\ 1)$ のとき　$n-r=1$ から，$n=r+1$

$$S=r(r+1)\{(r+1)^2-r^2\}=r(r+1)(2r+1)$$

(4) (i) $S=r(r+1)(r+2)$ のとき

S は連続する 3 つの自然数の積なので, 6 の倍数である。

(ii) $S=r(r+1)(2r+1)$ のとき

$$S=r(r+1)(r-1+r+2)=(r-1)r(r+1)+r(r+1)(r+2)$$

S は連続する 3 つの自然数の積の和なので, 6 の倍数である。

(i)(ii)より，いずれの場合も，S は 6 で割り切れる。

コメント

直角三角形の内接円を題材にした頻出問題です。(4)の(ii)は式変形で示しましたが，普通に，3 で割った余りに着目して場合分けをする方法でも簡単に示せます。

問　題

a, b を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　ab が 3 の倍数であるとき, a または b は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　$a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。

(3)　$a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数であることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　a, b を 3 で割った余りと ab を 3 で割った余りの関係を表にまとめると, 右のようになる。

a \ b	0	1	2
0	0	0	0
1	0	1	2
2	0	2	1

ここで, 3 の倍数は 3 で割った余りが 0 から, 表中の数値 0 に注目すると, ab が 3 の倍数であるとき, a または b は 3 の倍数である。

(2)　a, b を 3 で割った余りと $a+b$ を 3 で割った余りの関係を表にまとめると, 右のようになる。

a \ b	0	1	2
0	0	1	2
1	1	2	0
2	2	0	1

すると, (1)の表と合わせてみると, $a+b$ と ab がともに 3 の倍数であるとき, a と b はともに 3 の倍数である。

(3)　まず, $a+b$ と a^2+b^2 がともに 3 の倍数であるとき, $2ab=(a+b)^2-(a^2+b^2)$ より, $2ab$ は 3 の倍数である。

2 と 3 は互いに素であるため, このとき ab は 3 の倍数である。

よって, (2)の結果から, a と b はともに 3 の倍数である。

コメント

(1)と(2)は, 表を用いて, 直接的な説明をしました。(3)も同様にできますが, ここは, 出題者の意図を汲み, (2)の利用を考えました。

問　題

1 から n までの自然数 1, 2, 3, $\cdots$, n の和を S とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) n を 4 で割った余りが 0 または 3 ならば, S が偶数であることを示せ。

(2) S が偶数ならば, n を 4 で割った余りが 0 または 3 であることを示せ。

(3) n を 8 で割った余りが 3 または 4 ならば, S が 4 の倍数でないことを示せ。

[2008]

解答例

(1) まず, $S=1+2+3+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ である。

さて, k を 0 以上の整数として, n を 4 で割った余りで分類する。

(i) n を 4 で割った余りが 0 のとき　$n=4k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+4)(4k+5)=2(k+1)(4k+5)$$

(ii) n を 4 で割った余りが 3 のとき　$n=4k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+3)(4k+4)=2(k+1)(4k+3)$$

(i)(ii)より, S は偶数である。

(2) n を 4 で割った余りが 1 または 2 のときを考える。

(iii) n を 4 で割った余りが 1 のとき　$n=4k+1$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+1)(4k+2)=(4k+1)(2k+1)$$

(iv) n を 4 で割った余りが 2 のとき　$n=4k+2$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(4k+2)(4k+3)=(2k+1)(4k+3)$$

(iii)(iv)より, S はいずれも奇数である。

よって, (1)と合わせて考えると, S が偶数ならば, n を 4 で割った余りが 0 または 3 である。

(3) n を 8 で割った余りで分類すると,

(i) n を 8 で割った余りが 3 のとき　$n=8k+3$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+3)(8k+4)=2(8k+3)(2k+1)$$

$(8k+3)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(ii) n を 8 で割った余りが 4 のとき　$n=8k+4$ と表すと,

$$S=\frac{1}{2}(8k+4)(8k+5)=2(8k+5)(2k+1)$$

$(8k+5)(2k+1)$ は奇数より, S は 4 の倍数ではない。

(i)(ii)より, S は 4 の倍数でない。

コメント

余りで整数を分類するタイプの証明問題です。(2)は，(1)の逆の証明ですが，転換法を意識して記述しています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　漸化式 $x_{n+1}-a=-2x_n+2a$ （a は定数）で定まる数列 x_1，x_2，x_3，…の一般項 x_n を x_1, a を用いて表せ。

(2)　xy 平面において曲線 $C: y=f(x)=x^3-3ax^2$ （a は定数）を考える。C 上に点 $\mathrm{P}_1(t_1,\ f(t_1))$ をとる。ただし，$t_1\neq a$ とする。P_1 における C の接線と C の交点のうち，P_1 と異なるものを $\mathrm{P}_2(t_2,\ f(t_2))$ とする。t_2 を t_1, a を用いて表せ。

(3)　さらに，P_2 における C の接線と C の交点のうち，P_2 と異なるものを P_3 とする。以下，同様に P_4，P_5，P_6，…を定める。P_1，P_2，P_3，…はすべて相異なることを示せ。　[2007]

解答例

(1)　$x_{n+1}-a=-2x_n+2a$ より，$x_{n+1}-a=-2(x_n-a)$ となり，

$$x_n-a=(x_1-a)(-2)^{n-1}$$

よって，$x_n=(x_1-a)(-2)^{n-1}+a$

(2)　$C: y=x^3-3ax^2$ ……①に対して，$y'=3x^2-6ax$

さて，$\mathrm{P}_1(t_1,\ t_1{}^3-3at_1{}^2)$ における接線の方程式は,

$$y-(t_1{}^3-3at_1{}^2)=(3t_1{}^2-6at_1)(x-t_1)$$

まとめると，$y=(3t_1{}^2-6at_1)x-2t_1{}^3+3at_1{}^2$ ………②

①②の共有点は，$x^3-3ax^2=(3t_1{}^2-6at_1)x-2t_1{}^3+3at_1{}^2$

$$x^3-3ax^2-(3t_1{}^2-6at_1)x+2t_1{}^3-3at_1{}^2=0,\ (x-t_1)^2(x+2t_1-3a)=0$$

$x\neq t_1$ より，$x=-2t_1+3a$ となるので，$t_2=-2t_1+3a$ である。

(3)　(2)と同様にして，$t_{n+1}=-2t_n+3a$，$t_{n+1}-a=-2t_n+2a$

すると, (1)より，$t_n=(t_1-a)(-2)^{n-1}+a$

ここで，$t_l=t_m$ となる $l, m\ (l\neq m)$ の存在を仮定すると,

$$(t_1-a)(-2)^{l-1}+a=(t_1-a)(-2)^{m-1}+a$$

$$(t_1-a)\{(-2)^{l-1}-(-2)^{m-1}\}=0 \text{ ………③}$$

条件より，$t_1\neq a$，$l\neq m$ なので, ③は成立しない。

したがって，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，すべての t_n は異なる。すなわち，P_1，P_2，P_3，…はすべて相異なる。

コメント

(1)と(2)が, (3)の誘導になっています。いずれも設問も基本的です。

問　題

初項が 1 で公差が自然数 d である等差数列の初項から第 n 項までの和を S_n とする。$n \geqq 3$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S_n = 94$ となる n と d がちょうど 1 組ある。その n と d を求めよ。

(2)　$S_n = 98$ となる n と d の組はない。その理由を述べよ。　[2004]

解答例

(1)　初項 1，交差 d の等差数列の第 n 項までの和は $S_n = \dfrac{2+(n-1)d}{2}\cdot n$ となるので，

$S_n = 94$ のとき，

$$\{2+(n-1)d\}n = 2^2 \times 47 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，n，d は自然数で，$n \geqq 3$ から，$2+(n-1)d \geqq 2+2=4$ となり，①より $3 \leqq n \leqq 47$ である。さらに，$2^2 \times 47$ の約数を考えて，n の値は 4，47 に絞られる。

$n=4$ のとき，①から $2+3d=47$，$d=15$

$n=47$ のとき，①から $2+46d=4$ となるが，$d \geqq 1$ より不成立。

よって，$(n,\ d)=(4,\ 15)$

(2)　(1)と同様にして，$S_n = 98$ のとき，

$$\{2+(n-1)d\}n = 2^2 \times 7^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，(1)と同様に，$2+(n-1)d \geqq 2+2=4$ から，②より $3 \leqq n \leqq 49$ である。さらに，$2^2 \times 7^2$ の約数を考えて，n の値は 4，7，14，28，49 に絞られる。

$n=4$ のとき，②から $2+3d=49$ となるが，$d=\dfrac{47}{3}$ より不適。

$n=7$ のとき，②から $2+6d=28$ となるが，$d=\dfrac{13}{3}$ より不適。

$n=14$ のとき，②から $2+13d=14$ となるが，$d \geqq 1$ より不成立。

$n=28$ のとき，②から $2+27d=7$ となるが，$d \geqq 1$ より不成立。

$n=49$ のとき，②から $2+48d=4$ となるが，$d \geqq 1$ より不成立。

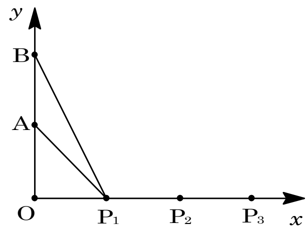
以上より，$S_n = 98$ となる n と d の組はない。

コメント

最初に考えた解を記しました。n の範囲の評価式をもっときつくすれば，場合分けの数は減少します。たとえば，$2+(n-1)d \geqq 2+n-1 = n+1 > n$ を利用します。もっとも，これは(2)で不成立が続くので，考え直した結果なのですが。

問　題

座標平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$, A$(0,\ 1)$, B$(0,\ 2)$ をとる。自然数 k に対し点 P_k の座標を $(k,\ 0)$ とする。自然数 n に対し, $2n$ 本の線分 AP_1, AP_2, $\cdots$, AP_n, BP_1, BP_2, $\cdots$, BP_n により分けられる第 1 象限の部分の個数を a_n とする。たとえば $n=1$ のとき, 図のように第 1 象限が 3 つの部分に分けられるので $a_1=3$ である。次の問いに答えよ。



(1)　a_2, a_3 の値を求めよ。

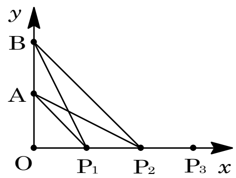
(2)　a_{n+1} を a_n と n を用いて表し, その理由を述べよ。

(3)　a_n を n を用いて表せ。　[2003]

解答例

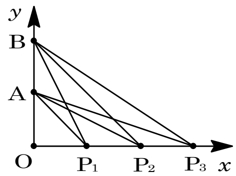
(1)　右図より, $a_2=a_1+2+1=6$

$$a_3=a_2+3+1=10$$



(2)　$2n$ 本の線分 AP_1, $\cdots$, AP_n, BP_1, $\cdots$, BP_n によって第 1 象限が a_n 個の部分に分けられているとする。

このとき, 線分 AP_{n+1} を引くと, この線分は BP_1, BP_2, $\cdots$, BP_n と 1 つずつ交点をもつことより, 分けられた部分が $n+1$ 個増加する。さらに, 線分 BP_{n+1} を引くと, この線分は他の線分と交点をもたないことから, 分けられた部分は 1 個だけ増加する。よって, 分けられた部分は, 合わせて $n+2$ 個増加することより,



$$a_{n+1}=a_n+n+2$$

(3)　(2)より, $n\geqq 2$ で, $a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}(k+2)=3+\frac{1}{2}(n-1)n+2(n-1)=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$

$n=1$ をあてはめると, $a_1=3$ となり成立するので,

$$a_n=\frac{1}{2}n^2+\frac{3}{2}n+1$$

コメント

分割される平面の個数についての頻出問題です。交点の個数に注目するのがポイントです。

問　題

数列$\{a_n\}$は，初項 a および公差 d が整数であるような等差数列であり，$8 \leqq a_2 \leqq 10$，$14 \leqq a_4 \leqq 16$，$19 \leqq a_5 \leqq 21$を満たしている。このような数列$\{a_n\}$をすべて求めよ。 [2002]

解答例

初項a，公差dの等差数列の一般項は，$a_n = a + (n-1)d$なので，条件より，

$$8 \leqq a + d \leqq 10 \cdots\cdots ①,\ 14 \leqq a + 3d \leqq 16 \cdots\cdots ②,\ 19 \leqq a + 4d \leqq 21 \cdots\cdots ③$$

①より, aとdが整数なので，$a + d = 8,\ 9,\ 10$

②より，$14 - (a+d) \leqq 2d \leqq 16 - (a+d) \cdots\cdots\cdots ②'$

③より，$19 - (a+d) \leqq 3d \leqq 21 - (a+d) \cdots\cdots\cdots ③'$

(i)　$a + d = 8$のとき

②′より$6 \leqq 2d \leqq 8$，③′より$11 \leqq 3d \leqq 13$

よって，$d = 4$，$a = 8 - 4 = 4$より，$a_n = 4 + 4(n-1) = 4n$

(ii)　$a + d = 9$のとき

②′より$5 \leqq 2d \leqq 7$，③′より$10 \leqq 3d \leqq 12$

これを満たす整数dは存在しない。

(iii)　$a + d = 10$のとき

②′より$4 \leqq 2d \leqq 6$，③′より$9 \leqq 3d \leqq 11$

よって，$d = 3$，$a = 10 - 3 = 7$より，$a_n = 7 + 3(n-1) = 3n + 4$

(i)(ii)(iii)より，数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_n = 4n$，$a_n = 3n + 4$

コメント

ad 平面を設定して①②③を図示しようと思いましたが，繁雑な感じがしましたので，方向転換をしました。

問　題

2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数全体を小さい順に並べてできる数列を a_1，a_2，a_3，……，a_n，……とする。このとき次の各問いに答えよ。

(1) 1003 は数列 $\{a_n\}$ の第何項か。

(2) a_{2000} の値を求めよ。

(3) m を自然数とするとき，数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $2m$ 項までの和を求めよ。

[1999]

解答例

(1) 2 の倍数でも 3 の倍数でもない自然数は，6 で割ったとき余りが 1 または 5 の数である。

よって a_n は，n が奇数（$n=2k-1$）のとき 6 で割った余りが 1 の場合なので $a_n=a_{2k-1}=6(k-1)+1=6k-5$，$n$ が偶数（$n=2k$）のとき 6 で割った余りが 5 の場合なので $a_n=a_{2k}=6(k-1)+5=6k-1$ となる。

ここで, 1003 は 6 で割ると余りが 1 より，$6k-5=1003$ とすると，$k=168$

このとき，$n=2\times168-1=335$

(2) $n=2000$ のとき $2k=2000$ とすると，$k=1000$

よって，$a_{2000}=6\times1000-1=5999$

(3) 求める和を S_{2m} とすると，

$$S_{2m}=\sum_{k=1}^{2m}a_k=\sum_{k=1}^{m}a_{2k-1}+\sum_{k=1}^{m}a_{2k}=\sum_{k=1}^{m}(6k-5)+\sum_{k=1}^{m}(6k-1)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}(12k-6)=6\sum_{k=1}^{m}(2k-1)=6m^2$$

コメント

数列の基本問題です。注意しなくてはいけないのは，計算ミスだけです。

問　題

$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$とする。座標空間内の動点Pが原点Oから出発し，正四面体のサイコロ（1, 2, 3, 4の目がそれぞれ確率$\dfrac{1}{4}$で出る）をふるごとに，出た目が$k(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$のときは$\overrightarrow{v_k}$だけ移動する。すなわち，サイコロをn回ふった後の動点Pの位置をP_nとして，サイコロを$(n+1)$回目にふって出た目がkならば，$\overrightarrow{P_nP_{n+1}}=\overrightarrow{v_k}$である。ただし，$P_0=O$である。以下の問いに答えよ。

(1) 点P_2がx軸上にある確率を求めよ。

(2) $\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となる確率を求めよ。

(3) 4点P_0，P_1，P_2，P_3が同一平面上にある確率を求めよ。　[2017]

解答例

(1) 正四面体のサイコロを2回ふったとき，1回目，2回目に出た目を，それぞれa, bとする。$\overrightarrow{v_1}=(1,\ 1,\ 1)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ -1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_3}=(-1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{v_4}=(-1,\ -1,\ 1)$に対して，$P_0=O$から$\overrightarrow{OP_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$である。

このとき，点P_2がx軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$のときであり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2\times 4=\dfrac{1}{4}$となる。

(2) (1)と同様に，点P_2がy軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$のときであり，その確率は$\dfrac{1}{4}$である。

また，点P_2がz軸上にあるのは，$(a,\ b)=(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$のときであり，その確率は$\dfrac{1}{4}$である。

さらに，$(a,\ b)=(1,\ 1)$では$P_2(2,\ 2,\ 2)$，$(a,\ b)=(2,\ 2)$では$P_2(2,\ -2,\ -2)$，$(a,\ b)=(3,\ 3)$では$P_2(-2,\ 2,\ -2)$，$(a,\ b)=(4,\ 4)$では$P_2(-2,\ -2,\ 2)$となる。

さて，サイコロを4回ふったとき，1回目，2回目，3回目，4回目に出た目を，それぞれa, b, c, dとすると，$\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$となる。

すると，$\overrightarrow{P_2P_4}=\overrightarrow{v_c}+\overrightarrow{v_d}$についても$\overrightarrow{P_0P_2}=\overrightarrow{v_a}+\overrightarrow{v_b}$と同様に考えることができるので，$\overrightarrow{P_0P_2}\perp\overrightarrow{P_2P_4}$となるのは，次の場合である。

(a) $\overrightarrow{P_0P_2}$がx軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がy軸に平行またはz軸に平行なとき

(b) $\overrightarrow{P_0P_2}$がy軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がx軸に平行またはz軸に平行なとき

(c) $\overrightarrow{P_0P_2}$がz軸に平行で，$\overrightarrow{P_2P_4}$がx軸に平行またはy軸に平行なとき

その確率は，$\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)+\dfrac{1}{4}\times\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{3}{8}$である。

(3)　(2)と同様に設定すると，$\overrightarrow{P_0P_1}=\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{P_1P_2}=\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{P_2P_3}=\overrightarrow{v_c}$ となる。

これより，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある条件は，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上のベクトルであることになる。

ここで，$\overrightarrow{v_a}$，$\overrightarrow{v_b}$，$\overrightarrow{v_c}$ が同一平面上にないときを考えると，$\overrightarrow{v_1}$，$\overrightarrow{v_2}$，$\overrightarrow{v_3}$，$\overrightarrow{v_4}$ から異なる 3 個のベクトルを選ぶとして，その確率は $\dfrac{{}_4C_3\cdot 3!}{4^3}=\dfrac{3}{8}$ である。

よって，4 点 P_0，P_1，P_2，P_3 が同一平面上にある確率は，$1-\dfrac{3}{8}=\dfrac{5}{8}$ となる。

コメント

確率に空間ベクトルが融合した記述しにくい問題です。(3)では，余事象を利用して 1 次独立な 3 つのベクトルを選ぶ確率をもとに計算しましたが，場合分けをして直接的に求めても構いません。

問　題

さいころを 4 回振って出た目を順に a, b, c, d とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$ab \geqq cd+25$ となる確率を求めよ。

(2)　$ab=cd$ となる確率を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　まず，さいころの出た目とその積をまとめると，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	10	12
3	3	6	9	12	15	18
4	4	8	12	16	20	24
5	5	10	15	20	25	30
6	6	12	18	24	30	36

さて, 4 回振って出た目を順に a, b, c, d とし，$ab \geqq cd+25$ となる場合は，$ab \geqq 26$ から，

$$ab=30,\ 36$$

(i)　$ab=30$ のとき

$(a,\ b)$ の組は 2 通りあり，$cd \leqq 5$ から $(c,\ d)$ の組は 10 通りより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $2\times10=20$ 通りとなる。

(ii)　$ab=36$ のとき

$(a,\ b)$ の組は 1 通りで，$cd \leqq 11$ から $(c,\ d)$ の組は 19 通りより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $1\times19=19$ 通りとなる。

(i)(ii)より，$ab \geqq cd+25$ となる確率は，$\dfrac{20+19}{6^4}=\dfrac{13}{432}$ である。

(2)　$ab=cd=k$ とするとき，ある k の値に対して，$(a,\ b)$ の組，$(c,\ d)$ の組が何通りずつ可能かということにより場合分けをする。

(i)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 1 通りずつのとき

$k=1,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $5\times1^2=5$ 通りとなる。

(ii)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 2 通りずつのとき

$k=2,\ 3,\ 5,\ 8,\ 10,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $10\times2^2=40$ 通りとなる。

(iii)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 3 通りずつのとき

$k=4$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $1\times3^2=9$ 通りとなる。

(iv)　$(a,\ b)$，$(c,\ d)$ の組が 4 通りずつのとき

$k=6,\ 12$ であり，このとき $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は $2\times4^2=32$ 通りとなる。

(i)～(iv)より，$ab=cd$ となる確率は，$\dfrac{5+40+9+32}{6^4}=\dfrac{43}{648}$ である。

コメント

すべての場合を列挙し準備をしておいて，そのあと数え上げるタイプです。(2)では，出た目の積の値を 4 つの場合に分けて計算することがポイントです。

問　題

赤色，緑色，青色のさいころが各 2 個ずつ，計 6 個ある。これらを同時にふるとき，

赤色 2 個のさいころの出た目の数 r_1，r_2 に対し $R=|r_1-r_2|$

緑色 2 個のさいころの出た目の数 g_1，g_2 に対し $G=|g_1-g_2|$

青色 2 個のさいころの出た目の数 b_1，b_2 に対し $B=|b_1-b_2|$

とする。次の問いに答えよ。

(1) R がとりうる値と，R がそれらの各値をとる確率をそれぞれ求めよ。

(2) $R\geqq 4$，$G\geqq 4$，$B\geqq 4$ が同時に成り立つ確率を求めよ。

(3) $RGB\geqq 80$ となる確率を求めよ。 [2013]

解答例

(1) まず，2 つのさいころの出た目の数とその差の絶対値をまとめると，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	0	1	2	3	4	5
2	1	0	1	2	3	4
3	2	1	0	1	2	3
4	3	2	1	0	1	2
5	4	3	2	1	0	1
6	5	4	3	2	1	0

これより，R がとりうる値とその確率は，

(i) $R=0$ のとき　確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(ii) $R=1$ のとき　確率は $\dfrac{10}{36}=\dfrac{5}{18}$

(iii) $R=2$ のとき　確率は $\dfrac{8}{36}=\dfrac{2}{9}$

(iv) $R=3$ のとき　確率は $\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

(v) $R=4$ のとき　確率は $\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$

(iv) $R=5$ のとき　確率は $\dfrac{2}{36}=\dfrac{1}{18}$

(2) $R\geqq 4$ である確率は，(1)より，$\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{18}=\dfrac{1}{6}$ となり，$G\geqq 4$，$B\geqq 4$ の場合も同様なので，$R\geqq 4$，$G\geqq 4$，$B\geqq 4$ が同時に成り立つ確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^3=\dfrac{1}{216}$

(3) $RGB\geqq 80$ となるのは，$(R,\ G,\ B)$ の組が，$R\geqq G\geqq B$ とすると，

$(5,\ 4,\ 4)$，$(5,\ 5,\ 4)$，$(5,\ 5,\ 5)$

すると，R, G, B の対応を考えて，求める確率は，

$${}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{18}\left(\frac{1}{9}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{18}\right)^2\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{18}\right)^3=\frac{19}{5832}$$

コメント

センター試験のように表を作ると，後は一気呵成に進みます。なお，(3)では(2)の結果を利用して，余事象という考え方もあります。

問　題

袋の中に 0 から 4 までの数字のうち 1 つが書かれたカードが 1 枚ずつ合計 5 枚入っている。4 つの数 0, 3, 6, 9 をマジックナンバーと呼ぶことにする。次のようなルールをもつ, 1 人で行うゲームを考える。

[ルール]　袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出していく。ただし, 一度取り出したカードは袋に戻さないものとする。取り出したカードの数字の合計がマジックナンバーになったとき, その時点で負けとし, それ以降はカードを取り出さない。途中で負けとなることなく, すべてのカードを取り出せたとき, 勝ちとする。

以下の問いに答えよ。

(1)　2 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードを取り出したところで負けとなる確率を求めよ。

(3)　このゲームで勝つ確率を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　2 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは, カードの取り出し方が,

$1\to2$, $2\to1$, $2\to4$, $4\to2$

よって, その確率は, $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times4=\frac{1}{5}$ である。

(2)　3 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは, カードの取り出し方が,

$1\to0\to2$, $1\to3\to2$, $2\to0\to1$, $2\to0\to4$, $2\to3\to1$, $2\to3\to4$

$4\to0\to2$, $4\to3\to2$,

よって, その確率は, $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times8=\frac{2}{15}$ である。

(3)　1 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは, 0 または 3 のカードを取り出したときより, その確率は, $\frac{1}{5}\times2=\frac{2}{5}$ である。

4 枚のカードを取り出したところで負けとなるのは, カードの取り出し方が,

$1\to0\to3\to2$, $1\to3\to0\to2$, $2\to0\to3\to1$, $2\to0\to3\to4$

$2\to3\to0\to1$, $2\to3\to0\to4$, $4\to0\to3\to2$, $4\to3\to0\to2$

よって, その確率は, $\frac{1}{5}\times\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times8=\frac{1}{15}$ である。

以上より, このゲームで勝つ確率は, (1), (2)の結果を合わせて,

$$1-\left(\frac{2}{5}+\frac{1}{5}+\frac{2}{15}+\frac{1}{15}\right)=\frac{1}{5}$$

コメント

樹形図でも利用して, どんどん処理をしていくのが最も効率よい問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　A, B の 2 人がそれぞれ,「石」,「はさみ」,「紙」の 3 種類の「手」から無作為に 1 つを選んで, 双方の「手」によって勝敗を決める。「石」は「はさみ」に勝ち「紙」に負け,「はさみ」は「紙」に勝ち「石」に負け,「紙」は「石」に勝ち「はさみ」に負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A が B に勝つ確率と引き分ける確率を求めよ。

(2)　上の 3 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加えて, 4 種類目の「手」として「水」を加える。「水」は「石」と「はさみ」には勝つが「紙」には負け, 同じ「手」どうしは引き分けとする。A, B がともに 4 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとするとき, A が勝つ確率と引き分けの確率を求めよ。

(3)　上の 4 種類の「手」の勝敗規則を保ちつつ, これらに加え, さらに第 5 の「手」として「土」を加える。B が 5 種類の「手」から無作為に 1 つを選ぶとき, A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには,「土」と「石」「はさみ」「紙」「水」との勝敗規則をそれぞれどのように定めればよいか。ただし, 同じ「手」どうしの場合, しかもその場合のみ引き分けとする。　[2009]

解答例

(1)　引き分けになるのは, A と B が同じ「手」を選んだときより, その確率は $\dfrac{3}{3^2}=\dfrac{1}{3}$,

また A が B に勝つことと, B が A に勝つことは対等なので, A が B に勝つ確率は,

$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{1}{3}$$

(2)　引き分けになるのは, A と B が同じ「手」を選んだときより, その確率は $\dfrac{4}{4^2}=\dfrac{1}{4}$,

また A が B に勝つことと, B が A に勝つことは対等なので, A が B に勝つ確率は,

$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

(3)　まず,「はさみ」を「は」と記し, 引き分けを△, A が B に勝つことを○, A が B に負けることを×として表す。

すると,「石」「はさみ」「紙」「水」の勝敗規則を, A の勝敗として示すと, 右表の影をつけていない部分のようになる。

B＼A	石	は	紙	水	土
石	△	×	○	○	×
は	○	△	×	○	×
紙	×	○	△	×	○
水	×	×	○	△	○
土	○	○	×	×	△

さて,「土」と「土」は引き分けになるので, A の勝つ確率が A の選ぶ「手」によらないようにするためには, つねに 2 勝 2 敗 1 分け, すなわち右表の薄く影をつけた「土」の行および列のように勝敗規則を定めるとよい。

言い換えると，「土」は「紙」と「水」には勝つが「石」と「はさみ」には負ける，となる。

コメント

読解力がポイントのパズルのような問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) xy 平面において，円 $(x-a)^2+(y-b)^2=2c^2$ と直線 $y=x$ が共有点をもたないための a, b, c の条件を求めよ。ただし，a, b, c は定数で $c\neq 0$ とする。

(2) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数を，順に a, b, c とする。a, b, c が(1)で求めた条件を満たす確率を求めよ。 [2008]

解答例

(1) 中心 $(a,\ b)$，半径 $\sqrt{2}|c|$ の円 $(x-a)^2+(y-b)^2=2c^2$ と，直線 $y=x$ すなわち $x-y=0$ が共有点をもたない条件は，

$$\frac{|a-b|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>\sqrt{2}|c|,\ |a-b|>2|c|\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) 1 個のサイコロを 3 回投げて出た目の数 $(a,\ b,\ c)$ の組は 6^3 通りあり，これが同様に確からしいとする。そこで，$(*)$を満たす数 $(a,\ b,\ c)$ の組は，

(i) $c=1$ のとき

$(*)$は，$|a-b|>2$ となり，これを満たす $(a,\ b)$ は，$a>b$ では，

$(6,\ 1)$，$(6,\ 2)$，$(6,\ 3)$，$(5,\ 1)$，$(5,\ 2)$，$(4,\ 1)$

$a<b$ のときも考えて，$6\times 2=12$ 通りとなる。

(ii) $c=2$ のとき

$(*)$は，$|a-b|>4$ となり，これを満たす $(a,\ b)$ は，$a>b$ では $(6,\ 1)$ のみである。

$a<b$ のときも考えて，$1\times 2=2$ 通りとなる。

(iii) $c\geqq 3$ のとき

$(*)$は，$|a-b|>6$ となり，これを満たす $(a,\ b)$ は存在しない。

(i)(ii)(iii)より，$(*)$を満たす確率は，$\dfrac{12+2}{6^3}=\dfrac{7}{108}$ である。

コメント

図形と式と確率の分野を混合した頻出問題です。2002 年にも同じパターンの問題が出ています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　1, 2, 3 の 3 種類の数字から重複を許して 3 つ選ぶ。選ばれた数の和が 3 の倍数となる組合せをすべて求めよ。

(2)　1 の数字を書いたカードを 3 枚, 2 の数字を書いたカードを 3 枚, 3 の数字を書いたカードを 3 枚, 計 9 枚用意する。この中から無作為に, 一度に 3 枚のカードを選んだとき, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる確率を求めよ。 [2007]

解答例

(1)　1, 2, 3 から重複を許して 3 つ選んだとき, その和が 3 の倍数となる組合せは,

$$\{1,\ 1,\ 1\},\ \{2,\ 2,\ 2\},\ \{3,\ 3,\ 3\},\ \{1,\ 2,\ 3\}$$

(2)　9 枚のカードから 3 枚を選ぶ ${}_9C_3=84$ 通りが, 同様に確からしいとする。

さて, カードに書かれた数の和が 3 の倍数となる場合は, (1)から,

(i)　$\{1,\ 1,\ 1\}$, $\{2,\ 2,\ 2\}$, $\{3,\ 3,\ 3\}$のとき

それぞれ 1 通りずつで, 合わせて 3 通りである。

(ii)　$\{1,\ 2,\ 3\}$のとき

この場合は, ${}_3C_1\times{}_3C_1\times{}_3C_1=27$ 通りとなる。

(i)(ii)より, $3+27=30$ 通りとなり, 求める確率は, $\dfrac{30}{84}=\dfrac{5}{14}$ である。

コメント

何か裏があるのではないかと疑ってしまうほどの問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　方程式$x^2+y^2+ax+by+3c=0$が円を表すための$a,\ b,\ c$の条件を求めよ。

(2)　1 つのサイコロを 2 回振って出た目の数を，順にa，bとする。$c=1$とするとき，$a,\ b$の組が(1)の条件を満たす場合は何通りあるか。

(3)　1 つのサイコロを 3 回振って出た目の数を，順に$a,\ b,\ c$とする。$a,\ b,\ c$が(1)の条件を満たす確率を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$x^2+y^2+ax+by+3c=0$より，$\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{b}{2}\right)^2=\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-3c$

円を表す条件は，$\dfrac{a^2}{4}+\dfrac{b^2}{4}-3c>0$より，$a^2+b^2>12c$

(2)　a^2，b^2の値とa^2+b^2の値をまとめると右表のようになる。

	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

$c=1$のとき，(1)より$a^2+b^2>12$となり，これを満たすのは 30 通りである。

(3)　$c=2$のとき$a^2+b^2>24$から 23 通り，$c=3$のとき$a^2+b^2>36$から 14 通り，$c=4$のとき$a^2+b^2>48$から 6 通り，$c=5$のとき$a^2+b^2>60$から 3 通り，$c=6$のとき$a^2+b^2>72$から 0 通りである。

すると，(2)と合わせて，$30+23+14+6+3+0=76$通り

よって，$a,\ b,\ c$のすべての組は6^3通りなので，求める確率は$\dfrac{76}{6^3}=\dfrac{19}{54}$である。

コメント

(2)では，最初$a^2+b^2\leqq 12$の場合を数えて答を導きました。ところが，(3)の設問を見ると，表を作った方がよいことがわかりました。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　正の実数 x, y に対して，$\dfrac{y}{x}+\dfrac{x}{y} \geqq 2$ が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。

(2)　n を自然数とする。n 個の正の実数 a_1，…，a_n に対して

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2$$

が成り立つことを示し，等号が成立するための条件を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　正の実数 x, y に対して，相加平均と相乗平均の関係より，

$$\frac{y}{x}+\frac{x}{y} \geqq 2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}=2$$

等号は $\dfrac{y}{x}=\dfrac{x}{y}$，すなわち $x=y$ のとき成立する。

(2)　まず，正の実数 a_1 に対して，$a_1\cdot\dfrac{1}{a_1}=1=1^2$ である。

次に，$n \geqq 2$ のとき，正の実数 a_1，…，a_n に対して，

$$(a_1+\cdots+a_n)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\right) \geqq n^2 \quad (\text{等号は}\ a_1=\cdots=a_n\ \text{のとき成立})\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　(1)より，

$$(a_1+a_2)\left(\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}\right)=2+\frac{a_2}{a_1}+\frac{a_1}{a_2} \geqq 2+2=2^2 \quad (\text{等号は}\ a_1=a_2\ \text{のとき成立})$$

(ii)　$n=k$ のとき

$(a_1+\cdots+a_k)\left(\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_k}\right) \geqq k^2$（等号は $a_1=\cdots=a_k$ のとき成立）と仮定すると，

$$(a_1+\cdots+a_k+a_{k+1})\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}+\frac{1}{a_{k+1}}\right)$$

$$=(a_1+\cdots+a_k)\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+\frac{1}{a_{k+1}}(a_1+\cdots+a_k)+a_{k+1}\left(\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_k}\right)+1$$

$$\geqq k^2+\left(\frac{a_1}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_1}\right)+\cdots+\left(\frac{a_k}{a_{k+1}}+\frac{a_{k+1}}{a_k}\right)+1$$

$$\geqq k^2+(2+\cdots+2)+1=k^2+2k+1=(k+1)^2$$

等号は $a_1=a_{k+1}$，…，$a_k=a_{k+1}$，すなわち $a_1=\cdots=a_k=a_{k+1}$ のときに成立する。

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき，正の実数 a_1，…，a_n に対して，$(*)$が成り立つ。

以上より，自然数 n に対して，$(*)$が成立する。

コメント

相加平均と相乗平均を用いて証明する有名問題です。(2)は数学的帰納法を用いましたが，不等式の左辺を展開して示すこともできます。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆