1

解答解説のページへ

放物線 $y=ax^2+bx+c\ (a>0)$ を C とし，直線 $y=2x-1$ を l とする。

(1)　放物線 C が点 $(1,\ 1)$ で直線 l と接し，かつ x 軸と共有点をもつための $a,\ b,\ c$ が満たす必要十分条件を求めよ。

(2)　$a=\dfrac{8}{9}$ のとき，(1)の条件のもとで，放物線 C と直線 l および x 軸とで囲まれた部分のうち，第 1 象限にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ 解答解説のページへ

次の問いに答えよ。

(1)　n 個の実数 a_1，a_2，…，a_n に対して，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成立することを示せ。

また，等号が成立するための a_1，a_2，…，a_n についての必要十分条件を求めよ。

(2)　偏りをもつサイコロを 2 回投げるとき，同じ目が続けて出る確率は $\dfrac{1}{6}$ よりも大きいことを示せ。ただし，サイコロが偏りをもつとは，1 から 6 の目が同様に確からしく出ないことをいう。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。

(1) n 以下の非負の整数 k について，関数 $x(1+x)^n$ の導関数の x^k の係数を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$ を示せ。

4

解答解説のページへ

円 $x^2+(y-1)^2=1$ を C, 円 $(x-2)^2+(y-1)^2=1$ を C_0 とする。C, C_0, x 軸に接する円を C_1 とする。C, C_1, x 軸に接し C_0 と異なる円を C_2 とし，これを繰り返して C, C_n, x 軸に接し C_{n-1} と異なる円を C_{n+1} とする。また，円 C_n の半径を a_n とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a_1 を求めよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ の満たす漸化式を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

5

解答解説のページへ

次の条件(＊)を満たすような実数 a で最大のものを求めよ。

(＊)　$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲のすべての x に対して，$\cos x \leqq 1 - ax^2$ が成り立つ。

1　　　　問題のページへ

(1)　$C : y = ax^2 + bx + c\ (a > 0)$ に対し，$y' = 2ax + b$

ここで，C と $l : y = 2x - 1$ が点 $(1,\ 1)$ で接することより，

$$2a + b = 2 \cdots\cdots\cdots ①,\quad a + b + c = 1 \cdots\cdots\cdots ②$$

また，C が x 軸と共有点をもつことより，$b^2 - 4ac \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ③$

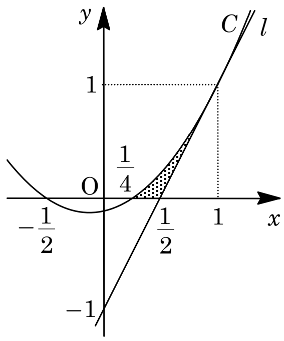
①②から，$b = -2a + 2$，$c = -a + 2a - 2 + 1 = a - 1$

③に代入すると，$(-2a + 2)^2 - 4a(a - 1) \geqq 0$，$a - 1 \leqq 0$ となり，求める条件は，

$$0 < a \leqq 1,\ b = -2a + 2,\ c = a - 1$$

(2)　$a = \dfrac{8}{9}$ のとき，$b = \dfrac{2}{9}$，$c = -\dfrac{1}{9}$ となり，

$$C : y = \frac{8}{9}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}$$



ここで，C と x 軸との交点は，$\dfrac{8}{9}x^2 + \dfrac{2}{9}x - \dfrac{1}{9} = 0$ から，

$$(2x + 1)(4x - 1) = 0,\quad x = -\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}$$

さて，C と l および x 軸で囲まれた右図の網点部の面積を S とすると，

$$S = \int_{\frac{1}{4}}^{1} \left(\frac{8}{9}x^2 + \frac{2}{9}x - \frac{1}{9}\right)dx - \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{2}\right)\cdot 1 = \frac{1}{9}\left[\frac{8}{3}x^3 + x^2 - x\right]_{\frac{1}{4}}^{1} - \frac{1}{4}$$

$$= \frac{1}{9}\left(\frac{8}{3}\cdot\frac{63}{64} + \frac{15}{16} - \frac{3}{4}\right) - \frac{1}{4} = \frac{1}{9}\cdot\frac{45}{16} - \frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$

［解　説］

微積分の基本問題です。計算は易しめです。

2

問題のページへ

(1) まず，$n=1$ のときは，$\left(\sum_{k=1}^{1} a_k\right)^2 = 1\cdot\sum_{k=1}^{1} {a_k}^2$ である。

以下，$n \geqq 2$ のとき，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ が成立することを，数学的帰納法で示す。

(i) $n=2$ のとき

$$2({a_1}^2+{a_2}^2)-(a_1+a_2)^2 = {a_1}^2+{a_2}^2-2a_1a_2 = (a_1-a_2)^2 \geqq 0$$

よって，$\left(\sum_{k=1}^{2} a_k\right)^2 \leqq 2\sum_{k=1}^{2} {a_k}^2$ が成立する。等号成立は $a_1=a_2$ のときである。

(ii) $n=k$ のとき

$(a_1+a_2+\cdots+a_k)^2 \leqq k({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2)$ の成立を仮定する。なお，等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_k$ のときとする。

$$\begin{aligned}
&(k+1)({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2+{a_{k+1}}^2)-(a_1+a_2+\cdots+a_k+a_{k+1})^2\\
&\geqq k{a_{k+1}}^2+({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2+{a_{k+1}}^2)-2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}-{a_{k+1}}^2\\
&=({a_1}^2+{a_2}^2+\cdots+{a_k}^2)-2(a_1+a_2+\cdots+a_k)a_{k+1}+k{a_{k+1}}^2\\
&=(a_1-a_{k+1})^2+(a_2-a_{k+1})^2+\cdots+(a_k-a_{k+1})^2 \geqq 0
\end{aligned}$$

等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_k=a_{k+1}$ のときである。

(i)(ii)より，$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k\right)^2 \leqq n\sum_{k=1}^{n} {a_k}^2$ （等号成立は $a_1=a_2=\cdots=a_n$ のとき）

(2) 偏りをもつサイコロに対して，k の目が出る確率を p_k とする。

すると，$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1$ で，$p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6$ は成り立たない。ここで，このサイコロを 2 回投げ，同じ目が続けて出る確率 P は，

$$P={p_1}^2+{p_2}^2+{p_3}^2+{p_4}^2+{p_5}^2+{p_6}^2$$

さて，(1)の不等式より，$\left(\sum_{k=1}^{6} p_k\right)^2 \leqq 6\sum_{k=1}^{6} {p_k}^2$ なので，

$$P \geqq \frac{1}{6}(p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6)^2 = \frac{1}{6}$$

等号は $p_1=p_2=p_3=p_4=p_5=p_6$ のときのみ成立するので，$P>\frac{1}{6}$ となる。すなわち，同じ目が続けて出る確率は $\frac{1}{6}$ よりも大きい。

［解 説］

一見，不等式の証明と確率の小問集合の形に見えますが，(1)は(2)の誘導となっていました。なお，(1)は，コーシー・シュワルツの不等式の特別な場合の証明です。

$\boxed{3}$

問題のページへ

(1)　$f(x)=x(1+x)^n$ とおくと，二項定理から，

$$f(x)={}_n\mathrm{C}_0x+{}_n\mathrm{C}_1x^2+\cdots+{}_n\mathrm{C}_kx^{k+1}+\cdots+{}_n\mathrm{C}_nx^{n+1}$$

$$f'(x)={}_n\mathrm{C}_0+2{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+(k+1){}_n\mathrm{C}_kx^k+\cdots+(n+1){}_n\mathrm{C}_nx^n$$

よって，$f'(x)$ の x^k の係数は，$(k+1){}_n\mathrm{C}_k$ である。

(2)　$g(x)=xf'(x)$ とおくと，

$$g(x)={}_n\mathrm{C}_0x+2{}_n\mathrm{C}_1x^2+\cdots+(k+1){}_n\mathrm{C}_kx^{k+1}+\cdots+(n+1){}_n\mathrm{C}_nx^{n+1}$$

$$g'(x)={}_n\mathrm{C}_0+2^2{}_n\mathrm{C}_1x+\cdots+(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_kx^k+\cdots+(n+1)^2{}_n\mathrm{C}_nx^n$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=g'(1)\cdots\cdots\cdots①$

さて，$g'(x)=\left(xf'(x)\right)'=f'(x)+xf''(x)$ となり，

$$f'(x)=(1+x)^n+nx(1+x)^{n-1}=\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-1}$$

$$f''(x)=(n+1)(1+x)^{n-1}+(n-1)\{1+(n+1)x\}(1+x)^{n-2}$$

すると，$g'(1)=f'(1)+1\cdot f''(1)$ から，

$$\begin{aligned}g'(1)&=(n+2)2^{n-1}+(n+1)2^{n-1}+(n-1)(n+2)2^{n-2}\\&=(4n+6)2^{n-2}+(n^2+n-2)2^{n-2}=(n^2+5n+4)2^{n-2}\\&=(n+1)(n+4)2^{n-2}\cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①②より，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}(k+1)^2{}_n\mathrm{C}_k=(n+1)(n+4)2^{n-2}$

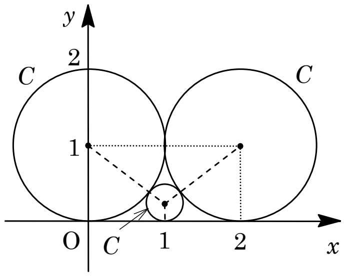
［解 説］

二項展開の問題です。(2)は $xf'(x)$ を考えるところがポイントですが，(1)を誘導とみると，この着眼は困難ではないでしょう。

$\boxed{4}$

問題のページへ

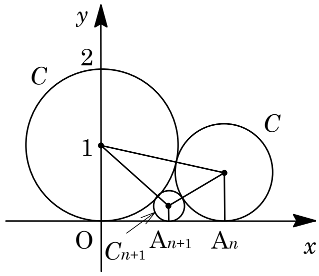
(1)　$C : x^2+(y-1)^2=1$，$C_0 : (x-2)^2+(y-1)^2=1$ に対し，C, C_0，x 軸に接する円 C_1 とする。C_1 は中心の x 座標が対称性から 1 となり，その半径を a_1 とすると，C と C_1 が接することより，



$$\sqrt{(1+a_1)^2-(1-a_1)^2}=1$$

すると，$2\sqrt{a_1}=1$ から $\sqrt{a_1}=\dfrac{1}{2}$ となり，$a_1=\dfrac{1}{4}$

(2)　C, C_n，x 軸に接する円 C_{n+1} に対し，C_n，C_{n+1} と x 軸との接点をそれぞれ A_n，A_{n+1} とおく。また C_n，C_{n+1} の半径がそれぞれ a_n，a_{n+1} より，



$$\mathrm{OA}_n=\sqrt{(1+a_n)^2-(1-a_n)^2}=2\sqrt{a_n}$$
$$\mathrm{OA}_{n+1}=\sqrt{(1+a_{n+1})^2-(1-a_{n+1})^2}=2\sqrt{a_{n+1}}$$
$$\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}=\sqrt{(a_n+a_{n+1})^2-(a_n-a_{n+1})^2}=2\sqrt{a_na_{n+1}}$$

すると，$\mathrm{OA}_n=\mathrm{OA}_{n+1}+\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ より，$2\sqrt{a_n}=2\sqrt{a_{n+1}}+2\sqrt{a_na_{n+1}}$ となり，

$$\frac{1}{\sqrt{a_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{a_n}}+1$$

ここで，$b_n=\dfrac{1}{\sqrt{a_n}}$ とすると，$b_1=\dfrac{1}{\sqrt{a_1}}=2$ で，$b_{n+1}=b_n+1$ となる。

(3)　(2)より，$b_n=2+(n-1)\cdot 1=n+1$ となるので，$a_n=\dfrac{1}{{b_n}^2}=\dfrac{1}{(n+1)^2}$

［解　説］

図形と漸化式についての超頻出問題です。立式には，2 円が外接するとき中心間距離が半径の和に等しいことを利用しています。

$\boxed{5}$

問題のページへ

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のすべての x に対し，$\cos x \leqq 1 - ax^2$ ……①が成立する実数 a の条件は,

(i)　$x = 0$ のとき　任意の a に対して，①はつねに成立する。

(ii)　$x \neq 0$ のとき　①は $ax^2 \leqq 1 - \cos x$ となり，$a \leqq \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ ………②

ここで，$f(x) = \dfrac{1 - \cos x}{x^2}$ とおくと，$f(-x) = f(x)$ となるので，以下，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，つねに②が成立する a の条件を求める。

そこで，$f(x)$ の増減を調べるために,

$$f'(x) = \frac{\sin x \cdot x^2 - (1 - \cos x) \cdot 2x}{x^4} = \frac{x \sin x + 2\cos x - 2}{x^3}$$

さらに，$g(x) = x \sin x + 2\cos x - 2$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{g(x)}{x^3}$ となり,

$$g'(x) = \sin x + x\cos x - 2\sin x = x\cos x - \sin x$$

$$g''(x) = \cos x - x\sin x - \cos x = -x\sin x$$

これより，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$g''(x) < 0$ から，$g'(x)$ は単調減少し,

$$g'(x) < g'(0) = 0$$

すると，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$g(x)$ は単調減少し，$g(x) < g(0) = 0 + 2 - 2 = 0$

よって，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$f'(x) < 0$ となるので，$f(x)$ は単調減少し,

$$\frac{4}{\pi^2} = f\left(\frac{\pi}{2}\right) \leqq f(x) < \lim_{x \to +0} f(x)$$

以上より，$0 < x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，つねに②が成立する a の条件は，$a \leqq \dfrac{4}{\pi^2}$ である。

(i)(ii)より，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ で，つねに①が成立する実数 a で最大のものは $\dfrac{4}{\pi^2}$ である。

［解 説］

微分法の不等式への応用問題です。解答例では，定数分離をして処理する方法を採用しています。