1

解答解説のページへ

n を自然数とする。1 から$3n+1$までの自然数を並べかえて，順にa_1，a_2，…，a_{n+1}，b_1，b_2，…，b_n，c_1，c_2，…，c_nとおく。また，次の条件(C1)，(C2)が成立しているとする。

(C1)　$3n$個の組 $|a_1-a_2|$，$|a_2-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$，$|a_1-b_1|$，$|a_2-b_2|$，…，$|a_n-b_n|$，$|a_1-c_1|$，$|a_2-c_2|$，…，$|a_n-c_n|$は，すべて互いに異なる。

(C2)　1 以上 n 以下のすべての自然数 k に対し，$|a_k-b_k|>|a_k-c_k|>|a_k-a_{k+1}|$ が成り立つ。

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$n=1$かつ$a_1=1$のとき，a_2，b_1，c_1を求めよ。

(2)　$n=2$かつ$a_1=7$のとき，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2を求めよ。

(3)　$n\geqq 2$かつ$a_1=1$のとき，a_3を求めよ。

(4)　$n=2017$かつ$a_1=1$のとき，a_{29}，b_{29}，c_{29}を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

xyz 空間において，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　球面 σ の方程式を求めよ。

(2)　xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ。

(3)　点 $\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} = -\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ を満たす, xy 平面上にない定点とする。σ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。p, q, r を用いて答えよ。

3

解答解説のページへ

連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)\,dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)\,dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)\,dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

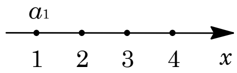
(2)　$g(x) = e^{-2x} f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3)　$f(x)$ を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　$n=1$のとき，1, 2, 3, 4 を並べかえると，a_1，a_2，b_1，c_1となる。さて，$a_1=1$から，$\{a_2,\ b_1,\ c_1\}=\{2,\ 3,\ 4\}$となり，条件(C2)から，

$$|1-b_1|>|1-c_1|>|1-a_2|$$

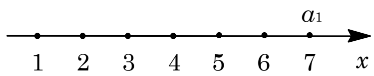


すると，$b_1=4$，$c_1=3$，$a_2=2$となり，$(a_2,\ b_1,\ c_1)=(2,\ 4,\ 3)$

(2)　$n=2$のとき，1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 を並べかえると，a_1，a_2，a_3，b_1，b_2，c_1，c_2となる。さて，$a_1=7$から，$\{a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2\}=\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$となり，条件(C2)から，

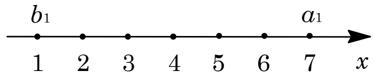
$$|7-b_1|>|7-c_1|>|7-a_2|\cdots\cdots\cdots①$$

$$|a_2-b_2|>|a_2-c_2|>|a_2-a_3|\cdots\cdots\cdots②$$



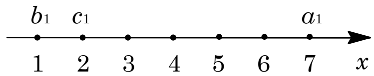
なお，条件(C1)から，$|7-b_1|$，$|7-c_1|$，$|7-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$は異なり，1, 2, 3, 4, 5, 6 のいずれかである。このとき$|a_2-b_2|\leqq 5$なので，$6=|7-b_1|$すなわち$b_1=1$となり，①から，

$$6>|7-c_1|>|7-a_2|\cdots\cdots\cdots③$$



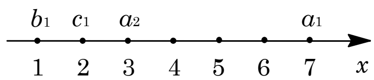
なお，条件(C1)から，$|7-c_1|$，$|7-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$は異なり，1, 2, 3, 4, 5 のいずれかである。このとき$|a_2-b_2|\leqq 4$なので，$5=|7-c_1|$すなわち$c_1=2$となり，③から，

$$5>|7-a_2|\cdots\cdots\cdots④$$



なお，条件(C1)から，$|7-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$は異なり，1, 2, 3, 4 のいずれかである。このとき$|a_2-b_2|\leqq 3$なので，$4=|7-a_2|$すなわち$a_2=3$となり，②から，

$$|3-b_2|>|3-c_2|>|3-a_3|\cdots\cdots\cdots⑤$$



なお，条件(C1)から，$|3-b_2|$，$|3-c_2|$，$|3-a_3|$は 1, 2, 3 のいずれかである。

すると，⑤から，$b_2=6$，$c_2=5$，$a_3=4$となり，

$$(a_2,\ a_3,\ b_1,\ b_2,\ c_1,\ c_2)=(3,\ 4,\ 1,\ 6,\ 2,\ 5)$$

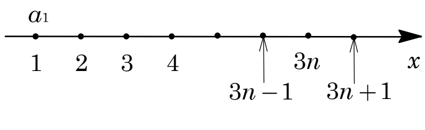
(3)　1, 2, 3, $\cdots$, $3n+1$を並べかえると，a_1，$\cdots$，a_{n+1}，b_1，$\cdots$，b_n，c_1，$\cdots$，c_nとなる。さて，$a_1=1$から，

$$\{a_2,\ \cdots,\ a_{n+1},\ b_1,\ \cdots,\ b_2,\ c_1,\ \cdots,\ c_n\}=\{2,\ 3,\ \cdots,\ 3n+1\}$$

条件(C2)から，$2\leqq i\leqq n$として，

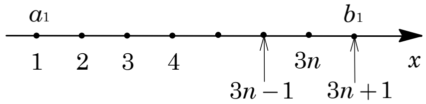
$$|1-b_1|>|1-c_1|>|1-a_2|\cdots\cdots\cdots⑥$$

$$|a_i-b_i|>|a_i-c_i|>|a_i-a_{i+1}|\cdots\cdots\cdots⑦$$



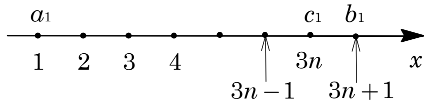
なお，条件(C1)から，$|1-b_1|$，$|1-c_1|$，$|1-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$，$\cdots$，$|a_n-a_{n+1}|$は異なり，1, 2, 3, $\cdots$, $3n$ のいずれかである。このとき$|a_i-b_i|\leqq 3n-1$なので，$3n=|1-b_1|$すなわち$b_1=3n+1$となり，⑥から，

$3n > |1-c_1| > |1-a_2|$ ………⑧



なお，条件 (C1) から，$|1-c_1|$，$|1-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$ は異なり，1, 2, 3, …，$3n-1$ のいずれかである。このとき $|a_i-b_i| \leqq 3n-2$ なので，$3n-1=|1-c_1|$ すなわち $c_1=3n$ となり，⑧から，

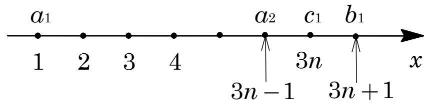
$3n-1 > |1-a_2|$ ………⑨



なお，条件 (C1) から，$|1-a_2|$，$|a_2-b_2|$，$|a_2-c_2|$，$|a_2-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$ は異なり，1, 2, 3, …，$3n-2$ のいずれかである。このとき $|a_i-b_i| \leqq 3n-3$ なので，$3n-2=|1-a_2|$ すなわち $a_2=3n-1$ となり，⑦から，$3 \leqq j \leqq n$ として，

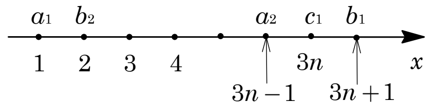
$|3n-1-b_2| > |3n-1-c_2| > |3n-1-a_3|$ ………⑩

$|a_j-b_j| > |a_j-c_j| > |a_j-a_{j+1}|$



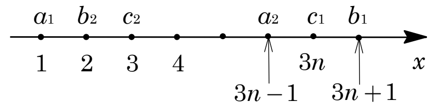
なお，条件 (C1) から，$|3n-1-b_2|$，$|3n-1-c_2|$，$|3n-1-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$ は異なり，1, 2, 3, …，$3n-3$ のいずれかである。このとき $|a_j-b_j| \leqq 3n-4$ なので，$3n-3=|3n-1-b_2|$ すなわち $b_2=2$ となり，⑩から，

$3n-3 > |3n-1-c_2| > |3n-1-a_3|$ ………⑪



なお，条件 (C1) から，$|3n-1-c_2|$，$|3n-1-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$ は異なり，1, 2, 3, …，$3n-4$ のいずれかである。このとき $|a_j-b_j| \leqq 3n-5$ なので，$3n-4=|3n-1-c_2|$ すなわち $c_2=3$ となり，⑪から，

$3n-4 > |3n-1-a_3|$ ………⑫



なお，条件 (C1) から，$|3n-1-a_3|$，…，$|a_n-a_{n+1}|$ は異なり，1, 2, 3, …，$3n-5$ のいずれかで，$|a_j-b_j| \leqq 3n-6$ から $3n-5=|3n-1-a_3|$ すなわち $a_3=4$ である。

(4)　$n=2017$ のとき $3n+1=6052$ となり，(2)(3)と同様にすると，

$a_1=1$，$b_1=6052$，$c_1=6051$，$a_2=6050$，$b_2=2$，$c_2=3$

$a_3=4$，$b_3=6049$，$c_3=6048$，$a_4=6047$，$b_4=5$，$c_4=6$

すると，$29=2\times15-1$ より，帰納的に，$a_{29}=1+3(15-1)=43$

$b_{29}=6052-3(15-1)=6010$，$c_{29}=6051-3(15-1)=6009$

［解　説］

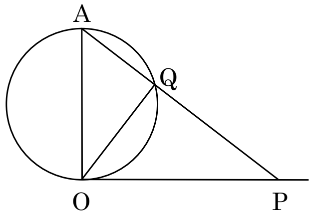
実質的に時間無制限の整数問題です。数直線を利用すると，考えを整理しやすくなります。なお，(4)はエネルギー不足で，やや雑な記述になっています。

2

問題のページへ

(1)　$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(0,\ 0,\ 1)$に対し，線分 OA が直径の球面σは，中心$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$より，その方程式は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$



(2)　xy平面上の点$P(P\neq O)$に対して, 3 点 O, A, P を含む平面を考えると，この平面による球面σの切り口は OA が直径の円となるので，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AP}$である。

(3)　$P(x,\ y,\ 0)$とおき，$AQ:QP=t:1-t\ (0<t<1)$とすると，

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OP}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x,\ y,\ 0)$$
$$=(tx,\ ty,\ 1-t)\cdots\cdots\cdots①$$

(2)より，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AP}$なので，$\overrightarrow{AP}=(x,\ y,\ -1)$から，

$$tx^2+ty^2-(1-t)=0,\ t=\frac{1}{x^2+y^2+1}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$S(p,\ q,\ r)\ (r\neq 0)$から$\overrightarrow{AS}=(p,\ q,\ r-1)$となり，$\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{AS}=-\left|\overrightarrow{OS}\right|^2$より，

$$p^2+q^2+r(r-1)=-(p^2+q^2+r^2),\ 2(p^2+q^2+r^2)=r\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\overrightarrow{OS}\perp\overrightarrow{SQ}$なので，①から$\overrightarrow{SQ}=(tx-p,\ ty-q,\ 1-t-r)$となり，

$$p(tx-p)+q(ty-q)+r(1-t-r)=0$$
$$ptx+qty+r(1-t)=p^2+q^2+r^2\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$2ptx+2qty+2r(1-t)=r$，$2ptx+2qty-2tr+r=0$

②を代入すると，$\dfrac{2px}{x^2+y^2+1}+\dfrac{2qy}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2r}{x^2+y^2+1}+r=0$となり，

$$2px+2qy-2r+r(x^2+y^2+1)=0,\ x^2+y^2-1+\frac{2p}{r}x+\frac{2q}{r}y=0$$

$$\left(x+\frac{p}{r}\right)^2+\left(y+\frac{q}{r}\right)^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{r^2}$$

ここで，③から$r>0$となり，$\left(x+\dfrac{p}{r}\right)^2+\left(y+\dfrac{q}{r}\right)^2=\dfrac{1}{2r}$

したがって，点 P はxy平面上で，中心$\left(-\dfrac{p}{r},\ -\dfrac{q}{r},\ 0\right)$，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2r}}$の円を描く。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。上の解答例は，成分計算を主体として記述しています。

3

問題のページへ

(1)　$F'(t)=f(t)$ とおくと，$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$ となり，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du=\int_0^x\{F(u)-F(0)\}du=\int_0^x F(u)du-F(0)x$$

$$\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du=\int_x^1\{F(1)-F(u)\}du=F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du$$

すると，与えられた条件式は，

$$F(x)-F(0)=4ax^3+(1-3a)x$$
$$+\int_0^x F(u)du-F(0)x+F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺を x で微分すると，

$$F'(x)=12ax^2+(1-3a)+F(x)-F(0)-F(1)+F(x)$$
$$f(x)=12ax^2+1-3a+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①に $x=0$ を代入すると，$0=F(1)-\displaystyle\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots③$

①に $x=1$ を代入すると，$F(1)-F(0)=4a+1-3a+\displaystyle\int_0^1 F(u)du-F(0)$ より，

$$F(1)=a+1+\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$a+1=0$ となり，$a=-1$ である。

すると，②から，$f(x)=-12x^2+4+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤に $x=0$，$x=1$ を代入すると，

$$f(0)=4+F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑥,\quad f(1)=-8+F(1)-F(0)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$f(0)+f(1)=4-8=-4\cdots\cdots⑧$である。

(2)　⑤の両辺を x で微分すると，$f'(x)=-24x+2F'(x)=-24x+2f(x)\cdots\cdots\cdots⑨$

ここで，$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，⑨から，

$$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}\{-24x+2f(x)\}$$
$$=-24xe^{-2x}$$

(3)　(2)より，$g(x)=-24\displaystyle\int xe^{-2x}dx$ となり，C を定数として，

$$g(x)=12xe^{-2x}-12\int e^{-2x}dx=12xe^{-2x}+6e^{-2x}+C=6(2x+1)e^{-2x}+C$$

すると，$f(x)=e^{2x}g(x)$ より，$f(x)=6(2x+1)+Ce^{2x}$ となり，⑧から，

$$(6+C)+(18+Ce^2)=-4,\quad C=-\frac{28}{1+e^2}$$

以上より，$f(x)=6(2x+1)-\dfrac{28}{1+e^2}e^{2x}$ である。

［解　説］

いわゆる微分型の積分方程式を解く問題です。問題文で与えられた関係式には驚きますが，誘導がていねいなので，方針に迷うことはないでしょう。