6　　　　［東北大］

a, b, c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$I(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　$J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3)　次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$

7　　　　［東京医歯大］

連続関数 $f(x)$ と定数 a が次の関係式を満たしているとする。

$$\int_0^x f(t)\,dt = 4ax^3 + (1-3a)x + \int_0^x \left\{ \int_0^u f(t)\,dt \right\} du + \int_x^1 \left\{ \int_u^1 f(t)\,dt \right\} du$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　a と $f(0)+f(1)$ の値を求めよ。

(2)　$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，$g(x)$ の導関数 $g'(x)$ を求めよ。ここで e は自然対数の底を表す。

(3)　$f(x)$ を求めよ。

6　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$(e^{ax}\cos bx)' = ae^{ax}\cos bx - be^{ax}\sin bx$ ………①

$(e^{ax}\sin bx)' = ae^{ax}\sin bx + be^{ax}\cos bx$ ………②

①②より，$(ae^{ax}\cos bx + be^{ax}\sin bx)' = (a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ となり，

$$e^{ax}\cos bx = \frac{1}{a^2+b^2}\{e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\}'$$

$$I(a,\ b) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx = \frac{1}{a^2+b^2}\Big[\, e^{ax}(a\cos bx + b\sin bx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{1}{a^2+b^2}\left\{ e^{\frac{\pi}{2}a}\left(a\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right) - a\right\}$$

(2)　$J(a,\ b,\ c) = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b+c)x - \cos(b-c)x\}dx$

$$= -\frac{1}{2}I(a,\ b+c) + \frac{1}{2}I(a,\ b-c)$$

(3)　$F(t) = 8\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ とおくと，

$$F(t) = 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx - \sin 2tx)(\sin 6tx - \sin 2tx)\,dx$$

$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x(\sin 4tx\sin 6tx - \sin 4tx\sin 2tx - \sin 2tx\sin 6tx + \sin^2 2tx)\,dx$$

$$= 2J(1,\ 6t,\ 4t) - 2J(1,\ 4t,\ 2t) - 2J(1,\ 6t,\ 2t) + 2J(1,\ 2t,\ 2t)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 2t) + I(1,\ 6t) - I(1,\ 2t) + I(1,\ 8t) - I(1,\ 4t)$$
$$- I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

$$= -I(1,\ 10t) + I(1,\ 6t) + I(1,\ 8t) - 2I(1,\ 4t) + I(1,\ 0)$$

さて，$I(1,\ b) = \dfrac{1}{1+b^2}\left\{ e^{\frac{\pi}{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{2}b + b\sin\dfrac{\pi}{2}b\right) - 1\right\}$ となるので，

$$|I(1,\ b)| \leqq \frac{1}{1+b^2}\left\{ e^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos\frac{\pi}{2}b + b\sin\frac{\pi}{2}b\right| + |-1|\right\} \leqq \frac{1}{1+b^2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2} + 1\right)$$

$$= \frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+b^2}} + \frac{1}{1+b^2}$$

これより $\displaystyle\lim_{b\to\infty} I(1,\ b) = 0$ なので，k が自然数のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty} I(1,\ kt) = 0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = I(1,\ 0) = e^{\frac{\pi}{2}} - 1$$

［解　説］

定積分の計算と極限の融合問題です。誘導が細かいので方針に混乱はないでしょう。

7　　［東京医歯大］

(1)　$F'(t)=f(t)$ とおくと，$\displaystyle\int_0^x f(t)dt=F(x)-F(0)$ となり，

$$\int_0^x\left\{\int_0^u f(t)dt\right\}du=\int_0^x\{F(u)-F(0)\}du=\int_0^x F(u)du-F(0)x$$

$$\int_x^1\left\{\int_u^1 f(t)dt\right\}du=\int_x^1\{F(1)-F(u)\}du=F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du$$

すると，与えられた条件式は，

$$F(x)-F(0)=4ax^3+(1-3a)x$$
$$+\int_0^x F(u)du-F(0)x+F(1)(1-x)-\int_x^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots①$$

①の両辺を x で微分すると，

$$F'(x)=12ax^2+(1-3a)+F(x)-F(0)-F(1)+F(x)$$
$$f(x)=12ax^2+1-3a+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①に $x=0$ を代入すると，$0=F(1)-\displaystyle\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots③$

①に $x=1$ を代入すると，$F(1)-F(0)=4a+1-3a+\displaystyle\int_0^1 F(u)du-F(0)$ より，

$$F(1)=a+1+\int_0^1 F(u)du\cdots\cdots\cdots④$$

③④から，$a+1=0$ となり，$a=-1$ である。

すると，②から，$f(x)=-12x^2+4+2F(x)-F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤に $x=0$，$x=1$ を代入すると，

$$f(0)=4+F(0)-F(1)\cdots\cdots\cdots⑥,\quad f(1)=-8+F(1)-F(0)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$f(0)+f(1)=4-8=-4\cdots\cdots⑧$である。

(2)　⑤の両辺を x で微分すると，$f'(x)=-24x+2F'(x)=-24x+2f(x)\cdots\cdots\cdots⑨$

ここで，$g(x)=e^{-2x}f(x)$ とおくとき，⑨から，

$$g'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}f'(x)=-2e^{-2x}f(x)+e^{-2x}\{-24x+2f(x)\}$$
$$=-24xe^{-2x}$$

(3)　(2)より，$g(x)=-24\displaystyle\int xe^{-2x}dx$ となり，C を定数として，

$$g(x)=12xe^{-2x}-12\int e^{-2x}dx=12xe^{-2x}+6e^{-2x}+C=6(2x+1)e^{-2x}+C$$

すると，$f(x)=e^{2x}g(x)$ より，$f(x)=6(2x+1)+Ce^{2x}$ となり，⑧から，

$$(6+C)+(18+Ce^2)=-4,\quad C=-\frac{28}{1+e^2}$$

以上より，$f(x)=6(2x+1)-\dfrac{28}{1+e^2}e^{2x}$ である。

［解 説］

いわゆる微分型の積分方程式を解く問題です。問題文で与えられた関係式には驚きますが，誘導がていねいなので，方針に迷うことはないでしょう。