《2018 入試対策》

大阪大学

文系数学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された大阪大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 阪大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分野別問題一覧 ……………………………………………………………… 3

分野別問題と解答例 ………………………………………………………… 19

関　数 ……………………………………………………………………… 20

微分と積分 ………………………………………………………………… 28

図形と式 …………………………………………………………………… 46

ベクトル …………………………………………………………………… 57

整数と数列 ………………………………………………………………… 70

確　率 ……………………………………………………………………… 81

論　証 ……………………………………………………………………… 90

分野別問題一覧

関　数／微分と積分

図形と式／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 　実数の組$(x,\ y,\ z)$で，どのような整数l, m, nに対しても，等式

$$l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。 [2011]

2 　連立方程式

$$2^x+3^y=43,\ \log_2 x-\log_3 y=1$$

を考える。

(1)　この連立方程式を満たす自然数x, yの組を求めよ。

(2)　この連立方程式を満たす正の実数$x,\ y$は，(1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。 [2010]

3 　自然数m, nと$0<a<1$を満たす実数aを，等式

$$\log_2 6=m+\frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1)　自然数m, nを求めよ。

(2)　不等式$a>\dfrac{2}{3}$が成り立つことを示せ。 [2006]

4 　座標平面上の 4 点$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{C}(2,\ 8)$，$\mathrm{D}(1,\ 8)$を頂点とする長方形をRとする。また$0<t<4$に対し，原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，点$\mathrm{E}(4,\ 0)$，および点$\mathrm{P}(t,\ 8t-2t^2)$の 3 点を頂点とする三角形を$T(t)$とする。

(1)　Rの内部と$T(t)$の内部との共通部分の面積$f(t)$を求めよ。

(2)　tが$0<t<4$の範囲で動くとき，$f(t)$を最大にするtの値と，そのときの最大値を求めよ。 [2001]

5 　各整数kに対し，座標平面上の点$\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$，$\mathrm{Q}_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$をとり，3 点$\mathrm{P}_{k-1}$，$\mathrm{P}_k$，$\mathrm{Q}_k$を頂点とする三角形$T_k$を考える。また，各自然数$n$に対し

$$f_n(x)=2\times 10^{-nx}$$

とおく。曲線$y=f_n(x)$上の動点Rが，点$(0,\ 2)$から出発してx座標が大きくなる方向に動くとき，三角形T_kのうち，Rが最初にその内部を通過するものがT_8となるようなnをすべて求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$とする。 [2001]

6　p, q を実数，$q \neq 0$ とする。$p+qi$ （$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）が方程式

$$x^3+px+10=0$$

の解であるとき, p と q の値を求めよ。　[2000]

7　(1)　xy 平面上で，次の不等式を満たす点 $(x,\ y)$ の存在する領域を図示せよ。

$$100^{\log_{10}x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10}y-\log_{10}3)}\leqq 0$$

(2)　点 $(x,\ y)$ が(1)の領域を動くとき，

$$u=\sin\left(360°\times(x+y)\right)-\sqrt{3}\cos\left(360°\times(x+y)\right)$$

がとる値の範囲を求めよ。　[1999]

8　単位円周上の 3 点

$$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta),\ \mathrm{Q}(\cos2\theta,\ \sin2\theta),\ \mathrm{R}(\cos4\theta,\ \sin4\theta)$$

を考える。θ が $0°$ から $360°$ まで動くとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{QR}^2$ がとる値の範囲を求めよ。

[1998]

■ 微分と積分

1　b, c を実数, q を正の実数とする。放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき，放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表せ。　[2017]

2　実数 x, y, z が，$x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2)　$z\geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。　[2017]

3　曲線 $C: y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ を考える。

(1)　C と直線 $L: y=-x+t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ。

(2)　C と L が異なる 4 点で交わるとし，その交点を x 座標が小さいものから順に，P_1，P_2，P_3，P_4 とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|+|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|}=4$ となるような t の値を求めよ。

(3)　t が(2)の値をとるとき，C と線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2016]

4 関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，$x=0$ のとき極大値 M をとり，$x=\alpha$ のとき極小値 m をとるという。ただし $\alpha\neq 0$ とする。このとき, p, q, r, s を α , M, m で表せ。

[2014]

5 曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。 [2013]

6 曲線 $C: y=x^3-kx$ （k は実数）を考える。C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3-ka)$ $(a\neq 0)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 点 A における C の接線を l_1 とする。l_1 と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2) 点 B における C の接線を l_2 とする。l_1 と l_2 が直交するとき，a と k が満たす条件を求めよ。

(3) l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。 [2009]

7 実数 $a,\ b$ を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α，β，γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a の式で表せ。

(2) α，β，γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) (1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき，関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。 [2008]

8 a を正の定数とし，

$$f(x)=\big||x-3a|-a\big|,\quad g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a$$

を考える。

(1) 方程式 $f(x)=a$ の解を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

[2008]

9　xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき, k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。　[2007]

10　a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

11　$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の増減表を作り，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。　[2005]

12　3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ に関して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための条件を，$f(x)$ の係数を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小になるとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また，$y=f(x)$ のグラフは平行移動によって $y=x^3+\dfrac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。　[2004]

13　放物線 $C: y=-x^2+2x+1$ と x 軸の共有点を $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ とし，C と直線 $y=mx$ の共有点を $\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$, $m\neq 0$，$\alpha<\beta$ とする。線分 OP, OA と C で囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB と C で囲まれた図形の面積が等しいとき m の値を求めよ。　[2003]

14　次の問いに答えよ。

(1)　実数の定数 p に対して, 3 次方程式 $x^3+x-p=0$ の実数解の個数は 1 個であることを示せ。

(2)　$p,\ q$ は定数で $p\geqq 2,\ q\geqq 2$ とする。2 つの 3 次方程式 $x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$ の実数解をそれぞれ $\alpha,\ \beta$ とするとき，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$ が成立することを示せ。　[2002]

15 平面上に 3 つの放物線 $C_1 : y = -x(x-1)$ ， $C_2 : y = x(x-1)$ ， $C : y = \dfrac{1}{2}x^2 + ax + b$ を考える。いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする。

(1) a, b を t を用いて表せ。

(2) 2 つの放物線 $C,\ C_2$ で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。

(3) t を動かすとき, S の最小値を求めよ。 [2002]

16 関数 $f(x) = x-2+3|x-1|$ を考える。$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，関数

$$g(x) = \left|\int_0^x f(t)\,dt\right| + \left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ。 [2000]

17 放物線 $y = x^2+1$ 上に点 P をとる。原点 O と P を結ぶ線分 OP を

$$t^2 : (1-t^2) \quad (0 < t < 1)$$

に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P が放物線上を動くとき点 Q が描く曲線 C の方程式を求めよ。

(2) 放物線 $y = x^2+1$ と曲線 C が囲む図形の面積 S を求めよ。

(3) $0 < t < 1$ における S の最大値を求めよ。 [1998]

■ 図形と式

1 直線 $l : y = kx + m \ (k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) k と m を求めよ。

(2) 直線 l と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。 [2015]

2　i は虚数単位とし，実数 a, b は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする。複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_2 とする。

(1)　L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ。

(2)　L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ。

(3)　L_1 と L_2 の交点を求めよ。　[2014]

3　xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は，$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。　[2013]

4　xy 平面上で考える。不等式 $y<-x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y|\leqq 1$ の表す領域を E とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。

(2)　$\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする。$S(a,\ b)$ を a, b を用いて表せ。

(3)　点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ。　[2012]

5　実数の組 $(p,\ q)$ に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく。

(1)　放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組 $(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$ に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく。実数 α，β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\ \text{かつ}\ f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

(3)　長方形 $R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$ を考える。また，4 点 $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$ をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組 $(p,\ q)$ を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2011]

6　曲線$C: y=-x^2-1$を考える。

(1)　tが実数全体を動くとき，曲線C上の点$(t,\ -t^2-1)$を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域をxy平面上に図示せよ。

(2)　Dを(1)で求めた領域の境界とする。Dがx軸の正の部分と交わる点を$(a,\ 0)$とし，$x=a$でのCの接線をlとする。Dとlで囲まれた部分の面積を求めよ。

[2010]

7　xy平面上の点A$(1,\ 2)$を通る直線lがx軸，y軸とそれぞれ点P，Qで交わるとする。点Rを$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$を満たすようにとる。ただし，Oは$xy$平面の原点である。このとき，直線$l$の傾きにかかわらず，点Rはある関数$y=f(x)$のグラフ上にある。関数$f(x)$を求めよ。　[2006]

8　放物線$C: y=\frac{1}{2}x^2$上の原点以外の点PにおけるCの接線をl_1とし，Pを通りl_1と直交する直線をl_2とする。また，l_2とCが再び交わる点をQとし，QにおけるCの接線をl_3とする。さらに，l_1とl_3の交点をRとする。

(1)　点R$(x,\ y)$について，yをxの式で表せ。

(2)　PR≧PQとなる点Pのx座標の範囲を求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1　平面上に長さ2の線分ABを直径とする円Cがある。2点A，Bを除くC上の点Pに対し，AP＝AQとなるように線分AB上の点Qをとる。また，直線PQと円Cの交点のうち，Pでない方をRとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　△AQRの面積を$\theta=\angle\mathrm{PAB}$を用いて表せ。

(2)　点Pを動かして△AQRの面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$を$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$を用いて表せ。

[2015]

2 $a,\ b,\ c$ を実数とする。ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$ をとり，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*)\quad (\overrightarrow{v_1}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_3}=c\vec{p}$$

を考える。ここで $\overrightarrow{v_i}\cdot\vec{p}\ (i=1,\ 2,\ 3)$ はベクトル $\overrightarrow{v_i}$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v}=(x,\ y)$ が，実数 $s,\ t$ を用いて $\vec{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$ と表されることを，s および t の各々を $x,\ y$ の式で表すことによって示せ。

(2) $\vec{p}=\overrightarrow{v_1}$ と $\vec{p}=\overrightarrow{v_2}$ の両方が条件(*)を満たすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件(*)を満たすことを示せ。

(3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件(*)を満たす。このような実数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。 [2011]

3 平面上の三角形 OAB を考え，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ とおく。辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ となる点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(2) t の値を求めよ。

(3) AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 [2009]

4 点 O で交わる 2 つの半直線 OX，OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60°$ とする。2 点 A，B が OX 上に O，A，B の順に，また，2 点 C，D が OY 上に O，C，D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2) 点 A，B と C，D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。 [2008]

5 xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2007]

6 平面ベクトル $\vec{p}=(p_1,\ p_2)$，$\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ に対して，$\{\vec{p},\ \vec{q}\}=p_1q_2-p_2q_1$ と定める。

(1)　平面ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対して，$\{\vec{a},\ \vec{b}\}=l$，$\{\vec{b},\ \vec{c}\}=m$，$\{\vec{c},\ \vec{a}\}=n$ とするとき，$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1)で $l,\ m,\ n$ がすべて正であるとする。このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すことができることを示せ。　[2003]

7 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A, B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を $1:2$ の比に内分する点を R とする。いま k を正の定数として，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ とおく。ただし，$\mathrm{Q}=\mathrm{A}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{A}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ を $\vec{a},\ \vec{q}$ を用いて表せ。

(2)　点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする。K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(3)　円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。　[2002]

8　空間のベクトル $\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$ を考える。ただし，どちらも零ベクトルではないとする。$k=1,\ 2,\ 3$ に対し，複素数 $z_k=x_k+y_ki$ （$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）を考え，複素数 $w_k=u_k+v_ki$ （$u_k,\ v_k$ は実数）を $w_k=(\sqrt{3}+i)z_k$ で定める。さらに $u_k,\ v_k$ から定まるベクトル $\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$，$\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$ を考える。

(1)　$\vec{x}$ の大きさを r，$\vec{y}$ の大きさを s，$\vec{x}$ と $\vec{y}$ のなす角を θ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とするとき ${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2$ を r，s，θ で表せ。

(2)　$\vec{x}$ と $\vec{y}$ の大きさが等しく，両者はたがいに垂直であるとする。このとき $\vec{u}$ と $\vec{v}$ も大きさが等しく，たがいに垂直であることを示せ。

(3)　(2)の仮定のもとで，$\vec{x}$ と $\vec{u}$ のなす角を求めよ。　[2001]

9　点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A, B, C があって，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

[2000]

10　平面上の 4 点 O, P, Q, R が条件

$$\mathrm{OP}=2,\ \mathrm{OQ}=3,\ \angle\mathrm{POQ}=60°,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$$

を満たすとする。線分 OR の長さと $\cos\angle\mathrm{POR}$ の値を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1　次の条件によって定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

$$a_1=2,\ a_{n+1}=8{a_n}^2\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$b_n=\log_2 a_n$ とおく。b_{n+1} を b_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$P_n=a_1a_2a_3\cdots a_n$ とおく。数列 $\{P_n\}$ の一般項を求めよ。

(4)　$P_n>10^{100}$ となる最小の自然数 n を求めよ。　[2017]

2 次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は，不等式 $-\dfrac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2) a を 3 以上の整数とする。n^2+a が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。 [2016]

3 次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i) n は素数ではない。

(ii) $l,\ m$ を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m|\leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2) n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3) $2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。 [2012]

4 次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $10^{2x}\leqq 10^{6-x}$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(2) $10^{2x}\leqq y\leqq 10^{5x}$ と $y\leqq 10^{6-x}$ を同時に満たす整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

[2005]

5 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\frac{1}{3},\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定め，数列 $\{b_n\}$ を

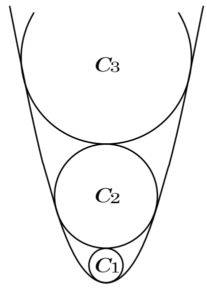
$$b_1=a_1a_2\ ,\ b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1) 一般項 a_n を n を用いて表せ。

(2) 一般項 b_n を n を用いて表せ。 [2005]

6 座標平面上で不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D とする。D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円を C_1 とする。自然数 n について，円 C_n が定まったとき，C_n の上部で C_n に外接する円で，D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円を C_{n+1} とする。C_n の半径を a_n とし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とする。



(1)　a_1 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき a_n を b_{n-1} で表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。　[2004]

7 自然数 m に対して，m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする。たとえば $f(72) = 6$ である。ただし $f(1) = 1$ とする。

(1)　m, n を自然数，d を m, n の最大公約数とするとき，$f(d)f(mn) = f(m)f(n)$ となることを示せ。

(2)　2 つの箱 A, B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている。箱 A, B から 1 枚ずつ札を取り出す。箱 A から取り出した札の番号を m，箱 B から取り出した札の番号を n とするとき，$f(mn) = f(m)f(n)$ となる確率 p_1 と，$2f(mn) = f(m)f(n)$ となる確率 p_2 を求めよ。　[2003]

8 正の整数の組 $(a,\ b)$ で，a 以上 b 以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし，$a < b$ とする。　[1999]

■ 確率

1　1 以上 6 以下の 2 つの整数 $a,\ b$ に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=2,\ b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。　[2016]

2　1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1)　$\log_{\frac{1}{4}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c$ となる確率を求めよ。

(2)　$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2013]

3　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表し，3 次式 $f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ。　[2012]

4　(1)　不等式 $(|x|-2)^2+(|y|-2)^2\leqq 1$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　1 個のさいころを 4 回投げ，n 回目 $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に出た目の数を a_n とする。このとき，$(x,\ y)=(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率を求めよ。

[2010]

5 次のような，いびつなさいころを考える。1，2，3 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{6}$，4 の目が出る確率は a，5，6 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2}$である。ただし$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$とする。このさいころを振ったとき，平面上の$(x,\ y)$にある点 P は，1，2，3 のいずれかの目が出ると$(x+1,\ y)$に，4 の目が出ると$(x,\ y+1)$に，5，6 のいずれかの目が出ると$(x-1,\ y-1)$に移動する。原点$(0,\ 0)$にあった点 P が，k 回さいころを振ったときに$(2,\ 1)$にある確率をp_kとする。

(1)　p_1，p_2，p_3を求めよ。

(2)　p_6を求めよ。

(3)　p_6が最大になるときの a の値を求めよ。　[2009]

6 n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ，第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1)　$G=3$となる確率を n の式で表せ。

(2)　G の期待値を n の式で表せ。　[2007]

7 n を自然数とする。プレイヤーA，B がサイコロを交互に投げるゲームをする。最初は A が投げ，先に 1 の目を出した方を勝ちとして終わる。ただし，A が n 回投げても勝負がつかない場合は B の勝ちとする。

(1)　A の k 投目$(1\leqq k\leqq n)$で A が勝つ確率を求めよ。

(2)　このゲームにおいて A が勝つ確率P_nを求めよ。

(3)　$P_n>\dfrac{1}{2}$となるような最小の n の値を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$として計算してよい。　[2004]

■ 論証

1 実数 x, y が$|x|\leqq1$と$|y|\leqq1$を満たすとき，不等式

$$0\leqq x^2+y^2-2x^2y^2+2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}\leqq1$$

が成り立つことを示せ。　[2015]

2　次の問いに答えよ。

(1)　$\cos x+\cos y\neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\cos x+\cos y+\cos z\neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を挙げよ。

[2014]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分

図形と式／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

実数の組$(x,\ y,\ z)$で，どのような整数l, m, nに対しても，等式

$$l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$$

が成り立つようなものをすべて求めよ。　[2011]

解答例

等式 $l\cdot 10^{x-y}-nx+l\cdot 10^{y-z}+m\cdot 10^{x-z}=13l+36m+ny$ ……(＊)が，どのような整数l, m, nに対しても成立する条件を求める。

まず，$(l,\ m,\ n)=(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$のとき，成立することが必要で，

$$10^{x-y}+10^{y-z}=13\ \cdots\cdots\text{①},\quad 10^{x-z}=36\ \cdots\cdots\text{②},\quad -x=y\ \cdots\cdots\text{③}$$

逆に，①②③が成立するとき，任意の整数$l,\ m,\ n$に対して，明らかに(＊)は成立することより，求める条件は①②③である。

①③より，$10^{2x}+10^{-x-z}=13$ ………④

ここで，$10^x=X>0$，$10^z=Z>0$とおくと，②④より，

$$\frac{X}{Z}=36\ \cdots\cdots\text{⑤},\quad X^2+\frac{1}{XZ}=13\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

⑤⑥より，$X^2+\dfrac{36}{X^2}=13$，$X^4-13X^2+36=0$となり，

$$(X+2)(X-2)(X+3)(X-3)=0$$

$X>0$より，$X=2,\ 3$

(i)　$X=2$のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{18}$となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}2,\ -\log_{10}2,\ -\log_{10}18)$

(ii)　$X=3$のとき

⑤より，$Z=\dfrac{1}{12}$となり，$(x,\ y,\ z)=(\log_{10}3,\ -\log_{10}3,\ -\log_{10}12)$

コメント

整数問題の装いをしていますが，実質的には指数・対数がらみの連立方程式を解くものです。

問　題

連立方程式

$$2^x+3^y=43,\ \log_2 x-\log_3 y=1$$

を考える。

(1) この連立方程式を満たす自然数 x, y の組を求めよ。

(2) この連立方程式を満たす正の実数 x, y は，(1)で求めた自然数の組以外に存在しないことを示せ。 [2010]

解答例

(1) 自然数 x, y に対し，

$$2^x+3^y=43\cdots\cdots\cdots①,\ \log_2 x-\log_3 y=1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$3^y\leqq 43-2^1=41$ となるので，$y=1,\ 2,\ 3$ である。

$y=1$ のとき，①より $2^x=40$ となり，これを満たす x はない。

$y=2$ のとき，①より $2^x=34$ となり，これを満たす x はない。

$y=3$ のとき，①より $2^x=16$ となり，$x=4$ である。このとき，$\log_2 4-\log_3 3=1$ より，②を満たしているので，

$$x=4,\ y=3$$

(2) $\log_2 x=X$，$\log_3 y=Y$ とおくと，$x=2^X$，$y=3^Y$ となり，①②より，

$$2^{2^X}+3^{3^Y}=43\cdots\cdots\cdots③,\ X-Y=1\cdots\cdots\cdots④$$

④より $Y=X-1$ となり，③に代入すると，$2^{2^X}+3^{3^{X-1}}=43\cdots\cdots\cdots⑤$

ここで，$f(X)=2^{2^X}+3^{3^{X-1}}$ とおくと，$f(X)$ は増加関数であり，⑤の解の個数は高々1個である。

さて，$f(2)=2^{2^2}+3^{3^1}=16+27=43$ から，$X=2$ は⑤の解であり，このとき④より $Y=1$，すなわち $X=2$，$Y=1$ は連立方程式③④のただ1つの解である。

以上より，$x=2^2=4$，$y=3^1=3$ は，連立方程式①②のただ1つの解である。

コメント

(1)は通常の着眼で解けますが，(2)は難問です。上の解では，指数関数の単調性を利用して示しましたが，ここまで至る試行錯誤には時間がかかってしまいました。

問　題

自然数 m, n と $0<a<1$ を満たす実数 a を，等式

$$\log_2 6 = m + \frac{1}{n+a}$$

が成り立つようにとる。以下の問いに答えよ。

(1) 自然数 m, n を求めよ。

(2) 不等式 $a>\dfrac{2}{3}$ が成り立つことを示せ。 [2006]

解答例

(1) $0<a<1$ より，$n<n+a<n+1$ となり，

$$0<\frac{1}{n+1}<\frac{1}{n+a}<\frac{1}{n}<1$$

すると，$\log_2 6 = m + \dfrac{1}{n+a}$ から, m は $\log_2 6$ の整数部分である。

ここで，$\log_2 2^2 < \log_2 6 < \log_2 2^3$ から $2<\log_2 6<3$ となることより，

$$m = 2$$

このとき，$\log_2 6 - 2 = \dfrac{1}{n+a}$ から，

$$\log_2 \frac{3}{2} = \frac{1}{n+a},\quad n+a = \frac{1}{\log_2 \frac{3}{2}} = \log_{\frac{3}{2}} 2$$

すると, $0<a<1$ から, n は $\log_{\frac{3}{2}} 2$ の整数部分である。

そこで，$\log_{\frac{3}{2}} \dfrac{3}{2} < \log_{\frac{3}{2}} 2 < \log_{\frac{3}{2}} \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$ から $1<\log_{\frac{3}{2}} 2<2$ となることより，

$$n = 1$$

(2) (1)から，$a = \log_{\frac{3}{2}} 2 - 1 = \log_{\frac{3}{2}} \dfrac{4}{3}$ ………①

ここで，$2^2 \cdot 4^3 > 3^5$ より，$\left(\dfrac{4}{3}\right)^3 > \left(\dfrac{3}{2}\right)^2$，$\dfrac{4}{3} > \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}}$ ………②

①②より，$a > \log_{\frac{3}{2}} \left(\dfrac{3}{2}\right)^{\frac{2}{3}} = \dfrac{2}{3}$ である。

コメント

対数の値を評価する問題です。結論を見据えながら式変形を行います。たとえば, 不等式 $2^2 \cdot 4^3 > 3^5$ はその 1 例です。

問　題

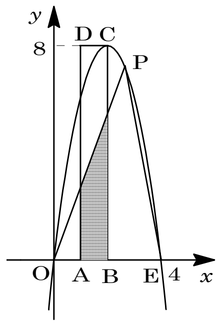
座標平面上の 4 点 A$(1,\ 0)$，B$(2,\ 0)$，C$(2,\ 8)$，D$(1,\ 8)$ を頂点とする長方形を R とする。また $0<t<4$ に対し，原点 O$(0,\ 0)$，点 E$(4,\ 0)$，および点 P$(t,\ 8t-2t^2)$ の 3 点を頂点とする三角形を $T(t)$ とする。

(1) R の内部と $T(t)$ の内部との共通部分の面積 $f(t)$ を求めよ。

(2) t が $0<t<4$ の範囲で動くとき，$f(t)$ を最大にする t の値と，そのときの最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 直線 OP : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t}x=(8-2t)x$ ………①



また，直線 PE : $y=\dfrac{8t-2t^2}{t-4}(x-4)=-2t(x-4)$ ………②

(i) $0<t<1$ のとき

PE と AD の交点は②より $(1,\ 6t)$，また PE と BC の交点は②より $(2,\ 4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{6t+4t}{2}\cdot(2-1)=5t$$

(ii) $1\leqq t<2$ のとき

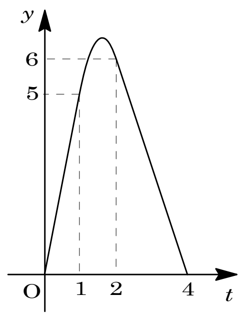
OP と AD の交点は①より $(1,\ 8-2t)$ なので，直線 $x=t$ の左右にある 2 つの台形の面積の和を考えて，

$$f(t)=\frac{8-2t+8t-2t^2}{2}\cdot(t-1)+\frac{4t+8t-2t^2}{2}\cdot(2-t)=-4t^2+13t-4$$

(iii) $2\leqq t<4$ のとき

OP と BC の交点は①より $(2,\ 16-4t)$ なので，

$$f(t)=\frac{8-2t+16-4t}{2}\cdot(2-1)=-3t+12$$



(2) $1\leqq t<2$ のとき，

$$f(t)=-4t^2+13t-4=-4\left(t-\frac{13}{8}\right)^2+\frac{105}{16}$$

よって，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{13}{8}$ のとき最大値 $\dfrac{105}{16}$ をとる。

コメント

ていねいに場合分けをして，ていねいに計算をすすめていけば，正解に到達するという問題です。

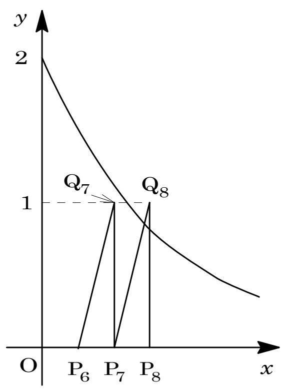
問　題

各整数 k に対し，座標平面上の点 $P_k\left(\dfrac{k}{500},\ 0\right)$，$Q_k\left(\dfrac{k}{500},\ 1\right)$をとり，3 点 P_{k-1}，P_k，Q_k を頂点とする三角形 T_k を考える。また，各自然数 n に対し

$$f_n(x)=2\times10^{-nx}$$

とおく。曲線 $y=f_n(x)$ 上の動点 R が，点 $(0,\ 2)$ から出発して x 座標が大きくなる方向に動くとき，三角形 T_k のうち，R が最初にその内部を通過するものが T_8 となるような n をすべて求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$ とする。　[2001]

解答例



条件より，点 $Q_7\left(\dfrac{7}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ 上またはその下側にあるので，

$$2\times10^{-\frac{7}{500}n}\geqq1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点 $Q_8\left(\dfrac{8}{500},\ 1\right)$は，曲線 $y=f_n(x)$ の上側にあるので，

$$2\times10^{-\frac{8}{500}n}<1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$10^{-\frac{7}{500}n}\geqq2^{-1}$，$-\dfrac{7}{500}n\geqq\log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n\leqq\dfrac{150.5}{7}=21.5 \cdots\cdots\cdots ③$

②より，$10^{-\frac{8}{500}n}<2^{-1}$，$-\dfrac{8}{500}n<\log_{10}2^{-1}=-0.3010$

よって，$n>\dfrac{150.5}{8}=18.8125 \cdots\cdots\cdots ④$

③④より, n は整数なので，$n=19,\ 20,\ 21$ である。

コメント

一見，難問風の装いをしていますが，内容は対数計算だけでした。

問　題

$p,\ q$ を実数，$q \neq 0$ とする。$p+qi$（$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）が方程式

$$x^3 + px + 10 = 0$$

の解であるとき，p と q の値を求めよ。 [2000]

解答例

$x = p+qi$ が $x^3+px+10=0$ の解なので，

$$(p+qi)^3 + p(p+qi) + 10 = 0$$
$$(p^3 - 3pq^2 + p^2 + 10) + (3p^2q - q^3 + pq)i = 0$$

$p,\ q$ が実数より，

$$p^3 - 3pq^2 + p^2 + 10 = 0 \cdots\cdots\cdots①$$
$$3p^2q - q^3 + pq = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q \neq 0$ なので，$3p^2 - q^2 + p = 0$，$q^2 = 3p^2 + p \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$p^3 - 3p(3p^2+p) + p^2 + 10 = 0$，$4p^3 + p^2 - 5 = 0$

$$(p-1)(4p^2+5p+5) = 0$$

$4p^2+5p+5=0$ の判別式 $D = 25-80 = -55 < 0$ より，実数解は存在しない。

よって，$p=1$

このとき，③より $q^2 = 4$，$q = \pm 2$

コメント

あまりにもあっさり解けすぎ，不気味な感じのする問題です。

問　題

(1)　xy 平面上で，次の不等式を満たす点$(x,\ y)$の存在する領域を図示せよ。

$$100^{\log_{10} x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10} y-\log_{10} 3)}\leqq 0$$

(2)　点$(x,\ y)$が(1)の領域を動くとき，

$$u=\sin\left(360^\circ\times(x+y)\right)-\sqrt{3}\cos\left(360^\circ\times(x+y)\right)$$

がとる値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

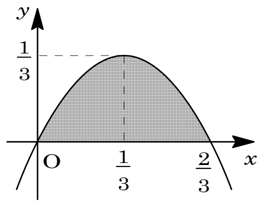
(1)　$100^{\log_{10} x}+\log_{1000}\left(\frac{1}{100}\right)^x+10^{(\log_{10} y-\log_{10} 3)}\leqq 0$

$x>0$ かつ $y>0$ で，

$$10^{2\log_{10} x}+\frac{\log_{10} 10^{-2x}}{\log_{10} 10^3}+10^{\log_{10}\frac{y}{3}}\leqq 0$$

$$x^2-\frac{2x}{3}+\frac{y}{3}\leqq 0$$

$$y\leqq -3x^2+2x=-3\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{1}{3}$$



求める点$(x,\ y)$の存在する領域は右図の網点部となる。ただし，x 軸以外の境界線は含む。

(2)　$u=\sin\left(360^\circ\times(x+y)\right)-\sqrt{3}\cos\left(360^\circ\times(x+y)\right)=2\sin\left(360^\circ\times(x+y)-60^\circ\right)$

$x+y=v$ とおくと，$y=-x+v$ ……①となり，①と(1)の領域が共有点をもつ v の範囲を求める。

①と(1)の領域の境界線 $y=-3x^2+2x$ ……②が接するとき，

①②から，$-3x^2+2x=-x+v$，$3x^2-3x+v=0$

$$D/4=9-12v=0,\ \ v=\frac{3}{4}$$

(1)の図より，$0<v\leqq\frac{3}{4}$

このとき，$u=2\sin(360^\circ\times v-60^\circ)$から，$-60^\circ<360^\circ\times v-60^\circ\leqq 210^\circ$ なので，

$$2\sin(-60^\circ)<u\leqq 2\sin 90^\circ$$

よって，$-\sqrt{3}<u\leqq 2$

コメント

(1)の要点は $x=a^{\log_a x}$ だけです。この式は $x=\log_a a^x$ と対等な関係式です。ところが数Ⅱにおいては，後者の関係式と比べると，前者は冷遇されているとしか思えません。

問　題

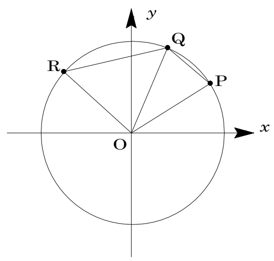
単位円周上の 3 点

$$P(\cos\theta,\ \sin\theta),\ Q(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta),\ R(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$$

を考える。θ が $0°$ から $360°$ まで動くとき，PQ^2+QR^2 がとる値の範囲を求めよ。

[1998]

解答例



$$PQ^2=(\cos 2\theta-\cos\theta)^2+(\sin 2\theta-\sin\theta)^2$$
$$=1+1-2(\cos 2\theta\cos\theta+\sin 2\theta\sin\theta)$$
$$=2-2\cos\theta$$
$$QR^2=(\cos 4\theta-\cos 2\theta)^2+(\sin 4\theta-\sin 2\theta)^2$$
$$=1+1-2(\cos 4\theta\cos 2\theta+\sin 4\theta\sin 2\theta)$$
$$=2-2\cos 2\theta$$
$$PQ^2+QR^2=(2-2\cos\theta)+(2-2\cos 2\theta)$$
$$=4-2\cos\theta-2\cos 2\theta$$
$$=-4\cos^2\theta-2\cos\theta+6=-4\left(\cos\theta+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{25}{4}$$

$0°\leqq\theta\leqq 360°$ から，$-1\leqq\cos\theta\leqq 1$

PQ^2+QR^2 は，連続的に値が変化し，$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ のとき最大値 $\dfrac{25}{4}$ をとり，$\cos\theta=1$ のとき最小値 0 をとるので，

$$0\leqq PQ^2+QR^2\leqq\frac{25}{4}$$

コメント

三角比の利用も考えられますが，この場合，一般性の失われる可能性があるかどうかを点検しなくてはいけません。座標計算で解けばその心配はありませんので，そうしました。計算も難しくはありません。

問　題

$b,\ c$ を実数, q を正の実数とする。放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q のとき, 放物線 P と x 軸で囲まれた部分の面積 S を q を用いて表せ。 [2017]

解答例

放物線 $P: y=-x^2+bx+c$ の頂点の y 座標が q より,

$$P: y=-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+q\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, $q>0$ から, P と x 軸の交点の x 座標は, $(*)$より $-\left(x-\frac{b}{2}\right)^2+q=0$ となり,

$$x=\frac{b}{2}-\sqrt{q}\ ,\ \ x=\frac{b}{2}+\sqrt{q}$$

これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと, P と x 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta(-x^2+bx+c)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2\sqrt{q}\,)^3=\frac{4}{3}q\sqrt{q}$$

コメント

定積分と面積についての基本事項の確認問題です。

問　題

実数 x, y, z が，$x+y+z=1$，$x+2y+3z=5$ を満たすとする。

(1)　$x^3+y^3+z^3-3xyz$ の最小値を求めよ。

(2)　$z \geqq 0$ のとき，xyz が最大となる z の値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　まず，$x+y+z=1$ ……①，$x+2y+3z=5$ ……②について，①－②から，

$$y+2z=4,\quad y=-2z+4 \cdots\cdots③$$

③を①に代入すると，$x=1-(-2z+4)-z=z-3$ ……④

ここで，$P=x^3+y^3+z^3-3xyz$ とおくと，①③④から，

$$\begin{aligned}P&=(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)=x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx\\&=(x+y+z)^2-3(xy+yz+zx)=1-3(xy+yz+zx)\\&=1-3\{(z-3)(-2z+4)+(z-3-2z+4)z\}=1-3(-3z^2+11z-12)\\&=9z^2-33z+37=9\left(z-\frac{11}{6}\right)^2+\frac{27}{4}\end{aligned}$$

よって，$z=\dfrac{11}{6}$ のとき，P は最小値 $\dfrac{27}{4}$ をとる。

(2)　$Q=xyz$ とおくと，③④より，

$$Q=(-2z+4)(z-3)z=-2(z-2)(z-3)z=-2(z^3-5z^2+6z)$$

$Q'=-2(3z^2-10z+6)$ となり，$Q'=0$ の解は $z=\dfrac{5\pm\sqrt{7}}{3}$ である。

これより，$z \geqq 0$ で Q の増減を調べると，右表のようになる。

z	0	$\cdots$	$\frac{5-\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	$\frac{5+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$
Q'		$-$	0	$+$	0	$-$
Q	0	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

ここで，$z=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のとき，$z-2=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}>0$，$z-3=\dfrac{-4+\sqrt{7}}{3}<0$ から，このとき $Q=-2(z-2)(z-3)z>0$ である。

よって，$z=\dfrac{5+\sqrt{7}}{3}$ のとき，Q は最大となる。

コメント

条件付きの最大・最小問題です。変数をまとめて処理をするだけの問題です。

問　題

曲線 $C: y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ を考える。

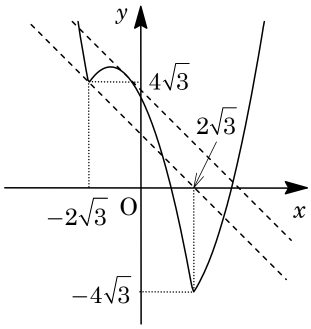
(1)　C と直線 $L: y=-x+t$ が異なる 4 点で交わるような t の値の範囲を求めよ。

(2)　C と L が異なる 4 点で交わるとし，その交点を x 座標が小さいものから順に，P_1，P_2，P_3，P_4 とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|+|\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|}{|\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|}=4$ となるような t の値を求めよ。

(3)　t が(2)の値をとるとき，C と線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　曲線 $C: y=\left|\frac{1}{2}x^2-6\right|-2x$ に対して，



(i)　$\frac{1}{2}x^2-6\geqq 0$ $(x\leqq -2\sqrt{3},\ 2\sqrt{3}\leqq x)$ のとき

$$y=\frac{1}{2}x^2-2x-6=\frac{1}{2}(x-2)^2-8\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　$\frac{1}{2}x^2-6<0$ $(-2\sqrt{3}<x<2\sqrt{3})$ のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x+6=-\frac{1}{2}(x+2)^2+8\cdots\cdots\cdots②$$

さて，直線 $L: y=-x+t$ ……③が点 $(-2\sqrt{3},\ 4\sqrt{3})$ を通るとき，$t=-2\sqrt{3}+4\sqrt{3}=2\sqrt{3}$ となる。

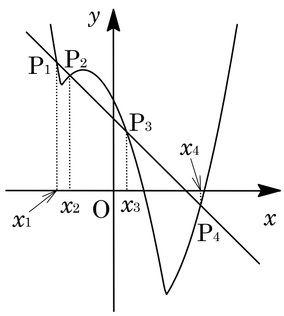
また，L が放物線②と $x=s$ で接するとき，②から $y'=-x-2$ なので，

$$-s-2=-1,\ s=-1$$

すると，接点 $\left(-1,\ \frac{15}{2}\right)$ となり，このとき $t=-1+\frac{15}{2}=\frac{13}{2}$ である。

以上より，C と L が異なる 4 点で交わる t の範囲は，$2\sqrt{3}<t<\frac{13}{2}$ である。

(2)　C と L が異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 で交わるとき，その x 座標をそれぞれ x_1，x_2，x_3，x_4 とおく。



まず，①③を連立して，$\frac{1}{2}x^2-2x-6=-x+t$ となり，

$$x^2-2x-2t-12=0$$

この解が $x=x_1$，x_4 より，

$$x_1+x_4=2,\ x_1x_4=-2t-12\cdots\cdots\cdots④$$

次に，②③を連立して，$-\frac{1}{2}x^2-2x+6=-x+t$ となり，

$$x^2+2x+2t-12=0$$

この解が $x=x_2$，x_3 より，$x_2+x_3=-2$，$x_2x_3=2t-12\cdots\cdots\cdots⑤$

すると，L の傾きが -1 から，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\right| = \sqrt{2}(x_2 - x_1),\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}\right| = \sqrt{2}(x_4 - x_3),\ \left|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}\right| = \sqrt{2}(x_3 - x_2)$$

ここで，条件より，$\dfrac{\left|\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}}\right| + \left|\overrightarrow{\mathrm{P_3P_4}}\right|}{\left|\overrightarrow{\mathrm{P_2P_3}}\right|} = 4$ なので，$\dfrac{(x_2 - x_1) + (x_4 - x_3)}{x_3 - x_2} = 4$

$$x_4 - x_1 = 5(x_3 - x_2),\ (x_4 - x_1)^2 = 25(x_3 - x_2)^2$$

$$(x_1 + x_4)^2 - 4x_1x_4 = 25\{(x_2 + x_3)^2 - 4x_2x_3\}$$

④⑤を代入して，$4 - 4(-2t - 12) = 25\{4 - 4(2t - 12)\}$ となり，

$$1 + 2t + 12 = 25(1 - 2t + 12),\ 52t - 312 = 0$$

よって，求める t の値は，$t = 6$ である。

(3) $t = 6$ のとき，$x_2 + x_3 = -2$，$x_2x_3 = 0$ より，$(x_2,\ x_3) = (-2,\ 0)$ となる。

このとき，C と線分 $\mathrm{P_2P_3}$ で囲まれる図形の面積 S は，

$$S = \int_{-2}^{0}\left\{-\frac{1}{2}x^2 - 2x + 6 - (-x + 6)\right\}dx = -\frac{1}{2}\int_{-2}^{0} x(x + 2)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(0 + 2)^3 = \frac{2}{3}$$

コメント

絶対値つき関数のグラフを題材とした総合問題です。解答例では，C と L をそのまま扱いましたが，曲線 $y = \left|\frac{1}{2}x^2 - 6\right| - x$ と直線 $y = t$ という組で処理しても構いません。計算量が少しだけ減少します。

問　題

関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ は，$x=0$ のとき極大値 M をとり，$x=\alpha$ のとき極小値 m をとるという。ただし $\alpha\neq 0$ とする。このとき, p, q, r, s を α , M, m で表せ。

[2014]

解答例

関数 $f(x)=px^3+qx^2+rx+s$ に対し，$f'(x)=3px^2+2qx+r$

条件より，$f'(x)=0$ の解が $x=0,\ \alpha\ (\alpha\neq 0)$ なので，$p\neq 0$ である。

さて，$f'(0)=0$，$f(0)=M$ から，$r=0\cdots\cdots$①，$s=M\cdots\cdots$②

また，$f'(\alpha)=0$，$f(\alpha)=m$ から，

$$3p\alpha^2+2q\alpha+r=0\cdots\cdots\cdots③,\quad p\alpha^3+q\alpha^2+r\alpha+s=m\cdots\cdots\cdots④$$

すると，①③より，$3p\alpha^2+2q\alpha=0$ となり，$q=-\dfrac{3}{2}p\alpha\cdots\cdots\cdots$⑤

①②④より，$p\alpha^3+q\alpha^2+M=m$ から，⑤を代入して，$p\alpha^3-\dfrac{3}{2}p\alpha^3+M=m$ より，

$$\frac{1}{2}p\alpha^3=M-m,\quad p=\frac{2(M-m)}{\alpha^3}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤に代入して，$q=-\dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{2(M-m)}{\alpha^3}\cdot\alpha=-\dfrac{3(M-m)}{\alpha^2}\cdots\cdots\cdots$⑦

ここで，逆に，①②⑥⑦が成り立つ場合について，

(i)　$p>0$ のとき

$x=0$ のとき極大，$x=\alpha$ のとき極小となることから，$f'(x)$ の符号は $x=0$ の前後で正から負，$x=\alpha$ の前後で負から正と変化するので，$\alpha>0$ である。

すると，$M>m$ なので，⑥から $p>0$ を満たしている。

(ii)　$p<0$ のとき

(i)と同様に考えると，$\alpha<0$ であり，⑥から $p<0$ を満たしている。

(i)(ii)より，いずれの場合についても，求める条件は①②⑥⑦であり，

$$p=\frac{2(M-m)}{\alpha^3},\quad q=-\frac{3(M-m)}{\alpha^2},\quad r=0,\quad s=M$$

コメント

必要条件を求め，十分性を確認するという方法で記しました。内容は，3 次関数の値の増減について，基本の確認です。

問　題

曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ と直線 $y=mx+4$ で囲まれる部分の面積が最小となるように定数 m の値を定めよ。 [2013]

解答例

曲線 $y=x^2+x+4-|3x|$ ……①と直線 $y=mx+4$ ……②に対して,

(a)　$x\geqq 0$ のとき　①より，$y=x^2+x+4-3x=x^2-2x+4$ ………③

②との共有点は，$x^2-2x+4=mx+4$ より，$x=0,\ m+2$

$m\geqq -2$ のとき $x=0,\ m+2$，$m<-2$ のとき $x=0$

(b)　$x\leqq 0$ のとき　①より，$y=x^2+x+4+3x=x^2+4x+4$ ………④

②との共有点は，$x^2+4x+4=mx+4$ より，$x=0,\ m-4$

$m\leqq 4$ のとき $x=0,\ m-4$，$m>4$ のとき $x=0$

(a)(b)より，m の値で場合分けをし，①②で囲まれる部分の面積を S とすると，

(i)　$m<-2$ のとき

$$S=\int_{m-4}^{0}\{mx+4-(x^2+4x+4)\}dx=-\int_{m-4}^{0}x(x-m+4)dx=\frac{1}{6}(4-m)^3$$

(ii)　$-2\leqq m\leqq 4$ のとき

$$S=\int_{m-4}^{0}\{mx+4-(x^2+4x+4)\}dx+\int_{0}^{m+2}\{mx+4-(x^2-2x+4)\}dx$$

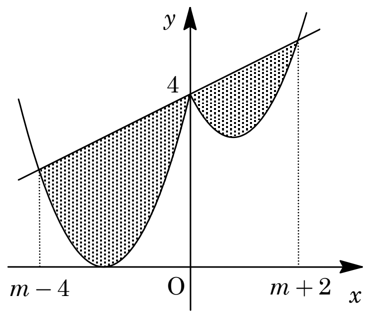
$$=-\int_{m-4}^{0}x(x-m+4)dx-\int_{0}^{m+2}x(x-m-2)dx$$

$$=\frac{1}{6}(4-m)^3+\frac{1}{6}(m+2)^3$$

$$=3m^2-6m+12$$

$$=3(m-1)^2+9$$

よって，$m=1$ のとき S は最小値をとる。



(iii)　$m>4$ のとき

$$S=\int_{0}^{m+2}\{mx+4-(x^2-2x+4)\}dx$$

$$=-\int_{0}^{m+2}x(x-m-2)dx=\frac{1}{6}(m+2)^3$$

(i)～(iii)より，S は m について連続なので，$m=1$ のとき S は最小値をとる。

コメント

定積分と面積に関する基本題です。微分の出番もありませんでした。

問　題

曲線 $C: y = x^3 - kx$ （k は実数）を考える。C 上に点 $\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ $(a \neq 0)$ をとる。次の問いに答えよ。

(1) 点 A における C の接線を l_1 とする。l_1 と C の A 以外の交点を B とする。B の x 座標を求めよ。

(2) 点 B における C の接線を l_2 とする。l_1 と l_2 が直交するとき, a と k が満たす条件を求めよ。

(3) l_1 と l_2 が直交する a が存在するような k の値の範囲を求めよ。　[2009]

解答例

(1) $C: y = x^3 - kx$ ……①に対して，$y' = 3x^2 - k$ となるので，$\mathrm{A}(a,\ a^3 - ka)$ における接線 l_1 の方程式は,

$$y - (a^3 - ka) = (3a^2 - k)(x - a)\,,\quad y = (3a^2 - k)x - 2a^3 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$x^3 - kx = (3a^2 - k)x - 2a^3$

$$x^3 - 3a^2x + 2a^3 = 0\,,\ (x - a)^2(x + 2a) = 0$$

点 B の x 座標は，$x \neq a$ より，$x = -2a$

(2) 点 B における接線 l_2 の傾きは，$y' = 3(-2a)^2 - k = 12a^2 - k$

l_1 と l_2 が直交することより，$(3a^2 - k)(12a^2 - k) = -1$

$$36a^4 - 15ka^2 + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

(3) ③を満たす 0 でない a が存在する条件を求める。まず，$u = a^2 > 0$ とおくと，

$$36u^2 - 15ku + k^2 + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

④を満たす正の u が存在する条件は，$k^2 + 1 > 0$ に注意すると，

$$D = 15^2k^2 - 4\times 36(k^2 + 1) = 9(9k^2 - 16) = 9(3k + 4)(3k - 4) \geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$$u = \frac{5}{24}k > 0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

よって，⑤⑥より，$k \geqq \dfrac{4}{3}$ となる。

コメント

接線どうしの直交を題材にした頻出基本問題です。

問　題

実数 a, b を係数に含む 3 次式 $P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ を考える。$P(x)$ の複素数の範囲における因数分解を

$$P(x)=(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)$$

とする。α, β, γ の間に $\alpha+\gamma=2\beta$ という関係があるとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　b を a の式で表せ。

(2)　α, β, γ がすべて実数であるとする。このとき a のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　(1)で求めた a の式を $f(a)$ とする。a が(2)の範囲を動くとき, 関数 $b=f(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

解答例

(1)　$P(x)=x^3+3ax^2+3ax+b$ に対して, $P(x)=0$ の解が α, β, γ であるので,

$$\alpha+\beta+\gamma=-3a\cdots\cdots\cdots①,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3a\cdots\cdots\cdots②,\ \alpha\beta\gamma=-b\cdots\cdots\cdots③$$

条件より, $\alpha+\gamma=2\beta\cdots\cdots\cdots④$

①④より, $\beta=-a\cdots\cdots⑤$となり, また②④より, $2\beta^2+\gamma\alpha=3a\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より, $2a^2+\gamma\alpha=3a$, $\gamma\alpha=-2a^2+3a\cdots\cdots\cdots⑦$

③⑤⑦より, $-a(-2a^2+3a)=-b$, $b=-2a^3+3a^2$

(2)　⑤より β は実数であるので, α, γ がともに実数である条件を求める。

④⑤より, $\alpha+\gamma=-2a$

さらに, ⑦を考え合わせると, α, γ は t の 2 次方程式 $t^2+2at-2a^2+3a=0$ の 2 つの解となるので,

$$D/4=a^2-(-2a^2+3a)=3a(a-1)\geqq 0$$

よって, $a\leqq 0$, $1\leqq a$ である。

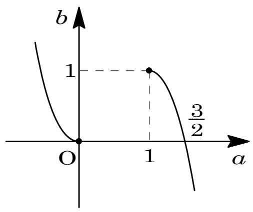
a	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(a)$	↘	0	↗	1	↘

(3)　(1)より, $f(a)=-2a^3+3a^2$ となり,

$$f'(a)=-6a^2+6a=-6a(a-1)$$

すると, $f(a)$ の増減は右上表のようになる。

よって, (2)から $a\leqq 0$, $1\leqq a$ において, $b=f(a)$ のグラフは右図のとおりである。



コメント

3 次方程式の解と係数の関係を題材にした問題です。連立方程式のまとめ方が問われています。

問　題

a を正の定数とし，

$$f(x)=\left||x-3a|-a\right|,\quad g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a$$

を考える。

(1)　方程式 $f(x)=a$ の解を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。

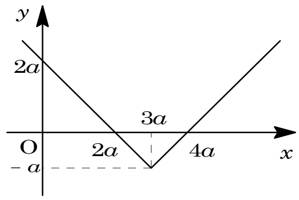
[2008]

解答例

(1)　$h(x)=|x-3a|-a$ とおくと，

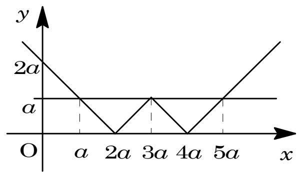
$h(x)=-x+2a\ (x<3a)$

$h(x)=x-4a\ (x\geqq 3a)$



よって，$y=h(x)$ のグラフは右図のようになる。

さて，$f(x)=|h(x)|$ より，$y=f(x)$ のグラフは，右下図のようになり，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=a$ との共有点を考えると，方程式 $f(x)=a$ の解は，

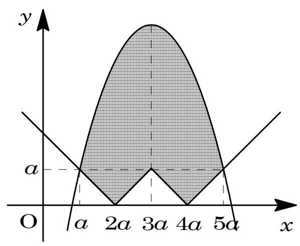


$x=a,\ 3a,\ 5a$

(2)　$g(x)=-x^2+6ax-5a^2+a=-(x-3a)^2+4a^2+a$

また，$g(a)=g(5a)=a$ である。

これより，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフで囲まれた部分の面積 S は，



$$S=\int_a^{5a}(-x^2+6ax-5a^2+a-a)\,dx+\frac{1}{2}\cdot 2a^2\cdot 2$$

$$=-\int_a^{5a}(x-a)(x-5a)\,dx+2a^2$$

$$=\frac{1}{6}(5a-a)^3+2a^2=\frac{32}{3}a^3+2a^2$$

コメント

センターレベルの微積分の基本題です。計算も容易です。

問　題

xy 平面において，放物線 $y=x^2$ を C とする。また，実数 k を与えたとき，$y=x+k$ で定まる直線を l とする。

(1)　$-2<x<2$ の範囲で C と l が 2 点で交わるとき，k の満たす条件を求めよ。

(2)　k が(1)の条件を満たすとき，C と l および 2 直線 $x=-2$，$x=2$ で囲まれた 3 つの部分の面積の和 S を k の式で表せ。　[2007]

解答例

(1)　$C: y=x^2$ と $l: y=x+k$ の共有点の x 座標は，

$$x^2=x+k,\ \ x^2-x-k=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$の異なる 2 つの実数解が，ともに $-2<x<2$ に存在するので，

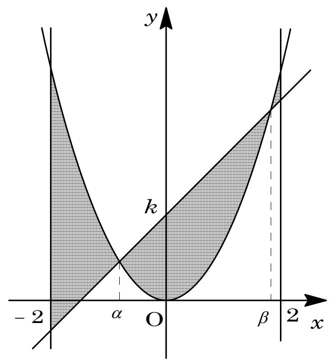
$$D=1+4k>0,\ \ k>-\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$f(x)=x^2-x-k$ として，

$$f(2)=4-2-k>0,\ \ k<2\cdots\cdots\cdots②$$

$$f(-2)=4+2-k>0,\ \ k<6\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$-\frac{1}{4}<k<2$



(2)　$(*)$より，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1+4k}}{2}$ となり，この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

すると，求める 3 つの部分の面積の和 S は，

$$S=\int_{-2}^{\alpha}(x^2-x-k)\,dx-\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx+\int_{\beta}^{2}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=\int_{-2}^{2}(x^2-x-k)\,dx-2\int_{\alpha}^{\beta}(x^2-x-k)\,dx$$

$$=2\int_{0}^{2}(x^2-k)\,dx-2\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$

$$=2\left[\frac{x^3}{3}-kx\right]_0^2+\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3=\frac{16}{3}-4k+\frac{1}{3}\left(\sqrt{1+4k}\right)^3$$

コメント

積分計算がポイントです。計算を迅速にかつ正確に遂行するためには，上記のような工夫が必要になります。

問　題

a を実数とし，関数 $f(x)=x^3-3ax+a$ を考える。$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。 [2006]

解答例

$f(x)=x^3-3ax+a$ より，$f'(x)=3x^2-3a$ となる。

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調に増加する。これより，$0\leqq x\leqq 1$ において $f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(0)=a\geqq 0$$

よって, $a\leqq 0$ から，$a=0$ となる。

(ii)　$a>0$ のとき

$$f'(x)=3(x-\sqrt{a})(x+\sqrt{a})$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii−i)　$0<\sqrt{a}\leqq 1\ (0<a\leqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+a\geqq 0,\ 2\sqrt{a}\leqq 1$$

すると，$a\leqq\dfrac{1}{4}$ となり，$0<a\leqq 1$ から $0<a\leqq\dfrac{1}{4}$ である。

(ii−ii)　$\sqrt{a}>1\ (a>1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)\geqq 0$ となる条件は,

$$f(1)=1-2a\geqq 0$$

すると，$a\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，$a>1$ から解なし。

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}$

コメント

参考書の例題に掲載されているような 3 次関数の増減についての基本問題です。

問　題

$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の増減表を作り，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2)　直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。　[2005]

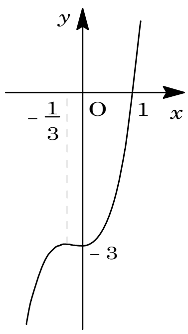
解答例

(1)　$f(x)=2x^3+x^2-3$ より，

$$f'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{80}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$



(2)　点 $(t,\ 2t^3+t^2-3)$ における接線は，

$$y-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(x-t)$$

原点を通るとき，

$$-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(-t)$$

$$4t^3+t^2+3=0,\ (t+1)(4t^2-3t+3)=0$$

ここで，$4t^2-3t+3=0$ は $D=9-48<0$ より実数解をもたないので，$t=-1$ である。

このとき，接線は $y=4x$ であるので，図より，直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲は，$m>4$ である。

コメント

教科書の例題にあるような落とすことのできない問題です。

問　題

3 次関数 $f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ に関して以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための条件を，$f(x)$ の係数を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が $x=\alpha$ で極大，$x=\beta$ で極小になるとき，点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m を $f(x)$ の係数を用いて表せ。また，$y=f(x)$ のグラフは平行移動によって $y=x^3+\dfrac{3}{2}mx$ のグラフに移ることを示せ。　[2004]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+3ax^2+bx+c$ より，$f'(x)=3x^2+6ax+b$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$D/4=9a^2-3b>0,\ 3a^2>b$$

(2)　点 $(\alpha,\ f(\alpha))$ と点 $(\beta,\ f(\beta))$ を結ぶ直線の傾き m なので，

$$m=\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{\beta-\alpha}=\frac{\beta^3-\alpha^3+3a(\beta^2-\alpha^2)+b(\beta-\alpha)}{\beta-\alpha}$$

$$=\beta^2+\alpha\beta+\alpha^2+3a(\beta+\alpha)+b=(\alpha+\beta)^2-\alpha\beta+3a(\alpha+\beta)+b$$

α，β は $f'(x)=0$ の 2 つの解より，

$$\alpha+\beta=-2a,\ \alpha\beta=\frac{b}{3}$$

よって，$m=4a^2-\dfrac{b}{3}-6a^2+b=-2a^2+\dfrac{2}{3}b$

さて，$y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に p, y 軸方向に q だけ平行移動すると，

$$y=(x-p)^3+3a(x-p)^2+b(x-p)+c+q$$

$$=x^3+(-3p+3a)x^2+(3p^2-6ap+b)x-p^3+3ap^2-bp+c+q$$

ここで，$-3p+3a=0$ ……①，$-p^3+3ap^2-bp+c+q=0$ ……②とおくと，①より $p=a$，②に代入して $q=-2a^3+ba-c$ となる。

この p, q の値だけ，$y=f(x)$ のグラフを平行移動すると，

$$y=x^3+(-3a^2+b)x=x^3+\frac{3}{2}\left(-2a^2+\frac{2}{3}b\right)x=x^3+\frac{3}{2}mx$$

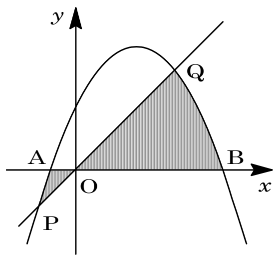
コメント

3 次関数のグラフの有名な性質を証明する問題です。工夫もせず，普通に計算を進めました。

問　題

放物線$C: y=-x^2+2x+1$とx軸の共有点を$A(a,\ 0)$，$B(b,\ 0)$とし，Cと直線$y=mx$の共有点を$P(\alpha,\ m\alpha)$，$Q(\beta,\ m\beta)$，原点を O とする。ただし，$a<b$，$m\neq 0$，$\alpha<\beta$とする。線分 OP, OA とCで囲まれた図形の面積と線分 OQ, OB とCで囲まれた図形の面積が等しいときmの値を求めよ。　[2003]

解答例



$C: y=-x^2+2x+1$……①，直線$y=mx$……②に対して，①とx軸との交点 A, B のx座標$a,\ b$は，$-x^2+2x+1=0$より，$x=1\pm\sqrt{2}$なので，$a=1-\sqrt{2}$，$b=1+\sqrt{2}$となる。

①とx軸で囲まれた部分の面積をS_1とすると，

$$S_1=\int_a^b(-x^2+2x+1)\,dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(b-a)^3=\frac{1}{6}(2\sqrt{2})^3$$

また，①と②の交点 P, Q のx座標$\alpha,\ \beta$は，$-x^2+2x+1=mx$より，

$$x=\frac{-(m-2)\pm\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$ なので，

$$\alpha=\frac{-(m-2)-\sqrt{(m-2)^2+4}}{2},\quad \beta=\frac{-(m-2)+\sqrt{(m-2)^2+4}}{2}$$

①と②で囲まれた部分の面積をS_2とすると，

$$S_2=\int_\alpha^\beta(-x^2+2x+1-mx)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$
$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(m-2)^2+4}\right)^3$$

条件から，線分 OP, OA とCで囲まれた図形の面積と，線分 OQ, OB とCで囲まれた図形の面積が等しいことより，$S_1=S_2$となる。

$$\sqrt{(m-2)^2+4}=2\sqrt{2},\ (m-2)^2+4=8,\ m-2=\pm 2$$

$m\neq 0$より，$m=4$である。

コメント

$S_1=S_2$が発見できれば，後はいわゆる$\dfrac{1}{6}$公式を用いる基本的な頻出問題です。

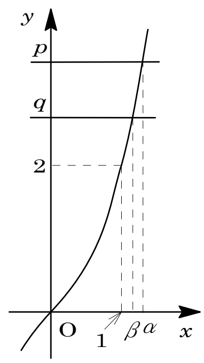
問　題

次の問いに答えよ。

(1)　実数の定数pに対して，3 次方程式$x^3+x-p=0$の実数解の個数は 1 個であることを示せ。

(2)　p，q は定数で $p\geqq 2$，$q\geqq 2$ とする。2 つの 3 次方程式$x^3+x-p=0$，$x^3+x-q=0$の実数解をそれぞれα，βとするとき，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$が成立することを示せ。　[2002]

解答例



(1)　$x^3+x-p=0$より，$x^3+x=p$

$f(x)=x^3+x$とおくと，$f'(x)=3x^2+1>0$

よって，$f(x)$は単調増加関数である。すると，$y=f(x)$と$y=p$のグラフはつねに 1 つの共有点をもつことになり，$x^3+x-p=0$の実数解の個数は 1 個である。

(2)　$f(\alpha)=p$，$f(\beta)=q$なので，$p\geqq 2$, $q\geqq 2$から，$\alpha\geqq 1$，$\beta\geqq 1$となる。

(i)　$\alpha=\beta$のとき

$p=q$となるので，$|\alpha-\beta|=\dfrac{1}{4}|p-q|$が成り立つ。

(ii)　$\alpha\neq\beta$のとき

$$\frac{|p-q|}{|\alpha-\beta|}=\left|\frac{p-q}{\alpha-\beta}\right|=\left|\frac{f(\alpha)-f(\beta)}{\alpha-\beta}\right|=\left|\frac{\alpha^3+\alpha-(\beta^3+\beta)}{\alpha-\beta}\right|$$

$$=\left|\frac{(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1)}{\alpha-\beta}\right|=|\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2+1|$$

$$>1+1+1+1=4$$

よって，$|p-q|>4|\alpha-\beta|$より，$|\alpha-\beta|<\dfrac{1}{4}|p-q|$

(i)(ii)より，$|\alpha-\beta|\leqq\dfrac{1}{4}|p-q|$となる。

コメント

(2)については，まず$f'(1)=4$より平均値の定理の利用という解法が浮かびましたが，これは範囲外でした。

問　題

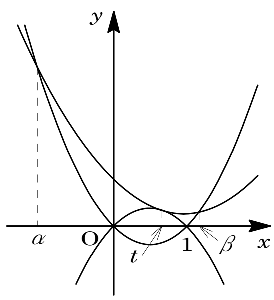
平面上に 3 つの放物線 $C_1 : y = -x(x-1)$，$C_2 : y = x(x-1)$，$C : y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b$ を考える。いま実数 t に対して，C は C_1 上の点 $(t,\ -t^2+t)$ を通り，その点で C_1 と共通の接線をもつとする。

(1) a, b を t を用いて表せ。

(2) 2 つの放物線 C，C_2 で囲まれた部分の面積 S を t を用いて表せ。

(3) t を動かすとき，S の最小値を求めよ。 [2002]

解答例



(1) $C_1 : y = -x^2 + x \cdots\cdots ①$，$C_2 : y = x^2 - x \cdots\cdots ②$

$$C : y = \frac{1}{2}x^2 + ax + b \cdots\cdots\cdots ③$$

まず，③が点 $(t,\ -t^2+t)$ を通るので，

$$-t^2 + t = \frac{1}{2}t^2 + at + b,\ at + b = -\frac{3}{2}t^2 + t \cdots\cdots\cdots ④$$

また，③より $y' = x + a$ となり，$x = t$ のとき $y' = t + a$

一方，①より $y' = -2x + 1$ となり，$x = t$ のとき $y' = -2t + 1$ であるので，$t + a = -2t + 1$，$a = -3t + 1 \cdots\cdots\cdots ⑤$

⑤を④に代入して，$t(-3t+1) + b = -\frac{3}{2}t^2 + t$，$b = \frac{3}{2}t^2$

(2) (1)より，③は，$y = \frac{1}{2}x^2 - (3t-1)x + \frac{3}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots ③'$

②と③′の交点は，$x^2 - x = \frac{1}{2}x^2 - (3t-1)x + \frac{3}{2}t^2$，$\frac{1}{2}x^2 + (3t-2)x - \frac{3}{2}t^2 = 0$

$$x = -(3t-2) \pm \sqrt{(3t-2)^2 + 3t^2} = -(3t-2) \pm 2\sqrt{3t^2 - 3t + 1}$$

この解を α，β $(\alpha < \beta)$ とおくと，

$$S = \int_\alpha^\beta \left\{\frac{1}{2}x^2 - (3t-1)x + \frac{3}{2}t^2 - (x^2 - x)\right\}dx = \int_\alpha^\beta -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= -\frac{1}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{12}\left(4\sqrt{3t^2-3t+1}\right)^3 = \frac{16}{3}\left(\sqrt{3t^2-3t+1}\right)^3$$

(3) $f(t) = 3t^2 - 3t + 1$ とおくと，$S = \frac{16}{3}\left(\sqrt{f(t)}\right)^3$ となり，

$$f(t) = 3\left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} \geqq \frac{1}{4}$$

よって，$t = \frac{1}{2}$ のとき，S は最小値 $\frac{16}{3}\left(\sqrt{\frac{1}{4}}\right)^3 = \frac{2}{3}$ をとる。

コメント

微積分についての頻出基本問題です。計算量も妥当です。

問　題

関数 $f(x)=x-2+3\left|x-1\right|$ を考える。$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，関数

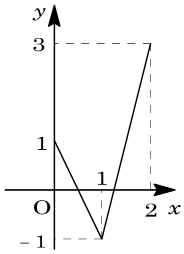
$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ。　[2000]

解答例

$x<1$ のとき，$f(x)=x-2-3(x-1)=-2x+1$

$x\geqq 1$ のとき，$f(x)=x-2+3(x-1)=4x-5$



(i)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^x(-2t+1)\,dt=\Big[-t^2+t\Big]_0^x=-x^2+x$$
$$=-x(x-1)\geqq 0$$
$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^1(-2t+1)\,dt+\int_1^2(4t-5)\,dt$$
$$=\Big[-t^2+t\Big]_x^1+\Big[2t^2-5t\Big]_1^2=x^2-x+1>0$$

すると，$g(x)=\left|-x^2+x\right|+\left|x^2-x+1\right|=-x^2+x+x^2-x+1=1$

(ii)　$1\leqq x\leqq 2$ のとき

$$\int_0^x f(t)\,dt=\int_0^1(-2t+1)\,dt+\int_1^x(4t-5)\,dt=\Big[-t^2+t\Big]_0^1+\Big[2t^2-5t\Big]_1^x$$
$$=2x^2-5x+3=(2x-3)(x-1)$$
$$\int_x^2 f(t)\,dt=\int_x^2(4t-5)\,dt=\Big[2t^2-5t\Big]_x^2=-2x^2+5x-2$$
$$=-(2x-1)(x-2)\geqq 0$$

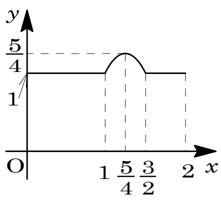
すると，$g(x)=\left|2x^2-5x+3\right|+\left|-2x^2+5x-2\right|=\left|2x^2-5x+3\right|-2x^2+5x-2$

(ii-i)　$1\leqq x\leqq\dfrac{3}{2}$ のとき

$$g(x)=-(2x^2-5x+3)-2x^2+5x-2=-4x^2+10x-5=-4\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+\frac{5}{4}$$

(ii-ii)　$\dfrac{3}{2}\leqq x\leqq 2$ のとき　$g(x)=2x^2-5x+3-2x^2+5x-2=1$

(i)(ii)より，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で，$y=g(x)$ のグラフを書くと，右図のようになり，$g(x)$ は $x=\dfrac{5}{4}$ のとき，最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。



コメント

丁寧に場合分けができれば，正しい結論が導けます。

問　題

放物線$y=x^2+1$上に点 P をとる。原点 O と P を結ぶ線分 OP を

$t^2:(1-t^2)$　$(0<t<1)$

に内分する点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 P が放物線上を動くとき点 Q が描く曲線Cの方程式を求めよ。

(2)　放物線$y=x^2+1$と曲線Cが囲む図形の面積Sを求めよ。

(3)　$0<t<1$におけるSの最大値を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$\mathrm{P}(u,\ v)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$とすると，

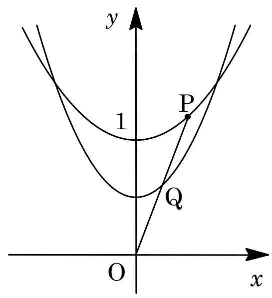
$$v=u^2+1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t^2\overrightarrow{\mathrm{OP}}$より，$(x,\ y)=t^2(u,\ v)$

$$u=\frac{x}{t^2},\ v=\frac{y}{t^2}\cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入して，$\dfrac{y}{t^2}=\dfrac{x^2}{t^4}+1$

曲線Cの方程式は，$y=\dfrac{x^2}{t^2}+t^2\cdots\cdots\cdots③$



(2)　③と$y=x^2+1$の交点のx座標は，$x^2+1=\dfrac{x^2}{t^2}+t^2$

変形して，$\dfrac{1-t^2}{t^2}(x-t)(x+t)=0$より，$x=\pm t$

$$S=\int_{-t}^{t}-\frac{1-t^2}{t^2}(x-t)(x+t)dx=-\frac{1-t^2}{t^2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot(2t)^3=\frac{4}{3}(t-t^3)$$

(3)　$S'=\dfrac{4}{3}(1-3t^2)$

$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$のときSは最大値をとる。

このとき，$S=\dfrac{4}{3}\cdot\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}-\dfrac{1}{3\sqrt{3}}\right)=\dfrac{8}{27}\sqrt{3}$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
S'		＋	0	－	
S		↗		↘	

コメント

本問は 3 つの小問に分かれていますが，(1)(2)の誘導がなくても方針に迷いは生じません。計算ミスが致命的という問題です。

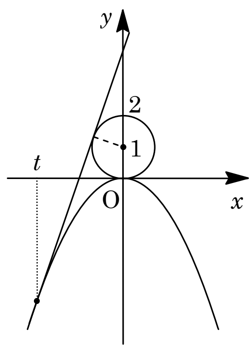
問　題

直線 $l : y = kx + m\ (k > 0)$ が円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ と放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ の両方に接している。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) k と m を求めよ。

(2) 直線 l と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を求めよ。　[2015]

解答例



(1) 放物線 $C_2 : y = -\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，$y' = -x$ となるので，点 $\left(t,\ -\dfrac{1}{2}t^2\right)$ における接線 l の方程式は，

$$y + \frac{1}{2}t^2 = -t(x-t),\quad y = -tx + \frac{1}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$l : 2tx + 2y - t^2 = 0$ と変形し，さらに l は円 $C_1 : x^2 + (y-1)^2 = 1$ にも接するので，

$$\frac{|2-t^2|}{\sqrt{4t^2+4}} = 1,\ (2-t^2)^2 = 4t^2 + 4,\ t^2(t^2-8) = 0$$

ここで，$l : y = kx + m\ (k > 0)$ から，$k = -t > 0$ となるので，$t = -2\sqrt{2}$

$(*)$に代入すると，$l : y = 2\sqrt{2}x + 4$ となり，$k = 2\sqrt{2}$，$m = 4$

(2) 直線 l と放物線 C_2 および y 軸とで囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S = \int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left(2\sqrt{2}x + 4 + \frac{1}{2}x^2\right)dx = \frac{1}{2}\int_{-2\sqrt{2}}^{0}\left(x + 2\sqrt{2}\right)^2 dx$$

$$= \frac{1}{6}\Big[\left(x + 2\sqrt{2}\right)^3\Big]_{-2\sqrt{2}}^{0} = \frac{8}{3}\sqrt{2}$$

コメント

円と接線，および面積計算についての基本的な問題です。なお，(1)の解法についてはいろいろ考えられますが，設問(2)を参照すると，まず放物線の接点を設定するのがよいということがわかります。

問　題

i は虚数単位とし，実数 a, b は $a^2+b^2>0$ を満たす定数とする。複素数 $(a+bi)(x+yi)$ の実部が 2 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_1 とし，また $(a+bi)(x+yi)$ の虚部が -3 に等しいような座標平面上の点 $(x,\ y)$ 全体の集合を L_2 とする。

(1)　L_1 と L_2 はともに直線であることを示せ。

(2)　L_1 と L_2 は互いに垂直であることを示せ。

(3)　L_1 と L_2 の交点を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$(a+bi)(x+yi)=(ax-by)+(bx+ay)i$ より，条件から，

$$L_1 : ax-by=2 \cdots\cdots\cdots ①,\ L_2 : bx+ay=-3 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$a^2+b^2>0$ より，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$ である。これより，①②はともに x, y についての 1 次式なので，L_1 と L_2 は直線である。

(2)　L_1，L_2 の法線ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ とおくと，

$$\overrightarrow{n_1}=(a,\ -b),\ \overrightarrow{n_2}=(b,\ a)$$

これより，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=ab+(-ab)=0$ となり，$\overrightarrow{n_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ である。

よって，L_1 と L_2 は互いに垂直である。

(3)　①×a＋②×b より，$(a^2+b^2)x=2a-3b$ となり，$x=\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2}$

②×a－①×b より，$(a^2+b^2)y=-3a-2b$ となり，$y=\dfrac{-3a-2b}{a^2+b^2}$

よって，L_1 と L_2 の交点の座標は，$\left(\dfrac{2a-3b}{a^2+b^2},\ \dfrac{-3a-2b}{a^2+b^2}\right)$ である。

コメント

形式的には複素数が題材ですが，実質的には，上のような解答例になります。この程度の記述でよいのだろうかと思える問題です。

問　題

xy 平面において，点 $(x_0,\ y_0)$ と直線 $ax+by+c=0$ の距離は，$\dfrac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$ である。これを証明せよ。 [2013]

解答例

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から，直線 $l : ax+by+c=0$ に下ろした垂線の足を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$ とする。また，直線 l の法線ベクトルを $\vec{n}$ とおくと，$\vec{n}=(a,\ b)$ である。

さて，条件より $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \parallel \vec{n}$ なので，k を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=k\vec{n}$ と表せ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n}\,,\ (x_1,\ y_1)=(x_0,\ y_0)+k(a,\ b)\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 Q は直線 l 上にあることから，$ax_1+by_1+c=0\cdots\cdots\cdots②$

①を②に代入すると，$a(x_0+ka)+b(y_0+kb)+c=0$ となり，

$$(a^2+b^2)k+ax_0+by_0+c=0\,,\ k=-\frac{ax_0+by_0+c}{a^2+b^2}$$

以上より，点 P と直線 l の距離は，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=|k||\vec{n}|=\frac{|ax_0+by_0+c|}{a^2+b^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2}=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

コメント

点と直線の距離の公式の証明問題です。上の解答例では，法線ベクトルを利用してボリュームを縮小しています。

問　題

xy 平面上で考える。不等式 $y<-x^2+16$ の表す領域を D とし，不等式 $|x-1|+|y|\leqq 1$ の表す領域を E とする。このとき，以下の問いに答えよ。

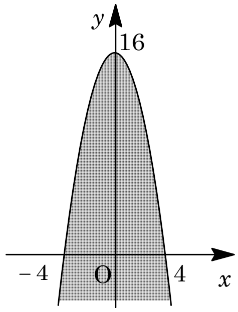
(1) 領域 D と領域 E をそれぞれ図示せよ。

(2) $\mathrm{A}(a,\ b)$ を領域 D に属する点とする。点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線と放物線 $y=-x^2+16$ で囲まれた部分の面積を $S(a,\ b)$ とする。$S(a,\ b)$ を $a,\ b$ を用いて表せ。

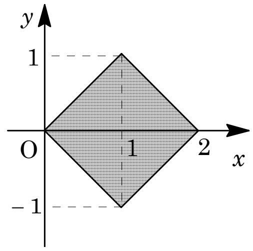
(3) 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$S(a,\ b)$ の最大値を求めよ。　[2012]

解答例

(1) 領域 D は，放物線 $y=-x^2+16$ ……①の下部であり，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



領域 E は，中心が点 $(1,\ 0)$ である正方形 $|x-1|+|y|=1$ の内部であり，右下図の網点部となる。ただし，境界線は含む。



(2) 領域 D に点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が属するので，$b<-a^2+16$ ………②

さて，点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ を通り傾きが $-2a$ の直線の直線は，

$$y-b=-2a(x-a),\ \ y=-2ax+2a^2+b \text{ ………③}$$

①③を連立して，$-x^2+16=-2ax+2a^2+b$

$$x^2-2ax+2a^2+b-16=0$$

②より，異なる実数解をもち，$x=a\pm\sqrt{-a^2-b+16}$

この解を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，①③で囲まれた部分の面積 $S(a,\ b)$ は，

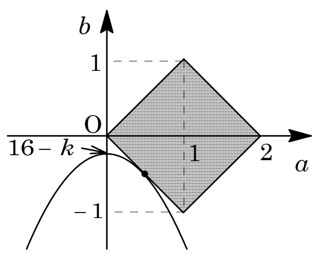
$$S(a,\ b)=\int_\alpha^\beta -(x^2-2ax+2a^2+b-16)\,dx$$

$$=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3=\frac{4}{3}\left(\sqrt{-a^2-b+16}\right)^3$$

(3) 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ が領域 E を動くとき，$|a-1|+|b|\leqq 1$ ………④

また，(2)より，$-a^2-b+16=k$ ……⑤とおくと，$S(a,\ b)=\dfrac{4}{3}(\sqrt{k})^3$ となり，k が最大となるとき，$S(a,\ b)$ は最大値をとる。そこで，ab 平面上において，④と⑤が共有点をもつ k の最大値を求める。



さて，⑤から $b=-a^2+16-k$ ……⑥となり，④の境界線 $b=-a$ と接するのは，⑥から $b'=-2a$ となるので，

$$-2a=-1,\ \ a=\frac{1}{2}$$

このとき，$b=-\frac{1}{2}$ となり，$16-k\geqq\left(\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}$

$$k\leqq 16+\frac{1}{4}=\frac{65}{4}$$

以上より，$k=\frac{65}{4}$ のとき，$S(a,\ b)$ は最大値 $\frac{4}{3}\left(\sqrt{\frac{65}{4}}\right)^3=\frac{65}{6}\sqrt{65}$ をとる。

コメント

領域が絡んだ微積分の標準レベルの総合問題です。

問　題

実数の組$(p,\ q)$に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$とおく。

(1) 放物線$y=f(x)$が点$(0,\ 1)$を通り，しかも直線$y=x$の $x>0$ の部分と接するような実数の組$(p,\ q)$と接点の座標を求めよ。

(2) 実数の組$(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$および$f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$とおく。実数α，β（ただし$\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\ \text{かつ}\ f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間$\alpha\leqq x\leqq\beta$において不等式$f_1(x)<f_2(x)$がつねに成り立つことを示せ。

(3) 長方形$R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$を考える。また，4 点$\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組$(p,\ q)$を，放物線$y=f(x)$と折れ線Lが共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，Rの点のうちで放物線$y=f(x)$が通過する点全体の集合をTとする。RからTを除いた領域Sを座標平面上に図示し，その面積を求めよ。 [2011]

解答例

(1) $f(x)=(x-p)^2+q$に対して，条件から，$f(0)=1$となり，$p^2+q=1$ ………①

次に，$y=f(x)$と$y=x$を連立して，

$$(x-p)^2+q=x,\ x^2-(2p+1)x+p^2+q=0\ \text{………②}$$

$x>0$で，$y=f(x)$と$y=x$が接することより，$f(x)=x$は正の重解をもち，

$$D=(2p+1)^2-4(p^2+q)=0\ \text{………③},\ 2p+1>0\ \text{………④}$$

①③より，$(2p+1)^2=4$となり，④から，$2p+1=2$，$p=\dfrac{1}{2}$

①に代入すると，$q=\dfrac{3}{4}$となり，このとき②の重解は，$x=\dfrac{2p+1}{2}=1$

よって，接点の座標は，$(1,\ 1)$である。

(2) $g(x)=f_2(x)-f_1(x)$とおくと，条件より$g(\alpha)>0$かつ$g(\beta)>0$であり，

$$g(x)=(x-p_2)^2+q_2-(x-p_1)^2-q_1=-2(p_2-p_1)x+{p_2}^2-{p_1}^2+q_2-q_1$$

(i) $p_2\geqq p_1$のとき　$g(x)$は単調に減少し，$\alpha<x<\beta$において，$g(x)\geqq g(\beta)>0$

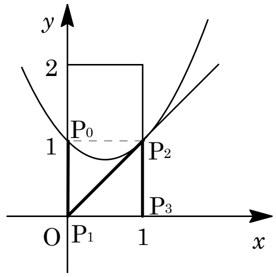
(ii) $p_2<p_1$のとき　$g(x)$は単調に増加し，$\alpha<x<\beta$において，$g(x)\geqq g(\alpha)>0$

(i)(ii)より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$において$f_1(x)<f_2(x)$が成り立つ。

(3) 点$(0,\ 1)$を通り，直線$y=x$と点$(1,\ 1)$で接する放物線は，(1)より，

$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2-x+1$$

この放物線を $y=f_1(x)$ とおき，放物線 $y=f(x)$ が，不等式 $1=f_1(0)<f(0)$ かつ $1=f_1(1)<f(1)$ を満たすとすると，(2)より，$y=f(x)$ は折れ線 L と共有点をもたない。

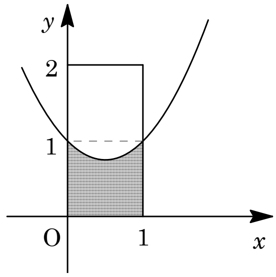


また，$f(0)\leqq f_1(0)$ または $f(1)\leqq f_1(1)$ が満たされるとき，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ は，折れ線 L と共有点をもつ。

そこで，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ を，折れ線 L と共有点がないように動かすとき，$y=f(x)$ が通過する領域は，$y=f_1(x)$ の上部全体となる。

したがって，長方形 R から，上記の通過領域 T を除いた領域 S を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含む。また，この領域 S の面積は，

$$\int_0^1(x^2-x+1)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$



コメント

(3)の論理展開は感覚的すぎると思いながらも，この程度の記述に留めました。

問　題

曲線$C : y=-x^2-1$を考える。

(1)　tが実数全体を動くとき，曲線C上の点$(t,\ -t^2-1)$を頂点とする放物線

$$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$$

が通過する領域をxy平面上に図示せよ。

(2)　Dを(1)で求めた領域の境界とする。Dがx軸の正の部分と交わる点を$(a,\ 0)$とし，$x=a$でのCの接線をlとする。Dとlで囲まれた部分の面積を求めよ。

[2010]

解答例

(1)　$C : y=-x^2-1$ ……①上に頂点のある放物線$y=\frac{3}{4}(x-t)^2-t^2-1$ ……②が通過する点$(x,\ y)$の条件は，②をtの方程式としてみたとき，tが実数解をもつ条件に一致する。

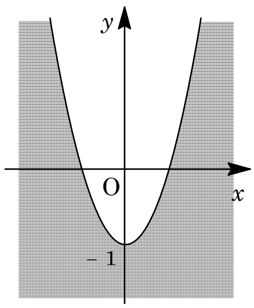
②より，$4y=3(x^2-2tx+t^2)-4t^2-4$

$$t^2+6xt-3x^2+4y+4=0$$

実数解条件より，$D/4=9x^2-(-3x^2+4y+4)\geqq 0$

$$y\leqq 3x^2-1$$

これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



(2)　条件より，$D : y=3x^2-1$ ………③

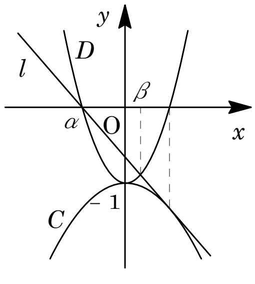
Dとx軸の正の部分との交点は$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ 0\right)$となり，$C$上の点$\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -\frac{4}{3}\right)$における接線$l$の方程式を求めると，①より，$y'=-2x$から，

$$y+\frac{4}{3}=-\frac{2}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right),\ y=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}\ \text{………④}$$

③④の交点は，$3x^2-1=-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}$，$3x^2+\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{1}{3}=0$

$$9x^2+2\sqrt{3}x-1=0,\ (3\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)=0$$

よって，$x=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\frac{1}{3\sqrt{3}}$となり，$\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}$，$\beta=\frac{1}{3\sqrt{3}}$とおくと，$D$と$l$で囲まれた部分の面積$S$は，



$$S=\int_\alpha^\beta\left(-\frac{2}{\sqrt{3}}x-\frac{2}{3}-3x^2+1\right)dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3\sqrt{3}}+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{32}{243}\sqrt{3}$$

コメント

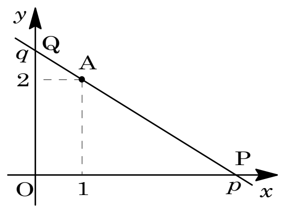
曲線の通過領域と微積分の融合問題です。この両者の必須技法が問われています。

問　題

xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通る直線 l が x 軸, y 軸とそれぞれ点 P, Q で交わるとする。点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を満たすようにとる。ただし, O は xy 平面の原点である。このとき, 直線 l の傾きにかかわらず, 点 R はある関数 $y=f(x)$ のグラフ上にある。関数 $f(x)$ を求めよ。　[2006]

解答例

点 P, Q を $\mathrm{P}(p,\ 0)$, $\mathrm{Q}(0,\ q)$ とおく。



(i)　$pq\neq 0$ のとき

直線 l の方程式は, $\dfrac{x}{p}+\dfrac{y}{q}=1$

$\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通ることより, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{q}=1$ ………①

また, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(p-1,\ q-2)$ となる。

さて, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(x,\ y)$ とおくと,

$$x=p-1\ \cdots\cdots\cdots②,\quad y=q-2\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③を①に代入すると, $x\neq -1$, $y\neq -2$ のもとで,

$$\frac{1}{x+1}+\frac{2}{y+2}=1,\quad y+2=\frac{2(x+1)}{x},\quad y=\frac{2}{x}\ \cdots\cdots\cdots④$$

(ii)　$pq=0$ のとき

このとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{0}$ から, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(-1,\ -2)$

すると, $(x,\ y)=(-1,\ -2)$ となり, ④を満たしている。

(i)(ii)より, 点 R は曲線 $y=\dfrac{2}{x}$ 上にあるので, $f(x)=\dfrac{2}{x}$ である。

コメント

点 R の軌跡の方程式を求める問題です。パラメータ p, q を消去すれば OK です。

問　題

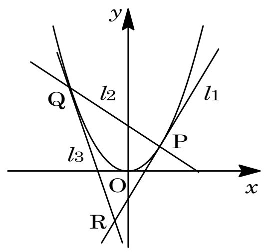
放物線$C : y = \dfrac{1}{2}x^2$上の原点以外の点 P における C の接線をl_1とし，P を通りl_1と直交する直線をl_2とする。また，l_2と C が再び交わる点を Q とし，Q における C の接線をl_3とする。さらに，l_1とl_3の交点を R とする。

(1)　点R$(x,\ y)$について, y を x の式で表せ。

(2)　PR≧PQ となる点 P の x 座標の範囲を求めよ。　　　　　　　　　　　　[1999]

解答例

(1)　$y = \dfrac{1}{2}x^2$ ……①より $y' = x$，$\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{1}{2}t^2\right)$とすると，



$$l_1 : y = t(x-t) + \frac{1}{2}t^2 = tx - \frac{1}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots②$$

$$l_2 : y = -\frac{1}{t}(x-t) + \frac{1}{2}t^2 = -\frac{1}{t}x + 1 + \frac{1}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots③$$

①と③の交点は,

$$\frac{1}{2}x^2 = -\frac{1}{t}x + 1 + \frac{1}{2}t^2,\quad x^2 + \frac{2}{t}x - (t^2+2) = 0$$

$$x = t,\quad x = -t - \frac{2}{t}$$

ここで$s = -t - \dfrac{2}{t}$とすると，②より，$l_3 : y = sx - \dfrac{1}{2}s^2$ ………④

②④の交点 R は，$tx - \dfrac{1}{2}t^2 = sx - \dfrac{1}{2}s^2$，$x = \dfrac{t^2 - s^2}{2(t-s)} = \dfrac{t+s}{2} = \dfrac{1}{2}\left(t - t - \dfrac{2}{t}\right) = -\dfrac{1}{t}$

②より，$y = t\left(-\dfrac{1}{t}\right) - \dfrac{1}{2}t^2 = -1 - \dfrac{1}{2}t^2$

$\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{t},\ -1 - \dfrac{1}{2}t^2\right)$となるので，$y = -1 - \dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{x}\right)^2 = -\dfrac{1}{2x^2} - 1$

(2)　$\mathrm{PR}^2 = \left(t + \dfrac{1}{t}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}t^2 + 1 + \dfrac{1}{2}t^2\right)^2 = (t^2+1)^2\left(\dfrac{1}{t^2} + 1\right) = \dfrac{(t^2+1)^3}{t^2}$

また，$\mathrm{PQ}^2 = (t-s)^2 + \left(\dfrac{1}{2}t^2 - \dfrac{1}{2}s^2\right)^2 = \dfrac{1}{4}(t-s)^2\left\{4 + (t+s)^2\right\}$

$$= \left(t + \frac{1}{t}\right)^2\left(4 + \frac{4}{t^2}\right) = \frac{4(t^2+1)^3}{t^4}$$

PR≧PQ ⇔ $\mathrm{PR}^2 \geqq \mathrm{PQ}^2$より，$\dfrac{(t^2+1)^3}{t^2} \geqq \dfrac{4(t^2+1)^3}{t^4}$となる。

よって，$t^2 \geqq 4$から$t \leqq -2,\ 2 \leqq t$

すなわち，求める点 P の x 座標の範囲は-2以下または 2 以上である。

コメント

よく見かける構図の問題です。ここでは普通に解いてみました。

問　題

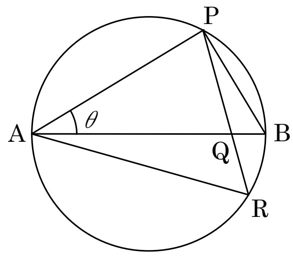
平面上に長さ 2 の線分 AB を直径とする円 C がある。2 点 A, B を除く C 上の点 P に対し，$\mathrm{AP}=\mathrm{AQ}$ となるように線分 AB 上の点 Q をとる。また，直線 PQ と円 C の交点のうち，P でない方を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を $\theta=\angle\mathrm{PAB}$ を用いて表せ。

(2)　点 P を動かして $\triangle\mathrm{AQR}$ の面積が最大になるとき，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を用いて表せ。

[2015]

解答例



(1)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, AB が直径なので $\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{2}$ より,

$$\mathrm{AP}=\mathrm{AB}\cos\theta=2\cos\theta$$

すると，条件より，$\mathrm{AQ}=2\cos\theta$，$\mathrm{BQ}=2-2\cos\theta$

また，$\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{1}{2}(\pi-\theta)=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\theta}{2}$ から,

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{AQ}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\theta}{2}\right)=4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}$$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{RQ}=\mathrm{AQ}\cdot\mathrm{BQ}$ となり,

$$4\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cdot\mathrm{RQ}=2\cos\theta(2-2\cos\theta),\quad \mathrm{RQ}=\frac{1-\cos\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{2\sin^2\frac{\theta}{2}}{\sin\frac{\theta}{2}}=2\sin\frac{\theta}{2}$$

そこで，$\triangle\mathrm{AQR}$ の面積を S とすると，$\angle\mathrm{AQR}=\pi-\angle\mathrm{AQP}=\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{\theta}{2}$ より,

$$S=\frac{1}{2}\cdot2\cos\theta\cdot2\sin\frac{\theta}{2}\cdot\sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\theta}{2}\right)=2\cos\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}$$
$$=\cos\theta\sin\theta=\frac{1}{2}\sin2\theta$$

(2)　(1)より, S が最大になるのは，$\sin2\theta=1$ すなわち $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のときである。

このとき，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=4\cos\dfrac{\pi}{4}\sin\dfrac{\pi}{8}:2\sin\dfrac{\pi}{8}=\sqrt{2}:1$ となり，点 R は線分 PQ を $(\sqrt{2}+1):1$ に外分することより,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{-\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(\sqrt{2}+1)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}}{(\sqrt{2}+1)-1}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$$

また，$\mathrm{AQ}=2\cos\dfrac{\pi}{4}=\sqrt{2}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=-\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\frac{\sqrt{2}+1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

コメント

よく見かける構図の三角関数の図形への応用問題です。上記以外にも，いろいろな解法が考えられます。たとえば，点 A を原点，点 B を x 軸上の点として xy 平面で，ということも脳裏に浮かびましたが，計算量を考えて……。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とする。ベクトル $\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$ をとり，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$ とおく。座標平面上のベクトル $\vec{p}$ に対する条件

$$(*)\quad (\overrightarrow{v_1}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\vec{p})\overrightarrow{v_3}=c\vec{p}$$

を考える。ここで $\overrightarrow{v_i}\cdot\vec{p}\ (i=1,\ 2,\ 3)$ はベクトル $\overrightarrow{v_i}$ とベクトル $\vec{p}$ の内積を表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の任意のベクトル $\vec{v}=(x,\ y)$ が，実数 $s,\ t$ を用いて $\vec{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$ と表されることを, s および t の各々を x, y の式で表すことによって示せ。

(2) $\vec{p}=\overrightarrow{v_1}$ と $\vec{p}=\overrightarrow{v_2}$ の両方が条件($*$)を満たすならば，座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件($*$)を満たすことを示せ。

(3) 座標平面上のすべてのベクトル $\vec{v}$ に対して，$\vec{p}=\vec{v}$ が条件($*$)を満たす。このような実数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。 [2011]

解答例

(1) $\overrightarrow{v_1}=(3,\ 0)$，$\overrightarrow{v_2}=(1,\ 2\sqrt{2})$，$\vec{v}=(x,\ y)$ に対して，$\vec{v}=s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}$ から，

$$3s+t=x\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 2\sqrt{2}t=y\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$t=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}y=\dfrac{\sqrt{2}}{4}y$ となり，①に代入して，$s=\dfrac{1}{3}\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{4}y\right)=\dfrac{1}{3}x-\dfrac{\sqrt{2}}{12}y$

(2) 条件より, ($*$)に $\vec{p}=\overrightarrow{v_1}$，$\vec{p}=\overrightarrow{v_2}$ を代入すると，

$$(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_3}=c\overrightarrow{v_1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$(\overrightarrow{v_1}\cdot\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_3}=c\overrightarrow{v_2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③から，$(\overrightarrow{v_1}\cdot s\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot s\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot s\overrightarrow{v_1})\overrightarrow{v_3}=cs\overrightarrow{v_1}$

④から，$(\overrightarrow{v_1}\cdot t\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot t\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot t\overrightarrow{v_2})\overrightarrow{v_3}=ct\overrightarrow{v_2}$

$$(\overrightarrow{v_1}\cdot(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}))\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}))\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2}))\overrightarrow{v_3}=c(s\overrightarrow{v_1}+t\overrightarrow{v_2})$$

よって，$(\overrightarrow{v_1}\cdot\vec{v})\overrightarrow{v_1}+(\overrightarrow{v_2}\cdot\vec{v})\overrightarrow{v_2}+(\overrightarrow{v_3}\cdot\vec{v})\overrightarrow{v_3}=c\vec{v}\ \cdots\cdots$⑤が成立する。

(3) すべてのベクトル $\vec{v}$ に対して⑤が成立する条件は，(2)より，③④がともに成立する条件に等しい。すると，$\overrightarrow{v_3}=a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2}$ を用いて，

$$\overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_1}=(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_1}=9a+3b,\ \overrightarrow{v_3}\cdot\overrightarrow{v_2}=(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})\cdot\overrightarrow{v_2}=3a+9b$$

③より，$9\overrightarrow{v_1}+3\overrightarrow{v_2}+(9a+3b)(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})=c\overrightarrow{v_1}$

$$(9+9a^2+3ab-c)\overrightarrow{v_1}+3(1+3ab+b^2)\overrightarrow{v_2}=\vec{0}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④より，$3\overrightarrow{v_1}+9\overrightarrow{v_2}+(3a+9b)(a\overrightarrow{v_1}+b\overrightarrow{v_2})=c\overrightarrow{v_2}$

$$3(1+a^2+3ab)\overrightarrow{v_1}+(9+3ab+9b^2-c)\overrightarrow{v_2}=\vec{0}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，$\vec{v_1}$，$\vec{v_2}$は1次独立なので，⑥⑦より，

$$9+9a^2+3ab-c=0 \cdots\cdots\cdots ⑧,\ 1+3ab+b^2=0 \cdots\cdots\cdots ⑨$$

$$1+a^2+3ab=0 \cdots\cdots\cdots ⑩,\ 9+3ab+9b^2-c=0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

⑨⑩より $a^2=b^2$ すなわち $b=\pm a$ となり，このとき⑧と⑪は一致する。

(i)　$b=a$ のとき　⑨より，$a^2+3a^2+1=0$ となり，不適である。

(ii)　$b=-a$ のとき　⑨より，$a^2-3a^2+1=0$ となり，

$$a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}},\ b=\mp\frac{1}{\sqrt{2}}$$ （複号同順）

⑧に代入して，$c=9+\dfrac{9}{2}-\dfrac{3}{2}=12$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 12\right),\ \left(-\dfrac{1}{\sqrt{2}},\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 12\right)$

コメント

ベクトルの内積が題材となっていますが，内容は連立方程式です。この点で，第 1 問と類似しています。

問　題

平面上の三角形 OAB を考え，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$t=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$ とおく。辺 OA を $1:2$ に内分する点を C とし，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=t\vec{b}$ となる点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{AD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ が直交し，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が直交するとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(2)　t の値を求めよ。

(3)　AD と BC の交点を P とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。　[2009]

解答例

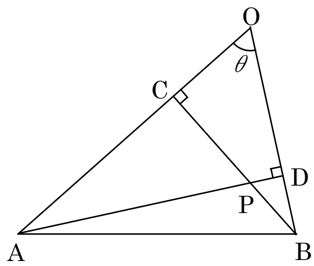
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ は $\vec{a}$ の OB 方向への正射影ベクトルより，

$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{b}\cdot\vec{b}}\vec{b}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{b}|^2}\vec{b}=\frac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}\vec{b}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}\vec{b}$ なので，$\dfrac{|\vec{a}|\cos\theta}{|\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}$

$$\cos\theta=\frac{1}{2},\quad \theta=60^\circ$$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ は $\vec{b}$ の OA 方向への正射影ベクトルより，(1)の結果から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{\vec{a}\cdot\vec{a}}\vec{a}=\frac{|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta}{|\vec{a}|^2}\vec{a}=\frac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|}\vec{a}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\dfrac{1}{3}\vec{a}$ なので，$\dfrac{|\vec{b}|}{2|\vec{a}|}=\dfrac{1}{3}$ すなわち $\dfrac{|\vec{b}|}{|\vec{a}|}=\dfrac{2}{3}$ となり，

$$t=\frac{|\vec{a}|}{2|\vec{b}|}=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}$$

(3)　$\triangle\mathrm{OAD}$ と直線 BC について，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{OC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}\cdot\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{BO}}=1,\quad \frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PD}}=\frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{OC}}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{DB}}=\frac{2}{1}\cdot\frac{4}{1}=8$$

よって，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=8:1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{8}{9}\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{8}{9}\cdot\frac{3}{4}\vec{b}=\frac{1}{9}\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

コメント

(1)と(2)は正射影ベクトルを利用した解法です。普通に内積の処理でも構いません。(3)も同様です。

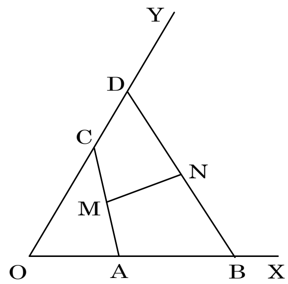
問　題

点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle \mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2) 点 A, B と C, D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。 [2008]

解答例



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\right)$

$$=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

よって，$\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2) $s^2+t^2=1$ $(s>0,\ t>0)$ より，$s=\cos\theta$，$t=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$s^2+st+t^2=1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

すると，$\sin 2\theta=1$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき，s^2+st+t^2 は最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

よって，(1)より，MN の最大値は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

コメント

平面ベクトルの基本題です。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の表現がポイントとなっています。なお，(2)では，相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

問　題

xy 平面において，原点 O を通る半径 r （$r>0$）の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2007]

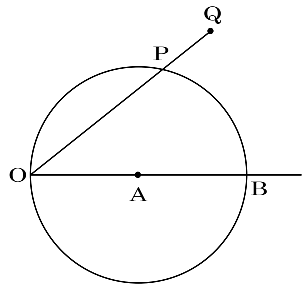
解答例

(1)　条件(a)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　（$k>0$）

条件(b)に代入すると，$k>0$ より $k|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=1$

これより，$k=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots\cdots\cdots①$$



さて，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，点 P は OB を直径とする円 C 上にあるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$，$\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2r$ なので，③より，

$$2r|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta=\frac{1}{2r}$$

以上より，半直線 OB 上に $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2r}$ となる点 H をとると，点 Q は点 H を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2)　l が C と 2 点で交わる条件は $\mathrm{OH}<\mathrm{OB}$ であり，$\dfrac{1}{2r}<2r$ から，$r>\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

③式は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の OB 方向への正射影ベクトルの大きさが一定という意味でとらえました。なお，原点を O, x 軸を直線 OA とする座標系を導入する方法もあります。

問　題

平面ベクトル $\vec{p}=(p_1,\ p_2)$，$\vec{q}=(q_1,\ q_2)$ に対して，$\{\vec{p},\ \vec{q}\}=p_1q_2-p_2q_1$ と定める。

(1)　平面ベクトル $\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ に対して，$\{\vec{a},\ \vec{b}\}=l$，$\{\vec{b},\ \vec{c}\}=m$，$\{\vec{c},\ \vec{a}\}=n$ とするとき，$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$ が成り立つことを示せ。

(2)　(1)で $l,\ m,\ n$ がすべて正であるとする。このとき任意の平面ベクトル $\vec{d}$ は 0 以上の実数 r, s, t を用いて，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表すことができることを示せ。　[2003]

解答例

(1)　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$，$\vec{c}=(c_1,\ c_2)$ とおくと，

$$l=a_1b_2-a_2b_1,\ \ m=b_1c_2-b_2c_1,\ \ n=c_1a_2-c_2a_1$$

このとき，$l\vec{c}=(a_1b_2-a_2b_1)(c_1,\ c_2)=(a_1b_2c_1-a_2b_1c_1,\ a_1b_2c_2-a_2b_1c_2)$

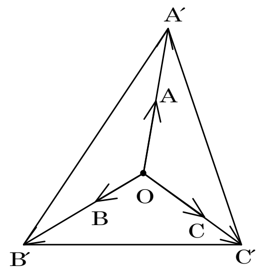
$$m\vec{a}=(b_1c_2-b_2c_1)(a_1,\ a_2)=(a_1b_1c_2-a_1b_2c_1,\ a_2b_1c_2-a_2b_2c_1)$$

$$n\vec{b}=(c_1a_2-c_2a_1)(b_1,\ b_2)=(a_2b_1c_1-a_1b_1c_2,\ a_2b_2c_1-a_1b_2c_2)$$

よって，$l\vec{c}+m\vec{a}+n\vec{b}=\vec{0}$

(2)　$l>0,\ m>0,\ n>0$ より，$\vec{a},\ \vec{b},\ \vec{c}$ はいずれも零ベクトルでもなく，しかもどの 2 つのベクトルも平行ではない。

さて，$m\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$，$n\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB'}}$，$l\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ とすると，(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}+\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=\vec{0}$ なので，点 O は $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ の重心となる。そこで，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ とすると，



(i)　点 D が $\angle\mathrm{AOB}$ の内部または辺上にあるとき
$r\geqq 0,\ s\geqq 0$ として，$\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}$ と表せる。

(ii)　点 D が $\angle\mathrm{BOC}$ の内部または辺上にあるとき
$s\geqq 0,\ t\geqq 0$ として，$\vec{d}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表せる。

(iii)　点 D が $\angle\mathrm{COA}$ の内部または辺上にあるとき
$r\geqq 0,\ t\geqq 0$ として，$\vec{d}=r\vec{a}+t\vec{c}$ と表せる。

(i)(ii)(iii)より，任意のベクトル $\vec{d}$ は $\vec{d}=r\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\ (r\geqq 0,\ s\geqq 0,\ t\geqq 0)$ と表せる。

コメント

(2)は，係数がすべて 0 以上を示すところがポイントです。そこで，(1)の結果を重心と結びつけてみました。

問　題

平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 K_1 を考える。K_1 の直径を 1 つとり，その両端を A, B とする。円 K_1 の周上の任意の点 Q に対し，線分 QA を $1:2$ の比に内分する点を R とする。いま k を正の定数として，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ とおく。ただし，$\mathrm{Q}=\mathrm{A}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{A}$ とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とおく。

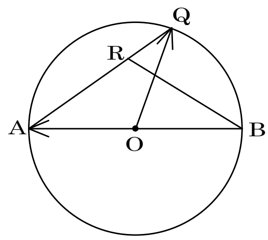
(1) $\overrightarrow{\mathrm{BR}}$ を $\vec{a}$, $\vec{q}$ を用いて表せ。

(2) 点 Q が円 K_1 の周上を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ となるような点 P がえがく図形を K_2 とする。K_2 は円であることを示し，中心の位置ベクトルと半径を求めよ。

(3) 円 K_2 の内部に点 A が含まれるような k の値の範囲を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{\vec{a}+2\vec{q}}{3}-(-\vec{a})=\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{q}$



(2) 条件より，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{AQ}}+k\overrightarrow{\mathrm{BR}}=(\vec{q}-\vec{a})+k\left(\dfrac{4}{3}\vec{a}+\dfrac{2}{3}\vec{q}\right)$

$$=\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}+\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}$$

$$\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}=\vec{p}-\left(\frac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\cdots\cdots\cdots①$$

点 Q は O を中心とする半径 1 の円周上にあるので，$|\vec{q}|=1$

$$\left(\frac{2}{3}k+1\right)|\vec{q}|=\frac{2}{3}k+1,\ \left|\left(\frac{2}{3}k+1\right)\vec{q}\right|=\frac{2}{3}k+1\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入して，$\left|\vec{p}-\left(\dfrac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|=\dfrac{2}{3}k+1\cdots\cdots\cdots③$

よって点 P は，中心の位置ベクトルが $\left(\dfrac{4}{3}k-1\right)\vec{a}$ で，半径 $\dfrac{2}{3}k+1$ の円を描く。

(3) ③の円の内部に点 A が含まれるので，$\left|\vec{a}-\left(\dfrac{4}{3}k-1\right)\vec{a}\right|<\dfrac{2}{3}k+1$

$$\left|\left(2-\frac{4}{3}k\right)\vec{a}\right|<\frac{2}{3}k+1,\ \left|2-\frac{4}{3}k\right||\vec{a}|<\frac{2}{3}k+1$$

$|\vec{a}|=1$ より，$\left|2-\dfrac{4}{3}k\right|<\dfrac{2}{3}k+1$，$-\dfrac{2}{3}k-1<2-\dfrac{4}{3}k<\dfrac{2}{3}k+1$

$$-\frac{2}{3}k-1<2-\frac{4}{3}k\cdots\cdots④,\ 2-\frac{4}{3}k<\frac{2}{3}k+1\cdots\cdots⑤$$

④より $k<\dfrac{9}{2}$，⑤より $k>\dfrac{1}{2}$ なので，$\dfrac{1}{2}<k<\dfrac{9}{2}$ となる。

コメント

誘導がていねいについており，センター試験風の構成になっています。

問　題

空間のベクトル$\vec{x}=(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$\vec{y}=(y_1,\ y_2,\ y_3)$を考える。ただし，どちらも零ベクトルではないとする。$k=1,\ 2,\ 3$に対し，複素数$z_k=x_k+y_ki$　($i=\sqrt{-1}$は虚数単位）を考え，複素数$w_k=u_k+v_ki$　(u_k，v_kは実数）を$w_k=(\sqrt{3}+i)z_k$で定める。さらにu_k，v_kから定まるベクトル$\vec{u}=(u_1,\ u_2,\ u_3)$，$\vec{v}=(v_1,\ v_2,\ v_3)$を考える。

(1)　$\vec{x}$の大きさをr，$\vec{y}$の大きさをs，$\vec{x}$と$\vec{y}$のなす角をθ ($0°\leqq\theta\leqq 180°$)とするとき${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2$をr，s，θで表せ。

(2)　$\vec{x}$と$\vec{y}$の大きさが等しく，両者はたがいに垂直であるとする。このとき$\vec{u}$と$\vec{v}$も大きさが等しく，たがいに垂直であることを示せ。

(3)　(2)の仮定のもとで，$\vec{x}$と$\vec{u}$のなす角を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$|\vec{x}|=r$，$|\vec{y}|=s$，$\vec{x}\cdot\vec{y}=rs\cos\theta$より，$x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3=rs\cos\theta$

$${x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2=r^2,\quad {y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2=s^2$$

すると，${z_1}^2+{z_2}^2+{z_3}^2=(x_1+y_1i)^2+(x_2+y_2i)^2+(x_3+y_3i)^2$

$$=({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)+2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)i-({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)$$

$$=r^2+2rsi\cos\theta-s^2$$

(2)　$w_k=(\sqrt{3}+i)(x_k+y_ki)=(\sqrt{3}x_k-y_k)+(x_k+\sqrt{3}y_k)i$より，

$$u_k=\sqrt{3}x_k-y_k,\quad v_k=x_k+\sqrt{3}y_k$$

すると，$|\vec{u}|^2={u_1}^2+{u_2}^2+{u_3}^2=(\sqrt{3}x_1-y_1)^2+(\sqrt{3}x_2-y_2)^2+(\sqrt{3}x_3-y_3)^2$

$$=3({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-2\sqrt{3}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)$$

$$=3r^2-2\sqrt{3}rs\cos\theta+s^2$$

$$|\vec{v}|^2={v_1}^2+{v_2}^2+{v_3}^2=(x_1+\sqrt{3}y_1)^2+(x_2+\sqrt{3}y_2)^2+(x_3+\sqrt{3}y_3)^2$$

$$=({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)+2\sqrt{3}(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)+3({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)$$

$$=r^2+2\sqrt{3}rs\cos\theta+3s^2$$

$$\vec{u}\cdot\vec{v}=u_1v_1+u_2v_2+u_3v_3$$

$$=\sqrt{3}({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)+2(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)-\sqrt{3}({y_1}^2+{y_2}^2+{y_3}^2)$$

$$=\sqrt{3}r^2+2rs\cos\theta-\sqrt{3}s^2$$

条件より，$r=s$，$\cos\theta=0$なので，$|\vec{u}|^2=|\vec{v}|^2$，$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$

よって，$\vec{u}$と$\vec{v}$は大きさが等しく，たがいに垂直である。

(3)　$\vec{x}\cdot\vec{u}=x_1u_1+x_2u_2+x_3u_3=x_1(\sqrt{3}x_1-y_1)+x_2(\sqrt{3}x_2-y_2)+x_3(\sqrt{3}x_3-y_3)$

$$=\sqrt{3}({x_1}^2+{x_2}^2+{x_3}^2)-(x_1y_1+x_2y_2+x_3y_3)=\sqrt{3}r^2-rs\cos\theta=\sqrt{3}r^2$$

また，$|\vec{x}|=r$，$|\vec{u}|=\sqrt{3r^2+r^2}=2r$ なので，$\vec{x}$ と $\vec{u}$ のなす角を φ とすると，

$$\cos\varphi=\frac{\sqrt{3}r^2}{r\cdot 2r}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\varphi=30°$ である。

コメント

とりたてて工夫をすることもなく，普通に計算をしていきました。

問　題

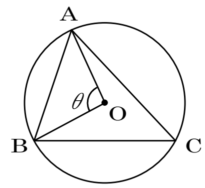
点 O を中心とする円を考える。この円の円周上に 3 点 A, B, C があって，

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

を満たしている。このとき，三角形 ABC は正三角形であることを証明せよ。

[2000]

解答例



$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ より，$\left|\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|$

$$\left|\overrightarrow{OA}\right|^2+2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+\left|\overrightarrow{OB}\right|^2=\left|\overrightarrow{OC}\right|^2$$

ここで，$\left|\overrightarrow{OA}\right|=\left|\overrightarrow{OB}\right|=\left|\overrightarrow{OC}\right|=R$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおくと，

$$R^2+2R^2\cos\theta+R^2=R^2$$

$$2\cos\theta+1=0,\ \ \cos\theta=-\frac{1}{2},\ \ \theta=120^\circ$$

さて，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=-\overrightarrow{OC}$ から，$2\cdot\dfrac{\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}}{2}=-\overrightarrow{OC}$ と変形をすると，辺 AB の中点と頂点 C は O に関して反対側にあることになり，

$$\angle\mathrm{ACB}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$$

また，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=-\overrightarrow{OB}$ より，同様にして，$\angle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{AOC}=60^\circ$

よって，$\angle\mathrm{BAC}=180^\circ-60^\circ-60^\circ=60^\circ$

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ は正三角形である。

コメント

ずいぶん前になりますが, 1992 年に京大で, 類題が出ています。

問　題

平面上の 4 点 O, P, Q, R が条件

$$\mathrm{OP}=2,\ \ \mathrm{OQ}=3,\ \ \angle\mathrm{POQ}=60^\circ,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\vec{0}$$

を満たすとする。線分 OR の長さと $\cos\angle\mathrm{POR}$ の値を求めよ。 [1998]

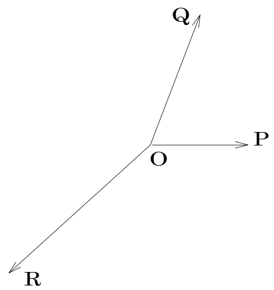
解答例

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\cdot3\cdot\cos60^\circ=3$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ なので,

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2&=|-\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2\\&=2^2+2\cdot3+3^2=19\end{aligned}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=\sqrt{19}$



同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ より,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$$

$$9=4+2\cdot2\cdot\sqrt{19}\cdot\cos\angle\mathrm{POR}+19$$

よって，$\cos\angle\mathrm{POR}=-\dfrac{7}{2\sqrt{19}}$

コメント

ベクトルの内積に関する基本問題です。誘導はありませんが，2 つの設問を同じ方針で解いてみました。

問　題

次の条件によって定められる数列$\{a_n\}$がある。

$$a_1 = 2,\ a_{n+1} = 8{a_n}^2 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$b_n = \log_2 a_n$とおく。b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$とおく。数列$\{P_n\}$の一般項を求めよ。

(4)　$P_n > 10^{100}$となる最小の自然数nを求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$a_1 = 2 > 0$で，$a_{n+1} = 8{a_n}^2$……①より，帰納的に$a_n > 0$であるので，①の両辺に底を2で対数をとると，

$$\log_2 a_{n+1} = \log_2 8{a_n}^2,\ \log_2 a_{n+1} = 3 + 2\log_2 a_n$$

ここで，$b_n = \log_2 a_n$とおくと，$b_{n+1} = 3 + 2b_n$………②

(2)　②を変形すると，$b_{n+1} + 3 = 2(b_n + 3)$となり，$b_1 = \log_2 a_1 = 1$から，

$$b_n + 3 = (b_1 + 3)2^{n-1} = 4\cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

よって，$b_n = 2^{n+1} - 3$………③

(3)　条件より，$P_n = a_1a_2a_3\cdots a_n$とおくと，③から，

$$\log_2 P_n = \log_2 a_1a_2a_3\cdots a_n = \log_2 a_1 + \log_2 a_2 + \log_2 a_3 + \cdots + \log_2 a_n$$
$$= b_1 + b_2 + b_3 + \cdots + b_n = \sum_{k=1}^{n}(2^{k+1} - 3) = \frac{2^2(2^n - 1)}{2-1} - 3n$$
$$= 2^{n+2} - 3n - 4\ \text{………④}$$

よって，$P_n = 2^{2^{n+2}-3n-4}$である。

(4)　$P_n > 10^{100}$とすると，$\log_2 P_n > 100\log_2 10$………⑤

ここで，$8 < 10 < 8\sqrt{2}$より$2^3 < 10 < 2^{\frac{7}{2}}$となるので，$3 < \log_2 10 < \frac{7}{2}$から，

$$300 < 100\log_2 10 < 350$$

そこで，$\log_2 P_n$は単調に増加する数列で，④から，

$$\log_2 P_6 = 2^8 - 18 - 4 = 234,\ \log_2 P_7 = 2^9 - 21 - 4 = 487$$

よって，不等式⑤すなわち$P_n > 10^{100}$を満たす最小のnは$n = 7$である。

コメント

漸化式と対数計算の融合問題です。なお，(4)で不等式を満たすnの値を求めるとき，2^{n+2}の値を指標にして，見当をつけています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) a を正の実数とし，k を 1 以上の実数とする。x についての 2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ は，不等式 $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たすような実数解 s をもつことを示せ。

(2) a を 3 以上の整数とする。n^2+a が $an+1$ で割り切れるような 2 以上のすべての整数 n を a を用いて表せ。 [2016]

解答例

(1) 実数 a, k が $a>0$，$k\geqq 1$ のとき，2 次方程式 $x^2-kax+a-k=0$ ……①に対して，$f(x)=x^2-kax+a-k$ とおくと，

$$f\left(-\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a^2}+k+a-k=\frac{1}{a^2}+a>0$$

$$f(1)=1-ka+a-k=(a+1)(1-k)\leqq 0$$

これより，①は $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ を満たす実数解 s をもつ。

(2) 整数 a, n, k は，$a\geqq 3$，$n\geqq 2$，$k\geqq 1$ を満たすとする。

ここで，n^2+a は $an+1$ で割り切れることから，$n^2+a=k(an+1)$ と表せ，

$$n^2-kan+a-k=0 \text{ ………②}$$

すると，②は $f(n)=0$ であり，さらに(1)から $-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ なので，①は異なる実数解 s, n $(s<n)$ をもつことになる。

さて，①について，解と係数の関係から $s+n=ka$ となり，$s=ka-n$ ………③

a, n, k は整数なので，③から s も整数となる。さらに，$a\geqq 3$ から $-\frac{1}{3}\leqq -\frac{1}{a}<0$ となり，$-\frac{1}{a}<s\leqq 1$ から $s=0$, 1 である。

(i)　$s=0$ のとき　$f(0)=a-k=0$ から $k=a$ となり，③から $n=a^2$

そして，$a^2\geqq 9$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(ii)　$s=1$ のとき　$f(1)=(a+1)(1-k)=0$ から $k=1$ となり，③から $n=a-1$

そして，$a-1\geqq 2$ より $n\geqq 2$ は満たされている。

(i)(ii)より，$n=a^2$, $a-1$ である。

コメント

一見，無関係に思える 2 つの小問ですが，(2)を解いていくと，この整数問題への誘導として，(1)の 2 次方程式の解の配置についての設問がある，というのに気づきます。

問　題

次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m|\leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。　[2012]

解答例

(1)　n が偶数のとき $n=2k$ とおくと，条件(ii)より，必要条件として，

$$|k-2|\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4$$

さらに，条件(i)を考え合わせると，$2\leqq k\leqq 4$ となり，$n=4,\ 6,\ 8$ である。

(a)　$n=4$ のとき　1, 4 を除く正の約数は 2 だけであり，条件を満たす。

(b)　$n=6$ のとき　1, 6 を除く正の約数は 2, 3 であり，条件を満たす。

(c)　$n=8$ のとき　1, 8 を除く正の約数は 2, 4 であり，条件を満たす。

(a)～(c)より，$n=4,\ 6,\ 8$

(2)　n が 7 の倍数のとき，(1)と同様にすると，

$$|k-7|\leqq 2,\ 5\leqq k\leqq 9$$

(1)より，偶数を除くと，$n=35,\ 49,\ 63$ である。

(a)　$n=35$ のとき　1, 35 を除く正の約数は 5, 7 であり，条件を満たす。

(b)　$n=49$ のとき　1, 49 を除く正の約数は 7 だけであり，条件を満たす。

(c)　$n=63$ のとき　1, 63 を除く正の約数は 3, 7, 9, 21 であり，条件に反する。

(a)～(c)より，$n=35,\ 49$

(3)　$31^2=961$，$37^2=1369$ に注目して，(1), (2)と同様に考える。

(Ⅰ) n が 3 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=3^2,\ 3\times5$

(Ⅱ) n が 5 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=5\times3,\ 5^2,\ 5\times7$

(Ⅲ) n が 11 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=11^2,\ 11\times13$

(Ⅳ) n が 13 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=13\times11,\ 13^2$

(Ⅴ) n が 17 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=17^2,\ 17\times19$

(Ⅵ) n が 19 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=19\times17,\ 19^2$

(Ⅶ) n が 23 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=23^2$

(Ⅷ) n が 29 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=29^2,\ 29\times31$

(Ⅸ) n が 31 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=31\times29,\ 31^2$

(Ⅰ)～(Ⅸ)に, (1), (2)の結果を合わせると, $2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で条件を満たす n は,

$$n = 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 15,\ 25,\ 35,\ 49,\ 121,\ 143,\ 169,\ 289,\ 323,\ 361,\ 529,\ 841,\ 899,\ 961$$

コメント

(1)と(2)が実験となっています。(3)では, 前問の勢いが残ってしまい, 同じ調子で羅列しました。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　不等式$10^{2x} \leqq 10^{6-x}$を満たす実数xの範囲を求めよ。

(2)　$10^{2x} \leqq y \leqq 10^{5x}$と$y \leqq 10^{6-x}$を同時に満たす整数の組$(x,\ y)$の個数を求めよ。

[2005]

解答例

(1)　条件より，$10^{2x} \leqq 10^{6-x}$から，$2x \leqq 6-x$

よって，$x \leqq 2$

(2)　条件より，$10^{2x} \leqq y \leqq 10^{5x}$………①，$y \leqq 10^{6-x}$………②

まず，①を満たすyが存在するためには$10^{2x} \leqq 10^{5x}$が必要であり，

$2x \leqq 5x$，$0 \leqq x$

また，①②を満たすyが存在するためには，$10^{2x} \leqq 10^{6-x}$が必要であり，(1)から，

$x \leqq 2$

まとめると，$0 \leqq x \leqq 2$となり，xは整数なので，$x = 0,\ 1,\ 2$

(i)　$x = 0$のとき

①より$y = 1$，②より$y \leqq 10^6$から$y = 1$のみとなり，$(x,\ y)$の個数は 1 である。

(ii)　$x = 1$のとき

①より$10^2 \leqq y \leqq 10^5$，②より$y \leqq 10^5$から$10^2 \leqq y \leqq 10^5$となり，$(x,\ y)$の個数は$10^5 - 10^2 + 1 = 99901$である。

(iii)　$x = 2$のとき

①より$10^4 \leqq y \leqq 10^{10}$，②より$y \leqq 10^4$から$y = 10^4$のみとなり，$(x,\ y)$の個数は 1 である。

(i)～(iii)より，$(x,\ y)$の個数は，$1 + 99901 + 1 = 99903$である。

コメント

(2)の必要条件の 1 つを求めるために，(1)の設問のあることがわかります。

問　題

数列$\{a_n\}$を

$$a_1=\frac{1}{3},\ \frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_n}=1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定め，数列$\{b_n\}$を

$$b_1=a_1a_2\,,\ b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定める。

(1)　一般項a_nをnを用いて表せ。

(2)　一般項b_nをnを用いて表せ。　[2005]

解答例

(1)　$a_1=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}=1$より，数列$\left\{\dfrac{1}{a_n}\right\}$は等差数列なので，

$$\frac{1}{a_n}=\frac{1}{a_1}+(n-1)=n+2\,,\ a_n=\frac{1}{n+2}$$

(2)　条件より，$b_1=a_1a_2=\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{12}$

また，$b_{n+1}-b_n=a_{n+1}a_{n+2}$から，$b_{n+1}-b_n=\dfrac{1}{(n+3)(n+4)}$となり，$n\geqq 2$のとき，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{(k+3)(k+4)}=\frac{1}{12}+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{k+3}-\frac{1}{k+4}\right)$$

$$=\frac{1}{12}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{n+3}\right)=\frac{n}{3(n+3)}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$(*)$は$n=1$のときも成立しているので，

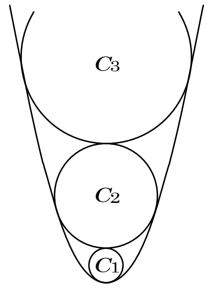
$$b_n=\frac{n}{3(n+3)}$$

コメント

基本的な漸化式を解く問題です。どちらも教科書の記述範囲です。

問　題

座標平面上で不等式$y \geqq x^2$の表す領域を D とする。D 内にあり y 軸上に中心をもち原点を通る円のうち，最も半径の大きい円をC_1とする。自然数 n について，円C_nが定まったとき，C_nの上部でC_nに外接する円で，D 内にあり y 軸上に中心をもつもののうち，最も半径の大きい円をC_{n+1}とする。C_nの半径をa_nとし，$b_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$とする。



(1)　a_1を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のときa_nをb_{n-1}で表せ。

(3)　a_nを n の式で表せ。　[2004]

解答例

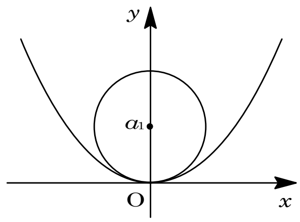
(1)　領域 D 内にあり，中心が y 軸上で原点を通る円の半径を r とすると，その方程式は，

$$x^2 + (y-r)^2 = r^2$$

$y = x^2$ との共有点は，$y + (y-r)^2 = r^2$

$$y^2 + (1-2r)y = 0,\ \ y = 0,\ \ 2r-1$$

共有点は原点だけなので，$2r-1 \leqq 0$ を満たす最大の r がa_1となり，$a_1 = \dfrac{1}{2}$である。

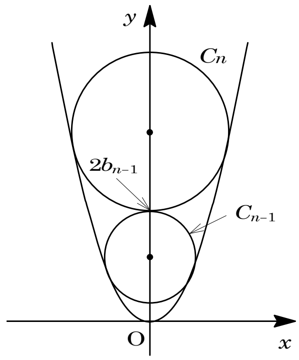


(2)　条件より，円C_nは半径a_n，中心$(0,\ 2b_{n-1} + a_n)$となるので，その方程式は，

$$x^2 + (y - 2b_{n-1} - a_n)^2 = a_n^2$$

$y = x^2$ との共有点は，$y + (y - 2b_{n-1} - a_n)^2 = a_n^2$

$$y^2 + (-4b_{n-1} - 2a_n + 1)y + (4b_{n-1}^2 + 4b_{n-1}a_n) = 0$$



共有点の y 座標はただ 1 つなので，この 2 次方程式は重解をもち，$D = 0$ となる。

$$(-4b_{n-1} - 2a_n + 1)^2 - 4(4b_{n-1}^2 + 4b_{n-1}a_n) = 0$$

よって，$4a_n^2 - 4a_n - 8b_{n-1} + 1 = 0 \quad (n \geqq 2)$ ………①

$a_n > \dfrac{1}{2}$ より，$a_n = \dfrac{2 + \sqrt{4 - 4(-8b_{n-1} + 1)}}{4} = \dfrac{1 + 2\sqrt{2b_{n-1}}}{2}$

(3)　①より，$4a_{n+1}^2 - 4a_{n+1} - 8b_n + 1 = 0 \quad (n \geqq 1)$ ………②

②－①より，$4(a_{n+1}^2 - a_n^2) - 4(a_{n+1} - a_n) - 8a_n = 0$

$$(a_{n+1}^2 - a_n^2) - (a_{n+1} + a_n) = 0,\ \ (a_{n+1} + a_n)(a_{n+1} - a_n) - (a_{n+1} + a_n) = 0$$

$a_{n+1}+a_n>0$ より，$a_{n+1}-a_n-1=0$，$a_{n+1}=a_n+1$　$(n\geqq 2)$ ………③

さて，①に $n=2$ を代入し，$b_1=a_1=\dfrac{1}{2}$ を用いると，

$$4{a_2}^2-4a_2-4+1=0,\ (2a_2+1)(2a_2-3)=0,\ a_2=\frac{3}{2}$$

よって，③より，$a_n=\dfrac{3}{2}+(n-2)=n-\dfrac{1}{2}$　（$n=1$ のときも満たす）

コメント

本問もまた有名な頻出問題の 1 つです。いろいろな解法がありますが，上の解はその 1 例です。

問　題

自然数 m に対して, m の相異なる素因数をすべてかけあわせたものを $f(m)$ で表すことにする。たとえば $f(72)=6$ である。ただし $f(1)=1$ とする。

(1) $m,\ n$ を自然数, d を $m,\ n$ の最大公約数とするとき, $f(d)f(mn)=f(m)f(n)$ となることを示せ。

(2) 2 つの箱 A, B のそれぞれに 1 番から 10 番までの番号札が 1 枚ずつ 10 枚入っている。箱 A, B から 1 枚ずつ札を取り出す。箱 A から取り出した札の番号を m, 箱 B から取り出した札の番号を n とするとき, $f(mn)=f(m)f(n)$ となる確率 p_1 と, $2f(mn)=f(m)f(n)$ となる確率 p_2 を求めよ。　[2003]

解答例

(1) $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_p,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_q,\ c_1,\ c_2,\ \cdots,\ c_r$ を素数とし, $i_1,\ \cdots,\ i_p,\ j_1,\ \cdots,\ j_q,\ k_1,\ \cdots,\ k_p,\ l_1,\ \cdots,\ l_r$ を自然数として,

$$m=a_1^{i_1}a_2^{i_2}\cdots a_p^{i_p}b_1^{j_1}b_2^{j_2}\cdots b_q^{j_q},\quad n=a_1^{k_1}a_2^{k_2}\cdots a_p^{k_p}c_1^{l_1}c_2^{l_2}\cdots c_r^{l_r}$$

このとき, $f(m)=a_1a_2\cdots a_pb_1b_2\cdots b_q$, $f(n)=a_1a_2\cdots a_pc_1c_2\cdots c_r$

$$f(d)=a_1a_2\cdots a_p,\quad f(mn)=a_1a_2\cdots a_pb_1b_2\cdots b_qc_1c_2\cdots c_r$$

よって, $f(d)f(mn)=f(m)f(n)$

(2) d の値が 1, 2, 4, 8 となる場合について, $m,\ n$ の値との関係をまとめると, 右表のようになる。

n＼m	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	1	2	1	2	1	2	1	2	1	2
3	1	1		1	1		1	1		1
4	1	2	1	4	1	2	1	4	1	2
5	1	1	1	1		1	1	1	1	
6	1	2		2	1		1	2		2
7	1	1	1	1	1	1		1	1	1
8	1	2	1	4	1	2	1	8	1	2
9	1	1		1	1		1	1		1
10	1	2	1	2		2	1	2	1	

$f(mn)=f(m)f(n)$ となるのは, (1)より $f(d)=1$, すなわち $d=1$ となる場合で, その確率 p_1 は,

$$p_1=\frac{63}{100}$$

$2f(mn)=f(m)f(n)$ となるのは, (1)より $f(d)=2$, すなわち $d=2,\ 4,\ 8$ となる場合で, その確率 p_2 は,

$$p_2=\frac{19+3+1}{100}=\frac{23}{100}$$

コメント

素因数分解を自分で設定する箇所が鍵となります。証明ですので，アバウトすぎるのは禁物です。

問　題

正の整数の組$(a,\ b)$で, a以上b以下の整数の総和が 500 となるものをすべて求めよ。ただし, $a<b$とする。 [1999]

解答例

a以上b以下の整数の総和は$\dfrac{a+b}{2}(b-a+1)$なので, 条件より,

$$\frac{a+b}{2}(b-a+1)=500,\ \ (a+b)(b-a+1)=1000$$

$1\leqq a<b$より, $2\leqq b-a+1<a+b$ ………(＊)

また, $(b-a+1)+(a+b)=2b+1$で, 和が奇数となることより, $b-a+1$と$a+b$の偶奇は一致しない。

以上より, $1000=2^3\cdot5^3$なので, (＊)を満たし 1000 を一方が偶数, 他方が奇数の 2 つの数の積として表すと,

$$(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3),\ (5^2,\ 2^3\cdot5),\ (5,\ 2^3\cdot5^2)$$

(i)　$(b-a+1,\ a+b)=(2^3,\ 5^3)$のとき

$b-a=7,\ a+b=125$より, $(a,\ b)=(59,\ 66)$

(ii)　$(b-a+1,\ a+b)=(5^2,\ 2^3\cdot5)$のとき

$b-a=24,\ a+b=40$より, $(a,\ b)=(8,\ 32)$

(iii)　$(b-a+1,\ a+b)=(5,\ 2^3\cdot5^2)$のとき

$b-a=4,\ a+b=200$より, $(a,\ b)=(98,\ 102)$

コメント

1000 の正の約数は, 全部で 16 個になりますが, 一つ一つチェックしていくのはたいへんです。条件に適する候補を絞ることについては, $a+b$と$b-a+1$の和が奇数となることに注目してみました。

問　題

1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a, 2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{5}{6}$ から，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\quad f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{5}{6}-x\right),\quad f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_5(x)$ を求めると，

$$f_5(x)=f_4(-x)=f_3\left(\frac{5}{6}+x\right)=f_2\left(-\frac{5}{6}-x\right)=f_1\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+x\right)$$
$$=f_1\left(\frac{5}{3}+x\right)=\sin\left(\frac{5}{3}\pi+\pi x\right)$$

よって，$f_5(0)=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=k$ とおくと，$1\leqq a\leqq 6$，$1\leqq b\leqq 6$ より，$\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq 2$ となり，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\quad f_{2n}(x)=f_{2n-1}(k-x),\quad f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_6(x)$ を求めると，

$$f_6(x)=f_5(k-x)=f_4(-k+x)=f_3(k+k-x)=f_3(2k-x)=f_2(-2k+x)$$
$$=f_1(k+2k-x)=f_1(3k-x)=\sin(3k\pi-\pi x)$$

よって，$f_6(0)=\sin(3k\pi)$ となり，$f_6(0)=0$ より $\sin(3k\pi)=0$ ………(＊)

ここで，$\pi\leqq 3k\pi\leqq 6\pi$ なので，(＊)から，$3k\pi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi$

$$3k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

すなわち，(＊)を満たすのは，$3k=\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が 6 以下の自然数の場合である。

そこで，$\dfrac{3}{a}$，$\dfrac{3}{b}$ のとり得る値が，ともに $3,\ \dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{2}$ であることに注意し，この条件を満たす $\left(\dfrac{3}{a},\ \dfrac{3}{b}\right)$ の組を列挙すると，

$$(3,\ 3),\ (3,\ 1),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (1,\ 3),\ (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

したがって，$f_6(0)=0$となる$(a,\ b)$の組は8通りとなり，その確率は,

$$\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$$

コメント

関数の定義を問う設問に確率が融合しています。(2)で，条件を満たす$(a,\ b)$の組を見つけるには，記述は省きましたが，センター風に6×6の表を作りました。

問　題

1 個のさいころを 3 回投げる試行において，1 回目に出る目を a，2 回目に出る目を b，3 回目に出る目を c とする。

(1)　$\log_{\frac{1}{4}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c$ となる確率を求めよ。

(2)　$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となる確率を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　a, b, c は 6 以下の自然数であり，$\log_{\frac{1}{4}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c$ より，

$$\frac{\log_{\frac{1}{2}}(a+b)}{\log_{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}}>\log_{\frac{1}{2}}c,\ \ \frac{1}{2}\log_{\frac{1}{2}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c,\ \ \log_{\frac{1}{2}}(a+b)>\log_{\frac{1}{2}}c^2$$

よって，$a+b<c^2$ ……(＊)となり，(＊)を満たす$(a,\ b,\ c)$の組の個数を求める。

(i)　$c=1$ のとき　(＊)より，$a+b<1$ となり，$(a,\ b)$ は存在しない。

(ii)　$c=2$ のとき　(＊)より，$a+b<4$ となり，$a+b$ の値が 2，3 のとき，$(a,\ b)$ の組は，それぞれ 1，2 個ある。よって，$(a,\ b)$ の組の個数は，$1+2=3$ である。

(iii)　$c=3$ のとき　(＊)より，$a+b<9$ となり，$a+b$ の値が 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 のとき，$(a,\ b)$ の組は，それぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6, 5 個ある。よって，$(a,\ b)$ の組の個数は，$1+2+3+4+5+6+5=26$ である。

(iv)　$c\geqq 4$ のとき　$c=4,\ 5,\ 6$ のとき，(＊)より，それぞれ $a+b<16$，$a+b<25$，$a+b<36$ となり，どんな$(a,\ b)$の組でも成立する。よって，$(a,\ b)$ の組の個数は，$6^2\times 3=108$ である。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{3+26+108}{6^3}=\dfrac{137}{216}$ である。

(2)　a の値と 2^a を 3 で割った余り r_a の関係は，右表のようになる。

a	1	2	3	4	5	6
r_a	2	1	2	1	2	1

これより，$2^a+2^b+2^c$ が 3 の倍数となるのは，

$(r_a,\ r_b,\ r_c)=(1,\ 1,\ 1),\ (2,\ 2,\ 2)$

よって，その確率は，$\left(\dfrac{3}{6}\right)^3+\left(\dfrac{3}{6}\right)^3=\dfrac{1}{4}$ である。

コメント

指数・対数と確率の融合問題ですが，内容は基本的です。

問　題

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき, 1 回目に出る目を l, 2 回目に出る目を m, 3 回目に出る目を n で表し, 3 次式 $f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ を考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる確率を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる確率を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+lx^2+mx+n$ に対し, $f'(x)=3x^2+2lx+m$

さて, $f(x)$ が $(x+1)^2$ で割り切れる条件は, $f(-1)=f'(-1)=0$ から,

$$-1+l-m+n=0\cdots\cdots\cdots①,\quad 3-2l+m=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より, $m=2l-3\cdots\cdots③$となり, ①に代入して,

$$n=1-l+2l-3=l-2\cdots\cdots\cdots④$$

③④を満たす 1 以上 6 以下の整数 $l,\ m,\ n$ は,

$$(l,\ m,\ n)=(3,\ 3,\ 1),\ (4,\ 5,\ 2)$$

よって, 求める確率は, $\dfrac{2}{6^3}=\dfrac{1}{108}$ となる。

(2)　関数 $y=f(x)$ が極大値も極小値もとる条件は, $f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつ条件に等しいので,

$$D/4=l^2-3m>0,\quad m<\frac{l^2}{3}\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を満たす 1 以上 6 以下の整数 $l,\ m$ は,

$(l,\ m)=(2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (4,\ 2),\ (4,\ 3),\ (4,\ 4),\ (4,\ 5),$
$(5,\ 1),\ (5,\ 2),\ (5,\ 3),\ (5,\ 4),\ (5,\ 5),\ (5,\ 6),\ (6,\ 1),\ (6,\ 2),$
$(6,\ 3),\ (6,\ 4),\ (6,\ 5),\ (6,\ 6)$

n の値は任意なので, 求める確率は, $\dfrac{20\times 6}{6^3}=\dfrac{5}{9}$ となる。

コメント

確率の基本問題です。(1)は, 直接的に割り算をして余りが 0 となる条件を求めても OK です。

問　題

(1)　不等式 $(|x|-2)^2+(|y|-2)^2 \leqq 1$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　1 個のさいころを 4 回投げ，n 回目 $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ に出た目の数を a_n とする。このとき，$(x,\ y)=(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率を求めよ。

[2010]

解答例

(1)　$f(x,\ y)=(|x|-2)^2+(|y|-2)^2-1$ とおくと，

$$f(x,\ -y)=f(x,\ y),\ f(-x,\ y)=f(x,\ y)$$

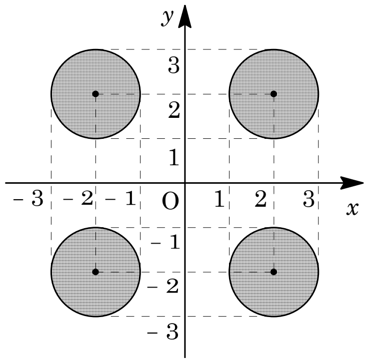
よって，領域 $f(x,\ y)\leqq 0$ は，x 軸および y 軸に関して対称である。

そこで，$x\geqq 0$ かつ $y\geqq 0$ において考えると，

$$(x-2)^2+(y-2)^2\leqq 1$$

この不等式の表す領域は，点 $(2,\ 2)$ を中心とする半径 1 の円の内部または周上である。

この領域を，x 軸対称移動，y 軸対称移動することによって得られる $(|x|-2)^2+(|y|-2)^2\leqq 1$ の表す領域は，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



(2)　1 個のさいころを 4 回投げたとき，4 個の出た目の数の組について，6^4 通りの場合が同様に確からしい。

ここで，さいころの出た目の数を a_i，a_j とし，この値と a_i-a_j の関係をまとめると，右表のようになる。

a_i ＼ a_j	1	2	3	4	5	6
1	0	-1	-2	-3	-4	-5
2	1	0	-1	-2	-3	-4
3	2	1	0	-1	-2	-3
4	3	2	1	0	-1	-2
5	4	3	2	1	0	-1
6	5	4	3	2	1	0

出た目の数を a_1，a_2，a_3，a_4 とし，点 $(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が，領域 $(x-2)^2+(y-2)^2\leqq 1$ に含まれるのは，

$$(a_1-a_2,\ a_3-a_4)=(1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

この場合の数は，合わせて，$5\times 4+4\times 5+4\times 4+4\times 3+3\times 4=80$ 通りとなる。

よって，対称性を考えると，点 $(a_1-a_2,\ a_3-a_4)$ が(1)の領域に含まれる確率は，

$$\frac{80\times 4}{6^4}=\frac{20}{81}$$

コメント

領域と確率の融合問題です。確率の部分については，数えもれを防ぐために，すべての場合を書き出しています。

問　題

次のような，いびつなさいころを考える。1，2，3 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{6}$，4 の目が出る確率は a，5，6 の目が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2}$である。ただし$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$とする。このさいころを振ったとき，平面上の$(x,\ y)$にある点 P は，1, 2, 3 のいずれかの目が出ると$(x+1,\ y)$に，4 の目が出ると$(x,\ y+1)$に，5，6 のいずれかの目が出ると$(x-1,\ y-1)$に移動する。原点$(0,\ 0)$にあった点 P が，k 回さいころを振ったときに$(2,\ 1)$にある確率を p_k とする。

(1)　p_1，p_2，p_3 を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。

(3)　p_6 が最大になるときの a の値を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　まず，点 P が右に 1 だけ動く確率は$\dfrac{1}{6}\times3=\dfrac{1}{2}$，上に 1 だけ動く確率は a，左に 1 で下に 1 だけ動く確率は$\left(\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{2}\right)\times2=\dfrac{1}{2}-a$である。

さて，点 P が原点から点$(2,\ 1)$に移動するには，さいころを少なくとも 3 回振らなければならない。言い換えると，$p_1=p_2=0$である。

また，3 回振って点$(2,\ 1)$に移動するには，右 2 回，上 1 回だけ動くことより，その確率 p_3 は，$p_3={}_3\mathrm{C}_1\left(\dfrac{1}{2}\right)^2a=\dfrac{3}{4}a$である。

(2)　6 回さいころを振って，点 P が点$(2,\ 1)$に移動するとき，右 x 回，上 y 回，左下 $6-x-y$ 回だけ動くとすると，

$$x-(6-x-y)=2\cdots\cdots\cdots①,\ \ y-(6-x-y)=1\cdots\cdots\cdots②$$

①より $2x+y=8$，②より $x+2y=7$ となるので，$x=3$，$y=2$，$6-x-y=1$

よって，6 回振って点$(2,\ 1)$に移動する確率 p_6 は，

$$p_6=\frac{6!}{3!2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^3a^2\left(\frac{1}{2}-a\right)=\frac{15}{4}(-2a^3+a^2)$$

(3)　(2)より，$f(a)=-2a^3+a^2$ とおくと，

$$f'(a)=-6a^2+2a=-2a(3a-1)$$

$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$において，右表より，$a=\dfrac{1}{3}$のとき $f(a)$ は最大となる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$p_6=\dfrac{15}{4}f(a)$から，p_6 が最大になるのは，$a=\dfrac{1}{3}$のときである。

コメント

確率の基本問題です。場合分けもなく不気味なくらいです。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。1 つのさいころを n 回投げ，第 1 回目から第 n 回目までに出た目の最大公約数を G とする。

(1)　$G=3$ となる確率を n の式で表せ。

(2)　G の期待値を n の式で表せ。　[2007]

解答例

(1)　$G=k\ (1\leqq k\leqq 6)$ となる確率を p_k とおく。

さて，$G=3$ となるのは，3 または 6 だけが n 回出て，しかも 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_3=\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　(i)　$G=6$ のとき　6 が n 回出る場合より，その確率は $p_6=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(ii)　$G=5$ のとき　5 が n 回出る場合より，その確率は $p_5=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iii)　$G=4$ のとき　4 が n 回出る場合より，その確率は $p_4=\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(iv)　$G=3$ のとき　(1)より，$p_3=\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n$ である。

(v)　$G=2$ のとき

2, 4, 6 だけが n 回出て，しかも 4 が続けて n 回出ない，さらに 6 が続けて n 回出ない場合より，その確率は，

$$p_2=\left(\frac{3}{6}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(vi)　$G=1$ のとき

(i)～(v)の余事象を考えると，その確率は，

$$p_1=1-\left\{3\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i)～(vi)より，G の期待値は，

$$\begin{aligned}&6p_6+5p_5+4p_4+3p_3+2p_2+p_1\\&=(6+5+4)\times\left(\frac{1}{6}\right)^n+3\times\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+2\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^n-2\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}+1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^n+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n+1\end{aligned}$$

コメント

具体的に考えないとミスをしそうな問題です。特に $G=2$ のときが，注意力を要求されます。

問　題

n を自然数とする。プレイヤーA, B がサイコロを交互に投げるゲームをする。最初は A が投げ，先に 1 の目を出した方を勝ちとして終わる。ただし，A が n 回投げても勝負がつかない場合は B の勝ちとする。

(1)　A の k 投目 $(1 \leqq k \leqq n)$ で A が勝つ確率を求めよ。

(2)　このゲームにおいて A が勝つ確率 P_n を求めよ。

(3)　$P_n > \dfrac{1}{2}$ となるような最小の n の値を求めよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ として計算してよい。　[2004]

解答例

(1)　A の k 投目で A が勝つのは，A と B がそれぞれ $k-1$ 回ずつ 1 以外の目を出した後, A が 1 の目を出す場合であり，その確率は，$\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2(k-1)}$ である。

(2)　(1)より，$P_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{2(k-1)} = \frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}}{1-\frac{25}{36}} = \frac{6}{11}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{2n}\right\}$

(3)　$P_n > \dfrac{1}{2}$ より，$\dfrac{6}{11}\left\{1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2n}\right\} > \dfrac{1}{2}$，$1-\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2n} > \dfrac{11}{12}$，$\left(\dfrac{5}{6}\right)^{2n} < \dfrac{1}{12}$

すると，$2n(\log_{10} 5 - \log_{10} 6) < -\log_{10} 12$ ………(＊)

ここで，$\log_{10} 5 - \log_{10} 6 = (1-\log_{10} 2) - (\log_{10} 2 + \log_{10} 3) = -0.0791$

$\log_{10} 12 = 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3 = 1.0791$

これより，(＊)を満たす n は，$n > \dfrac{1.0791}{2\times 0.0791} \fallingdotseq 6.82$ となり，n の最小の値は 7 である。

コメント

確率，数列，対数の融合問題ですが，内容は平易です。

問　題

実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。 [2015]

解答例

まず，$|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ より，$x = \cos\alpha$，$y = \cos\beta$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$ とおくことができ，さらに，$P = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ とすると，

$$\begin{aligned} P &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta} \\ &= \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos^2\beta(1-\cos^2\alpha) + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta} \\ &= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta|\sin\alpha||\sin\beta| \\ &= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ &= (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)^2 = \sin^2(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

すると，$0 \leqq \alpha + \beta \leqq 2\pi$ より $0 \leqq P \leqq 1$ となり，

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

コメント

初めは，$P = \left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}\right)^2 + (x^2-y^2)^2$ と変形したものの，右側の不等式がうまく示せません。後ろ髪を引かれつつも，この式変形を放棄し，式の形をみて，$x = \cos\alpha$，$y = \cos\beta$ とおきました。すると，$P = \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2$ という変形に気づきます！　運・不運が濃厚に反映される問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\cos x+\cos y\neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y}{2}=\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}$$

が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\cos x+\cos y+\cos z\neq 0$ を満たすすべての実数 $x,\ y,\ z$ に対して等式

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$$

は成り立つか。成り立つときは証明し，成り立たないときは反例を挙げよ。

[2014]

解答例

(1)　和積公式を適用すると，

$$\frac{\sin x+\sin y}{\cos x+\cos y}=\frac{2\sin\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}{2\cos\dfrac{x+y}{2}\cos\dfrac{x-y}{2}}=\tan\frac{x+y}{2}$$

(2)　$x=\dfrac{\pi}{6}$，$y=-\dfrac{\pi}{6}$，$z=\pi$ のとき，

$$\tan\frac{x+y+z}{3}=\tan\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}，\ \frac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}+0}{\dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}-1}=0$$

よって，$\tan\dfrac{x+y+z}{3}=\dfrac{\sin x+\sin y+\sin z}{\cos x+\cos y+\cos z}$ は成立しない。

コメント

(1)は和積公式の適用だけですが，ここは加法定理から示すべきものかもしれません。また，(2)の反例は $x+y=0$ として適当に探しましたが，$x=y=0$ とした方が簡明でした……。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆