《2018 入試対策》

金沢大学

理系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された金沢大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 ， 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面上の放物線 $y = x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t > 0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0 < a \leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。 [2017]

2 座標平面において，円 $x^2 + y^2 = 1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)\ (0<b<1)$ における接線を l とし，l と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $\triangle$PQR の面積を求めよ。 [2010]

3 $0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，$\mathrm{A}(2,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2r)$ を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 O′AB，A′OB，B′OA を考える。ここで，辺 AB, OB, OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 O′ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 A′ は第 2 象限に，点 B′ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t = \tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 点 A′，B′ の座標を，r, t の式で表せ。

(2) 直線 AA′，および直線 BB′ の方程式を $ax + by = c$ の形で求めよ。

(3) 2 直線 AA′ と BB′ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4) 点 O′ の座標を r，t の式で表し，3 直線 AA′，BB′，OO′ が 1 点で交わることを示せ。 [2009]

4　xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2)　a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle\mathrm{QAR}$ を二等分する直線の方程式を求めよ。　[2008]

5　関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta$ $(0\leqq\theta<2\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

[2003]

6　a を実数の定数とする。x の 2 次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0$……(＊)について，次の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式(＊)が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲には実数解をただ 1 つもつとき，a の値の範囲を求めよ。

(2)　$-2\leqq a\leqq -1$ のとき，2 次方程式(＊)の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ。

[2000]

7　k は $k>0$, $k \neq 1$ をみたし，θ は $0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{6}$ をみたす実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　座標平面上で，2 定点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ からの距離の比が $1:k$ であるような点の軌跡は円になることを示し，その中心 $(X,\ Y)$ および半径 r を k と θ を用いて表せ。

(2)　θ は固定したままで, k のみを与えられた範囲で動かすとき，$(X,\ Y)$ のえがく軌跡を求めよ。

(3)　k，θ を与えられた範囲でともに動かすとき，$(X,\ Y)$ の存在する領域を図示せよ。

[1998]

■ 図形と計量

1　xy 平面上の円 $C : x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(0,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $\mathrm{P}(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q, R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle\mathrm{APR}=\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS, QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2)　$\triangle\mathrm{AQB}$ と $\triangle\mathrm{ABR}$ の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$，$T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3)　(2)の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。　[2006]

2　三角形 ABC において $\angle\mathrm{ABC}=45°$ であり，また辺 BC 上にある点 D は $\mathrm{BD}=1$，$\mathrm{CD}=\sqrt{3}-1$，$\angle\mathrm{ADB}=\angle\mathrm{ACB}+15°$，$\angle\mathrm{ADB}\geqq 90°$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin 15°=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$ を示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさを求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1 四面体 OABC において，3 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ はどの 2 つも互いに垂直であり，$h>0$ に対して，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=h$ とする。3 点 O, A, B を通る平面上の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ が $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とするとき，α と β を h を用いて表せ。

(2) 直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。

(3) △PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。　[2015]

2 a を実数とする。このとき，座標空間内の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ と直線 $l:(x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) S と l が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a の値が(1)で求めた範囲にあるとき，S と l の 2 つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ。

(3) (2)の d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ。　[2014]

3 正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して，O を原点とする座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ がある。$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=3$ かつ△ABC の面積が $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ となるとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\angle\mathrm{ACB}$ の値を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。

(2) $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。また，原点 O から△ABC に下ろした垂線の長さを求めよ。　[2013]

4 直線 $l:(x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上に点 P_0，直線 $m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上に点 Q_0 があり，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ と $(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1) P_0，Q_0 の座標を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|$ を求めよ。

(3) 直線 l 上の点 P，直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+16$ であることを示せ。　[2012]

5 座標空間において，中心が $A(0,\ 0,\ a)$ $(a>0)$ で半径が r の球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ は，点 $B(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$ と点 $(1,\ 0,\ -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

(1) r と a の値を求めよ。

(2) 点 $P(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ について，ベクトル $\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{AP}$ を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AP}$ を求めよ。

(3) $\triangle ABP$ の面積 S を t を用いて表せ。また, t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき, S の最小値と, そのときの t の値を求めよ。 [2010]

6 3 点 $A(6,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 6,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また, 線分 HO 上の点で, H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし，P_t の動く範囲から両端点 H, O は除くとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 H の座標と, t の動く範囲を求めよ。

(2) 平面 α 上にあり，P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし，P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3) (2)の $f(t)$ の最大値を求めよ。 [2005]

■ 整数と数列

1 次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $25x+9y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2) 方程式 $25x+9y=33$ の整数解をすべて求めよ。さらに，これらの整数解のうち, $|x+y|$ の値が最小となるものを求めよ。

(3) 2 つの方程式 $25x+9y=33$，$xy=-570$ を同時に満たす整数解をすべて求めよ。

[2016]

2 自然数が 1 つずつ書かれている玉が,

① ① ② ① ② ③ ① ② ③ ④ ① ② ③ ④ ⑤ ① ② ……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1) 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2) 自然数 n に対し，$2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3) 1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき，同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。 [2014]

3 次の問いに答えよ。

(1) 条件 $x_1 = 1$，$x_{n+1} = x_n + 2^n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) 条件 $y_1 = \dfrac{4}{3}$，$\dfrac{1}{y_{n+1}} = \dfrac{4}{y_n} + \dfrac{3}{4}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ をそれぞれ(1), (2)の数列とする。2 つのベクトル

$$\overrightarrow{a_n} = \left(16 - \frac{1}{x_n},\ \frac{16}{x_n} - 1\right),\ \overrightarrow{b_n} = \left(\frac{x_n}{4},\ \frac{1}{y_n}\right)$$

が垂直であるときの正の整数 n の値を求めよ。 [2006]

4 数列 $\{a_n\}$ が $a_1 = 36$，$a_{n+1} = 2a_n + 2^{n+3}n - 17 \cdot 2^{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定められているとする。

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_n > a_{n+1}$ となるような n の値の範囲および a_n が最小となるような n の値を求めよ。

(3) $S_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおくとき S_n が最小となるような n の値をすべて求めよ。

[2003]

5　n を自然数とする。数 w は,

$$w=2^i+2^j+2^k \quad (i,\ j,\ k \text{ は自然数で } 1\leqq i\leqq j\leqq k\leqq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$n=7$ とする。w の値が 2^8, 2^6+2^4 となるそれぞれの場合について, $(i,\ j,\ k)$ をすべて求めよ。

(2)　n を一般の自然数とする。2^r+2^s（r, s は自然数で $r<s$）の形で表される w の値は全部で何個あるか。

(3)　一般の自然数 n に対し, w の値は全部で何個あるか。　[2001]

6　次の問いに答えよ。

(1)　整数 $n\geqq 3$ に対して, ${}_n\mathrm{C}_3=\displaystyle\sum_{k=3}^{n}{}_{k-1}\mathrm{C}_2$ が成り立つことを示せ。

(2)　整数 $k\geqq 3$ に対して, $x+y+z=k$ を満たす自然数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数は $\dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$ であることを示せ。

(3)　整数 $m\geqq 0$ に対して, $x+y+z\leqq m$ を満たす負でない整数 x, y, z の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を, (1), (2)を用いて求めよ。　[2000]

■ 確率

1　$n\geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回, しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_3, p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求め, $p_{n+1}-\dfrac{5}{6}p_n=\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-1}$ であることを示せ。

(3)　$s_n=p_3+p_4+\cdots+p_n$ として, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}s_n$ を求めよ。ただし, 必要ならば, $|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることは使ってよい。　[2012]

2 A, B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者（A, B 以外の中立的立場の者）がさいころを投げ，1 の目が出たら A だけに 3 点，3 の目が出たら A だけに 2 点を与え，2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら，A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し，先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。$n \geqq 2$ のとき，$n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず，n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1) p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2) $q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} q_n$ を求めよ。また $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} p_n$ を求めよ。

(3) $a = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k} p_n - a\right|$ を求めよ。ただし，必要ならば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{3^k} = 0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x} = 0$ を用いてよい。 [2009]

3 座標平面上で動点 P が，x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し，y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し，停留することを文字 c で表す。a, b, c からなる文字列が与えられたとき，点 P は原点を出発し，その文字列に従って移動する。たとえば，長さ 4 の文字列 acab に対しては，点 P は原点$(0,\ 0)$から出発して，$(1,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$と移動し，点$(2,\ 1)$が到達点となる。長さ n の文字列のなかで，点 P の到達点が$(p,\ q)$となる文字列の個数を$F_n(p,\ q)$とする。

(1) $F_n(p,\ q)$を p, q, n を用いて表せ。ただし，n は自然数，p, q は $p \geqq 0$, $q \geqq 0$, $p+q \leqq n$ の範囲の整数とする。

(2) 自然数 n が与えられているとき，$F_n(p-1,\ q) \leqq F_n(p,\ q)$を満たす整数 p, q の組$(p,\ q)$ $(p \geqq 1,\ q \geqq 0,\ p+q \leqq n)$の範囲を図示せよ。また，$F_n(p,\ q-1) \leqq F_n(p,\ q)$を満たす整数 p, q の組$(p,\ q)$ $(p \geqq 0,\ q \geqq 1,\ p+q \leqq n)$の範囲を図示せよ。

(3) $n+1$ が 3 の倍数となる自然数 n が与えられているとき，$F_n(p,\ q)$が最大になる自然数 p, q の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。 [2004]

■ 論証

1 以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 x, y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1，…，x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ を満たしているとき，不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\geqq\log\frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。 [2002]

■ 複素数

1 次の問いに答えよ。

(1) $z^6+27=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

(2) (1)で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に z_1，z_2，…とするとき，z_1，z_2 と積 z_1z_2 を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。 [2017]

2 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ は

$$a_1=b_1=2,\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n,\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする。a_n を実部とし b_n を虚部とする複素数を z_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1) $z_{n+1}=wz_n$ を満たす複素数 w と，その絶対値 $|w|$ を求めよ。

(2) 複素数平面上で，点 z_{n+1} は点 z_n をどのように移動した点であるか答えよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ と $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(4) 複素数平面上の 3 点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形を T_n とする。このとき，複素数平面上で T_1，T_2，…，T_n，…によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ。 [2016]

3 関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし，$a\geqq 0$ とする。 [2007]

4　複素数平面上で中心が 1，半径 1 の円を C とする。以下，i は虚数単位とする。

(1)　C 上の点 $z=1+\cos t+i\sin t\ (-\pi<t<\pi)$ について，z の絶対値および偏角を t を用いて表せ。また $\dfrac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。

(2)　z が円 C 上の 0 でない点を動くとき，$w=\dfrac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線を描くことを示し，この放物線を図示せよ。　[2004]

5　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $r>1$ かつ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする。複素数平面において，z，$\dfrac{1}{z}$，$\overline{z}$，$\dfrac{1}{\overline{z}}$ を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし，$\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1)　点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。

(2)　直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき，r を θ の関数として表し，θ の動きうる区間 $(\alpha,\ \beta)$ を求めよ。

(3)　(2)において，原点と点 $\cos\beta+i\sin\beta$ を通る直線を l とし，点 P と l の距離を d とする。$\theta\to\beta$ のとき，d は 0 に収束することを示せ。　[2002]

6　次の問いに答えよ。

(1)　絶対値が 1 の複素数 α_1，α_2，α_3 が $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ を満たすとき，α_1，α_2，α_3 を求めよ。

(2)　β_1，β_2，γ を絶対値が 1 の複素数とし，$P(z)=\beta_2z^2+\beta_1z+(\cos30^\circ+i\sin30^\circ)$ が $\dfrac{1}{\gamma}P(\gamma)=3$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。このとき，β_1，β_2，γ を求め，さらに実数 t が $0\leqq t\leqq1$ を動くとき，複素数平面上で点 $P(\gamma t)$ が描く軌跡を求めよ。　[1999]

7　次の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対し，不等式 $\sin\theta\leqq\theta\leqq\tan\theta$ が成立することを示せ。

(2)　正の実数 x と自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対し，複素数 $1+\dfrac{x}{n}i$ の偏角を θ_n $(0\leqq\theta_n<2\pi)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n\theta_n$ を求めよ。

(3)　(2)で与えた複素数の n 乗 $\left(1+\dfrac{x}{n}i\right)^n$ の実部を a_n とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

[1998]

■ 曲線

1　曲線$C: x^2+4y^2=4$上を動く点 P と，C 上の定点Q(2, 0)，R(0, 1)がある。次の問いに答えよ。

(1)　△PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。　[2016]

2　$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円$C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$の交点を$Q(-s,\ t)$，$R(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点$P(0,\ 1)$に対して，△PQR の面積を$S(t)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$S(t)$を求めよ。また，$-1<t<1$における$S(t)$の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle PRT$ の値を求めよ。

(3)　楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を, (1)で求めた点 R に対して求めよ。　[2007]

3　定数 k に対して，関数 $f(t)$ と $g(t)$ をそれぞれ，$f(t)=3^{k+t}+3^{k-t}$，$g(t)=3^{k+t}-3^{k-t}$ と定める。すべての実数 t に対して，$f(2t)=\left\{f(t)\right\}^2+\left\{g(t)\right\}^2$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 k を求めよ。また，$\left\{f(t)\right\}^2-\left\{g(t)\right\}^2$ を求めよ。

(2)　媒介変数 t で表された曲線$C: x=2f(t),\ y=g(t)-1$を x と y の方程式で表し，C を座標平面上に図示せよ。

(3)　(2)の曲線 C 上の点 P における接線が原点 O を通るとき，接点 P の座標を求めよ。

[2000]

■ 極限

1 数列$\{a_n\}$を

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\left(a_n+\frac{7}{a_n}\right)\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_n>\sqrt{7}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(2) 数列$\{b_n\}$を

$$b_n=\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，$b_{n+1}={b_n}^2\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$と$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})$を求めよ。 [2017]

2 関数$y=\log_3 x$とその逆関数$y=3^x$のグラフが，直線$y=-x+s$と交わる点をそれぞれ$\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分PQの中点の座標は，$\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$であることを示せ。

(2) s, t, uは$s=t+u$，$u=\log_3 t$であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{t\to3}\frac{su-k}{t-3}$が有限な値となるように，定数$k$の値を定め，その極限値を求めよ。

[2015]

3 $a>1$とする。無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$$

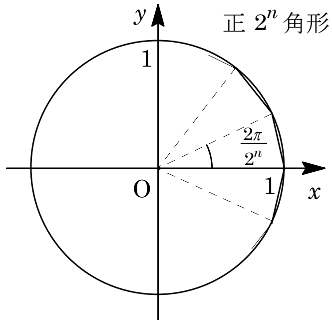
が収束するとき，その和を$S(x)$とする。次の問いに答えよ。

(1) この無限等比級数が収束するような実数xの値の範囲を求めよ。また，そのときの$S(x)$を求めよ。

(2) xが(1)で求めた範囲を動くとき，$S(x)$のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) $I(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)\,dx$とおくとき，極限値$\displaystyle\lim_{a\to\infty}I(a)$を求めよ。 [2015]

4　半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。



(1)　$S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2)　$\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。　[2012]

5　次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}) = a$ を満たすとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}} = 2a$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 L, n に対して，$\displaystyle\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < \sqrt{L+n}-\sqrt{n}$ が成り立つことを示せ。

(3)　b は定数で，$b > 1$ とする。自然数 n に対して，集合

$$\left\{ L \,\middle|\, L \text{ は} \sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}} < b \text{を満たす自然数} \right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}} = b$ が成り立つことを示せ。[2008]

6　1 個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle M_n = \frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^{n} kb_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

(3)　(2)の M_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} M_n$ を求めよ。ただし，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ が成り立つことを用いてもよい。　[2005]

7 関数$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$に対して以下の問いに答えよ。

(1) $f(0)$, $f'(0)$および$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$の値を求めよ。

(2) O を原点, P を曲線$y=f(x)$上の点, Q をx軸上の点とする。P, Q のx座標がともに正で, $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$の関係を保ちながら P, Q が動くとき, 直線 PQ がy軸と交わる点を R とする。

(i) P のx座標をt, R のy座標を$g(t)$とおくとき,

$$g(t)=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

となることを示せ。

(ii) P が O に限りなく近づくとき, R が近づく点を求めよ。 [2003]

■ 微分法

1 $0<a<3$ とし, $0\leqq x\leqq\pi$ の範囲で 2 つの関数 $f(x)=3-a\sin x$, $g(x)=2\cos^2 x$を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f(x)\geqq g(x)$ $(0\leqq x\leqq\pi)$となるaの値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線$C_1: y=f(x)$と$C_2: y=g(x)$が, ちょうど 2 つの共有点をもつとき, 共有点のx座標x_1, x_2 $(x_1<x_2)$とaの値を求めよ。また, そのときのC_1とC_2の概形を同一座標平面上にかけ。

(3) (2)のとき, C_1とC_2で囲まれた図形の面積Sを求めよ。 [2017]

2 a, bを実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$とし, xについての方程式$f(x)=b$を考える。次の問いに答えよ。

(1) $a>0$のとき, 関数$f(x)$の最大値を求めよ。

(2) 方程式$f(x)=b$の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。 [2016]

3　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta) = \dfrac{2}{3}\sin 3\theta - \sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin 3\theta = 3\sin\theta - 4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\dfrac{t^3 - 3t}{2} = \sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。　[2013]

4　座標平面上に点 $\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{C}(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ がある。ただし，$0 < \theta < \pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 AC と x 軸の交点を P とする。P の座標を θ で表せ。

(2)　$\triangle$ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3)　面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。　[2011]

5　$a\,(a > 0)$ を定数とし，$f(x) = 2a\log x - (\log x)^2$ とする。関数 $y = f(x)$ のグラフは, x 軸と点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ 0)$ $(x_1 < x_2)$ で交わっている。次の問いに答えよ。

(1)　x_1，x_2 の値を求めよ。また，$y = f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　点 P_1，P_2 における $y = f(x)$ の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。l_1 と l_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} X(a)$ を求めよ。

(3)　$a = 1$ とするとき，$y = f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2010]

6　座標平面上で，半径 r の 2 つの円 O_1，O_2 の中心をそれぞれ $(r,\ r)$，$(1-r,\ 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし，領域 D の面積を S とする。以下，r は $0 < r \leqq \dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

(1)　円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。

(2)　円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P，Q で交わるとする。$\theta = \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{PO_1Q}$ とおいて，半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。

(3)　面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。　[2004]

■ 積分法

1 次の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x = t$ とおいて，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 f(t)dt$ であることを示せ。

(2) (1)を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx$ の値を求めよ。また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\, dx \leqq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n \tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ。

(4) (2)と(3)を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。 [2012]

2 次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，不等式 $1-\cos\dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{x^2}{8}$ を示せ。

(2) $I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^x\, dx$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。I_1 の値を求めよ。さらに，等式 $I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1}$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ。

(3) I_2，I_3，I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4) 不等式 $\displaystyle\int_0^4 \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\, dx \leqq -2e^2+30$ を示せ。 [2011]

3 次の問いに答えよ。

(1) 自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ を求めよ。また，$\dfrac{1}{n+1} < \log(n+1)-\log n < \dfrac{1}{n}$ を示せ。

(2) 2 以上の自然数 n に対して，$\log(n+1) < \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} < 1+\log n$ を示せ。

(3) 2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{e e^{\frac{1}{2}} e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}} > \frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。 [2011]

4 関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ を示せ。

(2) 関数 $F(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ について

$$F'(x)=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt\text{，}\ F''(x)=-2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は，さらに等式 $f(x)=-\displaystyle\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を満たすとする。このとき，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0)=g'(0)=0\text{，}\ \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=0$$

が成り立つことを示し，$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。 [2009]

5 a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $a\geqq 0$ のとき，$S(a)=\displaystyle\int_{0}^{1}|x^3-3ax^2+2a^2x|\,dx$ を求めよ。

(2) a が $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。 [2008]

6 関数 $f(x)$ を $0\leqq x\leqq\pi$ のとき $f(x)=\sin x$ とおき，$x<0$ または $\pi<x$ のとき $f(x)=0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 2 つの定積分 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2\,dx$ と $\displaystyle\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ の値を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi} f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ の値を求めよ。

(3) $a>0$ について，$T(a)=\displaystyle\int_{0}^{\frac{3}{2}\pi}\left\{2af(x)+\frac{1}{a}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2 dx$ とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。 [2005]

7 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフの概形をかけ。

(2) $g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx$ とする。ただし，$a>0$ である。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ を求めよ。

(3) $h(a)=\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}$ を求めよ。 [2004]

8 整式 $f(x)$ は関係式 $\displaystyle\int_0^x f(x)\,dx=x^3-3x^2-9x+2\int_x^0 f(x)\,dx$ を満たしている。また $r\geqq 0$ に対し，$|x|\leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ を求め，$y=|f(x)|$ のグラフをかけ。

(2) $F(r)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\int_0^2 F(r)\,dr$ を求めよ。 [2001]

9 次を示せ。

(1) $\log(n+1)<1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\int_0^1\sin\pi y\,dy=\frac{2}{\pi}$ [2000]

10 n を自然数とする。a は $a>1$ を満たす実数とし，$f(a)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1|ax^n-1|\,dx+\frac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $f(a)$ を求めよ。

(2) 関数 $f(a)$ の $a>1$ における最小値を b_n とする。b_n を求めよ。

(3) (2)で求めた b_n （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）に対して，$m+1$ 個の数の積 $b_m\cdot b_{m+1}\cdots\cdots b_{2m}$ を c_m （$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}c_m$ を求めよ。 [1999]

■ 積分の応用

1 関数 $f(x)=xe^x$ について，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，必要ならば $\lim\limits_{x\to-\infty} xe^x=0$ を用いてもよい。

(2) 不定積分 $\int xe^x dx$，$\int x^2e^{2x}dx$ をそれぞれ求めよ。

(3) $0\leqq t\leqq 1$ に対し，$g(x)=f(x)-f(t)$ とおく。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(3) (3)の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ。ただし，a の値は求める必要はない。 [2015]

2 関数 $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1) C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2) (1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta=e^b$ を満たす $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3) 上の b に対する直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2014]

3 $a>0$ とする。$x\geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また，P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 定積分 $\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)dx$ を $t=\sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。

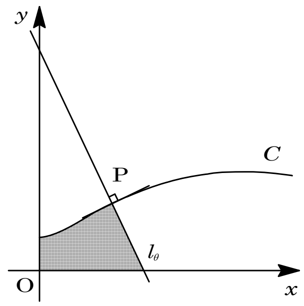
(3) 曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。 [2013]

4　次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の直線 $l: y = mx + \dfrac{1}{3}$ が曲線 $C: y = x^{\frac{2}{3}}\ (x \geqq 0)$ に接するとき，直線 l の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた m の値に対する直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2007]

5　xy 平面上に媒介変数 t で表された曲線 $C: x = 2t - \sin t$，$y = 2 - \cos t$ がある。$t = \theta\ (0 < \theta < \pi)$ のときの点 $\mathrm{P}(2\theta - \sin\theta,\ 2 - \cos\theta)$ における C の法線を l_θ とする。l_θ と x 軸と y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(\theta)$ とし，その三角形と曲線 C の下側にある部分との共通部分（図の網点部）の面積を $T(\theta)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　直線 l_θ を求めよ。

(2)　$S(\theta)$ を求めよ。

(3)　$T(\theta)$ を求めよ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{\theta \to +0} \frac{T(\theta)}{S(\theta)}$ を求めよ。　[2006]

6　以下の問いに答えよ。

(1)　次の(i), (ii)のグラフの概形を別々にかけ。

(i)　$y = 1 - |x|$　　(ii)　$y = \dfrac{1}{1 + |x|}$

(2)　区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ において不等式 $(ax + b)(1 - x^2) \leqq 1 - |x|$ が成り立つとき，定数 a, b の満たす条件を求めよ。

(3)　$a,\ b$ が (2) で求めた条件を満たすとき，区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で $y = 1 - |x|$ と $y = (ax + b)(1 - x^2)$ のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2003]

7　a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 $y=a\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を C とする。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき，接点を P とする。

(1)　l の方程式および P の座標を求めよ。

(2)　直線 $x=-1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし，x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を求めよ。

(3)　直線 l と直線 $x=-1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば，$S_1=2S_2$ が成り立つことを示せ。　[2002]

8　2 次関数 $y=f(x)$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通り $(p>0)$，曲線 $y=e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y=e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x=0$，$x=p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1，F_2 を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。このとき V_1，V_2 の値を, p を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。　[2001]

9　$0<h<1$ とする。xy 平面上で，曲線 $y=e^{-x^2}$ と直線 $y=h$ とで囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$V(h)$ を求めよ。

(2)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対し，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを示せ。

(3)　$h=2^{-n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V(2^{-n})$ を求めよ。　[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

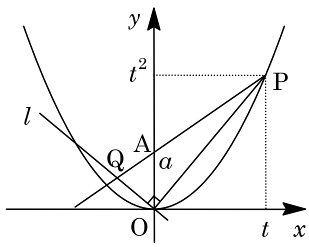
問　題

座標平面上の放物線 $y=x^2$ 上に点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ をとる。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，直線 OP に垂直な直線を l とする。また，$0<a\leqq 1$ として，点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ をとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 PA と l は交わることを示し，その交点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の座標を t と a を用いて表せ。

(2) t がすべての正の実数値をとって変化するとき，(1)で求めた点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通るとする。このとき，定数 a の値を求め，点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡を求めよ。 [2017]

解答例



(1) $\mathrm{P}(t,\ t^2)\ (t>0)$ に対して，OP の傾きは t より，O を通り OP に垂直な直線 l の方程式は，

$$y=-\frac{1}{t}x\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{A}(0,\ a)\ (0<a\leqq 1)$ に対して，直線 PA の方程式は，

$$y=\frac{t^2-a}{t}x+a\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\dfrac{t^2-a}{t}=-\dfrac{1}{t}$ とすると $\dfrac{t^2-a+1}{t}=0$ となるが，$t^2>0$，$0<a\leqq 1$ から成立しない。よって，直線 PA と l は交わる。

そこで，①②を連立すると，$\dfrac{t^2-a}{t}x+a=-\dfrac{1}{t}x$ より，

$$x=-\frac{at}{t^2-a+1},\ \ y=\frac{a}{t^2-a+1}$$

①と②の交点が $\mathrm{Q}(u,\ v)$ より，$u=-\dfrac{at}{t^2-a+1}$，$v=\dfrac{a}{t^2-a+1}$

(2) 点 $\mathrm{Q}(u,\ v)$ の軌跡が $\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$ を通ることより，(1)から，

$$-\frac{at}{t^2-a+1}=-\frac{1}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ \frac{a}{t^2-a+1}=1\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より $t^2-a+1=a$ となり，③に代入すると，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，④から，

$$a=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}+1\right)=\frac{2}{3}$$

このとき，(1)から，$u=-\dfrac{2t}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑤$，$v=\dfrac{2}{3t^2+1}\ \cdots\cdots⑥$

すると，$v \neq 0$ から $t = -\dfrac{u}{v}$ となり，⑥に代入すると $v\left(3\cdot\dfrac{u^2}{v^2}+1\right)=2$ から，

$$\frac{3u^2}{v}+v=2,\ 3u^2+v^2=2v,\ 3u^2+(v-1)^2=1$$

ここで，⑤を $u=-\dfrac{2}{3t+\dfrac{1}{t}}$ と変形すると，$3t+\dfrac{1}{t} \geqq 2\sqrt{3}$ から $-\dfrac{1}{\sqrt{3}} \leqq u < 0$ となり，

また⑥から，$3t^2+1>1$ より $0<v<2$ である。

以上より，点 Q の軌跡は，楕円 $3x^2+(y-1)^2=1$ の第 2 象限の部分である。

コメント

パラメータ表示された点の軌跡の問題です。ただ，軌跡に限界が現れる点には注意が必要です。

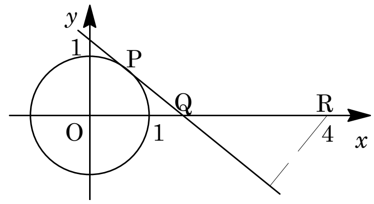
問　題

座標平面において，円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ $(0<b<1)$ における接線を l とし，l と x 軸の交点を Q とする。点 $\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 であるとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) △PQR の面積を求めよ。 [2010]

解答例



(1) 円 $x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ における接線 l は，

$ax+by=1$ ………①

ただし，$a^2+b^2=1$ ……②である。

さて，$\mathrm{R}(4,\ 0)$ と l の距離が 2 から，①より，

$$\frac{|4a-1|}{\sqrt{a^2+b^2}}=2,\ |4a-1|=2\sqrt{a^2+b^2}$$

②より，$|4a-1|=2$ となり，$4a-1=\pm2$，$a=\dfrac{3}{4}$，$-\dfrac{1}{4}$

すると，$0<b<1$ から，$a=\dfrac{3}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$，$a=-\dfrac{1}{4}$ のとき $b=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

よって，点 P の座標は，$\left(\dfrac{3}{4},\ \dfrac{\sqrt{7}}{4}\right)$ または $\left(-\dfrac{1}{4},\ \dfrac{\sqrt{15}}{4}\right)$ である。

(2) $\mathrm{P}(a,\ b)$ のとき，①より $\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$ となり，②から，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+b^2}=\sqrt{a^2-2+\frac{1}{a^2}+1-a^2}=\sqrt{\frac{1}{a^2}-1}$$

(i) $a=\dfrac{3}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{\dfrac{16}{9}-1}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$

(ii) $a=-\dfrac{1}{4}$ のとき　$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot2=\sqrt{16-1}=\sqrt{15}$

コメント

円と直線に関する基本題です。計算に複雑なところもありません。

問　題

$0<r<1$ とし，点 O を原点とする xy 平面において，3 点 O，A(2，0)，B(0，$2r$) を頂点とする三角形 OAB と，互いに相似な 3 つの二等辺三角形 O′AB，A′OB，B′OA を考える。ここで，辺 AB，OB，OA はそれぞれの二等辺三角形の底辺であり，点 O′ は直線 AB に対して点 O と反対側に，点 A′ は第 2 象限に，点 B′ は第 4 象限に，それぞれあるとする。$t=\tan\angle\mathrm{A'OB}$ とおく。次の問いに答えよ。

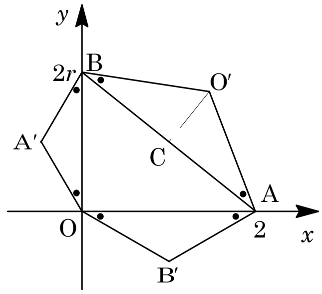
(1) 点 A′，B′ の座標を，r, t の式で表せ。

(2) 直線 AA′，および直線 BB′ の方程式を $ax+by=c$ の形で求めよ。

(3) 2 直線 AA′ と BB′ の交点を $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ とする。比 $\dfrac{y_0}{x_0}$ を r, t の式で表せ。

(4) 点 O′ の座標を r, t の式で表し，3 直線 AA′，BB′，OO′ が 1 点で交わることを示せ。　[2009]

解答例



(1) $\mathrm{A'}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B'}(x_2,\ y_2)$，$\angle\mathrm{A'OB}=\theta$ とおくと，

$$x_1=-r\tan\theta=-rt,\ \ y_1=r$$

$$x_2=1,\ \ y_2=-\tan\theta=-t$$

よって，$\mathrm{A'}(-rt,\ r)$，$\mathrm{B'}(1,\ -t)$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AA'}}=(-rt-2,\ r)$ より，直線 AA′ の法線ベクトルの成分を $(r,\ rt+2)$，$\overrightarrow{\mathrm{BB'}}=(1,\ -2r-t)$ より，直線 BB′ の法線ベクトルの成分を $(2r+t,\ 1)$ とすることができる。これより，直線 AA′，BB′ の方程式は，

$$\mathrm{AA'}: r(x-2)+(rt+2)y=0,\ \ rx+(rt+2)y=2r\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$\mathrm{BB'}: (2r+t)x+(y-2r)=0,\ \ (2r+t)x+y=2r\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3) 2 直線 AA′ と BB′ の交点が $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ より，①②から，

$$rx_0+(rt+2)y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ (2r+t)x_0+y_0=2r\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-r-t)x_0+(rt+1)y_0=0$，$(r+t)x_0=(rt+1)y_0$ となり，

$$\frac{y_0}{x_0}=\frac{r+t}{rt+1}$$

(4) まず，辺 AB の中点を C とすると $\mathrm{C}(1,\ r)$ となり，$\mathrm{AC}=\sqrt{1+r^2}$ から，

$$\mathrm{CO'}=\mathrm{AC}\tan\theta=t\sqrt{1+r^2}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2(1,\ -r)$ より，直線 AB の法線ベクトルの成分を $(r,\ 1)$ とすることができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OO'}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + \overrightarrow{\mathrm{CO'}} = (1,\ r) + t\sqrt{1+r^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{r^2+1}}(r,\ 1) = (rt+1,\ r+t)$$

これより，$\mathrm{O'}(rt+1,\ r+t)$ となり，直線 $\mathrm{OO'}$ の方程式は $y = \dfrac{r+t}{rt+1}x$ である。

よって，(3)から，直線 $\mathrm{OO'}$ 上に 2 直線 $\mathrm{AA'}$ と $\mathrm{BB'}$ の交点 $\mathrm{M}(x_0,\ y_0)$ が存在することになる。すなわち, 3 直線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{OO'}$ は 1 点で交わる。

コメント

座標平面上の図形を題材とした頻出題です。ベクトルの利用によって，計算量を減らすことがポイントです。

問　題

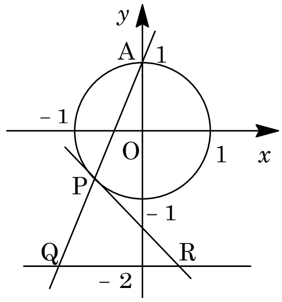
xy 平面において，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。a を正の実数とし，点 A$(0,\ 1)$ を通り，傾き a の直線を l とする。C と l の交点で，A と異なるものを P とし，l と直線 $y=-2$ の交点を Q とする。また，P における C の接線を m とし，m と直線 $y=-2$ の交点を R とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線 m の方程式を a を用いて表せ。

(2) a が正の値をとって動くとき，線分 QR の長さの最小値と，そのときの a の値を求めよ。

(3) (2)で求めた a の値に対して，点 A を通り，$\angle$QAR を二等分する直線の方程式を求めよ。 [2008]

解答例



(1) $C : x^2+y^2=1$ ……①と $l : y=ax+1$ ……②の交点は，

$$x^2+(ax+1)^2=1,\ (a^2+1)x^2+2ax=0$$

$x\neq 0$ の解は，$x=-\dfrac{2a}{a^2+1}$

②より，$y=-\dfrac{2a^2}{a^2+1}+1=\dfrac{-a^2+1}{a^2+1}$

よって，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{-a^2+1}{a^2+1}\right)$となり，点 P における円①の接線 m の方程式は,

$$-\frac{2a}{a^2+1}x+\frac{-a^2+1}{a^2+1}y=1,\ -2ax+(-a^2+1)y=a^2+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

(2) ②において，$y=-2$ とすると $x=-\dfrac{3}{a}$ から，$\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{a},\ -2\right)$

③において，$y=-2$ とすると $x=\dfrac{a^2-3}{2a}$ から，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a^2-3}{2a},\ -2\right)$

ここで，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$\mathrm{QR}=\left|\frac{a^2-3}{2a}+\frac{3}{a}\right|=\frac{a^2+3}{2a}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{3}{a}\right)\geqq\sqrt{a\cdot\frac{3}{a}}=\sqrt{3}$$

ここで，等号が成立するのは，$a=\dfrac{3}{a}$ $(a=\sqrt{3})$ のときである。

よって，線分 QR の長さは，$a=\sqrt{3}$ のとき最小値 $\sqrt{3}$ をとる。

(3) $a=\sqrt{3}$ のとき，②より，直線 AQ : $\sqrt{3}x-y+1=0$

また，R$(0,\ -2)$ から，直線 AR : $x=0$

すると，$\angle$QAR の二等分線は, 2 直線 AQ, AR から等距離にあることより，

$$\frac{|\sqrt{3}x-y+1|}{\sqrt{(\sqrt{3})^2+1}}=|x|,\ \sqrt{3}x-y+1=\pm 2x$$

$\angle$QAR の二等分線の傾きは正より，$y=(2+\sqrt{3})x+1$

コメント

(3)では，線分 QR を AQ : AR の比に内分する点を求め，内角の二等分線の定理を利用しても OK です。

問　題

関数 $f(\theta)=\sin\theta+\cos\theta+2\sqrt{2}\sin\theta\cos\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおくとき，$f(\theta)$ を t で表せ。また t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$f(\theta)=0$ を満たす θ をすべて求めよ。

(3)　$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるような定数 a の値の範囲を求めよ。

[2003]

解答例

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ より，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta$，$2\sin\theta\cos\theta=t^2-1$ なので，

$$f(\theta)=t+\sqrt{2}(t^2-1)=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$$

また，$0\leqq\theta<2\pi$ のとき，$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$ から $-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(\theta)=0$ から $\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=0$，$(\sqrt{2}t-1)(t+\sqrt{2})=0$ より，$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$-\sqrt{2}$

(i)　$t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=\dfrac{1}{2}$

すると，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{5}{6}\pi$，$2\pi+\dfrac{1}{6}\pi$ より，$\theta=\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(ii)　$t=-\sqrt{2}$ のとき，$\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\sqrt{2}$，$\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)=-1$

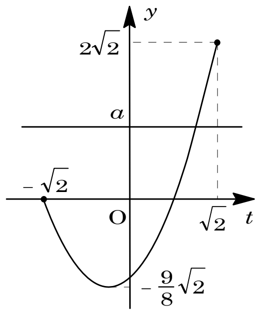
すると，$\theta+\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{3}{2}\pi$ より，$\theta=\dfrac{5}{4}\pi$

(i)(ii)より，$\theta=\dfrac{7}{12}\pi$，$\dfrac{5}{4}\pi$，$\dfrac{23}{12}\pi$

(3)　$t=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)(0\leqq\theta<2\pi)$ より，$t=\pm\sqrt{2}$ のとき θ は 1 個，$-\sqrt{2}<t<\sqrt{2}$ のとき θ は 2 個存在する。

さて，$\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}=a$ を満たす t の個数は，放物線 $y=\sqrt{2}t^2+t-\sqrt{2}$ と直線 $y=a$ の共有点の個数に一致する。

この放物線を $y=\sqrt{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)^2-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$ と変形すると，$a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a\leqq2\sqrt{2}$ のとき t は 1 個，$-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}<a\leqq0$ のとき t は 2 個存在する。



よって，$f(\theta)=a$ を満たす θ がちょうど 2 個となるのは，$a=-\dfrac{9}{8}\sqrt{2}$，$0<a<2\sqrt{2}$ のときである。

コメント

三角方程式の解の個数についての頻出問題です。グラフを書いて処理をしています。

問　題

a を実数の定数とする。x の 2 次方程式 $x^2+(a-1)x+a+2=0$……(＊)について，次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式(＊)が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲には実数解をただ 1 つもつとき，a の値の範囲を求めよ。

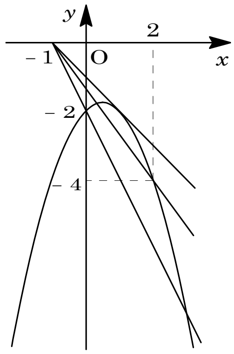
(2) $-2\leqq a\leqq -1$ のとき，2 次方程式(＊)の実数解 x のとりうる値の範囲を求めよ。

[2000]

解答例

(1) $x^2+(a-1)x+a+2=0$……(＊)より，$a(x+1)=-x^2+x-2$

$$y=a(x+1)\ \cdots\cdots\text{①},\quad y=-x^2+x-2\ \cdots\cdots\text{②}$$



ここで，①は点$(-1,\ 0)$を通る傾き a の直線を表し，また②は $y=-\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{7}{4}$ と変形すると，頂点$\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{7}{4}\right)$の放物線を表す。

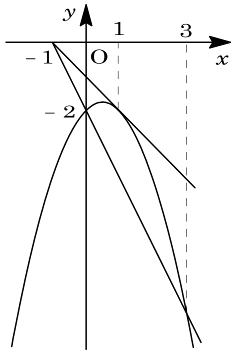
さて，①が点$(0,\ -2)$を通るとき $a=-2$ となり，①が点$(2,\ -4)$を通るとき $a=-\dfrac{4}{3}$ となる。

さらに，①と②が接するとき，2 次方程式(＊)の判別式 $D=(a-1)^2-4(a+2)=0$ から，

$$a^2-6a-7=0,\quad a=7,\ -1$$

以上より，(＊)の実数解は，①と②の共有点の x 座標となることを利用すると，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲に実数解をただ 1 つもつ条件は，

$$-2\leqq a<-\frac{4}{3},\quad a=-1$$



(2) $a=-1$ のとき，(1)より(＊)は重解をもち，その解は，

$$x=-\frac{a-1}{2}=1$$

$a=-2$ のとき，(＊)は $x^2-3x=0$ から，$x=0,\ 3$

したがって，$-2\leqq a\leqq -1$ のとき，2 次方程式(＊)の実数解のとりうる値の範囲は，$0\leqq x\leqq 3$ となる。

コメント

与えられた 2 次方程式(＊)が，パラメータ a についての 1 次式なので，直線と放物線の共有点として解をとらえました。

問　題

k は$k>0$，$k\neq 1$をみたし，θは$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$をみたす実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　座標平面上で，2 定点$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$からの距離の比が $1:k$ であるような点の軌跡は円になることを示し，その中心$(X,\ Y)$および半径 r を k とθを用いて表せ。

(2)　θは固定したままで，kのみを与えられた範囲で動かすとき，$(X,\ Y)$のえがく軌跡を求めよ。

(3)　k，θを与えられた範囲でともに動かすとき，$(X,\ Y)$の存在する領域を図示せよ。

[1998]

解答例

(1)　$\mathrm{PA}:\mathrm{PB}=1:k$ より，$\mathrm{PB}^2=k^2\mathrm{PA}^2$

$$(x-\cos\theta)^2+(y-\sin\theta)^2=k^2\left\{x^2+(y-1)^2\right\}$$

まとめて，$x^2+y^2+\dfrac{2\cos\theta}{k^2-1}x+\dfrac{2(\sin\theta-k^2)}{k^2-1}y+1=0$

$$\left(x+\frac{\cos\theta}{k^2-1}\right)^2+\left(y+\frac{\sin\theta-k^2}{k^2-1}\right)^2=\frac{2k^2(1-\sin\theta)}{(k^2-1)^2}$$

よって，$(X,\ Y)=\left(-\dfrac{\cos\theta}{k^2-1},\ -\dfrac{\sin\theta-k^2}{k^2-1}\right)$，$r=\dfrac{\sqrt{2}k\sqrt{1-\sin\theta}}{|k^2-1|}$

(2)　(1)より，$X=-\dfrac{\cos\theta}{k^2-1}$………①，$Y=-\dfrac{\sin\theta-k^2}{k^2-1}$………②

①より，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$なので$X\neq 0$から，$k^2=1-\dfrac{\cos\theta}{X}$………③

②より，$Y(k^2-1)=-(\sin\theta-k^2)$

③を代入して，$Y\cdot\left(-\dfrac{\cos\theta}{X}\right)=-\sin\theta+\left(1-\dfrac{\cos\theta}{X}\right)$

$$Y=\frac{\sin\theta-1}{\cos\theta}X+1\text{………④}$$

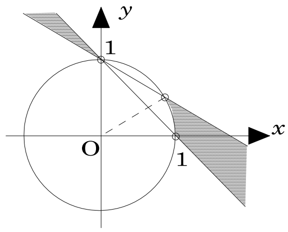
ただし，$k>0$なので，③から$1-\dfrac{\cos\theta}{X}>0$

$\dfrac{X-\cos\theta}{X}>0$，$\cos\theta>0$から，$X<0$，$\cos\theta<X$

また，$\dfrac{\cos\theta}{X}\neq 0$から，$k\neq 1$は成立する。

よって点$(X,\ Y)$の軌跡は，2 本の半直線$y=\dfrac{\sin\theta-1}{\cos\theta}x+1$ $(x<0,\ \cos\theta<x)$

(3)　④は 2 点$(0,\ 1)$, $(\cos\theta,\ \sin\theta)$を通る直線で, $X<0$, $\cos\theta<X$から, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$に考慮すると, 求める$(X,\ Y)$の存在する領域は, 右図のようになる。ただし, 円周上以外の境界線は含む。



コメント

(3)の存在領域を求めるのに, (2)が適切な誘導となっています。直線④が 2 点A$(0,\ 1)$, B$(\cos\theta,\ \sin\theta)$をつねに通るということを発見するのがポイントです。

問　題

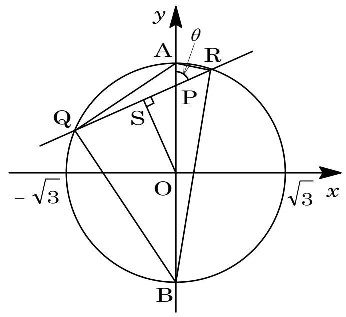
xy 平面上の円 $C: x^2+y^2=3$ 上に 2 点 $A(0,\ \sqrt{3})$，$B(0,\ -\sqrt{3})$ がある。点 $P(0,\ \sqrt{2})$ を通る直線と円 C の交点を Q, R とする。ただし，点 R は第 1 象限にあり，$\angle APR=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 原点 O から線分 QR へ垂線をひき QR との交点を S とする。線分 OS, QR の長さをそれぞれ θ を用いて表せ。

(2) $\triangle$AQB と $\triangle$ABR の面積をそれぞれ T_1，T_2 とする。$T_1=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$，$T_2=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$ が成り立つことを示し，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3) (2)の $S(\theta)$ に対して，$2\sqrt{3}<S(\theta)$ を満たす θ の値の範囲を求めよ。　[2006]

解答例



(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\mathrm{OS}=\mathrm{OP}\sin\theta=\sqrt{2}\sin\theta$

また，$\mathrm{SR}=\sqrt{\mathrm{OR}^2-\mathrm{OS}^2}=\sqrt{3-2\sin^2\theta}$ より，

$$\mathrm{QR}=2\mathrm{SR}=2\sqrt{3-2\sin^2\theta}$$

(2) $T_1=\triangle\mathrm{AQB}$，$T_2=\triangle\mathrm{ABR}$ なので，

$$T_1=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{AP}\sin(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{QP}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta=\frac{1}{2}\mathrm{QP}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta$$
$$=\sqrt{3}\,\mathrm{QP}\sin\theta$$
$$T_2=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{AP}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot\mathrm{PB}\sin(\pi-\theta)=\frac{1}{2}\mathrm{PR}(\mathrm{AP}+\mathrm{PB})\sin\theta$$
$$=\frac{1}{2}\mathrm{PR}\cdot2\sqrt{3}\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{PR}\sin\theta$$

よって，四角形 AQBR の面積 $S(\theta)$ は, (1)より，

$$S(\theta)=T_1+T_2=\sqrt{3}(\mathrm{QP}+\mathrm{PR})\sin\theta=\sqrt{3}\,\mathrm{QR}\sin\theta=2\sqrt{3}\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$$

(3) $2\sqrt{3}<S(\theta)$ より，$1<\sqrt{3-2\sin^2\theta}\sin\theta$ となり，$1<(3-2\sin^2\theta)\sin^2\theta$

$$2\sin^4\theta-3\sin^2\theta+1<0,\ (2\sin^2\theta-1)(\sin^2\theta-1)<0$$
$$(\sqrt{2}\sin\theta+1)(\sqrt{2}\sin\theta-1)(\sin\theta+1)(\sin\theta-1)<0$$

ここで，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$\sqrt{2}\sin\theta-1>0$ と同値になる。

よって，$\sin\theta>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である。

コメント

四角形の面積は，2 本の対角線の長さとそのなす角を用いて表すことができます。(1)と(2)は，この公式を誘導する設問です。

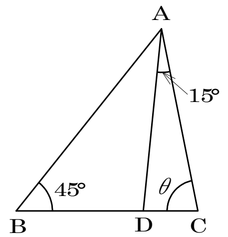
問　題

三角形 ABC において $\angle ABC = 45°$ であり，また辺 BC 上にある点 D は $BD = 1$，$CD = \sqrt{3} - 1$，$\angle ADB = \angle ACB + 15°$，$\angle ADB \geqq 90°$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $\sin 15° = \dfrac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$ を示せ。

(2) $\angle ACB$ の大きさを求めよ。 [1999]

解答例



(1) $\sin 15° = \sin(60° - 45°) = \sin 60° \cos 45° - \cos 60° \sin 45°$

$$= \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6} - \sqrt{2}}{4}$$

(2) $\angle ACB = \theta$ とおくと，$\angle BAD = 120° - \theta$ となる。

$\triangle ABD$ に正弦定理を適用して，$\dfrac{1}{\sin(120° - \theta)} = \dfrac{AD}{\sin 45°}$

$$AD = \frac{\sin 45°}{\sin(120° - \theta)} = \frac{1}{\sqrt{2}\sin(120° - \theta)} \cdots\cdots\cdots①$$

$\triangle ADC$ に正弦定理を適用して，$\dfrac{AD}{\sin\theta} = \dfrac{\sqrt{3} - 1}{\sin 15°}$

$$AD = \frac{(\sqrt{3} - 1)\sin\theta}{\sin 15°} = \frac{4\sin\theta}{\sqrt{2}} \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}\sin(120° - \theta)} = \dfrac{4\sin\theta}{\sqrt{2}}$，$\sin\theta\sin(120° - \theta) = \dfrac{1}{4}$

$$-\frac{1}{2}\{\cos 120° - \cos(2\theta - 120°)\} = \frac{1}{4},\quad \cos(2\theta - 120°) = 0$$

ここで $\theta > 0°$，$120° - \theta > 0°$，また条件より $\theta + 15° \geqq 90°$ なので，$75° \leqq \theta < 120°$

よって，$2\theta - 120° = 90°$，$\theta = \angle ACB = 105°$

コメント

正弦定理の応用問題です。なお，△ABC は計算の結果では鈍角三角形となり，上の解に書いた図とは異なりますが，題意を図示すると，まずこのように書くのではないかと思い，敢えてそのままにしています。

問　題

四面体 OABC において，3 つのベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$はどの 2 つも互いに垂直であり，$h>0$に対して，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=h$とする。3 点 O, A, B を通る平面上の点 P は，$\overrightarrow{CP}$が$\overrightarrow{CA}$と$\overrightarrow{CB}$のどちらとも垂直となる点であるとする。次の問いに答えよ。

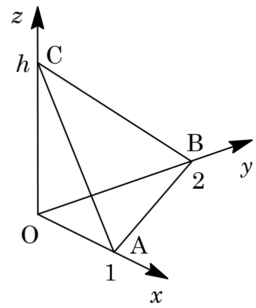
(1) $\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}$とするとき，$\alpha$と$\beta$を$h$を用いて表せ。

(2) 直線 OP と直線 AB が直交していることを示せ。

(3) △PAB は, 辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではないことを示せ。　[2015]

解答例

(1) 条件より，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$は，どの 2 つも互いに垂直であり，$|\overrightarrow{OA}|=1$，$|\overrightarrow{OB}|=2$，$|\overrightarrow{OC}|=h$ $(h>0)$なので，右図のように，点 O を原点としてとり，A(1, 0, 0)，B(0, 2, 0)，C(0, 0, h)とおくことができる。



これより，$\overrightarrow{OP}=\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}=(\alpha,\ 2\beta,\ 0)$となり，

$$\overrightarrow{CP}=(\alpha,\ 2\beta,\ -h)$$

また，$\overrightarrow{CA}=(1,\ 0,\ -h)$，$\overrightarrow{CB}=(0,\ 2,\ -h)$である。

すると，条件から，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CA}=0$，$\overrightarrow{CP}\cdot\overrightarrow{CB}=0$となるので,

$$\alpha+h^2=0,\quad 4\beta+h^2=0$$

よって，$\alpha=-h^2$，$\beta=-\dfrac{1}{4}h^2$である。

(2) (1)より，$\overrightarrow{OP}=\left(-h^2,\ -\dfrac{1}{2}h^2,\ 0\right)=-\dfrac{h^2}{2}(2,\ 1,\ 0)$

また，$\overrightarrow{AB}=(-1,\ 2,\ 0)$より，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AB}=-\dfrac{h^2}{2}(-2+2+0)=0$

よって，直線 OP と直線 AB は直交している。

(3) 線分 AB の中点を M とすると，$\overrightarrow{OM}=\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ 0\right)$

すると，$\overrightarrow{OP}$は$\overrightarrow{OM}$の定数倍とはならないので, 3 点 O, P, M は同一直線上にない。すなわち，点 P は線分 AB の垂直二等分線上の点ではない。

よって，△PAB は，辺 AB を底辺とする二等辺三角形ではない。

コメント

与えられた条件から，座標系を設定しています。すると，続きは成分計算となります。なお，普通に計算していっても，記述量はやや多くなる程度です。

問　題

a を実数とする。このとき，座標空間内の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ と直線 $l:(x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$ について，次の問いに答えよ。

(1) S と l が異なる 2 点で交わるような a の値の範囲を求めよ。

(2) a の値が(1)で求めた範囲にあるとき，S と l の 2 つの交点の間の距離 d を a を用いて表せ。

(3) (2)の d が最大となるような実数 a の値とそのときの d を求めよ。　[2014]

解答例

(1) $S: x^2+y^2+z^2=1$ ………①，$l:(x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+t(-1,\ a,\ a)$ ………②

①②を連立すると，$(2-t)^2+(-1+at)^2+(at)^2=1$ となり，

$$(2a^2+1)t^2-2(a+2)t+4=0 \text{ ………③}$$

③が異なる 2 実数解をもつことより，$D/4=(a+2)^2-4(2a^2+1)>0$ となり，

$$-7a^2+4a>0,\ 0<a<\frac{4}{7}$$

(2) ③の解 $t=\dfrac{a+2\pm\sqrt{-7a^2+4a}}{2a^2+1}$ を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，交点 P，Q は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2,\ -1,\ 0)+\alpha(-1,\ a,\ a),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2,\ -1,\ 0)+\beta(-1,\ a,\ a)$$

すると，$d=|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=(\beta-\alpha)|(-1,\ a,\ a)|$ となり，

$$d=\frac{2\sqrt{-7a^2+4a}}{2a^2+1}\cdot\sqrt{(-1)^2+a^2+a^2}=2\sqrt{\frac{-7a^2+4a}{2a^2+1}}$$

(3) $f(a)=\dfrac{-7a^2+4a}{2a^2+1}$ とおくと，$d=2\sqrt{f(a)}$ となり，

$$f'(a)=\frac{(-14a+4)(2a^2+1)-(-7a^2+4a)\cdot 4a}{(2a^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(4a^2+7a-2)}{(2a^2+1)^2}$$

$$=\frac{-2(4a-1)(a+2)}{(2a^2+1)^2}$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}$		$\frac{4}{7}$
$f'(a)$		$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，

$a=\dfrac{1}{4}$ のとき d は最大値 $2\sqrt{\dfrac{1}{2}}=\sqrt{2}$ をとる。

コメント

空間図形に関する基本的な問題です。誘導に従っていけば，上の解答例になるでしょう。

問　題

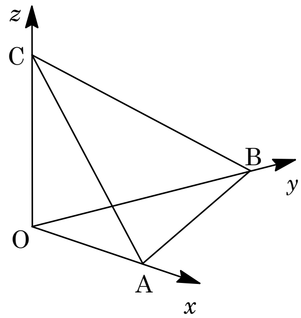
正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して，O を原点とする座標空間に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$がある。$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=3$かつ$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$となるとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\angle\mathrm{ACB}$の値を求めよ。また，線分 AB の長さを求めよ。

(2)　$a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

(3)　四面体 OABC の体積を求めよ。また，原点 O から$\triangle\mathrm{ABC}$ に下ろした垂線の長さを求めよ。　[2013]

解答例



(1)　$\mathrm{AC}=2$，$\mathrm{BC}=3$，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 3\sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{3\sqrt{3}}{2},\quad \sin\angle\mathrm{ACB}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\angle\mathrm{ACB}<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{3}$ となり，

$$\mathrm{AB}^2=2^2+3^2-2\cdot 2\cdot 3\cos\frac{\pi}{3}=4+9-6=7$$

よって，$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$ である。

(2)　$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$，$\mathrm{BC}=3$，$\mathrm{AC}=2$ より，

$$a^2+b^2=7\cdots\cdots\cdots①,\ b^2+c^2=9\cdots\cdots\cdots②,\ c^2+a^2=4\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$a^2+b^2+c^2=10\cdots\cdots\cdots④$

②④より $a^2=1$，③④より $b^2=6$，①④より $c^2=3$ となり，

$$a=1,\ b=\sqrt{6},\ c=\sqrt{3}$$

(3)　四面体 OABC の体積を V，O から$\triangle\mathrm{ABC}$ に下ろした垂線の長さを h とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{6}\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad V=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}h=\frac{\sqrt{3}}{2}h$$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}h=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ より，$h=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

コメント

空間座標の基本的な計算問題です。ただ，それだけです。

問　題

直線 $l:(x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上に点 $\mathrm{P_0}$，直線 $m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上に点 $\mathrm{Q_0}$ があり，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ はベクトル $(1,\ -1,\ 0)$ と $(1,\ 0,\ 2)$ の両方に垂直である。次の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{P_0}$，$\mathrm{Q_0}$ の座標を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|$ を求めよ。

(3) 直線 l 上の点 P，直線 m 上の点 Q について，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$，$\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ で表せ。また，$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+16$ であることを示せ。 [2012]

解答例

(1) 点 $\mathrm{P_0}$ は，直線 $l:(x,\ y,\ z)=(5,\ 0,\ 0)+s(1,\ -1,\ 0)$ 上にあり，また点 $\mathrm{Q_0}$ は，直線 $m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+t(1,\ 0,\ 2)$ 上にあるので，$\mathrm{P_0}(5+s,\ -s,\ 0)$，$\mathrm{Q_0}(t,\ 0,\ 2+2t)$ と表せる。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=(t-s-5,\ s,\ 2+2t)$ となり，$\vec{l}=(1,\ -1,\ 0)$，$\vec{m}=(1,\ 0,\ 2)$ とおくと，条件より，$\vec{l}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ かつ $\vec{m}\perp\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}$ なので，

$$\vec{l}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=t-s-5-s=t-2s-5=0\cdots\cdots\text{①}$$
$$\vec{m}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=t-s-5+4+4t=5t-s-1=0\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$t=-\dfrac{1}{3}$，$s=-\dfrac{8}{3}$ となり，$\mathrm{P_0}\left(\dfrac{7}{3},\ \dfrac{8}{3},\ 0\right)$，$\mathrm{Q_0}\left(-\dfrac{1}{3},\ 0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ である。

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=\left(-\dfrac{8}{3},\ -\dfrac{8}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)=\dfrac{4}{3}(-2,\ -2,\ 1)$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|=\frac{4}{3}\sqrt{(-2)^2+(-2)^2+1^2}=4$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}$ となり，(1)から，$\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}=0$ なので，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}+\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+2(\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}+|\overrightarrow{\mathrm{P_0Q_0}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{PP_0}}+\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}|^2+16\end{aligned}$$

コメント

誘導に乗れば結論まで一直線です。

問　題

座標空間において，中心が $\mathrm{A}(0,\ 0,\ a)$ $(a>0)$ で半径が r の球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ は，点 $\mathrm{B}(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$ と点 $(1,\ 0,\ -1)$ を通るものとする。次の問いに答えよ。

(1) r と a の値を求めよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ について，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。さらに内積 $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積 S を t を用いて表せ。また, t が $0\leqq t\leqq 2\pi$ の範囲を動くとき, S の最小値と, そのときの t の値を求めよ。　[2010]

解答例

(1) 球面 $x^2+y^2+(z-a)^2=r^2$ が, 2 点 $(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ a)$，$(1,\ 0,\ -1)$ を通ることより，

$$5+5=r^2\cdots\cdots\cdots①,\quad 1+(-1-a)^2=r^2\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$r=\sqrt{10}$ となり，②に代入すると，$(-1-a)^2=9$

$a>0$ より，$a=2$

(2) (1)より，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ 2)$，$\mathrm{P}(\cos t,\ \sin t,\ -1)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\sqrt{5},\ \sqrt{5},\ 0),\ \overrightarrow{\mathrm{AP}}=(\cos t,\ \sin t,\ -3),\ \overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\sqrt{5}\cos t+\sqrt{5}\sin t$$

(3) $\triangle\mathrm{ABP}$ の面積 S は, (2)より,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}})^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{(5+5)(\cos^2 t+\sin^2 t+9)-5(\cos t+\sin t)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{100-5(1+2\sin t\cos t)}=\frac{1}{2}\sqrt{95-5\sin 2t}$$

$0\leqq t\leqq 2\pi$ から，$\sin 2t=1$ $\left(t=\frac{\pi}{4},\ \frac{5}{4}\pi\right)$ のとき，S は最小値 $\frac{\sqrt{90}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{10}$ をとる。

コメント

空間ベクトルの計算問題です。球面の方程式は形式的なものにすぎません。

問　題

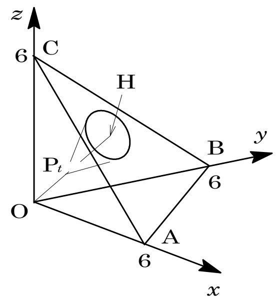
3点 $A(6,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 6,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面を α とする。原点 O を通り平面 α に直交する直線と α との交点を H とする。また，線分 HO 上の点で，H からの距離が t となる点を P_t とする。ただし，P_t の動く範囲から両端点 H，O は除くとする。次の問いに答えよ。

(1)　点 H の座標と，t の動く範囲を求めよ。

(2)　平面 α 上にあり，P_t からの距離が OH となる点が作る円を S_t とする。S_t とその内部を底面とし，P_t を頂点とする円錐の体積を $f(t)$ とする。このとき $f(t)$ を求めよ。

(3)　(2)の $f(t)$ の最大値を求めよ。　[2005]

解答例



(1)　3 点 $A(6,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 6,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 6)$ の定める平面 α の方程式は，

$$\frac{x}{6}+\frac{y}{6}+\frac{z}{6}=1,\ \ x+y+z=6$$

すると，平面 α の法線ベクトルは $\vec{n}=(1,\ 1,\ 1)$ となるので，k を定数として，$\overrightarrow{OH}=k\vec{n}=k(1,\ 1,\ 1)$ から，$H(k,\ k,\ k)$ と表せ，

$$k+k+k=6,\ \ k=2$$

よって，$H(2,\ 2,\ 2)$ となり，$OH=\sqrt{2^2+2^2+2^2}=2\sqrt{3}$ より，

$$0<t<2\sqrt{3}$$

(2)　P_t を頂点とする円錐は母線 $OH=2\sqrt{3}$，高さ $P_tH=t$ から，円 S_t の半径は，

$$\sqrt{(2\sqrt{3})^2-t^2}=\sqrt{12-t^2}$$

よって，円錐の体積 $f(t)$ は，

$$f(t)=\frac{1}{3}\pi(12-t^2)t=\frac{1}{3}\pi(-t^3+12t)$$

(3)　(2)より，$f'(t)=\dfrac{1}{3}\pi(-3t^2+12)$

$$=-\pi(t+2)(t-2)$$

すると，右表より，$f(t)$ の最大値は，

$$f(2)=\frac{1}{3}\pi(-8+24)=\frac{16}{3}\pi$$

t	0	…	2	…	$2\sqrt{3}$
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗		↘	

コメント

切片を利用して平面の方程式を記述しました。詳細は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $25x+9y=1$ の整数解をすべて求めよ。

(2)　方程式 $25x+9y=33$ の整数解をすべて求めよ。さらに，これらの整数解のうち，$|x+y|$ の値が最小となるものを求めよ。

(3)　2 つの方程式 $25x+9y=33$，$xy=-570$ を同時に満たす整数解をすべて求めよ。

[2016]

解答例

(1)　整数 x, y に対して $25x+9y=1$ のとき，$25\times4+9\times(-11)=1$ ……①より，

$$25(x-4)+9(y+11)=0,\ 25(x-4)=-9(y+11)$$

25 と 9 は互いに素なので，k を整数として，

$$x-4=9k,\ y+11=-25k$$

よって，$x=9k+4$，$y=-25k-11$ となる。

(2)　整数 x, y に対して $25x+9y=33$ のとき，①より $25\times132+9\times(-363)=33$

$$25(x-132)+9(y+363)=0,\ 25(x-132)=-9(y+363)$$

25 と 9 は互いに素なので，l を整数として，

$$x-132=9l,\ y+363=-25l$$

よって，$x=9l+132$，$y=-25l-363$ となり，このとき，

$$|x+y|=|9l+132-25l-363|=|-16l-231|=|-16(l+14)-7|$$

すると，$l=-14$ ($x=6,\ y=-13$) のとき，$|x+y|$ の値は最小となる。

(3)　条件より，整数 x, y に対して $25x+9y=33$ ………②，$xy=-570$ ………③

(2)の結果を利用すると，②より，

$$x=9l+132=9(l+14)+6,\ y=-25l-363=-25(l+14)-13$$

ここで，$m=l+14$ とおくと，$x=9m+6$，$y=-25m-13$

③に代入すると，$(9m+6)(-25m-13)=-570$ となり，

$$(3m+2)(25m+13)=190,\ 75m^2+89m-164=0$$

すると，$(75m+164)(m-1)=0$ となり，m は整数から $m=1$ なので，

$$x=15,\ y=-38$$

コメント

不定方程式を解く問題です。(1)の特殊解は $100-99=1$ から山勘で見つかると思いますが，(2)は運・不運が反映されます。少し大きな値となり気になりましたが，①を利用した確実なものを採用しました。ただ，(3)になるとそうもいかず，(2)の後半の設問を誘導とみて，文字の置換えをしています。

問　題

自然数が 1 つずつ書かれている玉が,

①　①　②　①　②　③　①　②　③　④　①　②　③　④　⑤　①　②　……

のように 1 列に並べられている。次の問いに答えよ。

(1)　数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは何番目か。

(2)　自然数 n に対し, $2n^2$ 番目の玉に書かれている数は何か。

(3)　1 番目から $2n^2$ 番目までの玉をすべて袋に入れた。この袋から 2 つの玉を取り出すとき, 同じ数が書かれた玉を取り出す確率を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　与えられた玉の列を下記のようにグループ分けを行う。

①｜①　②｜①　②　③｜①　②　③　④｜①　②　③　④　⑤｜①　②　……

左から, 第 1 群, 第 2 群, 第 3 群, …とすると, 第 k 群の右端までの個数は,

$$1+2+3+\cdots+k=\frac{1}{2}k(k+1)$$

さて, この玉の列で, 数 100 が書かれた玉が最初に現れるのは, 第 100 群の右端より, $\frac{1}{2}\cdot 100\cdot 101=5050$ 番目となる。

(2)　$2n^2$ 番目の玉が, 第 k 群に属するとすると,

$$\frac{1}{2}(k-1)k<2n^2\leqq\frac{1}{2}k(k+1),\ (k-1)k<4n^2\leqq k(k+1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, $k=2n$ のとき, $(k-1)k=4n^2-2n$, $k(k+1)=4n^2+2n$ から, $(*)$を満たす。よって, $2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群に属する。

そこで, 第 $2n-1$ 群の右端までの個数は, $\frac{1}{2}(2n-1)2n=n(2n-1)$ となり, $2n^2$ 番目の玉は, 第 $2n$ 群の $2n^2-n(2n-1)=n$ 番目すなわち数 n が書かれている。

(3)　$2n^2$ 個の玉から 2 つを取り出す ${}_{2n^2}\mathrm{C}_2=n^2(2n^2-1)$ 通りが同様に確からしい。

(2)より, $2n^2$ 番目の玉は第 $2n$ 群の n 番目より, 数 1 の玉は $2n$ 個, 数 2 の玉は $2n-1$ 個, 数 3 の玉は $2n-2$ 個, …, 数 n の玉は $n+1$ 個ある。さらに, 数 $n+1$ の玉は $n-1$ 個, 数 $n+2$ の玉は $n-2$ 個, …, 数 $2n-2$ の玉は 2 個, 数 $2n-1$ の玉は 1 個ある。

すると, 同じ数が書かれた玉を取り出す場合の数 N は, $n\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}N&={}_{2n}\mathrm{C}_2+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n-2}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2}\mathrm{C}_2\\&=({}_{2}\mathrm{C}_2+{}_{3}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{n-1}\mathrm{C}_2+{}_{n}\mathrm{C}_2+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n-1}\mathrm{C}_2+{}_{2n}\mathrm{C}_2)-{}_{n}\mathrm{C}_2\\&=\sum_{k=1}^{2n}\frac{1}{2}k(k-1)-\frac{1}{2}n(n-1)\end{aligned}$$

そこで，階差数列を考えると，

$$N=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{2n}\{(k+1)k(k-1)-k(k-1)(k-2)\}-\frac{1}{2}n(n-1)$$

$$=\frac{1}{6}(2n+1)2n(2n-1)-\frac{1}{2}n(n-1)=\frac{1}{6}n(8n^2-3n+1)$$

よって，同じ数が書かれた玉を取り出す確率は，$\dfrac{8n^2-3n+1}{6n(2n^2-1)}$ である。これは $n=1$ の場合も満たしている。

コメント

標準的な群数列の問題です。(3)はミスを犯しそうなので，具体的に記しました。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　条件 $x_1=1$，$x_{n+1}=x_n+2^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{x_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　条件 $y_1=\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{4}{y_n}+\dfrac{3}{4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定められる数列 $\{y_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ をそれぞれ(1), (2)の数列とする。2 つのベクトル

$$\overrightarrow{a_n}=\left(16-\frac{1}{x_n},\ \frac{16}{x_n}-1\right),\ \overrightarrow{b_n}=\left(\frac{x_n}{4},\ \frac{1}{y_n}\right)$$

が垂直であるときの正の整数 n の値を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$x_1=1$，$x_{n+1}=x_n+2^n$ より, $n\geqq 2$ において,

$$x_n=1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\frac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$$

$n=1$ をあてはめると $x_1=1$ となり，$n=1$ のときも成り立つ。

(2)　$y_1=\dfrac{4}{3}$，$\dfrac{1}{y_{n+1}}=\dfrac{4}{y_n}+\dfrac{3}{4}$ より，$\dfrac{1}{y_{n+1}}+\dfrac{1}{4}=4\left(\dfrac{1}{y_n}+\dfrac{1}{4}\right)$

$$\frac{1}{y_n}+\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{y_1}+\frac{1}{4}\right)4^{n-1}=4^{n-1}$$

よって，$\dfrac{1}{y_n}=\dfrac{4^n-1}{4}$，$y_n=\dfrac{4}{4^n-1}$

(3)　$\overrightarrow{a_n}\perp\overrightarrow{b_n}$ より，$\overrightarrow{a_n}\cdot\overrightarrow{b_n}=0$ となり，

$$\left(16-\frac{1}{x_n}\right)\frac{x_n}{4}+\left(\frac{16}{x_n}-1\right)\frac{1}{y_n}=0,\ 4x_n-\frac{1}{4}+\frac{16}{x_ny_n}-\frac{1}{y_n}=0$$

(1)(2)より，$4(2^n-1)-\dfrac{1}{4}+4(2^n+1)-\dfrac{4^n-1}{4}=0$

$$8\cdot 2^n=\frac{4^n}{4},\ 2^{n+3}=2^{2n-2}$$

よって，$n+3=2n-2$ より，$n=5$

コメント

数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ は，漸化式で定義されていますが，どちらも基本的なものです。

問　題

数列$\{a_n\}$が$a_1=36$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot 2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定められているとする。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$とおくときb_nとb_{n+1}の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$a_n>a_{n+1}$となるような n の値の範囲およびa_nが最小となるような n の値を求めよ。

(3)　$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$とおくときS_nが最小となるような n の値をすべて求めよ。

[2003]

解答例

(1)　条件式$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-17\cdot 2^{n+1}$の両辺を$2^{n+1}$で割ると，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$より，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+4n-17,\quad b_{n+1}=b_n+4n-17$$

ただし，$b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{36}{2}=18$である。

よって，$n\geqq 2$で，$b_n=18+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k-17)=18+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-17(n-1)$

$$=2n^2-19n+35$$

$n=1$をあてはめると，$b_1=18$となり成立する。

したがって，$a_n=b_n2^n=(2n^2-19n+35)2^n$

(2)　(1)より，$a_{n+1}=\{2(n+1)^2-19(n+1)+35\}2^{n+1}=2(2n^2-15n+18)2^n$

$$a_{n+1}-a_n=2(2n^2-15n+18)2^n-(2n^2-19n+35)2^n$$
$$=(2n^2-11n+1)2^n$$

$a_n>a_{n+1}$となるのは，$2n^2-11n+1<0$，$n(2n-11)+1<0$

この不等式を満たす自然数は$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$である。

すると，$1\leqq n\leqq 5$のとき$a_n>a_{n+1}$であり，$n\geqq 6$のとき$a_n<a_{n+1}$となるので，

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5>a_6<a_7<a_8<\cdots\cdots$$

よって，$n=6$のとき，a_nは最小となる。

(3)　$n\geqq 2$で$S_n-S_{n-1}=a_n$より，$a_n>0$のとき$S_{n-1}<S_n$，$a_n=0$のとき$S_{n-1}=S_n$，$a_n<0$のとき$S_{n-1}>S_n$となる。

さて，$a_n>0$とすると，(1)より$2n^2-19n+35>0$となり，

$$(2n-5)(n-7)>0,\quad n<\frac{5}{2},\ 7<n$$

よって，$n=2$ のとき $a_n>0$，$3\leqq n\leqq 6$ のとき $a_n<0$，$n=7$ のとき $a_n=0$，$n\geqq 8$ のとき $a_n>0$ となるので,

$$S_1<S_2>S_3>S_4>S_5>S_6=S_7<S_8<S_9<\cdots\cdots$$

$a_1=36$，$a_2=5\times 2^2=20$，$a_3=-4\times 2^3=-32$ より，$S_3=36+20-32=24$ となり，$S_3<S_1=36$ であるので，S_n が最小となるのは $n=6$，7 のときである。

コメント

誘導つきの漸化式の解法と，数列の最大値という有名問題で構成されています。

問　題

n を自然数とする。数 w は,

$$w = 2^i + 2^j + 2^k \quad (i,\ j,\ k \text{は自然数で } 1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq n)$$

の形に表されるものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n = 7$ とする。w の値が 2^8, $2^6 + 2^4$ となるそれぞれの場合について, $(i,\ j,\ k)$ をすべて求めよ。

(2) n を一般の自然数とする。$2^r + 2^s$ (r, s は自然数で $r < s$) の形で表される w の値は全部で何個あるか。

(3) 一般の自然数 n に対し, w の値は全部で何個あるか。 [2001]

解答例

(1) まず, $1 \leqq i \leqq j \leqq k$ において, $2^i + 2^j = 2^k$ を満たすのは $(i,\ j) = (k-1,\ k-1)$ に限ることを示す。

$i < j$ とすると, $2^i(1 + 2^{j-i}) = 2^k$, $1 + 2^{j-i} = 2^{k-i}$ となるが, $j - i \geqq 1$, $k - i \geqq 1$ より左辺は奇数, 右辺は偶数となるので成立しない。よって $i = j = k-1$ である。

さて, $1 \leqq i \leqq j \leqq k \leqq 7$ において, $w = 2^i + 2^j + 2^k$ ……①とする。

$w = 2^8$ のとき, ①は $2^i + 2^j + 2^k = 2^8$ となり, $2^k < 2^8$ より $k \leqq 7$ である。また, $2^8 = 2^i + 2^j + 2^k \leqq 3 \cdot 2^k$ より, $\dfrac{2^8}{3} \leqq 2^k$, $7 \leqq k$ なので, $k = 7$ となる。

このとき $2^i + 2^j = 2^8 - 2^7 = 2^7$ となり, $(i,\ j) = (6,\ 6)$ である。

以上より, $(i,\ j,\ k) = (6,\ 6,\ 7)$

$w = 2^6 + 2^4$ のとき, ①は $2^i + 2^j + 2^k = 2^6 + 2^4 < 2^7$ となり, $2^k < 2^7$ より $k \leqq 6$ である。また, $2^6 + 2^4 = 2^i + 2^j + 2^k \leqq 3 \cdot 2^k$ より, $\dfrac{2^6 + 2^4}{3} \leqq 2^k$, $5 \leqq k$ なので, $k = 5,\ 6$ となる。

$k = 5$ のとき, $2^i + 2^j = 2^6 + 2^4 - 2^5 = 2^5 + 2^4 < 2^6$ となり, $2^j < 2^6$ より $j \leqq 5$ であり, また $2^5 + 2^4 = 2^i + 2^j \leqq 2 \cdot 2^j$ より, $2^4 + 2^3 \leqq 2^j$, $5 \leqq j$ である。よって, $j = 5$ となり, $2^i = 2^4$ から $i = 4$ となる。

$k = 6$ のとき, $2^i + 2^j = 2^6 + 2^4 - 2^6 = 2^4$ となり, $(i,\ j) = (3,\ 3)$ である。

以上より, $(i,\ j,\ k) = (4,\ 5,\ 5)$, $(3,\ 3,\ 6)$

(2) まず, 1 つの w の値に対して, $w = 2^r + 2^s$ $(1 \leqq r < s)$ を満たす $(r,\ s)$ の値がただ 1 組しか存在しないことを示す。

$1 \leqq r < s$, $1 \leqq r' < s'$ として, $2^r + 2^s = 2^{r'} + 2^{s'}$ ……②とおく。

$r<r'$ とすると，②の両辺を 2^r で割って $1+2^{s-r}=2^{r'-r}+2^{s'-r}$ となるが，左辺は奇数，右辺は偶数となるので成立しない。$r>r'$ のときも同様に成立しないので，$r=r'$ となる。

すると，②より $s=s'$ となり，1 つの w の値に対して $(r,\ s)$ の値がただ 1 組しか存在しないので，2^r+2^s の形で表される w の個数は $(r,\ s)$ の個数と一致する。

さて，$w=2^i+2^j+2^k=2^r+2^s$ （$1\leqq i\leqq j\leqq k\leqq n,\ r<s$）……③として，

(i)　$1\leqq i<j<k\leqq n$ のとき　③は明らかに不成立。

(ii)　$1\leqq i=j<k\leqq n$ のとき　③は $w=2^j+2^j+2^k=2^{j+1}+2^k$

$j+1<k$ のときは $j+1=r,\ k=s$ とおくと，$w=2^r+2^s\ (2\leqq r<s\leqq n)$

$j+1=k$ のときは $w=2^{j+1}+2^k=2^k+2^k=2^{k+1}$ となり不適。

(iii)　$1\leqq i<j=k\leqq n$ のとき　③は $w=2^i+2^j+2^j=2^i+2^{j+1}$

$i=r,\ j+1=s$ とおくと，$w=2^r+2^s\ (1\leqq r<s\leqq n+1)$

(iv)　$1\leqq i=j=k\leqq n$ のとき　③は $w=2^i+2^i+2^i=2^i+2^{i+1}$

$i=r,\ i+1=s$ とおくと，$w=2^r+2^s\ (1\leqq r<s\leqq n+1)$

以上より，$w=2^r+2^s$ となる $(r,\ s)$ の条件は，$1\leqq r<s\leqq n+1$ である。したがって，$(r,\ s)$ の個数すなわち w の値は，全部で ${}_{n+1}\mathrm{C}_2=\dfrac{1}{2}(n+1)n$ 個ある。

(3)　(2)より，$w=2^i+2^j+2^k$ （$1\leqq i\leqq j\leqq k\leqq n$）は，$r<s<t$ として，次の 3 つの場合に分類できる。

(i)　$1\leqq i<j<k\leqq n$ のとき

$i=r,\ j=s,\ k=t$ とおくと，$w=2^r+2^s+2^t\ (1\leqq r<s<t\leqq n)$ となる。

さて，1 つの w の値に対して，$w=2^r+2^s+2^t\ (1\leqq r<s<t)$ を満たす $(r,\ s,\ t)$ の値がただ 1 組しか存在しないことを示す。

$1\leqq r<s<t,\ 1\leqq r'<s'<t'$ として，$2^r+2^s+2^t=2^{r'}+2^{s'}+2^{t'}$ ……④とおく。

$r<r'$ とすると，④の両辺を 2^r で割って $1+2^{s-r}+2^{t-r}=2^{r'-r}+2^{s'-r}+2^{t'-r}$ となるが，左辺は奇数，右辺は偶数となるので成立しない。$r>r'$ のときも同様に成立しないので，$r=r'$ となる。

すると，④より $2^s+2^t=2^{s'}+2^{t'}$ となり，(2)より $s=s'$，$t=t'$ である。

よって，1 つの w の値に対して $(r,\ s,\ t)$ の値がただ 1 組しか存在しないので，$2^r+2^s+2^t$ の形で表される w の個数は $(r,\ s,\ t)$ の個数と一致する。

以上より，w の値は ${}_n\mathrm{C}_3=\dfrac{1}{6}n(n-1)(n-2)$ 個ある。

(ii)　$1\leqq i=j<k\leqq n\ (j+1<k)$，$1\leqq i<j=k\leqq n$ または $1\leqq i=j=k\leqq n$ のとき

(2)より，$w=2^r+2^s\ (1\leqq r<s\leqq n+1)$ となり，w の値は $\dfrac{1}{2}(n+1)n$ 個ある。

(iii)　$1 \leqq i = j < k \leqq n$ $(j+1=k)$ のとき

$w = 2^{k+1}$ となり，$k+1 = r$ とおくと，$w = 2^r$ $(3 \leqq r \leqq n+1)$

したがって, w の値は $n-1$ 個ある。

(i)(ii)(iii)より, w の値の個数は,

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)+\frac{1}{2}(n+1)n+(n-1)=\frac{1}{6}(n^3+11n-6)$$

コメント

金沢大の理系では，例年，難問が 1 題出ますが，本問がそれに相当します。しかし，他の問題との難易差があまりにも大きすぎます。なお，この解は何度も書き直したものです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　整数 $n \geqq 3$ に対して，${}_n\mathrm{C}_3 = \displaystyle\sum_{k=3}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2$ が成り立つことを示せ。

(2)　整数 $k \geqq 3$ に対して，$x+y+z=k$ を満たす自然数 x, y, z の組$(x,\ y,\ z)$の個数は$\dfrac{1}{2}(k-1)(k-2)$ であることを示せ。

(3)　整数 $m \geqq 0$ に対して，$x+y+z \leqq m$ を満たす負でない整数 x, y, z の組$(x,\ y,\ z)$の個数を, (1), (2)を用いて求めよ。　[2000]

解答例

(1)　${}_n\mathrm{C}_r = {}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} + {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ より，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1} = {}_n\mathrm{C}_r - {}_{n-1}\mathrm{C}_r$ となるので, $n \geqq 4$ のとき,

$$\sum_{k=3}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_2\mathrm{C}_2 + \sum_{k=4}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_3 + \sum_{k=4}^{n} ({}_k\mathrm{C}_3 - {}_{k-1}\mathrm{C}_3) = {}_n\mathrm{C}_3$$

また，$n=3$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=3}^{3} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_2\mathrm{C}_2 = {}_3\mathrm{C}_3$ より成り立つ。

以上より, $n \geqq 3$ で，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_n\mathrm{C}_3$

(2)　k 個の球を 1 列に並べ, その球の間の $k-1$ か所から 2 か所選んで仕切りを入れる。左側の仕切りの左側にある球の個数を x, 2 つの仕切りの間にある球の個数を y, 右側の仕切りの右側にある球の個数を z とすると,

$$x+y+z=k\ (x \geqq 1,\ \ y \geqq 1,\ \ z \geqq 1) \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, 仕切りの入れ方 1 通りに対して, ①を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$は 1 通り決まり, その個数は,

$${}_{k-1}\mathrm{C}_2 = \frac{1}{2}(k-1)(k-2)$$

(3)　整数 k を $0 \leqq k \leqq m$ とし，$x+y+z=k\ (x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ z \geqq 0) \cdots\cdots$②を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$に対して，$a=x+1$，$b=y+1$，$c=z+1$ とおくと,

$$a+b+c=k+3\ (a \geqq 1,\ \ b \geqq 1,\ \ c \geqq 1) \cdots\cdots\cdots ③$$

③を満たす整数の組$(a,\ b,\ c)$は, (2)より ${}_{k+2}\mathrm{C}_2$ 通りとなるので, ②を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の個数は ${}_{k+2}\mathrm{C}_2$ である。

すると，$x+y+z \leqq m\ (x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ z \geqq 0)$ を満たす整数の組$(x,\ y,\ z)$の個数は, (1)を用いて,

$$\sum_{k=0}^{m} {}_{k+2}\mathrm{C}_2 = \sum_{k=3}^{m+3} {}_{k-1}\mathrm{C}_2 = {}_{m+3}\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}(m+3)(m+2)(m+1)$$

コメント

(3)の条件を満たす四面体の内部または面上の格子点の個数を求めることが本問のねらいです。(1)と(2)がそれを導くためのうまい誘導となっています。

問　題

$n \geqq 3$ とする。1 個のサイコロを n 回振る。この n 回の試行のうちで 6 の目がちょうど 2 回，しかも続けて出る確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求め，$p_{n+1} - \frac{5}{6}p_n = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ であることを示せ。

(3)　$s_n = p_3 + p_4 + \cdots + p_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。ただし，必要ならば，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることは使ってよい。　[2012]

解答例

(1)　サイコロを 3 回振って, 6 の目が 2 回続けて出るのは 2 通りあるので,

$$p_3 = 2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6} = \frac{5}{108}$$

また, サイコロを 4 回振って, 6 の目が 2 回続けて出るのは 3 通りあるので,

$$p_4 = 3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^2 = \frac{25}{432}$$

(2)　サイコロを n 回振って, 6 の目が 2 回続けて出るのは $n-1$ 通りあるので,

$$p_n = (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$$

$$p_{n+1} - \frac{5}{6}p_n = n\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - (n-1)\left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(3)　(2)より，$n \geqq 3$ で，$\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\left(p_{k+1} - \frac{5}{6}p_k\right) = \left(\frac{1}{6}\right)^2\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ ………(＊)

$$\sum_{k=3}^{n}\left(p_{k+1} - \frac{5}{6}p_k\right) = -\frac{5}{6}p_3 + \frac{1}{6}(p_4 + \cdots + p_n) + p_{n+1}$$

$$= \frac{1}{6}(p_3 + p_4 + \cdots + p_n) - p_3 + p_{n+1} = \frac{1}{6}s_n - p_3 + p_{n+1}$$

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1} = \left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{\left(\frac{5}{6}\right)^2\left\{1 - \left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\right\}}{1 - \frac{5}{6}} = \frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}$$

すると, (＊)より，$s_n - 6p_3 + 6p_{n+1} = \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ となり,

$$s_n = 6p_3 - 6p_{n+1} + \left(\frac{5}{6}\right)^2 - \left(\frac{5}{6}\right)^n = \frac{5}{18} - \frac{1}{6}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} + \frac{25}{36} - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

$$= \frac{35}{36} - \frac{1}{6}n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$n \to \infty$ のとき $n\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} \to 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n = \frac{35}{36}$ である。

コメント

確率と極限の融合で，計算量はやや多めですが，計算だけという印象は否めません。

問　題

A, B 2 人が次のようなゲームを行う。第三者（A, B 以外の中立的立場の者）がさいころを投げ, 1 の目が出たら A だけに 3 点, 3 の目が出たら A だけに 2 点を与え, 2 か 4 の目が出たら B だけに 2 点を与える。その他の目が出たら, A にも B にも点を与えない。この試行を何回かくり返し, 先に得点の合計が 4 点以上になった方を勝ちとする。

1 回目の試行で B が勝つ確率を p_1 とする。$n \geqq 2$ のとき, $n-1$ 回目までの試行では勝負はつかず, n 回目の試行で B が勝つ確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

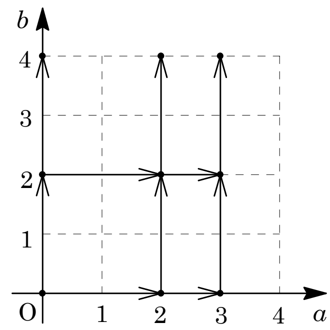
(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。また一般項 p_n を求めよ。

(2)　$q_n = 9p_{n+2} - 6p_{n+1} + p_n$ とするとき，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k} q_n$ を求めよ。また $\displaystyle\sum_{n=1}^{k} p_n$ を求めよ。

(3)　$a = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k} p_n - a\right|$ を求めよ。ただし，必要ならば，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{3^k}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いてよい。　[2009]

解答例

(1)　A の得点を a, B の得点を b とするとき, B が勝つ場合の点$(a,\ b)$の推移には 5 つのルートがある。



Ⅰ　$(0,\ 0)\to(0,\ 2)\to(0,\ 4)$

Ⅱ　$(0,\ 0)\to(0,\ 2)\to(2,\ 2)\to(2,\ 4)$

Ⅲ　$(0,\ 0)\to(0,\ 2)\to(3,\ 2)\to(3,\ 4)$

Ⅳ　$(0,\ 0)\to(2,\ 0)\to(2,\ 2)\to(2,\ 4)$

Ⅴ　$(0,\ 0)\to(3,\ 0)\to(3,\ 2)\to(3,\ 4)$

また, a 軸方向に 2 または 3 進む確率は$\dfrac{1}{3}$, b 軸方向に 2 だけ進む確率は$\dfrac{1}{3}$, さらに動かない確率は$\dfrac{1}{3}$である。

さて, 1 回目の試行で B が勝つ場合はないので, $p_1 = 0$ である。

2 回目の試行で B が勝つ場合はルートⅠのみより, $p_2 = \left(\dfrac{1}{3}\right)^2 = \dfrac{1}{9}$ である。

3 回目の試行で B が勝つ場合, その確率は, ルートⅠでは$2!\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$, ルートⅡ～Ⅴでは$2!\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$ となるので, $p_3 = \dfrac{2}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{4}{27}$ である。

4 回目の試行で B が勝つ場合, その確率は, ルートⅠでは $\dfrac{3!}{2!}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{27}$, ルートⅡ～Ⅴでは$3!\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$ となるので, $p_4 = \dfrac{1}{27}+\dfrac{2}{27}=\dfrac{1}{9}$ である。

また, n 回目 $(n \geqq 3)$ の試行で B が勝つ場合，その確率は,

(i)　ルートⅠのとき　$\dfrac{(n-1)!}{(n-2)!}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-2}\times\dfrac{1}{3}=(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

(ii)　ルートⅡ～Ⅴのとき　$\dfrac{(n-1)!}{(n-3)!}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-3}\times\dfrac{1}{3}=(n-1)(n-2)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

(i)(ii)より，$p_n=(n-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}+(n-1)(n-2)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}=(n-1)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n}$

なお，この値は，$n=1$，2 のときも満たされている。

(2)　条件から，$q_n=9p_{n+2}-6p_{n+1}+p_n$ ……①より，

$$q_n=9(n+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}-6n^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+(n-1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

$$=(n+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}-2n^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+(n-1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}q_n=\frac{\frac{2}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right\}}{1-\frac{1}{3}}=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$ ………②

また，①において，$n=1$ から $n=k$ まで和をとると,

$$\sum_{n=1}^{k}q_n=9\sum_{n=1}^{k}p_{n+2}-6\sum_{n=1}^{k}p_{n+1}+\sum_{n=1}^{k}p_n$$

$$=9\left(\sum_{n=1}^{k}p_n-p_1-p_2+p_{k+1}+p_{k+2}\right)-6\left(\sum_{n=1}^{k}p_n-p_1+p_{k+1}\right)+\sum_{n=1}^{k}p_n$$

$$=4\sum_{n=1}^{k}p_n-3p_1-9p_2+3p_{k+1}+9p_{k+2}\ \text{………③}$$

②③より，$\displaystyle 4\sum_{n=1}^{k}p_n=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k}+3p_1+9p_2-3p_{k+1}-9p_{k+2}$

$$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k}+3\times0+9\times\frac{1}{9}-3k^2\left(\frac{1}{3}\right)^{k+1}-9(k+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{k+2}$$

$$=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{k}+1-k^2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}-(k+1)^2\left(\frac{1}{3}\right)^{k}=2-2(k^2+k+1)\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$$

よって，$\displaystyle\sum_{n=1}^{k}p_n=\frac{1}{2}-\frac{k^2+k+1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$

(3)　(2)より，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{k^2}{3^k}=0$ を用いて，$\displaystyle a=\sum_{n=1}^{\infty}p_n=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}-\frac{k^2+k+1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\right\}=\frac{1}{2}$

このとき，$\displaystyle\left|\sum_{n=1}^{k}p_n-a\right|=\frac{k^2+k+1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}$ より,

$$\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k}p_n-a\right|=\frac{1}{k}\left(\log\frac{k^2+k+1}{2}-k\log3\right)=\frac{\log(k^2+k+1)}{k}-\frac{\log2}{k}-\log3$$

ここで，$\dfrac{2\log k}{k}=\dfrac{\log k^2}{k}<\dfrac{\log(k^2+k+1)}{k}<\dfrac{\log(k+1)^2}{k}=\dfrac{2\log(k+1)}{k+1}\cdot\dfrac{k+1}{k}$ から，

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ を用いると，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}\frac{\log(k^2+k+1)}{k}=0$ となり，

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\log\left|\sum_{n=1}^{k}p_n-a\right|=-\log 3$$

コメント

(1)は確率の問題ですが，(2)以降は数列の計算問題です。たくさんの問題が詰まっており，計算量も半端ではありません。なお，(1)で 5 つのルートを個別に計算していくと，さらに記述量が増加します。

問　題

座標平面上で動点Pが, x 軸の正の方向へ1進むことを文字aで表し, y 軸の正の方向へ1進むことを文字bで表し, 停留することを文字cで表す。a, b, cからなる文字列が与えられたとき, 点Pは原点を出発し, その文字列に従って移動する。たとえば, 長さ4の文字列acabに対しては, 点Pは原点$(0,\ 0)$から出発して, $(1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$と移動し, 点$(2,\ 1)$が到達点となる。長さ n の文字列のなかで, 点Pの到達点が$(p,\ q)$となる文字列の個数を$F_n(p,\ q)$とする。

(1)　$F_n(p,\ q)$を p, q, n を用いて表せ。ただし, n は自然数, p, q は $p\geqq 0$, $q\geqq 0$, $p+q\leqq n$の範囲の整数とする。

(2)　自然数 n が与えられているとき, $F_n(p-1,\ q)\leqq F_n(p,\ q)$を満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ $(p\geqq 1,\ q\geqq 0,\ p+q\leqq n)$ の範囲を図示せよ。また, $F_n(p,\ q-1)\leqq F_n(p,\ q)$ を満たす整数 p, q の組 $(p,\ q)$ $(p\geqq 0,\ q\geqq 1,\ p+q\leqq n)$の範囲を図示せよ。

(3)　$n+1$が 3 の倍数となる自然数 n が与えられているとき, $F_n(p,\ q)$が最大になる自然数p, qの組$(p,\ q)$をすべて求めよ。　[2004]

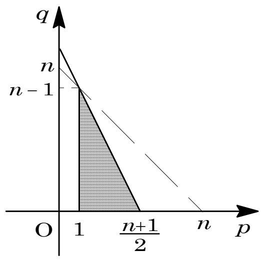
解答例

(1)　動点Pが原点から n 回進み, 点$(p,\ q)$に到達するのは, 右に p 回, 上に q 回だけ移動し, 停留が$n-p-q$回の場合である。すなわち, a が p 個, b が q 個, c が $n-p-q$個の文字列が対応し, その総数は,

$$F_n(p,\ q)=\frac{n!}{p!q!(n-p-q)!}$$

(2)　$F_n(p-1,\ q)\leqq F_n(p,\ q)$のとき, $\dfrac{F_n(p-1,\ q)}{F_n(p,\ q)}\leqq 1$となり,

$$\frac{\dfrac{n!}{(p-1)!q!(n-p+1-q)!}}{\dfrac{n!}{p!q!(n-p-q)!}}=\frac{p}{n-p+1-q}\leqq 1$$

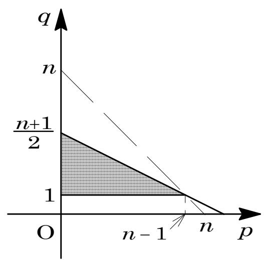


よって, $p\leqq n-p+1-q$より, $2p+q\leqq n+1$

$p\geqq 1$, $q\geqq 0$, $p+q\leqq n$と合わせて$(p,\ q)$の範囲を図示すると, 右図の網点部となる。

次に$F_n(p,\ q-1)\leqq F_n(p,\ q)$より, $\dfrac{F_n(p,\ q-1)}{F_n(p,\ q)}\leqq 1$

$$\frac{\dfrac{n!}{p!(q-1)!(n-p-q+1)!}}{\dfrac{n!}{p!q!(n-p-q)!}}=\frac{q}{n-p-q+1}\leqq 1$$



よって，$q\leqq n-p-q+1$ より，$p+2q\leqq n+1$

$p\geqq 0$，$q\geqq 1$，$p+q\leqq n$ と合わせて$(p,\ q)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。

(3)　(2)より，$F_n(p-1,\ q)=F_n(p,\ q)$ となるのは，$2p+q=n+1$ ………①

$F_n(p,\ q-1)=F_n(p,\ q)$ となるのは，$p+2q=n+1$ ………②

①と②の交点は，①－②より $p-q=0$ となり，$p=q=\dfrac{n+1}{3}$

条件より，$n+1$ は 3 の倍数なので，交点$\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$は格子点となる。

さて，$q=q_0$ として，いったん q を固定して $F_n(p,\ q)$ の値の変化を考えると，$F_n(p-1,\ q_0)\leqq F_n(p,\ q_0)$ を満たす条件は, (2)より，

$$2p+q_0\leqq n+1,\ p\leqq\frac{n+1-q_0}{2}$$

そこで，$F_n(p,\ q_0)$の最大値を，$\dfrac{n+1-q_0}{2}$ が整数かどうかで分けて考えると，

(i)　$\dfrac{n+1-q_0}{2}$ が整数のとき

2 点$\left(\dfrac{n+1-q_0}{2},\ q_0\right)$, $\left(\dfrac{n+1-q_0}{2}-1,\ q_0\right)$で，$F_n(p,\ q_0)$は最大となる。

(ii)　$\dfrac{n+1-q_0}{2}$ が整数でないとき

点$\left(\dfrac{n+1-q_0}{2}-\dfrac{1}{2},\ q_0\right)$で，$F_n(p,\ q_0)$は最大となる。

次に，それぞれの q_0 について $F_n(p,\ q_0)$ の値が最大となる上記の$(p,\ q_0)$ に対し，q_0 を変化させて $F_n(p,\ q)$ の値の変化を考える。

ここで，$F_n(p,\ q-1)\leqq F_n(p,\ q)$ を満たす領域が, (2)から $p+2q\leqq n+1$ より，

(i)　$(p,\ q)$ が領域 $p+2q<n+1$ にあるとき

p の値が等しい 2 点は，上側の点の方が $F_n(p,\ q)$ の値が大きい。

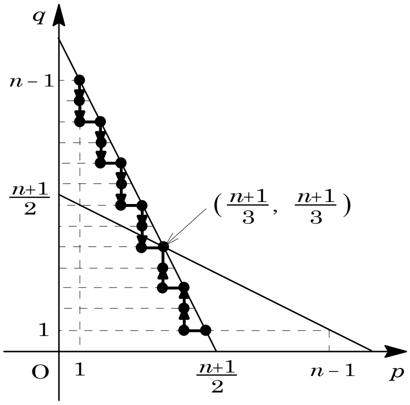
(ii)　$(p,\ q)$ が領域 $p+2q>n+1$ にあるとき

p の値が等しい 2 点は，下側の点の方が $F_n(p,\ q)$ の値が大きい。

(iii)　$(p,\ q)$ が直線 $p+2q=n+1$ 上にあるとき

$F_n(p,\ q)$ の値と，その 1 つ下に位置する$(p,\ q-1)$ における $F_n(p,\ q-1)$ は等しい。

以上より，$F_n(p,\ q)$の値の大小関係をまとめると，右図のようになる。なお，図中で記号$\longrightarrow$は「＜」を，記号●―●は「＝」を意味するものとする。



したがって，$n>2$ とき，$F_n(p,\ q)$の値は$(p,\ q)=\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{n-2}{3},\ \dfrac{n+1}{3}\right)$，$\left(\dfrac{n+1}{3},\ \dfrac{n-2}{3}\right)$において最大になる。

なお，$n=2$ のとき，$F_n(p,\ q)$ の値は$(p,\ q)=\left(\dfrac{2+1}{3},\ \dfrac{2+1}{3}\right)=(1,\ 1)$においてのみ最大になる。

コメント

(3)の答は，直観的にはわかるものの，それをどのように論理展開して導けばよいのか，そこが難しいところです。1 文字固定の方法を利用して記しましたが，文章や式だけでは言い足らず，最後は「図の力」を借りる形になってしまいました。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1) すべての正の数 x, y に対して，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x=y$ の場合に限ることを示せ。

(2) 正の数 x_1，…，x_n が $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ を満たしているとき，不等式 $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\geqq\log\frac{1}{n}$ が成り立つことを証明せよ。また，等号が成り立つのは $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ の場合に限ることを示せ。 [2002]

解答例

(1) x, y の大小関係で場合分けをして，不等式 $x(\log x-\log y)\geqq x-y$ を証明する。

(i) $0<y<x$ のとき

$f(x)=\log x$ とすると，$f'(x)=\dfrac{1}{x}$ となるので，平均値の定理より，

$$\frac{\log x-\log y}{x-y}=\frac{1}{c_1}\quad(0<y<c_1<x)$$

$\dfrac{1}{c_1}>\dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log x-\log y}{x-y}>\dfrac{1}{x}$，$x(\log x-\log y)>x-y$

(ii) $0<x<y$ のとき

(i)と同様にして，$\dfrac{\log y-\log x}{y-x}=\dfrac{1}{c_2}\quad(0<x<c_2<y)$

$\dfrac{1}{c_2}<\dfrac{1}{x}$ より，$\dfrac{\log y-\log x}{y-x}<\dfrac{1}{x}$，$x(\log y-\log x)<y-x$

$$x(\log x-\log y)>x-y$$

(iii) $0<x=y$ のとき

$\log x-\log y=0$，$x-y=0$ より，$x(\log x-\log y)=x-y$

(i)(ii)(iii)より，$x(\log x-\log y)\geqq x-y$ （等号は $x=y$ のとき成立）

(2) $1\leqq i\leqq n$ として, (1)から，$x_i\left(\log x_i-\log\dfrac{1}{n}\right)\geqq x_i-\dfrac{1}{n}$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\left(\log x_i-\log\frac{1}{n}\right)\geqq\sum_{i=1}^{n}\left(x_i-\frac{1}{n}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i-\log\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i\geqq\sum_{i=1}^{n}x_i-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}1$$

条件より $\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i=1$ なので，$\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i-\log\frac{1}{n}\geqq1-\frac{1}{n}\cdot n$

$$\sum_{i=1}^{n}x_i\log x_i\geqq\log\frac{1}{n}$$

等号が成立するのは，(＊)において $x_i=\dfrac{1}{n}$ のとき，すなわち $x_1=\cdots=x_n=\dfrac{1}{n}$ の場合に限る。

コメント

(2)は(1)を利用します。等号成立条件を参照すれば，x を x_i , y を $\dfrac{1}{n}$ と置き換えるのは，そんなに難しいことではありません。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$z^6+27=0$ を満たす複素数 z をすべて求め，それらを表す点を複素数平面上に図示せよ。

(2)　(1)で求めた複素数 z を偏角が小さい方から順に z_1，z_2，…とするとき，z_1，z_2 と積 z_1z_2 を表す 3 点が複素数平面上で一直線上にあることを示せ。ただし，偏角は 0 以上 2π 未満とする。　[2017]

解答例

(1)　$z^6+27=0$ に対して，$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ $(r>0,\ 0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，

$$r^6(\cos 6\theta+i\sin 6\theta)=-27$$

すると，$r^6=|-27|=27$ より $r^2=3$ となり，$r=\sqrt{3}$

また，n を整数として，$6\theta=\arg(-27)=(2n+1)\pi$ より $\theta=\dfrac{2n+1}{6}\pi$ となり，

$$\theta=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

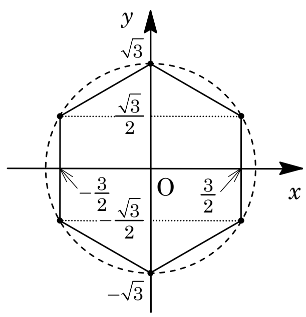
よって，$z=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)=\sqrt{3}i$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)=-\frac{3}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)=-\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{3}{2}\pi+i\sin\frac{3}{2}\pi\right)=-\sqrt{3}i$$

$$z=\sqrt{3}\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)=\frac{3}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$$



図示すると，右図の正六角形の 6 つの頂点となる。

(2)　$z_1=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{6}+i\sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，$z_2=\sqrt{3}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)$ から，

$$z_1z_2=(\sqrt{3})^2\left\{\cos\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)+i\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{2}\right)\right\}=3\left(\cos\frac{2}{3}\pi+i\sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

すると，$z_1=\dfrac{3}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$z_2=\sqrt{3}i$，$z_1z_2=-\dfrac{3}{2}+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}i$ より，$z_2=\dfrac{z_1+z_1z_2}{2}$

よって，点 z_2 は点 z_1 と点 z_1z_2 を結ぶ線分の中点となるので，3 点 z_1，z_2，z_1z_2 は一直線上にある。

コメント

n 乗根と複素数平面を題材にした基本題です。

問　題

数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$は

$$a_1=b_1=2,\ a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n,\ b_{n+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすものとする。a_nを実部としb_nを虚部とする複素数をz_nで表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　$z_{n+1}=wz_n$を満たす複素数wと，その絶対値$|w|$を求めよ。

(2)　複素数平面上で，点z_{n+1}は点z_nをどのように移動した点であるか答えよ。

(3)　数列$\{a_n\}$と$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(4)　複素数平面上の 3 点 0，z_n，z_{n+1}を頂点とする三角形の周と内部を黒く塗りつぶしてできる図形をT_nとする。このとき，複素数平面上でT_1，T_2，…，T_n，…によって黒く塗りつぶされる領域の面積を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$a_1=b_1=2$，$a_{n+1}=\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n$，$b_{n+1}=\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n$に対して，

$$\begin{aligned}z_{n+1}&=a_{n+1}+b_{n+1}i=\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}a_n-\frac{\sqrt{6}}{4}b_n\Big)+\Big(\frac{\sqrt{6}}{4}a_n+\frac{\sqrt{2}}{4}b_n\Big)i\\&=\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i\Big)a_n+\Big(\frac{\sqrt{6}}{4}i+\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)b_ni=\Big(\frac{\sqrt{2}}{4}+\frac{\sqrt{6}}{4}i\Big)(a_n+b_ni)\\&=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}i)z_n\end{aligned}$$

よって，$w=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3}i)$となり，$|w|=\frac{\sqrt{2}}{4}\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}$

(2)　(1)から，$w=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\Big)=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\Big)$となり，点$z_{n+1}$は点$z_n$を原点まわりに$\frac{\pi}{3}$だけ回転し，原点との距離を$\frac{\sqrt{2}}{2}$倍した点である。

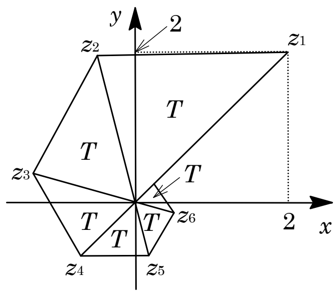
(3)　$z_{n+1}=wz_n$より，$z_n=w^{n-1}z_1$となり，

$$\begin{aligned}a_n+b_ni&=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^{n-1}\Big(\cos\frac{n-1}{3}\pi+i\sin\frac{n-1}{3}\pi\Big)(2+2i)\\&=2\cdot2^{-\frac{n-1}{2}}\Big(\cos\frac{n-1}{3}\pi+i\sin\frac{n-1}{3}\pi+i\cos\frac{n-1}{3}\pi-\sin\frac{n-1}{3}\pi\Big)\\&=2^{-\frac{n-3}{2}}\Big\{\Big(\cos\frac{n-1}{3}\pi-\sin\frac{n-1}{3}\pi\Big)+i\Big(\sin\frac{n-1}{3}\pi+\cos\frac{n-1}{3}\pi\Big)\Big\}\\&=2^{-\frac{n-3}{2}}\cdot\sqrt{2}\Big\{\cos\Big(\frac{n-1}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\Big)+i\sin\Big(\frac{n-1}{3}\pi+\frac{\pi}{4}\Big)\Big\}\\&=2^{-\frac{n-4}{2}}\Big\{\cos\Big(\frac{n}{3}-\frac{1}{12}\Big)\pi+i\sin\Big(\frac{n}{3}-\frac{1}{12}\Big)\pi\Big\}\end{aligned}$$

よって，$a_n = 2^{-\frac{n-4}{2}}\cos\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{12}\right)\pi$，$b_n = 2^{-\frac{n-4}{2}}\sin\left(\dfrac{n}{3}-\dfrac{1}{12}\right)\pi$ である。

(4) 3 点 0，z_n，z_{n+1} を頂点とする三角形の周と内部を T_n とすると，T_n と T_{n+1} は相似となり，その比は $|w| = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ である。ここで，T_n の面積を S_n とおくと，

$$S_{n+1} = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2 S_n = \frac{1}{2}S_n$$



T_7，T_8，$\cdots$ は右図の T_1 から T_6 の和集合に含まれるので，求める面積は，$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot 2\sqrt{2}\cdot 2\sin\dfrac{\pi}{3} = \sqrt{6}$ より，

$$S_1 + S_2 + \cdots + S_6 = \sqrt{6}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^6\right\}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2\sqrt{6}\cdot\frac{63}{64} = \frac{63}{32}\sqrt{6}$$

コメント

複素数平面上の回転・拡大をテーマとした標準的な問題です。

問　題

関数 $f(x)=-x^3+3ax-2b$ に対して，$f(x)=0$ が 2 重解または 3 重解をもつならば，$a^3=b^2$ となることを示せ。ただし，$a\geqq 0$ とする。 [2007]

解答例

条件より，$f(x)=0$ すなわち $x^3-3ax+2b=0$ の解を $x=\alpha$，α，β とおくと，解と係数の関係より，

$$2\alpha+\beta=0\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha^2+2\alpha\beta=-3a\cdots\cdots\cdots②,\quad \alpha^2\beta=-2b\cdots\cdots\cdots③$$

①より $\beta=-2\alpha$ となり，②③に代入すると，

$$\alpha^2-4\alpha^2=-3a,\quad -2\alpha^3=-2b$$

すると，$\alpha^2=a$ かつ $\alpha^3=b$ から，$a^3=b^2$ となる。

コメント

高次方程式の解を題材とした基本的な問題です。

問　題

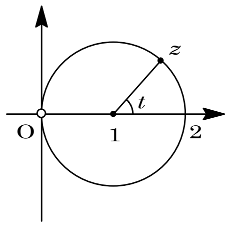
複素数平面上で中心が 1，半径 1 の円を C とする。以下，i は虚数単位とする。

(1)　C 上の点 $z=1+\cos t+i\sin t\ (-\pi<t<\pi)$ について，z の絶対値および偏角を t を用いて表せ。また $\dfrac{1}{z^2}$ を極形式で表せ。

(2)　z が円 C 上の 0 でない点を動くとき，$w=\dfrac{2i}{z^2}$ は複素数平面上で放物線を描くことを示し，この放物線を図示せよ。　[2004]

解答例

(1)　$z=1+\cos t+i\sin t$ のとき，



$$|z|^2=(1+\cos t)^2+\sin^2 t=2+2\cos t=4\cos^2\frac{t}{2}$$

$-\pi<t<\pi$ より，$\cos\dfrac{t}{2}>0$ となり，$|z|=2\cos\dfrac{t}{2}$

$$z=2\cos^2\frac{t}{2}+2i\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}=2\cos\frac{t}{2}\left(\cos\frac{t}{2}+i\sin\frac{t}{2}\right)$$

よって，$\arg z=\dfrac{t}{2}$

また，$\dfrac{1}{z^2}=z^{-2}=\dfrac{1}{4\cos^2\frac{t}{2}}\{\cos(-t)+i\sin(-t)\}$

(2)　(1)より，$w=\dfrac{2i}{z^2}=\dfrac{2i}{4\cos^2\frac{t}{2}}\{\cos(-t)+i\sin(-t)\}$ なので，

$$w=\frac{1}{2\cos^2\frac{t}{2}}\{-\sin(-t)+i\cos(-t)\}=\frac{1}{1+\cos t}(\sin t+i\cos t)$$

$w=x+yi$ とおくと，$x=\dfrac{\sin t}{1+\cos t}$ ………①，$y=\dfrac{\cos t}{1+\cos t}$ ………②

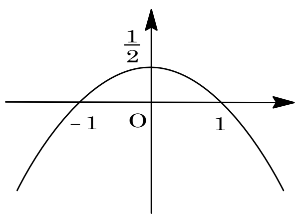
②より，$(y-1)\cos t=-y$，$\cos t=\dfrac{y}{1-y}\ (y\neq 1)$ ………③

①に代入して，$\sin t=x\left(1+\dfrac{y}{1-y}\right)=\dfrac{x}{1-y}$ ………④

③④より，$\left(\dfrac{x}{1-y}\right)^2+\left(\dfrac{y}{1-y}\right)^2=1$，$x^2+y^2=(1-y)^2$，$y=\dfrac{1-x^2}{2}$

さて，①より，$x=\dfrac{2\sin\frac{t}{2}\cos\frac{t}{2}}{2\cos^2\frac{t}{2}}=\tan\dfrac{t}{2}$ となり，x は $-\pi<t<\pi$ においてすべての実数をとりうる。

よって，w の軌跡は放物線 $y=\dfrac{1-x^2}{2}$ であり，図示すると右図のようになる。



コメント

複素数と図形についての基本的な問題です。なお，(1)の偏角には，$2n\pi$ を加えた方がよかったかもしれません。

問　題

$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ を $r>1$ かつ $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす複素数とする。複素数平面において, z, $\dfrac{1}{z}$, $\overline{z}$, $\dfrac{1}{\overline{z}}$ を表す点をそれぞれ P, Q, R, S とする。ただし, $\overline{z}$ は z と共役な複素数を表す。

(1)　点 P, Q, R, S は相異なる 4 点であることを示せ。

(2)　直線 PQ と直線 RS が直交しているとする。このとき, r を θ の関数として表し, θ の動きうる区間 $(\alpha,\ \beta)$ を求めよ。

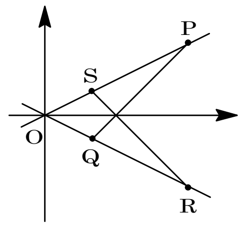
(3)　(2)において, 原点と点 $\cos\beta+i\sin\beta$ を通る直線を l とし, 点 P と l の距離を d とする。$\theta\to\beta$ のとき, d は 0 に収束することを示せ。　[2002]

解答例

(1)　$z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ より, $\dfrac{1}{z}=\dfrac{1}{r}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}=\dfrac{1}{r}(\cos\theta-i\sin\theta)$

$$\overline{z}=r\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}=r(\cos\theta-i\sin\theta),\ \ \frac{1}{\overline{z}}=\frac{1}{r}(\cos\theta+i\sin\theta)$$

$r>1$ より $r>\dfrac{1}{r}$, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{2}<-\theta<0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となるので, 点 P, Q, R, S は相異なる 4 点である。



(2)　PQ ⊥ RS より, $\arg\dfrac{z-\frac{1}{z}}{\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}}}=\dfrac{\pi}{2}$ となり, $\dfrac{z-\frac{1}{z}}{\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}}}=ki\ (k>0)$

$$z-\frac{1}{z}=ki\left(\overline{z}-\frac{1}{\overline{z}}\right)$$

すると, $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta+i\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta=ki\left\{\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta-i\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta\right\}$

$$=ki\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta+k\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta$$

$$\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta=k\left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta\cdots\cdots①,\ \left(r+\frac{1}{r}\right)\sin\theta=k\left(r-\frac{1}{r}\right)\cos\theta\cdots\cdots②$$

①②より $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=k^2\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta$ となり, $r>\dfrac{1}{r}$, $\cos\theta>0$, $k>0$ より $k=1$

①より, $\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\cos\theta=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\sin\theta$, $r^2(\cos\theta-\sin\theta)=\cos\theta+\sin\theta$

$\cos\theta-\sin\theta=0$, すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときは成立しないので,

$$r^2=\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta},\ \ r=\sqrt{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}}$$

さて, $r>1$ より $\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}>1$, $(\cos\theta+\sin\theta)(\cos\theta-\sin\theta)>(\cos\theta-\sin\theta)^2$

$$(\cos\theta-\sin\theta)(\cos\theta+\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta)>0,\ \ 2\sin\theta(\cos\theta-\sin\theta)>0$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\theta \neq \dfrac{\pi}{4}$ より，θ の動きうる区間は $\left(0,\ \dfrac{\pi}{4}\right)$ である。

(3)　$\beta=\dfrac{\pi}{4}$ より，$d=r\sin\left(\dfrac{\pi}{4}-\theta\right)=\sqrt{\dfrac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}}\left(\sin\dfrac{\pi}{4}\cos\theta-\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\theta\right)$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\frac{\cos\theta+\sin\theta}{\cos\theta-\sin\theta}(\cos\theta-\sin\theta)^2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}} d=\lim_{\theta\to\frac{\pi}{4}}\frac{\sqrt{2}}{2}\sqrt{\cos^2\theta-\sin^2\theta}=0$

コメント

誘導に従えば，スムーズに計算が進みます。うまくまとまっている問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) 絶対値が 1 の複素数 α_1，α_2，α_3 が $\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ を満たすとき，α_1，α_2，α_3 を求めよ。

(2) β_1，β_2，γ を絶対値が 1 の複素数とし，$P(z)=\beta_2 z^2+\beta_1 z+(\cos 30°+i\sin 30°)$ が $\dfrac{1}{\gamma}P(\gamma)=3$ を満たすとする。ただし，i は虚数単位である。このとき，β_1，β_2，γ を求め，さらに実数 t が $0\leqq t\leqq 1$ を動くとき，複素数平面上で点 $P(\gamma t)$ が描く軌跡を求めよ。 [1999]

解答例

(1) $|\alpha_1|=|\alpha_2|=|\alpha_3|=1$ より，

$$\alpha_1=\cos\theta_1+i\sin\theta_1,\ \ \alpha_2=\cos\theta_2+i\sin\theta_2,\ \ \alpha_3=\cos\theta_3+i\sin\theta_3$$

$\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=3$ より，

$$\cos\theta_1+\cos\theta_2+\cos\theta_3=3\cdots\cdots①,\ \ \sin\theta_1+\sin\theta_2+\sin\theta_3=0\cdots\cdots②$$

①より，$\cos\theta_1=\cos\theta_2=\cos\theta_3=1$

すると $\sin\theta_1=\sin\theta_2=\sin\theta_3=0$ となり，②を満たす。

以上より，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$

(2) $\omega=\cos 30°+i\sin 30°$ とおくと，$P(z)=\beta_2 z^2+\beta_1 z+\omega$

$\dfrac{1}{\gamma}P(\gamma)=3$ から，$\beta_2\gamma+\beta_1+\dfrac{\omega}{\gamma}=3$

ここで，$|\beta_2\gamma|=|\beta_2||\gamma|=1$，$|\beta_1|=1$，$\left|\dfrac{\omega}{\gamma}\right|=\dfrac{|\omega|}{|\gamma|}=1$ より(1)を用いると，

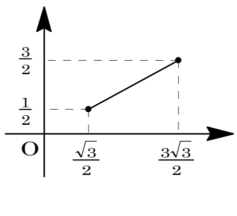
$$\beta_2\gamma=\beta_1=\frac{\omega}{\gamma}=1$$

よって，$\beta_1=1$，$\gamma=\omega=\cos 30°+i\sin 30°=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$

$$\beta_2=\frac{1}{\gamma}=\frac{1}{\omega}=\cos 30°-i\sin 30°=\frac{\sqrt{3}-i}{2}$$

すると，$P(z)=\dfrac{1}{\omega}z^2+z+\omega$

$$P(\gamma t)=P(\omega t)=\frac{1}{\omega}\cdot(\omega t)^2+\omega t+\omega=(t^2+t+1)\omega$$



$0\leqq t\leqq 1$ より，$1\leqq t^2+t+1\leqq 3$ なので，点 $P(\gamma t)$ は 2 点 ω，3ω を結ぶ線分を描く。

コメント

複素数平面上では，α_1，α_2，α_3 が単位円周上にあることより，$\alpha_1=\alpha_2=\alpha_3=1$ は明らかなのですが，それをスキッと示そうとすると，予想以上に困難でした。最初は，$\dfrac{\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{3}=1$ として「重心」を使おうかと思いましたが，直観的すぎるのではないかと考え止めました。結局，極形式を用いた普通の方法に落ち着きました。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ に対し，不等式 $\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$ が成立することを示せ。

(2)　正の実数 x と自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対し，複素数 $1 + \dfrac{x}{n}i$ の偏角を θ_n $(0 \leqq \theta_n < 2\pi)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n$ を求めよ。

(3)　(2)で与えた複素数の n 乗 $\left(1 + \dfrac{x}{n}i\right)^n$ の実部を a_n とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。

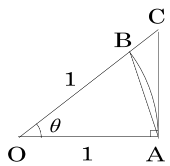
[1998]

解答例

(1)　$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，右下図より△OAB＜扇形 OAB＜△OAC

$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot \sin\theta < \frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta < \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\tan\theta$$

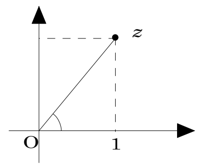
$$\sin\theta < \theta < \tan\theta$$



$\theta = 0$ のときは，$\sin\theta = \theta = \tan\theta = 0$

よって，$0 \leqq \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin\theta \leqq \theta \leqq \tan\theta$

(2)　$x > 0$，$n \geqq 1$ より，$0 < \theta_n < \dfrac{\pi}{2}$



$$\tan\theta_n = \frac{x}{n},\quad \sin\theta_n = \frac{\frac{x}{n}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}}$$

(1)から，$\dfrac{\frac{x}{n}}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}} < \theta_n < \dfrac{x}{n}$ なので，$\dfrac{x}{\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}} < n\theta_n < x$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\theta_n = x$

(3)　z は極形式で $z = \sqrt{1 + \dfrac{x^2}{n^2}}\,(\cos\theta_n + i\sin\theta_n)$ と書けるので，z^n の実部 a_n は，ド・モアブルの定理から，

$$a_n = \left(\sqrt{1 + \frac{x^2}{n^2}}\right)^n \cos n\theta_n = \left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n}{2}} \cos n\theta_n = \left\{\left(1 + \frac{x^2}{n^2}\right)^{\frac{n^2}{x^2}}\right\}^{\frac{x^2}{2n}} \cos n\theta_n$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = e^0 \cos x = \cos x$

コメント

(1)で$f(\theta)=\theta-\sin\theta$，$g(\theta)=\tan\theta-\theta$とおき，微分して単調増加を示すという方法は好ましくないでしょう。というのも，高校数学の普通の立場では，この証明すべき不等式をもとにして，三角関数の微分の公式を導いているからです。ちょっと疑問の残る出題です。

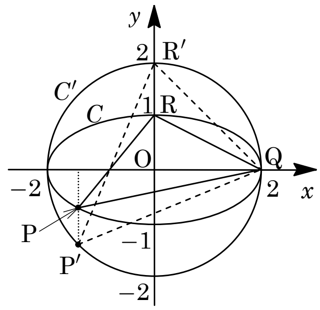
問　題

曲線$C: x^2+4y^2=4$上を動く点 P と，C 上の定点Q(2, 0)，R(0, 1)がある。次の問いに答えよ。

(1)　△PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。　[2016]

解答例



(1)　まず，楕円$C: x^2+4y^2=4$を y 軸方向に 2 倍拡大して，円$C': x^2+y^2=4$をつくるとする。

このとき，点 P はP′，点R(0, 1)はR′(0, 2)に対応し，点Q(2, 0)の位置は変わらない。

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{P'QR'}$より，△PQR の面積が最大になるのは，△P′QR′ の面積が最大のときである。

このときの点P′の座標は，直線$y=x$に関する対称性から，$\mathrm{P'}\left(2\cos\dfrac{5}{4}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$すなわち$\mathrm{P'}(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$である。また最大値は，

$$\triangle\mathrm{P'QR'}=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

よって，△PQR は$\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$のときに最大となり，最大値は，

$$\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$$

(2)　(1)と同様にして，円C'の内側で直線P′Qの下方にある部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}$$

よって，楕円 C の内側で直線 PQ の下方にある部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

コメント

楕円を円に変換して処理する解法を採用しました。そうすると，計算はほとんど不要といってよいぐらいの解答例になります。

問　題

$-1<t<1$ を満たす t に対して，xy 平面上の直線 $y=t$ と楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ の交点を $\mathrm{Q}(-s,\ t)$，$\mathrm{R}(s,\ t)$ $(s>0)$ とする。点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積を $S(t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

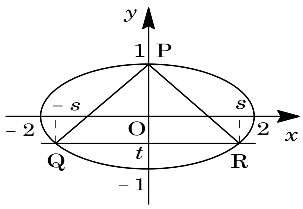
(1)　$S(t)$ を求めよ。また，$-1<t<1$ における $S(t)$ の最大値とそのときの点 R の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた点 R における楕円 C の接線 l と x 軸との交点を T とするとき，$\cos\angle\mathrm{PRT}$ の値を求めよ。

(3)　楕円 C で囲まれる図形は直線 PR によって 2 つの部分に分割される。このうち原点が属さない方の面積を，(1)で求めた点 R に対して求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積 $S(t)$ は，



$$S(t)=\frac{1}{2}\cdot 2s(1-t)=s(1-t)$$

ここで，$\dfrac{s^2}{4}+t^2=1$ より，$s=2\cos\theta$，$t=\sin\theta$ とおける。すると，$s>0$，$-1<t<1$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$S(t)=f(\theta)$ とすると，

$$f(\theta)=2\cos\theta(1-\sin\theta)$$

$$f'(\theta)=-2\sin\theta(1-\sin\theta)-2\cos^2\theta=4\sin^2\theta-2\sin\theta-2$$

$$=2(2\sin\theta+1)(\sin\theta-1)$$

θ	$-\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	$-\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$		$\nearrow$	$\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$	$\searrow$	

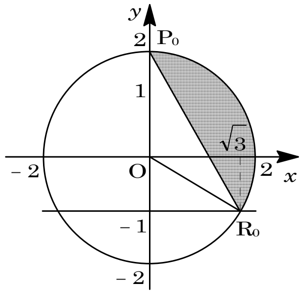
よって，右表より $S(t)$ は最大値 $\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$ をとる。このとき，$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$ から $s=\sqrt{3}$，$t=-\dfrac{1}{2}$ となり，$\mathrm{R}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2)　R における接線 l は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}x-\dfrac{1}{2}y=1$ となり，x 軸との交点は $\mathrm{T}\left(\dfrac{4}{\sqrt{3}},\ 0\right)$ である。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{RT}}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{3}{2}\right)$ となり，

$$\cos\angle\mathrm{PRT}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{RT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RT}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{RP}}|}=\frac{-1+\dfrac{3}{4}}{\sqrt{\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{4}}\sqrt{3+\dfrac{9}{4}}}=-\frac{1}{7}$$

(3)　楕円 C を y 軸方向に 2 倍拡大すると，点 P は $P_0(0,\ 2)$，点 R は $R_0(\sqrt{3},\ -1)$ に移り，$\angle P_0OR_0=\dfrac{2}{3}\pi$ となる。



ここで，右図の弓形の面積を S_0 とおくと，

$$S_0=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

すると，直線 PR によって分割される楕円 C の原点を含まない部分の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}S_0=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

コメント

楕円についての基本的な問題です。(3)では，楕円を円にいったん変換して，面積を計算しました。

問　題

定数 k に対して，関数 $f(t)$ と $g(t)$ をそれぞれ，$f(t)=3^{k+t}+3^{k-t}$，$g(t)=3^{k+t}-3^{k-t}$ と定める。すべての実数 t に対して，$f(2t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1)　定数 k を求めよ。また，$\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2$ を求めよ。

(2)　媒介変数 t で表された曲線 $C: x=2f(t),\ y=g(t)-1$ を x と y の方程式で表し，C を座標平面上に図示せよ。

(3)　(2)の曲線 C 上の点 P における接線が原点 O を通るとき，接点 P の座標を求めよ。

[2000]

解答例

(1)　$f(t)=3^k(3^t+3^{-t})$，$g(t)=3^k(3^t-3^{-t})$，$f(2t)=\{f(t)\}^2+\{g(t)\}^2$ より，

$$3^k(3^{2t}+3^{-2t})=3^{2k}(3^{2t}+2+3^{-2t})+3^{2k}(3^{2t}-2+3^{-2t})$$

$$3^{2t}+3^{-2t}=2\cdot 3^k(3^{2t}+3^{-2t}),\ (2\cdot 3^k-1)(3^{2t}+3^{-2t})=0$$

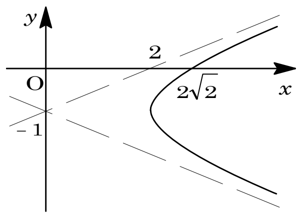
$3^{2t}+3^{-2t}>0$ なので，$3^k=\dfrac{1}{2}$，$k=\log_3\dfrac{1}{2}=-\log_3 2$

また，$\{f(t)\}^2-\{g(t)\}^2=4\cdot 3^{2k}=4\cdot\dfrac{1}{4}=1$ ………①

(2)　条件より，$x=2f(t)$，$y=g(t)-1$ なので，$f(t)=\dfrac{x}{2}$，$g(t)=y+1$

①に代入して，$\dfrac{x^2}{4}-(y+1)^2=1$ ………②

ここで，$x=2f(t)=2\cdot\dfrac{1}{2}(3^t+3^{-t})\geqq 2$ となり，$y=g(t)-1=\dfrac{1}{2}(3^t-3^{-t})-1$ から，すべての実数値をとりうるので，曲線 C は双曲線の右側の枝である。



なお，漸近線は，$y+1=\pm\dfrac{x}{2}$，$y=\pm\dfrac{x}{2}-1$

x 軸との交点は，$x\geqq 1$ より $\dfrac{x^2}{4}=2$，$x=2\sqrt{2}$

(3)　接点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，②より $\dfrac{s^2}{4}-(t+1)^2=1$ ……③となり，接線は，

$$\frac{sx}{4}-(t+1)(y+1)=1$$

原点を通ることより，$-(t+1)=1$，$t=-2$ ………④

③④より，$s^2=8$，$s=2\sqrt{2}$ となり，P の座標は $(2\sqrt{2},\ -2)$ である。

コメント

(2)の双曲線の式を求めるのに，(1)の①がずいぶん役に立ちます。もっとも最初は，うっかりして，これに気付かずに求めようとしましたが。

問　題

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=3,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}\Big(a_n+\frac{7}{a_n}\Big)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a_n>\sqrt{7}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(2)　数列$\{b_n\}$を

$$b_n=\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定めるとき，$b_{n+1}=b_n{}^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$と$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})$を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$a_1=3,\ a_{n+1}=\dfrac{1}{2}\Big(a_n+\dfrac{7}{a_n}\Big)$で定義される数列$\{a_n\}$に対して，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$で$a_n>\sqrt{7}$であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=3>\sqrt{7}$より成立している。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k>\sqrt{7}$と仮定すると，

$$a_{k+1}-\sqrt{7}=\frac{1}{2}\Big(a_k+\frac{7}{a_k}\Big)-\sqrt{7}=\frac{a_k{}^2+7-2\sqrt{7}a_k}{2a_k}=\frac{(a_k-\sqrt{7})^2}{2a_k}>0$$

よって，$a_{k+1}>\sqrt{7}$となり，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$で，$a_n>\sqrt{7}$である。

(2)　$b_n=\dfrac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}$……①で，(1)から複号同順で，$a_{n+1}\pm\sqrt{7}=\dfrac{(a_n\pm\sqrt{7})^2}{2a_n}$なので，

$$b_{n+1}=\frac{a_{n+1}-\sqrt{7}}{a_{n+1}+\sqrt{7}}=\frac{(a_n-\sqrt{7})^2}{(a_n+\sqrt{7})^2}=\Big(\frac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}\Big)^2=b_n{}^2\ \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　②より，$b_n>0$なので$\log b_{n+1}=2\log b_n$となり，$\log b_n=2^{n-1}\log b_1$

ここで，①より$b_1=\dfrac{a_1-\sqrt{7}}{a_1+\sqrt{7}}=\dfrac{3-\sqrt{7}}{3+\sqrt{7}}=\dfrac{(3-\sqrt{7})^2}{2}=8-3\sqrt{7}$となり，

$$\log b_n=2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，$0<8-3\sqrt{7}<1$なので$\log(8-3\sqrt{7})<0$となり，$n\to\infty$のとき

$$\log b_n\to-\infty,\ b_n\to+0$$

①より，$b_n(a_n+\sqrt{7})=a_n-\sqrt{7}$となり，$a_n=\dfrac{-\sqrt{7}(b_n+1)}{b_n-1}$から，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{-\sqrt{7}}{-1}=\sqrt{7}$$

また，③より $\log\dfrac{a_n-\sqrt{7}}{a_n+\sqrt{7}}=2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})$ なので，

$$2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})=2^{-n}\{\log(a_n+\sqrt{7})+2^{n-1}\log(8-3\sqrt{7})\}$$
$$=2^{-n}\log(a_n+\sqrt{7})+\frac{1}{2}\log(8-3\sqrt{7})$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\sqrt{7}$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^{-n}\log(a_n-\sqrt{7})=\frac{1}{2}\log(8-3\sqrt{7})$ となる。

コメント

有名な漸化式を題材にした極限の問題です。誘導が丁寧なので，方針に迷うことはありません。

問　題

関数 $y=\log_3 x$ とその逆関数 $y=3^x$ のグラフが，直線 $y=-x+s$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$，$\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$ とする。次の問いに答えよ。

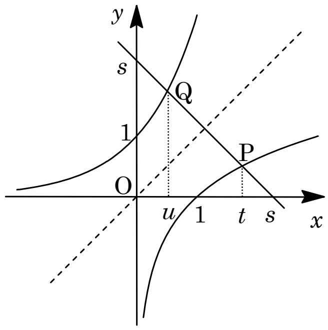
(1)　線分 PQ の中点の座標は，$\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$であることを示せ。

(2)　s, t, u は $s=t+u$，$u=\log_3 t$ であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}$ が有限な値となるように，定数 k の値を定め，その極限値を求めよ。

[2015]

解答例



(1)　$y=\log_3 x$ ……①と $y=3^x$ ……②のグラフは，直線 $y=x$ ……③に関して対称である。

また，直線 $y=-x+s$ ……④は，直線 $y=x$ に関して対称となっている。

すると，①と④の交点 $\mathrm{P}(t,\ \log_3 t)$ と，②と④の交点 $\mathrm{Q}(u,\ 3^u)$ は，直線 $y=x$ に関して対称である。

これより，線分 PQ の中点は直線 $y=x$ 上にあり，③と④を連立すると，$x=-x+s$，$x=y=\dfrac{s}{2}$ である。

よって，中点の座標は$\left(\dfrac{s}{2},\ \dfrac{s}{2}\right)$となる。

(2)　(1)より，$\dfrac{t+u}{2}=\dfrac{s}{2}$ となるので，$s=t+u$ である。

また，点 P, Q が直線 $y=x$ に関して対称であることより，

$$t=3^u,\ u=\log_3 t$$

(3)　(2)より，$\dfrac{su-k}{t-3}=\dfrac{(t+\log_3 t)\log_3 t-k}{t-3}=\dfrac{(\log_3 t)^2+t\log_3 t-k}{t-3}$

ここで，$t\to 3$ のとき $t-3\to 0$ となるので，$\displaystyle\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}$ が有限な値となるためには，$t\to 3$ のとき $(\log_3 t)^2+t\log_3 t-k\to 0$ となることが必要であり，

$$(\log_3 3)^2+3\log_3 3-k=0,\ k=1^2+3\cdot 1=4$$

さて，$f(t)=(\log_3 t)^2+t\log_3 t$ とおくと，$f(3)=4$ であり，

$$f'(t)=\frac{2\log_3 t}{t\log 3}+\log_3 t+\frac{t}{t\log 3}=\frac{2\log_3 t}{t\log 3}+\log_3 t+\frac{1}{\log 3}$$

よって，$\dfrac{su-k}{t-3}=\dfrac{(\log_3 t)^2+t\log_3 t-4}{t-3}=\dfrac{f(t)-f(3)}{t-3}$ となり，

$$\lim_{t\to 3}\frac{su-k}{t-3}=f'(3)=\frac{2}{3\log 3}+1+\frac{1}{\log 3}=1+\frac{5}{3\log 3}$$

コメント

関数の極限についての問題です。ただ，上の解答例(1)(2)は「明らか」ということを記しているにすぎません。これでよいのかと戸惑ってしまいます。

問　題

$a>1$ とする。無限等比級数

$$a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$$

が収束するとき，その和を $S(x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　この無限等比級数が収束するような実数 x の値の範囲を求めよ。また，そのときの $S(x)$ を求めよ。

(2)　x が(1)で求めた範囲を動くとき，$S(x)$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　$I(a)=\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)dx$ とおくとき，極限値 $\lim_{a\to\infty}I(a)$ を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$a>1$ のとき，無限等比級数 $a+ax(1-ax)+ax^2(1-ax)^2+ax^3(1-ax)^3+\cdots\cdots$ が収束する条件は，$-1<x(1-ax)<1\cdots\cdots(*)$である。

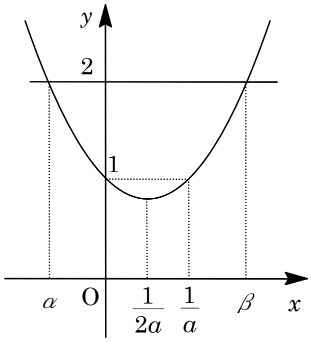
(*)の左側の不等式は，$ax^2-x-1<0$ となり，$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$

(*)の右側の不等式は，$ax^2-x+1>0$ となる，$ax^2-x+1=0$ の $D=1-4a<0$ から，つねに成り立つ。

よって，求める条件は，$\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}<x<\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ であり，このとき，

$$S(x)=\frac{a}{1-x(1-ax)}=\frac{a}{ax^2-x+1}$$

(2)　まず，$f(x)=ax^2-x+1=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2+1-\frac{1}{4a}$ とおくと，$y=f(x)$のグラフは右図のようになる。



また，$\alpha=\frac{1-\sqrt{1+4a}}{2a}$，$\beta=\frac{1+\sqrt{1+4a}}{2a}$ とおくと，α，βは，$ax^2-x-1=0$ すなわち $f(x)=2$ の解となる。

そこで，$\alpha<x<\beta$ において，$f(x)$のとり得る値は，

$$1-\frac{1}{4a}\leqq f(x)<2$$

すると，$\frac{1}{2}<\frac{1}{f(x)}\leqq\frac{4a}{4a-1}$ より，$\frac{a}{2}<S(x)\leqq\frac{4a^2}{4a-1}$ である。

(3)　$0\leqq x\leqq\frac{1}{a}$ において，$1-\frac{1}{4a}\leqq f(x)\leqq 1$ となるので，$a\leqq S(x)\leqq\frac{4a^2}{4a-1}$ より，

$$\int_0^{\frac{1}{a}}a\,dx\leqq\int_0^{\frac{1}{a}}S(x)dx\leqq\int_0^{\frac{1}{a}}\frac{4a^2}{4a-1}dx,\quad a\cdot\frac{1}{a}\leqq I(a)\leqq\frac{4a^2}{4a-1}\cdot\frac{1}{a}$$

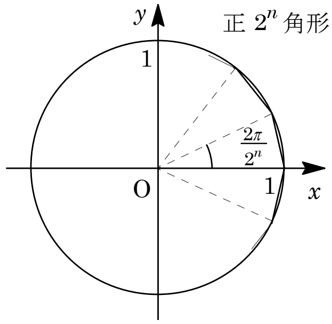
よって，$1\leqq I(a)\leqq\frac{4a}{4a-1}$ から，$\lim_{a\to\infty}I(a)=1$ である。

コメント

無限等比級数の収束条件を題材とした問題です。(2)が(3)のストレートな誘導となっている佇まいですが，そうではありませんでした。

問　題

半径 1 の円に内接する正 2^n 角形 $(n \geqq 2)$ の面積を S_n，周の長さを L_n とする。次の問いに答えよ。



(1)　$S_n = 2^{n-1}\sin\dfrac{\pi}{2^{n-1}}$，$L_n = 2^{n+1}\sin\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(2)　$\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$，$\dfrac{S_n}{L_n} = \dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{2^n}$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n}$ を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　半径 1 の円に内接する正 2^n 角形の面積 S_n，周の長さ L_n は,

$$S_n = \left(\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin\frac{2\pi}{2^n}\right)\cdot 2^n = 2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}$$

$$L_n = \left(2\cdot 1\cdot\sin\frac{\pi}{2^n}\right)\cdot 2^n = 2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}$$

(2)　(1)より，$\dfrac{S_n}{S_{n+1}} = \dfrac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^n\sin\frac{\pi}{2^n}} = \dfrac{2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{2\sin\frac{\pi}{2^n}} = \cos\dfrac{\pi}{2^n}$

$$\frac{S_n}{L_n} = \frac{2^{n-1}\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{2^{n+1}\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2^n}\cos\frac{\pi}{2^n}}{4\sin\frac{\pi}{2^n}} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n}$$

(3)　(1)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\sin\frac{\pi}{2^{n-1}}}{\frac{\pi}{2^{n-1}}}\cdot\pi = \pi$

また, (2)より，$\displaystyle\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{S_2}{S_3}\cdot\frac{S_3}{S_4}\cdot\cdots\cdot\frac{S_n}{S_{n+1}} = \frac{S_2}{S_{n+1}}$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_{n+1}} = \frac{S_2}{\pi} = \frac{2\sin\frac{\pi}{2}}{\pi} = \frac{2}{\pi}$$

(4)　(2)より，$\displaystyle\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n} = \frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^2}\cdot\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n}$

すると, (3)より,

$$\lim_{n\to\infty} 2^n\frac{S_2}{L_2}\frac{S_3}{L_3}\cdots\frac{S_n}{L_n} = \lim_{n\to\infty} 2\cos\frac{\pi}{2^2}\cos\frac{\pi}{2^3}\cdots\cos\frac{\pi}{2^n} = \frac{4}{\pi}$$

コメント

たいへん細かい誘導がつけられています。取り立てて考える場面がないほどです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　a を定数とし，正の数からなる数列 $\{x_n\}$ は，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n})=a$ を満たすとする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=2a$ が成り立つことを示せ。

(2)　自然数 $L,\ n$ に対して，$\displaystyle\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$ が成り立つことを示せ。

(3)　b は定数で，$b>1$ とする。自然数 n に対して，集合

$$\left\{ L \,\middle|\, L\text{ は}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b\text{を満たす自然数} \right\}$$

の要素の個数を L_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=b$ が成り立つことを示せ。 [2008]

解答例

(1)　$y_n=\sqrt{x_n+n}-\sqrt{n}$ とおくと，条件より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n=a$ となり，

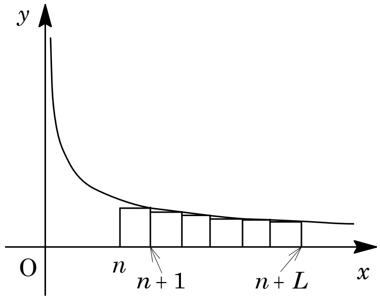
$$x_n+n=(y_n+\sqrt{n})^2,\quad x_n=y_n{}^2+2\sqrt{n}y_n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y_n{}^2}{\sqrt{n}}+2y_n\right)=2a$

(2)　$f(x)=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x)=-\frac{1}{4}x^{-\frac{3}{2}}<0,\quad f''(x)=\frac{3}{8}x^{-\frac{5}{2}}>0$$

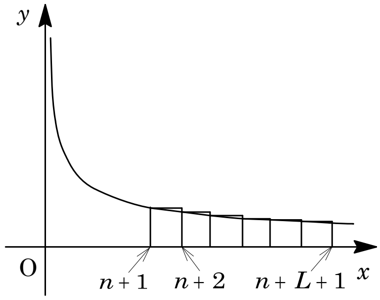
これより，曲線 $y=f(x)$ は単調に減少し，下に凸となり，右上図から，



$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\int_{n}^{n+L}f(x)\,dx=\Big[\sqrt{x}\Big]_{n}^{n+L}$$

$$=\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

また，右下図より，



$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}>\int_{n+1}^{n+L+1}f(x)\,dx=\Big[\sqrt{x}\Big]_{n+1}^{n+L+1}$$

$$=\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}$$

まとめると，

$$\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\sqrt{L+n}-\sqrt{n}$$

(3)　条件より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<b$……①，かつ，$\displaystyle b\leqq\sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$……②

(2)より，$\displaystyle\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n}\frac{1}{\sqrt{k+n}}$………③

①③より，$\displaystyle\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{b}{2}$………④

また，(2)と同様にして，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=2}^{L+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}<\int_{n+1}^{n+L+1}f(x)\,dx=\Big[\sqrt{x}\,\Big]_{n+1}^{n+L+1}=\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{L+n+1}-\sqrt{n+1}$ となり，

$$\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{L_n+1}\frac{1}{\sqrt{k+n}}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}\text{………⑤}$$

②⑤より，$\displaystyle\frac{b}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}$………⑥

④⑥をまとめると，

$$\frac{b}{2}-\frac{1}{2\sqrt{n+1}}<\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1}<\frac{b}{2}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{L_n+n+1}-\sqrt{n+1})=\frac{b}{2}$

すると，(1)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n+1}}=2\cdot\frac{b}{2}=b$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{L_n}{\sqrt{n+1}}\cdot\sqrt{\frac{n+1}{n}}=b$$

コメント

数年前まで，金沢大・理系で定番であった微積分の難問が復活です。特に，(3)は，記述しにくい設問です。

問　題

1 個のさいころを振る試行をくり返す。n 回の試行で少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率を a_n とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，k 回目の試行ではじめて 1 の目が出る確率を b_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_n を n を用いて表せ。

(2)　$M_n=\dfrac{1}{a_n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k$ とする。M_n を n を用いて表せ。

(3)　(2)の M_n について，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}M_n$ を求めよ。ただし，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ が成り立つことを用いてもよい。　[2005]

解答例

(1)　n 回さいころを振ったとき，1 の目が出ない確率は $\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ より，少なくとも 1 回は 1 の目が出る確率 a_n は,

$$a_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2)　k 回目に振ったとき，はじめて 1 の目が出る確率を b_k は，$b_k=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{k-1}$ である。

ここで，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}kb_k=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}$ とおくと，

$$6S_n-5S_n=\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}-\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{5}{6}\right)^{k}=1+\frac{5}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-n\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$S_n=6\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\right\}-n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n=6-(n+6)\left(\dfrac{5}{6}\right)^n$ となり，

$$M_n=\frac{6-(n+6)\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}=6-\frac{n\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}$$

(3)　条件より, $n\to\infty$ のとき $n\left(\dfrac{5}{6}\right)^n\to 0$ なので, (2)から,

$$\lim_{n\to\infty}M_n=6$$

コメント

有名な(等差)×(等比)タイプの数列の和 S_n で，期待値を計算していることがわかります。

問　題

関数 $f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$ に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(0)$, $f'(0)$ および $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$ の値を求めよ。

(2)　O を原点, P を曲線 $y=f(x)$ 上の点, Q を x 軸上の点とする。P, Q の x 座標がともに正で, $\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ の関係を保ちながら P, Q が動くとき, 直線 PQ が y 軸と交わる点を R とする。

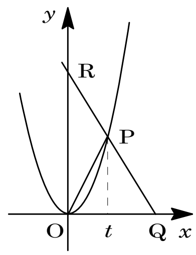
(i)　P の x 座標を t, R の y 座標を $g(t)$ とおくとき,

$$g(t)=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

となることを示せ。

(ii)　P が O に限りなく近づくとき, R が近づく点を求めよ。　[2003]

解答例



(1)　$f(x)=e^{2x}+e^{-2x}-2$ より, $f(0)=e^0+e^0-2=0$

また, $f'(x)=2e^{2x}-2e^{-2x}$ より, $f'(0)=2e^0-2e^0=0$

$$\lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(e^x-e^{-x})^2}{x^2}=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-e^{-x}}{x}\right)^2$$

$$=\lim_{x\to 0}\left(\frac{e^x-1}{x}+\frac{e^{-x}-1}{-x}\right)^2=(1+1)^2=4$$

(2)　$\mathrm{P}(t,\ f(t))$ とおくと, $\mathrm{OP}=\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}$

$\mathrm{OP}=\mathrm{OQ}$ より $\mathrm{Q}\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2},\ 0\right)$ となり, 条件から $\mathrm{R}(0,\ g(t))$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ より,

$$(0,\ g(t))=(t,\ f(t))+k\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t,\ -f(t)\right)$$

$$0=t+k\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t\right)\cdots\cdots\cdots①,\quad g(t)=f(t)-kf(t)\cdots\cdots\cdots②$$

①より $k=\dfrac{-t}{\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}-t}=-\dfrac{t\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}+t\right)}{\{f(t)\}^2}$ となり, ②に代入して,

$$g(t)=f(t)+\frac{t\left(\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}+t\right)}{f(t)}=\frac{t^2+\{f(t)\}^2+t\sqrt{t^2+\{f(t)\}^2}}{f(t)}$$

さて, $g(t)=\dfrac{t^2}{f(t)}+f(t)+\sqrt{\left\{\dfrac{t^2}{f(t)}\right\}^2+t^2}$ と変形すると, (1)より $\displaystyle\lim_{t\to 0}\frac{t^2}{f(t)}=\frac{1}{4}$, $f(0)=0$ なので,

$$\lim_{t\to 0}g(t)=\frac{1}{4}+0+\sqrt{\frac{1}{16}+0}=\frac{1}{2}$$

よって, P が O に近づくとき, R は点$\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$に近づく。

コメント

一見，難しそうにみえる問題ですが，内容は基本的な計算の積み重ねです。なお，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1$ は重要な極限値の 1 つです。

問　題

$0<a<3$ とし，$0\leqq x\leqq \pi$ の範囲で 2 つの関数 $f(x)=3-a\sin x$，$g(x)=2\cos^2 x$ を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)\geqq g(x)$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ となる a の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ が，ちょうど 2 つの共有点をもつとき，共有点の x 座標 x_1，x_2 $(x_1<x_2)$ と a の値を求めよ。また，そのときの C_1 と C_2 の概形を同一座標平面上にかけ。

(3)　(2)のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$f(x)=3-a\sin x$ $(0<a<3)$，$g(x)=2\cos^2 x$ に対して，$0\leqq x\leqq \pi$ の範囲で $f(x)\geqq g(x)$ となる条件は，

$$3-a\sin x\geqq 2\cos^2 x,\quad 3-a\sin x\geqq 2-2\sin^2 x$$

ここで，$t=\sin x$ とおくと，$0\leqq t\leqq 1$ において，

$$3-at\geqq 2-2t^2,\quad 2t^2+1\geqq at\ \cdots\cdots\text{①}$$

まず，$t=0$ のときは①はつねに成立し，また $0<t\leqq 1$ のときは，①から，

$$2t+\frac{1}{t}\geqq a\ \cdots\cdots\text{②}$$

そこで，$h(t)=2t+\dfrac{1}{t}$ とおくと，

$$h'(t)=2-\frac{1}{t^2}=\frac{2t^2-1}{t^2}$$

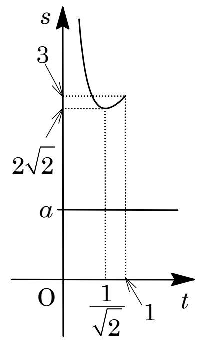
t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$h'(t)$	×	$-$	0	$+$	
$h(t)$	×	↘	$2\sqrt{2}$	↗	3

すると，$0<t\leqq 1$ のとき $h(t)$ の増減は右表のようになり，②が成立する条件は $0<a\leqq 2\sqrt{2}$ である。

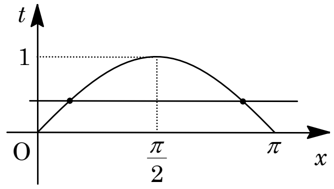
よって，$0\leqq x\leqq \pi$ の範囲で $f(x)\geqq g(x)$ となる条件は，$0<a\leqq 2\sqrt{2}$ である。

(2)　(1)と同様にして，$f(x)=g(x)$ で，$t=\sin x$ とおくと，①から $2t^2+1=at$ となり，$t=0$ では不成立。

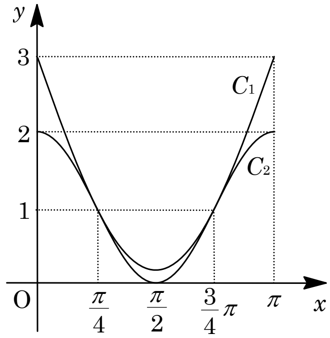
そこで，$0<t\leqq 1$ において，②から $2t+\dfrac{1}{t}=a\ \cdots\cdots$③となり，これより $s=h(t)$ と $s=a$ のグラフは右図のようになる。



すると，$0<a<2\sqrt{2}$ のとき③は解なし，$a=2\sqrt{2}$ のとき③の解は $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のみ，$2\sqrt{2}<a<3$ のとき③の解は $0<t<1$ に 2 個存在する。



さらに，$t=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ のグラフは右図のようになり，$0\leqq t<1$ のときは 1 個の t に対して x は 2 個の値が対応し，$t=1$ のときは $x=\dfrac{\pi}{2}$ のみ，それ以外の t に対しては対応する x はない。



よって，$C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=g(x)$ がちょうど 2 つの共有点をもつ条件，すなわち $f(x)=g(x)$ が 2 つの実数解をもつ条件は，③の解 t が $0<t<1$ に 1 個だけあることより $a=2\sqrt{2}$ となり，このとき $\sin x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から $x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{3}{4}\pi$ である。すると，$x_1=\dfrac{\pi}{4}$，$x_2=\dfrac{3}{4}\pi$ より，C_1 と C_2 の概形は右図のようになる。

(3) (2)より，$f(x)=3-2\sqrt{2}\sin x$

$$g(x)=2\cos^2 x=1+\cos 2x$$

すると，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ についての対称性から，

$$S=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\{3-2\sqrt{2}\sin x-(1+\cos 2x)\}dx=2\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(2-2\sqrt{2}\sin x-\cos 2x)dx$$

$$=2\Big[2x+2\sqrt{2}\cos x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=4\Big(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\Big)+4\sqrt{2}\Big(-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)-(-1)$$

$$=\pi-3$$

コメント

微積分の総合問題です。三角関数の置き換えが絡んでいますので，解の個数に注意が必要です。なお，(1)(2)については，定数分離の手法を利用しています。

問　題

a, b を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし, x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a>0$ のとき, 関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。　[2016]

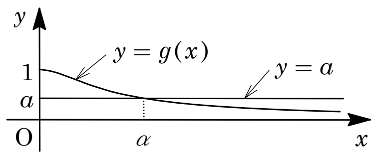
解答例

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ に対して，$f(-x)=f(x)$ から $y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となる。そこで，以下，$x\geqq 0$ で考える。

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-2ax=2x\Big(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\Big)$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し,

$$1=g(0)\geqq g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$



(i)　$0<a<1$ のとき

$g(\alpha)=a$ となる α が $\alpha>0$ でただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=a$ から $1+\alpha^2=\dfrac{1}{a^2}$ となり，$f(x)$ の最大値は,

$$f(\alpha)=2\sqrt{1+\alpha^2}-a\alpha^2=\frac{2}{a}-a\Big(\frac{1}{a^2}-1\Big)=a+\frac{1}{a}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$x\geqq 0$ において $f'(x)\leqq 0$ となり，$f(x)$ の最大値は $f(0)=2$ である。

(2)　$a>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ となり，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は，$0<a<1$ のとき 4 個，$a\geqq 1$ のとき 2 個である。

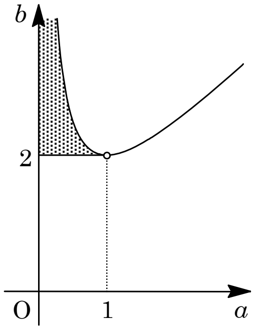
$a\leqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ において $f(x)$ は単調に増加するので，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 2 個である。

したがって，方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 4 個であり，このとき,

$$0<a<1,\ 2<b<a+\frac{1}{a}$$

そして，相加平均と相乗平均の関係から$a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$に注意して点$(a,\ b)$の範囲を図示すると，右図の網点部になる。

ただし，境界は領域に含まない。



コメント

場合分けをして増減を考えるという微分の応用の典型題です。なお，(3)の領域の境界線は有名ですので，増減表などのプロセスは省略しています。

問　題

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対して，関数 $f(\theta)$ を，$f(\theta)=\dfrac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta$ とおく。$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$\sin 3\theta=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ を示せ。また，$\dfrac{t^3-3t}{2}=\sin 3\theta$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f(\theta)$ を t の式で表せ。また，それを利用して $f(\theta)$ の最大値と最小値，および最大値と最小値を与える θ の値を求めよ。　　[2013]

解答例

(1)　$t=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ となり，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{5}{6}\pi$

よって，$-1\leqq t\leqq 2$ である。

(2)　$\sin 3\theta=\sin(2\theta+\theta)=\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta$

$=2\sin\theta\cos^2\theta+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta=2\sin\theta(1-\sin^2\theta)+(1-2\sin^2\theta)\sin\theta$

$=3\sin\theta-4\sin^3\theta$ ………(＊)

また，(＊)より $t^3-3t=8\sin^3\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)-6\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)=-2\sin 3\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ となり，

$$\frac{t^3-3t}{2}=-\sin 3\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\sin(3\theta+\pi)=\sin 3\theta$$

(3)　(2)より，$f(\theta)=\dfrac{2}{3}\sin 3\theta-\sin\theta-\sqrt{3}\cos\theta=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{t^3-3t}{2}-t=\dfrac{1}{3}t^3-2t$

ここで，$g(t)=f(\theta)$ とおくと，

$g'(t)=t^2-2$

すると，$-1\leqq t\leqq 2$ における $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	2
$g'(t)$		$-$	0	$+$	
$g(t)$	$\dfrac{5}{3}$	$\searrow$	$-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$	$\nearrow$	$-\dfrac{4}{3}$

よって，$f(\theta)$ の最大値は $\dfrac{5}{3}$ であり，このとき $t=-1$ より，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=-\frac{1}{2},\quad \theta=-\frac{\pi}{2}$$

また，$f(\theta)$ の最小値は $-\dfrac{4}{3}\sqrt{2}$ であり，このとき $t=\sqrt{2}$ より，

$$\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2},\quad \theta=-\frac{\pi}{12},\ \frac{5}{12}\pi$$

コメント

三角関数の計算問題です。なお，(2)は合成した式を利用して証明していますが，もとの式を変形しても構いません。少し計算量が多くなりますが。

問　題

座標平面上に点 $A(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$B\left(\dfrac{4}{3},\ 0\right)$，$C(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ がある。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 AC と x 軸の交点を P とする。P の座標を θ で表せ。

(2)　$\triangle$ABC の面積 $S(\theta)$ を求めよ。

(3)　面積 $S(\theta)$ の最大値とそのときの θ の値を求めよ。　　[2011]

解答例

(1)　2 点 $A(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$，$C(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，

$$\overrightarrow{CA}=(\cos\theta,\ 3\sin\theta)$$

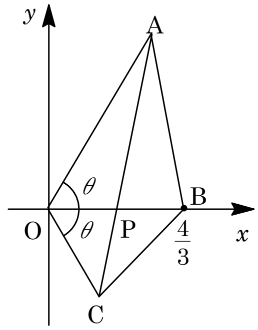
直線 AC は，法線ベクトルの成分を $(3\sin\theta,\ -\cos\theta)$ とおくことができるので，その方程式は，

$$3\sin\theta(x-\cos\theta)-\cos\theta(y+\sin\theta)=0$$

$$3x\sin\theta-y\cos\theta-4\sin\theta\cos\theta=0$$

x 軸の交点 P は，$0<\theta<\pi$ より，$x=\dfrac{4\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta}=\dfrac{4}{3}\cos\theta$

よって，$P\left(\dfrac{4}{3}\cos\theta,\ 0\right)$ である。



(2)　$BP=\dfrac{4}{3}(1-\cos\theta)$ より，$\triangle$ABC の面積 $S(\theta)$ は，

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}(1-\cos\theta)(2\sin\theta+\sin\theta)=2\sin\theta(1-\cos\theta)$$

(3)　$S'(\theta)=2\cos\theta(1-\cos\theta)+2\sin^2\theta$

$\qquad =2(1-\cos\theta)(1+2\cos\theta)$

$S(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$S(\theta)$ は最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ をとる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$S'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	$\searrow$	

コメント

微分法を用いた最大・最小問題ですが，誘導が細かいため，計算だけを注意深く実行すれば結論に到達できます。

問　題

$a\,(a>0)$ を定数とし，$f(x)=2a\log x-(\log x)^2$ とする。関数 $y=f(x)$ のグラフは，x 軸と点 $P_1(x_1,\ 0)$，$P_2(x_2,\ 0)\ (x_1<x_2)$ で交わっている。次の問いに答えよ。

(1)　x_1，x_2 の値を求めよ。また，$y=f(x)$ の最大値と，そのときの x の値を求めよ。

(2)　点 P_1，P_2 における $y=f(x)$ の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。l_1 と l_2 の交点の x 座標を $X(a)$ と表すとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}X(a)$ を求めよ。

(3)　$a=1$ とするとき，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2010]

解答例

(1)　$f(x)=2a\log x-(\log x)^2$ に対し，$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点は，

$$(2a-\log x)(\log x)=0\,,\ \log x=0,\ 2a$$

よって，$x=1,\ e^{2a}$ となり，交点の x 座標 x_1，x_2 は，$x_1=1$，$x_2=e^{2a}$

また，$f'(x)=\dfrac{2a}{x}-\dfrac{2\log x}{x}=\dfrac{2(a-\log x)}{x}$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=e^a$ のとき $f(x)$ は最大となる。その値は，

x	0	$\cdots$	e^a	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

$$f(e^a)=2a\cdot a-a^2=a^2$$

(2)　$P_1(1,\ 0)$ における接線 l_1 は，$f'(1)=2a$ より，$y=2a(x-1)$ ………①

また，$P_2(e^{2a},\ 0)$ における接線 l_2 は，$f'(e^{2a})=-2ae^{-2a}$ より，

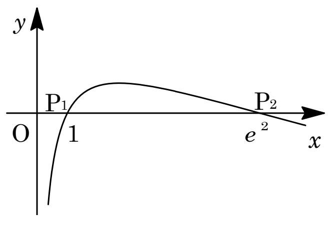
$$y=-2ae^{-2a}(x-e^{2a})=-2ae^{-2a}x+2a\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立すると，$2a(x-1)=-2ae^{-2a}x+2a$ より，$x-1=-e^{-2a}x+1$

$$(1+e^{-2a})x=2\,,\ x=\frac{2}{1+e^{-2a}}$$

よって，$X(a)=\dfrac{2}{1+e^{-2a}}$ から，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}X(a)=2$

(3)　$a=1$ のとき，$f(x)=2\log x-(\log x)^2$，$P_1(1,\ 0)$，$P_2(e^2,\ 0)$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸で囲まれた図形の面積 S は，



$$S=\int_1^{e^2}\{2\log x-(\log x)^2\}dx$$

ここで，$t=\log x$ とおくと，$x=e^t$ より，

$$S=\int_0^2(2t-t^2)e^tdt=\Big[(2t-t^2)e^t\Big]_0^2-\int_0^2 2(1-t)e^tdt$$

$$=-2\Big[(1-t)e^t\Big]_0^2+2\int_0^2-e^tdt=-2(-e^2-1)-2\Big[e^t\Big]_0^2$$

$$=2e^2+2-2(e^2-1)=4$$

コメント

微積分総合の基本問題です。捻りはまったくありません。

問　題

座標平面上で，半径 r の 2 つの円 O_1，O_2 の中心をそれぞれ $(r,\ r)$，$(1-r,\ 1-r)$ とする。円 O_1 の内部と円 O_2 の内部の少なくとも一方に属する点からなる領域を D とし，領域 D の面積を S とする。以下，r は $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ の範囲を動くとする。

(1) 円 O_1 と円 O_2 が接するときの半径 r の値を求めよ。

(2) 円 O_1 と円 O_2 が 2 点 P，Q で交わるとする。$\theta=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{PO_1Q}$ とおいて，半径 r と面積 S を θ を用いて表せ。

(3) 面積 S が最大となる半径 r の値を求めよ。　[2004]

解答例

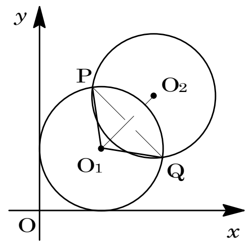
(1) 2 円 O_1，O_2 の中心間距離を d とすると，$0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ から，

$$d=\sqrt{(1-r-r)^2+(1-r-r)^2}=\sqrt{2}\,|1-2r|=\sqrt{2}\,(1-2r)\cdots\cdots\cdots①$$

2 円が接するとき，$\sqrt{2}\,(1-2r)=r+r$，$\sqrt{2}=(2+2\sqrt{2})r$ より，

$$r=\frac{\sqrt{2}}{2+2\sqrt{2}}=\frac{2-\sqrt{2}}{2}$$

この値は $0<r\leqq\dfrac{1}{2}$ を満たしている。



(2) 条件から，中心間距離が $d=2r\cos\theta$ となり，①より，

$$\sqrt{2}\,(1-2r)=2r\cos\theta,\quad r=\frac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)}$$

また，線分 PQ で領域 D は二等分されるので，

$$S=\left\{\frac{1}{2}r^2\sin 2\theta+\frac{1}{2}r^2(2\pi-2\theta)\right\}\times 2=r^2(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)$$

$$=\frac{\sin 2\theta+2\pi-2\theta}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)^2}\cdots\cdots\cdots②$$

(3) 2 円 O_1，O_2 の位置関係によって，場合分けをする。

(i) $0<r\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき

(1)より，2 円 O_1，O_2 は離れているか，または接しているので，

$$S=\pi r^2\times 2=2\pi r^2$$

よって，r の値が増加するとき，S は単調に増加する。

(ii) $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<r<\dfrac{1}{2}$ のとき

2 円 O_1，O_2 は交わっており，(2)より，$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<\dfrac{\sqrt{2}}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)}<\dfrac{1}{2}$

すると，$\cos\theta<1$ かつ $0<\cos\theta$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる。逆に，θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で増加するとき，$\cos\theta$ は単調に減少し，r は $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<r<\dfrac{1}{2}$ において単調に増加する。

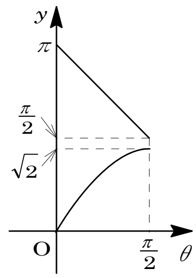
さて，②より，

$$S'=\frac{(2\cos 2\theta-2)(\sqrt{2}+\cos\theta)^2-(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)\cdot 2(\sqrt{2}+\cos\theta)(-\sin\theta)}{2(\sqrt{2}+\cos\theta)^4}$$
$$=\frac{(\cos 2\theta-1)(\sqrt{2}+\cos\theta)+(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)\sin\theta}{(\sqrt{2}+\cos\theta)^3}$$

ここで，$f(\theta)=(\cos 2\theta-1)(\sqrt{2}+\cos\theta)+(\sin 2\theta+2\pi-2\theta)\sin\theta$ とおくと，

$$f(\theta)=\sqrt{2}\cos 2\theta+\cos 2\theta\cos\theta-\sqrt{2}-\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta+(2\pi-2\theta)\sin\theta$$
$$=\sqrt{2}\cos 2\theta+\cos(2\theta-\theta)-\sqrt{2}-\cos\theta+(2\pi-2\theta)\sin\theta$$
$$=\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta)-\sqrt{2}+(2\pi-2\theta)\sin\theta$$
$$=2\sin\theta(-\sqrt{2}\sin\theta+\pi-\theta)$$

そこで，$y=\sqrt{2}\sin\theta$ と $y=\pi-\theta$ のグラフを $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において書くと右図のようになる。



よって，$-\sqrt{2}\sin\theta+\pi-\theta>0$ から，$f(\theta)>0$ となる。すると，$S'>0$ から θ の増加に伴って，S は単調に増加する。すなわち，r の値が増加するとき，S は単調に増加する。

(iii)　$r=\dfrac{1}{2}$ のとき

2 円 O_1，O_2 は重なるので，$S=\pi\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}\pi$

(i)(ii)(iii)より，S は連続的に変化するので，最大となるのは $r=\dfrac{1}{2}$ のときである。

コメント

円 O_1 は x 軸，y 軸に接し，円 O_2 は 2 直線 $x=1$，$y=1$ に接する同じ半径の円です。半径を $\dfrac{1}{2}$ まで増加させたときの 2 円の位置関係を考えますが，得られた結論は予想とは反したものでした。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) $f(t)$ を $0 \leqq t \leqq 1$ で連続な関数とする。$\tan x = t$ とおいて，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 f(t)dt$ であることを示せ。

(2) (1)を用いて，0 以上の整数 n に対し，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx$ の値を求めよ。また，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \frac{1}{n+1}$ を示せ。

(3) 0 以上の整数 n と $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ を満たす x に対し，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

であることを示せ。

(4) (2)と(3)を用いて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}$ の値を求めよ。　[2012]

解答例

(1) $\tan x = t$ とおくと，$x = 0 \to \dfrac{\pi}{4}$ のとき $t = 0 \to 1$ となり，$\dfrac{1}{\cos^2 x}dx = dt$ から，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{f(\tan x)}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 f(t)dt$$

(2) (1)より，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx = \int_0^1 t^n dt = \frac{1}{n+1}$

また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，$\tan x \geqq 0$，$\cos^2 x \leqq 1$ から，$\tan^n x \leqq \dfrac{\tan^n x}{\cos^2 x}$ となり，

$$\int_0^{\frac{\pi}{4}} \tan^n x\,dx \leqq \int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\tan^n x}{\cos^2 x}dx = \frac{1}{n+1}$$

(3) $0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{4}$ において，$0 \leqq \tan^2 x \leqq 1$ から，

$$\frac{1-\tan^2 x+\tan^4 x-\cdots+(-1)^n\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = \frac{1-(-\tan^2 x)^{n+1}}{1+\tan^2 x}\cdot\frac{1}{\cos^2 x}$$
$$= 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$$

(4) (3)より，$\dfrac{1}{\cos^2 x}-\dfrac{\tan^2 x}{\cos^2 x}+\dfrac{\tan^4 x}{\cos^2 x}-\cdots+(-1)^n\dfrac{\tan^{2n} x}{\cos^2 x} = 1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)} x$

この式の両辺を $x=0\to\frac{\pi}{4}$ で積分すると, (2)から,

$$1-\frac{1}{3}+\frac{1}{5}-\cdots+(-1)^n\frac{1}{2n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left\{1-(-1)^{n+1}\tan^{2(n+1)}x\right\}dx$$

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{4}-(-1)^{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)}x\,dx$$

(2)より $0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)}x\,dx\leqq\frac{1}{2n+3}$ なので, $\lim_{n\to\infty}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2(n+1)}x\,dx=0$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\frac{\pi}{4}$$

コメント

金沢大の理系数学に特徴的な積分の問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $1-\cos\dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{x^2}{8}$ を示せ。

(2)　$I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。I_1 の値を求めよ。さらに，等式 $I_n = 2^n e^2 - nI_{n-1}$　$(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を示せ。

(3)　I_2，I_3，I_4 および I_5 の値を求めよ。

(4)　不等式 $\displaystyle\int_0^4 \left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq -2e^2+30$ を示せ。　[2011]

解答例

(1)　$x \geqq 0$ のとき $t=\dfrac{x}{2} \geqq 0$ となり，$f(t)=\dfrac{t^2}{2}-1+\cos t$ とおくと，$f'(t)=t-\sin t \geqq 0$

よって，$f(t) \geqq f(0)=0$ となり，$\dfrac{t^2}{2} \geqq 1-\cos t$ から，$1-\cos\dfrac{x}{2} \leqq \dfrac{x^2}{8}$

(2)　$I_1 = \displaystyle\int_0^2 xe^x\,dx = \Big[\,xe^x\,\Big]_0^2 - \int_0^2 e^x\,dx = 2e^2-(e^2-1)=e^2+1$

また，$n \geqq 2$ で，$I_n = \displaystyle\int_0^2 x^n e^x\,dx = \Big[\,x^n e^x\,\Big]_0^2 - \int_0^2 nx^{n-1}e^x\,dx = 2^n e^2 - nI_{n-1}$

(3)　(2)より，$I_2 = 2^2e^2-2I_1 = 4e^2-2(e^2+1)=2(e^2-1)$

$$I_3 = 2^3e^2-3I_2 = 8e^2-6(e^2-1)=2(e^2+3)$$

$$I_4 = 2^4e^2-4I_3 = 16e^2-8(e^2+3)=8(e^2-3)$$

$$I_5 = 2^5e^2-5I_4 = 32e^2-40(e^2-3)=-8(e^2-15)$$

(4)　$I=\displaystyle\int_0^4\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx$ とすると，(1)より，$I \leqq \displaystyle\int_0^4 \frac{x^2}{8}e^{\sqrt{x}}\,dx$ ………①

ここで，$\sqrt{x}=u$ とおくと $dx=2u\,du$ となり，

$$\int_0^4 \frac{x^2}{8}e^{\sqrt{x}}\,dx = \int_0^2 \frac{u^4}{8}e^u\cdot 2u\,du = \frac{1}{4}\int_0^2 u^5e^u\,du = \frac{1}{4}I_5 = -2e^2+30 \cdots\cdots②$$

①②より，$\displaystyle\int_0^4\left(1-\cos\frac{x}{2}\right)e^{\sqrt{x}}\,dx \leqq -2e^2+30$

コメント

構えたくなる問題ですが，あまりにも誘導が丁寧すぎて，(4)では肩透かしを食らったような気分になってしまいます。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対して，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx$ を求めよ。また，$\displaystyle\frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$ を示せ。

(2)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$ を示せ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\frac{1}{e}\log(n+1)$ を示せ。　[2011]

解答例

(1)　まず，$\displaystyle\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx=\Big[\log x\Big]_n^{n+1}=\log(n+1)-\log n$

ここで，自然数 n に対し，$n\leqq x\leqq n+1$ のとき，$\displaystyle\frac{1}{n+1}\leqq\frac{1}{x}\leqq\frac{1}{n}$ となり，

$$\frac{1}{n+1}\int_n^{n+1}dx<\int_n^{n+1}\frac{1}{x}dx<\frac{1}{n}\int_n^{n+1}dx\ ,\quad \frac{1}{n+1}<\log(n+1)-\log n<\frac{1}{n}$$

(2)　2 以上の自然数 n に対して, (1)より，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\sum_{k=1}^{n}\{\log(k+1)-\log k\}=\log(n+1)-\log 1=\log(n+1)\cdots\cdots\cdots①$$

$$\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\{\log(k+1)-\log k\}=\log n-\log 1=\log n\cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺に 1 を加えると，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}<1+\log n\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

(3)　(2)より, 2 以上の自然数 n に対して，③より，

$$ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{n}}=e^{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}}<e^{1+\log n}=en$$

さらに，①を適用して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ee^{\frac{1}{2}}e^{\frac{1}{3}}\cdots e^{\frac{1}{k}}}>\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{ek}=\frac{1}{e}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}>\frac{1}{e}\log(n+1)$$

コメント

有名問題です。ただ，丁寧すぎる誘導がついています。

問　題

関数 $f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，偶関数，すなわち $f(-t)=f(t)$ であるとする。次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$ を示せ。

(2) 関数 $\displaystyle F(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ について

$$F'(x)=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt,\quad F''(x)=-2f(x)$$

を示せ。

(3) 関数 $f(x)$ は，さらに等式 $\displaystyle f(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$ を満たすとする。このとき，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ について

$$g(0)=g'(0)=0,\quad \left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=0$$

が成り立つことを示し，$f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$ を示せ。　[2009]

解答例

(1) $s=-t$ とおくと，$\dfrac{ds}{dt}=-1$ であり，$t=-1\to 0$ のとき $s=1\to 0$ となる。

また，$f(t)$ は区間 $[-1,\ 1]$ で連続で，$f(-t)=f(t)$ が成り立つので，

$$\int_{-1}^{0} f(t)\,dt=\int_{1}^{0} f(-s)(-ds)=\int_{0}^{1} f(-s)\,ds=\int_{0}^{1} f(s)\,ds=\int_{0}^{1} f(t)\,dt$$

(2) $-1\leqq x\leqq 1$ のとき，条件より，

$$F(x)=-\int_{-1}^{1}|t-x|f(t)\,dt=-\int_{-1}^{x}-(t-x)f(t)\,dt-\int_{x}^{1}(t-x)f(t)\,dt$$

$$=\int_{-1}^{x} tf(t)\,dt-x\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-\int_{x}^{1} tf(t)\,dt+x\int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F'(x)=xf(x)-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt-xf(x)+xf(x)+\int_{x}^{1} f(t)\,dt-xf(x)$$

$$=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt$$

$$F''(x)=-f(x)-f(x)=-2f(x)$$

(3) 条件より，$\displaystyle f'(x)=-\int_{-1}^{x} f(t)\,dt+\int_{x}^{1} f(t)\,dt$ ……①，$f''(x)=-2f(x)$ ……②

さて，$g(x)=f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x$ に対して，

$$g'(x)=f'(x)+\sqrt{2}f(0)\sin\sqrt{2}x,\quad g''(x)=f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x$$

すると，$g(0)=f(0)-f(0)\cos 0=0$，$g'(0)=f'(0)+\sqrt{2}f(0)\sin 0=f'(0)$

(1)と①から，$\displaystyle f'(0)=-\int_{-1}^{0} f(t)\,dt+\int_{0}^{1} f(t)\,dt=0$ となり，$g'(0)=0$

さらに，$G(x)=\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2$ とおき，②を利用すると，

$$\begin{aligned}G'(x)&=\left(\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2\right)'=g'(x)g''(x)+2g(x)g'(x)\\&=g'(x)\left\{f''(x)+2f(0)\cos\sqrt{2}x+2f(x)-2f(0)\cos\sqrt{2}x\right\}\\&=g'(x)\{f''(x)+2f(x)\}=0\cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

③より，C を定数として，$G'(x)=C$，$\dfrac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=C$

さらに，$g(0)=g'(0)=0$ から，$C=0$ となり，

$$\frac{1}{2}\{g'(x)\}^2+g(x)^2=0$$

そこで，$\{g'(x)\}^2\geqq 0$，$g(x)^2\geqq 0$ から，$g'(x)=g(x)=0$ となり，

$$f(x)-f(0)\cos\sqrt{2}x=0,\quad f(x)=f(0)\cos\sqrt{2}x$$

コメント

ていねいな誘導つきの微分方程式の解を求める問題です。

問　題

a を実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a \geqq 0$ のとき，$S(a)=\int_0^1 |x^3-3ax^2+2a^2x|dx$ を求めよ。

(2)　a が $0 \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ の範囲を動くとき，$S(a)$ の最大値を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$S(a)=\int_0^1 |x^3-3ax^2+2a^2x|dx$ に対し，$x^3-3ax^2+2a^2x=x(x-a)(x-2a)$

(i)　$1 \leqq a$ のとき

$$S(a)=\int_0^1 (x^3-3ax^2+2a^2x)dx=\left[\frac{x^4}{4}-ax^3+a^2x\right]_0^1=a^2-a+\frac{1}{4}$$

(ii)　$a<1\leqq 2a$ $\left(\frac{1}{2}\leqq a<1\right)$のとき

$$S(a)=\int_0^a (x^3-3ax^2+2a^2x)dx+\int_a^1 -(x^3-3ax^2+2a^2x)dx$$

$$=\frac{a^4}{4}-a^4+a^4-\frac{1}{4}(1-a^4)+a(1-a^3)-a^2(1-a^2)=\frac{a^4}{2}-a^2+a-\frac{1}{4}$$

(iii)　$2a\leqq 1$ $\left(0\leqq a\leqq\frac{1}{2}\right)$のとき

$$S(a)=\int_0^a (x^3-3ax^2+2a^2x)dx+\int_a^{2a} -(x^3-3ax^2+2a^2x)dx$$

$$+\int_{2a}^1 (x^3-3ax^2+2a^2x)dx$$

$$=\frac{a^4}{4}-\frac{15}{4}a^4+7a^4-3a^4+\frac{1}{4}(1-16a^4)-a(1-8a^3)+a^2(1-4a^2)$$

$$=\frac{a^4}{2}+a^2-a+\frac{1}{4}$$

(2)　$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ のとき, (1)より，$S'(a)=2a^3+2a-1$

$$S''(a)=6a^2+2>0$$

これより，$S'(a)$ は単調に増加し，$S'(0)=-1$，$S'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$ から，$0\leqq a\leqq\frac{1}{2}$ に $S'(a)=0$ となる a がただ 1 つ存在する。この値を $a=\alpha$ とおく。

すると，$S(a)$ の増減は右表のようになり，$S(a)$ の最大値は，$S(0)=\frac{1}{4}$ である。

a	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$		$\nearrow$	$\frac{1}{32}$

コメント

定積分の計算問題です。計算ミスが致命傷になります。

問　題

関数 $f(x)$ を $0 \leqq x \leqq \pi$ のとき $f(x)=\sin x$ とおき，$x<0$ または $\pi<x$ のとき $f(x)=0$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　2 つの定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx$ と $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$ の値を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ の値を求めよ。

(3)　$a>0$ について，$T(a)=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{2af(x)+\frac{1}{a}f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$ とおく。$T(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$0\leqq x\leqq\pi$ のとき $f(x)=\sin x$，$x<0$ または $\pi<x$ のとき $f(x)=0$ より，

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx=\int_0^{\pi}\{f(x)\}^2dx+\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx=\int_0^{\pi}\sin^2x\,dx$$
$$=\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2x}{2}dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

また，$0\leqq x-\dfrac{\pi}{2}\leqq\pi$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}\pi\right)$ のとき $f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=\sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=-\cos x$ となり，$x-\dfrac{\pi}{2}<0$ または $\pi<x-\dfrac{\pi}{2}$ $\left(x<\dfrac{\pi}{2}，\dfrac{3}{2}\pi<x\right)$ のとき $f\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ である。

$$\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\cos^2x\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}\frac{1+\cos 2x}{2}dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[x+\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi}=\frac{\pi}{2}$$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ とおくと，

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\int_\pi^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$$
$$=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}-\sin x\cos x\,dx=-\Big[\frac{1}{2}\sin^2x\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}=\frac{1}{2}$$

(3)　$T(a)=4a^2\displaystyle\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\{f(x)\}^2dx+4\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx+\frac{1}{a^2}\int_0^{\frac{3}{2}\pi}\left\{f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\right\}^2dx$

(1)(2)より，$T(a)=4a^2\cdot\dfrac{\pi}{2}+4\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{a^2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=2\pi a^2+\dfrac{\pi}{2a^2}+2$

$a>0$ から，相加平均と相乗平均の関係より，

$$T(a) \geqq 2\sqrt{2\pi a^2 \cdot \frac{\pi}{2a^2}} + 2 = 2\pi + 2$$

等号成立は，$2\pi a^2 = \dfrac{\pi}{2a^2}$ すなわち $a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときである。

以上より，$a = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$T(a)$ は最小値 $2\pi + 2$ をとる。

コメント

積分区間を分けて丁寧に計算すれば OK です。思考を整理するために，グラフを書くのも 1 つの手です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx$ とする。ただし，$a>0$ である。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ を求めよ。

(3)　$h(a)=\displaystyle\lim_{r\to\infty}g_a(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}$ を求めよ。　[2004]

解答例

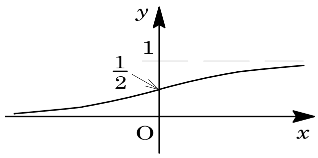
(1)　$y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ より，$y'=\dfrac{e^{-x}}{(e^{-x}+1)^2}>0$

これより，すべての実数で単調に増加する。

$$y''=\frac{-e^{-x}(e^{-x}+1)^2-2e^{-x}(e^{-x}+1)(-e^{-x})}{(e^{-x}+1)^4}$$
$$=\frac{e^{-x}(e^{-x}-1)}{(e^{-x}+1)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
y''	$+$	0	$-$
y	$\cup$	$\frac{1}{2}$	$\cap$

よって，$y=\dfrac{1}{e^{-x}+1}$ のグラフは変曲点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ をもち，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}y=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=1$ から，その概形は右図のようになる。



(2)　$g_a(r)=\displaystyle\int_{-1}^{r}\left(\frac{1}{e^{-x}+1}-\frac{1}{e^{a-x}+1}\right)dx=\int_{-1}^{r}\left(\frac{e^x}{1+e^x}-\frac{e^x}{e^a+e^x}\right)dx$

$$=\Big[\log(1+e^x)-\log(e^a+e^x)\Big]_{-1}^{r}=\left[\log\frac{1+e^x}{e^a+e^x}\right]_{-1}^{r}$$
$$=\log\frac{1+e^r}{e^a+e^r}-\log\frac{1+e^{-1}}{e^a+e^{-1}}$$

ここで，$\displaystyle\lim_{r\to\infty}\log\frac{1+e^r}{e^a+e^r}=\lim_{r\to\infty}\log\frac{e^{-r}+1}{e^ae^{-r}+1}=\log 1=0$ より，

$$\lim_{r\to\infty}g_a(r)=-\log\frac{1+e^{-1}}{e^a+e^{-1}}=-\log\frac{e+1}{e^{a+1}+1}=\log\frac{e^{a+1}+1}{e+1}$$

(3)　(2)より，$h(a)=\log\dfrac{e^{a+1}+1}{e+1}$ となり，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{h(a)}{a}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\log\frac{e^{a+1}+1}{e+1}=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\log\frac{e^a(e+e^{-a})}{e+1}$$
$$=\lim_{a\to\infty}\frac{1}{a}\left(a+\log\frac{e+e^{-a}}{e+1}\right)=\lim_{a\to\infty}\left(1+\frac{1}{a}\log\frac{e+e^{-a}}{e+1}\right)=1$$

コメント

(2)では(1)との関連を考え，はさみうち利用の難問かとも思いましたが，予測ははずれてしまいました。被積分関数の分母と分子に，単にe^xをかけるだけで，直接$g_a(r)$が求まってしまいます。

問　題

整式 $f(x)$ は関係式 $\int_0^x f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x + 2\int_x^0 f(x)\,dx$ を満たしている。また $r \geqq 0$ に対し，$|x| \leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値を $F(r)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を求め，$y = |f(x)|$ のグラフをかけ。

(2)　$F(r)$ を求めよ。

(3)　$\int_0^2 F(r)\,dr$ を求めよ。　[2001]

解答例

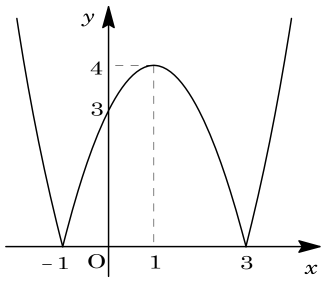
(1)　$\int_0^x f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x + 2\int_x^0 f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x - 2\int_0^x f(x)\,dx$ より，

$$3\int_0^x f(x)\,dx = x^3 - 3x^2 - 9x$$

両辺を微分すると，$3f(x) = 3x^2 - 6x - 9$

$$f(x) = x^2 - 2x - 3 = (x-1)^2 - 4$$

ここで，$y = |f(x)|$ のグラフは，$f(x) \geqq 0$ のとき $y = f(x)$，$f(x) < 0$ のとき $y = -f(x)$ より，右図のようになる。



(2)　$f(x) = 4$ の解は，$x^2 - 2x - 3 = 4$，$x^2 - 2x - 7 = 0$

$$x = 1 \pm 2\sqrt{2}$$

$|x| \leqq r$ における $|f(x)|$ の最大値は, (1)のグラフより,

(i)　$0 \leqq r < 1$ のとき　$x = r$ において最大値をとる。

$$F(r) = |f(r)| = -(r^2 - 2r - 3) = -r^2 + 2r + 3$$

(ii)　$1 \leqq r < -1 + 2\sqrt{2}$ のとき　$x = 1$ において最大値をとる。

$$F(r) = |f(1)| = 4$$

(iii)　$-1 + 2\sqrt{2} \leqq r$ のとき　$x = -r$ において最大値をとる。

$$F(r) = |f(-r)| = (-r)^2 - 2(-r) - 3 = r^2 + 2r - 3$$

(3)　$\int_0^2 F(r)\,dr = \int_0^1 (-r^2 + 2r + 3)\,dr + \int_1^{-1+2\sqrt{2}} 4\,dr + \int_{-1+2\sqrt{2}}^2 (r^2 + 2r - 3)\,dr$

$$= -\frac{1}{3} + 2\cdot\frac{1}{2} + 3 + 4(-1 + 2\sqrt{2} - 1) + \int_{-1+2\sqrt{2}}^2 \left\{(r+1)^2 - 4\right\}dr$$

$$= -\frac{13}{3} + 8\sqrt{2} + \left[\frac{1}{3}(r+1)^3 - 4r\right]_{-1+2\sqrt{2}}^2$$

$$= -\frac{13}{3} + 8\sqrt{2} + \frac{1}{3}(27 - 16\sqrt{2}) - 4(3 - 2\sqrt{2}) = -\frac{22}{3} + \frac{32}{3}\sqrt{2}$$

コメント

(3)の計算は複雑ですが，内容は基本レベルです。

問　題

次を示せ。

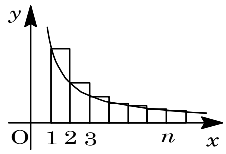
(1)　$\log(n+1) < 1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\int_0^1\sin\pi y\,dy=\frac{2}{\pi}$　[2000]

解答例

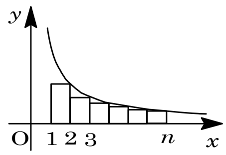
(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ $(x>0)$とすると，$f(x)$は減少関数より，



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}>\int_1^{n+1}f(x)\,dx=\int_1^{n+1}\frac{1}{x}dx$$

$$=\Big[\log x\Big]_1^{n+1}=\log(n+1)\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　(1)と同様にして，$\displaystyle\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^{n}f(x)\,dx=\log n$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\displaystyle\log(n+1)<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<1+\log n$

$$\frac{\log(n+1)}{\log n}<\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}<\frac{1}{\log n}+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて$n\to\infty$のとき，$\displaystyle\frac{\log(n+1)}{\log n}-1=\frac{\log(n+1)-\log n}{\log n}=\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}\to 0$から，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$$

また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{\log n}+1\right)=1$となるので，③より$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=1$

(3)　まず，$\displaystyle\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx=\sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\ \cdots\cdots\cdots④$

$k\leqq x\leqq k+1$において，$\displaystyle\frac{|\sin\pi x|}{k+1}\leqq\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|\leqq\frac{|\sin\pi x|}{k}$より，

$$\frac{1}{k+1}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\leqq\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin\pi x}{x}\right|dx\leqq\frac{1}{k}\int_k^{k+1}|\sin\pi x|\,dx\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$y = x - k$ とおくと，

$$\int_k^{k+1} \left|\sin \pi x\right| dx = \int_0^1 \left|\sin \pi (y+k)\right| dy = \int_0^1 \left|\sin \pi y\right| dy = \int_0^1 \sin \pi y\, dy$$

$$= -\frac{1}{\pi}\Big[\cos \pi y\Big]_0^1 = \frac{2}{\pi}$$

そこで⑤において，$k=1$ から $k=n$ まで各辺の和をとると，

$$\frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_k^{k+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx \leqq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

④より，$\displaystyle \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leqq \int_1^{n+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx \leqq \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$

$$\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} \leqq \frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx \leqq \frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} \cdots\cdots\cdots ⑥$$

(2)より，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = \frac{2}{\pi}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\pi}\cdot\frac{1}{\log n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k+1} = \frac{2}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} - 1 + \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2}{\pi}$$

したがって⑥より，$\displaystyle \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\int_1^{n+1}\left|\frac{\sin \pi x}{x}\right| dx = \int_0^1 \sin \pi y\, dy = \frac{2}{\pi}$

コメント

金沢大・理系の入試問題には，毎年，よく練られた難問が 1 題出題されますが，今年は本問がそれに当たります。(3)で(2)の極限値をどのように使うかということを考えていると，謎解きの楽しみが味わえます。

問　題

n を自然数とする。a は $a>1$ を満たす実数とし，$f(a)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 |ax^n-1|dx+\dfrac{1}{2}$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)$ を求めよ。

(2)　関数 $f(a)$ の $a>1$ における最小値を b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　(2)で求めた b_n （$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）に対して，$m+1$ 個の数の積 $b_m\cdot b_{m+1}\cdots\cdots b_{2m}$ を c_m （$m=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}c_m$ を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$ax^n-1=0$ （$x>0$）の解は $x=a^{-\frac{1}{n}}$ となり，$a^{-\frac{1}{n}}=\alpha$ とおくと $0<\alpha<1$ より，

$$\int_0^1|ax^n-1|dx=\int_0^\alpha-(ax^n-1)dx+\int_\alpha^1(ax^n-1)dx$$

$$=-\left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}-x\right]_0^\alpha+\left[\frac{a}{n+1}x^{n+1}-x\right]_\alpha^1=-\frac{2a}{n+1}\alpha^{n+1}+2\alpha+\frac{a}{n+1}-1$$

$$=-\frac{2a}{n+1}\cdot\frac{1}{a}\alpha+2\alpha+\frac{a}{n+1}-1=\frac{2n}{n+1}\alpha+\frac{a}{n+1}-1\quad（a^{-\frac{1}{n}}=\alpha\ より）$$

すると，$f(a)=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1|ax^n-1|dx+\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{2n}{n+1}\alpha+\dfrac{a}{n+1}-1\right)+\dfrac{1}{2}$

$$=\frac{n}{n+1}\alpha+\frac{a}{2(n+1)}=\frac{n}{n+1}a^{-\frac{1}{n}}+\frac{a}{2(n+1)}$$

(2)　$f'(a)=\dfrac{n}{n+1}\cdot\left(-\dfrac{1}{n}\right)a^{-\frac{1}{n}-1}+\dfrac{1}{2(n+1)}=-\dfrac{1}{n+1}\left(a^{-\frac{n+1}{n}}-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{n+1}\cdot\dfrac{a^{\frac{n+1}{n}}-2}{2a^{\frac{n+1}{n}}}$

$f'(a)=0$ とすると，$a^{\frac{n+1}{n}}=2$，$a=2^{\frac{n}{n+1}}$

右表より，$a=2^{\frac{n}{n+1}}$ のとき $f(a)$ は最小値をとるので，

a	1	$\cdots$	$2^{\frac{n}{n+1}}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘		↗

$$b_n=f\left(2^{\frac{n}{n+1}}\right)=\frac{n}{n+1}\left(2^{\frac{n}{n+1}}\right)^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{2(n+1)}\cdot2^{\frac{n}{n+1}}$$

$$=\frac{n}{n+1}\cdot2^{-\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\cdot2^{\frac{n}{n+1}-1}=\frac{n}{n+1}\cdot2^{-\frac{1}{n+1}}+\frac{1}{n+1}\cdot2^{-\frac{1}{n+1}}=2^{-\frac{1}{n+1}}$$

(3)　$c_m=b_m\cdot b_{m+1}\cdots\cdots b_{2m}=2^{-\frac{1}{m+1}}\cdot2^{-\frac{1}{m+2}}\cdots\cdots2^{-\frac{1}{2m+1}}=2^{-\left(\frac{1}{m+1}+\frac{1}{m+2}+\cdots+\frac{1}{2m+1}\right)}$

ここで，$d_m=\dfrac{1}{m+1}+\dfrac{1}{m+2}+\cdots+\dfrac{1}{2m}+\dfrac{1}{2m+1}$ とおくと，

$$d_m=\frac{1}{m}\left(\frac{m}{m+1}+\frac{m}{m+2}+\cdots+\frac{m}{2m}\right)+\frac{1}{2m+1}=\frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{1+\frac{k}{m}}+\frac{1}{2m+1}$$

$$\lim_{m\to\infty} d_m = \int_0^1 \frac{1}{1+x}\,dx = \left[\,\log|1+x|\,\right]_0^1 = \log 2$$

したがって，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} c_m = \lim_{m\to\infty} 2^{-d_m} = 2^{-\log 2}$

コメント

計算力の問われる問題です。$f'(a)$ の符号変化については，特に慎重さが要求されます。それに比べると, (3)での区分求積法を利用した極限計算は，簡単です。

問　題

関数 $f(x)=xe^x$ について，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ について，増減および凹凸を調べ，そのグラフをかけ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$ を用いてもよい。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int xe^x dx$ ， $\displaystyle\int x^2e^{2x}dx$ をそれぞれ求めよ。

(3)　$0\leqq t\leqq 1$ に対し，$g(x)=f(x)-f(t)$ とおく。$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を $V(t)$ とする。$V(t)$ を求めよ。

(3)　(3)の $V(t)$ が最小値をとるときの t の値を a とする。最小値 $V(a)$ と，$f(a)$ の値を求めよ。ただし，a の値は求める必要はない。　[2015]

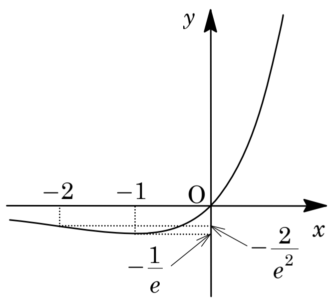
解答例

(1)　$f(x)=xe^x$ に対し，

$$f'(x)=e^x+xe^x=(x+1)e^x$$
$$f''(x)=e^x+(x+1)e^x=(x+2)e^x$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	-1	$\cdots$
$f'(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$	0	$+$		$+$
$f(x)$	↘	$-\dfrac{2}{e^2}$	↘	$-\dfrac{1}{e}$	↗

すると，$y=f(x)$ の増減および凹凸は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} xe^x=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} xe^x=\infty$ から，グラフは右図のようになる。



(2)　$\displaystyle\int xe^x dx=xe^x-\int e^x dx=(x-1)e^x+C$

$$\int x^2e^{2x}dx=\frac{1}{2}x^2e^{2x}-\int xe^{2x}dx$$
$$=\frac{1}{2}(x^2-x)e^{2x}+\frac{1}{2}\int e^{2x}dx=\frac{1}{4}(2x^2-2x+1)e^{2x}+C$$

(3)　$0\leqq t\leqq 1$ に対し，$g(x)=f(x)-f(t)$ とおくと，

$$g(x)\leqq 0\ (0\leqq x\leqq t),\ g(x)\geqq 0\ (t\leqq x\leqq 1)$$

曲線 $y=g(x)$ と x 軸ではさまれる部分を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 $V(t)$ は，(2)の結果を利用すると，

$$V(t)=\pi\int_0^1\{g(x)\}^2dx=\pi\int_0^1\{f(x)-f(t)\}^2dx=\pi\int_0^1(xe^x-te^t)^2dx$$
$$=\pi\int_0^1 x^2e^{2x}dx-2\pi te^t\int_0^1 xe^x dx+\pi t^2e^{2t}\int_0^1 dx$$
$$=\frac{\pi}{4}\Big[(2x^2-2x+1)e^{2x}\Big]_0^1-2\pi te^t\Big[(x-1)e^x\Big]_0^1+\pi t^2e^{2t}$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^2-1)-2\pi te^t\cdot 1+\pi t^2e^{2t}=\pi\Big(t^2e^{2t}-2te^t+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\Big)$$

(4)　$V'(t)=\pi(2te^{2t}+2t^2e^{2t}-2e^t-2te^t)$
$=2\pi e^t(te^t+t^2e^t-1-t)$
$=2\pi e^t(t+1)(te^t-1)$

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

ここで，$te^t=1$ すなわち $f(t)=1$ の解は，(1)から $0<t<1$ にただ 1 つあり，これを $t=\alpha$ とおくと，$V(t)$ の増減は上表のようになる。すると，$V(t)$ は $t=\alpha$ で最小となるので $a=\alpha$ であり，$f(a)=1$

$$V(a)=\pi\left(1^2-2\cdot1+\frac{1}{4}e^2-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(e^2-5)\pi$$

コメント

計算量が標準的な，微積分の総合問題です。(4)は $V'(t)$ の因数分解が気づきにくいのですが，ヒントは $f(a)$ の値を求めるという設問です。

問　題

関数 $y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ のグラフ C について，次の問いに答えよ。

(1)　C の変曲点のうち，x 座標が最大となる点 P の x 座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた P の x 座標を b とするとき，$\tan\theta=e^b$ を満たす $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対し，$\tan 2\theta$ および θ の値を求めよ。

(3)　上の b に対する直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2014]

解答例

(1)　$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}$ に対して，$y'=-\dfrac{e^x-e^{-x}}{(e^x+e^{-x})^2}$ となり，

$$y''=-\frac{(e^x+e^{-x})(e^x+e^{-x})^2-(e^x-e^{-x})\cdot 2(e^x+e^{-x})(e^x-e^{-x})}{(e^x+e^{-x})^4}$$

$$=-\frac{(e^x+e^{-x})^2-2(e^x-e^{-x})^2}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{2x}-6+e^{-2x}}{(e^x+e^{-x})^3}=\frac{e^{4x}-6e^{2x}+1}{e^{2x}(e^x+e^{-x})^3}$$

ここで，$y''=0$ とすると，$e^{2x}=3\pm 2\sqrt{2}$ となり，

$$x=\frac{1}{2}\log(3\pm 2\sqrt{2})=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}\pm 1)^2=\log(\sqrt{2}\pm 1)$$

この x の値の前後で y'' の符号は変わり，x 座標の大きい方の変曲点 P の x 座標は $\log(\sqrt{2}+1)$ である。

(2)　条件より，$b=\log(\sqrt{2}+1)$，$\tan\theta=e^b=\sqrt{2}+1$ なので，

$$\tan 2\theta=\frac{2\tan\theta}{1-\tan^2\theta}=\frac{2(\sqrt{2}+1)}{1-(3+2\sqrt{2})}=-1$$

これより，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので $2\theta=\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$\theta=\dfrac{3}{8}\pi$ である。

(3)　直線 $x=b$ と x 軸，y 軸および C で囲まれた図形の面積を S とする。

ここで，$y=\dfrac{1}{e^x+e^{-x}}>0$ なので，$S=\displaystyle\int_0^b\frac{1}{e^x+e^{-x}}dx=\int_0^b\frac{e^x}{e^{2x}+1}dx$ である。

(2)より，$e^x=\tan\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$e^x dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ より，

$$dx=\frac{1}{\tan\theta\cos^2\theta}d\theta=\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta$$

すると，$S=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}\frac{\tan\theta}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1+\tan^2\theta}{\tan\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{8}\pi}d\theta=\frac{3}{8}\pi-\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{8}$

コメント

(2)の設問が(3)の定積分の計算への誘導となっています。(2)がない場合は$e^x=t$とおいた後，$t=\tan\theta$とするので，結局，同じことになります。ただ，上端の値がちょっとわかりにくいですが。

問　題

$a>0$ とする。$x\geqq 0$ における関数 $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ と曲線 $C: y=f(x)$ について，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式を求めよ。また，P を通り l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)dx$ を $t=\sqrt{ax}$ とおくことにより求めよ。

(3) 曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。また，$a>0$ における $S(a)$ の最小値とそれを与える a の値を求めよ。　[2013]

解答例

(1) $f(x)=e^{\sqrt{ax}}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}e^{\sqrt{ax}}$ となり，$f'\left(\dfrac{1}{a}\right)=\dfrac{ae}{2}$

これより，$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{a},\ f\left(\dfrac{1}{a}\right)\right)$ における接線 l の方程式は，

$$y-e=\frac{ae}{2}\left(x-\frac{1}{a}\right),\quad y=\frac{ae}{2}x+\frac{e}{2}$$

また，P を通り l に直交する直線 m の方程式は，

$$y-e=-\frac{2}{ae}\left(x-\frac{1}{a}\right),\quad y=-\frac{2}{ae}x+\frac{2}{a^2e}+e$$

(2) $t=\sqrt{ax}$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx}=\dfrac{a}{2\sqrt{ax}}=\dfrac{a}{2t}$ より，$dx=\dfrac{2t}{a}dt$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{a}} f(x)dx=\int_0^1 e^t\cdot\frac{2t}{a}dt=\frac{2}{a}\left\{\Big[te^t\Big]_0^1-\int_0^1 e^t\,dt\right\}=\frac{2}{a}\{e-(e-1)\}=\frac{2}{a}$$

(3) 直線 $y=1$ と直線 m の交点は，$-\dfrac{2}{ae}x+\dfrac{2}{a^2e}+e=1$ より，

$$\frac{2}{ae}x=\frac{2}{a^2e}+e-1,\quad x=\frac{2+a^2e^2-a^2e}{2a}$$

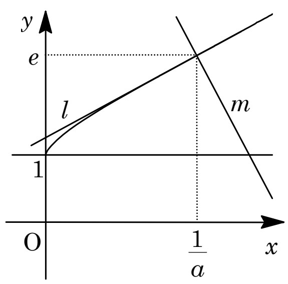
すると，曲線 C，直線 $y=1$ および直線 m で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\frac{2}{a}-\left(\frac{1}{a}\cdot 1\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{2+a^2e^2-a^2e}{2a}-\frac{1}{a}\right)(e-1)$$

$$=\frac{1}{a}+\frac{a^2e(e-1)^2}{4a}=\frac{4+e(e-1)^2a^2}{4a}$$

$$S'(a)=\frac{2e(e-1)^2a^2-4-e(e-1)^2a^2}{4a^2}$$

$$=\frac{e(e-1)^2a^2-4}{4a^2}$$



これより，$a>0$ における $S(a)$ の増減は右表のようになり，$a=\dfrac{2}{\sqrt{e}(e-1)}$ のとき最小値 $\sqrt{e}(e-1)$ をとる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\sqrt{e}(e-1)}$	$\cdots$
$S'(a)$		$-$	0	$+$
$S(a)$		$\searrow$	$\sqrt{e}(e-1)$	$\nearrow$

コメント

やや計算量は多いものの，誘導に従うという方針だけで，結論まで一直線です。なお，点 P は曲線 C の変曲点になっています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　xy 平面上の直線 $l: y = mx + \frac{1}{3}$ が曲線 $C: y = x^{\frac{2}{3}}\ (x \geqq 0)$ に接するとき，直線 l の傾き m の値と接点の座標を求めよ。

(2)　(1)で求めた m の値に対する直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$C: y = x^{\frac{2}{3}}$ 上の接点を $\left(t,\ t^{\frac{2}{3}}\right)$ とおくと，$y' = \frac{2}{3}x^{-\frac{1}{3}}$ より，接線の方程式は，

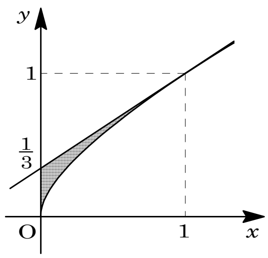
$$y - t^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}(x - t),\quad y = \frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}}x + \frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}}$$

直線 $l: y = mx + \frac{1}{3}$ と一致することより，

$$\frac{2}{3}t^{-\frac{1}{3}} = m \cdots\cdots\cdots④,\quad \frac{1}{3}t^{\frac{2}{3}} = \frac{1}{3} \cdots\cdots\cdots⑤$$

$t \geqq 0$ より，⑤から $t = 1$ となり，接点の座標は $(1,\ 1)$，また④から $m = \frac{2}{3}$ である。

(2)　直線 l，曲線 C および y 軸で囲まれた部分を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，$C: x = y^{\frac{3}{2}}$ より，



$$V = \pi\int_0^1 \left(y^{\frac{3}{2}}\right)^2 dy - \frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot\left(1 - \frac{1}{3}\right)$$

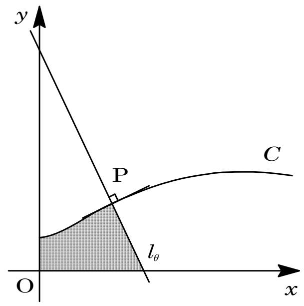
$$= \pi\int_0^1 y^3 dy - \frac{2}{9}\pi = \frac{1}{4}\pi - \frac{2}{9}\pi = \frac{1}{36}\pi$$

コメント

回転体の体積を求める基本的な問題です。

問　題

xy 平面上に媒介変数 t で表された曲線 $C: x=2t-\sin t$, $y=2-\cos t$ がある。$t=\theta\ (0<\theta<\pi)$ のときの点 $\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における C の法線を l_θ とする。l_θ と x 軸と y 軸で囲まれた三角形の面積を $S(\theta)$ とし，その三角形と曲線 C の下側にある部分との共通部分（図の網点部）の面積を $T(\theta)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



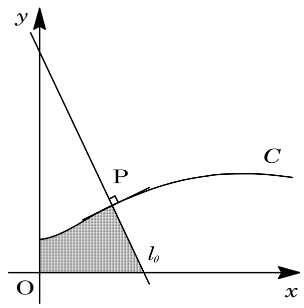
(1) 直線 l_θ を求めよ。

(2) $S(\theta)$ を求めよ。

(3) $T(\theta)$ を求めよ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}$ を求めよ。　[2006]

解答例



(1) $C: x=2t-\sin t$, $y=2-\cos t$ より，

$$\frac{dx}{dt}=2-\cos t,\quad \frac{dy}{dt}=\sin t$$

すると，$t=\theta$ のとき，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sin\theta}{2-\cos\theta}$

$\mathrm{P}(2\theta-\sin\theta,\ 2-\cos\theta)$ における法線 l_θ は，

$$y-(2-\cos\theta)=-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}\{x-(2\theta-\sin\theta)\}$$

よって，$y=-\dfrac{2-\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{2\theta(2-\cos\theta)}{\sin\theta}$ ………(＊)

(2) l_θ と x 軸との交点は, (＊)から,

$$-\frac{2-\cos\theta}{\sin\theta}x+\frac{2\theta(2-\cos\theta)}{\sin\theta}=0,\quad x=2\theta$$

また，l_θ と y 軸との交点は，$y=\dfrac{2\theta(2-\cos\theta)}{\sin\theta}$ となり，三角形の面積 $S(\theta)$ は,

$$S(\theta)=\frac{1}{2}\cdot 2\theta\cdot\frac{2\theta(2-\cos\theta)}{\sin\theta}=\frac{2\theta^2(2-\cos\theta)}{\sin\theta}$$

(3) $0<\theta<\pi$ より，$2\theta-\sin\theta<2\theta$ となるので，網点部の面積 $T(\theta)$ は,

$$T(\theta)=\int_0^{2\theta-\sin\theta}y\,dx+\frac{1}{2}\{2\theta-(2\theta-\sin\theta)\}(2-\cos\theta)$$

$$=\int_0^{\theta}(2-\cos t)(2-\cos t)\,dt+\frac{1}{2}\sin\theta(2-\cos\theta)$$

$$=\int_0^{\theta}(2-\cos t)^2\,dt+\sin\theta-\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\theta}(2-\cos t)^2\,dt=\int_0^{\theta}(4-4\cos t+\cos^2 t)\,dt$

$$=4\theta-4\sin\theta+\frac{1}{2}\int_0^{\theta}(1+\cos 2t)\,dt$$

$$=-4\sin\theta+\frac{9}{2}\theta+\frac{1}{4}\sin 2\theta$$

よって，$T(\theta)=-4\sin\theta+\dfrac{9}{2}\theta+\dfrac{1}{4}\sin 2\theta+\sin\theta-\dfrac{1}{4}\sin 2\theta=\dfrac{3}{2}(3\theta-2\sin\theta)$

(4) $\dfrac{T(\theta)}{S(\theta)}=\dfrac{3\sin\theta(3\theta-2\sin\theta)}{4\theta^2(2-\cos\theta)}=\dfrac{3}{4(2-\cos\theta)}\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}\left(3-2\cdot\dfrac{\sin\theta}{\theta}\right)$より，

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{T(\theta)}{S(\theta)}=\frac{3}{4\cdot 1}\cdot 1\cdot(3-2)=\frac{3}{4}$$

コメント

微積分の総合問題です。制限時間を考えると，余裕をもって計算を進めることができます。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　次の(i), (ii)のグラフの概形を別々にかけ。

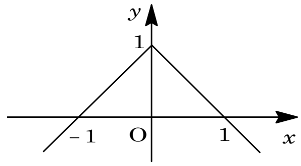
(i)　$y=1-|x|$　　　　(ii)　$y=\dfrac{1}{1+|x|}$

(2)　区間$-1\leqq x\leqq 1$において不等式$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$が成り立つとき，定数$a,\ b$の満たす条件を求めよ。

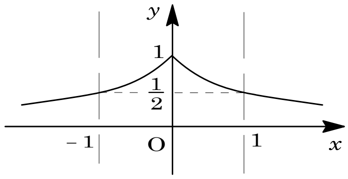
(3)　$a,\ b$ が(2)で求めた条件を満たすとき，区間$-1\leqq x\leqq 1$で$y=1-|x|$と$y=(ax+b)(1-x^2)$のグラフによって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$y=1-|x|$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=1-x$，$x<0$のとき$y=1+x$となるので，グラフは右図のようになる。



また，$y=\dfrac{1}{1+|x|}$に対して，$x\geqq 0$のとき$y=\dfrac{1}{1+x}$，$x<0$のとき$y=\dfrac{1}{1-x}$となるので，グラフは右下図の実線のようになる。



(2)　$(ax+b)(1-x^2)\leqq 1-|x|$……①が，$-1\leqq x\leqq 1$において成立する条件は，

(i)　$x=\pm 1$のとき

①の両辺とも0となり，任意の$a,\ b$で成立する。

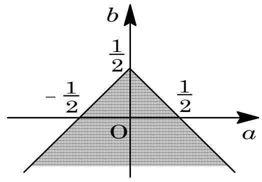
(ii)　$-1<x<1$のとき

$1-x^2>0$より，不等式①は，$ax+b\leqq\dfrac{1-|x|}{1-x^2}$………②

さて，$1-x^2=1-|x|^2=(1-|x|)(1+|x|)$と変形すると，不等式②は，

$$ax+b\leqq\frac{1}{1+|x|}\text{………③}$$

ここで，$f(x)=ax+b$とおくと，③は$-1<x<1$において，$y=f(x)$のグラフが$y=\dfrac{1}{1+|x|}$の下方にあることに等しいので，$a>0$のとき$f(1)=a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a=0$のとき$b\leqq\dfrac{1}{2}$，$a<0$のとき$f(-1)=-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$となり，$ab$平面上に図示すると，右図の網点部となる。



(i)(ii)より，求める条件は，$a+b\leqq\dfrac{1}{2}$，$-a+b\leqq\dfrac{1}{2}$

(3)　求める図形の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}\{1-|x|-(ax+b)(1-x^2)\}dx=\int_{-1}^{1}\{1-|x|+ax^3+bx^2-ax-b\}dx$$

$$=2\int_{0}^{1}(1-|x|+bx^2-b)dx=2\int_{0}^{1}(bx^2-x+1-b)dx$$

$$=2\left(\frac{1}{3}b-\frac{1}{2}+1-b\right)=-\frac{4}{3}b+1$$

コメント

$x^2=|x|^2$ に気付くことがポイントです。(1)で $y=\dfrac{1}{1+|x|}$ のグラフを書かせる設問が，このヒントとなっています。

問　題

a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 $y=a\sqrt{1-x^2}$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ を C とする。$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数 θ に対して，点 $\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ から曲線 C に接線 l をひき，接点を P とする。

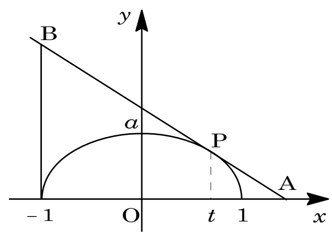
(1) l の方程式および P の座標を求めよ。

(2) 直線 $x=-1$ と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_1 とし，x 軸と直線 l および曲線 C で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1，S_2 を求めよ。

(3) 直線 l と直線 $x=-1$ の交点を B とする。点 P が線分 AB の中点となるならば，$S_1=2S_2$ が成り立つことを示せ。 [2002]

解答例

(1) $y=a\sqrt{1-x^2}$ に対して，$y'=\dfrac{-2ax}{2\sqrt{1-x^2}}=\dfrac{-ax}{\sqrt{1-x^2}}$



接点を $\mathrm{P}(t,\ a\sqrt{1-t^2})$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-a\sqrt{1-t^2}=\frac{-at}{\sqrt{1-t^2}}(x-t)$$

$\mathrm{A}\left(\dfrac{1}{\cos\theta},\ 0\right)$ を通るので，

$$-a\sqrt{1-t^2}=\frac{-at}{\sqrt{1-t^2}}\left(\frac{1}{\cos\theta}-t\right),\ \ -a(1-t^2)=-at\left(\frac{1}{\cos\theta}-t\right)$$

よって，$1-t^2=\dfrac{t}{\cos\theta}-t^2$ より，$t=\cos\theta$ となる。

このとき，$a\sqrt{1-t^2}=a\sqrt{1-\cos^2\theta}=a|\sin\theta|=a\sin\theta$ より，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$

接線は，$y-a\sin\theta=\dfrac{-a\cos\theta}{\sin\theta}(x-\cos\theta)$，$y=\dfrac{-a\cos\theta}{\sin\theta}x+\dfrac{a}{\sin\theta}$ ………(＊)

(2) $x=-1$ のとき，(＊)より $y=\dfrac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}$ となり，$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right)$

まず，$\displaystyle\int_{-1}^{\cos\theta}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\pi-\theta)+\frac{1}{2}\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)$

$$S_1=\frac{1}{2}\left\{a\sin\theta+\frac{a(1+\cos\theta)}{\sin\theta}\right\}(\cos\theta+1)-\int_{-1}^{\cos\theta}a\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left\{a\sin\theta(\cos\theta+1)+\frac{a(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}\right\}-\frac{1}{2}a(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)$$

$$=\frac{1}{2}a\left\{\sin\theta+\frac{(1+\cos\theta)^2}{\sin\theta}-\pi+\theta\right\}=\frac{1}{2}a\left\{\frac{2(1+\cos\theta)}{\sin\theta}-\pi+\theta\right\}$$

また，$\displaystyle\int_{\cos\theta}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\pi\cdot 1^2-\frac{1}{2}(\pi-\theta+\cos\theta\sin\theta)=\frac{1}{2}(\theta-\cos\theta\sin\theta)$

$$S_2 = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\theta} - \cos\theta\right)a\sin\theta - \int_{\cos\theta}^{1} a\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$= \frac{1}{2}a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \cos\theta\sin\theta\right) - \frac{1}{2}a(\theta - \cos\theta\sin\theta) = \frac{1}{2}a\left(\frac{\sin\theta}{\cos\theta} - \theta\right)$$

(3)　点 P が線分 AB の中点のとき，$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{1}{\cos\theta}\right)$より，

$$2\cos^2\theta + \cos\theta - 1 = 0,\ (2\cos\theta - 1)(\cos\theta + 1) = 0$$

$\cos\theta > 0$ より，$\cos\theta = \frac{1}{2}$となるので，$\theta = \frac{\pi}{3}$である。

このとき，$S_1 = \frac{1}{2}a\left(2\sqrt{3} - \frac{2}{3}\pi\right)$，$S_2 = \frac{1}{2}a\left(\sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right)$より，$S_1 = 2S_2$となる。

コメント

y 軸方向に$\frac{1}{a}$倍して，円を楕円に変換して解いたほうが簡単でしたが。

問　題

2 次関数 $y=f(x)$ は 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通り $(p>0)$，曲線 $y=e^x$ 上に頂点をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の x^2 の係数を p で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた図形を F_1 とする。また曲線 $y=e^x$ と x 軸，および 2 直線 $x=0$，$x=p$ で囲まれた図形を F_2 とする。さらに F_1，F_2 を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とする。このとき V_1，V_2 の値を, p を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}$ を求めよ。　　[2001]

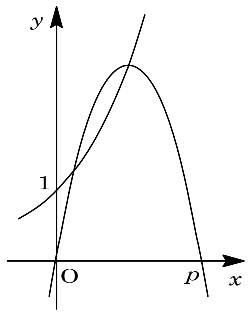
解答例

(1)　$y=f(x)$ のグラフは 2 点 $(0,\ 0)$，$(p,\ 0)$ を通るので，x^2 の係数を a とおくと，

$$f(x)=ax(x-p)$$

条件より，頂点は $\left(\dfrac{p}{2},\ e^{\frac{p}{2}}\right)$ となるので，

$$e^{\frac{p}{2}}=a\cdot\frac{p}{2}\left(-\frac{p}{2}\right),\ \ a=-\frac{4}{p^2}e^{\frac{p}{2}}$$



(2)　$$V_1=\pi\int_0^p a^2x^2(x-p)^2dx=\pi a^2\int_0^p(x^4-2px^3+p^2x^2)dx$$

$$=\pi a^2\left(\frac{p^5}{5}-2p\cdot\frac{p^4}{4}+p^2\cdot\frac{p^3}{3}\right)=\frac{\pi}{30}a^2p^5$$

$$=\frac{\pi}{30}\cdot\frac{16}{p^4}e^p\cdot p^5=\frac{8\pi}{15}pe^p$$

また，$V_2=\pi\displaystyle\int_0^p e^{2x}dx=\frac{\pi}{2}\Big[e^{2x}\Big]_0^p=\frac{\pi}{2}(e^{2p}-1)$

(3)　(2)より，$\dfrac{V_1}{V_2}=\dfrac{\frac{8}{15}\pi pe^p}{\frac{\pi}{2}(e^{2p}-1)}=\dfrac{8}{15}\cdot\dfrac{2p}{e^{2p}-1}e^p$ と変形すると，

$$\lim_{p\to+0}\frac{V_1}{V_2}=\lim_{p\to+0}\frac{8}{15}\cdot\frac{2p}{e^{2p}-1}e^p=\frac{8}{15}$$

コメント

普通に計算を進めると正解に到達できます。

問　題

$0<h<1$ とする。xy 平面上で，曲線 $y=e^{-x^2}$ と直線 $y=h$ とで囲まれた図形を，y 軸の周りに 1 回転してできる立体の体積を $V(h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$V(h)$ を求めよ。

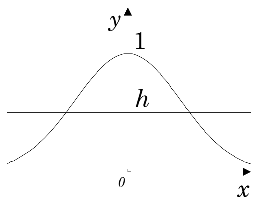
(2)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対し，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$ が成立することを示せ。

(3)　$h=2^{-n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots)$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V(2^{-n})$ を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$y=e^{-x^2}$ より，$x^2=-\log y$

$$V(h)=\pi\int_h^1(-\log y)\,dy=-\pi\Big[\,y\log y-y\,\Big]_h^1$$
$$=\pi(h\log h+1-h)$$



(2)　$n\geqq 2$ のとき，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=2$ のとき，$2^2>\dfrac{2\cdot 3}{2}$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき，$2^k>\dfrac{k(k+1)}{2}$ と成立を仮定する。

両辺×2 より，$2^{k+1}>k(k+1)$

ここで，$k(k+1)-\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}=\dfrac{(k+1)(2k-k-2)}{2}=\dfrac{(k+1)(k-2)}{2}\geqq 0$

よって，$2^{k+1}>\dfrac{(k+1)(k+2)}{2}$

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$

なお，$n=1$ のときは，$2^1>\dfrac{1\cdot 2}{2}$ より成立。

以上より，$n\geqq 1$ で，$2^n>\dfrac{n(n+1)}{2}$

(3)　$V(2^{-n})=\pi(2^{-n}\log 2^{-n}+1-2^{-n})=\pi\left(-\dfrac{n\log 2}{2^n}+1-\dfrac{1}{2^n}\right)$

(2)より，$0<\dfrac{1}{2^n}<\dfrac{2}{n(n+1)}$ なので，$0<\dfrac{n\log 2}{2^n}<\dfrac{2n\log 2}{n(n+1)}=\dfrac{2\log 2}{n+1}$

よって，$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{n\log 2}{2^n}\to 0$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V(2^{-n})=\pi$

コメント

微積分の基本題です。なお，(2)は二項定理を用いても証明することができます。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆