1　　［東京工大］

数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　すべてのnに対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ。

(3)　極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}=4-\dfrac{1}{a_n-2}$ に対して，$a_1=5$ から，$a_2=4-\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{11}{3}$

$$a_3=4-\frac{1}{\frac{11}{3}-2}=\frac{17}{5},\ a_4=4-\frac{1}{\frac{17}{5}-2}=\frac{23}{7}$$

これより，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ と推測できるので，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{6-1}{2-1}=5$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=4-\frac{1}{a_k-2}=4-\frac{1}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}=4-\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{6k+5}{2k+1}=\frac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$$

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

(2)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\frac{1}{2k-1}\Big)$ とおくと，$s_n\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

さらに，$t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$ とおくと，$s_n\leqq 3t_n+2n$ となり，

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\frac{s_n}{t_n}\leqq\frac{3t_n+2n}{t_n}=3+\frac{2n}{t_n}=3+\frac{4}{n+1}$$

(3)　$s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\frac{1}{2k-1}\Big)>\sum_{k=1}^{n}3k=3t_n$ から，$b_n=\dfrac{s_n}{t_n}>\dfrac{3t_n}{t_n}=3$ となり, (2)から,

$$3<b_n\leqq 3+\frac{4}{n+1}$$

よって，$n\to\infty$ のとき $\dfrac{4}{n+1}\to 0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$ である。

［解　説］

丁寧な誘導のついた数列の極限の問題です。なお, (1)は普通に, 推測→帰納法のパターンで記していますが, 式変形により漸化式を解くことも可能です。