6　　　　［熊本大］

$x \geqq 1$ で定義された関数 $f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 1$ における $f(x)$ の最大値とそのときの x の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた x の値を a とする。曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=a$ で囲まれた図形を D とする。D の面積を求めよ。

(3)　(2)の図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大］

半直線$l: y=x\ (x\geqq 0)$，放物線$C: y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線Cと半直線lが接する点の座標を求めよ。

(2)　$t\geqq 0$とする。原点からの距離がtであるl上の点を$\mathrm{A}(t)$とするとき，$\mathrm{A}(t)$を通りlに直交する直線と，放物線Cの共有点の座標をtを用いて表せ。

(3)　放物線Cと半直線lおよびy軸とで囲まれた図形を，半直線lのまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

8　　　　［京都大］

xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0 \leqq y \leqq \log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

$\boxed{9}$　［神戸大］

極方程式で表された xy 平面上の曲線 $r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C 上の点を直交座標 $(x,\ y)$ で表したとき，$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ となる点，および $\dfrac{dy}{d\theta}=0$ となる点の直交座標を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}$ を求めよ。

(3)　曲線 C の概形を xy 平面上にかけ。

(4)　曲線 C の長さを求めよ。

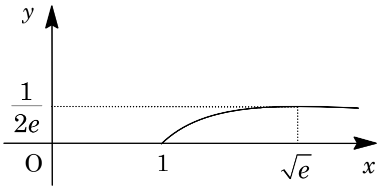
$\boxed{6}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　$x \geqq 1$ のとき，$f(x)=\dfrac{\log x}{x^2}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}x^2-2x\log x}{x^4}=\dfrac{1-2\log x}{x^3}$

すると，$f'(x)=0$ の解は $x=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}$ であるので，$f(x)$ は増減が右表のようになり，$x=\sqrt{e}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{2e}$ をとる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2e}$	$\searrow$

(2)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $y=0$，$x=\sqrt{e}$ で囲まれた図形 D の面積を S とおくと，



$$S=\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x^2}dx$$

ここで，$t=\log x$ とおくと，$dt=\dfrac{1}{x}dx$ となり，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}te^{-t}dt=-\Big[te^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-t}dt=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-\Big[e^{-t}\Big]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=-\frac{1}{2}e^{-\frac{1}{2}}-e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}+1=-\frac{3}{2\sqrt{e}}+1$$

(3)　図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_1^{\sqrt{e}}2\pi x\cdot\frac{\log x}{x^2}dx=2\pi\int_1^{\sqrt{e}}\frac{\log x}{x}dx=2\pi\Big[\frac{1}{2}(\log x)^2\Big]_1^{\sqrt{e}}=\pi\Big(\frac{1}{2}\Big)^2=\frac{\pi}{4}$$

［解　説］

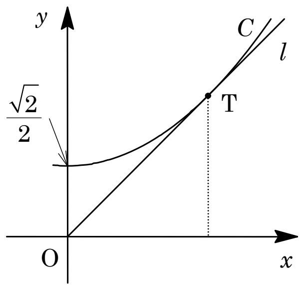
面積および体積に関する計算問題です。被積分関数は頻出タイプです。なお, (3)の解答例は円筒分割によるものです。

７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大］

(1)　$l : y = x\ (x \geqq 0)$ ……①，$C : y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……②に対して，①と②を連立すると，

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = x,\quad \sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2} = 0$$

すると，$\sqrt{2}(x - \sqrt{2})^2 = 0$ から $x = \sqrt{2}$ となり，接点 T の座標は $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ である。



(2)　l 上の点 $\mathrm{A}(t)$ の座標は，$\mathrm{OA}(t) = t$ から $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

これより，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線は，

$$y - \frac{\sqrt{2}}{2}t = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right),\quad y = -x + \sqrt{2}t \text{ ………③}$$

②③を連立すると，$\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -x + \sqrt{2}t$，$\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t = 0$ となり，

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 - 4t = 0,\quad x = -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{t}$$

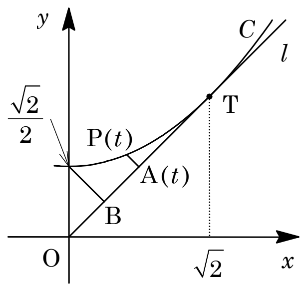
③から $y = \sqrt{2} \mp 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t$ なので，求める共有点の座標は，

$$(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t),\ (-\sqrt{2} - 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} + 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$$

(3)　$\mathrm{P}(t)$ の座標を $(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$ とし，2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{P}(t)$ の距離を $d(t)$ とおくと，

$$d(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \sqrt{2} - 2\sqrt{t}\right) = t - 2\sqrt{2t} + 2$$
$$= (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2$$

さて，点 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ がら l の下ろした垂線の足を B とすると $\mathrm{OB} = \dfrac{1}{2}$ であり，また(1)より，$\mathrm{OT} = 2$ である。



そこで，C と l および y 軸とで囲まれた図形を，l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} \{d(t)\}^2 dt = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} (\sqrt{t} - \sqrt{2})^4 dt$$

ここで，$u = \sqrt{t} - \sqrt{2}$ とおくと，$du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt = \dfrac{1}{2(u + \sqrt{2})}dt$ となり，

$$V = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} u^4 \cdot 2(u + \sqrt{2})du = \frac{\pi}{24} + 2\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (u^5 + \sqrt{2}u^4)du$$
$$= \frac{\pi}{24} + 2\pi\left[\frac{u^6}{6} + \frac{\sqrt{2}}{5}u^5\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}$$

［解 説］

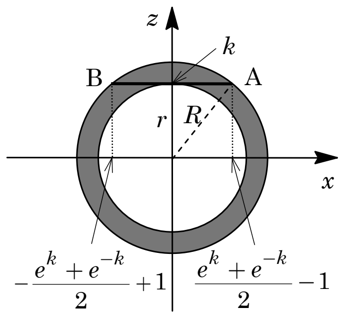
斜回転体の体積を求める問題で，(2)が(3)の誘導です。ただ，$\mathrm{OA}(t)$ の長さを t としたとき，$\mathrm{P}(t)$ の座標がややこしくないように問題が設定されています。その結果，$d(t)$ が簡単な式として表せ，積分計算も標準的というわけです。

$\boxed{8}$ ［京都大］

図形 D : $y=z$， $|x| \leqq \dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0 \leqq y \leqq \log a\ (a>1)$ を y 軸に垂直な平面 $y=k$ で切断したときの切り口は,

$$z=k,\ |x| \leqq \frac{e^k+e^{-k}}{2}-1,\ 0 \leqq k \leqq \log a$$

平面 $y=k$ 上で図示すると, 右図の線分 AB となる。



さて, この線分を y 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R, 内径を r とすると,

$$R=\sqrt{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2},\ r=k$$

このドーナツ形の面積を $S(k)$ とすると,

$$S(k)=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left\{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2\right\}-\pi k^2=\pi\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2$$

$$=\frac{\pi}{4}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)$$

したがって, 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_0^{\log a} S(k)dk=\frac{\pi}{4}\int_0^{\log a}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)dk$$

$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2k}-\frac{1}{2}e^{-2k}-4e^k+4e^{-k}+6k\right]_0^{\log a}$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}(a^2-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)-4(a-1)+4\left(\frac{1}{a}-1\right)+6\log a\right\}$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{8}-\frac{1}{8a^2}-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right)$$

［解 説］

空間図形の回転体の体積を求める問題です。回転軸に垂直な平面での切り口の面積を求め, それを回転軸方向に積分することで体積を計算するという基本に従っています。見かけよりはスムーズに進みます。

9　　　　［神戸大］

(1)　$C: r=1+\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$ を直交座標で表すと，

$$x=(1+\cos\theta)\cos\theta=\cos\theta+\cos^2\theta=\frac{1}{2}\cos 2\theta+\cos\theta+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

$$y=(1+\cos\theta)\sin\theta=\sin\theta+\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\sin\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin 2\theta-\sin\theta=-\sin\theta(2\cos\theta+1)$

$\dfrac{dx}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=0,\ \dfrac{2}{3}\pi,\ \pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ 2\pi$ となり，対応する点は順に，

$$(2,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ \frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (0,\ 0),\ \left(-\frac{1}{4},\ -\frac{\sqrt{3}}{4}\right),\ (2,\ 0)$$

②より，$\dfrac{dy}{d\theta}=\cos 2\theta+\cos\theta=2\cos^2\theta+\cos\theta-1=(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)$

$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$\theta=\dfrac{\pi}{3},\ \pi,\ \dfrac{5}{3}\pi$ となり，対応する点は順に，

$$\left(\frac{3}{4},\ \frac{3}{4}\sqrt{3}\right),\ (0,\ 0),\ \left(\frac{3}{4},\ -\frac{3}{4}\sqrt{3}\right)$$

(2)　$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{(2\cos\theta-1)(\cos\theta+1)}{-\sin\theta(2\cos\theta+1)}$ より，

$$\lim_{\theta\to\pi}\frac{dy}{dx}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{(\cos\theta+1)(1-\cos\theta)}{\sin\theta(1-\cos\theta)}=-\lim_{\theta\to\pi}\frac{2\cos\theta-1}{2\cos\theta+1}\cdot\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}$$

$$=-\frac{-2-1}{-2+1}\cdot\frac{0}{1+1}=0$$

(3)　$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおき，

$$f(2\pi-\theta)=f(\theta)$$

$$g(2\pi-\theta)=-g(\theta)$$

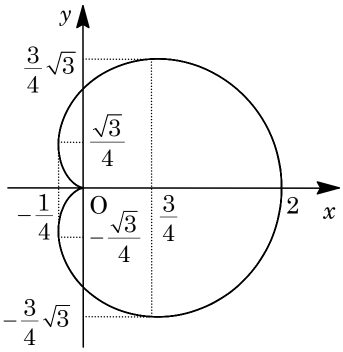
これより，曲線 C の $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分は，x 軸対称となり，まず $0\leqq\theta\leqq\pi$ において $x,\ y$ の増減を調べると，右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	2	↘	$\dfrac{3}{4}$	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{4}$	↘	0

また，(2)から $\displaystyle\lim_{\theta\to\pi-0}\frac{dy}{dx}=0$ であり，さらに，

$$\lim_{\theta\to+0}\frac{dy}{dx}=-\infty$$

そして，この $0\leqq\theta\leqq\pi$ の部分を x 軸に折り返してできる $\pi\leqq\theta\leqq 2\pi$ の部分を合わせると，曲線 C の概形は右図のようになる。



(4)　曲線 C の長さを l とし，(1)から，

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2=\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta$$

$$\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta$$

x 軸に関する対称性を利用すると,

$$l=2\int_0^{\pi}\sqrt{\sin^2 2\theta+2\sin 2\theta\sin\theta+\sin^2\theta+\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{1+1+2\cos(2\theta-\theta)}\,d\theta=2\int_0^{\pi}\sqrt{2+2\cos\theta}\,d\theta$$

$$=2\int_0^{\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}d\theta=8\Big[\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}=8$$

［解 説］

カージオイドの概形をかき，その長さを求める問題です。まったく同じ問題を，一度は演習したにちがいないと思われますが……。