《2018 入試対策》

九州大学

理系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された九州大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 九大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」や「コンピュータ」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする。

(1)　xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2)　G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3)　直線 $mx+ny=0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。ただし，m, n は共には 0 でないとする。

(4)　G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。　[2001]

■ 図形と計量

1　t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2)　$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3)　三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4)　三角形 PQR の面積を求めよ。　[2016]

2　三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。　[2010]

3 いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。 [2008]

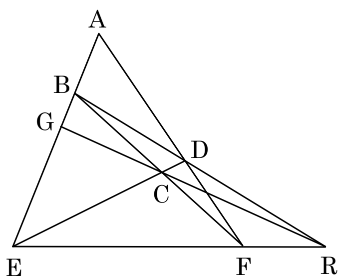
4 長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて，l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0°<\theta\leqq 90°$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。 [1999]

5 右図のような四角形 ABCD において，直線 AB と直線 CD の交点 E，直線 BC と直線 AD の交点 F，直線 BD と直線 EF の交点 R，直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。



(1) $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}$ が成り立つことを示せ。

(2) G が AE の中点で，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}=2$ であるとき，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{CD}=b$ とおく。次の条件をみたす x, y, z の値を求めよ。

① $\mathrm{EB}=xa$　　② $\mathrm{EC}=yb$

③ 四角形 ABCD が円に内接するとき，$a=zb$ [1998]

■ ベクトル

1　2 つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の 4 点を $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を a, b を用いて表せ。　[2017]

2　1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ を満たす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$，および線分 OP の長さを求めよ。　[2013]

3　空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 3)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{C}(1,\ 2,\ 0)$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2)　3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3)　四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2011]

4　座標平面に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 6)$，$\mathrm{B}(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2)　s を定数として, t を $t\geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

[2009]

5　△OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形△OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a, b, c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b, c を用いて表せ。

(3)　3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

[2008]

6　a，b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3)　点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。　[2007]

7　△OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長を交わる点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用いて表せ。

(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。

(3)　(2)の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。　[2006]

8 座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2) 四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3) 点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。 [2004]

9 空間内に四面体 OABC があり∠AOB, ∠BOC, ∠COA はすべて 90° であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) ∠OGA, ∠OGB, ∠OGC がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

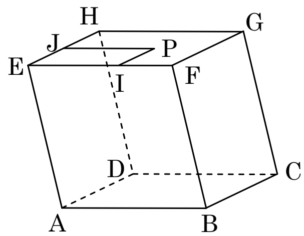
(2) 線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。 [2003]

10 空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) △ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAB}=\theta$ とする。ここで θ は $0<\theta<\pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を θ, x, y を用いて表せ。

(3) 問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。 [2002]



（平行六面体ABCD-EFGH）

11　$a,\ b,\ c$ を 0 でない実数として，空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ をとる。

(1)　空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2)　(1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3)　(1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。　[2000]

12　大きさ 1 の空間ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ が $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2},\ \vec{a}\cdot\vec{c}=0$ を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル $\vec{d},\ \vec{e},\ \vec{f}$ が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき，点 $\mathrm{D}(\vec{d})$，$\mathrm{E}(\vec{e})$，$\mathrm{F}(\vec{f})$ および原点 O について次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$ となるような実数 $x,\ y,\ z$ を求めよ。同様に $\vec{f}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表せ。

(2)　ベクトル $\vec{d},\ \vec{f},\ \vec{d}-\vec{f}$ の大きさを求めよ。

(3)　三角形 ODF の面積を求めよ。

(4)　四面体 ODEF の体積を求めよ。　[1999]

13　辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおき，線分 OA を $m:n$ に内分する点を P，線分 BC を $m:n$ に内分する点を Q，線分 CO を $m:n$ に内分する点を R，線分 AB を $m:n$ に内分する点を S とする。（ただし，$m,n>0$ とする）

(1)　①　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{RS}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表せ。

　　②　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RS}}$ が垂直かどうか調べよ。

(2)　①　点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの $m,\ n$ の関係を求めよ。

　　②　このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ を $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ で表せ。

　　③　G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1 初項$a_1=1$，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

[2017]

2 自然数 n に対して，10^nを 13 で割った余りをa_nとおく。a_nは 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1}は$10a_n$を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，$\cdots$，a_6を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数Nをすべて求めよ。

(i) Nを十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii) Nを十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii) Nは 13 で割り切れる。 [2016]

3 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1は 3 の倍数であることを示せ。

(2) n を自然数とする。2^n+1と2^n-1は互いに素であることを示せ。

(3) p, q を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$を満たすp, qの組をすべて求めよ。

[2015]

4 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数aに対し，a^2を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数a, b, cが$a^2+b^2=3c^2$を満たすと仮定すると，a, b, cはすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$を満たす自然数a, b, cは存在しないことを証明せよ。 [2014]

5 数列a_1，a_2，…，a_n，… は，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-{a_n}^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とするとき，一般項a_nを求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$とするとき，$a_{n+k}=a_n$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$を満たす最小の自然数kを求めよ。 [2011]

6 関数$f(x)$が 0 でない定数pに対して，つねに$f(x+p)=f(x)$を満たすとき$f(x)$は周期関数であるといい, pを周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば，関数$\sin x$の基本周期は2πである。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=|\sin x|$のグラフをかき，関数$|\sin x|$の基本周期を求めよ。

(2) 自然数m，nに対して関数$f(x)$を$f(x)=|\sin mx|\sin nx$とおく。pが関数$f(x)$の周期ならば，$f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=0$が成り立つことを示せ。また，このとき$mp$は$\pi$の整数倍であり, npは2πの整数倍であることを示せ。

(3) m，nは 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数$|\sin mx|\sin nx$の基本周期を求めよ。 [2007]

7 2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1=b_1=1$および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n\ ,\ \ b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$のとき，a_nは 3 で割り切れるが，b_nは 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$のとき，a_nとb_nは互いに素であることを示せ。 [2006]

8 座標平面上で，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$，$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$が表す領域を，それぞれA, Bとする。

(1) 領域Aを図示せよ。

(2) 領域Bを図示せよ。

(3) 領域Bの点$(x,\ y)$で，xが正の整数でありyが整数であって，$\log_x|y|$が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。 [2003]

9　正の整数 a に対し, a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし, 1 および a 自身も約数とする。たとえば, $f(1)=1$ であり, $a=15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので, $f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1)　a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

(2)　a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ。また, 等号が成り立つのは, $q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3)　正の偶数 a, b は, ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a=2^m r$, $b=2^n s$ のように表すことができる。このとき a, b が $f(a)=2b$, $f(b)=2a$ をみたせば, r, s は素数であり, かつ $r=2^{n+1}-1$, $s=2^{m+1}-1$ となることを示せ。　[2002]

10　(1)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について, 次の等式が成り立つことを示せ。

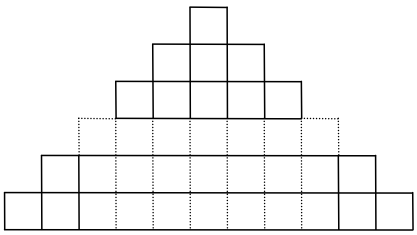
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して, 辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

①　$m=2,\ 3,\ 4$ のとき, どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

②　一般に, 辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し, その式が成り立つ理由を述べよ。

(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して, すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ, 高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし, 図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。　[1998]



11　3 桁の自然数 $N = 100a + 10b + c$ （a, b, c は，$1 \leqq a \leqq 9$，$0 \leqq b \leqq 9$，$0 \leqq c \leqq 9$ をみたす整数）を考える。

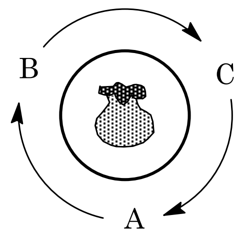
(1)　平方数かつ奇数である N で, 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフが x 軸と接するようなものをすべて求めよ。

(2)　命題「N および a が平方数のとき 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは x 軸と接する」は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3)　ある N について, 2 次関数 $y = ax^2 + bx + c$ のグラフは座標が整数である相異なる 2 点で x 軸と交わり，グラフと x 軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このときの N を求めよ。 [1998]

■ 確率

1　赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール(a), (b), (c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。



(a)　赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b)　青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

(c)　白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n ($n = 1,\ 2,\ \cdots$) とする。ただし，$a_1 = 1$，$b_1 = c_1 = 0$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2)　$d_n = a_n + b_n + c_n$ ($n = 1,\ 2,\ \cdots$) とおくとき，d_n を求めよ。

(3)　自然数 $n \geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。 [2017]

2 座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $P_0(1,\ 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

（規則）(i)　1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。たとえば，コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii)　6 の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。たとえば，コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1)　2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(2)　3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(3)　n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。　[2016]

3 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

(1)　2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2)　奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3)　8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4)　8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。　[2015]

4　A さんは 5 円硬貨を 3 枚, B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお, 表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし, 硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて, 以下の問いに答えよ。

(1)　A さんが B さんに勝つ確率 p, および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2)　ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

[2014]

5　横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して, 以下の操作 L と操作 R を考える。

L : さいころを投げて, 出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R : さいころを投げて, 出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば, 表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに, 3 の目が出た場合は, 裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1)　最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき, 表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2)　最初の状態から L, R の順に操作を行うとき, 表の枚数の期待値を求めよ。

(3)　最初の状態から L, R, L の順に操作を行うとき, すべての硬貨が表となる確率を求めよ。　[2013]

6　いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき, 次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ, その後, 箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個, 箱 B に白玉が 2 個入っているとき以下の問いに答えよ。

(1)　試行 T を 1 回行ったときに, 箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2)　試行 T を 2 回行ったときに, 箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3)　試行 T を 3 回行ったときに, 箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。　[2012]

7　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=2$ のとき，カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。
(2)　$n=2$ のとき，カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。
(3)　$n=2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。
(4)　$n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。　[2011]

8　k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚，「2」と書かれたカードが 2 枚，…，「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M，奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1 と p_2 を M, N で表せ。
(2)　p_{n+1} を p_n , M, N で表せ。
(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。
(4)　p_n を n と k で表せ。　[2009]

9　1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取った番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。
(2)　2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。
(3)　得点の期待値を求めよ。　[2008]

10　さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に $a,\ b,\ c$ とする。これらの数 $a,\ b,\ c$ に対して 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0\cdots\cdots(*)$を考える。ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式$(*)$が異なる 2 つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組$(a,\ c)$がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2)　2 次方程式$(*)$が異なる 2 つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

[2007]

11　n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1)　赤青…青，赤赤青…青，……　のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

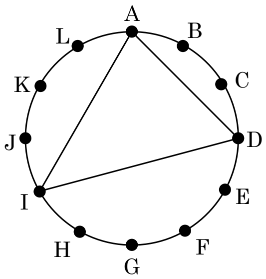
(2)　色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3)　色の変化がちょうど m 回$(0\leqq m\leqq n-1)$起きる確率を求めよ。

(4)　色の変化の回数の期待値を求めよ。

[2004]

12　右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば，図のような三角形が得られる。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2)　二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3)　直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(4)　3 点を選んで得られる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。

[1998]

■ 論証

1　区間 $[a,\ b]$ が関数 $f(x)$ に関して不変であるとは，$a \leqq x \leqq b$ ならば，$a \leqq f(x) \leqq b$ が成り立つこととする。$f(x)=4x(1-x)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　区間 $[0,\ 1]$ は関数 $f(x)$ に関して不変であることを示せ。

(2)　$0<a<b<1$ とする。このとき，区間 $[a,\ b]$ は関数 $f(x)$ に関して不変ではないことを示せ。　[2006]

2　係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい，可約でないとき既約であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2)　1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。　[2000]

3　実数 a, b は $0<a<b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\ \sqrt{ab},\ \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$　[1999]

4　(1)　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2)　①　不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

②　①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。　[1998]

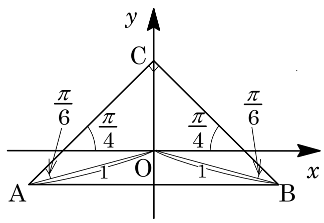
■ 複素数

1　2 つの複素数 $\alpha=10000+10000i$ と $w=\dfrac{\sqrt{3}}{4}+\dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n=\alpha w^n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2)　$|z_n|\leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3)　右図のように，複素数平面上の△ABC は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を 1 つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお, A, B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A, B の距離はともに 1 である。点 P_n が△ABC の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



[2017]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　θ を $0\leqq\theta<2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z=\cos\theta+i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta=\frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right),\ \ \sin n\theta=-\frac{i}{2}\left(z^n-\frac{1}{z^n}\right)$$

(2)　次の方程式を満たす実数 x $(0\leqq x<2\pi)$ を求めよ。

$$\cos x+\cos 2x-\cos 3x=1$$

(3)　次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ+\sin^2 40^\circ+\sin^2 60^\circ+\sin^2 80^\circ=\frac{9}{4}$$

[2016]

3　t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。

[2005]

4　$0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ (t は実数全体を動く)が表す直線を l とする。ただし，i は虚数単位である。

(1)　複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2)　直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と(1)で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。　[2003]

5　複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる。次の問いに答えよ。

(1)　$w_1=z_1+z_2+z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで，三角形の垂心とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これらの 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

(2)　$w_2=-\overline{z_1}z_2z_3$ とおく。$w_2\neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である。

(3)　2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ。ただし，$w_1=w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する。　[2002]

6　複素数平面上の点 z を考える。

(1)　実数 a, c と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき，$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ を満たす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2)　0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 p, q に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか。　[2001]

7　複素数 $z=\cos 20^\circ+i\sin 20^\circ$ と，それに共役な複素数 $\overline{z}$ に対し，$\alpha=z+\overline{z}$ とする。

(1)　α は整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2)　この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3)　有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。　[2000]

8　k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha\neq\beta)$ とする。i を虚数単位として次の問いに答えよ。

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ。

(2)　複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A, B, P とする。$\angle$APB が直角となるような k の値を求めよ。　[1999]

9　k を実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点とみなす。

(1)　z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(2)　z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(3)　3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転して得られる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが，原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ（$0\leqq\theta\leqq\pi$）の値を求めよ。　[1998]

■ 曲線

1　座標平面上の楕円 $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ ……①を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　楕円①と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2)　$|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ。

(3)　点 $(x,\ y)$ が楕円①上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。　[2014]

2　座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ y(t)=\cos(2t)\quad(0\leqq t<2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1)　P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2)　C が x 軸, y 軸に関して対称であることを示せ。

(3)　C の概形を描け。

(4)　C が囲む図形の面積を求めよ。　[2004]

3　θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$ を満たす点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2$ に引いた 2 つの接線の接点を Q, R とし，接線 PQ, PR の傾きをそれぞれ m_1，m_2 とおく。点 P は $\angle\mathrm{QPR}=\theta$ を満たしている。点 P の全体が作る図形を G とする。

(1)　$m_1<0<m_2$ のとき，$\tan\theta$ を m_1 と m_2 で表せ。

(2)　G を数式で表せ。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき G を図示せよ。　[2003]

4　平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて，

$$x=f(\theta)\cos\theta,\quad y=f(\theta)\sin\theta$$

と表されている。θ が $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(0)$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる（ただし楕円の上にない）ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2)　点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3)　次の条件(i)(ii)(iii)をみたす楕円 D を考える。

(i)　D の軸の 1 つは x 軸上にある。

(ii)　D は点 P_1，P_2 を通る。

(iii)　点 P_2 における D の接線は l である。

このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。　[2002]

5 平面上の点の極座標を，原点 O からの距離 $r(\geqq 0)$ と偏角 θ を用いて $(r,\ \theta)$ で表す。

(1) 平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2\cos(\pi+\theta),\ C_2 : r = 2(\cos\theta+1)\left(\text{ただし}\ \frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$$

の概形を描き，この 2 曲線 C_1，C_2 の交点の極座標を求めよ。

(2) 平面上の 3 点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，E の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$，$(1,\ 0)$ とするとき，三角形 $\mathrm{OEP_1}$ と三角形 $\mathrm{OP_2Q}$ とが相似となる点 Q を $\mathrm{P_1} * \mathrm{P_2}$ で表す。点 $\mathrm{P_1} * \mathrm{P_2}$ の極座標を求めよ。ただし，点 Q は $\angle\mathrm{EOP_1} = \angle\mathrm{P_2OQ}$ となるように向きも込めて定める。

(3) 3 点 O，$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ が同一直線上にないとき，四辺形 $\mathrm{OP_1RP_2}$ が平行四辺形となるような点 R を $\mathrm{P_1} \circ \mathrm{P_2}$ で表す。$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき，点 $\mathrm{P_1} \circ \mathrm{P_2}$ の極座標を求めよ。

(4) さらに，平面上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，実数 k に対し点 $k\mathrm{P}$ を，$k \geqq 0$ のときは極座標が $(kr,\ \theta)$ となる点，$k<0$ のときは極座標が $(|k|r,\ \theta+\pi)$ となる点とする。(1)で求めた 2 曲線 C_1，C_2 の交点を V として，点 $k(\mathrm{V} \circ (\mathrm{V} * \mathrm{V}))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。 [2000]

6 (1) 平面上に半径が R, r（$R>r$）の 2 円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。

(2) 座標平面上で x 軸を準線とし，定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a>0$ とする。

① そのような放物線の焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ の全体はどのような図形を描くか。

② x 軸上にない点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。 [1998]

■ 極限

1 座標平面上の曲線 C_1，C_2 をそれぞれ

$$C_1 : y = \log x\ (x > 0),\quad C_2 : y = (x-1)(x-a)$$

とする。ただし, a は実数である。n を自然数とするとき，曲線 C_1，C_2 が 2 点 P, Q で交わり, P, Q の x 座標はそれぞれ 1，$n+1$ となっている。また，曲線 C_1 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を S_n，曲線 C_2 と直線 PQ で囲まれた領域の面積を T_n とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) a を n の式で表し，$a > 1$ を示せ。

(2) S_n と T_n をそれぞれ n の式で表せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n}$ を求めよ。 [2016]

2 p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α，β をもち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) \neq 0$ を満たしているとする。このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n = (\alpha^n - 1)(\beta^n - 1)\quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1) a_1，a_2，a_3 は整数であることを示せ。

(2) $(|\alpha|-1)(|\beta|-1) > 0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。 [2012]

3 xy 平面上に曲線 $y = \dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $P_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q_1 の座標を求めよ。

(2) 三角形 $P_1Q_1P_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3) 三角形 $P_nQ_nP_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4) 級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。 [2010]

4　$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし，$0!=1$ とする。

(1)　I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。　[2004]

5　座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。$p,\ n$ を自然数とし，領域 $D_n=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$ を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1)　グラフ $y=x^p\ (0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2)　不等式 $M_n<S_n<M_n+n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$ を求めよ。　[2003]

6　m を 2 以上の自然数, e を自然対数の底とする。

(1)　方程式 $xe^x-me^x+m=0$ を満たす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。またその値を c とするとき，$m-1<c<m$ となることを示せ。

(2)　$x>0$ の範囲で $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x^m}$ は $x=c$ で最小となることを示せ。

(3)　a_m を(2)で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m}$ を求めよ。

[1999]

7　関数 $f(x)=1-x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2)　a を(1)で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$ となることを示せ。

(3)　a を(1)で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として，

$$x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば，$x_1=a$ であることを示せ。　[1999]

■ 微分法

1　2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。　[2014]

2　$a>1$ とし，2 つの曲線

$$y=\sqrt{x}\quad (x \geqq 0),\quad y=\frac{a^3}{x}\quad (x>0)$$

を順に C_1，C_2 とする。また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2)　点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\dfrac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a\sin\theta(a)$ を求めよ。　[2013]

3　実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　この方程式が実数解をもつような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2)　この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解をもつような a の範囲を求めよ。　[2012]

4　a を正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$ の極大値および極小値を求めよ。

(2)　$x \geqq 3$ のとき，不等式 $x^3e^{-x} \leqq 27e^{-3}$ が成り立つことを示せ。さらに，極限値 $\lim_{x\to\infty} x^2e^{-x}$ を求めよ。

(3)　k を定数とする。$y=x^2+2x+2$ のグラフと $y=ke^x+a^2$ のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，a と k を用いて表せ。　[2011]

5　曲線 $C_1: y=\dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b \neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2)　点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1)で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3)　曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2009]

6　曲線 $y=e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2)　P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3)　P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。　[2009]

7　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3)　$\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。　[2008]

8 $a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x\ (x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1}\ (x\geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点をもたないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2008]

9 $f(x)=xe^x$ とおく。また p を $p\geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 0$ において $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y=f(x)$，接線 $y=g(x)$，および 2 直線 $x=0$，$x=L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p\geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。 [2007]

10 次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1)の 2 つの実数解を α_n，$\beta_n\ (\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$，$ne<\beta_n$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。 [2006]

11 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 $\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。 [2005]

12　実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x=a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　$a>0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} ae^{-a}=0$ であることを用いてよい。

(3)　$S(a)=1.35$ となる a が $2<a<3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5<e<3$ であることを用いてよい。　[2005]

13　関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1)　関数 $f(x)$ がつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3)　関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a，b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。　[2001]

14　(1)　実数 $k \geqq 0$ に対し，

$$\int_0^{2\pi}\left\{ y\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2 \right)-\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2 \right)^2 \right\}\cos\theta\, d\theta = 2k\pi$$

を満たす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた曲線と直線 $y=a$ との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。　[1999]

15 以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x)=e^x f(x)$ とおく。

(1) 定数関数でない関数 $f(x)$ で

条件(A)：すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である

をみたすものの例をあげよ。

(2) 関数 $f(x)$ が

条件(B)：すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である

をみたすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ。

(3) 関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)をみたすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ。

(4) 関数 $f(x)$ が(1), (2)の条件(A), (B)をともにみたすとする。

① $f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ。

② ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ となることを示せ。

[1998]

■ 積分法

1 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。

(2) 不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3) n を 3 以上の整数とするとき，不等式 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。

[2015]

2 関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ を考える。ただし，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ とする。さらに，$0\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$F(a)=\displaystyle\int_0^a f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) $F(a)$ を求めよ。

[2006]

3 次の問いに答えよ。

(1) すべての正の実数 x, y に対して，不等式 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2) a, b は実数で $a<b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で，$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3) a, b は実数で $a<b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。　[2002]

4 n を自然数として，$f(x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく。

(1) $x<1$ において，$f(x) = -\log(1-x) - \displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt$ が成り立つことを示せ。ここで，log は自然対数を表す。

(2) $|x| \leqq \dfrac{1}{3}$ とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

(i) $x \geqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt \leqq \frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

(ii) $x<0$ において，$\left|\displaystyle\int_0^x \frac{t^n}{1-t}\,dt\right| \leqq \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

(iii) $\left| f(x) - f(-x) - \log\dfrac{1+x}{1-x}\right| \leqq \dfrac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3) この不等式を用いて，log2 の近似値を誤差が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

[2000]

■ 積分の応用

1　定数$a>0$に対し，曲線$y=a\tan x$の$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$の部分をC_1，曲線$y=\sin 2x$の$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$の部分をC_2とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1とC_2が原点以外に交点をもつためのaの条件を求めよ。

(2)　aが(1)の条件を満たすとき，原点以外のC_1とC_2の交点をPとし，Pのx座標をpとする。PにおけるC_1とC_2のそれぞれの接線が直交するとき，aおよび$\cos 2p$の値を求めよ。

(3)　aが(2)で求めた値のとき，C_1とC_2で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2017]

2　C_1，C_2をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y=-x^2+2x\ (0\leqq x\leqq 2),\quad C_2 : y=-x^2-2x\ (-2\leqq x\leqq 0)$$

また，aを実数とし，直線$y=a(x+4)$をlとする。

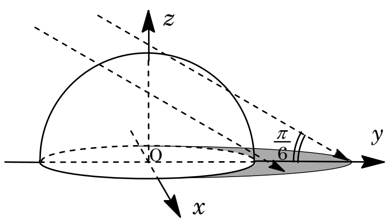
(1)　直線lとC_1が異なる2つの共有点をもつためのaの値の範囲を求めよ。

以下，aが(1)の条件を満たすとする。このとき，lとC_1で囲まれた領域の面積をS_1，x軸とC_2で囲まれた領域でlの下側にある部分の面積をS_2とする。

(2)　S_1をaを用いて表せ。

(3)　$S_1=S_2$を満たす実数aが$0<a<\dfrac{1}{5}$の範囲に存在することを示せ。　[2015]

3　座標空間内に，原点O(0, 0, 0)を中心とする半径1の球がある。右の概略図のように，y軸の負の方向から仰角$\dfrac{\pi}{6}$で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル$(0,\ \sqrt{3},\ -1)$に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



(1)　球の$z\geqq 0$の部分がxy平面上につくる影を考える。kを$-1<k<1$を満たす実数とするとき，xy平面上の直線$x=k$において，球の外で光が当たらない部分のy座標の範囲をkを用いて表せ。

(2)　xy平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3)　$z\geqq 0$において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。　[2015]

4 関数 $f(x)=x-\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする。

(1) l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) a は(1)で求めたものとする。曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2014]

5 原点 O を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ を通る円を S とする。点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 AB，円 T の短い方の弧 BC，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2013]

6 円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2012]

7 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x\geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。　[2011]

8 中心が $(0,\ a)$，半径 a の円を xy 平面上の x 軸の上を x の正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点 $(0,\ 0)$ を出発するとする。次の問いに答えよ。

(1) 円が角 t だけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) t が 0 から 2π まで動いて円が 1 回転したときの点 P の描く曲線を C とする。曲線 C と x 軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2)の曲線の長さを求めよ。　[2010]

9 直線 $l : y = x + a$ が曲線 $C : y = 2\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$ に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし, $a \geqq 0$ とする。

(1) a の値を求めよ。

(2) 曲線 C と直線 l で囲まれた図形の $y \geqq 0$ の範囲にある部分を，x 軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。 [2005]

10 xy 平面上で，$x = r(t)\cos t$，$y = r(t)\sin t\ (0 \leqq t \leqq \pi)$ で表される曲線を C とする。

(1) $r(t) = e^{-t}$ のとき, x の最小値と y の最大値を求め, C の概形を図示せよ。

(2) 一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し，

$$\int_0^{\pi} \{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt = \int_0^{\pi} \{r(t)\}^3\left(\sin^3 t - \frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3) (1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，$V = \dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi} e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ。 [2003]

11 平面上を運動する点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の時刻 t での x 座標と y 座標が

$$x = \frac{e^t - e^{-t}}{2},\quad y = \frac{e^t + e^{-t}}{2}$$

で表されている。ただし，e は自然対数の底である。原点を O，点(0，1)を M とする。t が $t \geqq 0$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。時刻 t において，曲線 C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を $A(t)$ で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を $S(t)$ で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 x, y に対して y を x を用いて表せ。

(2) 時刻 t を用いて $A(t)$ と $S(t)$ を表せ。

(3) $A(t) - S(t)$ が最大となる時刻 t を求めよ。 [2002]

12　空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0<r\leqq\sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1)　高さが $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2)　K の体積 $V(r)$ を求めよ。

(3)　$0<r\leqq\sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。　[2001]

13　関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1)　$\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2)　$\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ。

(3)　t が a から b（$a<b$）まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。　[2001]

14　定数 a，b を係数とする 2 次関数 $y=-ax^2+b$ のグラフが，原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし，$a>0$ とする。

(1)　a, b の条件式，および接点の座標を求めよ。

(2)　与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を，y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

(3)　V を最小にする a, b の値，およびそのときの V の値を求めよ。　[2000]

15　平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x=\sin t - t\cos t,\quad y=\cos t + t\sin t\quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で与えられている。

(1)　曲線 C の長さを求めよ。

(2)　曲線 C 上の各点 P において, P における接線と P で直交する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は, P を動かすときどんな図形を描くか。

(3)　$\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ。

(4)　曲線 C と y 軸および直線 $y=-1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。　[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

3 次関数 $y = x^3 + ax^2 + bx + c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。ただし，m，n は共には 0 でないとする。

(4) G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でないことを示せ。 [2001]

解答例

(1) 点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\frac{x+X}{2} = p,\quad \frac{y+Y}{2} = q$$

$x = 2p - X$，$y = 2q - Y$ より，対称点の座標は $(2p - X,\ 2q - Y)$ となる。

(2) $G: y = x^3 + ax^2 + bx + c$ ……①上の点 $(X,\ Y)$ に対して，

$$Y = X^3 + aX^2 + bX + c \text{ ………②}$$

G 上の点 $(p,\ p^3 + ap^2 + bp + c)$ に関して対称移動した点を $(x,\ y)$ とすると，

$$X = 2p - x,\quad Y = 2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y \text{ ………③}$$

②③より，$2(p^3 + ap^2 + bp + c) - y = (2p - x)^3 + a(2p - x)^2 + b(2p - x) + c$

$$y = x^3 - (a + 6p)x^2 + (12p^2 + 4ap + b)x - 6p^3 - 2ap^2 + c \text{ ………④}$$

①と④が一致する条件は，

$$a = -a - 6p \text{ ……⑤},\quad b = 12p^2 + 4ap + b \text{ ……⑥},\quad c = -6p^3 - 2ap^2 + c \text{ ……⑦}$$

⑤より $p = -\frac{1}{3}a$ となり，このとき⑥⑦はともに成立する。

すると，$q = p^3 + ap^2 + bp + c = \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c$ となり，G はこのグラフ上の点 $\left(-\frac{1}{3}a,\ \frac{2}{27}a^3 - \frac{1}{3}ab + c\right)$ に関して点対称である。

(3) 直線 $mx + ny = 0$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点を $(x,\ y)$ とすると，この直線の法線ベクトル $\vec{n}$ が $\vec{n} = (m,\ n)$ なので，

$$(x,\ y) = (X,\ Y) + k(m,\ n) = (X + km,\ Y + kn)$$

ここで，点 $(X,\ Y)$ と点 $(x,\ y)$ の中点 $\left(X + \frac{1}{2}km,\ Y + \frac{1}{2}kn\right)$ が，$mx + ny = 0$ 上にあるので，

$$m\left(X + \frac{1}{2}km\right) + n\left(Y + \frac{1}{2}kn\right) = 0,\quad k = -\frac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}$$

よって，$x = X - \dfrac{2(mX + nY)}{m^2 + n^2}m = \dfrac{(n^2 - m^2)X - 2mnY}{m^2 + n^2}$

$$y = Y - \frac{2(mX+nY)}{m^2+n^2}n = \frac{-2mnX+(m^2-n^2)Y}{m^2+n^2}$$

対称点の座標は$\left(\dfrac{(n^2-m^2)X-2mnY}{m^2+n^2},\ \dfrac{-2mnX+(m^2-n^2)Y}{m^2+n^2}\right)$となる。

(4)　$p=\dfrac{m^2-n^2}{m^2+n^2}$，$q=\dfrac{2mn}{m^2+n^2}$ とおくと, (3)より $x=-pX-qY$，$y=-qX+pY$

(2)と同様にして，$X=-px-qy$，$Y=-qx+py$ を②に代入すると，

$$-qx+py=(-px-qy)^3+a(-px-qy)^2+b(-px-qy)+c \cdots\cdots\cdots ⑧$$

$q\neq 0$ のときは，明らかに⑧は①と一致しない。

$q=0$ のときは，$p\neq 0$ となり，$y=-p^2x^3+apx^2-bx+\dfrac{c}{p}$ ………⑨

x^3 の係数を比べると，どんな p の値に対しても $-p^2<0$ なので，⑨は①と一致しない。

したがって, G は原点を通るどんな直線に関しても線対称でない。

コメント

3 次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように，一度きっちり証明しておくと記憶に残ります。

問　題

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下，t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

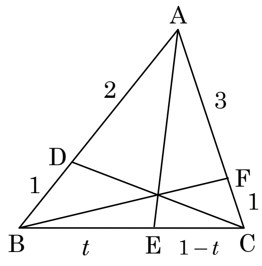
(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。　[2016]

解答例

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=2:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=1:3$ であり，$t=t_0$ のとき，AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から，

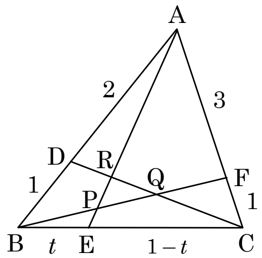


$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\dfrac{3}{5}$ となる。

(2) 条件より，$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ なので，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\quad \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$



さて，$\triangle\mathrm{AEC}$ と直線 BF にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\dfrac{3}{3+t}$ となる。

また，$\triangle\mathrm{CDB}$ と直線 AE にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\quad \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3) $\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=m:1-m$ とし，$\triangle\mathrm{BFA}$ と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\quad \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\dfrac{2}{3}$ となる。

よって，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が 1 から，$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}$

(4)　(2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\dfrac{3}{3+t}:\left(1-\dfrac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE}=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=\dfrac{3-3t}{3-t}:\left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から，

$$\triangle\mathrm{CAR}=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD}=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2-2t}{3-t}$$

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{BCQ}-\triangle\mathrm{CAR}-\triangle\mathrm{ABP}$ より，

$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

コメント

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

問　題

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

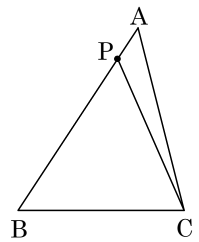
(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき, t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　余弦定理から，$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ となり，



$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2&=b^2+t^2c^2-2btc\cos\angle\mathrm{A}\\&=b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)\\&=ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{CP}=a$ のとき, (1)より，$ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2=a^2$

$$(1-t)(-a^2+b^2-tc^2)=0$$

すると, $t\geqq 0$ から, $b\geqq a$ のとき $t=1,\ \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}$，$b<a$ のとき $t=1$ である。

(3)　t の値が $0\leqq t\leqq 1$ に 2 つ存在する条件は, $b\geqq a$ のとき $0\leqq\dfrac{-a^2+b^2}{c^2}<1$ より,

$$b\geqq a\cdots\cdots\cdots①,\ \ b^2<a^2+c^2\cdots\cdots\cdots②$$

①より $\angle\mathrm{B}\geqq\angle\mathrm{A}$, ②より $\angle\mathrm{B}<90^\circ$

まとめると，$\angle\mathrm{A}\leqq\angle\mathrm{B}<90^\circ$ となる。

コメント

三角比の応用についての基本問題です。

問　題

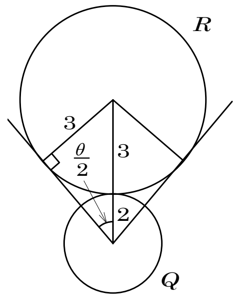
いくつかの半径 3 の円を，半径 2 の円 Q に外接し，かつ互いに交わらないように配置する。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 半径 3 の円の 1 つを R とする。円 Q の中心を端点とし，円 R に接する 2 本の半直線のなす角を θ とおく。ただし，$0<\theta<\pi$ とする。このとき，$\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を求めよ。 [2008]

解答例



(1) 条件より，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{3+2}=\dfrac{3}{5}$

すると，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\sqrt{1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^2}=\dfrac{4}{5}$ となり，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}=\frac{24}{25}$$

(2) $\cos\theta=1-2\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{7}{25}>0$ より，θ は鋭角である。

さて，$\sqrt{3}<\dfrac{48}{25}$ なので $\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\dfrac{24}{25}<1$ となり，

$$\sin\frac{\pi}{3}<\sin\theta<\sin\frac{\pi}{2}\ \Leftrightarrow\ \frac{\pi}{3}<\theta<\frac{\pi}{2}$$

(3) 配置できる半径 3 の円の最大個数を n とすると，

$$n\theta\leqq 2\pi<(n+1)\theta,\ n\leqq\frac{2\pi}{\theta}<n+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\alpha=\dfrac{2}{5}\pi$ とおくと，$2\alpha=2\pi-3\alpha$ となり，

$$\sin 2\alpha=-\sin 3\alpha,\ 2\sin\alpha\cos\alpha=-3\sin\alpha+4\sin^3\alpha$$

$\sin\alpha\neq 0$ から，$2\cos\alpha=-3+4\sin^2\alpha$，$4\cos^2\alpha+2\cos\alpha-1=0$

$$\cos\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{4}$$

また，$\cos\theta=\sqrt{1-\left(\dfrac{24}{25}\right)^2}=\dfrac{7}{25}$ であり，$\dfrac{53}{25}<\sqrt{5}$ から，$\dfrac{7}{25}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{4}$

よって，$\cos\theta<\cos\alpha$ となるので，$\theta>\alpha=\dfrac{2}{5}\pi$ から, (2)と合わせて，

$$\frac{2}{5}\pi<\theta<\frac{\pi}{2},\ 4<\frac{2\pi}{\theta}<5$$

すると, (*)より，配置できる円の最大個数 n は，$n=4$ である。

コメント

(2)の結論がアバウトすぎて, (3)では，そのまま利用できません。

問　題

長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが$\sqrt{3}$の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

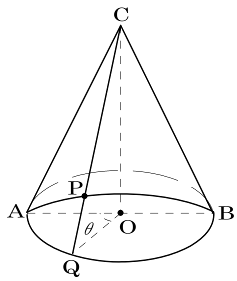
(1)　直円錐の展開図を用いて, l の長さを求めよ。

(2)　l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ としてCP^2 を$\sin\theta$で表せ。ただし，$0°\leqq\theta\leqq 180°$ とする。

(3)　P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし, A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0°<\theta\leqq 90°$ の範囲で$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$の最大値を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　母線 AC の長さは$\sqrt{1+3}=2$となるので，側面の展開図の中心角をφとすると，

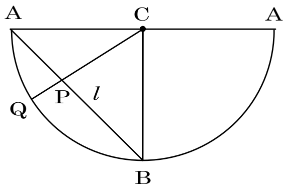


$$2\pi\cdot 1=2\pi\cdot 2\cdot\frac{\varphi}{360°}\text{ より，}\ \varphi=180°$$

線分 AB は底面の直径なので，$\angle\mathrm{ACB}=90°$

よって, l の長さは展開図で $\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$ となる。

(2)　弧 AQ の長さは，底面では$2\pi\cdot 1\cdot\dfrac{\theta}{360°}$であるが，側面の展開図では$2\pi\cdot 2\cdot\dfrac{\angle\mathrm{ACQ}}{360°}$と表せるので，$\angle\mathrm{ACQ}=\dfrac{\theta}{2}$

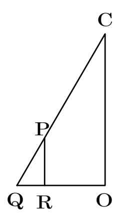


△APC に正弦定理を適用すると，$\angle\mathrm{CAP}=45°$ から，

$$\frac{\mathrm{CP}}{\sin 45°}=\frac{2}{\sin\left(135°-\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

$$\mathrm{CP}=\frac{2\sin 45°}{\sin\left(135°-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

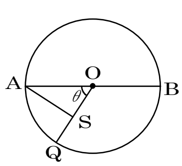
よって，$\mathrm{CP}^2=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{1+2\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1+\sin\theta}$



(3)　△COQ について考えると，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CQ}}$から，

$$\mathrm{OR}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}\text{ より，}\ \mathrm{OR}^2=\frac{1}{1+\sin\theta}$$

次に底面について，$\mathrm{OS}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$ より $\mathrm{OS}^2=\cos^2\theta$



よって，$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0°<\theta\leqq 90°$ より $0<t\leqq 1$

このとき，$f(t)=(1-t^2)(1+t)$ とおくと，

$$f'(t)=-2t(1+t)+(1-t^2)$$
$$=-(3t-1)(t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{32}{27}$	$\searrow$	

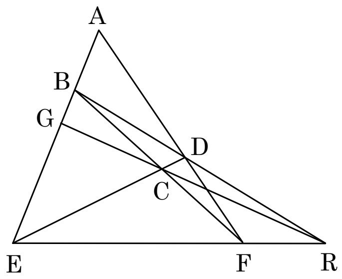
$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{32}{27}$ をとる。すなわち $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値は $\dfrac{32}{27}$ である。

コメント

断面図や展開図を書かないと，位置関係がとらえきれない問題です。

問　題

右図のような四角形 ABCD において，直線 AB と直線 CD の交点 E，直線 BC と直線 AD の交点 F，直線 BD と直線 EF の交点 R，直線 RC と直線 AB の交点 G がえられたとする。



(1) $\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}$ が成り立つことを示せ。

(2) G が AE の中点で，$\dfrac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DF}}=2$ であるとき，$\mathrm{AB}=a$，$\mathrm{CD}=b$ とおく。次の条件をみたす x, y, z の値を求めよ。

① $\mathrm{EB}=xa$　　② $\mathrm{EC}=yb$

③ 四角形 ABCD が円に内接するとき，$a=zb$　[1998]

解答例

(1) △BER において，直線 BF, ED, RG が点 C で交わるので，チェバの定理より，

$$\frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FR}}\cdot\frac{\mathrm{RD}}{\mathrm{DB}}=1 \text{ から，} \frac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\frac{\mathrm{FR}}{\mathrm{EF}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{RD}}\cdots\cdots\cdots①$$

△REB と直線 AF に対して，メネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{RF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{EA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DR}}=1 \text{ から，} \frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}=\frac{\mathrm{RF}}{\mathrm{FE}}\cdot\frac{\mathrm{BD}}{\mathrm{DR}}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\mathrm{BG}}{\mathrm{GE}}=\dfrac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AE}}\cdots\cdots\cdots③$

(2) $\mathrm{EB}=xa$ より，$\mathrm{AG}=\mathrm{GE}=\dfrac{1}{2}(x+1)a$，$\mathrm{BG}=\dfrac{1}{2}(x+1)a-a=\dfrac{1}{2}(x-1)a$

③より，$\dfrac{\frac{1}{2}(x-1)a}{\frac{1}{2}(x+1)a}=\dfrac{a}{(x+1)a}$，よって $x-1=1$，$x=2$

また，△AED と直線 BF に対して，メネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BA}}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\mathrm{FD}}\cdot\frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CE}}=1 \text{ から，} \frac{\mathrm{DC}}{\mathrm{CE}}=\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{EB}}\cdot\frac{\mathrm{FD}}{\mathrm{AF}}=\frac{a}{2a}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$\mathrm{EC}=6\mathrm{CD}$ より，$y=6$

さらに，四角形 ABCD が円に内接するとき，方べきの定理より，

$\mathrm{EB}\cdot\mathrm{EA}=\mathrm{EC}\cdot\mathrm{ED}$ から，$2a\cdot 3a=6b\cdot 7b$，$a^2=7b^2$

よって，$a=\sqrt{7}b$ となり，$z=\sqrt{7}$

コメント

メネラウスやチェバを用いて証明するというのはすぐにわかるのですが……。

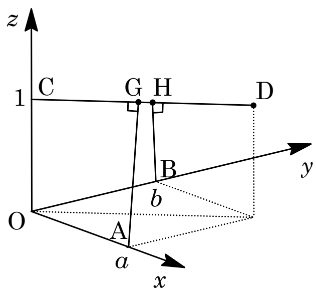
問　題

2 つの定数 $a>0$ および $b>0$ に対し，座標空間内の 4 点を $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A から線分 CD におろした垂線と CD の交点を G とする。G の座標を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2) さらに，点 B から線分 CD におろした垂線と CD の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ がなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ を $a,\ b$ を用いて表せ。　[2017]

解答例



(1) $a>0$，$b>0$ のとき，$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{D}(a,\ b,\ 1)$ に対し，線分 CD 上の点 G を，$0\leqq t\leqq 1$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(a,\ b,\ 1)+(1-t)(0,\ 0,\ 1)=(at,\ bt,\ 1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=(a(t-1),\ bt,\ 1)$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a,\ b,\ 0)$ が垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より，

$$a^2(t-1)+b^2t=0,\quad t=\frac{a^2}{a^2+b^2}$$

したがって，$\mathrm{G}\left(\dfrac{a^3}{a^2+b^2},\ \dfrac{a^2b}{a^2+b^2},\ 1\right)$ となる。

(2) (1)と同様に，線分 CD 上の点 H を，$0\leqq s\leqq 1$ として $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=(as,\ bs,\ 1)$ と表すと，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}=(as,\ b(s-1),\ 1)$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(a,\ b,\ 0)$ が垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より，

$$a^2s+b^2(s-1)=0,\quad s=\frac{b^2}{a^2+b^2}$$

したがって，$\mathrm{H}\left(\dfrac{ab^2}{a^2+b^2},\ \dfrac{b^3}{a^2+b^2},\ 1\right)$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BH}}$ のなす角を θ とし，内積の定義を利用すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}=a^2s(t-1)+b^2t(s-1)+1=(a^2+b^2)st-a^2s-b^2t+1$$
$$=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+1=\frac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|^2=a^2(t-1)^2+b^2t^2+1=(a^2+b^2)t^2-2a^2t+a^2+1$$
$$=\frac{a^4}{a^2+b^2}-\frac{2a^4}{a^2+b^2}+a^2+1=\frac{a^2+b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BH}}|^2 = a^2s^2 + b^2(s-1)^2 + 1 = (a^2+b^2)s^2 - 2b^2s + b^2 + 1$$
$$= \frac{b^4}{a^2+b^2} - \frac{2b^4}{a^2+b^2} + b^2 + 1 = \frac{a^2+b^2+a^2b^2}{a^2+b^2}$$

よって，$\cos\theta = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BH}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AG}}||\overrightarrow{\mathrm{BH}}|} = \dfrac{a^2+b^2-a^2b^2}{a^2+b^2+a^2b^2}$ となる。

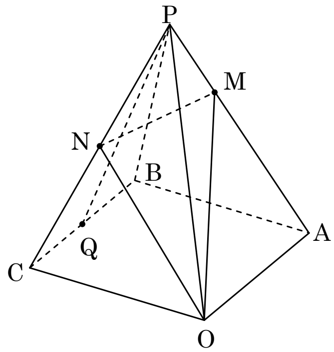
コメント

空間ベクトルの基本問題です。計算量は多めですが，難しいというわけではありません。

問　題

1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。ただし，点 P は内積に関する条件 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}$，および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{2}$ を満たす。辺 AP を $2:1$ に内分する点を M とし，辺 CP の中点を N とする。さらに，点 P と直線 BC 上の点 Q を通る直線 PQ は，平面 OMN に垂直であるとする。このとき，長さの比 $\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$，および線分 OP の長さを求めよ。 [2013]

解答例



条件より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$$

さて，点 M は辺 AP を $2:1$ に内分する点，点 N は辺 CP の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，Q は線分 BC を $t:1-t$ に分ける点とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$=(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

さて，直線 PQ が平面 OMN に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}}=0$ となり，$\mathrm{OP}=k$ とおくと，

$$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$$
$$(1-t)+2(1-t)\cdot\frac{1}{4}+2\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{4}-2k^2=0,\ \frac{3}{2}t+2k^2=\frac{9}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{ON}}=0$ から，$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$

$$\frac{1}{4}(1-t)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k^2=0,\ \frac{1}{4}t+k^2=\frac{5}{4}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t=-\dfrac{1}{4}$ となり，$1-t=\dfrac{5}{4}$ から，点 Q は BC を $1:5$ に外分するので，

$$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=1:5$$

また，$k^2=\dfrac{5}{4}-\dfrac{1}{4}\cdot\left(-\dfrac{1}{4}\right)=\dfrac{21}{16}$ より，$\mathrm{OP}=k=\sqrt{\dfrac{21}{16}}=\dfrac{\sqrt{21}}{4}$

コメント

t の値が負になり計算間違いをしたかと思いましたが，問題をよく読むと，「直線 BC 上の点 Q」と記されていました。このため，上図の Q の位置は，結論とは異なります。

問　題

空間内の 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(0,\ 2,\ 3)$，B$(1,\ 0,\ 3)$，C$(1,\ 2,\ 0)$を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

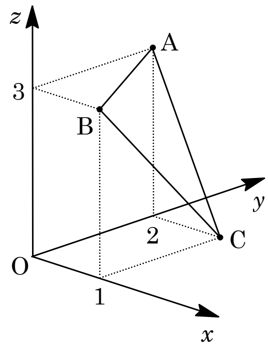
(1) 4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D の座標を求めよ。

(2) 3 点 A, B, C を通る平面に点 D から垂線を引き，交点を F とする。線分 DF の長さを求めよ。

(3) 四面体 ABCD の体積を求めよ。　[2011]

解答例

(1) 4 点 O, A, B, C を通る球面の中心 D を，D$(p,\ q,\ r)$とすると，OD = AD = BD = CD から，



$$p^2+q^2+r^2=p^2+(q-2)^2+(r-3)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$
$$p^2+q^2+r^2=(p-1)^2+q^2+(r-3)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$
$$p^2+q^2+r^2=(p-1)^2+(q-2)^2+r^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

①より，$-4q+4-6r+9=0 \cdots\cdots\cdots ①'$

②より，$-2p+1-6r+9=0 \cdots\cdots\cdots ②'$

③より，$-2p+1+4q-4=0 \cdots\cdots\cdots ③'$

①′ ②′ ③′ から，$p=\frac{1}{2}$，$q=1$，$r=\frac{3}{2}$となり，D$\left(\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2}\right)$である。

(2) 平面 ABC の方程式は，法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおき，C$(1,\ 2,\ 0)$を通ることを用いて立式すると，$a(x-1)+b(y-2)+cz=0 \cdots\cdots\cdots ④$

A$(0,\ 2,\ 3)$を通ることより，$-a+3c=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

B$(1,\ 0,\ 3)$を通ることより，$-2b+3c=0 \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑤⑥より，$\vec{n}=(a,\ b,\ c)=\left(3c,\ \frac{3}{2}c,\ c\right)=\frac{c}{2}(6,\ 3,\ 2)$となり，④から，

$$6(x-1)+3(y-2)+2z=0,\ 6x+3y+2z-12=0$$

これより，点 D から平面 ABC への垂線 DF の長さは，

$$\mathrm{DF}=\frac{\left|6\cdot\frac{1}{2}+3\cdot1+2\cdot\frac{3}{2}-12\right|}{\sqrt{6^2+3^2+2^2}}=\frac{3}{7}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(-1,\ 0,\ 3)$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -2,\ 3)$より，△ABC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{\mathrm{CA}}\right|^2\left|\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right|^2-\left(\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}\right)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(1+9)(4+9)-9^2}=\frac{7}{2}$$

よって，四面体 ABCD の体積 V は，$V=\frac{1}{3}S\cdot\mathrm{DF}=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{3}{7}=\frac{1}{2}$

コメント

平面の方程式や点と平面の距離の公式を用いた解答例です。九大では，範囲外である弧長の問題も出ていますので，拡張した知識も仕入れておいた方がよいでしょう。

問　題

座標平面に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A(2,\ 6)$，$B(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を

$$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$$

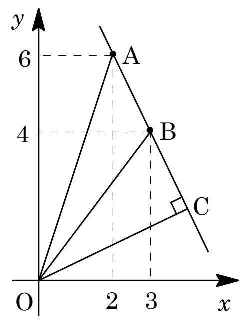
で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{CP}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2)　s を定数として，t を $t\geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ。

[2009]

解答例



(1)　直線 AB の方程式は，$A(2,\ 6)$，$B(3,\ 4)$ から，

$$y-6=-2(x-2),\ \ y=-2x+10\cdots\cdots\cdots①$$

直線 OC は直線 AB と垂直なので，その方程式は，

$$y=\frac{1}{2}x\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-2x+10=\frac{1}{2}x$，$x=4$

②より，$y=2$ となり，$C(4,\ 2)$ である。

また，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ より，

$$\overrightarrow{OP}=s(2,\ 6)+t(3,\ 4)=(2s+3t,\ \ 6s+4t)$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CP}|^2&=(2s+3t-4)^2+(6s+4t-2)^2\\&=(2s+3t)^2-8(2s+3t)+16+(6s+4t)^2-4(6s+4t)+4\\&=40s^2+60st+25t^2-40s-40t+20\end{aligned}$$

(2)　$t\geqq 0$ において，$f(t)=40s^2+60st+25t^2-40s-40t+20$ とおくと，

$$f(t)=25t^2+(60s-40)t+40s^2-40s+20=25\left(t+\frac{6s-4}{5}\right)^2+4s^2+8s+4$$

(i)　$-\frac{6s-4}{5}\geqq 0\ \left(s\leqq\frac{2}{3}\right)$ のとき

$|\overrightarrow{CP}|^2$ は，$t=-\frac{6s-4}{5}$ で最小値 $4s^2+8s+4$ をとる。

(ii)　$-\frac{6s-4}{5}<0\ \left(s>\frac{2}{3}\right)$ のとき

$|\overrightarrow{CP}|^2$ は，$t=0$ で最小値 $40s^2-40s+20$ をとる。

コメント

ベクトルの成分計算についての基本題です。

問　題

△OAB において，辺 AB 上に点 Q をとり，直線 OQ 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 Q に関して点 O と反対側にあるとする。3 つの三角形△OAP，△OBP，△ABP の面積をそれぞれ a, b, c とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および a, b, c を用いて表せ。

(3) 3 辺 OA, OB, AB の長さはそれぞれ 3, 5, 6 であるとする。点 P を中心とし，3 直線 OA, OB, AB に接する円が存在するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

[2008]

解答例

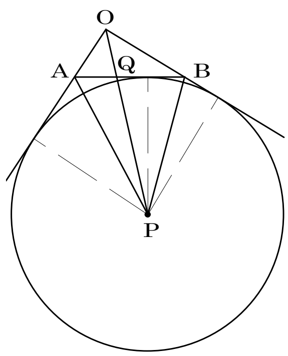
(1) AQ : QB = △OAP : △OBP = $a : b$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b}$$

(2) △OAB = $a+b-c$ より，OQ : QP = △OAB : △ABP = $(a+b-c):c$ となり，

$$\mathrm{OQ}:\mathrm{OP}=(a+b-c):(a+b)$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{a+b}{a+b-c}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{b\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{a+b-c}$



(3) 高さの等しい三角形の面積比は，底辺の長さの比になることより，

$$a:b:c=\mathrm{OA}:\mathrm{OB}:\mathrm{AB}=3:5:6$$

よって, (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3+5-6}=\dfrac{5\overrightarrow{\mathrm{OA}}+3\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2}$

コメント

(3)は，三角形の傍心のベクトル表示ですが，(2)の誘導を利用すると，計算は不要です。なお，内角や外角の二等分線の定理を用いる解も可能ですが，これは出題者の善意に反します。

問　題

a, b を正の数とし，空間内の 3 点 $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$ を考える。A, B, C を通る平面を α，原点 O を中心とし A, B, C を通る球面を S とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB の中点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ であることを示せ。また△ABC の面積を求めよ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角を θ とするとき $\sin\theta$ を求めよ。また，平面 α に垂直で原点 O を通る直線と平面 α との交点を H とするとき，線分 OH の長さを求めよ。

(3) 点 P が球面 S 上を動くとき，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。ただし，P は平面 α 上にはないものとする。　[2007]

解答例

(1) $\mathrm{A}(a,\ -a,\ b)$，$\mathrm{B}(-a,\ a,\ b)$ より $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-2a,\ 2a,\ 0)$ となり，$\mathrm{C}(a,\ a,\ -b)$，AB の中点 $\mathrm{D}(0,\ 0,\ b)$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(a,\ a,\ -2b)$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=(0,\ 0,\ -b)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-2a^2+2a^2=0$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ から，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{DC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4a^2+4a^2}\sqrt{a^2+a^2+4b^2}=2a\sqrt{a^2+2b^2}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DO}}$ のなす角 θ は，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|}=\dfrac{2b^2}{\sqrt{a^2+a^2+4b^2}\cdot b}=\dfrac{2b}{\sqrt{2a^2+4b^2}}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\frac{a}{\sqrt{a^2+2b^2}}$$

さて, OH は平面 α に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{DH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(\overrightarrow{\mathrm{DO}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\overrightarrow{\mathrm{DO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{OH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=0$$

すると $\overrightarrow{\mathrm{DH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ から，点 H は直線 CD 上にあり，$\mathrm{OH}=\mathrm{DO}\sin\theta=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

(3) 球面 S の半径 r は　$r=\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\sqrt{2a^2+b^2}$

ここで，HO の延長線と S との交点を $\mathrm{P_0}$ とおくと，S 上の点 P と平面 α の距離の最大値は $\mathrm{P_0H}$ となり，$\mathrm{P_0H}=r+\mathrm{OH}=\sqrt{2a^2+b^2}+\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}$

したがって，四面体 ABCP の体積の最大値は,

$$\frac{1}{3}\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{P_0H}=\frac{1}{3}\cdot 2a\sqrt{a^2+2b^2}\left(\sqrt{2a^2+b^2}+\frac{ab}{\sqrt{a^2+2b^2}}\right)$$

$$=\frac{2}{3}a\left(\sqrt{(a^2+2b^2)(2a^2+b^2)}+ab\right)$$

コメント

図示すると，(1)の結論は明らかですが，続く設問への誘導となっています。コンパクトにまとまった 1 題です。

問　題

$\triangle$OAB において，辺 OB の中点を M，辺 AB を $\alpha:1-\alpha$ に内分する点を P とする。ただし，$0<\alpha<1$ とする。線分 OP と AM の交点を Q とし，Q を通り，線分 AM に垂直な直線が，辺 OA またはその延長を交わる点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ および α を用いて表せ。

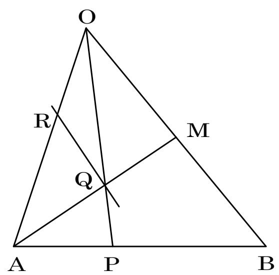
(2)　$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ で $\cos\theta=\dfrac{1}{6}$ とする。このとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と α を用いて表せ。

(3)　(2)の条件のもとで，点 R が辺 OA の中点であるときの α の値を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=\alpha:1-\alpha$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-\alpha)\vec{a}+\alpha\vec{b}$$



また，$\triangle$OPB と直線 AM に対して，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MB}}\cdot\frac{\mathrm{BA}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QO}}=1,\ \ \frac{1}{1}\cdot\frac{1}{\alpha}\cdot\frac{\mathrm{PQ}}{\mathrm{QO}}=1$$

よって，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QO}=\alpha:1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{1+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1-\alpha}{1+\alpha}\vec{a}+\frac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=t\vec{a}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=\left(\dfrac{1-\alpha}{1+\alpha}-t\right)\vec{a}+\dfrac{\alpha}{1+\alpha}\vec{b}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=-\vec{a}+\dfrac{1}{2}\vec{b}$ であり，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=0$ から，

$$-\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}-t\right)|\vec{a}|^2+\left\{-\frac{\alpha}{1+\alpha}+\frac{1}{2}\left(\frac{1-\alpha}{1+\alpha}-t\right)\right\}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\alpha}{1+\alpha}|\vec{b}|^2=0$$

条件より，$|\vec{a}|=2$，$|\vec{b}|=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=2\times3\times\dfrac{1}{6}=1$ なので，まとめると，

$$\frac{7}{2}t=\frac{7-14\alpha}{2(1+\alpha)},\ \ t=\frac{1-2\alpha}{1+\alpha}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1-2\alpha}{1+\alpha}\vec{a}$

(3)　点 R が辺 OA の中点であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ であり，(2)から，

$$\frac{1-2\alpha}{1+\alpha}=\frac{1}{2},\ \ 2-4\alpha=1+\alpha,\ \ \alpha=\frac{1}{5}$$

コメント

頻出のベクトルの平面図形への応用です。計算量は多いものの，内容は基本的です。

問　題

座標空間内の三角柱

$$0 \leqq x \leqq 1,\ 0 \leqq y \leqq 1,\ x \geqq y,\ 0 \leqq z \leqq 1$$

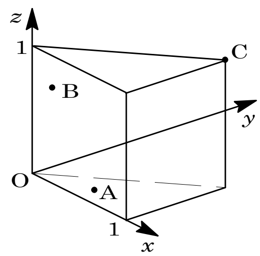
を考え，その xy 平面内の面を S，xz 平面内の面を T とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$ を S 内に，点 $\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$ を T 内にとり，また $\mathrm{C}(1,\ 1,\ 1)$ とする。ただし，点 A, B は原点 O とは異なるとする。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ に直交する単位ベクトルを求め，その単位ベクトルとベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ の内積の絶対値を求めよ。

(2)　四面体 OABC の体積を求めよ。ただし，点 O, A, B, C は同一平面上にないとする。

(3)　点 A が S 内を，点 B が T 内を動くとする。このときの，四面体 OABC の体積の最大値，および最大値を与える点 A, B の位置をすべて求めよ。　[2004]

解答例



(1)　求める単位ベクトルを $\vec{e} = (x,\ y,\ z)$ とおく。

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \vec{e} = 0$ より，$ax + by = 0$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \cdot \vec{e} = 0$ より，$x + y + z = 0$ ………②

①より，$(x,\ y) = k(b,\ -a)$ （k は実数）

②から，$z = -x - y$ なので，

$$(x,\ y,\ z) = k(b,\ -a,\ a-b)$$

$|\vec{e}| = 1$ より，$1 = |k|\sqrt{b^2 + (-a)^2 + (a-b)^2}$ から，

$$k = \pm\frac{1}{\sqrt{b^2 + (-a)^2 + (a-b)^2}} = \pm\frac{1}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}$$

よって，$\vec{e} = \pm\dfrac{1}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}(b,\ -a,\ a-b)$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \vec{e} = \pm\dfrac{bc + ad - bd}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \vec{e}| = \dfrac{|bc + ad - bd|}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}$

ここで，$a \geqq b \geqq 0,\ c \geqq 0,\ d \geqq 0$ なので，$bc + ad - bd = bc + d(a-b) \geqq 0$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \vec{e}| = \frac{bc + ad - bd}{\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}}$$

(2)　四面体 OABC において，△OAC を底面とすると，高さは $|\overrightarrow{\mathrm{OB}} \cdot \vec{e}|$ となる。

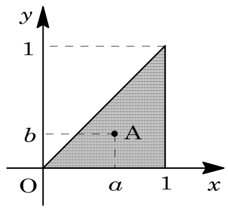
$$\triangle\mathrm{OAC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{OC}})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3(a^2 + b^2) - (a+b)^2}$$

$$= \frac{1}{2}\sqrt{2(a^2 + b^2 - ab)}$$

四面体 OABC の体積を V とすると，(1)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}\cdot\frac{bc+ad-bd}{\sqrt{2(a^2+b^2-ab)}}=\frac{1}{6}(bc+ad-bd)$$

(3)　まず，点$\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$の位置を S 内でいったん固定した後，点$\mathrm{B}(c,\ 0,\ d)$を T 内で動かし，V が最大になるときの点 B の位置を求める。次に，この状態を保ったまま，点 A を S 内で動かし，Vの最大値を求める。なお，$a=b=0$のときは，点 A が原点 O と一致するので不適である。



(i)　点$\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$を$a>b>0$の位置に固定したとき

$V=\frac{1}{6}\{(a-b)d+bc\}$となるので，$V$ は d の単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$，$0\leqq c\leqq 1$より，$c=d=1$のとき Vは最大$V=\frac{1}{6}(a-b+b)=\frac{1}{6}a$となる。

そこで，点 A を S 内で動かすと, Vは$a=1$で最大となり，その値は$\frac{1}{6}$である。

よって，$a=c=d=1$，$0<b<1$のとき, Vは最大値$\frac{1}{6}$をとる。

(ii)　点$\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$を$a>b=0$の位置に固定したとき

$V=\frac{1}{6}ad$となるので，Vはdの単調増加関数であり，$0\leqq d\leqq 1$より，$d=1$のとき Vは最大になる。このとき$V=\frac{1}{6}a$である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, Vは$a=1$で最大となり，その値は$\frac{1}{6}$である。

よって，$a=d=1$，$b=0$，$0\leqq c\leqq 1$のとき, Vは最大値$\frac{1}{6}$をとる。

(iii) 点$\mathrm{A}(a,\ b,\ 0)$を$a=b>0$の位置に固定したとき

$V=\frac{1}{6}bc$となるので, Vはcの単調増加関数であり，$0\leqq c\leqq 1$より，$c=1$のとき Vは最大になる。このとき$V=\frac{1}{6}b$である。

そこで，点 A を S 内で動かすと, Vは$b=1$で最大となり，その値は$\frac{1}{6}$である。

よって，$a=b=c=1$，$0\leqq d\leqq 1$のとき, Vは最大値$\frac{1}{6}$をとる。

(i)(ii)(iii)より, Vの最大値は$\frac{1}{6}$，このときの点 A, B の位置は次の 3 種類である。

$\mathrm{A}(1,\ b,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$　$(0<b<1)$
$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(c,\ 0,\ 1)$　$(0\leqq c\leqq 1)$
$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ d)$　$(0\leqq d\leqq 1)$

コメント

(2)までは 1999 年に類題が出ています。ただ，(3)の最大値を求めるときに，いわゆる「予選→決勝戦」という 1 文字固定の解法を用いる必要があります。

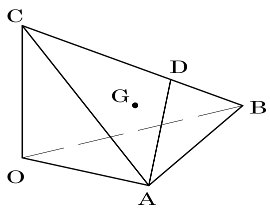
問　題

空間内に四面体 OABC があり$\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA はすべて90°であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA, $\angle$OGB, $\angle$OGC がすべて90°であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を$1:2$に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。 [2003]

解答例



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件より，

$$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

さて，$\angle\mathrm{OGA}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AG}}=0$

点 G は$\triangle$ABC の重心なので，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ から，

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0,\ -2a^2+b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，$\angle\mathrm{OGB}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BG}}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})=0,\ a^2-2b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\angle\mathrm{OGC}=90^\circ$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CG}}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})=0,\ a^2+b^2-2c^2=0\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$-3a^2+3b^2=0$ から $a=b$，$-a^2+c^2=0$ から $a=c$ となる。これは③を満たすので，求める条件は，$a=b=c$ である。

(2) $\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=t:1-t\ (t\neq 0)$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\vec{a}+t\overrightarrow{\mathrm{OD}}=(1-t)\vec{a}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=(1-t)\vec{a}+\frac{2t}{3}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$$

また，$\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=3\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-(1-t)\vec{a}-\frac{2t}{3}\vec{b}-\frac{t}{3}\vec{c}$$

$$=-(1-t)\vec{a}+\left(1-\frac{2t}{3}\right)\vec{b}+\left(1-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=(1-t)^2a^2+\left(1-\frac{2t}{3}\right)^2b^2+\left(1-\frac{t}{3}\right)^2c^2$$

$$=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)t^2-\frac{2}{3}(3a^2+2b^2+c^2)t+a^2+b^2+c^2$$

そこで，平方完成をすると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)\left\{t-\frac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}\right\}^2+\frac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}$$

以上より，$t=\dfrac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}$ のとき，OQ は最小値 $\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}}$ をとる。

コメント

(2)の平方完成の計算は，過程は省きましたが，たいへんな量でした。ところで，(1)は何のための設問なのでしょうか。

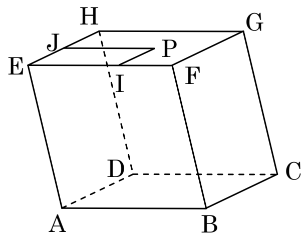
問　題

空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1) △ABC の面積は，$\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2) 右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=\frac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{EAB}=\theta$ とする。ここで θ は $0<\theta<\pi$ なる定数とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を θ, x, y を用いて表せ。

(3) 問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。　[2002]



（平行六面体ABCD-EFGH）

解答例

(1) $\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2 A}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

(2) 条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=1\cdot 2\cos\theta=2\cos\theta$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=2$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2=x^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y^2|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2$$
$$+2xy\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2y\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+2x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=x^2+y^2+4+4x\cos\theta$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+y|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}$$
$$=x+2\cos\theta+y$$

そこで，△ACP の面積を S とすると，(1)より，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4+4x\cos\theta)-(x+2\cos\theta+y)^2}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2+4x\cos\theta-4y\cos\theta+8-4\cos^2\theta}$$

(3)　$P=x^2-2xy+y^2+4x\cos\theta-4y\cos\theta+8-4\cos^2\theta$ とおくと，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{P}$ となる。

さて，$x-y=t$ とおくと，$0\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq 1$ より $-1\leqq t\leqq 1$ であり，

$$P=(x-y)^2+4(x-y)\cos\theta+8-4\cos^2\theta=t^2+4t\cos\theta+8-4\cos^2\theta$$
$$=(t+2\cos\theta)^2+8-8\cos^2\theta=(t+2\cos\theta)^2+8\sin^2\theta$$

(i)　$-2\cos\theta<-1\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$のとき　P は $t=-1$ で最小となる。

このとき，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{9-4\cos\theta-4\cos^2\theta}$ をとる。

(ii)　$-1\leqq-2\cos\theta\leqq 1\left(\dfrac{\pi}{3}\leqq\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}\right)$のとき　P は $t=-2\cos\theta$ で最小となる。

このとき，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{8\sin^2\theta}=\sqrt{2}\sin\theta$ をとる。

(iii)　$-2\cos\theta>1\left(\dfrac{2\pi}{3}<\theta<\pi\right)$のとき　P は $t=1$ で最小となる。

このとき，S は最小値 $\dfrac{1}{2}\sqrt{9+4\cos\theta-4\cos^2\theta}$ をとる。

コメント

(3)は 1 文字を固定して，2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが，式の特徴を利用すると，その必要はありませんでした。

問　題

a, b, c を 0 でない実数として，空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2) (1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3) (1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。　[2000]

解答例

(1) BC を 2 : 1 に内分する点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{3}$，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{DP}}$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ より，点 P は 2 点 A, D を直径の両端とする球を描く。すなわち 2 点 P, Q の距離が一定である定点 Q は，この球の中心で，線分 AD の中点である。ここで，$\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$より，$\mathrm{D}\left(0,\ \dfrac{b}{3},\ \dfrac{2c}{3}\right)$となり，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{6},\ \dfrac{c}{3}\right)$である。

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\dfrac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって，点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にある。

(3) まず，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-a,\ b,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-a,\ 0,\ c)$から，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(a^2+b^2)(a^2+c^2)-a^4}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

また，球の半径は，$\mathrm{AQ}=\sqrt{\left(-\dfrac{a}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b}{6}\right)^2+\left(\dfrac{c}{3}\right)^2}=\dfrac{1}{6}\sqrt{9a^2+b^2+4c^2}$

四面体 ABCP の体積が最大となるのは，PQ が平面 ABC に垂直なときなので，$\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}$ より，その最大値 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\cdot\frac{1}{6}\sqrt{9a^2+b^2+4c^2}$$
$$=\frac{1}{36}\sqrt{(a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2)(9a^2+b^2+4c^2)}$$

コメント

空間ベクトルの基本題です。

問　題

大きさ 1 の空間ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$が$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル$\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき，点$\mathrm{D}(\vec{d})$, $\mathrm{E}(\vec{e})$, $\mathrm{F}(\vec{f})$および原点 O について次の問いに答えよ。

(1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$となるような実数$x$, y, zを求めよ。同様に$\vec{f}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

(2) ベクトル$\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d}-\vec{f}$の大きさを求めよ。

(3) 三角形 ODF の面積を求めよ。

(4) 四面体 ODEF の体積を求めよ。　[1999]

解答例

(1) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=1$より，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=1$なので，$x-\dfrac{1}{2}y=1$………①

$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$より，$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0$なので，$-\dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{1}{2}z=0$………②

$\vec{c}\cdot\vec{d}=0$より，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0$なので，$-\dfrac{1}{2}y+z=0$………③

①②③より，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，$\vec{f}=u\vec{a}+v\vec{b}+w\vec{c}$とおいて同様にすると，$\vec{a}\cdot\vec{f}=0$より$u-\dfrac{1}{2}v=0$，$\vec{b}\cdot\vec{f}=0$より$-\dfrac{1}{2}u+v-\dfrac{1}{2}w=0$，$\vec{c}\cdot\vec{f}=1$より$-\dfrac{1}{2}v+w=1$

よって，$(u,\ v,\ w)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$から，$\vec{f}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

(2) (1)より，$|\vec{d}|^2=\left|\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right|^2=\dfrac{9}{4}+1+\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

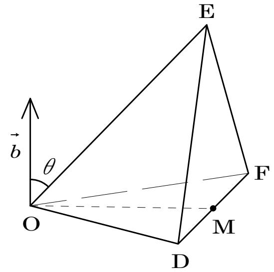
$|\vec{f}|^2=\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{9}{4}+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

よって，$|\vec{d}|=|\vec{f}|=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

また，$\vec{d}-\vec{f}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}-\dfrac{3}{2}\vec{c}=\vec{a}-\vec{c}$

$|\vec{d}-\vec{f}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=1-2\cdot0+1=2$なので，$|\vec{d}-\vec{f}|=\sqrt{2}$

(3)　△ODF は $\mathrm{OD}=\mathrm{OF}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ の二等辺三角形より，底辺 $\mathrm{DF}=\sqrt{2}$ の中点を M とおくと，$\mathrm{OM}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$ となる。



よって，$\triangle\mathrm{ODF}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4)　$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{f}=0$ より，$\vec{b}$ は平面 ODF に垂直である。

ここで，$\vec{b}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とおくと，$\vec{b}\cdot\vec{e}=1$，$|\vec{b}|=1$ から，$|\vec{e}|\cos\theta=1$ となる。

これは，△ODF を底面とするとき，四面体 ODEF の高さが 1 であることを表すので，体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ となる。

コメント

(4)では，$\vec{b}$ が平面 ODF の法線ベクトルであるのに注目して解きました。

問　題

辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおき，線分 OA を$m:n$に内分する点を P，線分 BC を$m:n$に内分する点を Q，線分 CO を$m:n$に内分する点を R，線分 AB を$m:n$に内分する点を S とする。（ただし，$m,n>0$とする）

(1) ①　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

②　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$が垂直かどうか調べよ。

(2) ①　点 P, Q, R, S が同一平面上にあるときの m, n の関係を求めよ。

②　このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

③　G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。　[1998]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}-\dfrac{m\vec{a}}{m+n}=\dfrac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}-\dfrac{n\vec{c}}{m+n}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$，また同様にして，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\frac{1}{(m+n)^2}(-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c})\cdot(n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c})$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\left(-mn-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{2}n^2+mn-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{2}m^2-mn\right)$$

$$=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

(2) 4 点 P，Q，R，S は同一平面上にある条件は，直線 PQ と RS が交わることなので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}+s\overrightarrow{\mathrm{RS}}$となる定数 t, s が存在することである。

$$\frac{m}{m+n}\vec{a}+t\frac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}=\frac{n}{m+n}\vec{c}+s\frac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が 1 次独立より，

$m-tm=sn$ ………①，$tn=sm$ ………②，$tm=n-sn$ ………③

①③より，$m=n$かつ$t+s=1$

②に代入して，$t=s=\dfrac{1}{2}$

以上より，4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある条件は，$m=n$

このとき, PQ, RS の交点 G は，$t=\dfrac{1}{2}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{\vec{a}}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{2}=\frac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\dfrac{1}{4}\sqrt{1+1+1+2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\vec{a}=\frac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=\frac{1}{4}|-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\frac{1}{4}\sqrt{9+1+1-6\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\dfrac{\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}}{4}$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

以上より, G は正四面体 OABC に外接する球の中心であり，半径は $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ となる。

コメント

基本的なよくある構図の問題です。方針に迷いは生じないでしょう。

問　題

初項$a_1=1$，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　$\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2)　$\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7^2 の倍数である項の個数を求めよ。

(3)　初項から第 n 項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

[2017]

解答例

(1)　初項 1，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$の一般項は，$a_n=1+4(n-1)=4n-3$

さて，a_nが 7 の倍数となるのは，kを自然数として，$4n-3=7k$ ………①

ここで，$4\times(-1)-3=7\times(-1)$から，①を変形すると，

$$4(n+1)=7(k+1)\text{ ………②}$$

すると，4 と 7 は互いに素より，lを整数として$n+1=7l$，$k+1=4l$となり，

$$n=7l-1,\ k=4l-1$$

そこで，$1\leqq n\leqq 600$，$k\geqq 1$から，$1\leqq 7l-1\leqq 600$，$4l-1\geqq 1$となり，

$$\frac{1}{2}\leqq l\leqq\frac{601}{7}=85+\frac{6}{7}$$

これより，$l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85$となり，7 の倍数である項の個数は 85 である。

(2)　$\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数の項を取り出してb_lとおくと，

$$b_l=a_{7l-1}=4(7l-1)-3=28l-7=7(4l-1)\quad(l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85)$$

さて，a_nが7^2の倍数，すなわちb_lが 7 の倍数となるのは，mを自然数として，

$$4l-1=7m\text{ ………③}$$

ここで，$4\times2-1=7\times1$から，③を変形すると，

$$4(l-2)=7(m-1)$$

すると，4 と 7 は互いに素より，pを整数として$l-2=7p$，$m-1=4p$となり，

$$l=7p+2,\ m=4p+1$$

そこで，$1\leqq l\leqq 85$，$m\geqq 1$から，$1\leqq 7p+2\leqq 85$，$4p+1\geqq 1$となり，

$$0\leqq p\leqq\frac{83}{7}=11+\frac{6}{7}$$

これより，$p=0,\ 1,\ \cdots,\ 11$となり，7^2の倍数である項の個数は 12 である。

(3)　a_nが 7 の倍数のとき，$n=7l-1\ (l\geqq1)$となり，この n を書き並べると，

$$6,\ \underline{13},\ 20,\ 27,\ 34,\ 41,\ 48\ |\ 55,\ \underline{62},\ 69,\ 76,\ 83,\ 90,\ 97\ |\ 104,\ \underline{111},\ 118,\ \cdots\cdots$$

そして，この数列を 7 個ずつの区画に分け，左から第 1 群，第 2 群，…と呼ぶ。

また，a_nが7^2の倍数の項を取り出してc_pとおくと，$l=7p+2$から，

$$n=7(7p+2)-1=49p+13\quad(p\geqq0)$$

すると，上記の数列の下線をつけた数が対応して，

$$c_p = a_{49p+13} = 4(49p+13) - 3 = 196p + 49 = 7^2(4p+1)\quad (p \geqq 0)$$

さらに，a_n が 7^3 の倍数，すなわち c_p が 7 の倍数になるのは，同様にすると，q を 0 以上の整数として，

$$4p + 1 = 7q \cdots\cdots\cdots ④$$

そして，④を満たす最小の p，q の値は $(p,\ q) = (5,\ 3)$ であり，このときの n は，$n = 49\cdot 5 + 13 = 258$ となり，$a_{258} = 4\cdot 258 - 3 = 1029 = 7^3\cdot 3$ である。

この $n = 258$ は，$7l - 1 = 258$ から $l = 37$ となり，上記の数列の第 6 群に属することがわかる。

さて，積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n については，素因数 7 の個数に注目し，これが合計 45 個以上となる最小の n を考えればよい。

まず，第 5 群までは a_n に 7^3 の倍数がないので，1 つの群内に素因数 7 が $7+1=8$ 個ずつとなり，その総数は $8\times 5 = 40$ 個である。

すると，素因数 7 の残り 5 個について調べるために，第 6 群を書き並べると，

$$|\ 251,\ \underline{258},\ 265,\ 272,\ \cdots\cdots$$

これより，a_{251} は 7 の倍数，a_{258} は 7^3 の倍数，a_{265} は 7 の倍数，…となるので，積 $a_{251}a_{258}a_{265}$ に素因数 7 が 5 個あることがわかる。

以上より，積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n は，$n = 265$ である。

コメント

整数と数列の融合問題です。解答例では，頻出の(1)の結果を利用して，(2)につなげています。なお，(3)は群数列の考え方をもとにしていますが，45 という数値が意味深長で，詰めがかなり面倒でした。

問　題

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2)　a_1，a_2，$\cdots$，a_6 を求めよ。

(3)　以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i)　N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii)　N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii)　N は 13 で割り切れる。　[2016]

解答例

(1)　10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n=13q_n+a_n$ と表せ，

$$10^{n+1}=10\cdot 10^n=10(13q_n+a_n)=13(10q_n)+10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2)　10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1=10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1=100$ を 13 で割った余りに等しく，$100=13\times 7+9$ より $a_2=9$ である。

a_3 は $10a_2=90$ を 13 で割った余り $(90=13\times 6+12)$ より，$a_3=12$ である。

a_4 は $10a_3=120$ を 13 で割った余り $(120=13\times 9+3)$ より，$a_4=3$ である。

a_5 は $10a_4=30$ を 13 で割った余り $(30=13\times 2+4)$ より，$a_5=4$ である。

a_6 は $10a_5=40$ を 13 で割った余り $(40=13\times 3+1)$ より，$a_6=1$ である。

(3)　自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq 9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq 9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N=k\cdot 10^5+2\cdot 10^4+0\cdot 10^3+1\cdot 10^2+6\cdot 10^1+l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5\equiv 4,\ 10^4\equiv 3,\ 10^3\equiv 12,\ 10^2\equiv 9,\ 10^1\equiv 10$$

これより，$N\equiv 4k+2\cdot 3+1\cdot 9+6\cdot 10+l=4k+l+75\equiv 4k+l+10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k+l+10$ が 13 の倍数となり，$14\leqq 4k+l+10\leqq 55$ より，

(a)　$4k+l+10=26$ のとき　$4k+l=16$ から $(k,\ l)=(2,\ 8)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 0)$

(b)　$4k+l+10=39$ のとき　$4k+l=29$ から $(k,\ l)=(5,\ 9)$，$(6,\ 5)$，$(7,\ 1)$

(c)　$4k+l+10=52$ のとき　$4k+l=42$ から $(k,\ l)=(9,\ 6)$

(a)～(c)より，求める自然数 N は，

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

コメント

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　n を自然数とする。2^n+1 と 2^n-1 は互いに素であることを示せ。

(3)　$p,\ q$ を異なる素数とする。$2^{p-1}-1=pq^2$ を満たす $p,\ q$ の組をすべて求めよ。

[2015]

解答例

(1)　n が正の偶数のとき，l を自然数として，$n=2l$ とおくと，

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2l}-1=4^l-1=(3+1)^l-1\\&=(3^l+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-2}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1}3+1)-1\\&=3(3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-2}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-3}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1})\end{aligned}$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である。

(2)　n を自然数とするとき，2^n+1 と 2^n-1 の最大公約数を g とおくと，

$2^n+1=ga$ ……①，$2^n-1=gb$ ……②（a と b は互いに素）

①－②より，$2=g(a-b)$ となり，$g=2$ または $g=1$ である。

$g=2$ のとき，①は $2^n+1=2a$ となり，左辺は奇数，右辺は偶数で成立しない。

よって，$g=1$ から，2^n+1 と 2^n-1 は互いに素である。

(3)　異なる素数 $p,\ q$ に対して，$2^{p-1}-1=pq^2$ ………③

(i)　p が偶数のとき

p は素数より $p=2$，すると，③から $2^1-1=2q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii)　p が奇数のとき

$p-1$ は偶数となり，(1)の結果から $2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。すると，③から pq^2 は 3 の倍数となり，$p=3$ または $q=3$ である。

(ii-i)　$p=3$ のとき

③は $2^2-1=3q^2$ となり，素数 q は存在しない。

(ii-ii)　$q=3$ のとき

③は $2^{p-1}-1=9p$ ……④となり，k を自然数として，$p=2k+1$ とおくと，

$$2^{p-1}-1=2^{2k}-1=(2^k+1)(2^k-1)$$

(2)から 2^k+1 と 2^k-1 は互いに素で，④は $(2^k+1)(2^k-1)=9(2k+1)$ となり，

$$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)\ \text{または}\ (2k+1,\ 9)$$

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(9,\ 2k+1)$ のとき，$k=3$ すなわち $p=7$ となる。

$(2^k+1,\ 2^k-1)=(2k+1,\ 9)$ のとき，満たす k は存在しない。

(i)(ii)より，③を満たす $p,\ q$ の組は，$(p,\ q)=(7,\ 3)$ のみである。

コメント

誘導つきの整数問題です。なお，④を満たす p を求めるために，(2)の結論を利用する方法で記しましたが，グラフをイメージして，直接的に解いても構いません。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると, $a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しないことを証明せよ。　[2014]

解答例

(1)　まず, 自然数 a に対し, a が 3 の倍数のとき a^2 も 3 の倍数である。

また, a が 3 の倍数でないとき，$a=3k\pm1$ （k は整数）とおくと,

$$a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

すると，a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

よって，a と a^2 について 3 で割った余りを対応させると, 右表のようになり，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

a	0	1	2
a^2	0	1	1

(2)　a^2，b^2 に対し，a^2+b^2 を 3 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

さて，$a^2+b^2=3c^2$ のとき，$3c^2$ が 3 の倍数より，a^2+b^2 も 3 の倍数である。すると，a^2，b^2 はともに 3 の倍数となり，さらに(1)より, $a,\ b$ はともに 3 の倍数である。

よって，a_1，b_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$ とおくと,

$$9a_1{}^2+9b_1{}^2=3c^2,\quad 3a_1{}^2+3b_1{}^2=c^2$$

これより，c^2 は 3 の倍数となり, (1)より, c は 3 の倍数である。

以上より，$a^2+b^2=3c^2$ のとき $a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ が存在すると仮定したとき, (2)より，a_1，b_1，c_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$ とおくと,

$$9a_1{}^2+9b_1{}^2=3\cdot9c_1{}^2,\quad a_1{}^2+b_1{}^2=3c_1{}^2$$

すると, (2)から，a_2，b_2，c_2 を自然数として，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおくことができ，$9a_2{}^2+9b_2{}^2=3\cdot9c_2{}^2$，$a_2{}^2+b_2{}^2=3c_2{}^2$

以下, 同様に，$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと,

$$a>a_1>a_2>\cdots>0,\ b>b_1>b_2>\cdots>0,\ c>c_1>c_2>\cdots>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，単調に減少する自然数の列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在することになり, 明らかに不適である。

よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しない。

コメント

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は，メインの(3)の誘導となっています。

問　題

数列a_1，a_2，…，a_n，… は，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-{a_n}^2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とするとき，一般項a_nを求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$とするとき，$a_{n+k}=a_n$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$を満たす最小の自然数 k を求めよ。 [2011]

解答例

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$から，$a_2=\dfrac{2a_1}{1-{a_1}^2}=\sqrt{3}$となり，

$$a_3=\frac{2a_2}{1-{a_2}^2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}\,,\ \ a_4=\frac{2a_3}{1-{a_3}^2}=\frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-3}=\sqrt{3}$$

これより，kを自然数として，帰納的に，

$$a_1=\frac{1}{\sqrt{3}},\ \ a_n=\sqrt{3}\ (n=2k\text{のとき}),\ \ a_n=-\sqrt{3}\ (n=2k+1\text{のとき})$$

(2) $x=\tan\dfrac{\pi}{12}$とおくと，2 倍角の公式より，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2x}{1-x^2}$となり，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2x}{1-x^2}\,,\ \ 1-x^2=2\sqrt{3}x\,,\ \ x^2+2\sqrt{3}x-1=0$$

$x>0$ より，$x=-\sqrt{3}+2$

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{20}$とするとき，2 倍角の公式より，$a_2=\tan\dfrac{2}{20}\pi$，$a_3=\tan\dfrac{4}{20}\pi$，…となり，帰納的に，$a_n=\tan\dfrac{2^{n-1}}{20}\pi$である。

ここで，$n\geqq 3$において，$a_{n+k}=a_n$より，lを自然数として，

$$\frac{2^{n+k-1}}{20}\pi=\frac{2^{n-1}}{20}\pi+l\pi\,,\ \ 2^{n+k-3}=2^{n-3}+5l\,,\ \ 2^{n-3}(2^k-1)=5l\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$n=3$のとき$2^{n-3}=1$，$n\geqq 4$ のとき2^{n-3}は偶数なので，$(*)$から，2^k-1は5の倍数となり，自然数kの最小値は4である。

このとき，$(*)$は，$15\cdot 2^{n-3}=5l$，すなわち$l=3\cdot 2^{n-3}$となる。

よって，$a_{n+k}=a_n$ $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$を満たす最小の自然数kは4である。

コメント

タンジェントの 2 倍角の公式がもとになっていますので，(2)もそれに対応した方法にしましたが，$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$とするのが普通です。なお，(1)と(3)は，ともに証明を省いています。

問　題

関数 $f(x)$ が 0 でない定数 p に対して，つねに $f(x+p)=f(x)$ を満たすとき $f(x)$ は周期関数であるといい, p を周期という。正の周期のうちで最小のものを特に基本周期という。たとえば，関数 $\sin x$ の基本周期は 2π である。このとき，次の問いに答えよ。

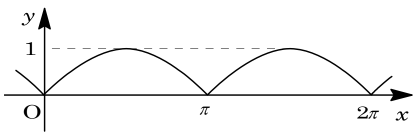
(1)　$y=|\sin x|$ のグラフをかき，関数 $|\sin x|$ の基本周期を求めよ。

(2)　自然数 m，n に対して関数 $f(x)$ を $f(x)=|\sin mx|\sin nx$ とおく。p が関数 $f(x)$ の周期ならば，$f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=0$ が成り立つことを示せ。また，このとき mp は π の整数倍であり, np は 2π の整数倍であることを示せ。

(3)　m，n は 1 以外の公約数をもたない自然数とする。(2)の結果を用いて関数 $|\sin mx|\sin nx$ の基本周期を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$\sin x\geqq 0$ のとき $|\sin x|=\sin x$，$\sin x<0$ のとき $|\sin x|=-\sin x$ より，$y=|\sin x|$ のグラフは右図のようになり，基本周期は π である。



(2)　関数 $f(x)$ の周期が p より，

$$f(x+p)=f(x)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x=-\dfrac{p}{2}$ のとき，$f\left(-\dfrac{p}{2}+p\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)$，$f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②$

一方，$f(-x)=|\sin(-mx)|\sin(-nx)=-|\sin mx|\sin nx=-f(x)$ から，

$$f\left(-\frac{p}{2}\right)=-f\left(\frac{p}{2}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$f\left(\dfrac{p}{2}\right)=f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=0$

さて，①より，$|\sin(mx+mp)|\sin(nx+np)=|\sin mx|\sin nx\cdots\cdots\cdots④$

また，$f\left(\dfrac{p}{2}\right)=\left|\sin\dfrac{mp}{2}\right|\sin\dfrac{np}{2}=0$ から，$\sin\dfrac{mp}{2}=0$ または $\sin\dfrac{np}{2}=0$

(i)　$\sin\dfrac{mp}{2}=0$ のとき

k を整数として，$\dfrac{mp}{2}=k\pi$ より $mp=2k\pi$ となり, mp は π の整数倍となる。

このとき，$|\sin(mx+mp)|=|\sin mx|$ となり，④より，

$$|\sin mx|\sin(nx+np)=|\sin mx|\sin nx$$

どんな x に対しても成立することより，$\sin(nx+np)=\sin nx$

よって, np は 2π の整数倍である。

(ii)　$\sin\dfrac{np}{2}=0$ のとき

l を整数として，$\dfrac{np}{2}=l\pi$ より $np=2l\pi$ となり, np は 2π の整数倍となる。

このとき，$\sin(nx+np)=\sin nx$ となり，④より，

$$|\sin(mx+mp)|\sin nx=|\sin mx|\sin nx$$

どんな x に対しても成立することより，$|\sin(mx+mp)|=|\sin mx|$

よって, mp は π の整数倍である。

(i)(ii)より, mp は π の整数倍であり, np は 2π の整数倍である。

(3)　(2)より，$mp=k\pi$，$np=2l\pi$ より，

$$p=\frac{k\pi}{m}=\frac{2l\pi}{n}\text{，}\ kn=2lm$$

ここで, m と n は互いに素なので, k は m の倍数となり，k' を整数として,

$$k=mk'$$

このとき，$p=\dfrac{mk'\pi}{m}=k'\pi$ となることより，周期 p は π の整数倍であり,

$$f(x+k'\pi)=|\sin(mx+mk'\pi)|\sin(nx+nk'\pi)=(-1)^{nk'}|\sin mx|\sin nx$$

(i)　n が偶数のとき

$k'=1$ として，$f(x+\pi)=f(x)$ となるので，基本周期は π である。

(ii)　n が奇数のとき

$k'=2$ として，$f(x+2\pi)=f(x)$ となるので，基本周期は 2π である。

コメント

(2)では $f(x)$ が奇関数であることに注目して，解の糸口をみつけました。なお，(2)の後半から，誘導はあるものの，設問の難度は著しく上昇しています。

問　題

2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1=b_1=1$および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n\ ,\ \ b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素であることを示せ。　[2006]

解答例

(1)　$n\geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れないことを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=3$ のとき　$a_1=b_1=1$ より，$a_2=2\times 1\times 1=2$，$b_2=2\times 1^2+1^2=3$ となり，

$$a_3=2\times 2\times 3=12\ ,\ \ b_3=2\times 2^2+3^2=17$$

(ii)　$n=k$ のとき　a_k は 3 で割り切れ，b_k は 3 で割り切れないと仮定する。

すなわち l, m を整数として，$a_k=3l$，$b_k=3m\pm 1$

このとき，$a_{k+1}=6l(3m\pm 1)=3\cdot 2l(3m\pm 1)$

$$b_{k+1}=2\cdot 9l^2+(3m\pm 1)^2=3(6l^2+3m^2\pm 2m)+1$$

(i)(ii)より，$n\geqq 3$ のとき，a_n は 3 で割り切れるが，b_n は 3 で割り切れない。

(2)　まず，$n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}=2a_nb_n$ より，a_n は偶数である。

また，$b_1=1$，$b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$ より，帰納的に b_n は奇数である。

さて，$n\geqq 2$ のとき a_n と b_n は互いに素であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$a_2=2$，$b_2=3$ から，a_2 と b_2 は互いに素である。

(ii)　$n=k$ のとき　a_k と b_k は互いに素であると仮定する。

ここで，a_{k+1} と b_{k+1} が 2 以上の公約数をもつとする。すると，a_{k+1} は偶数，b_{k+1} は奇数から，この公約数は 3 以上の素数を約数としてもつ。

この素数を g とし，a'，b' を整数とすると，

$$a_{k+1}=2a_kb_k=ga'\cdots\cdots①,\ \ b_{k+1}=2{a_k}^2+{b_k}^2=gb'\cdots\cdots②$$

①より，a_k と b_k のいずれかは g の倍数となる。

a_k が g の倍数であるとき，②より ${b_k}^2$ は g の倍数，すなわち b_k は g の倍数である。また，b_k が g の倍数であるとき，②より $2{a_k}^2$ は g の倍数，すなわち a_k は奇数 g の倍数である。いずれの場合も，a_k と b_k は互いに素であるという仮定に反するので，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき，a_n と b_n は互いに素である。

コメント

整数と漸化式の融合問題です。ただ，(2)の証明を考えるときに，(1)の結論に縛られすぎると，時間を空費してしまいます。

問　題

座標平面上で，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$，$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$ が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1)　領域 A を図示せよ。

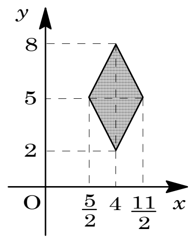
(2)　領域 B を図示せよ。

(3)　領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。　[2003]

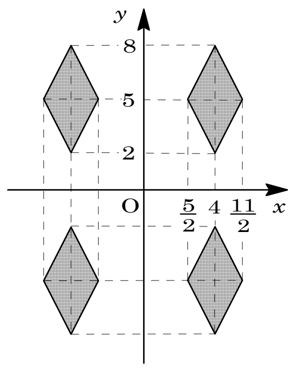
解答例

(1)　不等式 $2|x|+|y|\leqq 3$ ……①の表す領域は，4 点 $\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ 3)$，$\left(-\frac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ -3)$ を結んでできるひし形の内部または辺上である。

これより，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$ ……②の表す領域は，①の領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものである。これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(2)　不等式 $2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$ ……③の表す領域は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のときは②と一致し，$x<0$，$y\geqq 0$ のときは②を y 軸対称したもの，$x<0$，$y<0$ のときは②を原点対称したもの，$x\geqq 0$，$y<0$ のときは②を x 軸対称したものである。これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(3)　$\log_x|y|$ が有理数，すなわち $\log_x|y|=\dfrac{q}{p}$ となるの条件は，$x^{\frac{q}{p}}=|y|$，$x^q=|y|^p$ となる整数 $p,\ q$ が存在することである。さて，$x>0$，$y>0$ では，領域内の格子点は，$x=3$ のとき，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$ であるが，いずれも $3^q=y^p$ は成立しない。

$x=4$ のとき，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(4,\ 7)$，$(4,\ 8)$ であるが，$4^q=y^p$ が成立するのは $(4,\ 2)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 8)$ の場合である。

また，$x=5$ のとき，$(5,\ 4)$，$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$ であるが，$5^q=y^p$ が成立するのは $(5,\ 5)$ の場合だけである。

よって，$y<0$ のときも考え合わせると，求める点は，$(4,\ \pm 2)$，$(4,\ \pm 4)$，$(4,\ \pm 8)$，$(5,\ \pm 5)$ となる。

コメント

いきなり不等式③の領域を図示するのは難しいので，(1)が誘導となっています。

問　題

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば，$f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) 正の偶数 a, b は，ある整数 m, n とある奇数 r, s を用いて $a=2^m r$，$b=2^n s$ のように表すことができる。このとき a, b が $f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたせば，r, s は素数であり，かつ $r=2^{n+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となることを示せ。　[2002]

解答例

(1) 正の奇数 b の正の約数を小さい方から b_1，b_2，…，b_n とすると，$a=2^m b$ より，

$$f(a)=(1+2+2^2+\cdots+2^m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$=\frac{2^{m+1}-1}{2-1}f(b)=(2^{m+1}-1)f(b)$$

(2) p は 2 以上の整数より，少なくとも 1 と p を約数としてもつ。また，q は正の整数より，少なくとも q を約数としてもつ。すると，$a=pq$ のとき，

$$f(a)\geqq p\times q+1\times q=(p+1)q$$

等号が成立するのは，a が pq と q だけを約数としてもつ場合であり，$p\geqq 2$ より $q=1$ である。すると，$a=p$ は p と 1 だけを約数としてもち，p は素数となる。

(3) $a=2^m r$，$b=2^n s$ で，a, b は正の偶数，r, s は奇数より，$m\geqq 1$, $n\geqq 1$ である。

条件より，$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ なので，

$$f(2^m r)=2\cdot 2^n s\cdots\cdots\text{①},\quad f(2^n s)=2\cdot 2^m r\cdots\cdots\text{②}$$

(1)を用いると，①より，$(2^{m+1}-1)f(r)=2^{n+1}s$ ………③

②より，$(2^{n+1}-1)f(s)=2^{m+1}r$ ………④

さて，$f(r)$，$f(s)$ は整数で，2^{m+1}，2^{n+1} は偶数，$2^{m+1}-1$，$2^{n+1}-1$ は奇数なので，③より s は $2^{m+1}-1$ の倍数，④より r は $2^{n+1}-1$ の倍数となる。すなわち，k, l を正の整数として，$s=(2^{m+1}-1)k$，$r=(2^{n+1}-1)l$ と表すことができる。

③より，$(2^{m+1}-1)f(r)=2^{n+1}(2^{m+1}-1)k$，$f(r)=2^{n+1}k$ ………⑤

④より，$(2^{n+1}-1)f(s)=2^{m+1}(2^{n+1}-1)l$，$f(s)=2^{m+1}l$ ………⑥

一方，(2)より，$f(r)=f((2^{n+1}-1)l)\geqq(2^{n+1}-1+1)l=2^{n+1}l$ ………⑦

$$f(s)=f((2^{m+1}-1)k)\geqq(2^{m+1}-1+1)k=2^{m+1}k\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑤⑦より $2^{n+1}k\geqq 2^{n+1}l$ となり $k\geqq l$，⑥⑧より $2^{m+1}l\geqq 2^{m+1}k$ となり $l\geqq k$，よって $k=l$ である。

すると，⑤⑥より，$f((2^{n+1}-1)k)=(2^{n+1}-1+1)k$

$$f((2^{m+1}-1)k)=(2^{m+1}-1+1)k$$

ここで，$2^{m+1}-1\geqq 3$，$2^{n+1}-1\geqq 3$ なので，(2)の等号成立条件から，$2^{m+1}-1$，$2^{n+1}-1$ は素数で，$k=1$ となる。

以上より，$r=2^{n+1}-1$，$s=2^{m+1}-1$ となり，ともに素数である。

コメント

約数全体の和という有名な問題を題材にした難問です。文系に $m=2$，$n=4$ の場合が出題されています。

問　題

(1)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

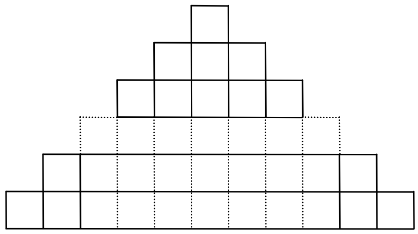
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

①　$m=2,\ 3,\ 4$ のとき，どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

②　一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。　[1998]



解答例

(1)　数学的帰納法により，証明する。

(i)　$n=1$ のとき　　左辺 $=1^2$，右辺 $=\frac{1}{6}\cdot 1\cdot 2\cdot 3=1$ なので，成立。

(ii)　$n=k$ のとき　　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$ と仮定する。

両辺 $+(k+1)^2$ とすると，

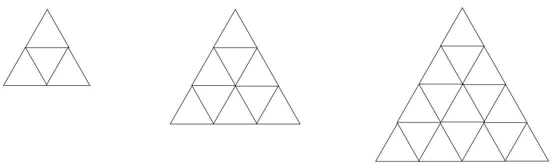
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

上式の右辺 $=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

よって，$n=k+1$ のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数 n で $1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2)　　$m=2$　　$m=3$　　$m=4$



k 段めの個数を a_k とすると，$a_k = 1 + 2(k-1) = 2k-1$

求めるタイルの個数を N_m とすると，$N_m = \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2$

(3) 正三角柱の 1 つのブロックの体積を v_0 ととすると，$v_0 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

求める台全体の体積を V とすると，

$$V = (N_1 + N_3 + N_5 + \cdots\cdots + N_{2n-1})v_0 = v_0\sum_{k=1}^{n} N_{2k-1} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n\right\}$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{12}n(2n+1)(2n-1)$$

コメント

解きやすい問題です。特に(2)の前半の設問には驚いてしまいます。

問　題

3 桁の自然数$N=100a+10b+c$（$a,\ b,\ c$ は，$1\leqq a\leqq 9,\ 0\leqq b\leqq 9,\ 0\leqq c\leqq 9$をみたす整数）を考える。

(1) 平方数かつ奇数であるNで, 2 次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフがx軸と接するようなものをすべて求めよ。

(2) 命題「Nおよびaが平方数のとき 2 次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフはx軸と接する」は正しいか。正しければそれを示し，正しくなければ反例をあげよ。

(3) あるNについて, 2 次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフは座標が整数である相異なる 2 点でx軸と交わり，グラフとx軸とで囲まれる部分の面積が 4 となる。このときのNを求めよ。 [1998]

解答例

(1) 2 次関数$y=ax^2+bx+c$のグラフがx軸と接することより，

$$b^2-4ac=0,\ b^2=4ac\cdots\cdots\cdots①$$

①よりbは偶数となり，$b=0, 2, 4, 6, 8$。また, Nが奇数よりcは奇数となる。

(i) $b=0$のとき

①より$ac=0$となるが，$a\geqq 1$から$c=0$となりcが奇数ということに反する。

(ii) $b=2$のとき

①より$ac=1$となり，$a\geqq 1$から$(a,\ c)=(1,\ 1)$。このとき，$N=121=11^2$

(iii) $b=4$のとき

①より$ac=4$となり，$a\geqq 1$, cが奇数から$(a,\ c)=(4,\ 1)$。このとき，

$N=441=21^2$。

(iv) $b=6$のとき

①より$ac=9$となり，$a\geqq 1$, cが奇数から$(a,\ c)=(9,\ 1),\ (3,\ 3),\ (1,\ 9)$

このとき，$N=961=31^2$, $N=363=3\cdot 11^2$, $N=169=13^2$。

(v) $b=8$のとき

①より$ac=16$となり，$1\leqq a\leqq 9$, cが奇数から適する$(a,\ c)$は存在しない。

以上より，$N=121,\ 169,\ 441,\ 961$

(2) 正しくない。反例：$N=14^2=196,\ a=1^2=1$

(3) x軸との交点を$x=m,\ n$（$m<n$）とすると，

$y=ax^2+bx+c=a(x-m)(x-n)\cdots\cdots②$となり，条件より，

$$-\int_m^n a(x-m)(x-n)\,dx=4 \text{ から，} \frac{a}{6}(n-m)^3=4$$

$$a(n-m)^3=2^3\cdot 3\quad(1\leqq a\leqq 9,\ 1\leqq n-m)$$

$a,\ m,\ n$ が整数より，$a=3$，$n-m=2$

よって②より，$y=3(x-m)(x-m-2)=3x^2-6(m+1)x+3m(m+2)$ ……③

$0\leqq b\leqq 9$，$0\leqq c\leqq 9$ から，$0\leqq -6(m+1)\leqq 9$，$0\leqq 3m(m+2)\leqq 9$

$-\dfrac{5}{2}\leqq m\leqq -1$ かつ $-3\leqq m\leqq -2$，$0\leqq m\leqq 1$ で m は整数より，$m=-2$

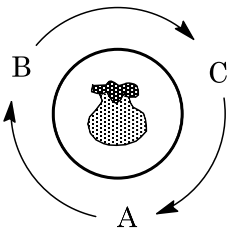
③は $y=3x^2+6x$ で $a=3$，$b=6$，$c=0$ となり，以上より $N=360$

コメント

3 桁の平方数で奇数のものは，11^2，13^2, ……, 31^2 まで 11 個ありますが，これを 1 つずつチェックするとたいへんです。上の①の条件をもとに b の値で場合分けをして解を作りました。

問　題

赤玉 2 個，青玉 1 個，白玉 1 個が入った袋が置かれた円形のテーブルのまわりに A, B, C の 3 人がこの順番で時計回りに着席している。3 人のうち，ひとりが袋から玉を 1 個取り出し，色を確認したら袋にもどす操作を考える。1 回目は A が玉を取り出し，次のルール(a), (b), (c)に従って勝者が決まるまで操作を繰り返す。



(a)　赤玉を取り出したら，取り出した人を勝者とする。

(b)　青玉を取り出したら，次の回も同じ人が玉を取り出す。

(c)　白玉を取り出したら，取り出した人の左隣りの人が次の回に玉を取り出す。

A, B, C の 3 人が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とする。ただし，$a_1=1$，$b_1=c_1=0$ である。以下の問いに答えよ。

(1)　A が 4 回目に勝つ確率と 7 回目に勝つ確率をそれぞれ求めよ。

(2)　$d_n=a_n+b_n+c_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくとき，d_n を求めよ。

(3)　自然数 $n\geqq 3$ に対し，a_{n+1} を a_{n-2} と n を用いて表せ。　[2017]

解答例

(1)　条件より，赤玉，青玉，白玉を取り出す確率は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}$ である。

さて，与えられたルールによって，A が 4 回目に勝つ場合は次の 2 通りである。

(i)　3 回目まで青玉 3 回取り出し，4 回目に赤玉を取り出すとき

(ii)　3 回目まで白玉 3 回取り出し，4 回目に赤玉を取り出すとき

(i)(ii)より，このときの確率は，$\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{2}+\left(\dfrac{1}{4}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{64}$ である。

次に，A が 7 回目に勝つ場合は次の 3 通りである。

(i)　6 回目まで青玉 6 回取り出し，7 回目に赤玉を取り出すとき

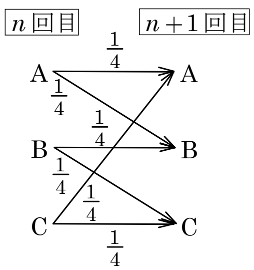
(ii)　6 回目まで青玉 3 回，白玉 3 回取り出し，7 回目に赤玉を取り出すとき

(iii)　6 回目まで白玉 6 回取り出し，7 回目に赤玉を取り出すとき

(i)～(iii)より，このときの確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}+\frac{6!}{3!\,3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}=22\times\left(\frac{1}{4}\right)^6\times\frac{1}{2}=\frac{11}{4096}$$

(2)　A, B, C が n 回目に玉を取り出す確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，$a_1=1$，$b_1=c_1=0$ となり，



$$a_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}c_n\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n+\frac{1}{4}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{4}c_n\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$d_n=a_n+b_n+c_n$ とおくと，①＋②＋③から $d_{n+1}=\dfrac{1}{2}d_n$ となり，

$$d_n=d_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(a_1+b_1+c_1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

(3)　③④より，$c_{n+1}=\dfrac{1}{4}\left\{\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}-a_n-c_n\right\}+\dfrac{1}{4}c_n$，$c_{n+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}-\dfrac{1}{4}a_n\cdots\cdots\cdots⑤$

①より $c_n=4a_{n+1}-a_n$ となり，⑤に代入すると，

$$4a_{n+2}-a_{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}-\frac{1}{4}a_n,\quad a_{n+2}=\frac{1}{4}a_{n+1}-\frac{1}{16}a_n+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，$n\geqq 3$ に対し，⑥から，$a_{n+1}=\dfrac{1}{4}a_n-\dfrac{1}{16}a_{n-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+2}$ となり，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{4}a_{n-1}-\frac{1}{16}a_{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}-\frac{1}{16}a_{n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\\&=-\frac{1}{64}a_{n-2}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}=-\frac{1}{64}a_{n-2}+3\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}\end{aligned}$$

コメント

標準的な確率と漸化式の問題ですが，(2)と(3)は(1)と関係なく解いています。

問　題

座標平面上で円 $x^2+y^2=1$ に内接する正六角形で，点 $P_0(1,\ 0)$ を 1 つの頂点とするものを考える。この正六角形の頂点を P_0 から反時計まわりに順に P_1，P_2，P_3，P_4，P_5 とする。ある頂点に置かれている 1 枚のコインに対し，1 つのサイコロを 1 回投げ，出た目に応じてコインを次の規則にしたがって頂点上を動かす。

（規則）(i)　1 から 5 までの目が出た場合は，出た目の数だけコインを反時計まわりに動かす。たとえば，コインが P_4 にあるときに 4 の目が出た場合は P_2 まで動かす。

(ii)　6 の目が出た場合は，x 軸に関して対称な位置にコインを動かす。ただし，コインが x 軸上にあるときは動かさない。たとえば，コインが P_5 にあるときに 6 の目が出た場合は P_1 に動かす。

はじめにコインを 1 枚だけ P_0 に置き，1 つのサイコロを続けて何回か投げて，1 回投げるごとに上の規則にしたがってコインを動かしていくゲームを考える。以下の問いに答えよ。

(1)　2 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(2)　3 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。

(3)　n を自然数とする。n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率を求めよ。　[2016]

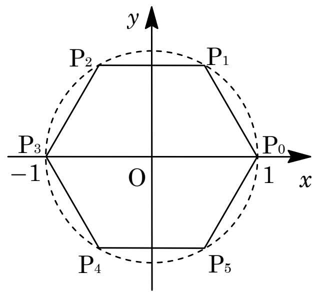
解答例

(1)　2 回サイコロを投げ，はじめに P_0 に置かれたコインが与えられた規則にしたがって P_0 に移動するのは，出たサイコロの目の（1 回目, 2 回目）の組合せが，

(1, 5)，(2, 4)，(3, 3)，(4, 2)

(5, 1)，(6, 6)

これより，この確率は $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ となる。



(2)　3 回サイコロを投げ，コインが P_0 の位置にあるのは，

(i)　2 回投げた後に P_0 の位置にあるとき

3 回目に出た目が 6 の場合だけより，このときの確率は(1)から $\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{36}$ である。

(ii)　2 回投げた後に P_0 以外の位置にあるとき

2 回投げた後に P_k $(1\leqq k\leqq 5)$ にあるときは，3 回目に出た目が $6-k$ の場合だけより，このときの確率は(1)から $\left(1-\dfrac{1}{6}\right)\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$ である。

(i)(ii)より，3 回サイコロを投げた後に P_0 の位置にある確率は，$\dfrac{1}{36}+\dfrac{5}{36}=\dfrac{1}{6}$ となる。

(3) n 回サイコロを投げ，コインが P_0 の位置にある確率を a_n，P_0 以外の位置にある確率を b_n とする。(2)と同様に考えると，

$$a_{n+1}=\frac{1}{6}a_n+\frac{1}{6}b_n=\frac{1}{6}(a_n+b_n)$$

ここで，$a_n+b_n=1$ から $a_{n+1}=\dfrac{1}{6}$，すなわち $n\geqq 2$ で $a_n=\dfrac{1}{6}$ である。

さらに，1 回サイコロを投げ，コインが P_0 の位置にあるのは，6 の目が出たときだけなので，その確率 $a_1=\dfrac{1}{6}$ である。

以上より，n 回サイコロを投げた後に，コインが P_0 の位置にある確率は $\dfrac{1}{6}$ である。

コメント

確率の基本問題ですが，3 つの設問の結論はすべて同じです。意外すぎて，とまどってしまいます。

問　題

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を繰り返し行う。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

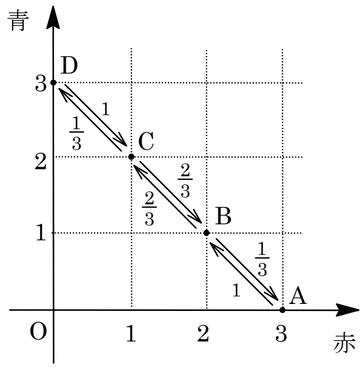
(1)　2 回目の操作で硬貨をもらう確率を求めよ。

(2)　奇数回目の操作で硬貨をもらうことはないことを示せ。

(3)　8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう確率を求めよ。

(4)　8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚である確率を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　まず，与えられた操作を行ったとき，袋に入っている 3 個の玉について，(赤，青)の個数の組は，(3, 0)，(2, 1)，(1, 2)，(0, 3) のいずれかである。

そして，この 4 つの状態をそれぞれ A, B, C, D とおき，それらの間の遷移確率をまとめると，右図のようになる。

さて，B(2, 1) の状態から始め操作を 2 回行うとき，もらう硬貨の総数が 1 枚であるのは，D(0, 3) に 1 回だけ進む B→C→D の場合より，その確率は，$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{9}$ となる。

(2)　B(2, 1) の状態から始めて，奇数回目の操作を行ったとき，A(3, 0) または C(1, 2) の状態になるので，このとき硬貨をもらうことはない。

(3)　まず，偶数回目の操作を行ったとき，B(2, 1) または D(0, 3) なので，8 回目の操作ではじめて硬貨をもらう，すなわち 8 回目に D(0, 3) に初めて進む場合は，A または C を○で表すと，B→○→B→○→B→○→B→C→D となる。

ここで，B→○→B となる確率は，$\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{7}{9}$ となるので，求める確率は，

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{686}{6561}$$

(4)　8 回目の操作でもらう硬貨の総数がちょうど 1 枚であるのは，次の場合である。

(i)　8 回目だけ D に進む場合　(3)より，その確率は $\left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot\frac{2}{9}$ である。

(ii)　6 回目だけ D に進む場合　B→○→B→○→B→C→D→C→B からその確率は，

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}$$

(iii) 4 回目だけ D に進む場合　B→○→B→C→D→C→B→○→B からその確率は,

$$\frac{7}{9}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}$$

(iv) 2 回目だけ D に進む場合　B→C→D→C→B→○→B→○→B からその確率は,

$$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}\cdot\frac{7}{9}=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}$$

(i)～(iv)より，求める確率は，$\left(\frac{7}{9}\right)^3\cdot\frac{2}{9}+\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\frac{2}{3}\times3=\left(\frac{7}{9}\right)^2\cdot\frac{2}{9}\cdot\left(\frac{7}{9}+2\right)=\frac{2450}{6561}$

コメント

状態の推移に関する問題です。後半の設問は 8 という微妙な数値のため，漸化式を立てようかとも思ったのですが，設問(2)の意味を考えて……。

問　題

Aさんは5円硬貨を3枚，Bさんは5円硬貨1枚と10円硬貨を1枚持っている。2人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1)　AさんがBさんに勝つ確率p，および引き分けとなる確率qをそれぞれ求めよ。

(2)　ゲーム終了後にAさんが持っている硬貨の合計金額の期待値Eを求めよ。

[2014]

解答例

(1)　Aさんが5円硬貨を3枚投げたとき，表3枚の場合(合計金額15円)，表2枚で裏1枚の場合(合計金額10円)，表1枚で裏2枚の場合(合計金額5円)，裏3枚の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$，${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$である。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15円	10円	5円	0円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

Bさんが5円硬貨1枚と10円硬貨を1枚を投げたとき，2枚とも表の場合(合計金額5円)，10円表で5円裏の場合(合計金額10円)，10円裏で5円表の場合(合計金額 5 円)，2 枚とも裏の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ずつである。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15円	10円	5円	0円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

以上より，AさんがBさんに勝つ確率p，引き分けとなる確率qは，

$$p=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2)　ゲーム終了後，Aさんの所持金とその各々の場合の確率は以下のようになる。

(i)　Bさんの合計金額が0円でAさんが勝った場合（所持金30円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$$

(ii)　Bさんの合計金額が5円でAさんが勝った場合（所持金25円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(iii) B さんの合計金額が 10 円で A さんが勝った場合（所持金 20 円）

$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{32}$

(iv) 引き分けの場合（所持金 15 円）で，確率は，(1)より $q=\frac{1}{4}$

(v) A さんの合計金額が 10 円で A さんが負けた場合（所持金 10 円）

$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

(vi) A さんの合計金額が 5 円で A さんが負けた場合（所持金 5 円）

$\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{16}$

(vii) A さんの合計金額が 0 円で A さんが負けた場合（所持金 0 円）

$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{32}$

(i)～(vii)より，ゲーム終了後の A さん所持金の期待値 E は，

$$E=0\times\frac{3}{32}+5\times\frac{3}{16}+10\times\frac{3}{32}+15\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{32}+25\times\frac{1}{8}+30\times\frac{7}{32}=\frac{255}{16}$$

コメント

内容的にはセンターレベルですが，集中力がかなり要求される確率の問題です。また，(2)では，題意を取り違えないように注意しなくてはいけません。

問　題

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。

以下，「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。 [2013]

解答例

(1) L を 2 回続けて行うとき，左端の硬貨は，必ず表→裏→表と反転する。これより，表が 1 枚となるのは，左端の硬貨が表，それ以外は裏という場合である。

このときは，出た目が，6→1 または 1→6 のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

(2) L，R の順に操作を行うとき，出た目と表の枚数の関係は右表のようになる。

なお，右表では，L の操作で 1 の目が出るのを L1，2 の目が出るのを L2，3 の目が出るのを L3，…，R の操作で 1 の目が出るのを R1，2 の目が出るのを R2，3 の目が出るのを R3，…と表している。

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
L1	4	3	2	1	0	1
L2	3	2	1	0	1	2
L3	2	1	0	1	2	3
L4	1	0	1	2	3	4
L5	0	1	2	3	4	5
L6	1	2	3	4	5	6

これより，表の枚数の期待値は，

$$0\times\frac{5}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{19}{9}$$

(3) L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となるのは次の場合である。

(i) 最初の操作が L6 以外のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が 0 で，3 回目に 6 の目が出る場合より，

L1→R5→L6，L2→R4→L6，L3→R3→L6，L4→R2→L6，L5→R1→L6

この確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\times 5=\dfrac{5}{216}$ となる。

(ii)　最初の操作が L6 のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が k のとき, 3 回目に $6-k$ の目が出る場合より,

L6→R1→L5, L6→R2→L4, L6→R3→L3, L6→R4→L2, L6→R5→L1

この確率は，$\left(\dfrac{1}{6}\right)^3\times 5=\dfrac{5}{216}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{5}{216}+\dfrac{5}{216}=\dfrac{5}{108}$ である。

コメント

パズルのような問題です。(2)では，期待値を求めるので，センター試験を解くときと同じように，すべての場合を表にまとめました。すると，これが次の(3)への誘導となっていました。

問　題

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき以下の問いに答えよ。

(1)　試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2)　試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。　[2012]

解答例

(1)　箱 A に黒玉が 3 個入っているとき，箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 A は黒玉 1 個，箱 B は黒玉 2 個と白玉 2 個になっている。その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れたとき，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n は，$p_1=\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{6}$，$p_2=\dfrac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{2}{3}$，$p_3=\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{6}$

(2)　箱 A に黒玉が 2 個と白玉が 1 個入っているとき，試行 T によって箱 A に黒玉が n 個入っている確率を r_n とすると，$r_1=\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_3C_1}{{}_4C_2}+\dfrac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{5}{18}$

$$r_2=\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}+\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{11}{18},\quad r_3=\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{2}{18}$$

また，箱 A に黒玉が 1 個と白玉が 2 個入っているとき，試行 T によって箱 A に黒玉が n 個入っている確率を s_n とすると，$s_1=\dfrac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_3C_1}{{}_4C_2}+\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{7}{18}$

$$s_2=\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{10}{18},\quad s_3=\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{18}$$

これより，試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n は，

$$q_1=p_1\cdot s_1+p_2\cdot r_1+p_3\cdot p_1=\frac{7}{108}+\frac{10}{54}+\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$$

$$q_2=p_1\cdot s_2+p_2\cdot r_2+p_3\cdot p_2=\frac{10}{108}+\frac{22}{54}+\frac{4}{36}=\frac{11}{18}$$

$$q_3=p_1\cdot s_3+p_2\cdot r_3+p_3\cdot p_3=\frac{1}{108}+\frac{4}{54}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$$

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率は，

$$q_1\cdot s_3+q_2\cdot r_3+q_3\cdot p_3=\frac{5}{324}+\frac{22}{324}+\frac{6}{324}=\frac{11}{108}$$

コメント

難問ではありませんが，非常に煩雑な問題です。

問　題

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を n 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1)　$n=2$ のとき，カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

(2)　$n=2$ のとき，カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3)　$n=2$ のとき，左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4)　$n=3$ のとき，左端のカードの数字の期待値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す ${}_4\mathrm{C}_2=6$ 通りの場合が同様に確からしいとし，この操作を 2 回繰り返すとする。

さて，カードが左から順に 1，2，3，4 と並ぶのは，1 回目に i と j を取り出したとき，2 回目も i と j を取り出す場合より，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 6=\frac{1}{6}$$

(2)　操作を 2 回繰り返すとき，カードが左から順に 4，3，2，1 と並ぶのは，1 回目に 1 と 4 を取り出し 2 回目に 2 と 3 を取り出す場合か，1 回目に 2 と 3 を取り出し 2 回目に 1 と 4 を取り出す場合のいずれかなので，その確率は，

$$\frac{1}{6}\times\frac{1}{6}\times 2=\frac{1}{18}$$

(3)　操作を 2 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，

(i)　2 と 3，2 と 4，3 と 4 のいずれかを 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3^2=\dfrac{9}{36}$

(ii)　1 と 2 を 2 回，または 1 と 3 を 2 回，または 1 と 4 を 2 回取り出すとき

この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{3}{36}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{9}{36}+\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{3}$

(4)　操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 1 になるのは，(3)と同様に，

(i)　2 回の操作の後，左端が 1 の場合

3 回目に 1 以外の 2 つの数を取り出すことより，その確率は，$\frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{6}\times 3\right)=\frac{1}{6}$

(ii)　2 回の操作の後，左端が 1 でない場合

3 回目に左端の数と 1 を取り出すことより，その確率は，$\left(1-\frac{1}{3}\right)\times\frac{1}{6}=\frac{1}{9}$

(i)(ii)より，左端のカードの数字が 1 の確率は，$\frac{1}{6}+\frac{1}{9}=\frac{5}{18}$

また，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字が 2, 3, 4 になることは対等なので，その確率はそれぞれ，$\frac{1}{3}\times\left(1-\frac{5}{18}\right)=\frac{13}{54}$ である。

よって，操作を 3 回繰り返すとき，左端のカードの数字の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{5}{18}+2\times\frac{13}{54}+3\times\frac{13}{54}+4\times\frac{13}{54}=\frac{22}{9}$$

コメント

(3)と(4)は，1 のカードが動かないときと動くときに場合を分けています。

問　題

k は 2 以上の自然数とする。「1」と書かれたカードが 1 枚,「2」と書かれたカードが 2 枚, …,「k」と書かれたカードが k 枚ある。そのうちの偶数が書かれたカードの枚数を M, 奇数が書かれたカードの枚数を N で表す。この $(M+N)$ 枚のカードをよくきって 1 枚を取り出し，そこに書かれた数を記録してもとに戻すという操作を n 回繰り返す。記録された n 個の数の和が偶数となる確率を p_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　p_1 と p_2 を M, N で表せ。

(2)　p_{n+1} を p_n, M, N で表せ。

(3)　$\dfrac{M-N}{M+N}$ を k で表せ。

(4)　p_n を n と k で表せ。　[2009]

解答例

(1)　偶数の書かれたカードを取り出す確率は $\dfrac{M}{M+N}$，奇数の書かれたカードを取り出す確率は $\dfrac{N}{M+N}$ より，記録された 1 個の数が偶数となる確率 p_1 は,

$$p_1 = \frac{M}{M+N}$$

また，記録された 2 個の数の和が偶数となるのは，偶数＋偶数または奇数＋奇数より，その確率 p_2 は,

$$p_2 = \left(\frac{M}{M+N}\right)^2 + \left(\frac{N}{M+N}\right)^2 = \frac{M^2+N^2}{(M+N)^2}$$

(2)　記録された $n+1$ 個の数の和が偶数となるのは，n 個の数の和が偶数のとき $n+1$ 回目に偶数を取り出すか，n 個の数の和が奇数のとき $n+1$ 回目に奇数を取り出すかのいずれかより,

$$p_{n+1} = \frac{M}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N}(1-p_n) = \frac{M-N}{M+N}p_n + \frac{N}{M+N} \cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(i)　k が偶数のとき　$M = 2+4+\cdots+k = \dfrac{2+k}{2}\cdot\dfrac{k}{2} = \dfrac{2k+k^2}{4}$

$$N = 1+3+\cdots+(k-1) = \frac{1+k-1}{2}\cdot\frac{k}{2} = \frac{k^2}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{(2k+k^2)-k^2}{(2k+k^2)+k^2} = \dfrac{1}{k+1}$

(ii)　k が奇数のとき　$M = 2+4+\cdots+(k-1) = \dfrac{2+k-1}{2}\cdot\dfrac{k-1}{2} = \dfrac{k^2-1}{4}$

$$N = 1+3+\cdots+k = \frac{1+k}{2}\cdot\frac{k+1}{2} = \frac{k^2+2k+1}{4}$$

よって，$\dfrac{M-N}{M+N} = \dfrac{(k^2-1)-(k^2+2k+1)}{(k^2-1)+(k^2+2k+1)} = -\dfrac{1}{k}$

(4)　(＊)より，$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{M-N}{M+N}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$と変形すると，

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\left(\frac{M}{M+N}-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{M-N}{M+N}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{M-N}{M+N}\right)^n$

(i)　k が偶数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{k+1}\right)^n$

(ii)　k が奇数のとき　$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n$

コメント

頻出の確率と漸化式の融合問題です。非常に細かい誘導がついています。

問　題

1 から 10 までの番号が 1 つずつ書かれた 10 枚のカードがある。k を 2 から 9 までの整数の 1 つとする。よくきった 10 枚のカードから 1 枚を抜き取り，そのカードの番号が k より大きいなら，抜き取った番号を得点とする。抜き取ったカードの番号が k 以下なら，そのカードを戻さずに，残りの 9 枚の中から 1 枚を抜き取り，2 回目に抜き取ったカードの番号を得点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　得点が 1 である確率と 10 である確率をそれぞれ求めよ。

(2)　2 以上 9 以下の整数 n に対して，得点が n である確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　得点が 1 であるのは，1 回目に 2 以上 k 以下のカードを抜き取り，2 回目に 1 のカードを抜き取る場合より，その確率は，$\dfrac{k-1}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{k-1}{90}$ である。

また，得点が 10 であるのは，1 回目に 10 のカードを抜き取る場合か，1 回目に k 以下のカードを抜き取り，2 回目に 10 のカードを抜き取る場合より，その確率は，

$$\frac{1}{10}+\frac{k}{10}\times\frac{1}{9}=\frac{k+9}{90}$$

(2)　まず，$k\neq 9$ のとき，得点 n が k 以下の場合と，k より大の場合に分ける。

(i)　$2\leqq n\leqq k$ の場合

1 回目に n を除く k 以下のカードを抜き取り，2 回目に n のカードを抜き取る場合より，その確率は，$\dfrac{k-1}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{k-1}{90}$ である。

(ii)　$k< n\leqq 9$ の場合

1 回目に n のカードを抜き取る場合か，1 回目に k 以下のカードを抜き取り，2 回目に n のカードを抜き取る場合より，その確率は，$\dfrac{1}{10}+\dfrac{k}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{k+9}{90}$ である。

なお，$k=9$ のとき，得点が n である確率は，$\dfrac{8}{10}\times\dfrac{1}{9}=\dfrac{4}{45}$ である。

(3)　得点の期待値を E とすると，

$$E=\sum_{n=1}^{k}n\cdot\frac{k-1}{90}+\sum_{n=k+1}^{10}n\cdot\frac{k+9}{90}=\frac{k-1}{90}\cdot\frac{k+1}{2}k+\frac{k+9}{90}\cdot\frac{10+k+1}{2}(10-k)$$

$$=\frac{1}{180}(k^3-k)+\frac{1}{180}(-k^3-10k^2+101k+990)=\frac{1}{18}(-k^2+10k+99)$$

この値は，$k=9$ のときも満たしている。

コメント

(2)において，$k=9$ のときは(ii)の場合がありません。そのため，補足のコメントをつけました。

問　題

さいころを 3 回続けて投げて出た目を順に $a,\ b,\ c$ とする。これらの数 $a,\ b,\ c$ に対して 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ ……(＊)を考える。ただし，さいころはどの目も同様に確からしく出るものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式(＊)が異なる 2 つの実数の解をもつとき，積 ac の取りうる値を求め，積 ac の各値ごとに可能な a と c の組$(a,\ c)$がそれぞれ何通りあるかを求めよ。

(2) 2 次方程式(＊)が異なる 2 つの有理数の解をもつ確率を求めよ。ただし，一般に自然数 n が自然数の 2 乗でなければ $\sqrt{n}$ は無理数であることを用いてよい。

[2007]

解答例

(1) 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が異なる 2 つの実数の解をもつ条件は，$b^2-4ac>0$，すなわち $ac<\dfrac{b^2}{4}$ であり，ここで，$\dfrac{b^2}{4}\leqq\dfrac{6^2}{4}=9$ より，$ac\leqq 8$ となる。

(i) $ac=1$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 1)$ より，1 通りある。

(ii) $ac=2$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ より，2 通りある。

(iii) $ac=3$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$ より，2 通りある。

(iv) $ac=4$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 4)$，$(2,\ 2)$，$(4,\ 1)$ より，3 通りある。

(v) $ac=5$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 5)$，$(5,\ 1)$ より，2 通りある。

(vi) $ac=6$ のとき　$(a,\ c)=(1,\ 6)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(6,\ 1)$ より，4 通りある。

(vii) $ac=8$ のとき　$(a,\ c)=(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$ より，2 通りある。

(2) まず，(1)の場合のもとで，b^2-4ac が正の平方数となる b の値を求める。

(i) $ac=1$ のとき　$b^2-4ac=b^2-4$ から，b の値はない。

(ii) $ac=2$ のとき　$b^2-4ac=b^2-8$ より，$b=3$ となる。

(iii) $ac=3$ のとき　$b^2-4ac=b^2-12$ より，$b=4$ となる。

(iv) $ac=4$ のとき　$b^2-4ac=b^2-16$ より，$b=5$ となる。

(v) $ac=5$ のとき　$b^2-4ac=b^2-20$ より，$b=6$ となる。

(vi) $ac=6$ のとき　$b^2-4ac=b^2-24$ より，$b=5$ となる。

(vii) $ac=8$ のとき　$b^2-4ac=b^2-32$ より，$b=6$ となる。

これより，b^2-4ac が正の平方数となる$(a,\ b,\ c)$の組の数は，

$$1\times2+1\times2+1\times3+1\times2+1\times4+1\times2=15$$

よって，2 次方程式(＊)が異なる 2 つの有理数解をもつ確率は，$\dfrac{15}{6^3}=\dfrac{5}{72}$ である。

コメント

2 つの設問とも，ていねいな数え上げがすべてです。

問　題

n を 3 以上の自然数とする。スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に n 個並んでいる。これらの n 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1)　赤青…青，赤赤青…青，…… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2)　色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3)　色の変化がちょうど m 回$(0 \leqq m \leqq n-1)$起きる確率を求めよ。

(4)　色の変化の回数の期待値を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　n 個の電球を左から $L_1 \sim L_n$ とすると，色のパターンは 2^n 通りできる。

L_1 が赤のとき，色の変化が 1 回だけなのは，赤→青の変化が起こった後は色の変化がない場合である。すると，初めて青になる電球は $L_2 \sim L_n$ のいずれかなので，この場合は ${}_{n-1}C_1$ 通りある。

よって，左端が赤色で色の変化が 1 回だけ起きる確率は，$\dfrac{{}_{n-1}C_1}{2^n} = \dfrac{n-1}{2^n}$ である。

(2)　(1)と同様に，L_1 が青のとき色の変化が 1 回だけの確率は $\dfrac{n-1}{2^n}$ であり，合わせて $\dfrac{n-1}{2^n} \times 2 = \dfrac{n-1}{2^{n-1}}$ となる。また，色の変化のない確率は，$\dfrac{1}{2^n} \times 2 = \dfrac{1}{2^{n-1}}$ である。

よって，色の変化が少なくとも 2 回起きる確率は，$1 - \left(\dfrac{n-1}{2^{n-1}} + \dfrac{1}{2^{n-1}}\right) = 1 - \dfrac{n}{2^{n-1}}$

(3)　(1)と同様に，L_1 が赤のとき，色の変化が m 回起きる確率は $\dfrac{{}_{n-1}C_m}{2^n}$ である。

L_1 が青の場合も同じ確率なので，色の変化がちょうど m 回起きる確率を $P(m)$ とすると，$P(m) = \dfrac{{}_{n-1}C_m}{2^n} \times 2 = \dfrac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}}$

(4)　色の変化の回数の期待値を E とすると，

$$E = \sum_{m=0}^{n-1} mP(m) = \sum_{m=0}^{n-1} m \cdot \frac{{}_{n-1}C_m}{2^{n-1}} = \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=0}^{n-1} \frac{m(n-1)!}{m!(n-1-m)!}$$

$$= \frac{1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{m(n-1)!}{m!(n-1-m)!} = \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{(n-2)!}{(m-1)!(n-1-m)!}$$

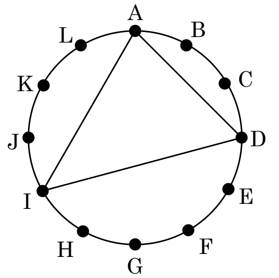
$$= \frac{n-1}{2^{n-1}} \sum_{m=1}^{n-1} {}_{n-2}C_{m-1} = \frac{n-1}{2^{n-1}} \cdot (1+1)^{n-2} = \frac{n-1}{2}$$

コメント

(4)は実質的に，組合せの公式 $k\ {}_nC_k = n\ {}_{n-1}C_{k-1}$ を用いています。

問　題

右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば，A, D, I を選べば，図のような三角形が得られる。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2)　二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3)　直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(4)　3 点を選んで得られる三角形のうち，互いに合同でないものは全部でいくつあるか。　[1998]

解答例

(1) 正三角形は，△AEI, △BFJ, △CGK, △DHL の 4 つより，正三角形を与える 3 点の選び方は 4 通りとなる。

(2) 正三角形でない二等辺三角形の総数は，頂点を 1 つ決めると底辺の決め方は 4 通りずつなので，$4\times12=48$ 通りとなる。(1)と合わせて，$48+4=52$ 通り。

(3) 円の直径が直角三角形の斜辺となることに着目する。まず，斜辺を 1 つ決めるともう 1 つの頂点の決め方は 10 通りずつとなる。また斜辺の決め方は 6 通りなので，直角三角形を与える 3 点の選び方は $10\times6=60$ 通りとなる。

(4) 点 A を頂点にもつ三角形を考えても一般性は失われない。

(i)　直角三角形の場合　AG が斜辺となるので，互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は B, C, D の 3 通りとなる。

(ii) 鈍角三角形の場合　対称性を考えると，最大辺となるのは AF, AE, AD, AC である。互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は，最大辺が AF または AE のとき B, C の 2 通りずつ, AD または AC のとき B だけの 1 通りずつ，合わせて $2\times2+1\times2=6$ 通りとなる。

(iii) 鋭角三角形の場合　対称性を考えると，最大辺となるのは AF, AE である。互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は，最大辺が AF のとき H, I の 2 通り，AE のとき I だけの 1 通り，合わせて $2+1=3$ 通りとなる。

(i)(ii)(iii)より，互いに合同でない三角形は，$3+6+3=12$ 個ある。

コメント

(1)から(3)までは有名問題です。(4)は(3)と同じ考え方をしてみました。

問　題

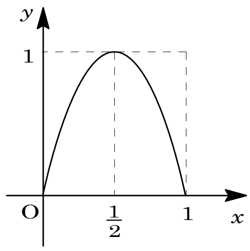
区間$[a,\ b]$が関数$f(x)$に関して不変であるとは，$a \leqq x \leqq b$ ならば，$a \leqq f(x) \leqq b$ が成り立つこととする。$f(x)=4x(1-x)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 区間$[0,\ 1]$は関数$f(x)$に関して不変であることを示せ。

(2) $0<a<b<1$ とする。このとき，区間$[a,\ b]$は関数$f(x)$に関して不変ではないことを示せ。 [2006]

解答例

(1) まず，$f(x)=4x(1-x)=-4x^2+4x=-4\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+1$



すると，$0 \leqq x \leqq 1$ のとき，最大値が$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=1$，最小値が$f(0)=f(1)=0$ より，$0 \leqq f(x) \leqq 1$ が成り立つ。

よって，区間$[0,\ 1]$は関数$f(x)$に関して不変である。

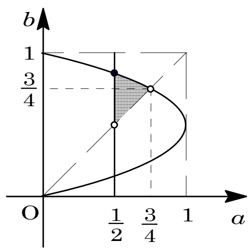
(2) (i) $0<a<b \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

$a \leqq x \leqq b$ において，$f(a) \leqq f(x) \leqq f(b)$ が成立する。

すると，区間$[a,\ b]$が関数$f(x)$に関して不変であるためには$f(b) \leqq b$，すなわち$-4b^2+4b \leqq b$，$b \geqq \dfrac{3}{4}$ が必要である。ところが，これは$b \leqq \dfrac{1}{2}$ に反する。

(ii) $0<a<\dfrac{1}{2}<b<1$ のとき

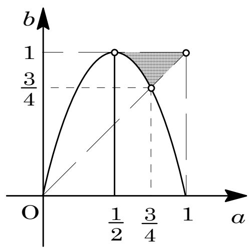
$a \leqq x \leqq b$ において，$f(a) \leqq f(x) \leqq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ または $f(b) \leqq f(x) \leqq f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ が成立する。すると，区間$[a,\ b]$が関数$f(x)$に関して不変であるためには，いずれの場合も$f\left(\dfrac{1}{2}\right) \leqq b$，すなわち$1 \leqq b$ が必要である。ところが，これは$b<1$ に反する。



(iii) $\dfrac{1}{2} \leqq a<b<1$ のとき

$a \leqq x \leqq b$ において，$f(b) \leqq f(x) \leqq f(a)$ が成立するので，区間$[a,\ b]$が関数$f(x)$に関して不変である条件は，$a \leqq f(b)$，$f(a) \leqq b$ である。

$$a \leqq 4b(1-b) \cdots\cdots ①,\quad 4a(1-a) \leqq b \cdots\cdots ②$$



ここで，ab 平面上に$\dfrac{1}{2} \leqq a<b<1$ のもとで，①を図示すると右上図の網点部となり，②を図示すると右下図の網点部となり，①と②をともに満たす$(a,\ b)$は存在しない。

(i)～(iii)より，区間$[a,\ b]$は関数$f(x)$に関して不変ではない。

コメント

(iii)の場合は連立不等式が複雑なので，式変形の代わりに図示して処理しました。

問　題

係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい，可約でないとき既約であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2)　1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。　[2000]

解答例

(1)　合同を記号「≡」で表す。まず，1 次の M 多項式は x，$x+1$ だけなので，これらの積は，x^2，$x(x+1)=x^2+x$，$(x+1)^2=x^2+2x+1\equiv x^2+1$ となり，いずれも x^2+x+1 と合同でない。

よって，x^2+x+1 は既約な M 多項式である。

(2)　1 次の M 多項式は，x，$x+1$ でともに既約である。

2 次の M 多項式は，x^2，x^2+1，x^2+x，x^2+x+1 であり，既約なのは(1)より x^2+x+1 だけである。

3 次の M 多項式は，x^3，x^3+1，x^3+x，x^3+x+1，x^3+x^2，x^3+x^2+1，x^3+x^2+x，x^3+x^2+x+1 である。

ここで, 3 次の可約な M 多項式は,

$$x^3,\ x^2(x+1)=x^3+x^2,\ x(x+1)^2\equiv x(x^2+1)=x^3+x$$

$$(x+1)^3\equiv(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$$

$$x(x^2+x+1)=x^3+x^2+x$$

$$(x+1)(x^2+x+1)=x^3+2x^2+2x+1\equiv x^3+1$$

よって, 3 次の既約な M 多項式は，x^3+x+1，x^3+x^2+1 となる。

以上より, 3 次以下の既約な M 多項式は,

$$x,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x^3+x^2+1$$

(3)　定数項が 1 である 4 次の可約な M 多項式をつくると,

$$(x+1)^4=(x+1)^2(x+1)^2\equiv(x^2+1)(x^2+1)=x^4+2x^2+1\equiv x^4+1$$

$$(x+1)^2(x^2+x+1) \equiv (x^2+1)(x^2+x+1) = x^4+x^3+2x^2+x+1$$
$$\equiv x^4+x^3+x+1$$
$$(x+1)(x^3+x+1) = x^4+x^3+x^2+2x+1 \equiv x^4+x^3+x^2+1$$
$$(x+1)(x^3+x^2+1) = x^4+2x^3+x^2+x+1 \equiv x^4+x^2+x+1$$
$$(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \equiv x^4+x^2+1$$

以上より，x^4+x+1 は既約な M 多項式である。

コメント

題意を理解して，既約な M 多項式の積を考えればよいというのを把握するのに時間がかかります。

問　題

実数 a, b は $0<a<b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\ \sqrt{ab},\ \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$ [1999]

解答例

まず，$\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=\dfrac{4b^2-5ab+a^2}{4}=\dfrac{(4b-a)(b-a)}{4}$

$0<a<b$ なので，$\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2>0$

よって，$\dfrac{a+2b}{3}>\sqrt{ab}$ ………①

また，$\left(\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^3=\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}-\dfrac{(a+2b)^3}{27}$

$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{27}=\frac{(b-a)^3}{27}$$

$0<a<b$ なので，$\left(\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^3>0$

よって，$\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>\dfrac{a+2b}{3}$ ………②

①②より，$\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>\dfrac{a+2b}{3}>\sqrt{ab}$

コメント

上の解には書いていませんが，まず $a=1$，$b=4$ として各式の値を計算し，大小関係を予測して解いています。

問　題

(1)　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2)　①　不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

②　①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。　[1998]

解答例

(1)　$x \geqq y \geqq 0$ から，$x(1+y)-y(1+x)=x-y \geqq 0$ なので，$x(1+y) \geqq y(1+x)$

よって，$\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$

(2)　まず，$|x|+|y|+|z| \geqq |x+y|+|z| \geqq |x+y+z|$ より，(1)を用いて，

$$\frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\dfrac{|x|}{1+|x|} \geqq \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots ②$

$$\frac{|y|}{1+|y|} \geqq \frac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots ③,\quad \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots ④$$

②＋③＋④より，$\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots ⑤$

①⑤より，$\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$

ここで，②の等号成立は，$|y|+|z|=0$ または $|x|=0$，すなわち $y=z=0$ または $x=0$ のときである。

また，③の等号成立は，$|x|+|z|=0$ または $|y|=0$，すなわち $x=z=0$ または $y=0$ のときである。

さらに，④の等号成立は，$|x|+|y|=0$ または $|z|=0$，すなわち $x=y=0$ または $z=0$ のときである。

以上をまとめると，x, y, z の少なくとも 2 つが 0 のときである。このとき，①の等号も成立する。

求める等号成立条件は, x, y, z の少なくとも 2 つが 0 である。

コメント

(2)は(1)の利用の方法がポイントとなりますが，三角不等式に気づかないと難しいでしょう。有名問題なので，経験がものを言います。

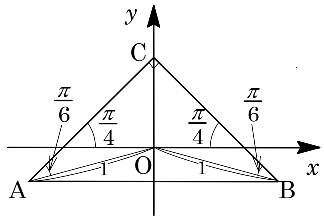
問　題

2 つの複素数 $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を用いて，複素数平面上の点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ を $z_n = \alpha w^n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ により定める。ただし，i は虚数単位を表す。2 と 3 の常用対数を $\log_{10} 2 = 0.301$，$\log_{10} 3 = 0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1) z_n の絶対値 $|z_n|$ と偏角 $\arg z_n$ を求めよ。

(2) $|z_n| \leqq 1$ が成り立つ最小の自然数 n を求めよ。

(3) 右図のように，複素数平面上の△ABC は線分 AB を斜辺とし，点 $\mathrm{C}\left(\dfrac{i}{\sqrt{2}}\right)$ を 1 つの頂点とする直角二等辺三角形である。なお，A, B を表す複素数の虚部は負であり，原点 O と 2 点 A, B の距離はともに 1 である。点 P_n が△ABC の内部に含まれる最小の自然数 n を求めよ。



[2017]

解答例

(1) $\alpha = 10000 + 10000i$ と $w = \dfrac{\sqrt{3}}{4} + \dfrac{1}{4}i$ を極形式で表すと，

$$\alpha = 10000\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4} + i\sin\frac{\pi}{4}\right),\ w = \frac{1}{2}\left(\cos\frac{\pi}{6} + i\sin\frac{\pi}{6}\right)$$

すると，$z_n = \alpha w^n$ から，$|z_n| = |\alpha||w|^n = 10000\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

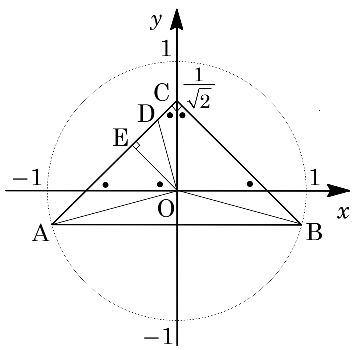
$$\arg z_n = \arg\alpha + n\arg w = \frac{\pi}{4} + \frac{n}{6}\pi = \left(\frac{1}{4} + \frac{n}{6}\right)\pi$$

(2) $|z_n| \leqq 1$ のとき，$10000\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqq 1$ から，$\log_{10} 10000\sqrt{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^n \leqq 0$

$$4 + \frac{1}{2}\log_{10} 2 - n\log_{10} 2 \leqq 0,\ n \geqq \frac{4 + \frac{1}{2}\log_{10} 2}{\log_{10} 2} = \frac{4}{\log_{10} 2} + \frac{1}{2}$$

よって，$n \geqq \dfrac{4}{0.301} + 0.5 > 13.7$ となり，最小の自然数 n は $n = 14$ である。

(3) $\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = 1$，$\mathrm{OC} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，点 $\mathrm{P}_n(z_n)$ が△ABC の内部に含まれるためには，$|z_n| \leqq 1$ であることが必要である。すると，(2)から $n \geqq 14$ となる。



(i) $n = 14$ のとき

$$\arg z_{14} = \left(\frac{1}{4} + \frac{14}{6}\right)\pi = \frac{31}{12}\pi = 2\pi + \frac{7}{12}\pi$$

$$|z_{14}| = 10000\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{14} = \frac{10^4 \times \sqrt{2}}{2^{14}}$$

これより，P_{14} は半直線 OD 上にあり，

$$\frac{10^4\times\sqrt{2}}{2^{14}}-\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{10^4-2^{13}}{2^{13}\times\sqrt{2}}>0$$

よって，$|z_{14}|>\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\mathrm{OC}>\mathrm{OD}$ となり，P_{14} は△ABC の内部に含まれない。

(ii)　$n=15$ のとき

$$\arg z_{15}=\left(\frac{1}{4}+\frac{15}{6}\right)\pi=\frac{11}{4}\pi=2\pi+\frac{3}{4}\pi,\ |z_{15}|=10000\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{15}=\frac{10^4\times\sqrt{2}}{2^{15}}$$

これより，P_{15} は半直線 OE 上にあり，$\dfrac{10^4\times\sqrt{2}}{2^{15}}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{10^4\times\sqrt{2}-2^{14}}{2^{15}}<0$

よって，$|z_{15}|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\sin\dfrac{\pi}{4}=\mathrm{OE}$ となり，P_{15} は△ABC の内部に含まれる。

(i)(ii)より，P_n が△ABC の内部に含まれる最小の自然数 n は $n=15$ である。

コメント

複素数平面と極形式が題材になっています。(2)が誘導となり(3)につながっていますが，それでもやや面倒です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数，i を虚数単位とし，z を $z = \cos\theta + i\sin\theta$ で表される複素数とする。このとき，整数 n に対して次の式を証明せよ。

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),\ \ \sin n\theta = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2)　次の方程式を満たす実数 x $(0 \leqq x < 2\pi)$ を求めよ。

$$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$$

(3)　次の式を証明せよ。

$$\sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ = \frac{9}{4}$$

[2016]

解答例

(1)　$z = \cos\theta + i\sin\theta$ のとき，整数 n に対してド・モアブルの定理より，

$$z^n = \cos n\theta + i\sin n\theta\,,\ \ \frac{1}{z^n} = z^{-n} = \cos(-n\theta) + i\sin(-n\theta) = \cos n\theta - i\sin n\theta$$

これより，$z^n + \dfrac{1}{z^n} = 2\cos n\theta$，$z^n - \dfrac{1}{z^n} = 2i\sin n\theta$ となり，

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left(z^n + \frac{1}{z^n}\right),\ \ \sin n\theta = \frac{1}{2i}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right) = -\frac{i}{2}\left(z^n - \frac{1}{z^n}\right)$$

(2)　$\cos x + \cos 2x - \cos 3x = 1$ $(0 \leqq x < 2\pi)$ ……(＊)に対し，

$$-2\sin 2x \sin(-x) + 1 - 2\sin^2 x = 1,\ \ 2\sin 2x \sin x - 2\sin^2 x = 0$$

すると，$4\sin^2 x\cos x - 2\sin^2 x = 0$ から，$2\sin^2 x(2\cos x - 1) = 0$

よって，$\sin x = 0$ または $\cos x = \dfrac{1}{2}$ から，(＊)の解は，

$$x = 0,\ \frac{\pi}{3},\ \pi,\ \frac{5}{3}\pi$$

(3)　$S = \sin^2 20^\circ + \sin^2 40^\circ + \sin^2 60^\circ + \sin^2 80^\circ$ とおくと，

$$\begin{aligned}
S &= \frac{1-\cos 40^\circ}{2} + \frac{1-\cos 80^\circ}{2} + \frac{1-\cos 120^\circ}{2} + \frac{1-\cos 160^\circ}{2} \\
&= \frac{1}{2}\cdot 4 - \frac{1}{2}\left(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ - \frac{1}{2} + \cos 160^\circ\right) \\
&= \frac{9}{4} - \frac{1}{2}(\cos 40^\circ + \cos 80^\circ + \cos 160^\circ) = \frac{9}{4} - \frac{1}{2}(\cos 40^\circ + 2\cos 120^\circ \cos 40^\circ) \\
&= \frac{9}{4} - \frac{1}{2}\{\cos 40^\circ + (-1)\cos 40^\circ\} = \frac{9}{4}
\end{aligned}$$

コメント

複素数の計算問題ですが，(2)，(3)は(1)を無視して，普通に三角関数の変形により解いています。出題意図は，3 倍角の公式とか複素数列の和の扱いなどでしょうか。

問　題

t を実数とするとき, 2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　この 2 次方程式が異なる 2 つの虚数解をもつような t の範囲と，そのときの虚数解をすべて求めよ。

(2)　(1)の虚数解のうち，その虚部が正のものを $z(t)$ で表す。t が(1)で求めた範囲を動くとき，複素数平面上で点 $z(t)$ が描く図形 C を求め，図示せよ。

(3)　複素数平面上で，点 z が(2)の図形 C 上を動くとき，$w=\dfrac{iz}{z+1}$ で表される点 w が描く図形を求め，図示せよ。　[2005]

解答例

(1)　2 次方程式 $z^2+tz+t=0$ ……①が異なる 2 つの虚数解をもつ条件は,

$$D=t^2-4t=t(t-4)<0$$

よって, $0<t<4$ となり，このとき①より，$z=\dfrac{-t\pm\sqrt{t^2-4t}}{2}=\dfrac{-t\pm\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$

(2)　条件より，$z(t)=\dfrac{-t+\sqrt{-t^2+4t}\,i}{2}$ なので，$z(t)=x+yi$ とおくと,

$$x=-\frac{t}{2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\sqrt{-t^2+4t}}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

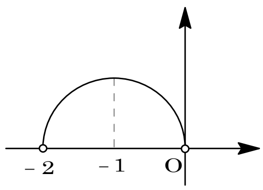
②より，$t=-2x$ となり，③に代入すると,

$$2y=\sqrt{-4x^2-8x}$$

$y>0$ で両辺を 2 乗すると，$4y^2=-4x^2-8x$

$$x^2+y^2+2x=0,\ (x+1)^2+y^2=1$$

よって，点 $z(t)$ の描く図形は，右図のようになる。



(3)　$w=\dfrac{iz}{z+1}$ より，$(z+1)w=iz$，$(w-i)z=-w$ ………④

ここで，$w=i$ とすると④は成立しないので，$w\neq i$ から，$z=\dfrac{-w}{w-i}$ ………⑤

また, (2)より，点 z は点 -1 を中心とする半径 1 の上半円を描くので,

$$|z+1|=1\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad |z-i|<|z+i|\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥より，$\left|\dfrac{-w}{w-i}+1\right|=1$，$\left|\dfrac{-i}{w-i}\right|=1$ となり，$\dfrac{|-i|}{|w-i|}=1$ から，$|w-i|=1$

よって，点 w は点 i を中心とする半径 1 の円を描く。

⑤⑦より，$\left|\dfrac{-w}{w-i}-i\right|<\left|\dfrac{-w}{w-i}+i\right|$，$\left|\dfrac{(-1-i)w-1}{w-i}\right|<\left|\dfrac{(-1+i)w+1}{w-i}\right|$ となり,

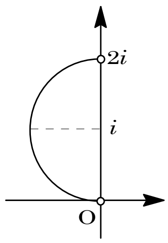
$$|(-1-i)w-1|<|(-1+i)w+1|\quad (w\neq i)$$

$|-1-i|\left|w+\dfrac{1}{1+i}\right|<|-1+i|\left|w+\dfrac{1}{-1+i}\right|$ から，$\sqrt{2}\left|w-\dfrac{-1+i}{2}\right|<\sqrt{2}\left|w-\dfrac{1+i}{2}\right|$

$$\left|w-\frac{-1+i}{2}\right|<\left|w-\frac{1+i}{2}\right|$$

よって，点 w は 2 点 $\frac{-1+i}{2}$，$\frac{1+i}{2}$ を結ぶ線分の垂直二等分線すなわち虚軸の左側にある。

以上まとめて，点 w の描く図形は，右図のようになる。



コメント

複素数と軌跡に関する頻出タイプの問題です。なお，軌跡の限界である z の虚部が正という条件は，⑦で数式化しています。

問　題

$0<a<1$ である定数 a に対し，複素数平面上で $z=t+ai$ (t は実数全体を動く)が表す直線を l とする。ただし，i は虚数単位である。

(1) 複素数 z が l 上を動くとき，z^2 が表す点の軌跡を図示せよ。

(2) 直線 l を，原点を中心に角 θ だけ回転移動した直線を m とする。m と(1)で求めた軌跡との交点の個数を $\sin\theta$ の値で場合分けして求めよ。 [2003]

解答例

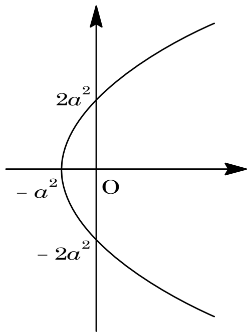
(1) $z=t+ai$ のとき，$z^2=t^2-a^2+2ati$

ここで，$z^2=x+yi$ とおくと，

$$x=t^2-a^2\cdots\cdots\cdots①,\quad y=2at\cdots\cdots\cdots②$$

②より $t=\dfrac{y}{2a}$，①に代入して $x=\dfrac{y^2}{4a^2}-a^2\cdots\cdots\cdots③$

よって，③の曲線を図示すると，右図のようになる。



(2) 点 ai を原点のまわりに θ だけ回転すると，

$$ai(\cos\theta+i\sin\theta)=a(-\sin\theta+i\cos\theta)$$

以下，実軸を x 軸，虚軸を y 軸として設定した xy 平面上で考える。

直線 m は，点 $(-a\sin\theta,\ a\cos\theta)$ を通り，法線ベクトルが $(-\sin\theta,\ \cos\theta)$ であるので，$-\sin\theta\cdot(x+a\sin\theta)+\cos\theta\cdot(y-a\cos\theta)=0$

$$-x\sin\theta+y\cos\theta-a=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$-\left(\dfrac{y^2}{4a^2}-a^2\right)\sin\theta+y\cos\theta-a=0$

$$\frac{\sin\theta}{4a^2}y^2-y\cos\theta+a-a^2\sin\theta=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

(i) $\sin\theta=0$ のとき　$\cos\theta\neq0$ より，⑤は $-y\cos\theta+a=0$

$y=\dfrac{a}{\cos\theta}$ から，③④の共有点は 1 個である。

(ii) $\sin\theta\neq0$ のとき　⑤の判別式を D とすると，

$$D=\cos^2\theta-4\cdot\frac{\sin\theta}{4a^2}(a-a^2\sin\theta)=1-\frac{1}{a}\sin\theta$$

よって，$0<a<1$ から，$D>0$ ($\sin\theta<a$) のとき③④の共有点は 2 個，$D=0$ ($\sin\theta=a$) のとき共有点は 1 個，$D<0$ ($\sin\theta>a$) のとき共有点は 0 個である。

(i)(ii)より，③④の共有点の個数は，$-1\leqq\sin\theta<0,\ 0<\sin\theta<a$ のとき 2 個，$\sin\theta=0,\ a$ のとき 1 個，$a<\sin\theta\leqq1$ のとき 0 個である。

コメント

本来は複素数平面の問題ですが，(2)では上のように xy 平面を設定して記述した方がすっきりします。

問　題

複素数平面上の原点を中心とする半径 1 の円 C 上に相異なる 3 点 z_1，z_2，z_3 をとる。次の問いに答えよ。

(1) $w_1 = z_1 + z_2 + z_3$ とおく。点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心になることを示せ。ここで，三角形の垂心とは，各頂点から対辺またはその延長線上に下ろした 3 本の垂線の交点のことであり，これらの 3 本の垂線は 1 点で交わることが知られている。

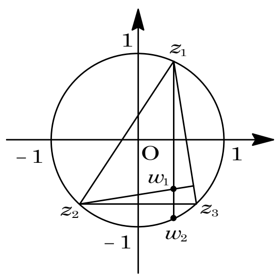
(2) $w_2 = -\overline{z_1}z_2z_3$ とおく。$w_2 \neq z_1$ のとき，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点は w_2 であることを示せ。ここで $\overline{z_1}$ は z_1 に共役な複素数である。

(3) 2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点は，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点であることを示せ。ただし，$w_1 = w_2$ のときは，w_1 と w_2 の中点は w_1 と解釈する。　[2002]

解答例

(1) まず, 3 点 z_1，z_2，z_3 は原点中心で半径 1 の円 C 上にあるので,

$$|z_1| = |z_2| = |z_3| = 1$$



すると，

$$\frac{w_1 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{z_2 + z_3}{z_2 - z_3} = \frac{(z_2 + z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}{(z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}$$

$$= \frac{|z_2|^2 - z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3 - |z_3|^2}{|z_2 - z_3|^2}$$

$$= \frac{-z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3}{|z_2 - z_3|^2}$$

ここで，$u = -z_2\overline{z_3} + \overline{z_2}z_3$ とおくと，$\overline{u} = -\overline{z_2}z_3 + z_2\overline{z_3}$ となり，$\overline{u} = -u$ である。すなわち, u は純虚数となるので，$\dfrac{w_1 - z_1}{z_2 - z_3}$ も純虚数である。

よって, 2 点 z_1，w_1 を通る直線と 2 点 z_2，z_3 を通る直線は直交する。

同様にして，$\dfrac{w_1 - z_2}{z_3 - z_1} = \dfrac{z_3 + z_1}{z_3 - z_1}$ も純虚数となり，2 点 z_2，w_1 を通る直線と 2 点 z_1，z_3 を通る直線は直交する。

以上より，点 w_1 は 3 点 z_1，z_2，z_3 を頂点とする三角形の垂心である。

(2)

$$\frac{w_2 - z_1}{z_2 - z_3} = \frac{-\overline{z_1}z_2z_3 - z_1}{z_2 - z_3} = -\frac{(\overline{z_1}z_2z_3 + z_1)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}{(z_2 - z_3)(\overline{z_2} - \overline{z_3})}$$

$$= -\frac{\overline{z_1}|z_2|^2 z_3 - \overline{z_1}z_2|z_3|^2 + z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_3}}{|z_2 - z_3|^2} = -\frac{\overline{z_1}z_3 - \overline{z_1}z_2 + z_1\overline{z_2} - z_1\overline{z_3}}{|z_2 - z_3|^2}$$

ここで，$v=\overline{z_1}z_3-\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}-z_1\overline{z_3}$ とおくと，$\overline{v}=z_1\overline{z_3}-z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-\overline{z_1}z_3$ となり，$\overline{v}=-v$ である。すなわち, v は純虚数となるので，$\dfrac{w_2-z_1}{z_2-z_3}$ も純虚数である。

よって, 2 点 z_1，w_2 を通る直線と 2 点 z_2，z_3 を通る直線は直交する。

また，$|w_2|=|-\overline{z_1}z_2z_3|=|-\overline{z_1}||z_2||z_3|=1$ より，点 w_2 は円 C 上にある。

以上より，$w_2\neq z_1$ のとき，点 w_2 は，2 点 z_2，z_3 を通る直線上に点 z_1 から下ろした垂線またはその延長線が円 C と交わる点である。

(3) 点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点を w とすると，

$$w=\frac{w_1+w_2}{2}=\frac{z_1+z_2+z_3-\overline{z_1}z_1z_1}{2}$$

さて，

$$\frac{w-z_3}{z_2-z_3}=\frac{z_1+z_2-z_3-\overline{z_1}z_2z_3}{2(z_2-z_3)}=\frac{(z_1+z_2-z_3-\overline{z_1}z_2z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}{2(z_2-z_3)(\overline{z_2}-\overline{z_3})}$$

$$=\frac{z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-z_2\overline{z_3}-\overline{z_2}z_3-z_1\overline{z_3}-\overline{z_1}z_3+2}{2|z_2-z_3|^2}$$

ここで，$t=z_1\overline{z_2}+\overline{z_1}z_2-z_2\overline{z_3}-\overline{z_2}z_3-z_1\overline{z_3}-\overline{z_1}z_3$ とおくと，

$$\overline{t}=\overline{z_1}z_2+z_1\overline{z_2}-\overline{z_2}z_3-z_2\overline{z_3}-\overline{z_1}z_3-z_1\overline{z_3}$$

これより $\overline{t}=t$，すなわち t は実数となるので，$\dfrac{w-z_3}{z_2-z_3}$ も実数である。

よって，点 w は 2 点 z_2，z_3 を通る直線上にある。

以上より，点 w_1 と点 w_2 を結ぶ線分の中点は，2 点 z_2，z_3 を通る直線とこの直線上に点 z_1 から下ろした垂線との交点である。

コメント

複素数平面上で 2 直線の直交条件と共線条件を題材にした問題です。文字が多いので，計算は複雑です。

問　題

複素数平面上の点 z を考える。

(1)　実数 $a,\ c$ と複素数 b が $|b|^2-ac>0$ を満たすとき，$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0$ を満たす点 z は $a\neq 0$ のとき，どのような図形を描くか。ただし，$\overline{z}$ は z に共役な複素数を表す。

(2)　0 でない複素数 d と複素数平面上の異なる 2 点 $p,\ q$ に対して

$$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$$

を満たす点 z はどのような図形を描くか。　[2001]

解答例

(1)　条件より，$az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0\ (a\neq 0)$ なので，

$$z\overline{z}+\frac{\overline{b}}{a}z+\frac{b}{a}\overline{z}+\frac{c}{a}=0,\ \left(z+\frac{b}{a}\right)\left(\overline{z}+\frac{\overline{b}}{a}\right)=-\frac{c}{a}+\frac{b\overline{b}}{a^2}$$

a は実数より，$\left(z+\dfrac{b}{a}\right)\left(\overline{z+\dfrac{b}{a}}\right)=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|^2=\dfrac{|b|^2-ac}{a^2}$

ここで，$|b|^2-ac>0$ なので，$\left|z+\dfrac{b}{a}\right|=\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$

よって，点 z は中心 $-\dfrac{b}{a}$，半径 $\dfrac{\sqrt{|b|^2-ac}}{|a|}$ の円を描く。

(2)　条件より，$d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=\overline{d}(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$ ………①

$$(d-\overline{d})z\overline{z}+(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})z+(\overline{d}q-dp)\overline{z}+(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

(i)　$d=\overline{d}$（d が実数）のとき

①より $d(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=d(z-q)(\overline{z}-\overline{p})$ となり，$d\neq 0$ なので，

$$(z-p)(\overline{z}-\overline{q})=(z-q)(\overline{z}-\overline{p})\ \cdots\cdots\cdots③$$

$z=q$ のとき③は成立し，$z\neq q$ のとき $\dfrac{z-p}{z-q}=\dfrac{\overline{z}-\overline{p}}{\overline{z}-\overline{q}}$ となり，t を実数として，

$$\frac{z-p}{z-q}=t,\ z-p=t(z-q)$$

よって，点 z は 2 点 $p,\ q$ を結ぶ直線を描く。

(ii)　$d\neq\overline{d}$（d が虚数）のとき

②より，$i(d-\overline{d})z\overline{z}+i(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})z+i(\overline{d}q-dp)\overline{z}+i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)=0$ ………④

ここで，$a=i(d-\overline{d})$，$b=i(\overline{d}q-dp)$，$c=i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)$ とおくと，$a,\ c$ は実数，$\overline{b}=i(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})$ となり，④は $az\overline{z}+\overline{b}z+b\overline{z}+c=0\ (a\neq 0)$ と表せる。

$$\begin{aligned}|b|^2-ac&=i(\overline{d}q-dp)\cdot i(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})-i(d-\overline{d})\cdot i(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)\\&=-(\overline{d}q-dp)(\overline{d}\,\overline{p}-d\overline{q})+(d-\overline{d})(dp\overline{q}-\overline{d}\,\overline{p}q)\\&=d\overline{d}(p\overline{p}+q\overline{q}-p\overline{q}-\overline{p}q)=|d|^2(p-q)(\overline{p}-\overline{q})\\&=|d|^2|p-q|^2>0\ (d\neq 0,\ \ p\neq q)\end{aligned}$$

(1)より，点 z は中心 $-\dfrac{i(\overline{d}q-dp)}{i(d-\overline{d})}=\dfrac{dp-\overline{d}q}{d-\overline{d}}$，半径 $\dfrac{|d||p-q|}{|d-\overline{d}|}$ の円を描く。

コメント

複素数平面における円の方程式が題材です。(2)では(1)の利用を考え，計算を少しでも軽減しようとしました。

問　題

複素数$z=\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ$と，それに共役な複素数$\overline{z}$に対し，$\alpha = z+\overline{z}$とする。

(1)　αは整数を係数とするある 3 次方程式の解となることを示せ。

(2)　この 3 次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ。

(3)　有理数を係数とする 2 次方程式で，αを解とするものは存在しないことを背理法を用いて示せ。　[2000]

解答例

(1)　$\alpha = z+\overline{z} = (\cos 20^\circ + i\sin 20^\circ) + (\cos 20^\circ - i\sin 20^\circ) = 2\cos 20^\circ$から，$\cos 20^\circ = \dfrac{\alpha}{2}$

ここで，$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$より，

$$\frac{1}{2} = 4\cdot\frac{\alpha^3}{8} - 3\cdot\frac{\alpha}{2},\quad \alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0\cdots\cdots\cdots①$$

よって，αは 3 次方程式$x^3-3x-1=0\cdots\cdots②$の解である。

(2)　$f(x) = x^3 - 3x - 1$とおくと，

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

$f(-1)>0$，$f(1)<0$より，$f(x)=0$は 3 個の実数解をもつ。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

ここで，この解が有理数であると仮定すると，$p>0$でpとqを互いに素な整数として，$x=\dfrac{q}{p}$とおくことができる。

②より，$\dfrac{q^3}{p^3} - 3\cdot\dfrac{q}{p} - 1 = 0$，$q^3 - 3p^2q - p^3 = 0$，$q^3 = p^2(3q+p)$

p^2はq^3の約数となるが，pとqは互いに素な整数なので，$p=1$となる。すなわち，$f(x)=0$の解はすべて整数となる。

ところが，$f(-2)=-3<0$，$f(-1)=1>0$，$f(0)=-1<0$，$f(1)=-3<0$，$f(2)=1>0$より，$f(x)=0$の解は$-2<x<-1$，$-1<x<0$，$1<x<2$に 1 つずつあり，整数解は存在しない。

したがって，3 個の実数解は，いずれも有理数ではない。

(3)　a，bを有理数として，$x=\alpha$を解とする 2 次方程式を，一般性を失うことなく$x^2+ax+b=0$とできるので，$\alpha^2 + a\alpha + b = 0\cdots\cdots③$となる。

ここで，x^3-3x-1をx^2+ax+bで割ると，

$$x^3 - 3x - 1 = (x^2+ax+b)(x-a) + (a^2-b-3)x + (ab-1)\cdots\cdots\cdots④$$

$x=\alpha$を④に代入すると，①③より$(a^2-b-3)\alpha + (ab-1) = 0$

a, bは有理数，αは無理数なので，$a^2-b-3=0\cdots\cdots⑤$，$ab-1=0\cdots\cdots⑥$

⑤より $b=a^2-3$ となり，⑥に代入して $a^3-3a-1=0$ となるが，この方程式の解は(2)より有理数でない。よって，③は成立しない。

以上より，有理数を係数とする 2 次方程式で，α を解とするものは存在しない。

コメント

さまざまな分野の融合したおもしろい問題です。

問　題

k を実数として，2 次方程式 $x^2+2kx+3k=0$ の 2 つの解を α，β $(\alpha \neq \beta)$ とする。i を虚数単位として次の問いに答えよ。

(1)　$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2$ の値を k を用いて表せ。

(2)　複素数平面において，複素数 α，β，i を表す点をそれぞれ A，B，P とする。$\angle$APB が直角となるような k の値を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$x^2+2kx+3k=0$ ……①の 2 つの解が α，β $(\alpha \neq \beta)$ なので，

$$\alpha+\beta=-2k,\ \ \alpha\beta=3k \cdots\cdots②$$

また，①の判別式 $D/4=k^2-3k=k(k-3)$

(i)　$D/4>0$　$(k<0,\ 3<k)$ のとき

$$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=(\alpha^2+1)+(\beta^2+1)=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta+2$$

②より，$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=4k^2-6k+2$

(ii)　$D/4<0$　$(0<k<3)$ のとき

①の解は α，$\overline{\alpha}$ となるので，②は $\alpha+\overline{\alpha}=-2k$，$\alpha\overline{\alpha}=3k$ ……… ②′

$$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=(\alpha-i)(\overline{\alpha}-\overline{i})+(\overline{\alpha}-i)(\alpha-\overline{i})=2\alpha\overline{\alpha}+2$$

②′ より，$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=6k+2$

(2)　$\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ のとき，三平方の定理より，

$$|\alpha-i|^2+|\beta-i|^2=|\alpha-\beta|^2 \cdots\cdots③$$

(i)　$D/4>0$　$(k<0,\ 3<k)$ のとき

$$|\alpha-\beta|^2=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4k^2-12k$$

③より，$4k^2-6k+2=4k^2-12k$，$k=-\dfrac{1}{3}$（この値は $k<0$，$3<k$ を満たす）

(ii)　$D/4<0$　$(0<k<3)$ のとき

$$\left|\alpha-\overline{\alpha}\right|^2=(\alpha-\overline{\alpha})(\overline{\alpha}-\alpha)=2\alpha\overline{\alpha}-\left\{(\alpha+\overline{\alpha})^2-2\alpha\overline{\alpha}\right\}=12k-4k^2$$

③より，$6k+2=12k-4k^2$，$2k^2-3k+1=0$

$k=1$，$\dfrac{1}{2}$（この値は $0<k<3$ を満たす）

(i)(ii)より，$k=-\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{2}$，1

コメント

複素数に関する頻出問題の一つです。要点は，2 次方程式①が実数解をもつときと虚数解をもつときとを場合分けすることです。

問　題

k を実数とするとき，方程式

$$x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2=0$$

の解を z_1，z_2，z_3 とし，それらを複素数平面上の点とみなす。

(1)　z_1，z_2，z_3 が一直線上にあるような k の値を求めよ。

(2)　z_1，z_2，z_3 が直角三角形をなすような k の値を求めよ。

(3)　3 点 z_1，z_2，z_3 を原点のまわりに角 θ だけ回転して得られる 3 点を w_1，w_2，w_3 とする。w_1，w_2，w_3 およびそれらと共役な点 $\overline{w_1}$，$\overline{w_2}$，$\overline{w_3}$ とが，原点中心の正六角形の頂点となるとき，k および θ（$0\leqq\theta\leqq\pi$）の値を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-(2k+1)x^2+(4k^2+2k)x-4k^2$ とすると，

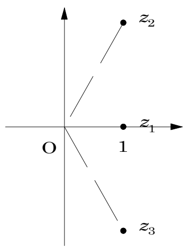
$f(1)=1-(2k+1)+(4k^2+2k)-4k^2=0$ から，

$$f(x)=(x-1)(x^2-2kx+4k^2)$$

$f(x)=0$ の解は，$x=1$，$x=k\pm\sqrt{3}ki=k(1\pm\sqrt{3}\,i)$

よって，$z_1=1$，$z_2=k(1+\sqrt{3}\,i)$，

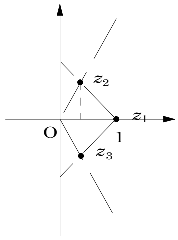
$z_3=k(1-\sqrt{3}\,i)=\overline{z_2}$ とおくことができる。



3 点 z_1，z_2，z_3 が一直線上にある条件は，z_2，z_3 が虚数のとき $k=1$ となり，z_2，z_3 が実数のとき $z_2=z_3=0$ から $k=0$ となる。

以上より，$k=0$，1

(2)　3 点 z_1，z_2，z_3 が直角三角形をつくるとき，$\angle z_2z_1z_3=\dfrac{\pi}{2}$ から z_1 と z_2 を結ぶ線分と実軸，z_1 と z_3 を結ぶ線分と実軸のなす角はともに $\dfrac{\pi}{4}$ となる。



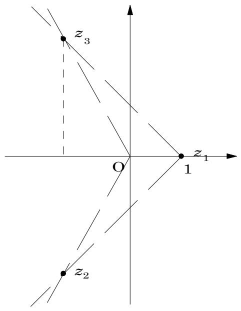
$k>0$ のとき，$k\tan\dfrac{\pi}{3}=(1-k)\tan\dfrac{\pi}{4}$

$\sqrt{3}k=1-k$ から，$k=\dfrac{1}{1+\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$

$k<0$ のとき，$-k\tan\dfrac{\pi}{3}=(1-k)\tan\dfrac{\pi}{4}$

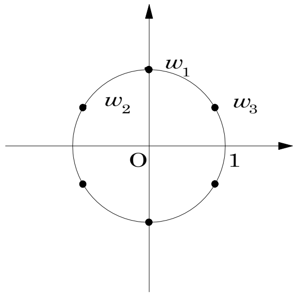
$-\sqrt{3}k=1-k$ から，$k=\dfrac{1}{1-\sqrt{3}}=-\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}$

以上より，$k=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$



(3)　$|z_1| = |z_2| = |z_3|$ から $1 = 2|k|$，$k = \pm\dfrac{1}{2}$

(i)　$k = \dfrac{1}{2}$ のとき



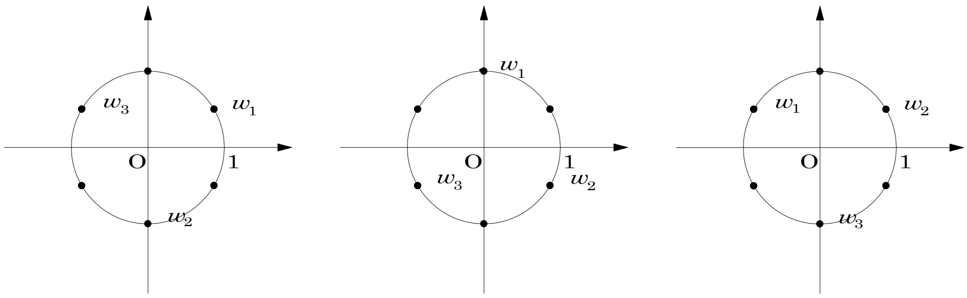
原点と z_2 を結ぶ線分と実軸，原点と z_3 を結ぶ線分と実軸のなす角はともに $\dfrac{\pi}{3}$ なので，3 点 z_3，z_1，z_2 を回転してできる 3 点 w_3，w_1，w_2 は正六角形の隣り合う頂点となる。

回転角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ から，条件をみたす w_1，w_2，w_3 の配置は右図のようになる。すなわち点 1 が点 i に回転する場合より，$\theta = \dfrac{\pi}{2}$ となる。

(ii)　$k = -\dfrac{1}{2}$ のとき

原点と z_2 を結ぶ線分と実軸，原点と z_3 を結ぶ線分と実軸のなす角はともに $\dfrac{2\pi}{3}$ なので，3 点 z_2，z_1，z_3 を回転してできる 3 点 w_2，w_1，w_3 は正六角形の一つおきの頂点となる。

回転角 θ が $0 \leqq \theta \leqq \pi$ から，条件をみたす w_1，w_2，w_3 の配置は下図のようになる。すなわち点 1 が点 $\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，i，$\dfrac{-\sqrt{3}+i}{2}$ に回転する場合より，それぞれ，$\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5\pi}{6}$ となる。



(i)(ii)より，$k = \dfrac{1}{2}$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{2}$，$k = -\dfrac{1}{2}$ のとき $\theta = \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{5\pi}{6}$

コメント

k が負や 0 の場合も考える必要があり，このため，かなり注意深く論理を進めていかなくてはいけません。

問　題

座標平面上の楕円 $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ ……①を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 楕円①と直線 $y=x+a$ が交点をもつときの a の値の範囲を求めよ。

(2) $|x|+|y|=1$ を満たす点 $(x,\ y)$ 全体がなす図形の概形をかけ。

(3) 点 $(x,\ y)$ が楕円①上を動くとき，$|x|+|y|$ の最大値，最小値とそれを与える $(x,\ y)$ をそれぞれ求めよ。 [2014]

解答例

(1) 楕円 $\dfrac{(x+2)^2}{16}+\dfrac{(y-1)^2}{4}=1$ ……①，直線 $y=x+a$ ……②に対して，

①から，$0\leqq\theta<2\pi$ として，$x=-2+4\cos\theta$ ……③，$y=1+2\sin\theta$ ……④

③④を②に代入すると，$1+2\sin\theta=-2+4\cos\theta+a$

$$2(\sin\theta-2\cos\theta)+3=a\,,\ \ 2\sqrt{5}\sin(\theta+\alpha)+3=a\ \text{………⑤}$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ ……⑥，$\sin\alpha=-\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ ……⑦

①と②が交点をもつ条件は，⑤を満たす θ が存在する条件に対応するので，

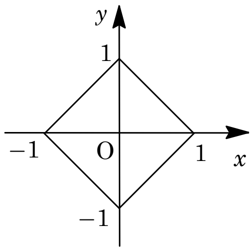
$$-2\sqrt{5}+3\leqq a\leqq 2\sqrt{5}+3$$

(2) $f(x,\ y)=|x|+|y|-1$ とおくと，$f(-x,\ y)=f(x,\ -y)=f(x,\ y)$

これより，図形 $f(x,\ y)=0$ は，x 軸対称かつ y 軸対称である。そこで，$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ において，

$$f(x,\ y)=x+y-1=0\,,\ \ x+y=1$$

対称性を考えると，$f(x,\ y)=0$ を満たす図形は，右図の正方形である。



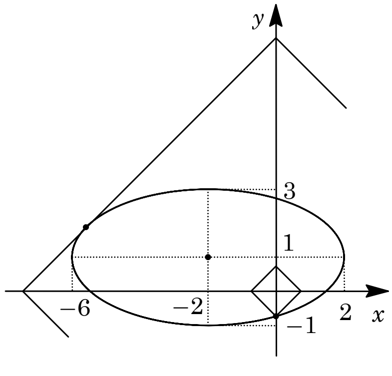
(3) $|x|+|y|=k$ とおくと，(2)から，この図形は 4 点 $(k,\ 0)$，$(0,\ k)$，$(-k,\ 0)$，$(0,\ -k)$ を頂点とする正方形である。

また，楕円①と y 軸との交点は，

$$\frac{(-2)^2}{16}+\frac{(y-1)^2}{4}=1\,,\ \ y=1\pm\sqrt{3}$$

さて，点 $(x,\ y)$ が楕円①上を動くとき，k が最大となるのは，右図より，直線 $y=x+k$ が楕円①に接するときであり，(1)より $k=2\sqrt{5}+3$ である。このとき，⑤より，

$$\sin(\theta+\alpha)=1\,,\ \ \theta+\alpha=\frac{\pi}{2}\,,\ \ \theta=\frac{\pi}{2}-\alpha$$



すると，③④⑥⑦より，$x=-2+4\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=-2+4\sin\alpha=-2-\dfrac{8}{\sqrt{5}}$

$$y=1+2\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=1+2\cos\alpha=1+\frac{2}{\sqrt{5}}$$

また，k が最小となるのは，$(x,\ y)=(0,\ 1-\sqrt{3})$ においてであり，このとき最小値 $k=\left|1-\sqrt{3}\right|=\sqrt{3}-1$ をとる。

コメント

軌跡と最大・最小問題です。解答例では，計算量の軽減ために楕円をパラメータ表示しています。

問　題

座標平面上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ の時刻 t における座標が

$$x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ y(t)=\cos(2t)\quad(0\leqq t<2\pi)$$

で与えられているとし，この点の軌跡を C とする。

(1) P が原点を通るときの速度ベクトルを求めよ。

(2) C が x 軸, y 軸に関して対称であることを示せ。

(3) C の概形を描け。

(4) C が囲む図形の面積を求めよ。 [2004]

解答例

(1) $x(t)=\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$，$y(t)=\cos 2t$ に対して $(x(t),\ y(t))=(0,\ 0)$ とすると，

$$\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=0\ \cdots\cdots\cdots①,\ \cos 2t=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$0\leqq t<2\pi$ なので，①より $t+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$ となり，$t=\frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$

②より $2t=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3}{2}\pi$，$\frac{5}{2}\pi$，$\frac{7}{2}\pi$ となり，$t=\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$

①②をともに満たすのは，$t=\frac{\pi}{4}$，$\frac{5}{4}\pi$ のときである。

さて，速度ベクトル $\vec{v}$ は，$\vec{v}=(x'(t),\ y'(t))=\left(-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right),\ -2\sin 2t\right)$ より，$t=\frac{\pi}{4}$ のとき $\vec{v}=(-1,\ -2)$，$t=\frac{5}{4}\pi$ のとき $\vec{v}=(1,\ -2)$ となる。

(2) $0\leqq t<2\pi$ に対して，$x(\pi+t)=\cos\left(\pi+t+\frac{\pi}{4}\right)=-\cos\left(t+\frac{\pi}{4}\right)=-x(t)$

$$y(\pi+t)=\cos 2(\pi+t)=\cos 2t=y(t)$$

よって，曲線 C の $0\leqq t\leqq\pi$ の部分と，$\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分とは y 軸対称である。

さて，$x(2\pi+t)=x(t)$，$y(2\pi+t)=y(t)$ なので，$0\leqq t\leqq 2\pi$ における曲線 C と $-\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{7}{4}\pi$ における曲線 C とは一致する。

そこで，$-\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{7}{4}\pi$ に対して，$x(t)=\frac{1}{\sqrt{2}}(\cos t-\sin t)$ と変形すると，

$$x\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\frac{1}{\sqrt{2}}\left\{\cos\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)-\sin\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)\right\}=\frac{1}{\sqrt{2}}(-\sin t+\cos t)=x(t)$$

$$y\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\cos 2\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)=\cos(3\pi-2t)=-\cos 2t=-y(t)$$

よって，曲線 C の $-\frac{\pi}{4}\leqq t\leqq\frac{3}{4}\pi$ の部分と，$\frac{3}{4}\pi\leqq t\leqq\frac{7}{4}\pi$ の部分とは x 軸対称である。

(3)　(1)より，

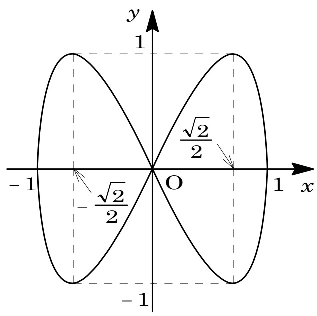
$$x'(t)=-\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$y'(t)=-2\sin 2t$$

曲線 C の $-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ に対する $(x(t),\ y(t))$ の増減は右表のようになる。

t	$-\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$
$x'(t)$	0	$-$		$-$		$-$	
$x(t)$	1	$\searrow$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\searrow$	-1
$y'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$y(t)$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$	0

また(2)より，$\dfrac{3}{4}\pi\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ の部分は，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{3}{4}\pi$ の部分を x 軸対称すると得られるので，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{7}{4}\pi$ すなわち $0\leqq t<2\pi$ における C の概形は次の図のようになる。



(4)　曲線 C の $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ の部分は，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{4}$ に対応する。そこで，C が囲む図形の面積を S とすると，対称性から，

$$S=4\int_0^1 y\,dx=4\int_{\frac{\pi}{4}}^{-\frac{\pi}{4}}-\cos 2t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=4\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\cos 2t\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)dt$$

$$=2\int_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}\left\{\sin\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)-\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right\}dt$$

$$=2\left[-\frac{1}{3}\cos\left(3t+\frac{\pi}{4}\right)+\cos\left(t-\frac{\pi}{4}\right)\right]_{-\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{2}{3}(-1-0)+2(1-0)=\frac{8}{3}$$

コメント

(2)の設問において，y 軸対称はすぐに示せますが，x 軸対称を示すのは一筋縄ではいきません。$x(t)$ を加法定理で展開し，しかも曲線をラフに描いて方針を決めました。

問　題

θを$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$である定数とする。座標平面上で，$a^2>4b$を満たす点$\mathrm{P}(a,\ b)$から放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2$に引いた2つの接線の接点をQ，Rとし，接線PQ，PRの傾きをそれぞれm_1，m_2とおく。点Pは$\angle\mathrm{QPR}=\theta$を満たしている。点Pの全体が作る図形を$G$とする。

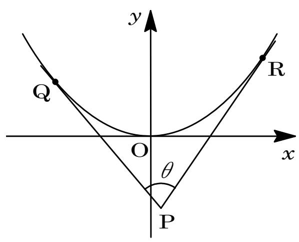
(1)　$m_1<0<m_2$のとき，$\tan\theta$をm_1とm_2で表せ。

(2)　Gを数式で表せ。

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のときGを図示せよ。　[2003]

解答例

(1)　x軸の正の方向からPQ，PRを測った角をそれぞれα，βとおくと，$m_1=\tan\alpha$，$m_2=\tan\beta$となる。



$m_1<0<m_2$より，$\beta<\alpha$となり，

$$\tan\theta=\tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}$$

$$=\frac{m_1-m_2}{1+m_1m_2}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　点$\mathrm{P}(a,\ b)$を通り，傾きmの直線は，

$$y-b=m(x-a),\quad y=mx-ma+b$$

放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2$と接することより，$\dfrac{1}{4}x^2-mx+ma-b=0$

$$D=m^2-4\cdot\frac{1}{4}(ma-b)=0,\quad m^2-am+b=0\cdots\cdots\cdots②$$

$a^2>4b$より，②は2つの実数解をもち，これをm_1，m_2 $(m_1<m_2)$とすると，

$$m_1=\frac{a-\sqrt{a^2-4b}}{2},\quad m_2=\frac{a+\sqrt{a^2-4b}}{2}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$m_1<0<m_2$となるので，①より，$\tan\theta=\dfrac{-\sqrt{a^2-4b}}{1+b}$

$$(1+b)\tan\theta=-\sqrt{a^2-4b}$$

$\tan\theta>0$から，$1+b<0$すなわち$b<-1$のもとで，

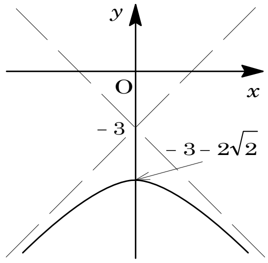
$$(1+b)^2\tan^2\theta=a^2-4b,\quad a^2=(1+b)^2\tan^2\theta+4b$$

よって，$\mathrm{P}(a,\ b)$の作る図形の方程式は，$x^2=(1+y)^2\tan^2\theta+4y$ $(y<-1)$

(3)　$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のとき$\tan\theta=1$より，$x^2=(1+y)^2+4y$

$$x^2-y^2-6y=1,\quad x^2-(y+3)^2=-8$$

$$\frac{x^2}{8}-\frac{(y+3)^2}{8}=-1$$



よって，図形 G は双曲線であり，その 2 本の漸近線は，$x\pm(y+3)=0$ から $y=\pm x-3$ となる。さらに，$y<-1$ より双曲線の下側の枝となり，図示すると，右図のようになる。

コメント

放物線に引いた 2 本の接線の交点が描く軌跡を求める問題です。2 本の接線の位置関係について，チェックが必要です。

問　題

平面上の点 P の x 座標と y 座標が，変数 θ の関数 $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ を用いて，

$$x=f(\theta)\cos\theta,\ \ y=f(\theta)\sin\theta$$

と表されている。θ が $0\leqq\theta\leqq 2\pi$ の範囲で変化したとき，点 P が描く曲線を C とする。点 P を $\mathrm{P}(\theta)$ で表し，$\mathrm{P}_1=\mathrm{P}(0)$，$\mathrm{P}_2=\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$，$\mathrm{P}_3=\mathrm{P}(\pi)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ $(a>0,\ b>0)$ で与えられる楕円が点 P_1 を通るとする。このとき，点 P_3 がこの楕円の内部に含まれる（ただし楕円の上にない）ための必要十分条件を α のみを用いて表せ。

(2) 点 P_2 における曲線 C の接線を l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 次の条件(i)(ii)(iii)をみたす楕円 D を考える。

　(i) D の軸の 1 つは x 軸上にある。

　(ii) D は点 P_1，P_2 を通る。

　(iii) 点 P_2 における D の接線は l である。

　このとき，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれるかどうか判定せよ。　[2002]

解答例

(1) $f(\theta)=\dfrac{(\theta-\pi)^2}{2\pi^2}+\dfrac{1}{2}$ より，$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{5}{8}$，$f(\pi)=\dfrac{1}{2}$

まず，$\mathrm{P}(0)=(f(0),\ 0)=(1,\ 0)$ より，$\mathrm{P}_1(1,\ 0)$ である。

点 P_1 が $\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{(y-\beta)^2}{b^2}=1$ ……①上にあるので，

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2}+\frac{\beta^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots②$$

また，$\mathrm{P}(\pi)=(-f(\pi),\ 0)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ より，$\mathrm{P}_3\left(-\dfrac{1}{2},\ 0\right)$ である。

点 P_3 が①の内部に含まれる条件は，$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+\dfrac{\beta^2}{b^2}<1\ \cdots\cdots③$

②より $\dfrac{\beta^2}{b^2}=1-\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}$ となり，③に代入して，$\dfrac{\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2}{a^2}+1-\dfrac{(1-\alpha)^2}{a^2}<1$

$$\left(-\frac{1}{2}-\alpha\right)^2-(1-\alpha)^2<0,\ \ \frac{1}{2}-2\alpha>0,\ \ \alpha<\frac{1}{4}$$

(2) $\mathrm{P}\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\left(0,\ f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)\right)=\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ より，$\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ である。

また，条件より，$\dfrac{dx}{d\theta}=f'(\theta)\cos\theta-f(\theta)\sin\theta$，$\dfrac{dy}{d\theta}=f'(\theta)\sin\theta+f(\theta)\cos\theta$

さて，$f'(\theta)=\dfrac{\theta-\pi}{\pi^2}$ より $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{1}{2\pi}$ なので，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，

$$\frac{dx}{d\theta}=-\frac{5}{8},\ \frac{dy}{d\theta}=-\frac{1}{2\pi},\ \frac{dy}{dx}=-\frac{1}{2\pi}\cdot\left(-\frac{8}{5}\right)=\frac{4}{5\pi}\cdots\cdots\cdots④$$

よって，点 P_2 における曲線 C の接線は，$y=\dfrac{4}{5\pi}x+\dfrac{5}{8}$

(3)　条件(i)より，楕円 D は，$\dfrac{(x-\alpha)^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots⑤$

条件(ii)より，⑤上に点 P_1，P_2 があるので，

$$\frac{(1-\alpha)^2}{a^2}=1\cdots\cdots⑥,\ \frac{\alpha^2}{a^2}+\frac{25}{64b^2}=1\cdots\cdots⑦$$

また，⑤より $\dfrac{2(x-\alpha)}{a^2}+\dfrac{2y}{b^2}\cdot\dfrac{dy}{dx}=0$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{b^2(x-\alpha)}{a^2y}$ なので，点 $\mathrm{P}_2\left(0,\ \dfrac{5}{8}\right)$ における接線の傾きは，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{8b^2\alpha}{5a^2}$ となる。

条件(iii)より，これが④と一致するので，$\dfrac{8b^2\alpha}{5a^2}=\dfrac{4}{5\pi}$，$a^2=2\pi b^2\alpha\cdots\cdots\cdots⑧$

⑥⑧より，$(1-\alpha)^2=2\pi b^2\alpha\cdots\cdots\cdots⑨$

⑦⑧より，$\dfrac{\alpha}{2\pi b^2}+\dfrac{25}{64b^2}=1$，$b^2=\dfrac{\alpha}{2\pi}+\dfrac{25}{64}\cdots\cdots\cdots⑩$

⑨⑩より，$(1-\alpha)^2=2\pi\alpha\left(\dfrac{\alpha}{2\pi}+\dfrac{25}{64}\right)$，$\left(\dfrac{25}{32}\pi+2\right)\alpha=1$ となり，

$$\alpha=\frac{32}{25\pi+64}<\frac{32}{25\times3+64}=\frac{32}{139}<\frac{32}{128}=\frac{1}{4}$$

よって，(1)より，点 P_3 は楕円 D の内部に含まれる。

コメント

パラメータ曲線や楕円の問題というよりは，連立式の処理問題という感じでした。計算量がたいへん多く，疲れます。

問　題

平面上の点の極座標を，原点 O からの距離 $r(\geqq 0)$ と偏角 θ を用いて $(r,\ \theta)$ で表す。

(1)　平面上の 2 曲線

$$C_1 : r = 2\cos(\pi+\theta),\ C_2 : r = 2(\cos\theta+1)\left(\text{ただし}\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{3\pi}{2}\right)$$

の概形を描き，この 2 曲線 C_1，C_2 の交点の極座標を求めよ。

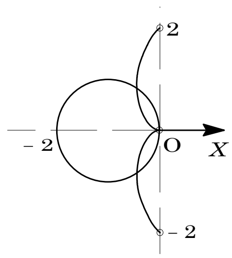
(2)　平面上の 3 点 P_1，P_2，E の極座標をそれぞれ $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$，$(1,\ 0)$ とするとき，三角形 OEP_1 と三角形 $\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}$ とが相似となる点 Q を $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ で表す。点 $\mathrm{P}_1 * \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。ただし，点 Q は $\angle\mathrm{EOP}_1 = \angle\mathrm{P}_2\mathrm{OQ}$ となるように向きも込めて定める。

(3)　3 点 O，P_1，P_2 が同一直線上にないとき，四辺形 $\mathrm{OP}_1\mathrm{RP}_2$ が平行四辺形となるような点 R を $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ で表す。P_1，P_2 の極座標が $(r_1,\ \theta_1)$，$(r_2,\ \theta_2)$ で $r_1 = r_2 = r$ のとき，点 $\mathrm{P}_1 \circ \mathrm{P}_2$ の極座標を求めよ。

(4)　さらに，平面上の点 P の極座標を $(r,\ \theta)$ として，実数 k に対し点 $k\mathrm{P}$ を，$k\geqq 0$ のときは極座標が $(kr,\ \theta)$ となる点，$k<0$ のときは極座標が $(|k|r,\ \theta+\pi)$ となる点とする。(1)で求めた 2 曲線 C_1，C_2 の交点を V として，点 $k(\mathrm{V}\circ(\mathrm{V}*\mathrm{V}))$ が曲線 C_1 上にあるための k の条件を求めよ。　[2000]

解答例

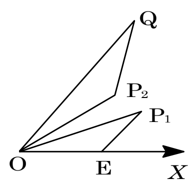
(1)　C_1 は $r = 2\cos(\pi+\theta) = -2\cos\theta$ ……①より，原点と点 $(2,\ \pi)$ を直径の両端とする円となる。ただし，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ より原点を除く。



また，C_2 は $r = 2(\cos\theta+1)$ ……②よりカージオイドを表し，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ よりその一部分となる。なお，両端の 2 点 $\left(2,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，$\left(2,\ \dfrac{3\pi}{2}\right)$ は除く。

さらに，C_1，C_2 の交点は，①②より $-2\cos\theta = 2(\cos\theta+1)$ から，$\cos\theta = -\dfrac{1}{2}$

よって，$\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{3\pi}{2}$ より $\theta = \dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{4\pi}{3}$ となり，①より $r = -2\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right) = 1$ となるので，交点は $\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$\left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)$ である。



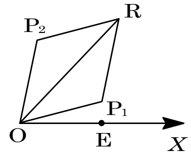
(2)　$\triangle\mathrm{OEP}_1 \backsim \triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{Q}$ より，$\mathrm{OP}_1 : \mathrm{OQ} = \mathrm{OE} : \mathrm{OP}_2$

$$\mathrm{OQ} = \frac{\mathrm{OP}_1\cdot\mathrm{OP}_2}{\mathrm{OE}} = r_1 r_2$$

また，$\angle\mathrm{EOP}_1 = \angle\mathrm{P}_2\mathrm{OQ}$ より，$\angle\mathrm{EOQ} = \theta_1+\theta_2$

よって，点 Q すなわち $P_1 * P_2$ の座標は，$(r_1 r_2,\ \theta_1 + \theta_2)$

(3)　$OP_1 = OP_2$ より，平行四辺形 OP_1RP_2 はひし形となる。



OR は $\angle P_1OP_2$ の二等分線となり，$\angle EOR = \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}$

$$OR = 2OP_1 \cos\angle P_1OR = 2r\cos\frac{\theta_2 - \theta_1}{2}$$

よって，点 R すなわち $P_1 \circ P_2$ の座標は，$\left(2r\cos\dfrac{\theta_2 - \theta_1}{2},\ \dfrac{\theta_1 + \theta_2}{2}\right)$

(4)　まず，$V\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$ のとき，点 $V*V$ は $\left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)$，$V\circ(V*V)$ は $\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right)$ より $(1,\ \pi)$ となる。また，$V\left(1,\ \dfrac{4\pi}{3}\right)$ のとき，点 $V*V$ は $\left(1,\ \dfrac{8\pi}{3}\right)$ すなわち $\left(1,\ \dfrac{2\pi}{3}\right)$，$V\circ(V*V)$ は $\left(2\cos\dfrac{\pi}{3},\ \pi\right)$ より $(1,\ \pi)$ となる。

すると，いずれの場合も $V\circ(V*V)$ は $(1,\ \pi)$ となり，点 $k(V\circ(V*V))$ の偏角は，$k \geqq 0$ のとき π, $k < 0$ のとき 2π である。

よって，この点が曲線 C_1 上にある条件は, (1)より $k = 2$ である。

コメント

(1)の曲線を描くときの説明は，この程度でよいのかどうか迷います。

問　題

(1)　平面上に半径が R, r（$R>r$）の 2 円があり，それらの中心間の距離が l であるとする。これらの 2 円の円周が共有点をもつための必要十分条件を R, r, l を用いて表せ。

(2)　座標平面上で x 軸を準線とし，定点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通る放物線について考える。ただし，$a>0$ とする。

①　そのような放物線の焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ の全体はどのような図形を描くか。

②　x 軸上にない点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ がそのような放物線上の点であるための必要十分条件を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　2 円が共有点をもつ条件は，中心間距離が半径の差以上，半径の和以下より，

$$R-r\leqq l\leqq R+r$$

(2)　放物線は，準線が x 軸で y 軸と正の部分で交わることより x 軸の上方にあり，焦点 $\mathrm{F}(s,\ t)$ から頂点 $\left(s,\ \dfrac{t}{2}\right)$ で，頂点と焦点の距離が $\dfrac{t}{2}$ から，その方程式は，

$$(x-s)^2=4\cdot\frac{t}{2}\left(y-\frac{t}{2}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を通るので，$s^2=2t\left(a-\dfrac{t}{2}\right)$，$s^2+(t-a)^2=a^2\cdots\cdots\cdots②$

②から，点 F は中心 $(0,\ a)$，半径 a の円を描く。ただし，$t>0$ より原点を除く。

さて，①が点 $\mathrm{P}(p,\ q)$（$q>0$）を通るとき，$(p-s)^2=4\cdot\dfrac{t}{2}\left(q-\dfrac{t}{2}\right)$ から，

$$(s-p)^2+(t-q)^2=q^2\cdots\cdots\cdots③$$

②は，$s^2+(t-a)^2=a^2$（$t\neq 0$）$\cdots\cdots\cdots④$

ここで，③と④をともにみたす $(s,\ t)$ が存在する p, q の関係が求める条件なので，(1)の結果から，

(i)　$p\neq 0$ のとき　$|q-a|\leqq\sqrt{p^2+(q-a)^2}\leqq q+a$ より，

$$(q-a)^2\leqq p^2+(q-a)^2\leqq(q+a)^2$$

左側の不等式はつねに成立するので，右側の不等式を変形して，

$$p^2-4aq\leqq 0,\ \ q\geqq\frac{1}{4a}p^2$$

(ii)　$p=0$ のとき　③は $s^2+(t-q)^2=q^2$ となり，求める条件は $q=a$

(i)(ii)より，$q\geqq\dfrac{1}{4a}p^2$（$p\neq 0$），$q=a$（$p=0$）

コメント

(2)の設問は，一見(1)とは無関係と見えるものの，実はそうではありません。

問　題

座標平面上の曲線C_1，C_2をそれぞれ

$$C_1 : y=\log x\ (x>0),\ C_2 : y=(x-1)(x-a)$$

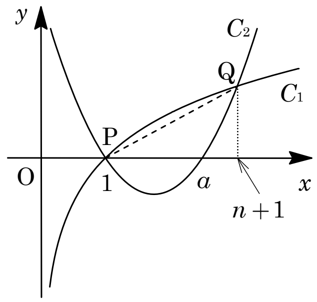
とする。ただし, aは実数である。nを自然数とするとき，曲線C_1，C_2が 2 点 P, Q で交わり, P, Q のx座標はそれぞれ 1，$n+1$となっている。また，曲線C_1と直線 PQ で囲まれた領域の面積をS_n，曲線C_2と直線 PQ で囲まれた領域の面積をT_nとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) aをnの式で表し，$a>1$を示せ。

(2) S_nとT_nをそれぞれnの式で表せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n}$を求めよ。 [2016]

解答例



(1) $C_1 : y=\log x$ と $C_2 : y=(x-1)(x-a)$ が，P(1, 0)，Q$(n+1,\ \log(n+1))$ (nは自然数)で交わっているので，

$$\log(n+1)=(n+1-1)(n+1-a)$$

$$a=n+1-\frac{\log(n+1)}{n}$$

ここで，$a-1=n-\dfrac{\log(n+1)}{n}=\dfrac{1}{n}\{n^2-\log(n+1)\}$

となり，$x\geqq1$において，$f(x)=x^2-\log(x+1)$とおくと，

$$f'(x)=2x-\frac{1}{x+1}=\frac{2x(x+1)-1}{x+1}>0$$

これより，$f(x)\geqq f(1)=1-\log2>0$なので，$a-1>0$より$a>1$である。

(2) 曲線C_1と直線 PQ で囲まれた領域の面積S_nは,

$$S_n=\int_1^{n+1}\log x\,dx-\frac{1}{2}(n+1-1)\log(n+1)$$

$$=\big[\,x\log x\,\big]_1^{n+1}-\int_1^{n+1}dx-\frac{1}{2}n\log(n+1)$$

$$=(n+1)\log(n+1)-(n+1-1)-\frac{1}{2}n\log(n+1)=\frac{n+2}{2}\log(n+1)-n$$

また，曲線C_2と直線 PQ で囲まれた領域の面積T_nは，PQ : $y=px+q$とおくと，

$$T_n=\int_1^{n+1}\{px+q-(x-1)(x-a)\}dx=-\int_1^{n+1}(x-1)(x-n-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(n+1-1)^3=\frac{n^3}{6}$$

(3) $\dfrac{S_n}{n\log T_n}=\dfrac{\dfrac{n+2}{2}\log(n+1)-n}{n\log\dfrac{n^3}{6}}=\dfrac{n+2}{2n}\cdot\dfrac{\log(n+1)}{3\log n-\log 6}-\dfrac{1}{3\log n-\log 6}$

ここで，$\dfrac{\log(n+1)}{3\log n-\log 6}=\dfrac{\log(n+1)}{\log n}\left(3-\dfrac{\log 6}{\log n}\right)^{-1}$ と変形して，

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(n+1)}{\log n}-1\right\}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\dfrac{n+1}{n}}{\log n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log\left(1+\dfrac{1}{n}\right)}{\log n}=0$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n\log T_n}=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 3^{-1}-0=\frac{1}{6}$ である。

コメント

面積計算および極限に関する基本的な問題です。(3)の $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(n+1)}{\log n}=1$ については，n が大きくなると $\log(n+1)\fallingdotseq\log n$ という感覚からです。

問　題

p と q はともに整数であるとする。2 次方程式 $x^2+px+q=0$ が実数解 α，β をもち，条件 $(|\alpha|-1)(|\beta|-1)\neq 0$ を満たしているとする。このとき，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_n=(\alpha^n-1)(\beta^n-1)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

によって定義する。以下の問いに答えよ。

(1)　a_1，a_2，a_3 は整数であることを示せ。

(2)　$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ のとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ は整数であることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるとき，p と q の値をすべて求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。　[2012]

解答例

(1)　$x^2+px+q=0$ が実数解 α，β をもつので，$\alpha+\beta=-p$，$\alpha\beta=q$ ………(＊)

$$a_1=(\alpha-1)(\beta-1)=\alpha\beta-(\alpha+\beta)+1=p+q+1$$
$$a_2=(\alpha^2-1)(\beta^2-1)=\alpha^2\beta^2-(\alpha^2+\beta^2)+1$$
$$=(\alpha\beta)^2-(\alpha+\beta)^2+2\alpha\beta+1=-p^2+q^2+2q+1$$
$$a_3=(\alpha^3-1)(\beta^3-1)=\alpha^3\beta^3-(\alpha^3+\beta^3)+1$$
$$=(\alpha\beta)^3-(\alpha+\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha+\beta)+1=p^3+q^3-3pq+1$$

すると, p, q がともに整数なので，a_1，a_2，a_3 はすべて整数である。

(2)　$I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ とおくと，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)>0$ の場合,

(i)　$|\alpha|<1$ かつ $|\beta|<1$ のとき

$$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=\frac{1}{1}=1$$

(ii)　$|\alpha|>1$ かつ $|\beta|>1$ のとき

$$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\alpha+\frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}\right|\left|\beta+\frac{\beta-1}{\beta^n-1}\right|=|\alpha\beta|=|q|$$

(i)(ii)より, I はいずれのときも整数である。

(3)　$I=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となるのは, (2)より，$(|\alpha|-1)(|\beta|-1)<0$ のときである。

ここで，α，β についての対称性より，$|\alpha|>1$ かつ $|\beta|<1$ のときだけ考えても，一般性を失わないので,

$$I=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{(\alpha^{n+1}-1)(\beta^{n+1}-1)}{(\alpha^n-1)(\beta^n-1)}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\alpha+\frac{\alpha-1}{\alpha^n-1}\right|\left|\frac{\beta^{n+1}-1}{\beta^n-1}\right|=|\alpha|\cdot 1=|\alpha|$$

すると，$|\alpha|=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ より，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$

整数係数の 2 次方程式の実数解が α，β なので，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ のとき $\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$ となり，(∗)から，$p=-1$，$q=-1$ である。

また，$\alpha=\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}$ のとき $\beta=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となり，(∗)から，$p=1$，$q=-1$ である。

以上より，$(p,\ q)=(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$

コメント

難問風の装いですが，(2)の誘導で(3)はスムーズに流れます。ただ，問題文から推測すると，後半をもう少し丁寧に記した方がよかったかもしれません。また，(1)は，最初，次数下げを考えましたが，結局，普通の方法で……。

問　題

xy 平面上に曲線 $y=\dfrac{1}{x^2}$ を描き，この曲線の第 1 象限内の部分を C_1，第 2 象限内の部分を C_2 と呼ぶ。C_1 上の点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ から C_2 に向けて接線を引き，C_2 との接点を Q_1 とする。次に点 Q_1 から C_1 に向けて接線を引き，C_1 との接点を P_2 とする。次に点 P_2 から C_2 に向けて接線を引き，接点を Q_2 とする。以下同様に続けて，C_1 上の点列 P_n と C_2 上の点列 Q_n を定める。このとき，次の問いに答えよ。

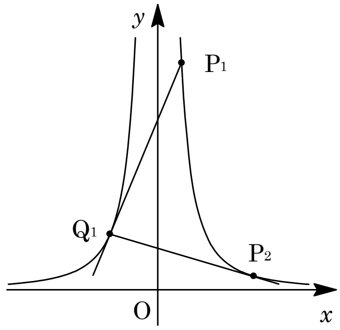
(1)　点 Q_1 の座標を求めよ。

(2)　三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 を求めよ。

(3)　三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ の面積 S_n を求めよ。

(4)　級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} S_n$ の和を求めよ。　[2010]

解答例



(1)　$y=\dfrac{1}{x^2}$ に対して，$y'=-\dfrac{2}{x^3}$ となり，点 $\mathrm{Q}_1\left(b,\ \dfrac{1}{b^2}\right)$ における接線の方程式は，$y=-\dfrac{2}{b^3}x+\dfrac{3}{b^2}$

点 $\mathrm{P}_1\left(a,\ \dfrac{1}{a^2}\right)$ を通ることより，$\dfrac{1}{a^2}=-\dfrac{2}{b^3}a+\dfrac{3}{b^2}$

$b^3-3a^2b+2a^3=0$，$(b-a)^2(b+2a)=0$

$b\neq a$ より，$b=-2a$ となり，$\mathrm{Q}_1\left(-2a,\ \dfrac{1}{4a^2}\right)$ となる。

(2)　(1)と同様にすると，P_2 は x 座標が $(-2)^2a=4a$ から，$\mathrm{P}_2\left(4a,\ \dfrac{1}{16a^2}\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=\left(-3a,\ -\frac{3}{4a^2}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}=\left(3a,\ -\frac{15}{16a^2}\right)$$

すると，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ の面積 S_1 は,

$$S_1=\frac{1}{2}\left|(-3a)\left(-\frac{15}{16a^2}\right)-\left(-\frac{3}{4a^2}\right)\cdot 3a\right|=\frac{1}{2}\left|\frac{45}{16a}+\frac{9}{4a}\right|=\frac{81}{32a}$$

(3)　$\mathrm{P}_n\left(a_n,\ \dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$，$\mathrm{Q}_n\left(b_n,\ \dfrac{1}{{b_n}^2}\right)$ とおくと, (1)と同様にして,

$$a_n=4^{n-1}a_1=4^{n-1}a,\ b_n=4^{n-1}b_1=4^{n-1}\cdot(-2a)=-2\cdot 4^{n-1}a$$

(2)の結果を用いると，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積 S_n は，$S_n=\dfrac{81}{32(4^{n-1}a)}=\dfrac{81}{2a}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n+1}$

(4)　等比数列 $\{S_n\}$ の公比は $\dfrac{1}{4}$ より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ は収束し，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{81}{32a}\Big/\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{27}{8a}$

コメント

無限等比級数の応用問題です。計算量を減少させることがポイントです。

問　題

$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx$ とおく。ただし，$0!=1$ とする。

(1)　I_0 の値を求め，$n=1,\ 2,\ \cdots$ のとき I_n と I_{n-1} の関係式を求めよ。また，これらを用いて I_3 の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ であることを利用して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(3)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}$ を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$I_0=\dfrac{(-1)^0}{0!}\displaystyle\int_0^2 x^0 e^x dx=\int_0^2 e^x dx=\Big[e^x\Big]_0^2=e^2-1$

また，$I_n=\dfrac{(-1)^n}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx=\frac{(-1)^n}{n!}\left\{\Big[x^n e^x\Big]_0^2-\int_0^2 nx^{n-1}e^x dx\right\}$

$$=\frac{(-1)^n}{n!}2^n e^2-\frac{(-1)^n}{(n-1)!}\int_0^2 x^{n-1}e^x dx=\frac{(-1)^n 2^n e^2}{n!}+I_{n-1}$$

すると，$I_1=\dfrac{-2e^2}{1!}+(e^2-1)=-e^2-1$，$I_2=\dfrac{4e^2}{2!}+(-e^2-1)=e^2-1$ より，

$$I_3=\frac{-8e^2}{3!}+(e^2-1)=-\frac{1}{3}e^2-1$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2$ に対して $e^x\leqq e^2$ より，

$$\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^x dx\leqq\frac{1}{n!}\int_0^2 x^n e^2 dx=\frac{e^2}{n!}\left[\frac{x^{n+1}}{n+1}\right]_0^2=\frac{2^{n+1}e^2}{(n+1)!}$$

ここで, $n\geqq 2$ のとき,

$$\frac{2^{n+1}}{(n+1)!}=\frac{2^2}{1\cdot 2}\cdot\frac{2^{n-1}}{3\cdot 4\cdot 5\cdot\cdots\cdot(n+1)}\leqq 2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$n=1$ のときも $\dfrac{2^2}{2!}=2\left(\dfrac{2}{3}\right)^0$ となり, $(*)$は成立している。

よって，$\dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx\leqq 2e^2\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$

(3)　(1)から，$I_n-I_{n-1}=\dfrac{(-1)^n 2^n e^2}{n!}$ より，$\dfrac{(-1)^n 2^n}{n!}=\dfrac{1}{e^2}(I_n-I_{n-1})$　$(n\geqq 1)$

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}=\frac{1}{e^2}\sum_{k=1}^{n}(I_k-I_{k-1})=\frac{1}{e^2}(I_n-I_0)=\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!}=1+\frac{1}{e^2}(I_n-e^2+1)=\frac{1}{e^2}(I_n+1)$

さて, (2)より, $|I_n| = \dfrac{1}{n!}\displaystyle\int_0^2 x^n e^x dx \leqq 2e^2\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$

$n\to\infty$のとき, $|I_n|\to 0$ より $\displaystyle\lim_{n\to\infty} I_n = 0$ となり,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\frac{(-1)^k 2^k}{k!} = \frac{1}{e^2}$$

コメント

(3)が本題ですが, それを解くのに無理が生じないように, (1)と(2)が設けられています。配慮の深い問題です。

問　題

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。格子点を頂点とし，辺の長さが 1 である正方形（周は含まない）を単位正方形と呼ぶことにする。p，n を自然数とし，領域 $D_n=\{(x,\ y)\,|\,0\leqq x,\ x^p\leqq y\leqq n\}$ を考え，その面積を S_n とする。L_n と M_n を，それぞれ D_n に含まれる格子点の個数および単位正方形の個数とする。

(1)　グラフ $y=x^p\ (0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}})$ と交わる単位正方形の個数は n であることを示せ。

(2)　不等式 $M_n<S_n<M_n+n$ を示せ。また，面積 S_n を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n$ を求めよ。　[2003]

解答例

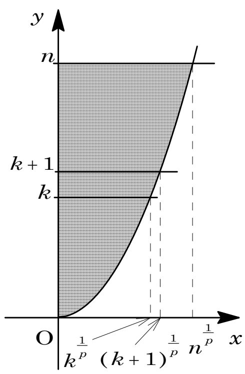
(1)　まず，二項定理より，$0\leqq k\leqq n-1$，p を自然数として，

$$(k^{\frac{1}{p}}+1)^p\geqq k+1,\ k^{\frac{1}{p}}+1\geqq(k+1)^{\frac{1}{p}}$$

$$(k+1)^{\frac{1}{p}}-k^{\frac{1}{p}}\leqq 1$$

なお，等号は $p=1$ または $k=0$ のときに成立する。

これより，$k\leqq y\leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと交わる単位正方形は，ただ 1 つとなる。したがって，$0\leqq x\leqq n^{\frac{1}{p}}$ すなわち $0\leqq y\leqq n$ のとき，$y=x^p$ と交わる単位正方形の個数は n である。



(2)　$k\leqq y\leqq k+1$ において，$y=x^p$ のグラフと y 軸にはさまれた部分の面積を $S_{n,\,k}$，この部分にあり，$y=x^p$ と交わらない単位正方形の個数を $M_{n,\,k}$ とすると，

$$1\times M_{n,\,k}<S_{n,\,k}<1\times(M_{n,\,k}+1),\ \sum_{k=0}^{n-1}M_{n,\,k}<\sum_{k=0}^{n-1}S_{n,\,k}<\sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,\,k}+1)$$

条件より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}S_{n,\,k}=S_n$，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}M_{n,\,k}=M_n$ なので，$M_n<S_n<M_n+n$ である。

また，$\displaystyle S_n=n^{\frac{1}{p}}\cdot n-\int_0^{n^{\frac{1}{p}}}x^p dx=n^{\frac{1}{p}+1}-\frac{1}{p+1}\Big[x^{p+1}\Big]_0^{n^{\frac{1}{p}}}=n^{\frac{1}{p}+1}-\frac{1}{p+1}n^{\frac{1}{p}+1}$

$$=\Big(1-\frac{1}{p+1}\Big)n^{\frac{p+1}{p}}=\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}$$

(3)　$y=k$ 上の格子点の個数は $M_{n,\,k}+1$，$y=n$ 上の格子点の個数は $[\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1$ より，

$$L_n=\sum_{k=0}^{n-1}(M_{n,\,k}+1)+[\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1=M_n+n+[\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1$$

(2)より，$S_n-n<M_n<S_n$ なので，$S_n+[\,n^{\frac{1}{p}}\,]+1<L_n<S_n+[\,n^{\frac{1}{p}}\,]+n+1$

さらに，$n^{\frac{1}{p}}-1<[\,n^{\frac{1}{p}}\,]\leqq n^{\frac{1}{p}}$ より，$S_n+n^{\frac{1}{p}}<L_n<S_n+n^{\frac{1}{p}}+n+1$

$$\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}+n^{\frac{1}{p}}<L_n<\frac{p}{p+1}n^{\frac{p+1}{p}}+n^{\frac{1}{p}}+n+1$$

$$\frac{p}{p+1}+n^{-1}<n^{-\frac{p+1}{p}}L_n<\frac{p}{p+1}+n^{-1}+n^{-\frac{1}{p}}+n^{-\frac{p+1}{p}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^{-\frac{p+1}{p}}L_n=\frac{p}{p+1}$ である。

コメント

S_n，M_n，L_n の 3 者がうまく連関するように誘導がつけられています。

問　題

m を 2 以上の自然数, e を自然対数の底とする。

(1)　方程式 $xe^x - me^x + m = 0$ を満たす正の実数 x の値はただ 1 つであることを示せ。またその値を c とするとき，$m-1 < c < m$ となることを示せ。

(2)　$x > 0$ の範囲で $f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ は $x = c$ で最小となることを示せ。

(3)　a_m を(2)で求められる $f(x)$ の最小値とするとき，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m}$ を求めよ。

[1999]

解答例

(1)　$g(x) = xe^x - me^x + m$ とおくと，$g'(x) = e^x + xe^x - me^x = (x+1-m)e^x$

$m \geqq 2$ より，$m-1 \geqq 1$ となるので，$g(x)$ の増減は下表のようになる。

よって，$g(x) = 0$ は $x > 0$ でただ 1 つの実数解をもつ。

x	0	$\cdots$	$m-1$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	0	$\searrow$		$\nearrow$	∞

また，$g(m-1) < g(0) = 0$

$$g(m) = me^m - me^m + m = m > 0$$

以上より，$g(x) = 0$ の解 $x = c$ は $m-1 < c < m$ の範囲にある。

(2)　$f(x) = \dfrac{e^x - 1}{x^m}$ を微分して，

$$f'(x) = \frac{e^x x^m - (e^x - 1)mx^{m-1}}{x^{2m}}$$

$$= \frac{xe^x - me^x + m}{x^{m+1}} = \frac{g(x)}{x^{m+1}}$$

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$f(x)$ は $x = c$ で極小かつ最小となる。

(3)　(2)より，$a_m = \dfrac{e^c - 1}{c^m}$　$(1 \leqq m-1 < c < m)$

すると，$\log a_m = \log(e^c - 1) - m\log c < \log(e^m - 1) - m\log(m-1)$

$$\log(e^m - 1) = \log e^m\left(1 - \frac{1}{e^m}\right) = m + \log\left(1 - \frac{1}{e^m}\right)$$

$$m\log(m-1) = m\log m\left(1 - \frac{1}{m}\right) = m\log m + m\log\left(1 - \frac{1}{m}\right)$$

よって，$\dfrac{\log a_m}{m\log m} < \dfrac{1}{\log m} + \dfrac{\log\left(1 - \frac{1}{e^m}\right)}{m\log m} - 1 - \dfrac{\log\left(1 - \frac{1}{m}\right)}{\log m} \to -1$　$(m \to \infty)$

また，$\log a_m = \log(e^c - 1) - m\log c > \log(e^{m-1} - 1) - m\log m$

$$\log(e^{m-1} - 1) = \log e^{m-1}\left(1 - \frac{1}{e^{m-1}}\right) = m - 1 + \log\left(1 - \frac{1}{e^{m-1}}\right)$$

よって，$\dfrac{\log a_m}{m\log m} > \dfrac{1}{\log m} - \dfrac{1}{m\log m} + \dfrac{\log\left(1-\dfrac{1}{e^{m-1}}\right)}{m\log m} - 1 \to -1 \quad (m\to\infty)$

以上より，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{\log a_m}{m\log m} = -1$

コメント

(3)の極限値は，大雑把に考えると -1 になることはつかめますが，はさみうちの原理を使ってきちんと求めようとすると，時間がかかってしまいます。

問　題

関数 $f(x)=1-x^2$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(a)=a$ を満たす正の実数 a を求めよ。

(2)　a を(1)で求めた実数とする。$x \geqq \dfrac{1}{2}$ ならば，$|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$ となることを示せ。

(3)　a を(1)で求めた実数とする。$\dfrac{1}{2} \leqq x_1 \leqq 1$ として，

$$x_{n+1}=f(x_n)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で決まる数列 $\{x_n\}$ を考える。すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つならば，$x_1=a$ であることを示せ。　[1999]

解答例

(1)　$f(a)=a$ より，$1-a^2=a$，$a^2+a-1=0$ となり，$a>0$ から，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(2)　$|f(x)-f(a)|=|1-x^2-(1-a^2)|=|-(x+a)(x-a)|=|x+a||x-a|$

ここで条件より，$|x+a| \geqq \left|\dfrac{1}{2}+\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\right|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$

よって，$|f(x)-f(a)| \geqq \dfrac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$

(3)　$x_{n+1}=f(x_n)$，$a=f(a)$ なので，$x_n \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき(2)より，

$$|x_{n+1}-a|=|f(x)-f(a)| \geqq \frac{\sqrt{5}}{2}|x-a|$$

よって，$|x_n-a| \geqq |x_1-a|\left(\dfrac{\sqrt{5}}{2}\right)^{n-1}$

(i)　$x_1-a \neq 0$ のとき

$n \to \infty$ のとき $|x_n-a| \to \infty$ となるので，すべての n に対しては $x_n \leqq 1$ が成立しない。

(ii)　$x_1-a=0$ のとき

$a=f(a)$ なので，すべての n に対して $x_n=a$ となる。

(1)より，$\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ なので，すべての n に対して $\dfrac{1}{2} \leqq x_n \leqq 1$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x_1=a$ の場合のみ題意が成立する。

コメント

(2)の不等式は，(3)で定義された数列の発散条件に対応することがわかります。これを(3)の題意に結びつけることがポイントです。

問　題

2 以上の自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)$ と定義する。$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1$ に対して，$f_n(x)$ が区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ でただ 1 つの極値をとることを証明せよ。 [2014]

解答例

n を 2 以上の自然数として，n 次関数 $f_n(x)$ に対して，

$$f_n(x)=(x-1)(2x-1)\cdots(nx-1)=n!(x-1)\left(x-\frac{1}{2}\right)\cdots\left(x-\frac{1}{n}\right)$$

すると，$f_n(1)=f_n\left(\dfrac{1}{2}\right)=\cdots=f_n\left(\dfrac{1}{n}\right)=0$ となり，平均値の定理より，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c が各区間 $\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$，$\cdots$，$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<x<1$ において，少なくとも 1 つずつ存在する。

また，$f_n{}'(x)$ は $n-1$ 次関数より，方程式 $f_n{}'(x)=0$ の実数解は，高々 $n-1$ 個である。

よって，$f_n{}'(c)=0$ を満たす c は，各区間 $\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$，$\cdots$，$\dfrac{1}{3}<x<\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<x<1$ において，1 つずつ存在することになる。

この c を $c=c_1$，c_2，$\cdots$，c_{n-1} $\left(\dfrac{1}{n}<c_{n-1}<\dfrac{1}{n-1},\ \cdots,\ \dfrac{1}{3}<c_2<\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}<c_1<1\right)$ とおくと，$f_n{}'(x)$ の $n-1$ 次の係数は $n\cdot n!$ から，

$$f_n{}'(x)=n\cdot n!(x-c_1)(x-c_2)\cdots(x-c_{n-1})$$

これより，$f_n{}'(x)$ の符号は $x=c_k$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ の前後で変化する。

以上より，$f_n(x)$ は，区間 $\dfrac{1}{k+1}<x<\dfrac{1}{k}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ でただ 1 つの極値をとる。

コメント

小問に分かれていない九大では珍しいタイプです。グラフを対応させると，感覚的にはわかりますが，証明となると書きにくく，隔靴掻痒の感があります。

問　題

$a>1$ とし，2 つの曲線

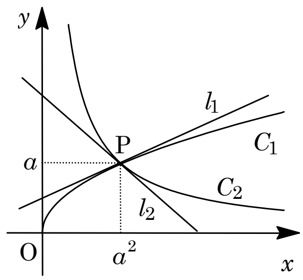
$$y=\sqrt{x}\quad(x\geqq 0),\quad y=\frac{a^3}{x}\quad(x>0)$$

を順に C_1，C_2 とする。また，C_1 と C_2 の交点 P における C_1 の接線を l_1 とする。以下の問いに答えよ。

(1) 曲線 C_1 と y 軸および直線 l_1 で囲まれた部分の面積を a を用いて表せ。

(2) 点 P における C_2 の接線と直線 l_1 のなす角を $\theta(a)$ とする $\left(0<\theta(a)<\frac{\pi}{2}\right)$。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}a\sin\theta(a)$ を求めよ。 [2013]

解答例



(1) $C_1: y=\sqrt{x}$ ……①と $C_2: y=\dfrac{a^3}{x}$ ……②を連立すると，

$$\sqrt{x}=\frac{a^3}{x},\quad x^{\frac{3}{2}}=a^3$$

これより，$x=a^2$，$y=a$ より，$\mathrm{P}(a^2,\ a)$

さて，①より，$y'=\dfrac{1}{2\sqrt{x}}$ となり，点 P における C_1 の接線 l_1 は，$x=a^2$ のとき $y'=\dfrac{1}{2a}$ から，

$$y-a=\frac{1}{2a}(x-a^2),\quad y=\frac{1}{2a}x+\frac{a}{2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，C_1 と y 軸および l_1 で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\Big(\frac{a}{2}+a\Big)a^2-\int_0^{a^2}\sqrt{x}\,dx=\frac{3}{4}a^3-\frac{2}{3}\Big[\,x^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^{a^2}=\frac{3}{4}a^3-\frac{2}{3}a^3=\frac{1}{12}a^3$$

(2) ②より，$y'=-\dfrac{a^3}{x^2}$ より，点 P における C_2 の接線 l_2 の傾きは，$y'=-\dfrac{a^3}{a^4}=-\dfrac{1}{a}$

ここで，x 軸の正の部分と l_1，l_2 のなす角をそれぞれ α，β とすると，

$$\tan\alpha=\frac{1}{2a},\quad \tan\beta=-\frac{1}{a},\quad \tan(\alpha-\beta)=\frac{\tan\alpha-\tan\beta}{1+\tan\alpha\tan\beta}=\frac{3a}{2a^2-1}$$

$a>1$ より $\tan(\alpha-\beta)>0$ となり，$\theta(a)=\alpha-\beta$ から $\tan\theta(a)=\dfrac{3a}{2a^2-1}$

さて，$a\to\infty$ のとき，$\tan\theta(a)\to 0$ から $\theta(a)\to 0$ となり，$\cos\theta(a)\to 1$ より，

$$\lim_{a\to\infty}a\sin\theta(a)=\lim_{a\to\infty}a\tan\theta(a)\cos\theta(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{3a^2}{2a^2-1}\cos\theta(a)=\frac{3}{2}\cdot 1=\frac{3}{2}$$

コメント

2 直線のなす角の扱いとしては，ここでは tan の加法定理の適用が妥当でしょう。

問　題

実数 a と自然数 n に対して，x の方程式

$$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　この方程式が実数解をもつような a の範囲を，n を用いて表せ。

(2)　この方程式が，すべての自然数 n に対して実数解をもつような a の範囲を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$a(x^2+|x+1|+n-1)=\sqrt{n}(x+1)$ ……①に対して，$t=x+1$ とおくと，

$$a\{(t-1)^2+|t|+n-1\}=\sqrt{n}t,\ \ a(t^2-2t+|t|+n)=\sqrt{n}t\ \cdots\cdots②$$

(i)　$a=0$ のとき　①は実数解 $x=-1$ をもつ。

(ii)　$a\neq0$ のとき　①が実数解をもつ条件は，②が実数解をもつ条件に等しい。

②より，$t^2-2t+|t|+n=\dfrac{\sqrt{n}}{a}t$ ………③

③は，$t=0$ を解としてもたないので，$t>0$ のとき，

$$t^2-t+n=\frac{\sqrt{n}}{a}t,\ \ t-1+\frac{n}{t}=\frac{\sqrt{n}}{a}$$

ここで，$f_1(t)=t-1+\dfrac{n}{t}$　$(t>0)$ とおくと，

$$f_1'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	0	$\cdots$	$\sqrt{n}$	$\cdots$
$f_1'(t)$		$-$	0	$+$
$f_1(t)$	∞	$\searrow$	$2\sqrt{n}-1$	$\nearrow$

また，$t<0$ のとき，③は，$t-3+\dfrac{n}{t}=\dfrac{\sqrt{n}}{a}$

$f_2(t)=t-3+\dfrac{n}{t}$　$(t<0)$ とおくと，

$$f_2'(t)=1-\frac{n}{t^2}=\frac{t^2-n}{t^2}$$

t	$\cdots$	$-\sqrt{n}$	$\cdots$	0
$f_2'(t)$	$+$	0	$-$	
$f_2(t)$	$\nearrow$	$-2\sqrt{n}-3$	$\searrow$	$-\infty$

したがって，③が実数解をもつのは，

$$\frac{\sqrt{n}}{a}\geqq2\sqrt{n}-1\ \cdots\cdots④,\ \ \frac{\sqrt{n}}{a}\leqq-2\sqrt{n}-3\ \cdots\cdots⑤$$

④より，$a>0$ のもとで $a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$，⑤より，$a<0$ のもとで $a\geqq-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}$

(i)(ii)より，①が実数解をもつ a の範囲は，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3}\leqq a\leqq\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1}$ ………⑥

(2)　$n \geqq 1$ のとき $0 < \dfrac{1}{\sqrt{n}} \leqq 1$ となり，$-\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} = -\dfrac{1}{2+\dfrac{3}{\sqrt{n}}}$，$\dfrac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1} = \dfrac{1}{2-\dfrac{1}{\sqrt{n}}}$ から，

$$-\frac{1}{2} < -\frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}+3} \leqq -\frac{1}{5},\quad \frac{1}{2} < \frac{\sqrt{n}}{2\sqrt{n}-1} \leqq 1$$

よって，⑥がすべての自然数 n に対して成立する条件は，$-\dfrac{1}{5} \leqq a \leqq \dfrac{1}{2}$ となる。

コメント

与えられた方程式を定数分離して，グラフをイメージして解いています。その際，絶対値の取り扱いに注意が必要となります。

問　題

aを正の定数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数$f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$の極大値および極小値を求めよ。

(2)　$x\geqq 3$ のとき，不等式$x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$が成り立つことを示せ。さらに，極限値$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}$を求めよ。

(3)　kを定数とする。$y=x^2+2x+2$のグラフと$y=ke^x+a^2$のグラフが異なる 3 点で交わるための必要十分条件を，aとkを用いて表せ。　[2011]

解答例

(1)　$f(x)=(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}$に対して，

$$f'(x)=(2x+2)e^{-x}-(x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=-(x^2-a^2)e^{-x}$$

これより，$f(x)$の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，極大値は$f(a)=(2a+2)e^{-a}$，極小値は$f(-a)=(-2a+2)e^a$である。

(2)　$x\geqq 3$ のとき，$g(x)=27e^{-3}-x^3e^{-x}$とおく。

$$g'(x)=-3x^2e^{-x}+x^3e^{-x}=x^2(x-3)e^{-x}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(3)=0$となり，$x^3e^{-x}\leqq 27e^{-3}$が成立する。

すると，$0<x^2e^{-x}\leqq\dfrac{27e^{-3}}{x}$から，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^2e^{-x}=0$

(3)　$y=x^2+2x+2$のグラフと$y=ke^x+a^2$のグラフの共有点の個数は，

$$x^2+2x+2=ke^x+a^2,\ (x^2+2x+2-a^2)e^{-x}=k$$

よって，$f(x)=k$の異なる実数解の個数に一致し，さらに，$y=f(x)$のグラフと$y=k$のグラフの共有点の個数に等しい。

そして，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\infty$であり，また(2)より，

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{2}{x}+\frac{2-a^2}{x^2}\right)x^2e^{-x}=0$$

これより，極小値の符号で場合分けをして，

(i)　$(-2a+2)e^a>0$　$(0<a<1)$のとき

$y=f(x)$のグラフと$y=k$のグラフが異なる 3 点で交わる条件は，

$$(-2a+2)e^a<k<(2a+2)e^{-a}$$

(ii)　$(-2a+2)e^a\leqq 0$　$(a\geqq 1)$のとき

$y=f(x)$のグラフと$y=k$のグラフが異なる 3 点で交わる条件は，

$$0<k<(2a+2)e^{-a}$$

コメント

誘導がなく，(3)のみの出題でも完答できることが望まれます。

問　題

曲線 $C_1: y=\dfrac{x^2}{2}$ の点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における法線と点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の交点を R とする。ただし，$b\neq a$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

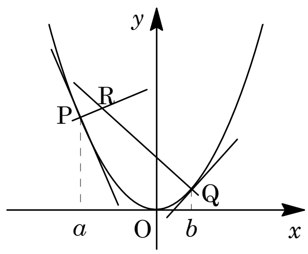
(1)　b が a に限りなく近づくとき，R はある点 A に限りなく近づく。A の座標を a で表せ。

(2)　点 P が曲線 C_1 上を動くとき，(1)で求めた点 A が描く軌跡を C_2 とする。曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形を描き，C_1 と C_2 の交点の座標を求めよ。

(3)　曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　$y=\dfrac{x^2}{2}$ に対して $y'=x$ より，点 $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{a^2}{2}\right)$ における接線の方向ベクトルの成分は $(1,\ a)$ となるので，法線の方程式は，



$$x-a+a\left(y-\frac{a^2}{2}\right)=0,\ x+ay=a+\frac{a^3}{2}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

同様にして，点 $\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{b^2}{2}\right)$ における法線の方程式は，

$$x+by=b+\frac{b^3}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$(a-b)y=(a-b)+\dfrac{1}{2}(a^3-b^3)$

交点 R の座標は，$b\neq a$ から $y=\dfrac{1}{2}(2+a^2+ab+b^2)$，①より $x=-\dfrac{1}{2}ab(a+b)$

ここで，$b\to a$ のとき，

$$x\to-\frac{1}{2}a^2\cdot 2a=-a^3,\ y\to\frac{1}{2}(2+a^2+a^2+a^2)=1+\frac{3}{2}a^2$$

よって，$\mathrm{A}\left(-a^3,\ 1+\dfrac{3}{2}a^2\right)$ である。

(2)　$\mathrm{A}(x,\ y)$ とすると，軌跡 C_2 は，$x=-a^3,\ y=1+\dfrac{3}{2}a^2\cdots\cdots$③と表せる。

さて，$x=f(a),\ y=g(a)$ とおくと，

$$f(-a)=-f(a),\ g(-a)=g(a)$$

これより，C_2 の $a\geqq 0$ の部分と $a\leqq 0$ の部分は y 軸対称となる。そこで, $a\geqq 0$ において,

$$\frac{dx}{da}=-3a^2,\ \frac{dy}{da}=3a$$

すると，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{3a}{-3a^2}=-\dfrac{1}{a}$ から,

a	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{da}$		$-$
x	0	$\searrow$
$\dfrac{dy}{da}$		$+$
y	1	$\nearrow$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{da}\left(-\frac{1}{a}\right)\cdot\frac{da}{dx}=\frac{1}{a^2}\left(-\frac{1}{3a^2}\right)=-\frac{1}{3a^4}<0$$

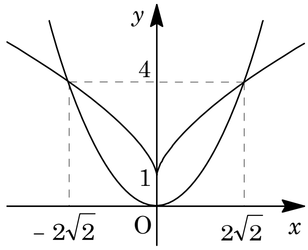
これより，軌跡 C_2 を表す曲線は上に凸である。

さらに，$C_1: y=\frac{x^2}{2}$ との交点は，$1+\frac{3}{2}a^2=\frac{1}{2}a^6$

$$a^6-3a^2-2=0,\ (a^2-2)(a^2+1)^2=0$$

よって $a=\sqrt{2}$ となり，③から $x=-2\sqrt{2}$，$y=4$ である。

以上より，曲線 C_1 と軌跡 C_2 の概形は右図のようになる。また，2 つの交点の座標は，$(-2\sqrt{2},\ 4)$，$(2\sqrt{2},\ 4)$ である。



(3) 軌跡 C_2 は，$a=\sqrt[3]{-x}$ より，$y=1+\frac{3}{2}(\sqrt[3]{-x})^2=1+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}$ となる。

さて，曲線 C_1 と軌跡 C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると，C_1，C_2 がともに y 軸対称より，

$$S=2\int_0^{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{2}\sqrt[3]{x^2}-\frac{x^2}{2}\right)dx=2\int_0^{2\sqrt{2}}\left(1+\frac{3}{2}x^{\frac{2}{3}}-\frac{x^2}{2}\right)dx$$

$$=2\left[x+\frac{9}{10}x^{\frac{5}{3}}-\frac{1}{6}x^3\right]_0^{2\sqrt{2}}=2\left(2\sqrt{2}+\frac{18}{5}\sqrt{2}-\frac{8}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{88}{15}\sqrt{2}$$

コメント

(2)において，C_2 の概形を描くときはパラメータ表示のままで処理をしましたが，(3)の設問を考えると，この段階でパラメータを消去した方がよかったかもしれません。

問　題

曲線 $y=e^x$ 上を動く点 P の時刻 t における座標を $(x(t),\ y(t))$ と表し，P の速度ベクトルと加速度ベクトルをそれぞれ $\vec{v}=\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)$ と $\vec{\alpha}=\left(\dfrac{d^2x}{dt^2},\ \dfrac{d^2y}{dt^2}\right)$ とする。すべての時刻 t で $|\vec{v}|=1$ かつ $\dfrac{dx}{dt}>0$ であるとして，次の問いに答えよ。

(1) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における速度ベクトル $\vec{v}$ を s を用いて表せ。

(2) P が点 $(s,\ e^s)$ を通過する時刻における加速度ベクトル $\vec{\alpha}$ を s を用いて表せ。

(3) P が曲線全体を動くとき，$|\vec{\alpha}|$ の最大値を求めよ。　[2009]

解答例

(1) 曲線 $y=e^x$ 上を動く点 $\mathrm{P}(x(t),\ y(t))$ に対して，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{dy}{dx}\cdot\dfrac{dx}{dt}=e^x\dfrac{dx}{dt}$

ここで，$|\vec{v}|=1$ から，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=1$ なので，$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+e^{2x}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2=1$ となり，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2=\frac{1}{1+e^{2x}},\quad \frac{dx}{dt}=\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}\ \left(\frac{dx}{dt}>0\right),\quad \frac{dy}{dt}=\frac{e^x}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

よって，$x=s$ において，$\vec{v}=\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2s}}}(1,\ e^s)$

(2) (1)より，$\dfrac{d^2x}{dt^2}=\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{dx}{dt}\right)\dfrac{dx}{dt}=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2e^{2x}}{\sqrt{(1+e^{2x})^3}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}=-\dfrac{e^{2x}}{(1+e^{2x})^2}$

$$\frac{d^2y}{dt^2}=\frac{d}{dx}\left(\frac{dy}{dt}\right)\frac{dx}{dt}=\frac{1}{1+e^{2x}}\left(e^x\sqrt{1+e^{2x}}-e^x\frac{2e^{2x}}{2\sqrt{1+e^{2x}}}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{1+e^{2x}}}$$

$$=\frac{e^x(1+e^{2x})-e^{3x}}{(1+e^{2x})^2}=\frac{e^x}{(1+e^{2x})^2}$$

よって，$x=s$ において，$\vec{\alpha}=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^2}(-e^{2s},\ e^s)$

(3) (2)より，$|\vec{\alpha}|^2=\dfrac{1}{(1+e^{2s})^4}(e^{4s}+e^{2s})=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^4}(e^{2s}+1)=\dfrac{e^{2s}}{(1+e^{2s})^3}$

ここで, $u>0$ に対して，$f(u)=\dfrac{u}{(1+u)^3}$ とおくと，$|\vec{\alpha}|^2=f(e^{2s})$ であり，

$$f'(u)=\frac{(1+u)^3-u\cdot3(1+u)^2}{(1+u)^6}=\frac{-2u+1}{(1+u)^4}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(u)$		$+$	0	$-$
$f(u)$		↗	$\frac{4}{27}$	↘

右表より，$f(u)$ は $u=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\dfrac{4}{27}$ をとり，

これより，$|\vec{\alpha}|$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{4}{27}}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ である。

コメント

速度，加速度を題材とした問題です。合成関数の微分法がポイントです。

問　題

$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおく。ただし，e は自然対数の底とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ の増減，凹凸，漸近線を調べ，グラフをかけ。

(2)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}$ を求めよ。　　[2008]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{e^x(e^x+1)-e^x\cdot e^x}{(e^x+1)^2}=\frac{e^x}{(e^x+1)^2}$$

$$f''(x)=\frac{e^x(e^x+1)^2-e^x\cdot 2(e^x+1)e^x}{(e^x+1)^4}$$

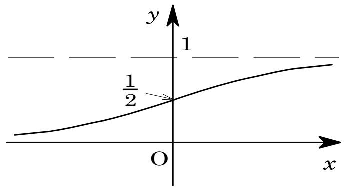
$$=-\frac{e^x(e^x-1)}{(e^x+1)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{2}$	↗

また，$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-x}}$ と変形すると，

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=1,\quad \lim_{x\to-\infty} f(x)=0$$

これより，$y=1$，$y=0$ の 2 本の漸近線が存在し，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x)\iff x=f^{-1}(y)$ より，$y=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ とおき，x について解くと，

$$(1-y)e^x=y,\quad x=\log\frac{y}{1-y}\quad (0<y<1)$$

よって，$f^{-1}(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$ より，$f^{-1}(x)=\log\dfrac{x}{1-x}\quad(0<x<1)$

(3)　$f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\dfrac{1}{n+1}\right)=\log\dfrac{\frac{1}{n+2}}{1-\frac{1}{n+2}}-\log\dfrac{\frac{1}{n+1}}{1-\frac{1}{n+1}}=\log\dfrac{1}{n+1}-\log\dfrac{1}{n}$ から，

$$\lim_{n\to\infty} n\left\{f^{-1}\left(\frac{1}{n+2}\right)-f^{-1}\left(\frac{1}{n+1}\right)\right\}=\lim_{n\to\infty} n\log\frac{n}{n+1}=\lim_{n\to\infty}\log\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n}=-1$$

コメント

関数のグラフに関する基本問題です。(3)で，ひとひねりがあると予測しましたが，これは，はずれてしまいました。

問　題

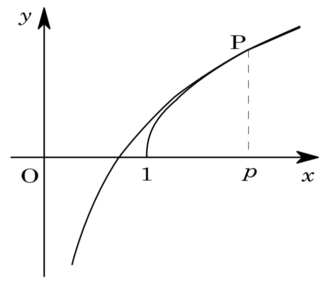
$a>0$ に対して，$f(x)=a+\log x\ (x>0)$，$g(x)=\sqrt{x-1}\ (x\geqq 1)$ とおく。2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，ある点 P を共有し，その点で共通の接線 l をもつとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値，点 P の座標，および接線 l の方程式を求めよ。

(2) 2 曲線は点 P 以外の共有点をもたないことを示せ。

(3) 2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2008]

解答例



(1) まず，$f(x)=a+\log x$，$g(x)=\sqrt{x-1}$ に対し，

$$f'(x)=\frac{1}{x},\quad g'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x-1}}$$

さて，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ が，$x=p$ で接するとき，

$f(p)=g(p)$ より，$a+\log p=\sqrt{p-1}$ ………①

$f'(p)=g'(p)$ より，$\dfrac{1}{p}=\dfrac{1}{2\sqrt{p-1}}$ ………②

②より，$p=2\sqrt{p-1}$，$p^2=4p-4$ から $p=2$ となり，P(2, 1) である。

①に代入して，$a=1-\log 2$

さらに，P(2, 1) における接線 l は，$y-1=\dfrac{1}{2}(x-2)$，$y=\dfrac{1}{2}x$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，(1)より，$h(x)=1-\log 2+\log x-\sqrt{x-1}$

$$h'(x)=\frac{1}{x}-\frac{1}{2\sqrt{x-1}}=\frac{2\sqrt{x-1}-x}{2x\sqrt{x-1}}=\frac{-(x-2)^2}{2x\sqrt{x-1}\,(2\sqrt{x-1}+x)}$$

x	1	…	2	…
$h(x)$		$-$	0	$-$
$h'(x)$	$1-\log 2$	↘	0	↘

よって，$h(x)=0$ の解は $x=2$ のみであり，2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ は，点 P 以外の共有点をもたない。

(3) まず，$y=1-\log 2+\log x$ に対して，$\log\dfrac{x}{2}=y-1$，$x=2e^{y-1}$

また，$y=\sqrt{x-1}$ に対して，$x=y^2+1$

すると，2 曲線と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^1(y^2+1-2e^{y-1})\,dy=\Big[\frac{y^3}{3}+y-2e^{y-1}\Big]_0^1=\frac{4}{3}-2\Big(1-\frac{1}{e}\Big)=\frac{2}{e}-\frac{2}{3}$$

コメント

(3)では，計算を少し簡単にするために，y 軸方向に積分しています。

問　題

$f(x)=xe^x$ とおく。また p を $p\geqq 0$ を満たす数とし，曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式を $y=g(x)$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $x\geqq 0$ において $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) L を正の数とする。曲線 $y=f(x)$，接線 $y=g(x)$，および 2 直線 $x=0$，$x=L$ で囲まれた部分の面積を $S(p)$ とするとき，$p\geqq 0$ における $S(p)$ の最小値を与える p の値を求めよ。 [2007]

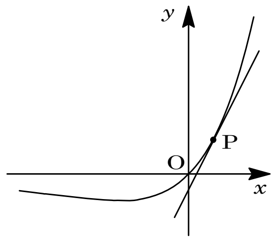
解答例

(1) $f(x)=xe^x$ に対して，$f'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$

点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ における接線の方程式は，

$$y-pe^p=(1+p)e^p(x-p),\quad y=(1+p)e^px-p^2e^p$$

よって，$g(x)=(1+p)e^px-p^2e^p$ となる。



ここで，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，

$$h'(x)=f'(x)-g'(x)=(1+x)e^x-(1+p)e^p$$

$$h''(x)=e^x+(1+x)e^x=(2+x)e^x$$

$x\geqq 0$ において $h''(x)>0$ より $h'(x)$ は単調増加し，$h(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

したがって，$x\geqq 0$ において $h(x)\geqq 0$，すなわち $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つ。

(2) (1)より，$x\geqq 0$ において $f(x)\geqq g(x)$ なので，

$$S(p)=\int_0^L\{f(x)-g(x)\}dx=\int_0^L\{xe^x-(1+p)e^px+p^2e^p\}dx$$

$$=\int_0^L xe^xdx-\frac{L^2}{2}(1+p)e^p+Lp^2e^p=\int_0^L xe^xdx+\frac{L}{2}(-L-Lp+2p^2)e^p$$

$$S'(p)=\frac{L}{2}\{(-L+4p)e^p+(-L-Lp+2p^2)e^p\}$$

$$=\frac{L}{2}\{2p^2+(4-L)p-2L\}e^p$$

$$=\frac{L}{2}(2p-L)(p+2)e^p$$

p	0	$\cdots$	$\frac{L}{2}$	$\cdots$
$S'(p)$		$-$	0	$+$
$S(p)$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，$p=\dfrac{L}{2}$ のとき，$S(p)$ は最小値をとる。

コメント

$y=f(x)$ のグラフは，$x\geqq 0$ のとき下に凸というのが(1)の結論です。なお，明記していませんが，$p=0$ のときも同様です。

問　題

次の問いに答えよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であること，また，e は自然対数の底で，$e<3$ であることを用いてよい。

(1) 自然数 n に対して，方程式 $\dfrac{\log x}{x}=\dfrac{1}{3n}$ は $x>0$ の範囲にちょうど 2 つの実数解をもつことを示せ。

(2) (1)の 2 つの実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とするとき，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$，$ne<\beta_n$ が成り立つことを示せ。また，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha_n$ を求めよ。 [2006]

解答例

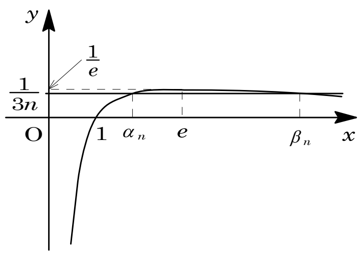
(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$

x	0	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\frac{1}{e}$	$\searrow$	0

ここで，$n\geqq 1$，$e<3$ から，

$$3n>ne\geqq e,\ 0<\frac{1}{3n}<\frac{1}{e}$$

すると，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{1}{3n}$ は 2 つの共有点をもつ。よって，$f(x)=\dfrac{1}{3n}$ は，$x>0$ の範囲に 2 つの実数解をもつ。



(2) まず，$n\geqq 1$ から $e^{\frac{1}{n}}\leqq e\leqq ne$ となり，$0<x\leqq e^{\frac{1}{n}}$ において $f(x)$ は単調に増加し，$x\geqq ne$ において $f(x)$ は単調に減少する。

さて，$f(\alpha_n)=\dfrac{1}{3n}>0=f(1)$ であり，

$$f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{ne^{\frac{1}{n}}}\geqq\frac{1}{ne}>\frac{1}{3n}=f(\alpha_n)$$

よって，$f(1)<f(\alpha_n)<f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)$ となり，$1<\alpha_n<e^{\frac{1}{n}}$ ………(*)

また，$f(ne)=\dfrac{\log ne}{ne}\geqq\dfrac{\log e}{ne}>\dfrac{1}{3n}=f(\beta_n)$ より，$ne<\beta_n$ である。

ここで，$n\to\infty$ のとき $e^{\frac{1}{n}}\to 1$ なので，(*)より，

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n=1$$

コメント

微分法の基本問題です。(2)の不等式は，曲線 $y=f(x)$ を見ながら立式しました。

問　題

実数 x に対して，$[x]$は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0<\theta<\pi$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$を用いてよい。

(1)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ に対し，$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\dfrac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$のもとで，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 2,\ 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$$

すると，$-\dfrac{3}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ となり，$0<\theta<\pi$ の範囲では,

$$\frac{\pi}{3}<\theta<\pi$$

(2)　不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ に対し，$\sin\theta>0$ のもとで,

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1,\ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$$

すると，$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$0<\theta<\pi$ の範囲では,

$$\frac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi$$

(3)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$……(＊)に対して，$0<\theta<\pi$ の範囲では,
$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ および $\sin\theta>0$ は成立している。

ここで，$-1<\cos\theta<1$ より，$\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{2}+\cos\theta<\dfrac{7}{2}$ となるので,

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]=1,\ 2,\ 3$$

また，$0<\sin\theta\leqq 1$ より，$\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\leqq\dfrac{3}{2}$ となるので，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\leqq 1$

(i)　$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=1$ $\left(\dfrac{3}{2}<\dfrac{5}{2}+\cos\theta<2\right)$のとき

まず，$-1<\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{2\pi}{3}<\theta<\pi$ ………①

(＊)より，$0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ となり,

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta \geqq 0,\ \log_2\sin\theta \geqq -\frac{3}{2},\ \sin\theta \geqq \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

条件から，$\sin\alpha = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$なので，$0<\theta<\pi$ の範囲では，

$$\alpha \leqq \theta \leqq \pi-\alpha \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$\sin\dfrac{2\pi}{3}>\sin(\pi-\alpha)=\sin\alpha$ から，$\dfrac{2\pi}{3}<\pi-\alpha$ となるので，

①②より，求める θ の範囲は，$\dfrac{2\pi}{3}<\theta\leqq\pi-\alpha$ である。

(ii) $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=2\left(2\leqq\dfrac{5}{2}+\cos\theta<3\right)$のとき

まず，$-\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3} \cdots\cdots\cdots ③$

(＊)より，$1\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$となり, (2)より $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{3}{4}\pi \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，求める θ の範囲は，$\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\dfrac{2\pi}{3}$ である。

(iii) $\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]=3\left(3\leqq\dfrac{5}{2}+\cos\theta<\dfrac{7}{2}\right)$のとき

まず，$\dfrac{1}{2}\leqq\cos\theta<1$ より，$0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$

(＊)より，$\log_2 3\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$となるが，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\leqq 1$ に反する。

(i)～(iii)より，求める θ の範囲は，$\dfrac{\pi}{3}<\theta\leqq\pi-\alpha$ である。

コメント

ガウス記号つきの不等式ですが，それに三角関数，対数関数が混在し，盛りだくさんです。

問　題

実数 t が $t \geqq 0$ の範囲を動くとき，xy 平面上で点 $\mathrm{P}(t^2,\ e^{-t})$ が描く曲線を C とする。a を正の実数とし，曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。このとき次の問いに答えよ。

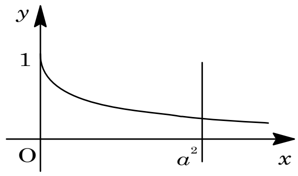
(1)　面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　$a > 0$ の範囲で関数 $S(a)$ の増減，凹凸を調べ，そのグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} ae^{-a} = 0$ であることを用いてよい。

(3)　$S(a) = 1.35$ となる a が $2 < a < 3$ の範囲に存在することを示せ。ただし，必要なら $2.5 < e < 3$ であることを用いてよい。　[2005]

解答例

(1)　t が $t \geqq 0$ で変化するとき，$x = t^2$，$y = e^{-t}$ の描く曲線 C と x 軸，y 軸，および直線 $x = a^2$ で囲まれる部分の面積 $S(a)$ は，



$$S(a) = \int_0^{a^2} y\,dx = \int_0^a e^{-t}\cdot 2t\,dt$$

$$= -2\left[\,te^{-t}\,\right]_0^a + 2\int_0^a e^{-t}\,dt = -2ae^{-a} - 2\left[\,e^{-t}\,\right]_0^a = -2(a+1)e^{-a} + 2$$

(2)　$a > 0$ の範囲で，(1)より，$S'(a) = 2ae^{-a} > 0$

これより，$S(a)$ は単調に増加する。

さらに，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} ae^{-a} = 0$ より，

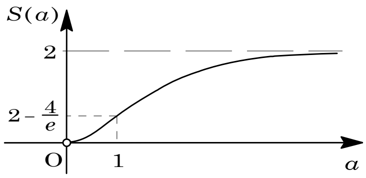
$$\lim_{a\to\infty} S(a) = \lim_{a\to\infty}\left\{-2(a+1)e^{-a} + 2\right\} = 2$$

また，凹凸については，

$$S''(a) = 2e^{-a} - 2ae^{-a} = 2(1-a)e^{-a}$$

まとめると，右上の表となり，$S(a)$ のグラフの概形は右図のようになる。

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$S''(a)$		$+$		$-$
$S(a)$	0	$\cup$	$2-\dfrac{4}{e}$	$\cap$



(3)　$F(a) = S(a) - 1.35$ とおくと，$\dfrac{5}{2} < e < 3$ から，

$$F(2) = S(2) - 1.35 = -\frac{6}{e^2} + 0.65 < -6\cdot\frac{1}{9} + 0.65 = -\frac{2}{3} + 0.65 < 0$$

$$F(3) = S(3) - 1.35 = -\frac{8}{e^3} + 0.65 > -8\cdot\frac{8}{125} + 0.65 = -\frac{64}{125} + 0.65 > 0$$

よって，$F(a) = 0$ は $2 < a < 3$ の範囲に解をもつ。すなわち，$S(a) = 1.35$ となる a は $2 < a < 3$ の範囲に存在する。

コメント

微積分の基本問題です。数値計算もややこしくありません。

問　題

関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。 [2001]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ に対して，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

関数 $f(x)$ がつねに増加する条件は，$f'(x)\geqq 0$ である。ただし，等号は恒等的には成立しない。

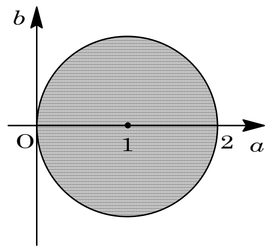
(i) $a=0$ のとき　$f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ なので，$2b=0$ かつ $b+1>0$

よって，$b=0$ となる。

(ii) $a\neq 0$ のとき　$a>0$ かつ $f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$

$$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)\leqq 0,\ a^2+b^2-2a\leqq 0$$

よって，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$



(i)(ii)より，$a=b=0$，または $a>0$ かつ $(a-1)^2+b^2\leqq 1$

すなわち，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。

(2) $a=0$ のとき，$x>-1$ で $f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ となる条件は,

(i) $2b=0$ のとき　(1)より適する。

(ii) $2b\neq 0$ のとき　$2b>0$ かつ $f'(-1)=-2b+b+1=-b+1\geqq 0$

よって, $0<b\leqq 1$ となる。

(i)(ii)より，求める条件は, $0\leqq b\leqq 1$

(3) $a\neq 0$ のとき　$f'(x)=2a\left(x+\dfrac{a+b}{2a}\right)^2-\dfrac{a^2+b^2-2a}{2a}$

$x>-1$ で $f'(x)\geqq 0$ となる条件は, $a>0$ において,

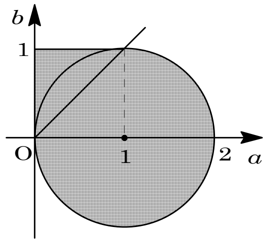
(i) $-\dfrac{a+b}{2a}\leqq -1$ $(b\geqq a)$ のとき

$f'(-1)=2a-2(a+b)+b+1=-b+1\geqq 0$ より, $b\leqq 1$ となる。

(ii) $-\dfrac{a+b}{2a}>-1$ $(b<a)$ のとき

$f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$ なので, (1)より，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

(2)と合わせると，$a=0$ のとき $0 \leqq b \leqq 1$，$a>0$ のとき $b \geqq a$ ならば $b \leqq 1$ で，$b<a$ ならば $(a-1)^2+b^2 \leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



コメント

ていねいに場合分けをして，結論を導いていく標準的な問題です。

問　題

(1)　実数 $k \geqq 0$ に対し，$\int_0^{2\pi}\left\{y\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)^2\right\}\cos\theta d\theta=2k\pi$

を満たす xy 平面内の曲線の方程式を求めよ。

(2)　(1)で求めた曲線と直線 $y=a$ との共有点が 1 個であるような実数 a の範囲を求めよ。 [1999]

解答例

(1)　条件より，$\int_0^{2\pi}\left\{y\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)^2\right\}\cos\theta d\theta=2k\pi$ ………①

まず，$\left\{y\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)-\left(x\cos\theta+\frac{1}{2}x^2\right)^2\right\}\cos\theta$

$=\left(yx\cos\theta+\frac{1}{2}x^2y-x^2\cos^2\theta-x^3\cos\theta-\frac{1}{4}x^4\right)\cos\theta$

$=-x^2\cos^3\theta+(yx-x^3)\cos^2\theta+\left(\frac{1}{2}x^2y-\frac{1}{4}x^4\right)\cos\theta$

ここで，$\int_0^{2\pi}\cos^3\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\cos\theta d\theta=0$，$\int_0^{2\pi}\cos^2\theta d\theta=\int_0^{2\pi}\frac{1+\cos 2\theta}{2}d\theta=\pi$ を用いて①を変形すると，$(xy-x^3)\pi=2k\pi$ となり，$xy-x^3=2k$ ………②

(2)　曲線②と直線 $y=a$ との共有点が 1 個なので，②に $y=a$ を代入して，

$xa-x^3=2k$，$x^3-ax+2k=0$ ………③

③が実数解を 1 つだけもつ条件を求める。

ここで，③の左辺を $f(x)=x^3-ax+2k$ とおくと，$f'(x)=3x^2-a$

(i)　$a\leqq 0$ のとき　$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ が単調増加となるので，0 以上の任意の k で③は実数解を 1 つだけもつ。

(ii)　$a>0$ のとき　$f'(x)=3\left(x+\sqrt{\frac{a}{3}}\right)\left(x-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)$ となり，

$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}+2k$

$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}+2k$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$k\geqq 0$ より，$f\left(-\sqrt{\frac{a}{3}}\right)>0$ なので，③が実数解を 1 つだけもつ条件は，$f\left(\sqrt{\frac{a}{3}}\right)=-\frac{2}{3}a\sqrt{\frac{a}{3}}+2k>0$

まとめると $a^3<27k^2$ より，$0<a<3\sqrt[3]{k^2}$

(i)(ii)より，求める a の範囲は $k>0$ のとき $a<3\sqrt[3]{k^2}$，$k=0$ のとき $a\leqq 0$ となる。

コメント

(1)は，一見パスしたくなる問題ですが，三角関数の周期性を使えば，積分計算は簡単です。それに対して(2)では，論理の詰めに注意が必要でした。

問　題

以下において，$f(x)$ はすべての実数 x において微分可能な関数とし，$F(x)=e^x f(x)$ とおく。

(1)　定数関数でない関数 $f(x)$ で

　条件(A)：すべての x に対して $f(x+1)=f(x)$ である

をみたすものの例をあげよ。

(2)　関数 $f(x)$ が

　条件(B)：すべての x に対して $f'(x)+f(x)\leqq 0$ である

をみたすとき，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が(1)の条件(A)をみたすとき，$F(x+n)$（ただし，n は正の整数）を $F(x)$ を用いて表せ。

(4)　関数 $f(x)$ が(1), (2)の条件(A), (B)をともにみたすとする。

①　$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ であることを示せ。

②　ある c で $f(c)=0$ であれば，すべての x で $f(x)=0$ となることを示せ。

[1998]

解答例

(1)　$f(x+1)=f(x)$ は，$f(x)$ が周期 1 の周期関数であることを表す。

その 1 例として，$f(x)=\sin 2\pi x$ があげられる。

(2)　$F(x)=e^x f(x)$ より，$F'(x)=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x\left\{f'(x)+f(x)\right\}$

条件(B)より，$F'(x)\leqq 0$ となり，これより $F(x)$ は単調非増加。

よって，$a<b$ ならば $F(a)\geqq F(b)$

(3)　条件(A)より，正の整数 n に対して帰納的に，$f(x+n)=f(x)$ が成立する。

よって，$F(x+n)=e^{x+n}f(x+n)=e^n e^x f(x)=e^n F(x)$

(4)　(2)より，正の整数 n に対して，$F(x)\geqq F(x+n)$

(3)と合わせて，$F(x)\geqq e^n F(x)$，$(1-e^n)F(x)\geqq 0$

よって，任意の x において $F(x)\leqq 0$，すなわち，$e^x f(x)\leqq 0$ から，$f(x)\leqq 0$

すると，$f(c)\geqq 0$ となる c が存在すれば，$f(c)=0$ である。

また，ある c で $f(c)=0$ であれば，$F(c)=0$

(2)より，$F(x)$ は単調非増加関数なので，$0=F(c)\geqq F(c+1)$

(3)より，$F(c+1)=eF(c)=0$

よって，$c\leqq x\leqq c+1$ において，$F(x)=0$，すなわち $f(x)=0$

条件(A)より，すべての x で $f(x)=0$

コメント

2 年連続で抽象関数が題材です。なお, (4)の証明には試行錯誤が要求されます。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少することを示せ。

(2)　不定積分 $\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx$ を求めよ。

(3)　n を 3 以上の整数とするとき，不等式 $\displaystyle\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\frac{1}{\log 2}$ が成り立つことを示せ。 [2015]

解答例

(1)　$x>1$ において，関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ に対し，

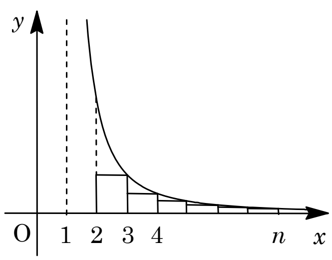
$$y'=-\frac{(\log x)^2+2\log x}{x^2(\log x)^4}=-\frac{\log x+2}{x^2(\log x)^3}<0$$

よって，関数 $y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は $x>1$ において単調に減少する。

(2)　$\displaystyle\int\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\int(\log x)^{-2}\cdot\frac{1}{x}dx=-(\log x)^{-1}+C=-\frac{1}{\log x}+C$

(3)　(1)より，$y=\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ は単調に減少するので，

$$\sum_{k=3}^{n}\frac{1}{k(\log k)^2}<\int_2^n\frac{1}{x(\log x)^2}dx=\left[-\frac{1}{\log x}\right]_2^n$$
$$=-\frac{1}{\log n}+\frac{1}{\log 2}<\frac{1}{\log 2}$$



コメント

定積分と不等式に関する基本問題です。誘導に従うと，(3)の証明にスムーズに流れていきます。

問　題

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|$ を考える。ただし，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ とする。さらに，$0\leqq a\leqq\frac{\pi}{2}$ に対して，$F(a)=\int_0^a f(x)f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)dx$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　$F(a)$ を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$，$\sin x-\frac{1}{2}=\pm\frac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ において，$x=\frac{\pi}{2}$，0，$\pm\pi$

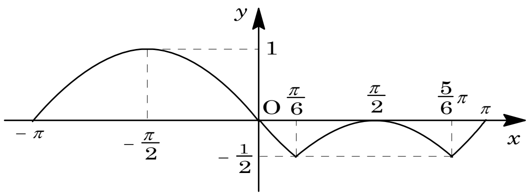
(2)　$g(x)=\left|\sin x-\frac{1}{2}\right|-\frac{1}{2}$ とおくと，

(i)　$-\pi\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi\leqq x\leqq\pi$ のとき　$g(x)=-\sin x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=-\sin x$

(ii)　$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\sin x-1$$

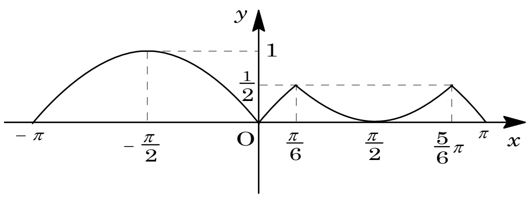
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad(g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad(g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　まず，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき $f(x)=\sin x$，$\frac{\pi}{6}\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき $f(x)=-\sin x+1$

また，$y=f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$ のグラフは，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $\frac{\pi}{2}$ だけ平行移動したものであり，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ においては，$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=-\sin\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\cos x$ となる。

(i)　$0\leqq a\leqq\frac{\pi}{6}$ のとき

$$F(a)=\int_0^a\sin x\cos x\,dx=\frac{1}{2}\left[\ \sin^2 x\ \right]_0^a=\frac{1}{2}\sin^2 a$$

(ii) $\dfrac{\pi}{6} \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$F(a) = \int_0^{\frac{\pi}{6}} \sin x \cos x\, dx + \int_{\frac{\pi}{6}}^{a} (-\sin x + 1)\cos x\, dx$$

$$= \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\Big[\ \sin^2 x\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{a} + \Big[\ \sin x\ \Big]_{\frac{\pi}{6}}^{a} = \frac{1}{8} - \frac{1}{2}\left(\sin^2 a - \frac{1}{4}\right) + \sin a - \frac{1}{2}$$

$$= -\frac{1}{2}\sin^2 a + \sin a - \frac{1}{4}$$

コメント

絶対値つきの関数のグラフを描く問題です。丁寧な場合分けがすべてです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　すべての正の実数 $x,\ y$ に対して，不等式 $x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ が成り立つことを示せ。ここで log は自然対数を表す。

(2)　$a,\ b$ は実数で $a<b$ とする。関数 $f(x)$ と $g(x)$ は閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数で，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ をみたす。このとき，不等式

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(3)　$a,\ b$ は実数で $a<b$ とする。閉区間 $[a,\ b]$ で正の値をとる連続関数 $f(x)$ に対し正の実数 M を $M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ とする。不等式

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

が成り立つことを示せ。　　　　[2002]

解答例

(1)　$x>0,\ y>0$ に対して，$t = \dfrac{x}{y} > 0$ とおくと，

$$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0 \iff \frac{x}{y}\log\frac{x}{y} - \frac{x}{y} + 1 \geqq 0 \iff t\log t - t + 1 \geqq 0$$

ここで，$h(t) = t\log t - t + 1$ とおくと，

$$h'(t) = \log t + t\cdot\frac{1}{t} - 1 = \log t$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$		↘	0	↗

右表より, $t>0$ のとき，$h(t) \geqq 0$ となる。

よって，$x\log x - x\log y - x + y \geqq 0$ ………①

(2)　区間 $[a,\ b]$ において，$f(x)>0$，$g(x)>0$ なので，①より，

$$f(x)\log f(x) - f(x)\log g(x) - f(x) + g(x) \geqq 0$$

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx - \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx - \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \geqq 0$$

条件より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b g(x)\,dx$ ……②なので，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log g(x)\,dx \text{ ………③}$$

(3)　$M = \dfrac{1}{b-a}\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)M = \int_a^b M\,dx$ ………④

これより，$g(x) = M$ とおくと，②をみたすので，③より，

$$\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq \int_a^b f(x)\log M\,dx = \log M\int_a^b f(x)\,dx$$

④の関係から，$\displaystyle\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq (b-a)M\log M$ となり，

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\log f(x)\,dx \geqq M\log M$$

コメント

(1)から(2)へはスムーズに流れ，(2)から(3)へはちょっと引っかかるという，うまい誘導がついています。

問　題

n を自然数として，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}$ とおく。

(1)　$x<1$ において，$f(x)=-\log(1-x)-\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$ が成り立つことを示せ。ここで，$\log$ は自然対数を表す。

(2)　$|x|\leqq\dfrac{1}{3}$ とするとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

(i)　$x\geqq 0$ において，$\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\leqq\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$

(ii)　$x<0$ において，$\left|\displaystyle\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

(iii)　$\left|f(x)-f(-x)-\log\dfrac{1+x}{1-x}\right|\leqq\dfrac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

(3)　この不等式を用いて，$\log 2$ の近似値を誤差が $\dfrac{1}{100}$ 以下となるような分数で求めよ。

[2000]

解答例

(1)　$t\neq 1$ のとき，$1+t+t^2+\cdots+t^{n-1}=\dfrac{1-t^n}{1-t}=\dfrac{1}{1-t}-\dfrac{t^n}{1-t}$

$x<1$ として，両辺を 0 から x まで積分すると，

$$\int_0^x(1+t+t^2+\cdots+t^{n-1})dt=\int_0^x\frac{1}{1-t}dt-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$$

$$\left[\,t+\frac{t^2}{2}+\frac{t^3}{3}+\cdots+\frac{t^n}{n}\,\right]_0^x=-\Big[\log|1-t|\Big]_0^x-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$$

よって，$f(x)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{x^k}{k}=x+\frac{x^2}{2}+\frac{x^3}{3}+\cdots+\frac{x^n}{n}=-\log(1-x)-\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt$

(2)　まず，$0\leqq t\leqq x\leqq\dfrac{1}{3}$ において，$\dfrac{t^n}{1-t}\leqq\dfrac{t^n}{1-\frac{1}{3}}\leqq\dfrac{3t^n}{2}$ より，

$$\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\leqq\int_0^x\frac{3t^n}{2}dt=\frac{3}{2}\left[\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\right]_0^x=\frac{3x^{n+1}}{2(n+1)}$$

また，$-\dfrac{1}{3}\leqq x\leqq t\leqq 0$ において，$\left|\dfrac{t^n}{1-t}\right|=\dfrac{|t|^n}{|1-t|}\leqq|t|^n=(-t)^n$

$$\left|\int_0^x\frac{t^n}{1-t}dt\right|\leqq\int_x^0\left|\frac{t^n}{1-t}\right|dt\leqq\int_x^0(-t)^n dt=(-1)^n\left[\,\frac{t^{n+1}}{n+1}\,\right]_x^0=(-1)^{n+1}\frac{x^{n+1}}{n+1}$$

よって，$\left|\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \dfrac{(-x)^{n+1}}{n+1} = \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

さて, (1)より，$f(x)+\log(1-x) = -\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}dt$ ……①なので,

$$f(-x)+\log(1+x) = -\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}dt \text{ ………②}$$

①②より，$f(x)-f(-x)+\log(1-x)-\log(1+x) = -\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}dt + \int_0^{-x} \dfrac{t^n}{1-t}dt$

$$\left| f(x)-f(-x)-\log\frac{1+x}{1-x} \right| = \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt + \int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}dt \right|$$

$$\leqq \left| \int_0^x \frac{t^n}{1-t}dt \right| + \left| \int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}dt \right| \text{ ………③}$$

(i)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{3}$ のとき　$\left|\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}dt\right| = \int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}dt \leqq \dfrac{3x^{n+1}}{2(n+1)} = \dfrac{3|x|^{n+1}}{2(n+1)}$

$$\left|\int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}dt\right| = \left|\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \frac{|-x|^{n+1}}{n+1} = \frac{|x|^{n+1}}{n+1}$$

(ii)　$-\dfrac{1}{3} \leqq x \leqq 0$ のとき　$\left|\int_0^x \dfrac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \dfrac{|x|^{n+1}}{n+1}$

$$\left|\int_{-x}^0 \frac{t^n}{1-t}dt\right| = \left|\int_0^{-x} \frac{t^n}{1-t}dt\right| \leqq \frac{3(-x)^{n+1}}{2(n+1)} = \frac{3|x|^{n+1}}{2(n+1)}$$

(i)(ii)のいずれの場合も③は，$\left| f(x)-f(-x)-\log\dfrac{1+x}{1-x}\right| \leqq \dfrac{5|x|^{n+1}}{2(n+1)}$ ………④

(3)　④に $x=\dfrac{1}{3}$ を代入すると，$\left| f\left(\dfrac{1}{3}\right)-f\left(-\dfrac{1}{3}\right)-\log 2\right| \leqq \dfrac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)}$

$n=2$ のとき，$\dfrac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)} = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^3 = \dfrac{5}{162} > \dfrac{1}{100}$

$n=3$ のとき，$\dfrac{5\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{2(n+1)} = \dfrac{5}{2}\cdot\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{3}\right)^4 = \dfrac{5}{648} \leqq \dfrac{1}{100}$

よって，$n=3$ のとき，$\log 2$ と $f\left(\dfrac{1}{3}\right)-f\left(-\dfrac{1}{3}\right)$ との誤差は $\dfrac{1}{100}$ 以下となるので,

求める $\log 2$ の近似値は,

$$f\left(\frac{1}{3}\right)-f\left(-\frac{1}{3}\right) = \left(\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}\right)-\left(-\frac{1}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{9}-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{27}\right) = \frac{56}{81}$$

コメント

(3)の結論を導くのに，たいへん丁寧な誘導がつけられています。

問　題

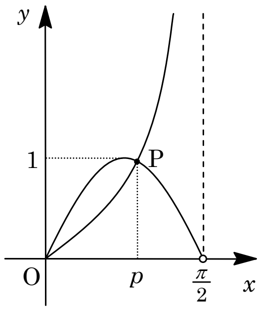
定数 $a>0$ に対し，曲線 $y=a\tan x$ の $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_1，曲線 $y=\sin 2x$ の $0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ の部分を C_2 とする。以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 が原点以外に交点をもつための a の条件を求めよ。

(2)　a が(1)の条件を満たすとき，原点以外の C_1 と C_2 の交点を P とし，P の x 座標を p とする。P における C_1 と C_2 のそれぞれの接線が直交するとき，a および $\cos 2p$ の値を求めよ。

(3)　a が(2)で求めた値のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2017]

解答例



(1)　$0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}$ において，$C_1: y=a\tan x\ (a>0)$ ……①，$C_2: y=\sin 2x$ ……②を連立して，

$$a\tan x=\sin 2x\,,\ \ \frac{a\sin x}{\cos x}=2\sin x\cos x$$

すると，$x\neq 0$ から $2\cos^2 x=a$，すなわち $\cos x=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ となり，①と②が $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で交点をもつための a の条件は，

$$0<\sqrt{\frac{a}{2}}<1,\ \ 0<a<2$$

(2)　(1)より，$\cos p=\sqrt{\dfrac{a}{2}}$ ………③

さて，①より $y'=\dfrac{a}{\cos^2 x}$，②より $y'=2\cos 2x$ なので，条件から P における接線が直交することより，

$$\frac{a}{\cos^2 p}\cdot 2\cos 2p=-1,\ \ 2a(2\cos^2 p-1)=-\cos^2 p$$

③を代入すると $2a(a-1)=-\dfrac{a}{2}$ となり，$2a^2-\dfrac{3}{2}a=0$

$0<a<2$ より $a=\dfrac{3}{4}$ となり，このとき $\cos 2p=2\cdot\dfrac{a}{2}-1=-\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　$a=\dfrac{3}{4}$ のとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^p\left(\sin 2x-\frac{3}{4}\tan x\right)dx=\left[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\log|\cos x|\right]_0^p$$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 2p-1)+\frac{3}{4}\log|\cos p|=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{4}-1\right)+\frac{3}{4}\log\sqrt{\frac{3}{8}}=\frac{5}{8}+\frac{3}{8}\log\frac{3}{8}$$

コメント

微積分の総合問題です。計算は穏やかです。

問　題

C_1，C_2をそれぞれ次式で与えられる放物線の一部分とする。

$$C_1 : y = -x^2 + 2x\ (0 \leqq x \leqq 2),\ C_2 : y = -x^2 - 2x\ (-2 \leqq x \leqq 0)$$

また，aを実数とし，直線$y = a(x+4)$をlとする。

(1)　直線lとC_1が異なる2つの共有点をもつためのaの値の範囲を求めよ。

以下，aが(1)の条件を満たすとする。このとき，lとC_1で囲まれた領域の面積をS_1，x軸とC_2で囲まれた領域でlの下側にある部分の面積をS_2とする。

(2)　S_1をaを用いて表せ。

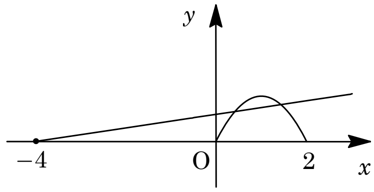
(3)　$S_1 = S_2$を満たす実数aが$0 < a < \dfrac{1}{5}$の範囲に存在することを示せ。　[2015]

解答例

(1)　$C_1 : y = -x^2 + 2x$　$(0 \leqq x \leqq 2)$　と　$l : y = a(x+4)$

の式を連立すると，$-x^2 + 2x = a(x+4)$から，

$$x^2 + (a-2)x + 4a = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$



lとC_1が$0 < x < 2$で接する条件は，①より，

$$D = (a-2)^2 - 16a = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$0 < -\frac{a-2}{2} < 2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$a^2 - 20a + 4 = 0$，$a = 10 \pm 4\sqrt{6}$となり，③から$-2 < a < 2$なので，満たすaの値は，$a = 10 - 4\sqrt{6}$である。したがって，lとC_1が異なる2つの共有点をもつ条件は，右上図より，$0 \leqq a < 10 - 4\sqrt{6}$である。

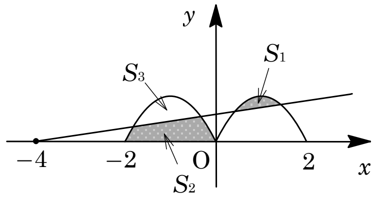
(2)　①の解$x = \dfrac{-(a-2) \pm \sqrt{a^2 - 20a + 4}}{2}$を，$x = \alpha$，$\beta$ $(\alpha < \beta)$とおくと，lとC_1で囲まれた領域の面積をS_1は，

$$S_1 = \int_\alpha^\beta \{-x^2 + 2x - a(x+4)\}dx = -\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$= \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2 - 20a + 4}\right)^3$$

(3)　まず，x軸とC_1で囲まれた領域の面積は，

$$\int_0^2 (-x^2 + 2x)dx = \left[-\frac{x^3}{3} + x^2\right]_0^2 = \frac{4}{3}$$



次に，C_1とy軸対称である$C_2 : y = -x^2 - 2x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$と$l : y = a(x+4)$の式を連立すると，$x^2 + (a+2)x + 4a = 0 \cdots\cdots\cdots ④$

ここで，lとC_2で囲まれた領域の面積をS_3とおき，(2)と同様にすると，④の解が$x = \dfrac{-(a+2) \pm \sqrt{a^2 - 12a + 4}}{2}$より，$S_3 = \dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2 - 12a + 4}\right)^3$となる。

さて，条件より x 軸と C_2 で囲まれた領域で l の下側にある部分の面積 S_2 に対し，$F(a)=S_1-S_2$ とおくと，$S_2=\dfrac{4}{3}-S_3$ より，

$$F(a)=\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-20a+4})^3+\frac{1}{6}(\sqrt{a^2-12a+4})^3-\frac{4}{3}$$

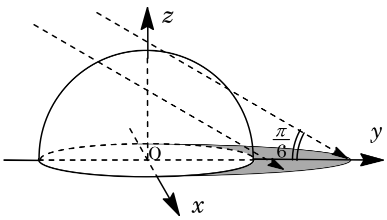
すると，$F(0)=\dfrac{4}{3}>0$，$F\left(\dfrac{1}{5}\right)=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1+41\sqrt{41}}{5^3}-8\right)<0$ より，$F(a)=0$ すなわち $S_1=S_2$ を満たす実数 a が $0<a<\dfrac{1}{5}$ の範囲に存在する。

コメント

$10-4\sqrt{6}\fallingdotseq 0.202$ より，(3)の結論は，図からほとんど明らかなのですが……。

問　題

座標空間内に，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\frac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。



(1)　球の $z\geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1<k<1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x=k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2)　xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3)　$z\geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　xy 平面上の点 $(x_0,\ y_0,\ 0)$ を通り，方向ベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ の直線は，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ 0)+t(0,\ \sqrt{3},\ -1)\quad (t \text{ は実数})\cdots\cdots\cdots①$$

また，原点を中心とする半径 1 の球は，$x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots②$

①②を連立すると，$x_0{}^2+(y_0+\sqrt{3}t)^2+(-t)^2=1$

$$4t^2+2\sqrt{3}y_0t+x_0{}^2+y_0{}^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

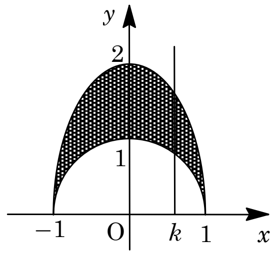
条件より，①と②が $z\geqq 0$ すなわち $-t\geqq 0\ (t\leqq 0)$ で接することより，

$$D/4=3y_0{}^2-4(x_0{}^2+y_0{}^2-1)=0\cdots\cdots④,\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}y_0\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より $4x_0{}^2+y_0{}^2=4$，⑤より $y_0\geqq 0$ となり，xy 平面上にできる影の境界線は，

$$4x^2+y^2=4,\quad y\geqq 0$$

すると，球の外の影は右図の網点部となる。そして，直線 $x=k$ と領域の境界線 $4x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$ の交点は，それぞれ $y=\sqrt{4-4k^2}=2\sqrt{1-k^2}$，$y=\sqrt{1-k^2}$ であるので，求める y 座標の範囲は，$\sqrt{1-k^2}\leqq y\leqq 2\sqrt{1-k^2}$

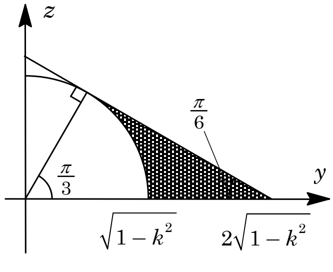


(2)　右図の網点部の面積は，$\frac{1}{2}(\pi\cdot 1\cdot 2-\pi\cdot 1^2)=\frac{1}{2}\pi$ である。

(3)　球の外で光が当たらない部分を平面 $x=k$ で切断すると，その切り口は右図の網点部となる。

その面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}$$



まとめると，

$$S(k)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(1-k^2)$$

よって，球の外で光が当たらない部分の体積Vは，

$$V=\int_{-1}^{1}S(k)dk=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\int_{0}^{1}(1-k^2)dk=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{9}\pi$$

コメント

20 年ほど前には，よく出題された平行光源が題材となっています。その後，高校課程では空間図形の分野は薄められ，見かけることが少なくなりました。ただ，今年からの現行課程では，教科書の記述からすると，空間図形の分野は強化されていますので，繰り返す歴史の一つの例かもしれません。

問　題

関数 $f(x)=x-\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。曲線 $y=f(x)$ の接線で傾きが $\dfrac{1}{2}$ となるものを l とする。

(1) l の方程式と接点の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

(2) a は(1)で求めたものとする。曲線 $y=f(x)$，直線 $x=a$，および x 軸で囲まれた領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2014]

解答例

(1) $f(x)=x-\sin x\ \left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，$f'(x)=1-\cos x$

さて，曲線 $y=f(x)$ に対して，傾き $\dfrac{1}{2}$ の接線 l の接点を $(a,\ b)$ とすると，$f'(a)=1-\cos a=\dfrac{1}{2}$ から，$\cos a=\dfrac{1}{2}$ となり，

$$a=\frac{\pi}{3},\quad b=\frac{\pi}{3}-\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

接線 l の方程式は，$y-\left(\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{\pi}{3}\right)$ より，$y=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{\pi}{6}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において，$x\geqq\sin x$ から $f(x)\geqq 0$ となり，求める回転体の体積 V は，

$$\begin{aligned}V&=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\{f(x)\}^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(x^2-2x\sin x+\sin^2 x)dx\\&=\pi\Big[\frac{x^3}{3}\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+2\pi\Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}-2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos x\,dx+\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1-\cos 2x)dx\\&=\frac{\pi^4}{81}+\frac{\pi^2}{3}-2\pi\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}\\&=\frac{\pi^4}{81}+\frac{\pi^2}{3}-\sqrt{3}\pi+\frac{\pi^2}{6}-\frac{\sqrt{3}}{8}\pi=\frac{\pi^4}{81}+\frac{\pi^2}{2}-\frac{9\sqrt{3}}{8}\pi\end{aligned}$$

コメント

微積分の基本問題です。勢いをつけるために設定された問題でしょう。

問　題

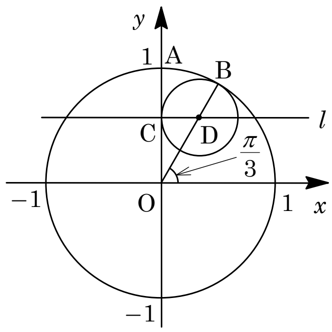
原点 O を中心とし，点 A$(0,\ 1)$ を通る円を S とする。点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ で円 S に内接する円 T が，点 C で y 軸に接しているとき，以下の問いに答えよ。

(1) 円 T の中心 D の座標と半径を求めよ。

(2) 点 D を通り x 軸に平行な直線を l とする。円 S の短い方の弧 AB，円 T の短い方の弧 BC，および線分 AC で囲まれた図形を l のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2013]

解答例

(1) 円 S 上の点 B$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ に対して，条件より，円 T の中心 D は線分 OB 上にあることより，t を正の実数として，D$(t,\ \sqrt{3}t)$ とおくことができる。



すると，DB = DC から，

$$\sqrt{\left(\frac{1}{2}-t\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}t\right)^2}=t$$

$$\left(\frac{1}{2}-t\right)\sqrt{1^2+(\sqrt{3})^2}=t$$

これより，$1-2t=t$ から $t=\dfrac{1}{3}$ となり，円 T は中心 D$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$，半径 $\dfrac{1}{3}$ である。

(2) 円 $S: x^2+y^2=1$，$T: \left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+\left(y-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$ に対し，その上側の半円はそれぞれ $y=\sqrt{1-x^2}$，$y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\dfrac{1}{9}-\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2}$ と表せる。ここで，弧 AB，弧 BC を直線 $l: y=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積をそれぞれ V_1，V_2 とすると，

$$V_1=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\sqrt{1-x^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{4}{3}-x^2-\frac{2}{3}\sqrt{3}\sqrt{1-x^2}\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{4}{3}x-\frac{x^3}{3}\right]_0^{\frac{1}{2}}-\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$$

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{\sqrt{3}}{3}+\sqrt{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\right\}^2dx=\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{1}{9}-\left(x-\frac{1}{3}\right)^2\right\}dx$$

$$=\pi\left[\frac{1}{9}x-\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{3}\right)^3\right]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{18}\pi-\frac{1}{72}\pi=\frac{1}{24}\pi$$

よって，求める立体の体積を V とすると，

$$V=V_1-V_2=\frac{3}{8}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2-\frac{1}{24}\pi=\frac{1}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}\pi^2$$

コメント

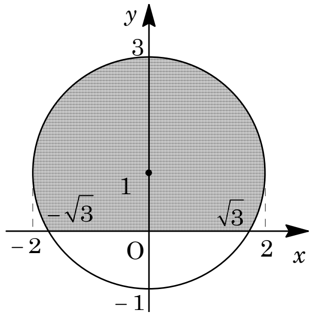
回転体の体積を求める計算問題です。

問　題

円 $x^2+(y-1)^2=4$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2012]

解答例

円 $x^2+(y-1)^2=4$ ……(＊)で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は，右図の網点部を x 軸のまわりに回転した立体に等しい。



(＊)から，$y=1\pm\sqrt{4-x^2}$ となり，V_1，V_2 を，

$$V_1=\pi\int_0^2(1+\sqrt{4-x^2})^2dx$$

$$V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^2(1-\sqrt{4-x^2})^2dx$$

すると，求める体積 V は，$V=2(V_1-V_2)$ となる。

さて，$V_1=\pi\int_0^2(5-x^2+2\sqrt{4-x^2})dx$，$V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^2(5-x^2-2\sqrt{4-x^2})dx$ から，

$$V_1-V_2=\pi\int_0^{\sqrt{3}}(5-x^2)dx+2\pi\int_0^2\sqrt{4-x^2}\,dx+2\pi\int_{\sqrt{3}}^2\sqrt{4-x^2}\,dx$$

$$=\pi\Big[\,5x-\frac{x^3}{3}\,\Big]_0^{\sqrt{3}}+2\pi\cdot\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{2}+2\pi\Big(\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{3}\cdot1\Big)$$

$$=4\sqrt{3}\pi+2\pi^2+\frac{2}{3}\pi^2-\sqrt{3}\pi=3\sqrt{3}\pi+\frac{8}{3}\pi^2$$

よって，$V=2\Big(3\sqrt{3}\pi+\frac{8}{3}\pi^2\Big)=6\sqrt{3}\pi+\frac{16}{3}\pi^2$ である。

コメント

回転体の体積を求める基本問題です。なお，無理関数の定積分については，図を省いていますが，おうぎ形の面積などを対応させて計算しています。

問　題

曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) $x\geqq 1$ の範囲において，曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。　[2011]

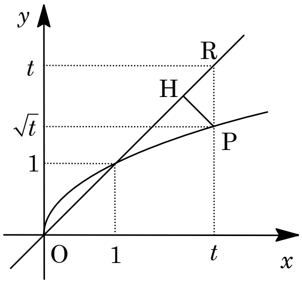
解答例

(1) 曲線 $y=\sqrt{x}$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ \sqrt{t})$ から直線 $y=x$ ……①への垂線の方程式は，

$$y-\sqrt{t}=-(x-t),\quad y=-x+t+\sqrt{t}\ \cdots\cdots②$$

①②より，$x=-x+t+\sqrt{t}$，$x=y=\dfrac{t+\sqrt{t}}{2}$

よって，点 H の座標は，$\left(\dfrac{t+\sqrt{t}}{2},\ \dfrac{t+\sqrt{t}}{2}\right)$である。



(2) $t>1$ から，点 P と直線①の距離は，

$$\mathrm{PH}=\frac{|t-\sqrt{t}|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}$$

ここで，$\mathrm{R}(t,\ t)$ とおくと，△PRH は直角二等辺三角形となり，曲線 $y=\sqrt{x}$，直線 $y=x$，線分 PH とで囲まれた図形の面積 S_1 は，

$$\begin{aligned}S_1&=\frac{1}{2}(1+t)(t-1)-\int_1^t\sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\sqrt{t}}{\sqrt{2}}\right)^2\\&=\frac{1}{2}(t^2-1)-\frac{2}{3}(t\sqrt{t}-1)-\frac{1}{4}(t^2-2t\sqrt{t}+t)\\&=\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{6}t\sqrt{t}-\frac{1}{4}t+\frac{1}{6}\end{aligned}$$

(3) 曲線 $y=\sqrt{x}$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積 S_2 は，

$$S_2=\int_0^1\sqrt{x}\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1^2=\frac{2}{3}-\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$ より，$\dfrac{1}{4}t^2-\dfrac{1}{6}t\sqrt{t}-\dfrac{1}{4}t+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$ となり，$t(3t-2\sqrt{t}-3)=0$

$t>1$ から $\sqrt{t}>1$ なので，$\sqrt{t}=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$ となり，$t=\dfrac{11+2\sqrt{10}}{9}$

コメント

定積分の計算をなるべく回避し，三角形や台形の面積公式を利用して，計算を進めています。

問　題

中心が$(0,\ a)$，半径aの円をxy平面上のx軸の上をxの正の方向に滑らないように転がす。このとき円上の定点 P が原点$(0,\ 0)$を出発するとする。次の問いに答えよ。

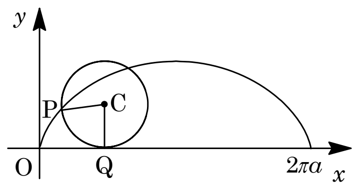
(1) 円が角tだけ回転したとき，点 P の座標を求めよ。

(2) tが 0 から2πまで動いて円が 1 回転したときの点 P の描く曲線をCとする。曲線Cとx軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。

(3) (2)の曲線の長さを求めよ。 [2010]

解答例

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$とし，半径aの円とx軸の接点を Q とおくと，線分 OQ の長さと弧 PQ の長さが等しいことより，$\mathrm{Q}(at,\ 0)$となる。すると，円の中心は，$\mathrm{C}(at,\ a)$である。



さて，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$は$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}$を$-t$だけ回転したものより，

$$\begin{pmatrix} x-at \\ y-a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(-t) & -\sin(-t) \\ \sin(-t) & \cos(-t) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ -a \end{pmatrix}$$

よって，$x-at=-a\sin t$，$y-a=-a\cos t$

$$x=a(t-\sin t),\quad y=a(1-\cos t)$$

(2) 曲線Cとx軸とで囲まれる部分の面積をSとすると，

$$S=\int_0^{2\pi a} y\,dx=\int_0^{2\pi} a(1-\cos t)\cdot a(1-\cos t)\,dt$$

$$=a^2\int_0^{2\pi}\left(1-2\cos t+\frac{1+\cos 2t}{2}\right)dt=a^2\cdot\left(1+\frac{1}{2}\right)\cdot 2\pi=3\pi a^2$$

(3) 曲線Cの長さをLとすると，

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=a^2(1-\cos t)^2+a^2\sin^2 t=2a^2(1-\cos t)=4a^2\sin^2\frac{t}{2}$$

よって，$L=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{4a^2\sin^2\frac{t}{2}}\,dt=2a\int_0^{2\pi}\sin\frac{t}{2}\,dt=-4a\left[\cos\frac{t}{2}\right]_0^{2\pi}=8a$

コメント

サイクロイドについての基本的な問題です。しかし，なぜ範囲外の弧長の設問もあるのかは不明です。

問　題

直線$l : y = x + a$が曲線$C : y = 2\sin x\ (-\pi \leqq x \leqq \pi)$に接しているとき，次の問いに答えよ。ただし, $a \geqq 0$とする。

(1)　aの値を求めよ。

(2)　曲線Cと直線lで囲まれた図形の$y \geqq 0$の範囲にある部分を，x軸のまわりに回転する。この回転体の体積を求めよ。　[2005]

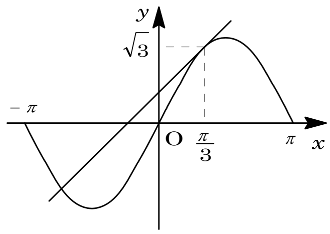
解答例

(1)　$C : y = 2\sin x$より，$y' = 2\cos x$

ここで，$y' = 1$とすると，$\cos x = \dfrac{1}{2}$

$-\pi \leqq x \leqq \pi$から$x = \pm\dfrac{\pi}{3}$となり，接点の座標は,

$$\left(\frac{\pi}{3},\ \sqrt{3}\right),\ \left(-\frac{\pi}{3},\ -\sqrt{3}\right)$$



$x = \dfrac{\pi}{3}$のとき，接線の方程式は,

$$y - \sqrt{3} = x - \frac{\pi}{3},\quad y = x + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}$$

$x = -\dfrac{\pi}{3}$のとき，接線の方程式は，$y + \sqrt{3} = x + \dfrac{\pi}{3}$，$y = x - \sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}$

すると, $a \geqq 0$から，$a = \sqrt{3} - \dfrac{\pi}{3}$である。

(2)　接線とx軸の交点は，$y = 0$として，$x = -\sqrt{3} + \dfrac{\pi}{3}$となる。

よって，求める回転体の体積をVとすると,

$$V = \frac{1}{3}\pi(\sqrt{3})^2\left(\frac{\pi}{3} + \sqrt{3} - \frac{\pi}{3}\right) - \pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\sin x)^2 dx$$

$$= \sqrt{3}\pi - 2\pi\int_0^{\frac{\pi}{3}}(1 - \cos 2x)\,dx = \sqrt{3}\pi - 2\pi\left[x - \frac{1}{2}\sin 2x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$

$$= \frac{3}{2}\sqrt{3}\pi - \frac{2}{3}\pi^2$$

コメント

微積分の基本問題です。

問　題

xy 平面上で，$x=r(t)\cos t$，$y=r(t)\sin t\ (0\leqq t\leqq\pi)$ で表される曲線を C とする。

(1)　$r(t)=e^{-t}$ のとき, x の最小値と y の最大値を求め, C の概形を図示せよ。

(2)　一般に，すべての実数 t で微分可能な関数 $r(t)$ に対し,

$$\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt=\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

が成り立つことを示せ。ここで，$r'(t)$ は $r(t)$ の導関数である。

(3)　(1)で求めた曲線 C と x 軸とで囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V は，$V=\dfrac{2\pi}{3}\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-3t}\sin t\,dt$ と表せることを示せ。　[2003]

解答例

(1)　$x=e^{-t}\cos t$，$y=e^{-t}\sin t$ より,

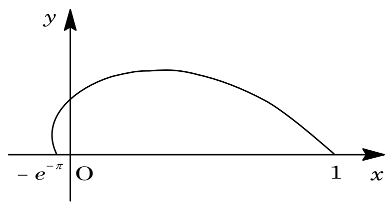
$$\frac{dx}{dt}=-e^{-t}(\sin t+\cos t)=-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t+\frac{\pi}{4}\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=-e^{-t}(\sin t-\cos t)=-\sqrt{2}\,e^{-t}\sin\left(t-\frac{\pi}{4}\right)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{4}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$		$-$		$-$	0	$+$	
x	1	$\searrow$		$\searrow$		$\nearrow$	$-e^{-\pi}$
$\frac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
y	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\searrow$	0

$t=\dfrac{1}{4}\pi$ のとき $\left(\dfrac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\ \dfrac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}\right)$,

$t=\dfrac{3}{4}\pi$ のとき $\left(-\dfrac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}},\ \dfrac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}\right)$ となるので, x の最小値は $-\dfrac{e^{-\frac{3}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$ $\left(t=\dfrac{3}{4}\pi\right)$, y の最大値は $\dfrac{e^{-\frac{1}{4}\pi}}{\sqrt{2}}$ $\left(t=\dfrac{1}{4}\pi\right)$ である。



(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2 r'(t)\sin^2 t\cos t\,dt$

$$=\left[\frac{1}{3}\{r(t)\}^3\sin^2 t\cos t\right]_0^{\pi}-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3(2\sin t\cos^2 t-\sin^3 t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{3}\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\{2\sin t(1-\sin^2 t)-\sin^3 t\}\,dt=\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3 t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt$$

(3)　x の最小値を x_0 とおくと, (2)より,

$$V=\int_{x_0}^{1}\pi y^2dx-\int_{x_0}^{-e^{-\pi}}\pi y^2dx=\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{0}y^2\frac{dx}{dt}dt-\pi\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}y^2\frac{dx}{dt}dt$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}y^2\frac{dx}{dt}dt=-\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2\sin^2t\{r'(t)\cos t-r(t)\sin t\}dt$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^2r'(t)\sin^2t\cos t\,dt+\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\sin^3t\,dt$$

$$=-\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\left(\sin^3t-\frac{2}{3}\sin t\right)dt+\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\sin^3t\,dt$$

$$=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}\{r(t)\}^3\sin t\,dt=\frac{2}{3}\pi\int_0^{\pi}e^{-3t}\sin t\,dt$$

コメント

パラメータ曲線を題材とした微積分の基本的な問題です。(3)の計算も, (2)を利用すれば繁雑ではありません。

問　題

平面上を運動する点P$(x,\ y)$の時刻tでのx座標とy座標が

$$x=\frac{e^t-e^{-t}}{2},\ \ y=\frac{e^t+e^{-t}}{2}$$

で表されている。ただし，eは自然対数の底である。原点をO，点$(0,\ 1)$をMとする。tが$t\geqq 0$の範囲で変化したとき，点Pが描く曲線をCとする。時刻tにおいて，曲線C，線分 OM，および線分 OP で囲まれる図形の面積を$A(t)$で表し，曲線 C と線分 MP で囲まれる図形の面積を$S(t)$で表す。次の問いに答えよ。

(1) 点P$(x,\ y)$の座標x, yに対してyをxを用いて表せ。

(2) 時刻tを用いて$A(t)$と$S(t)$を表せ。

(3) $A(t)-S(t)$が最大となる時刻tを求めよ。　[2002]

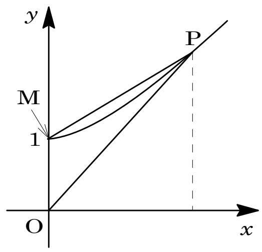
解答例

(1) $x=\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}$……①，$y=\dfrac{e^t+e^{-t}}{2}$……②に対して

①＋②より$e^t=x+y$……③，①－②より$-e^{-t}=x-y$……④なので，

$$-1=(x+y)(x-y),\ \ x^2-y^2=-1,\ \ y^2=x^2+1$$

②より，$y>0$なので，$y=\sqrt{x^2+1}$



(2) $t\geqq 0$のとき，$e^t\geqq 1$なので，

③より$x+y\geqq 1$，④より$-1\leqq x-y<0$

$$y\geqq -x+1,\ \ x<y\leqq x+1$$

よって曲線をCは，$y=\sqrt{x^2+1}\ (x\geqq 0)$

すると，$A(t)=\displaystyle\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{e^t-e^{-t}}{2}\cdot\frac{e^t+e^{-t}}{2}$

$$=\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx-\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})$$

ここで，$x=\dfrac{e^u-e^{-u}}{2}$とおくと，$dx=\dfrac{e^u+e^{-u}}{2}du$より，

$$\int_0^{\frac{e^t-e^{-t}}{2}}\sqrt{x^2+1}\,dx=\int_0^t\frac{e^u+e^{-u}}{2}\cdot\frac{e^u+e^{-u}}{2}du=\frac{1}{4}\int_0^t(e^{2u}+2+e^{-2u})du$$

$$=\frac{1}{4}\Big[\frac{1}{2}e^{2u}+2u-\frac{1}{2}e^{-2u}\Big]_0^t=\frac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})+\frac{1}{2}t$$

よって，$A(t)=\dfrac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})+\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{8}(e^{2t}-e^{-2t})=\dfrac{1}{2}t$

また，$S(t)=\triangle\text{OMP}-A(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{e^t-e^{-t}}{2}-\dfrac{1}{2}t=\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})-\dfrac{1}{2}t$

(3) $A(t)-S(t)=F(t)$とおくと，$F(t)=\dfrac{1}{2}t-\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})+\dfrac{1}{2}t=t-\dfrac{1}{4}(e^t-e^{-t})$

$$F'(t)=1-\frac{1}{4}(e^t+e^{-t})$$
$$=-\frac{e^{2t}-4e^t+1}{4e^t}$$

t	0	$\cdots$	$\log(2+\sqrt{3})$	$\cdots$
$F'(t)$		$+$	0	$-$
$F(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

$F'(t)=0$ とすると，$e^t=2\pm\sqrt{3}$

$e^t\geqq 1$ なので $e^t=2+\sqrt{3}$，$t=\log(2+\sqrt{3})$

よって，右表より，$t=\log(2+\sqrt{3})$ のとき，$F(t)$ は最大となる。

コメント

置換積分によって面積を求める頻出問題です。今年の筑波大でも，双曲線を題材とした類題が出ています。

問　題

空間内に以下のような円柱と正四角柱を考える。円柱の中心軸は x 軸で，中心軸に直交する平面による切り口は半径 r の円である。正四角柱の中心軸は z 軸で，xy 平面による切り口は 1 辺の長さが $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形で，その正方形の対角線は x 軸と y 軸である。$0<r\leqq\sqrt{2}$ とし，円柱と正四角柱の共通部分を K とする。

(1)　高さが $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$ で xy 平面に平行な平面と K との交わりの面積を求めよ。

(2)　K の体積 $V(r)$ を求めよ。

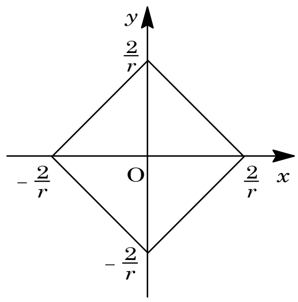
(3)　$0<r\leqq\sqrt{2}$ における $V(r)$ の最大値を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　中心軸が x 軸で，断面が半径 r の円である円柱は，$y^2+z^2\leqq r^2$ ………①

また，中心軸が z 軸で，断面が右図のような 1 辺 $\dfrac{2\sqrt{2}}{r}$ の正方形である正四角柱は，

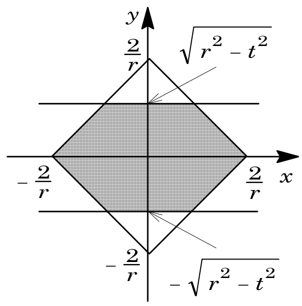
$$|x|+|y|\leqq\frac{2}{r}\ \cdots\cdots\cdots ②$$



①②の共通部分を平面 $z=t\ (-r\leqq t\leqq r)$ で切ったときの切り口は，$y^2+t^2\leqq r^2$，$|x|+|y|\leqq\dfrac{2}{r}$

$$-\sqrt{r^2-t^2}\leqq y\leqq\sqrt{r^2-t^2}\ ,\ |x|+|y|\leqq\frac{2}{r}$$

さて，$0<r\leqq\sqrt{2}$ から，$\dfrac{2}{r}\geqq r\geqq\sqrt{r^2-t^2}$



よって，$z=t$ での切り口は右図の網点部となり，その面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}\right)^2-\frac{1}{2}\left(\frac{2}{r}-\sqrt{r^2-t^2}\right)^2\right\}\times 4$$
$$=\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2$$

(2)　共通部分 K が xy 平面に関して対称なので，

$$V(r)=2\int_0^r S(t)\,dt=2\int_0^r\left(\frac{8}{r}\sqrt{r^2-t^2}+2t^2-2r^2\right)dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^r\sqrt{r^2-t^2}\,dt=\pi r^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{4}\pi r^2$ より，

$$V(r)=\frac{16}{r}\cdot\frac{1}{4}\pi r^2+2\Big[\frac{2}{3}t^3-2r^2t\Big]_0^r=4\pi r-\frac{8}{3}r^3$$

(3)　$V'(r) = 4\pi - 8r^2 = -4(2r^2 - \pi)$

r	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$V'(r)$		$+$	0	$-$	
$V(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より，$0 < r \leqq \sqrt{2}$ において，$r = \sqrt{\dfrac{\pi}{2}}$ のときに $V(r)$ は最大となり，最大値は，

$$V\left(\sqrt{\frac{\pi}{2}}\right) = 4\pi\sqrt{\frac{\pi}{2}} - \frac{8}{3}\cdot\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{\pi}{2}} = \frac{4\sqrt{2}}{3}\pi\sqrt{\pi}$$

である。

コメント

10 年も前になりますが，直交する円柱と円柱の共通部分の体積を求める問題が 1991 年に出ました。今年は円柱と正四角柱でしたが，それにしても，現行課程になってもこの種類の問題はよく出題されます。

問　題

関数 $f(x)$ の第 2 次導関数はつねに正とし，関数 $y=f(x)$ のグラフ G 上の点 $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線と x 軸のなす角を $\theta(t)$ とする。ただし，$\theta(t)$ は $-\dfrac{\pi}{2}<\theta(t)<\dfrac{\pi}{2}$ で接線の傾きが正，負，0 に従って正，負，0 の値をとるものとする。また，点 P における G の法線上に P から距離 1 の点 $\mathrm{Q}(\alpha(t),\ \beta(t))$ を G の下側にとる。

(1) $\theta(t)$ はつねに増加することを示せ。

(2) $\alpha(t)$，$\beta(t)$ を求めよ。

(3) t が a から b（$a<b$）まで変化するとき，点 P，Q が描く曲線の長さをそれぞれ L_1，L_2 とする。L_2-L_1 を $\theta(a)$ と $\theta(b)$ を用いて表せ。　[2001]

解答例

(1) $\mathrm{P}(t,\ f(t))$ における接線の傾きは $f'(t)$ より，$\tan\theta(t)=f'(t)$ となる。

$$\frac{1}{\cos^2\theta(t)}\cdot\theta'(t)=f''(t),\quad \theta'(t)=f''(t)\cos^2\theta(t)$$

条件より，$f''(t)>0$ なので $\theta'(t)>0$，よって $\theta(t)$ はつねに増加する。

(2) ①より，接線の方向ベクトルは $(1,\ \tan\theta(t))$ とおけ，下向きの法線ベクトルは $\vec{n}=(\tan\theta(t),\ -1)$ となり，$|\vec{n}|=\sqrt{\tan^2\theta(t)+1}=\dfrac{1}{\sqrt{\cos^2\theta(t)}}=\dfrac{1}{\cos\theta(t)}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\cos\theta(t)\vec{n}=(t,\ f(t))+\cos\theta(t)(\tan\theta(t),\ -1)$$
$$=(t,\ f(t))+(\sin\theta(t),\ -\cos\theta(t))=(t+\sin\theta(t),\ f(t)-\cos\theta(t))$$

よって，$\alpha(t)=t+\sin\theta(t)$，$\beta(t)=f(t)-\cos\theta(t)$

(3) (1)より，$1+\{f'(t)\}^2=1+\tan^2\theta(t)=\dfrac{1}{\cos^2\theta(t)}$ なので，

$$L_1=\int_a^b\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1}{\cos\theta(t)}\,dt$$

(2)から，$\{\alpha'(t)\}^2+\{\beta'(t)\}^2=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{f'(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$

$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2+\{\tan\theta(t)+\sin\theta(t)\theta'(t)\}^2$$
$$=\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2\{1+\tan^2\theta(t)\}=\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}$$

$$L_2=\int_a^b\sqrt{\frac{\{1+\cos\theta(t)\theta'(t)\}^2}{\cos^2\theta(t)}}\,dt=\int_a^b\frac{1+\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}\,dt$$

よって，$L_2-L_1=\displaystyle\int_a^b\frac{\cos\theta(t)\theta'(t)}{\cos\theta(t)}\,dt=\int_a^b\theta'(t)\,dt=\big[\,\theta(t)\,\big]_a^b=\theta(b)-\theta(a)$

コメント

ていねいな誘導がついた，よく練られた問題です。

問　題

定数 a, b を係数とする 2 次関数 $y=-ax^2+b$ のグラフが, 原点を中心とする半径 1 の円と異なる 2 点で接しているとする。ただし, $a>0$ とする。

(1) a, b の条件式, および接点の座標を求めよ。

(2) 与えられた 2 次関数のグラフと x 軸とで囲まれる部分を, y 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積 V を a を用いて表せ。

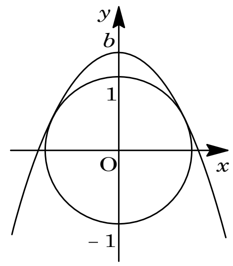
(3) V を最小にする a, b の値, およびそのときの V の値を求めよ。　[2000]

解答例

(1) $y=-ax^2+b$……①と $x^2+y^2=1$……②が接していることより,

②から $x^2=1-y^2$, ①に代入して, $y=-a(1-y^2)+b$

$$ay^2-y-a+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$



$a>0$ より, ③が重解 $y=\dfrac{1}{2a}$ を $0<y<1$ にもつので,

$$D=1+4a(a-b)=0,\ 0<\frac{1}{2a}<1$$

よって, $a>\dfrac{1}{2}$ において, $b=\dfrac{4a^2+1}{4a}$………④

このとき, ②から $x^2=1-\dfrac{1}{4a^2}=\dfrac{4a^2-1}{4a^2}$, $x=\pm\dfrac{\sqrt{4a^2-1}}{2a}$ となるので, 接点の座標は, $\left(\pm\dfrac{\sqrt{4a^2-1}}{2a},\ \dfrac{1}{2a}\right)$となる。

(2) (1)より, $V=\displaystyle\int_0^b \pi x^2dy=\pi\int_0^b -\frac{y-b}{a}dy=-\frac{\pi}{a}\left[\frac{1}{2}y^2-by\right]_0^b=\frac{\pi b^2}{2a}$

$$=\frac{\pi}{2a}\cdot\frac{(4a^2+1)^2}{16a^2}=\frac{\pi(4a^2+1)^2}{32a^3}$$

(3) $f(a)=\dfrac{(4a^2+1)^2}{a^3}$ とおくと, $V=\dfrac{\pi}{32}f(a)$ となる。

$$f'(a)=\frac{16a(4a^2+1)\cdot a^3-(4a^2+1)^2\cdot 3a^2}{a^6}=\frac{(4a^2+1)(4a^2-3)}{a^4}$$

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$
$f'(a)$		$-$	0	$+$
$f(a)$		↘		↗

右表より, $a=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき $f(a)$ は最小値をとる。

このとき④より $b=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$, また最小値は, $V=\dfrac{\pi}{32}f\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{\pi}{32}\cdot\dfrac{128}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}\pi$

コメント

定型的な問題で, 短時間でゲットしたいものです。

問　題

平面上の曲線 C が媒介変数 t を用いて

$$x=\sin t - t\cos t,\quad y=\cos t + t\sin t\quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

で与えられている。

(1)　曲線 C の長さを求めよ。

(2)　曲線 C 上の各点 P において, P における接線と P で直交する直線を考える。この直線上の点で原点までの距離が最短となる点は, P を動かすときどんな図形を描くか。

(3)　$\displaystyle\int_0^{\pi} t\sin 2t\,dt$ を求めよ。

(4)　曲線 C と y 軸および直線 $y=-1$ で囲まれる図形の面積 S を求めよ。　[1998]

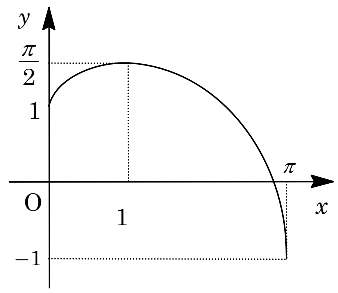
解答例

(1)　$x=\sin t - t\cos t$ ………①, $y=\cos t + t\sin t$ ………②

①より, $\dfrac{dx}{dt}=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$

②より, $\dfrac{dy}{dt}=-\sin t+\sin t+t\cos t=t\cos t$

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$		$+$	0
x	0	$\nearrow$	1	$\nearrow$	π
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
y	1	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\searrow$	-1



$\left(\dfrac{dx}{dt}\right)^2+\left(\dfrac{dy}{dt}\right)^2=t^2\sin^2 t+t^2\cos^2 t=t^2$ から, 曲線 C の長さ l は,

$$l=\int_0^{\pi}\sqrt{t^2}\,dt=\left[\frac{t^2}{2}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

(2)　点 P における接線の方向ベクトル, すなわち法線の法線ベクトルが, $\left(\dfrac{dx}{dt},\ \dfrac{dy}{dt}\right)=t(\sin t,\ \cos t)$ と表せる。

$t\neq 0$ のとき, 法線の方程式は,

$$\sin t(x-\sin t+t\cos t)+\cos t(y-\cos t-t\sin t)=0$$

$$x\sin t+y\cos t=1\ \text{………③}$$

原点から③に下ろした垂線は，法線ベクトルを$(-\cos t,\ \sin t)$とおけるので，

$-x\cos t+y\sin t=0$ ………④

③と④の交点$Q(x,\ y)$が，法線上で原点までの距離が最短となる点である。

③×x＋④×y より，$(x^2+y^2)\sin t=x$，$\sin t=\dfrac{x}{x^2+y^2}$ ………⑤

③×y－④×x より，$(x^2+y^2)\cos t=y$，$\cos t=\dfrac{y}{x^2+y^2}$ ………⑥

⑤⑥より，$\dfrac{x^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}+\dfrac{y^2}{\left(x^2+y^2\right)^2}=1$，よって，$x^2+y^2=1$

ここで，$0<t\leqq\pi$から$0\leqq\sin t\leqq 1$，$-1\leqq\cos t<1$より，$0\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y<1$

また$t=0$のとき，$P(0,\ 1)$から法線は$y=1$で表され，$Q(0,\ 1)$となる。

以上より，点Qの軌跡は，円$x^2+y^2=1$（$x\geqq 0$）

(3) $\displaystyle\int_0^{\pi}t\sin 2t\,dt=\left[-\frac{1}{2}t\cos 2t\right]_0^{\pi}+\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2t\,dt=-\frac{1}{2}\pi$

(4) $\displaystyle S=\int_0^{\pi}(y+1)\,dx=\int_0^{\pi}(\cos t+t\sin t+1)\,t\sin t\,dt$

$\displaystyle =\int_0^{\pi}\left(t\frac{1}{2}\sin 2t+t^2\,\frac{1-\cos 2t}{2}+t\sin t\right)dt$

ここで(3)より，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t\sin 2t\,dt=-\frac{1}{4}\pi$，また，$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi^3}{3}=\frac{\pi^3}{6}$

$\displaystyle\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t^2\cos 2t\,dt=\frac{1}{2}\left\{\left[\frac{1}{2}t^2\sin 2t\right]_0^{\pi}-\int_0^{\pi}t\sin 2t\,dt\right\}=-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}t\sin 2t\,dt=\frac{1}{4}\pi$

$\displaystyle\int_0^{\pi}t\sin t\,dt=\left[-t\cos t\right]_0^{\pi}+\int_0^{\pi}\cos t\,dt=\pi$

よって，$\displaystyle S=-\frac{1}{4}\pi+\frac{\pi^3}{6}-\frac{1}{4}\pi+\pi=\frac{\pi^3}{6}+\frac{1}{2}\pi$

コメント

個々の問題の難易は標準レベルであるものの，かなり多めの計算が必要な問題です。なお(2)で，法線の式③が，円$x^2+y^2=1$上の点$(\sin t,\ \cos t)$における接線の式であることを見抜けば，解を短くすることができます。