《2018 入試対策》

一橋大学

数　学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された一橋大学（前期日程）の数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 一橋大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 実数 a, b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす。

(1) $\log_3 a + \log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\log_2 a + \log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。 [2017]

2 $P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。 [2017]

3 (1) 任意の角 θ に対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2) 任意の角 α，β に対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$ が成立するような点 $(x,\ y)$ の全体からなる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。 [2009]

4 k を正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n が，ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。 [2008]

5 3 次方程式 $x^3+ax^2+bx+c=0$ は異なる 3 つの解 p，q，r をもつ。さらに，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$ も同じ方程式の異なる 3 つの解である。a, b, c, p, q, r の組をすべて求めよ。 [2008]

6 $0° \leqq \theta < 360°$ を満たす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める。

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \sin(\theta + 60° \times k)$$

(1) $f_5(\theta)$ を求めよ。

(2) θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) m がすべての正の整数を動き，θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ。 [2005]

7 a, b を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α，β，γ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α，β，γ のうちどれかは整数である。a, b を求めよ。 [2001]

■ 微分と積分

1 a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2016]

2 $0<t<1$ とし，放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線を l とする。C と l と x 軸で囲まれる部分の面積を S_1 とし，C と l と直線 $x=1$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1+S_2 の最小値を求めよ。 [2014]

3 原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。 [2013]

4 a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。 [2012]

5 xy 平面上に放物線 $C: y=-3x^2+3$ と 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1) 定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2) S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。 [2011]

6 a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y=x^3-3ax^2$ とそれぞれ点 A, 点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると, C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y=-x-1$ であるとき, a, m の値を求めよ。 [2010]

7 a を定数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+a$ とする。$x\leqq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。 [2007]

8 k は整数であり，3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。 [2005]

9 a は実数とし，$f(x)=x^3+ax^2-8a^2x$，$g(x)=3ax^2-9a^2x$ とおく。

(1) 曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する。このとき P の座標を a で表せ。

(2) 次の条件(i)および(ii)を満たす直線 l が 3 本存在するような点 $(u,\ v)$ の範囲を図示せよ。

(i) l は点 $(u,\ v)$ を通る。

(ii) l は曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する。

[2004]

10 $f(x)=x^3-x^2-x-1$，$g(x)=x^2-x-1$ とする。

(1) 方程式 $f(x)=0$ はただ 1 つの実数解 α をもつことを示せ。また，$1<\alpha<2$ であることを示せ。

(2) 方程式 $g(x)=0$ の正の解を β とする。α と β の大小を比較せよ。

(3) α^2 と β^3 の大小を比較せよ。 [2003]

11 c を正の定数とし，$f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ とする。直線 l は点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ で曲線 $y=f(x)$ と接し，点 $\mathrm{Q}(q,\ g(q))$ で曲線 $y=g(x)$ と接する。

(1) c を p で表せ。

(2) 直線 l と曲線 $y=f(x)$ の P 以外の交点を R とする。2 つの線分の長さの比 $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}$ を求めよ。 [2000]

12 (1) 曲線 $y=x^3$ と直線 $y=3x+a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)の範囲を動くとき，3 つの交点を A, B, C とし，点 $(a,\ 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値を求めよ。 [1999]

13 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく。ただし，$a<b$ とする。

(1) 2 直線 l, m と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ。

(2) 点 C が放物線 $y=\frac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ。

[1998]

■ 図形と式

1 正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $|ax+by|\leqq 1$，$|cx-by|\leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。[2017]

2 座標平面上の原点を O とする。点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(0,\ b)$ および点 C が，$\mathrm{OC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2015]

3 円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 P における接線を l とする。点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P' とする。ただし，m が直線 $x=1$ のときは P' を $(1,\ 0)$ とする。円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1) s'，t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2) 点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく。P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，P_1，P_2，P_3 を図示せよ。

(3) 正の整数 n について，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となるような点 P の個数を求めよ。 [2014]

4 定数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，平面上の点 $(p,\ q)$ を点 $(ap+bq,\ cp+dq)$ に移す操作を考える。ただし，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$ である。k を 0 でない定数とする。放物線 $C: y=x^2-x+k$ 上のすべての点は，この操作によって C 上に移る。

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ を求めよ。

(2) C 上の点 A における C の接線と，点 A をこの操作によって移した点 A' における C の接線は，原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

[2012]

5 $p,\ q$ を実数とする。放物線 $y=x^2-2px+q$ が，中心 $(p,\ 2q)$ で半径 1 の円と中心 $(p,\ p)$ で半径 1 の円の両方と共有点をもつ。この放物線の頂点が存在しうる領域を xy 平面上に図示せよ。 [2009]

6 a を正の実数とする。点 $(x,\ y)$ が，不等式 $x^2\leqq y\leqq x$ の定める領域を動くとき，つねに $\dfrac{1}{2}\leqq(x-a)^2+y\leqq 2$ となる。a の値の範囲を求めよ。 [2008]

7　放物線 $y=ax^2+bx\ (a>0)$ を C とする。C 上に異なる 2 点 P, Q をとり，その x 座標をそれぞれ $p, q\,(0<p<q)$ とする。

(1)　線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が，△OPQ の面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍であるとき，p と q の関係を求めよ。ただし, O は原点を表す。

(2)　Q を固定して P を動かす。△OPQ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また，そのときの△OPQ の面積と，線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。 [2007]

8　a, b を正の定数とする。関数 $y=x^3-ax$ のグラフと，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし，P の x 座標は負，Q の x 座標は正である。

(1)　直線 PQ の方程式を a と b で表せ。

(2)　P および Q の座標を a と b で表せ。

(3)　$\angle\mathrm{POQ}=90^\circ$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし，O は原点である。 [2006]

9　原点を中心とする半径 1 の円を C とし，$0<a<1$, $b>1$ とする。$\mathrm{A}(a,\ 0)$ と $\mathrm{N}(0,\ 1)$ を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく。また，$\mathrm{B}(b,\ 0)$ と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく。

(1)　P の座標を a で表せ。

(2)　AQ // PB のとき，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となることを示せ。

(3)　AQ // PB, $\angle\mathrm{ANB}=45^\circ$ のとき, a の値を求めよ。 [2005]

10　a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して，2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。 [2005]

11 $a,\ b,\ c$ は 0 以上の実数とする。3 点 $A(a,\ 0)$, $B(0,\ b)$, $C(1,\ c)$ は，$\angle ABC = 30^\circ$, $\angle BAC = 60^\circ$ を満たす。

(1) c を求めよ。

(2) AB の長さの最大値と最小値を求めよ。 [2002]

12 放物線 $y = x^2$ 上に，直線 $y = ax + 1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。 [2001]

■ 図形と計量

1 半径 1 の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を r とし，表面積を S とする。

(1) S を r を用いて表せ。

(2) S の最小値を求めよ。 [2014]

2 平面上の 4 点 O, A, B, C が，$OA = 4$, $OB = 3$, $OC = 2$, $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 3$ を満たすとき，$\triangle ABC$ の面積の最大値を求めよ。 [2013]

3 点 O を中心とする半径 r の円周上に，2 点 A, B を $\angle AOB < \dfrac{\pi}{2}$ となるようにとり，$\theta = \angle AOB$ とおく。この円周上に点 C を，線分 OC が線分 AB と交わるようにとり，線分 AB 上に点 D をとる。また，点 P は線分 OA 上を，点 Q は線分 OB 上を，それぞれ動くとする。

(1) $CP + PQ + QC$ の最小値を r と θ で表せ。

(2) $a = OD$ とおく。$DP + PQ + QD$ の最小値を a と θ で表せ。

(3) さらに，点 D が線分 AB 上を動くときの $DP + PQ + QD$ の最小値を r と θ で表せ。

[2011]

4　座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし，△ABC の重心は原点の位置にあり，辺 BC は x 軸と平行である。また，頂点 A は y 軸上にあって y 座標は正であり，頂点 C の x 座標は正である。直線 $y=x$ に関して 3 点 A，B，C と対称な点を，それぞれ A′，B′，C′ とする。

(1)　C′ の座標を求めよ。

(2)　△ABC と △A′B′C′ が重なる部分の面積を求めよ。　[2006]

5　H を 1 辺の長さが 1 の正六角形とする。

(1)　H の中にある正方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(2)　H の中にある長方形のうち，1 辺が H の 1 辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。　[2004]

6　頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1)　円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2)　円錐の体積の最小値を求めよ。　[2002]

7　四面体 OAPQ において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である。

(1)　△APQ の面積 S を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3)　四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。　[2001]

8　三角形 ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ である。辺 AB 上に $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点 D をとる。辺 AC 上に $|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ を満たす点 P が 2 つ存在するための k の条件を求めよ。ただし，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|$ はベクトルの長さを表し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトルの内積を表す。　[2000]

9　三角すい ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である。$AB=3$ で，辺 AB 上の 2 点 E，F は，$AE=EF=FB=1$ を満たし，$\angle DAC=30^\circ$，$\angle DEC=45^\circ$，$\angle DBC=60^\circ$ である。

(1)　辺 CD の長さを求めよ。

(2)　$\theta=\angle DFC$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ。　[2000]

■ ベクトル

1　xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k，yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l，xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする。直線 k 上に点 $P_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる。l 上の点 P_2 を $P_1P_2\perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $P_2P_3\perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $P_3P_4\perp k$ となるように定める。以下，同様の手順で l，m，k，l，m，k，…上の点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，…を定める。

(1)　点 P_2，P_3 の座標を求めよ。

(2)　線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ。　[2017]

2　平面上の 2 つのベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ は零ベクトルではなく，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角度は 60° である。このとき，$r=\dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$ のとり得る値の範囲を求めよ。　[2016]

3　xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1)　線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2)　線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。　[2015]

4　t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 $A(2t,\ 2t,\ 0)$，$B(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3$ を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。　[2013]

5 xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり，平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1) P(0, 0, 2) とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点(0, 0, 1) を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2) 平面 $z=1$ 上に，4 点 A(1, 1, 1)，B(1, −1, 1)，C(−1, −1, 1)，D(−1, 1, 1) をとる。点 P が平面 $z=2$ で点(0, 0, 2) を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。 [2012]

6 a, b, c を正の定数とする。空間内に 3 点 A(a, 0, 0)，B(0, b, 0)，C(0, 0, c) がある。

(1) 辺 AB を底辺とするとき，△ABC の高さを a, b, c で表せ。

(2) △ABC, △OAB, △OBC, △OCA の面積をそれぞれ S, S_1，S_2，S_3 とする。ただし, O は原点である。このとき，不等式 $\sqrt{3}S \geqq S_1+S_2+S_3$ が成り立つことを示せ。

(3) (2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。 [2011]

7 原点を O とする xyz 空間内で，x 軸上の点 A, xy 平面上の点 B, z 軸上の点 C を次を満たすように定める。$\angle \mathrm{OAC}=\angle \mathrm{OBC}=\theta$，$\angle \mathrm{AOB}=2\theta$，$\mathrm{OC}=3$

ただし, A の x 座標, B の y 座標, C の z 座標はいずれも正であるとする。さらに, △ABC 内の点のうち，O からの距離が最小の点を H とする。また，$t=\tan\theta$ とおく。

(1) 線分 OH の長さを t の式で表せ。

(2) H の z 座標を t の式で表せ。 [2010]

8 正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を $2:1$ に内分する点を P, 辺 OB を $1:2$ に内分する点を Q とし，$0<t<1$ を満たす t に対して，辺 OC を $t:1-t$ に内分する点を R とする。

(1) PQ の長さを求めよ。

(2) △PQR の面積が最小となるときの t の値を求めよ。 [2008]

9　大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$ とおく。

(1)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\vec{a}$ を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$ を満たすように $\vec{b}$，$\vec{c}$ を動かすとき，$|\vec{z}|$ の最大値と最小値を求めよ。　[2006]

10　a, c を実数とする。空間内の 4 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(2,\ 0,\ a)$，$B(2,\ 1,\ 5)$，$C(0,\ 1,\ c)$ は同一平面上にある。

(1)　c を a で表せ。

(2)　四角形 OABC の面積の最小値を求めよ。　[2003]

11　三角形 ABC において，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，$|\overrightarrow{BC}|=6$ である。辺 AC 上の点 D は $BD\perp AC$ を満たし，辺 AB 上の点 E は $CE\perp AB$ を満たす。CE と BD の交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AC}$ となる実数 r を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 s, t を求めよ。　[1999]

12　△ABC の 3 辺 BC, CA, AB を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_1，B_1，C_1 とおき，△$A_1B_1C_1$ の 3 辺 B_1C_1，C_1A_1，A_1B_1 を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とおく。ただし，$0<t<1$ とする。

(1)　△$A_2B_2C_2$ の辺 B_2C_2 が△ABC のいずれかの辺と平行となる t の値を求めよ。

(2)　(1)のとき，△$A_2B_2C_2$ は△ABC に相似であることを示し，その相似比を求めよ。

[1998]

■ 整数と数列

1　連立方程式 $x^2=yz+7$，$y^2=zx+7$，$z^2=xy+7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x\leqq y\leqq z$ となるものを求めよ。　[2017]

2　$6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。　[2016]

3　θ を実数とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=1,\ a_2=\cos\theta,\ a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。すべての n について $a_n=\cos(n-1)\theta$ が成り立つとき，$\cos\theta$ を求めよ。

[2016]

4　n を 2 以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば，$E(2)=1$，$E(3)=2$，$E(4)=2$，$\cdots$，$E(10)=4$，$\cdots$ である。

(1)　$E(1024)$ を求めよ。

(2)　$E(2015)$ を求めよ。

(3)　m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする。$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。　[2015]

5　数列 $\{a_k\}$ を $a_k=k+\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$ で定める。n を正の整数とする。

(1)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}a_k$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2$ を求めよ。　[2015]

6　$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

[2014]

7　$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$ を満たす正の整数 $p,\ q$ の組をすべて求めよ。

[2013]

8　1 つの角が 120° の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ $x,\ y,\ z$ は $x<y<z$ を満たす整数である。

(1)　$x+y-z=2$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ。

(2)　$x+y-z=3$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ。

(3)　$a,\ b$ を 0 以上の整数とする。$x+y-z=2^a3^b$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組の個数を a と b の式で表せ。　[2012]

9 (1)　自然数 $x,\ y$ は, $1<x<y$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ を満たす。$x,\ y$ の組をすべて求めよ。

(2)　自然数 $x,\ y,\ z$ は, $1<x<y<z$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ を満たす。$x,\ y,\ z$ の組をすべて求めよ。 [2011]

10 実数 $p,\ q,\ r$ に対して, 3 次多項式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ と定める。実数 $a,\ c$, および 0 でない実数 b に対して, $a+bi$ と c はいずれも方程式 $f(x)=0$ の解であるとする。ただし, i は虚数単位を表す。

(1)　$y=f(x)$ のグラフにおいて, 点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし, 点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a\neq c$ のとき, $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2)　さらに, $a,\ c$ は整数であり, b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i)　$p,\ q,\ r$ はすべて整数である。

(ii)　p が 2 の倍数であり, q が 4 の倍数であるならば, $a,\ b,\ c$ はすべて 2 の倍数である。 [2010]

11 0 以上の整数 a_1, a_2 が与えられたとき, 数列 $\{a_n\}$ を, $a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ により定める。

(1)　$a_1=1$, $a_2=2$ のとき, a_{2010} を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　$a_2=3a_1$ のとき, $a_{n+4}-a_n$ は 10 の倍数であることを示せ。 [2010]

12 2 以上の整数 $m,\ n$ は $m^3+1^3=n^3+10^3$ を満たす。$m,\ n$ を求めよ。 [2009]

13 m を整数とし, $f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

(1)　整数 a と, 0 ではない整数 b で, $f(a+bi)=0$ を満たすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし, i は虚数単位である。

(2)　(1)で求めたすべての m に対して, 方程式 $f(x)=0$ を解け。 [2007]

14　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ を，$a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n$，$b_1=3$，$b_{n+1}=b_n+2a_n$，$c_1=4$，$c_{n+1}=\dfrac{c_n}{4}+a_n+b_n$ と順に定める。放物線 $y=a_nx^2+2b_nx+c_n$ を H_n とする。

(1)　H_n は x 軸と 2 点で交わることを示せ。

(2)　H_n と x 軸の交点を P_n，Q_n とする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ を求めよ。 [2007]

15　次の条件(a), (b)をともに満たす直角三角形を考える。ただし，斜辺の長さを p，その他の 2 辺の長さを $q,\ r$ とする。

(a)　$p,\ q,\ r$ は自然数で，そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b)　$p+q+r=132$

(1)　$q,\ r$ のどちらかは偶数であることを示せ。

(2)　$p,\ q,\ r$ の組をすべて求めよ。 [2006]

16　$a,\ b,\ c$ は整数で，$a<b<c$ を満たす。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ をとる。

(1)　$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

(2)　$a=-3$ のとき，$\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ となる組 $(b,\ c)$ をすべて求めよ。 [2004]

17　(1)　正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(2)　正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。 [2003]

18　$k,\ x,\ y$ は正の整数とする。三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}$，$\dfrac{k}{y}$，$\dfrac{1}{xy}$ で，周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である。$k,\ x,\ y$ を求めよ。 [2002]

19　$a,\ b,\ c,\ d$ を正の整数とする。複素数 $w=a+bi$，$z=c+di$ が $w^2z=1+18i$ を満たす。$a,\ b,\ c,\ d$ を求めよ。 [2000]

$\boxed{20}$ p, q は素数で, $p<q$ とする。

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは, $p=2$, $q=3$ のときに限ることを示せ。 [1999]

$\boxed{21}$ 正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。正の整数の組 $(a,\ b)$ は, 条件 $0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$, $0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ をみたすとする。

(1) $a-r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2) a と b を求めよ。 [1998]

$\boxed{22}$ 数列 $\{a_n\}$ を, $a_1=5$, $a_{n+1}=2a_n+3^n$ $(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$ で定める。

(1) $b_n=a_n-3^n$ とおく。b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) a_n を求めよ。

(3) $a_n<10^{10}$ をみたす最大の正の整数 n を求めよ。ただし, $\log_{10}2=0.3010$, $\log_{10}3=0.4771$ としてよい。 [1998]

■ 確率

$\boxed{1}$ 硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行ったあと, 硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

［操作］2 枚とも表, または 2 枚とも裏のときには, 2 枚の硬貨両方を投げる。表と裏が 1 枚ずつのときには, 表になっている硬貨だけを投げる。 [2016]

2　x は 0 以上の整数である。右の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1)　$2n$ 個の実数 a_1，a_2，…，a_n，b_1，b_2，…，b_n について，$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$，$b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ。

(2)　科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ。

(3)　x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった。このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。　[2016]

3　n を 4 以上の整数とする。正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を l とする。さらに，残りの $n-2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び，それらを通る直線を m とする。直線 l と m が平行になる確率を求めよ。　[2015]

4　a, b, c は異なる 3 つの正の整数とする。次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする。

(1)　科目 X の得点の分散を ${s_{\mathrm{X}}}^2$，科目 Y の得点の分散を ${s_{\mathrm{Y}}}^2$ とする。$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}$ を求めよ。

(2)　科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

(3)　科目 X の得点の中央値が 65，科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，a，b，c の組を求めよ。　[2015]

5 数直線上の点 P を次の規則で移動させる。1 枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$ だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1) $a_3=0$ となる確率を求めよ。

(2) $a_4=1$ となる確率を求めよ。

(3) $n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ。 [2014]

6 サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1) s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2) s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3) s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。 [2013]

7 最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている。その後，4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び，その面が上面となるように置き直す操作を n 回繰り返す。なお，サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である。

(1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ。

(2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ。 [2012]

8 A と B の 2 人が, 1 個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1 回めは A が投げる。

1, 2, 3 の目が出たら，次の回には同じ人が投げる。

4, 5 の目が出たら，次の回には別の人が投げる。

6 の目が出たら，投げた人を勝ちとし，それ以降は投げない。

(1) n 回目に A がサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げで A が勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n を求めよ。 [2011]

9 n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ，出た目の数をそれぞれ順に X_1，X_2，$\cdots$，X_n とする。$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して $X_i=X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

(1) A_2，A_3，$\cdots$，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。

(2) A_2，A_3，$\cdots$，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。 [2010]

10　X, Y, Z と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この中から 1 枚のカードが選ばれたとき, xy 平面上の点 P を次の規則にしたがって移動する。

・X のカードが選ばれたとき, P を x 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Y のカードが選ばれたとき, P を y 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Z のカードが選ばれたとき, P は移動せずそのままの位置にとどまる。

(1)　n を正の整数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。X のカードと Y のカードの 2 枚から無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。

(2)　n を正の 3 の倍数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。X のカード, Y のカード, Z のカードの 3 枚のカードから無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。　[2009]

11　n を 3 以上の整数とする。$2n$ 枚のカードがあり, そのうち赤いカードの枚数は 6, 白いカードの枚数は $2n-6$ である。これら $2n$ 枚のカードを, 箱 A と箱 B に n 枚ずつ無作為に入れる。2 つの箱の少なくとも一方に赤いカードがちょうど k 枚入っている確率を p_k とする。

(1)　p_2 を n の式で表せ。さらに, p_2 を最大にする n をすべて求めよ。

(2)　$p_1+p_2<p_0+p_3$ を満たす n をすべて求めよ。　[2008]

12　1 が書かれたカードが 1 枚, 2 が書かれたカードが 1 枚, …, n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出して元に戻す操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき, 得点 X を次の規則(i), (ii)に従って定める。

(i)　a, b, c がすべて異なるとき, X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii)　a, b, c のうちに重複しているものがあるとき, X はその重複した値とする。

$1\leqq k\leqq n$ を満たす k に対して, $X=k$ となる確率を p_k とする。

(1)　p_k を n と k で表せ。

(2)　p_k が最大となる k を n で表せ。　[2007]

13　1, 2, 3, 4 が 1 つずつ記された 4 枚のカードがある。これらのカードから 1 枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す。抜き出した n 個の数の和を X_n とし, 積を Y_n とする。

(1)　$X_n \leqq n+3$ となる確率を n で表せ。

(2)　Y_n が 8 で割り切れる確率を n で表せ。　[2006]

14　A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行う。1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p, B が A に勝つ確率は $1-p$ であるとする。n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を x_n とする。

(1)　x_n を p と n で表せ。

(2)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき, x_n を最大にする n を求めよ。　[2005]

15　n 枚のカードがあり, 1 枚目のカードに 1, 2 枚目のカードに 2, …, n 枚目のカードに n が書かれている。これらの n 枚のカードのから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し, もう一度無作為に 1 枚を取り出す。取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x, y とする。また, k を n の約数とする。

(1)　$x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ。

(2)　さらに, $k=pq$ とする。ただし, p, q は異なる素数である。xy が k の倍数となる確率を求めよ。　[2004]

16　1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, …, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を, a_1, a_2, …, a_{2n} とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1)　$X=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=n$ となる確率を求めよ。

(3)　m は $1 \leqq m < n$ を満たす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。　[2003]

17　最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く。次の試行で残った硬貨を同時に投げ, 裏が出た硬貨を取り除く。以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまでくり返す。

(1)　試行が 1 回目で終了する確率 p_1, および 2 回目で終了する確率 p_2 を求めよ。

(2)　試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ。　[2002]

18　1 個のサイコロを n 回投げる。

(1)　$n \geqq 2$ のとき，1 の目が少なくとも 1 回出て，かつ 2 の目も少なくとも 1 回出る確率を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，1 の目が少なくとも 2 回出て，かつ 2 の目が少なくとも 1 回出る確率を求めよ。　[2000]

19　箱 A, 箱 B のそれぞれに赤玉が 1 個，白玉が 3 個，合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後，箱 A に赤玉が 1 個，白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。　[1999]

20　H 大学には 4 つの食堂があり，A 君と B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている。最初の日，二人は別々の食堂で食事をしたとして，以下の確率を求めよ。

(1)　n 日後に，はじめて二人が食堂で出会う確率。ただし $n \geqq 1$ とする。

(2)　n 日後に，二人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。ただし $n \geqq 2$ とする。　[1998]

■ 論証

1　1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC を平面上におく。△ABC を 1 つの辺に関して 180° 折り返すという操作を繰り返し行う。辺 BC に関する折り返しを T_A，辺 CA に関する折り返しを T_B，辺 AB に関する折り返しを T_C とする。△ABC は，最初 3 点 A, B, C がそれぞれ平面上の 3 点 O，B′，C′ の上に置かれているとする。

(1)　T_A，T_C，T_B，T_C，T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を P とする。また，T_A，T_C，T_B，T_A，T_C，T_B，T_A の順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を Q とする。$\theta = \angle \mathrm{POQ}$ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　整数 k, l に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = 3k\overrightarrow{\mathrm{OB'}} + 3l\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$ により定められる点 R は，T_A，T_B，T_C の折り返し操作を組み合わせることにより，点 A の移り先になることを示せ。

[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

実数 a, b は $a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ を満たす。

(1)　$\log_3 a+\log_3 b$ の最大値と最小値を求めよ。

(2)　$\log_2 a+\log_4 b$ の最大値と最小値を求めよ。 [2017]

解答例

(1)　実数 a, b は，$a \geqq 1$，$b \geqq 1$，$a+b=9$ より，$b=9-a$ $(1 \leqq a \leqq 8)$ であるので，$P=\log_3 a+\log_3 b$ とおくと，

$$P=\log_3 a+\log_3(9-a)=\log_3 a(9-a)=\log_3(-a^2+9a)$$

さらに，$f(a)=-a^2+9a$ とおくと，$f(a)=-\left(a-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{81}{4}$ より，$f(a)$ は最大値 $\dfrac{81}{4}\left(a=\dfrac{9}{2}\right)$，最小値 $8(a=1,\ 8)$ をとる。

すると，$P=\log_3 f(a)$ から，P は最大値 $\log_3\dfrac{81}{4}=\log_3 3^4-\log_3 2^2=4-2\log_3 2$，最小値 $\log_3 8=\log_3 2^3=3\log_3 2$ をとる。

(2)　$Q=\log_2 a+\log_4 b=\log_2 a+\dfrac{1}{2}\log_2 b$ とおくと，

$$Q=\frac{1}{2}\log_2 a^2+\frac{1}{2}\log_2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2 a^2(9-a)=\frac{1}{2}\log_2(-a^3+9a^2)$$

さらに，$g(a)=-a^3+9a^2$ とおくと，

$$g'(a)=-3a^2+18a=-3a(a-6)$$

すると，$g(a)$ の増減は右表のようになり，$g(a)$ は最大値 $108(a=6)$，最小値 $8(a=1)$ をとる。

a	1	$\cdots$	6	$\cdots$	8
$g'(a)$		$+$	0	$-$	
$g(a)$	8	$\nearrow$	108	$\searrow$	64

すると，$Q=\dfrac{1}{2}\log_3 g(a)$ から，Q は最大値 $\dfrac{1}{2}\log_2 108=\dfrac{1}{2}\log_2 2^2 3^3=1+\dfrac{3}{2}\log_2 3$，最小値 $\dfrac{1}{2}\log_2 8=\dfrac{1}{2}\log_2 2^3=\dfrac{3}{2}$ をとる。

コメント

対数関数の最大と最小についての基本題です。何か裏があるのかと勘繰ってしまいそうなレベルです。

問　題

$P(0)=1$，$P(x+1)-P(x)=2x$ を満たす整式 $P(x)$ を求めよ。 [2017]

解答例

まず，整式 $P(x)$ が定数または 1 次式の場合，$P(x+1)-P(x)=2x$ ……(＊)は明らかに成立しない。よって，$P(x)$ を n 次式とすると $n \geqq 2$ であり，$P(0)=1$ から，

$$P(x)=1+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n \quad (a_n \neq 0)$$

すると，$P(x+1)=1+a_1(x+1)+a_2(x+1)^2+\cdots+a_n(x+1)^n$ となり，

$$P(x+1)-P(x)={}_n\mathrm{C}_1a_nx^{n-1}+q(x) \quad (q(x)\text{は}n-2\text{次以下の整式})$$

これより，$P(x+1)-P(x)$ は $n-1$ 次式となるので，(＊)から，

$$n-1=1,\ n=2$$

そこで，$P(x)=1+ax+bx^2$ $(b\neq 0)$ とおき，(＊)に代入すると，

$$1+a(x+1)+b(x+1)^2-(1+ax+bx^2)=2x,\ (a+b)+2bx=2x$$

よって，$a+b=0$，$2b=2$ から，$a=-1$，$b=1$ となり，$P(x)=1-x+x^2$ である。

コメント

整式 $P(x)$ に対し，$P(x+1)-P(x)$ は $P(x)$ より次数が 1 つ下がるという知識があれば，すぐに結論が導けます。つまり，経験がものをいうわけです。

問　題

(1)　任意の角θに対して，$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。

(2)　任意の角α，βに対して，$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$が成立するような点$(x,\ y)$の全体からなる領域を$xy$平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　不等式$-2 \leqq x\cos\theta + y\sin\theta \leqq y+1$……①に対して，

(i)　$x = y = 0$のとき　①は$-2 \leqq 0 \leqq 1$となり，任意θに対して成立する。

(ii)　$x \neq 0$または$y \neq 0$のとき

φを$\sin\varphi = \dfrac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$，$\cos\varphi = \dfrac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}$と決めると，①より，

$$-2 \leqq \sqrt{x^2+y^2}\sin(\theta+\varphi) \leqq y+1$$

任意のθに対して成立する条件は，

$$-2 \leqq -\sqrt{x^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \sqrt{x^2+y^2} \leqq y+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\sqrt{x^2+y^2} \leqq 2$，$x^2+y^2 \leqq 4$………④

③より，$y+1 \geqq 0$のもとで，$x^2+y^2 \leqq (y+1)^2$

$$x^2 \leqq 2y+1,\quad y \geqq \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

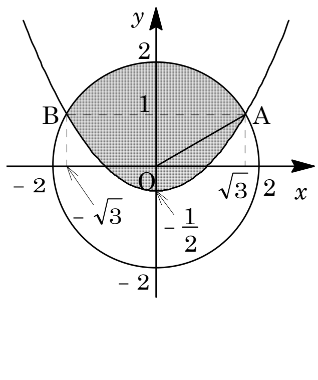
さて，領域④と⑤の境界線の 2 つの交点 A, B は，

$$(2y+1)+y^2 = 4,\quad (y-1)(y+3) = 0$$

$y \geqq -\dfrac{1}{2}$から$y = 1$となり，$x = \pm\sqrt{3}$である。

(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。



さて，直線 OA の方程式が$y = \dfrac{1}{\sqrt{3}}x$で，OA とy軸のなす角が$\dfrac{\pi}{3}$より，網点部の面積をSとすると，

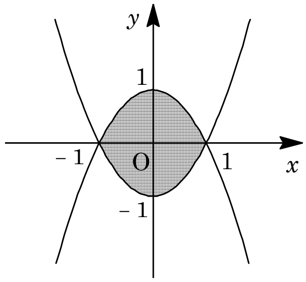
$$S = 2\times\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3} + 2\int_0^{\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt{3}}x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{2}\Big)dx$$

$$= \frac{4\pi}{3} + 2\Big[\frac{1}{2\sqrt{3}}x^2 - \frac{1}{6}x^3 + \frac{1}{2}x\Big]_0^{\sqrt{3}} = \frac{4\pi}{3} + \sqrt{3}$$

(2)　不等式$-1 \leqq x^2\cos\alpha + y\sin\beta \leqq 1$……⑥に対し，独立に値をとる任意の$\alpha$，$\beta$では，$-1 \leqq \cos\alpha \leqq 1$，$-1 \leqq \sin\beta \leqq 1$なので，⑥より，

(i)　$y \geqq 0$のとき

$$-1 \leqq -x^2 - y\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad x^2 + y \leqq 1\ \cdots\cdots\cdots⑧$$



⑦⑧より，$y \leqq -x^2+1$

(ii)　$y<0$ のとき

$-1 \leqq -x^2+y$ ………⑨，$x^2-y \leqq 1$ ………⑩

⑨⑩より，$y \geqq x^2-1$

(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。

そこで，網点部の面積を S とすると，

$$S = 2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx = -2\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx = \frac{1}{3}(1+1)^3 = \frac{8}{3}$$

コメント

三角不等式の問題です。(1)では任意の θ でとりうる最大値・最小値，(2)では任意の α，β でとる最大値・最小値をもとに，$(x,\ y)$ の条件が定まります。

問　題

k を正の整数とする。$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n が，ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ。 [2008]

解答例

与えられた不等式 $5n^2-2kn+1<0$ を変形して，$\dfrac{5}{2}n^2+\dfrac{1}{2}<kn$ ………①

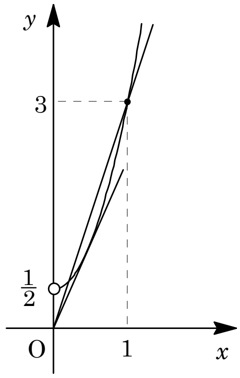
ここで, $k>0$ なので, ①から $n>0$ である。

さて，①を満たす正の整数 n が 1 個である条件は，$y=\dfrac{5}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ ……②のグラフが，$y=kx$ ……③のグラフの下方にある $x>0$ の範囲に，整数が 1 個のみ存在することを意味する。

さて，②と③のグラフが接するのは，$5x^2-2kx+1=0$ から，

$$D/4=k^2-5=0,\ \ k=\sqrt{5}$$

このとき，$x=\dfrac{k}{5}=\dfrac{\sqrt{5}}{5}<1$



これより，①を満たす整数が 1 個となる n の値は，$n=1$ のみである。

そこで，右図から，③が点 $(1,\ 3)$ を通るとき $k=3$，また点 $\left(2,\ \dfrac{21}{2}\right)$ を通るとき $k=\dfrac{21}{4}$ である。

よって，条件を満たす k の範囲は $3<k\leqq\dfrac{21}{4}$ となり，求める整数 k は，$k=4,\ 5$ である。

コメント

頻出タイプの問題です。放物線と直線の位置関係で，不等式の解をとらえています。

問　題

3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$は異なる 3 つの解p, q, rをもつ。さらに，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$も同じ方程式の異なる 3 つの解である。a, b, c, p, q, rの組をすべて求めよ。　[2008]

解答例

3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$ ……①の異なる 3 つの解がp, q, rより，

$$a=-p-q-r,\ b=pq+qr+rp,\ c=-pqr \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$2p^2-1$，$2q-1$，$2r-1$も①の異なる 3 つの解であることより，

(i)　$2p^2-1=p$のとき

(i-i)　$2q-1=q$，$2r-1=r$のとき　$q=r=1$となり不適。

(i-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=q$のとき　$q=r=1$となり不適。

(ii)　$2p^2-1=q$のとき

(ii-i)　$2q-1=p$，$2r-1=r$のとき

まず，$r=1$となり，$2p^2-1=q$を$2q-1=p$に代入して，$2(2p^2-1)-1=p$

$$4p^2-p-3=0,\ (4p+3)(p-1)=0$$

$p\neq r=1$から$p=-\frac{3}{4}$，$q=\frac{1}{8}$となり，条件に適する。

このとき，②より，$a=-\frac{3}{8}$，$b=-\frac{23}{32}$，$c=\frac{3}{32}$

(ii-ii)　$2q-1=r$，$2r-1=p$のとき

まず，$2p^2-1=q$を$2q-1=r$に代入して，$2(2p^2-1)-1=r$，$4p^2-r-3=0$

さらに，$2r-1=p$を代入すると，$4(2r-1)^2-r-3=0$

$$16r^2-17r+1=0,\ (16r-1)(r-1)=0$$

$r=1$のときは，$p=1$となり不適。

$r=\frac{1}{16}$のときは，$p=-\frac{7}{8}$，$q=\frac{17}{32}$であり，条件に適する。

このとき，②より，$a=\frac{9}{32}$，$b=-\frac{249}{512}$，$c=\frac{119}{4096}$

(iii)　$2p^2-1=r$のとき

(iii-i)　$2q-1=q$，$2r-1=p$のとき

(ii-i)と同様にして，$p=-\frac{3}{4}$，$q=1$，$r=\frac{1}{8}$，$a=-\frac{3}{8}$，$b=-\frac{23}{32}$，$c=\frac{3}{32}$

(iii-ii)　$2q-1=p$，$2r-1=q$のとき

(ii-ii)と同様にして，$p=-\frac{7}{8}$，$q=\frac{1}{16}$，$r=\frac{17}{32}$，$a=\frac{9}{32}$，$b=-\frac{249}{512}$，$c=\frac{119}{4096}$

コメント

まず，6 通りの場合を考え，連立方程式を解く問題と見極めるのがポイントです。ただ，その後も，数値計算の量は半端ではなく，多量のエネルギーと時間を費やしてしまいます。

問　題

$0° \leqq \theta < 360°$ を満たす θ と正の整数 m に対して，$f_m(\theta)$ を次のように定める。

$$f_m(\theta) = \sum_{k=0}^{m} \sin(\theta + 60° \times k)$$

(1) $f_5(\theta)$ を求めよ。

(2) θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_4(\theta)$ の最大値を求めよ。

(3) m がすべての正の整数を動き，θ が $0° \leqq \theta < 360°$ の範囲を動くとき，$f_m(\theta)$ の最大値を求めよ。 [2005]

解答例

(1) $f_5(\theta) = \sum_{k=0}^{5} \sin(\theta + 60° \times k) = \sin\theta + \sin(\theta + 60°) + \sin(\theta + 120°) + \sin(\theta + 180°)$

$$+ \sin(\theta + 240°) + \sin(\theta + 300°)$$

ここで，$\sin(\theta + 180°) = -\sin\theta$ より，

$$\sin(\theta + 240°) = -\sin(\theta + 60°),\ \sin(\theta + 300°) = -\sin(\theta + 120°)$$

よって，$f_5(\theta) = 0$

(2) (1)より，$f_4(\theta) = f_5(\theta) - \sin(\theta + 300°) = \sin(\theta + 120°)$

$0° \leqq \theta < 360°$ より，$f_4(\theta)$ は，$\theta + 120° = 360° + 90°$ $(\theta = 330°)$ のとき，最大値 1 をとる。

(3) (1)より, k を 0 以上の整数として, m の値を場合分けする。

(i) $m = 6k + 6$ のとき　$f_m(\theta) = \sin\theta$

よって，$\theta = 90°$ のとき，最大値 1 をとる。

(ii) $m = 6k + 5$ のとき　(1)より，$f_m(\theta) = 0$

(iii) $m = 6k + 4$ のとき　(2)より，$f_m(\theta) = \sin(\theta + 120°)$

よって，$\theta = 330°$ のとき，最大値 1 をとる。

(iv) $m = 6k + 3$ のとき

$$f_m(\theta) = \sin(\theta + 60°) + \sin(\theta + 120°) = 2\sin(\theta + 90°)\cos 30° = \sqrt{3}\cos\theta$$

よって，$\theta = 0°$ のとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(v) $m = 6k + 2$ のとき

$$f_m(\theta) = \sin\theta + \sin(\theta + 60°) + \sin(\theta + 120°) = \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta$$
$$= 2\sin(\theta + 60°)$$

よって，$\theta + 60° = 90°$ $(\theta = 30°)$ のとき，最大値 2 をとる。

(vi) $m = 6k + 1$ のとき

$$f_m(\theta) = \sin\theta + \sin(\theta + 60°) = 2\sin(\theta + 30°)\cos 30° = \sqrt{3}\sin(\theta + 30°)$$

よって，$\theta + 30° = 90°$ $(\theta = 60°)$ のとき，最大値 $\sqrt{3}$ をとる。

(i)～(vi)より，$f_m(\theta)$ の最大値は 2 である。

コメント

設問はハッタリのきいたものでしたが，(1)から周期性が発見できますので，後は記述力です。

問　題

a, b を整数とする。3 次方程式 $x^3+ax^2+bx-1=0$ は 3 実数解 α, β, γ をもち，$0<\alpha<\beta<\gamma<3$ で，α, β, γ のうちどれかは整数である。a, b を求めよ。　[2001]

解答例

$x^3+ax^2+bx-1=0$ ……①に対して，

(i)　$x=1$ を解にもつとき

$1+a+b-1=0$ より $b=-a$ となるので，①は $x^3+ax^2-ax-1=0$

$$(x-1)\left\{x^2+(a+1)x+1\right\}=0$$

$$x=1,\ x^2+(a+1)x+1=0\ \cdots\cdots\text{②}$$

②の解が $x\neq1$ で，ともに $0<x<3$ にある条件は，

$f(x)=x^2+(a+1)x+1=\left(x+\dfrac{a+1}{2}\right)^2-\dfrac{(a+1)^2}{4}+1$ とすると，

$$0<-\frac{a+1}{2}<3\ \cdots\cdots\text{③},\ -\frac{(a+1)^2}{4}+1<0\ \cdots\cdots\text{④}$$

$$f(3)=9+3(a+1)+1>0\ \cdots\cdots\text{⑤},\ f(1)=1+(a+1)+1\neq0\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

③より $-7<a<-1$，④より $a<-3$, $1<a$，⑤より $a>-\dfrac{13}{3}$，⑥より $a\neq-3$

以上まとめて，$-\dfrac{13}{3}<a<-3$

a は整数なので $a=-4$ となり，$b=4$ である。

(ii)　$x=2$ を解にもつとき

$8+4a+2b-1=0$ より，$b=-2a-\dfrac{7}{2}$ となるが, a, b は整数より適さない。

(i)(ii)より，$a=-4$，$b=4$

コメント

実質的には 2 次方程式の解の配置の問題です。

問　題

a を実数とし，$f(x)=x^3-3ax$ とする。区間 $-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。M の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2016]

解答例

$f(x)=x^3-3ax$ に対し，$f(-x)=-f(x)$ から，$|f(-x)|=|-f(x)|=|f(x)|$

すると，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値は，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値に等しい。以下，$0\leqq x\leqq 1$ で考える。

さて，$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$ より，

(i)　$a\leqq 0$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調増加し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

x	0	$\cdots$	1
$f'(x)$		$+$	
$f(x)$	0	$\nearrow$	$1-3a$

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a$$

(ii)　$a>0$ のとき

$f'(x)=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$ となり，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	0	$\searrow$	$-2a\sqrt{a}$	$\nearrow$

(ii-i)　$0<\sqrt{a}<1\ (0<a<1)$ のとき

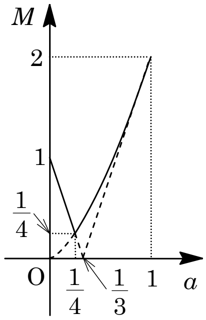
まず一般的に，X と Y の小さくない方を $\max\{X,\ Y\}$ と表すと，$0\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=\max\{|f(\sqrt{a})|,\ |f(1)|\}=\max\{2a\sqrt{a},\ |1-3a|\}$$

ここで，$2a\sqrt{a}=|1-3a|$ として，両辺を 2 乗すると，

$$4a^3=(1-3a)^2,\ 4a^3-9a^2+6a-1=0$$

すると，$(4a-1)(a-1)^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{4},\ 1$



これより，a と M の関係は右図の実線のようになり，

$$M=1-3a\left(0<a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\ \left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right)$$

(ii-ii)　$\sqrt{a}\geqq 1\ (a\geqq 1)$ のとき

$0\leqq x\leqq 1$ において，$f(x)$ は単調減少し，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a$$

(i)(ii)より，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=1-3a\left(a<\frac{1}{4}\right),\ M=2a\sqrt{a}\ \left(\frac{1}{4}\leqq a<1\right),\ M=-1+3a\ (a\geqq 1)$$

以上より，M は $a=\dfrac{1}{4}$ のとき最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

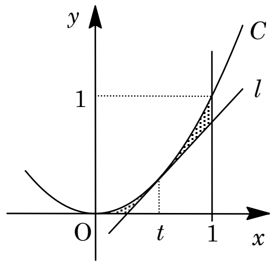
コメント

関数の最大・最小に関する有名問題です。まったく同じ問題の演習経験があるかもしれません。なお，ポイントは偶関数に気付くことです。

問　題

$0<t<1$とし，放物線$C: y=x^2$上の点$(t,\ t^2)$における接線をlとする。Cとlとx軸で囲まれる部分の面積をS_1とし，Cとlと直線$x=1$で囲まれる部分の面積をS_2とする。S_1+S_2の最小値を求めよ。 [2014]

解答例



$C: y=x^2$より$y'=2x$となり，$0<t<1$において，点$(t,\ t^2)$における接線lは,

$$y-t^2=2t(x-t),\ \ y=2tx-t^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, lとx軸の交点は, $(*)$より,

$$2tx-t^2=0,\ \ x=\frac{t}{2}$$

また, lと直線$x=1$との交点は, $(*)$より, $y=2t-t^2$

すると, Cとlとx軸で囲まれる部分の面積S_1, Cとlと直線$x=1$で囲まれる部分の面積S_2に対して, $S=S_1+S_2$とおくと,

$$S=\int_0^1 x^2\,dx-\frac{1}{2}\Big(1-\frac{t}{2}\Big)(2t-t^2)=-\frac{1}{4}t(t-2)^2+\frac{1}{3}=-\frac{1}{4}t^3+t^2-t+\frac{1}{3}$$

$$S'=-\frac{3}{4}t^2+2t-1=-\frac{1}{4}(3t-2)(t-2)$$

すると，$0<t<1$における$S=S_1+S_2$の増減は右表のようになり，Sは$t=\frac{2}{3}$のとき最小値$\frac{1}{27}$をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$	$\frac{1}{27}$	$\nearrow$	

コメント

微積分の超基本かつ超頻出題です。

問　題

原点を O とする xy 平面上に，放物線 $C: y=1-x^2$ がある。C 上に 2 点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ を $p<q$ となるようにとる。

(1) 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S を，p と q の式で表せ。

(2) $q=p+1$ であるとき S の最小値を求めよ。

(3) $pq=-1$ であるとき S の最小値を求めよ。　[2013]

解答例

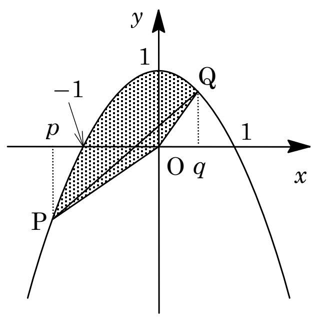
(1) 放物線 $C: y=1-x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ 1-p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ 1-q^2)$ $(p<q)$ に対して,直線 PQ の方程式は,

$$y-(1-p^2)=\frac{(1-q^2)-(1-p^2)}{q-p}(x-p),\quad y=-(p+q)x+1+pq$$

さて, C と直線 PQ に囲まれた部分の面積を S_1 とすると,

$$S_1=\int_p^q\{1-x^2+(p+q)x-1-pq\}dx=\int_p^q\{-x^2+(p+q)x-pq\}dx$$

$$=-\int_p^q(x-p)(x-q)dx=\frac{1}{6}(q-p)^3$$



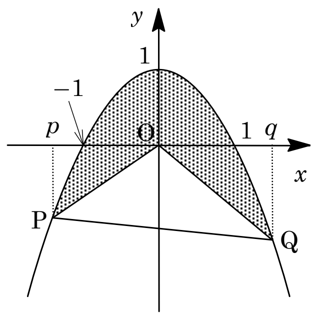
また, △OPQ の面積を S_2 とすると,

$$S_2=\frac{1}{2}\left|q(1-p^2)-p(1-q^2)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)+pq(q-p)\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|(q-p)(1+pq)\right|=\frac{1}{2}(q-p)\left|1+pq\right|$$

すると, 2 つの線分 OP, OQ と放物線 C で囲まれた部分の面積 S は, 直線 PQ の y 切片に注目し,



(i) $1+pq\geqq 0$ のとき

$$S=S_1+S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(ii) $1+pq<0$ のとき

$$S=S_1-S_2=\frac{1}{6}(q-p)^3+\frac{1}{2}(q-p)(1+pq)$$

(i)(ii)より, $S=\dfrac{1}{6}(q-p)^3+\dfrac{1}{2}(q-p)(1+pq)=\dfrac{1}{6}(q-p)(p^2+pq+q^2+3)$

(2) $q=p+1$ のとき, (1)より, $S=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{2}\{1+p(p+1)\}$ となり,

$$S=\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\left\{\left(p+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}=\frac{1}{2}\left(p+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{24}$$

よって, $p=-\dfrac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\dfrac{13}{24}$ をとる。

(3)　$pq=-1$ のとき，$p<q$ から，$p<0<q$ であり，(1)より，

$$S=\frac{1}{6}\left(q+\frac{1}{q}\right)^3\geqq\frac{1}{6}\left(2\sqrt{q\cdot\frac{1}{q}}\right)^3=\frac{4}{3}$$

等号は $q=\frac{1}{q}$　$(q=1)$ のとき成立するので，このとき S は最小値 $\frac{4}{3}$ をとる。

コメント

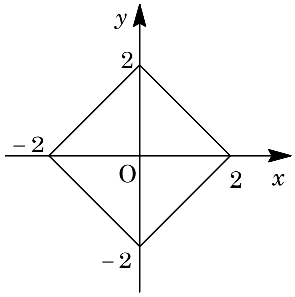
面積の標準的な問題ですが，場合分けをなるべく後回しにしていく工夫が必要です。

問　題

a を 0 以上の定数とする。関数 $y=x^3-3a^2x$ のグラフと方程式 $|x|+|y|=2$ で表される図形の共有点の個数を求めよ。 [2012]

解答例

まず，方程式 $|x|+|y|=2$ ……①で表される図形は，対称性を考えると，右図の正方形となる。



また，$y=x^3-3a^2x$ ……②に対して，

(i)　$a=0$ のとき

②が，$y=x^3$ となることより，①の図形と②のグラフの共有点は明らかに 2 個である。

(ii)　$a>0$ のとき

$$y'=3x^2-3a^2=3(x-a)(x+a)$$

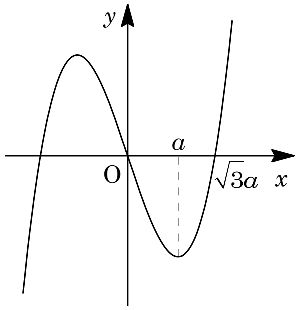
グラフが原点対称であることを考え，$x\geqq 0$ における増減について調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y	0	↘		↗

$x>0$ における②のグラフと x 軸との交点は，

$$x^3-3a^2x=0,\ x=\sqrt{3}a$$

これより，②のグラフの概形は右図のようになる。



さて，①の図形と②のグラフの共有点の個数について，まず，第 1 象限には，$\sqrt{3}a<2\left(0<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

次に，x 軸の正の部分には，$\sqrt{3}a=2\left(a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$ のとき 1 個存在し，それ以外のときは存在しない。

さらに，第 4 象限での共有点の個数を調べるために，②と $y=x-2\ (0<x<2)$ とを連立して，

$$x^3-3a^2x=x-2,\ x^3-(3a^2+1)x+2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f(x)=x^3-(3a^2+1)x+2$ とおくと，③は $f(x)=0$ となり，

$$f'(x)=3x^2-(3a^2+1)$$

すると，$x>0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	2	↘		↗

$$f\left(\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}\right)=-\frac{2(3a^2+1)}{3}\sqrt{\frac{3a^2+1}{3}}+2$$

そこで，$f\left(\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}\right)<0$ とすると，$\dfrac{3a^2+1}{3}\sqrt{\dfrac{3a^2+1}{3}}=\left(\dfrac{3a^2+1}{3}\right)^{\frac{3}{2}}>1$ となり，

$$\frac{3a^2+1}{3}>1,\ a>\sqrt{\frac{2}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すなわち，第 4 象限での共有点の個数は，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ に注意すると，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，また $a\geqq\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。それ以外のときは存在しない。

よって，$a>0$ では，$0<a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 1 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ のとき 2 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 3 個，$a=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 1 個となる。

(i)(ii)より，①の図形と②のグラフが，ともに原点対称であることを考え合わせると，求める共有点の個数は以下のようになる。

$0\leqq a<\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$a>\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 2 個，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，$\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 4 個，$\dfrac{\sqrt{6}}{3}<a<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ のとき 6 個である。

コメント

a の変化に伴う②のグラフの動きを視覚的にとらえて解く問題です。この下書きの段階で計算の手順が決まります。

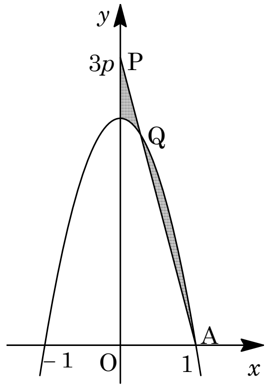
問　題

xy 平面上に放物線 $C: y=-3x^2+3$ と 2 点 A$(1,\ 0)$，P$(0,\ 3p)$ がある。線分 AP と C は, A とは異なる点 Q を共有している。

(1)　定数 p の存在する範囲を求めよ。

(2)　S_1 を，C と線分 AQ で囲まれた領域とし，S_2 を，C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域とする。S_1 と S_2 の面積の和が最小となる p の値を求めよ。　[2011]

解答例



(1)　$C: y=-3x^2+3$ ……①と AP : $y=-3p(x-1)$ ……②を連立すると，

$$-3x^2+3=-3p(x-1),\ -3(x-1)(x+1-p)=0$$

よって，$x=1,\ p-1$ となり，線分 AP と C が A とは異なる点 Q を共有していることから，

$$0\leqq p-1<1,\ 1\leqq p<2$$

(2)　C と線分 AQ で囲まれた領域 S_1 の面積 T_1 は，

$$T_1=\int_{p-1}^{1}\left\{-3x^2+3+3p(x-1)\right\}dx$$

$$=-3\int_{p-1}^{1}(x-1)(x+1-p)\,dx=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(1-p+1)^3=\frac{1}{2}(2-p)^3$$

また, C, 線分 QP, および y 軸とで囲まれた領域 S_2 の面積 T_2 は,

$$T_2=\frac{1}{2}\cdot1\cdot3p+T_1-\int_0^1(-3x^2+3)\,dx=\frac{3}{2}p+T_1-\Big[-x^3+3x\Big]_0^1$$

$$=T_1+\frac{3}{2}p-2$$

ここで，S_1 と S_2 の面積の和を T とおくと，

$$T=T_1+T_2=2\cdot\frac{1}{2}(2-p)^3+\frac{3}{2}p-2=-p^3+6p^2-\frac{21}{2}p+6$$

$$T'=-3p^2+12p-\frac{21}{2}=-\frac{3}{2}(2p^2-8p+7)$$

$1\leqq p<2$ における $T'=0$ の解は，$p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ であり, T の増減は右表のようになる。

p	1	…	$\frac{4-\sqrt{2}}{2}$	…	2
T'		$-$	0	$+$	
T		↘		↗	

よって，$p=\dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$ のとき T は最小となる。

コメント

T_2 は，普通に 0 から $p-1$ までの積分計算でも求められます。ただ，所要時間が 2 倍ほどになります。

問　題

a を実数とする。傾きが m である 2 つの直線が，曲線 $y=x^3-3ax^2$ とそれぞれ点 A，点 B で接している。

(1) 線分 AB の中点を C とすると，C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にあることを示せ。

(2) 直線 AB の方程式が $y=-x-1$ であるとき，a，m の値を求めよ。　[2010]

解答例

(1) 曲線 $y=x^3-3ax^2$ ……①上の点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^3-3a\alpha^2)$，$\mathrm{B}(\beta,\ \beta^3-3a\beta^2)$ とおく。

すると，$y'=3x^2-6ax$ から，

$$m=3\alpha^2-6a\alpha \cdots\cdots\text{②},\quad m=3\beta^2-6a\beta \cdots\cdots\text{③}$$

②③より，$3(\alpha^2-\beta^2)-6a(\alpha-\beta)=0$ となり，$\alpha\neq\beta$ から，$\alpha+\beta=2a$ ………④

さて，線分 AB の中点 C は，$\mathrm{C}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)}{2}\right)$から，④より，

$$\begin{aligned}\alpha^3+\beta^3-3a(\alpha^2+\beta^2)&=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)-3a\{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta\}\\&=8a^3-6a\alpha\beta-12a^3+6a\alpha\beta=-4a^3\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{C}(a,\ -2a^3)$ となり，点 C は曲線 $y=x^3-3ax^2$ 上にある。

(2) 条件より，点 C が直線 $y=-x-1$ ……⑤上にあるので，$-2a^3=-a-1$ となり，

$$2a^3-a-1=0,\ (a-1)(2a^2+2a+1)=0$$

a は実数より，$a=1$

このとき，①は $y=x^3-3x^2$ となり，⑤との交点は，

$$x^3-3x^2=-x-1,\ x^3-3x^2+x+1=0,\ (x-1)(x^2-2x-1)=0$$

よって，$x=1,\ 1\pm\sqrt{2}$ となる。

これより，A，B の x 座標は $1\pm\sqrt{2}$ となるので，②③より，複号同順で，

$$m=3(1\pm\sqrt{2})^2-6(1\pm\sqrt{2})=3$$

コメント

3 次曲線が点対称であることを題材とした問題です。

問　題

a を定数とし，$f(x)=x^3-3ax^2+a$ とする。$x \leqq 2$ の範囲で $f(x)$ の最大値が 105 となるような a をすべて求めよ。 [2007]

解答例

$f(x)=x^3-3ax^2+a$ に対して，$f'(x)=3x^2-6ax=3x(x-2a)$ となり，

$$f(0)=a,\quad f(2a)=-4a^3+a,\quad f(2)=8-11a$$

(i)　$a \leqq 0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x \leqq 2$ における最大値は，$f(2a)$ または $f(2)$ であり，

x	$\cdots$	$2a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(2a)-f(2)=-4a^3+a-8+11a$$
$$=-4(a-1)^2(a+2)$$

(i-i)　$a<-2$ のとき

最大値は $f(2a)$ となり，条件より，$-4a^3+a=105$

$$4a^3-a+105=0,\ (a+3)(4a^2-12a+35)=0$$

$a<-2$ より，$a=-3$

(i-ii)　$-2 \leqq a \leqq 0$ のとき

最大値は $f(2)$ となり，条件より，$8-11a=105$

すると，$a=-\dfrac{97}{11}$ となるが，$-2 \leqq a \leqq 0$ を満たさない。

(ii)　$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x \leqq 2$ における最大値は，$f(0)$ または $f(2)$ であり，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(0)-f(2)=a-8+11a=12a-8$$

(ii-i)　$0<a<\dfrac{2}{3}$ のとき

最大値は $f(2)$ となり，条件より，$8-11a=105$

すると，$a=-\dfrac{97}{11}$ となるが，$0<a<\dfrac{2}{3}$ を満たさない。

(ii-ii)　$a \geqq \dfrac{2}{3}$ のとき

最大値は $f(0)$ となり，条件より $a=105$ である。この値は $a \geqq \dfrac{2}{3}$ を満たす。

(i)(ii)より，$a=-3,\ 105$

コメント

3 次関数の最大・最小という典型的な問題です。

問　題

k は整数であり，3 次方程式 $x^3-13x+k=0$ は 3 つの異なる整数解をもつ。k とこれらの整数解をすべて求めよ。　[2005]

解答例

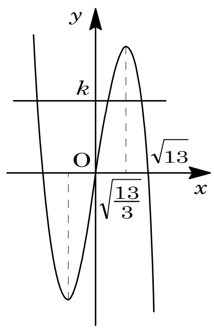
$x^3-13x+k=0\cdots\cdots(*)$より，$k=-x^3+13x$ となる。

ここで，$f(x)=-x^3+13x$ とおくと，

$$f'(x)=-3x^2+13$$

x	$\cdots$	$-\sqrt{\dfrac{13}{3}}$	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{13}{3}}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	↘		↗		↘

さて，$y=f(x)$ のグラフは原点対称なので，まず $k\geqq 0$ のとき，$(*)$の整数解を考える。



さて，$2<\sqrt{\dfrac{13}{3}}<3$，$3<\sqrt{13}<4$ なので，右図より$(*)$の最大の整数解は $x=3$ である。

このとき，$k=-27+39=12$ となり，$(*)$は，

$$x^3-13x+12=0,\ (x-3)(x+4)(x-1)=0$$

よって，整数解は $x=-4,\ 1,\ 3$

また，$k<0$ のときは，対称性から，$k=-12$ のとき，整数解 $x=4,\ -1,\ -3$ をもつ。

以上より，$(*)$は，$k=12$ のとき $x=-4,\ 1,\ 3$，$k=-12$ のとき $x=4,\ -1,\ -3$ を整数解としてもつ。

コメント

$k\geqq 0$ のとき，最大の整数解の候補が 1 つだけでしたので，場合分けは不要でした。

問　題

a は実数とし，$f(x)=x^3+ax^2-8a^2x$，$g(x)=3ax^2-9a^2x$ とおく。

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する直線が存在する。このとき P の座標を a で表せ。

(2)　次の条件(i)および(ii)を満たす直線 l が 3 本存在するような点 $(u,\ v)$ の範囲を図示せよ。

(i)　l は点 $(u,\ v)$ を通る。

(ii)　l は曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の共有点 P において両方の曲線と接する。

[2004]

解答例

(1)　曲線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の接点 P の x 座標を $x=t$ とおくと，

$$f(t)=g(t)\cdots\cdots\cdots①,\quad f'(t)=g'(t)\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$t^3+at^2-8a^2t=3at^2-9a^2t$，$t^3-2at^2+a^2t=0$

すると，$t(t-a)^2=0$ から，$t=0,\ a\cdots\cdots\cdots③$

②より，$3t^2+2at-8a^2=6at-9a^2$，$3t^2-4at+a^2=0$

すると，$(3t-a)(t-a)=0$ から，$t=\dfrac{a}{3},\ a\cdots\cdots\cdots④$

(i)　$t=a$ のとき　③④をともに満たす。

(ii)　$t\neq a$ のとき　③より $t=0$，④より $t=\dfrac{a}{3}$ で $a=0$ となるが，$t\neq a$ に反する。

(i)(ii)より，$t=a$ から，$\mathrm{P}(a,\ -6a^3)$ となる。

(2)　(1)より $\mathrm{P}(a,\ -6a^3)$ なので，$f'(a)=-3a^2$ から，直線 l の方程式は，

$$y+6a^3=-3a^2(x-a),\quad y=-3a^2x-3a^3$$

点 $(u,\ v)$ を通ることより，$v=-3a^2u-3a^3\cdots\cdots\cdots⑤$

直線 l が 3 本存在する条件は，⑤が異なる 3 個の実数解 a をもつことである。

さて，$h(a)=-3a^3-3ua^2$ とおくと，$h'(a)=-9a^2-6ua=-3a(3a+2u)$ より，

(i)　$0<-\dfrac{2}{3}u\ (u<0)$ のとき

$h(a)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，$0<v<-\dfrac{4}{9}u^3$ である。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$-\dfrac{2}{3}u$	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	$-\dfrac{4}{9}u^3$	$\searrow$

(ii)　$0=-\dfrac{2}{3}u\ (u=0)$ のとき

$h'(a)=-9a^2\leqq 0$ となり，$h(a)$ は単調減少するので不適である。

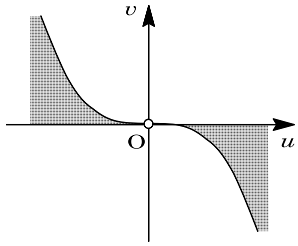
(iii) $0>-\frac{2}{3}u\ (u>0)$ のとき

$h(a)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，$-\frac{4}{9}u^3<v<0$ である。

a	$\cdots$	$-\frac{2}{3}u$	$\cdots$	0	$\cdots$
$h'(a)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(a)$	$\searrow$	$-\frac{4}{9}u^3$	$\nearrow$	0	$\searrow$

(i)(ii)(iii)より，点 $(u,\ v)$ の範囲を図示すると，右図の網点部のようになる。

ただし，境界は領域に含まない。



コメント

題意に一ひねりがありますが，接線の本数を接点の個数に言い換えるという頻出の問題です。

問　題

$f(x)=x^3-x^2-x-1$，$g(x)=x^2-x-1$とする。

(1)　方程式$f(x)=0$はただ 1 つの実数解αをもつことを示せ。また，$1<\alpha<2$ であることを示せ。

(2)　方程式$g(x)=0$の正の解をβとする。αとβの大小を比較せよ。

(3)　α^2とβ^3の大小を比較せよ。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-x^2-x-1$より，

$$f'(x)=3x^2-2x-1=(3x+1)(x-1)$$

極大値$f\left(-\frac{1}{3}\right)=-\frac{22}{27}<0$なので，右表より方程式$f(x)=0$はただ 1 つの実数解をもつ。

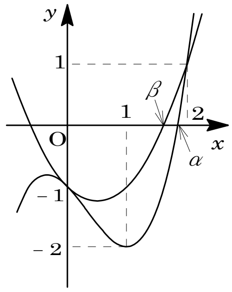
x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{22}{27}$	$\searrow$	-2	$\nearrow$

さらに，$f(1)=-2$，$f(2)=1$より，その実数解αは$1<\alpha<2$である。

(2)　$h(x)=f(x)-g(x)$とおくと，

$$h(x)=(x^3-x^2-x-1)-(x^2-x-1)$$
$$=x^3-2x^2=x^2(x-2)$$

すると, $0<x<2$において，$f(x)<g(x)$



さて，$\beta^2-\beta-1=0\ (\beta>0)$より，$\beta=\frac{1+\sqrt{5}}{2}$なので，

$$f(\beta)<g(\beta)=0$$

よって，$f(\beta)<f(\alpha)=0$から$\beta<\alpha$である。

(3)　まず，$\beta^2=\beta+1$から，

$$\beta^3=\beta(\beta+1)=\beta^2+\beta=2\beta+1=2\cdot\frac{1+\sqrt{5}}{2}+1=2+\sqrt{5}$$

すると，$1<\alpha<2$より，$\beta^3-\alpha^2=2+\sqrt{5}-\alpha^2>2+\sqrt{5}-4=\sqrt{5}-2>0$

よって，$\beta^3>\alpha^2$

コメント

βの値が具体的にわかるため，それを利用すると，方針が立てやすくなります。

問　題

c を正の定数とし，$f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ とする。直線 l は点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$ で曲線 $y=f(x)$ と接し，点 $\mathrm{Q}(q,\ g(q))$ で曲線 $y=g(x)$ と接する。

(1) c を p で表せ。

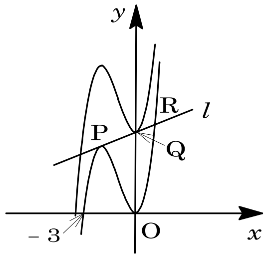
(2) 直線 l と曲線 $y=f(x)$ の P 以外の交点を R とする。2 つの線分の長さの比 $\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}$ を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $f(x)=x^3+3x^2$，$g(x)=x^3+3x^2+c$ より，$f'(x)=g'(x)=3x^2+6x$

点 P における接線は,

$$y=(3p^2+6p)(x-p)+p^3+3p^2$$
$$=(3p^2+6p)x-2p^3-3p^2\cdots\cdots\cdots①$$



点 Q における接線は,

$$y=(3q^2+6q)(x-q)+q^3+3q^2+c$$
$$=(3q^2+6q)x-2q^3-3q^2+c\cdots\cdots\cdots②$$

①と②が一致することより,

$$3p^2+6p=3q^2+6q\cdots\cdots③,\ \ -2p^3-3p^2=-2q^3-3q^2+c\cdots\cdots④$$

③より，$p^2-q^2+2(p-q)=0$，$(p-q)(p+q+2)=0$

$p=q$ とすると，④より $c=0$ となり，$c>0$ に反する。

よって，$p+q+2=0$，$q=-p-2\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$c=2q^3+3q^2-2p^3-3p^2=2(-p-2)^3+3(-p-2)^2-2p^3-3p^2$

$$=-4p^3-12p^2-12p-4=-4(p+1)^3\cdots\cdots\cdots⑥$$

(2) $y=f(x)$ と①を連立すると，$x^3+3x^2=(3p^2+6p)x-2p^3-3p^2$

$$x^3+3x^2-(3p^2+6p)x+2p^3+3p^2=0,\ \ (x-p)^2(x+2p+3)=0$$

$x\neq p$ より，点 R の x 座標は，$x=-2p-3$

ここで，⑥より $c>0$ なので，$p<-1$ となり，$p<-p-2<-2p-3$

以上より，$\mathrm{PQ}:\mathrm{QR}=(-p-2-p):(-2p-3+p+2)$

$$=(-2p-2):(-p-1)=2:1$$

コメント

2 つの 3 次曲線の共通接線を題材にした頻出題です。正確な計算がすべてです。

問　題

(1)　曲線 $y = x^3$ と直線 $y = 3x + a$ が異なる 3 点で交わるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)の範囲を動くとき, 3 つの交点を A, B, C とし, 点$(a,\ 4a)$ を D とする。3 つの線分の長さの積 $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$y = x^3$ ……①, $y = 3x + a$ ……②とし, ①②より, $x^3 - 3x = a$ ………③

①と②が異なる 3 点で交わる条件は, 曲線 $y = x^3 - 3x$ と直線 $y = a$ が異なる 3 点で交わる条件と同値である。

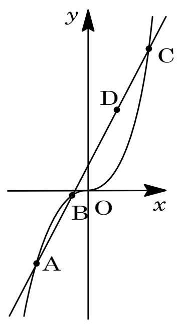
ここで, $f(x) = x^3 - 3x$ とおくと,

$$f'(x) = 3x^2 - 3 = 3(x+1)(x-1)$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

右表より, 求める条件は $-2 < a < 2$

(2)　③の解を $x = \alpha,\ \beta,\ \gamma$ （$\alpha < \beta < \gamma$）として, $\mathrm{A}(\alpha,\ 3\alpha + a)$, $\mathrm{B}(\beta,\ 3\beta + a)$, $\mathrm{C}(\gamma,\ 3\gamma + a)$ とおく。



このとき, ③を $x^3 - 3x - a = 0$ と変形すると,

$$x^3 - 3x - a = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \text{………④}$$

このとき, $\mathrm{DA} = \sqrt{(\alpha - a)^2 + (3\alpha + a - 4a)^2}$

$$= \sqrt{10(\alpha - a)^2} = \sqrt{10}\,|\alpha - a|$$

同様にして, $\mathrm{DB} = \sqrt{10}\,|\beta - a|$, $\mathrm{DC} = \sqrt{10}\,|\gamma - a|$

$$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC} = 10\sqrt{10}\,|\alpha - a||\beta - a||\gamma - a|$$

$$= 10\sqrt{10}\,|(a-\alpha)(a-\beta)(a-\gamma)| = 10\sqrt{10}\,|a^3 - 3a - a|$$

$$= 10\sqrt{10}\,|a^3 - 4a|$$

ここで, $g(a) = a^3 - 4a$ とおくと, $g'(a) = 3a^2 - 4 = (\sqrt{3}a + 2)(\sqrt{3}a - 2)$

a	-2	$\cdots$	$-\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{2}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	2
$g'(a)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$g(a)$	0	$\nearrow$	$\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	$-\frac{16}{9}\sqrt{3}$	$\nearrow$	0

右表より, $|g(a)|$ は $a = \pm\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ のとき最大値 $\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$ をとる。

よって, $\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DB}\cdot\mathrm{DC}$ の最大値は $10\sqrt{10}\cdot\dfrac{16}{9}\sqrt{3} = \dfrac{160}{9}\sqrt{30}$ となる。

コメント

微分法の応用に関する問題です。本問のポイントは, 強いて言えば, (2)で④式に注目することです。

問　題

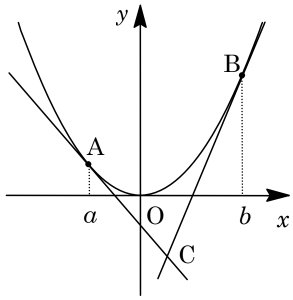
放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線 l と，点 $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線 m との交点を C とおく。ただし，$a<b$ とする。

(1) 2 直線 $l,\ m$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれる部分の面積 S を a と b で表せ。

(2) 点 C が放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ の上を動くときの面積 S の最小値を求めよ。

[1998]

解答例



(1) $l: y=m_1x+n_1$，$m: y=m_2x+n_2$ とおくと，

条件より，

$x^2-(m_1x+n_1)=(x-a)^2$ ………①

$x^2-(m_2x+n_2)=(x-b)^2$ ………②

l と m の交点 C の x 座標は,

$m_1x+n_1=m_2x+n_2$

①②を代入して，$x^2-(x-a)^2=x^2-(x-b)^2$

よって，$x-a=-(x-b)$ より，$x=\dfrac{a+b}{2}$

$$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^{\frac{a+b}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-b)^3\Big]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

(2) 点 C の y 座標は，①より $\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\left(\dfrac{a+b}{2}-a\right)^2=ab$ となり，$\mathrm{C}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$

条件より，点 C は放物線 $y=\dfrac{1}{2}x^2-x-2$ 上にあるので,

$ab=-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2-\dfrac{a+b}{2}-2$，すなわち $8ab=(a+b)^2-4(a+b)-16$ ………③

ここで，$b-a=k\ \ (k>0)$ とおき，$b=a+k$ として③に代入する。

$8a(a+k)=(2a+k)^2-4(2a+k)-16$

$4a^2+4(k+2)a-(k^2-4k-16)=0$

a が実数より，$D/4=4(k+2)^2+4(k^2-4k-16)\geqq 0$ から，$k^2-6\geqq 0$

$k>0$ なので，$k\geqq\sqrt{6}$

(1)から, S の最小値は $\dfrac{1}{12}\left(\sqrt{6}\right)^3$,すなわち $\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ となる。

コメント

(1)では, 2 本の接線の交点の x 座標が 2 つの接点の x 座標の相加平均になることを一般的に示しました。また, (2)は対称式に着目する解法もあります。

問　題

正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $|ax+by| \leqq 1$，$|cx-by| \leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。　[2017]

解答例

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$ に対し，$|ax+by| \leqq 1$ ……①より，

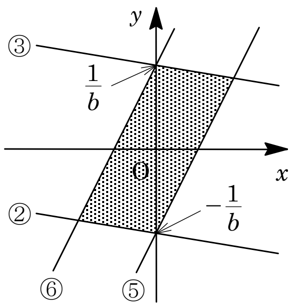
$$-1 \leqq ax+by \leqq 1,\quad -\frac{a}{b}x-\frac{1}{b} \leqq y \leqq -\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=-\dfrac{a}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……②，$y=-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……③

また，$|cx-by| \leqq 1$ ……④より，

$$-1 \leqq cx-by \leqq 1,\quad \frac{c}{b}x-\frac{1}{b} \leqq y \leqq \frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ ……⑤，$y=\dfrac{c}{b}x+\dfrac{1}{b}$ ……⑥



①かつ④の表す領域 D は，直線②と③，および直線⑤と⑥が，平行で，しかも原点対称であることより，右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして，直線③と⑤を連立すると，$-\dfrac{a}{b}x+\dfrac{1}{b}=\dfrac{c}{b}x-\dfrac{1}{b}$ より，

$$(a+c)x=2,\quad x=\frac{2}{a+c}$$

よって，領域 D の面積を S とおくと，対称性より，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{a+c}\right)=\frac{4}{b(a+c)}=\frac{4}{b(1-b)}=\frac{4}{-b^2+b}$$

ここで，$f(b)=-b^2+b$ とおくと，$f(b)=-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$ より，$0<b<1$ において，

$$0<f(b) \leqq \frac{1}{4}\quad\left(\text{等号は } b=\frac{1}{2} \text{ のとき成立}\right)$$

したがって，S は $b=\dfrac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

コメント

領域についての問題です。ただ，平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり，また面積が 1 文字で表せたり，かなり解きやすい設定になっています。

問　題

座標平面上の原点を O とする。点 $A(a,\ 0)$，点 $B(0,\ b)$ および点 C が，$OC=1$，$AB=BC=CA$ を満たしながら動く。

(1) $s=a^2+b^2$，$t=ab$ とする。s と t の関係を表す等式を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の面積のとりうる値の範囲を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $C(p,\ q)$ とおくと，$OC=1$ から，$p^2+q^2=1$ ………①

また，$A(a,\ 0)$，$B(0,\ b)$ に対し，$AB=BC=CA$ より，

$$a^2+b^2=p^2+(q-b)^2\ \cdots\cdots\cdots②,\quad a^2+b^2=(p-a)^2+q^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$a^2=1-2bq$ となり，$b\neq 0$ のとき $q=\dfrac{1-a^2}{2b}$ ………④

①③より，$b^2=1-2ap$ となり，$a\neq 0$ のとき $p=\dfrac{1-b^2}{2a}$ ………⑤

④⑤を①に代入すると，$\dfrac{(1-b^2)^2}{4a^2}+\dfrac{(1-a^2)^2}{4b^2}=1$ となり，

$$b^2(1-b^2)^2+a^2(1-a^2)^2=4a^2b^2\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

なお，$b=0$ のときは $a=\pm1$，$a=0$ のときは $b=\pm1$ となるが，この場合も⑥はともに成立し，左辺を展開すると，

$$a^6+b^6-2(a^4+b^4)+a^2+b^2=4a^2b^2$$

ここで，$s=a^2+b^2$，$t=ab$ とすると，

$$s^3-3t^2s-2(s^2-2t^2)+s=4t^2,\quad s(s^2-3t^2-2s+1)=0$$

$s=0$ のとき $a=b=0$，そして②から $p=q=0$ となり不適なので，$s\neq 0$ から，

$$s^2-3t^2-2s+1=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(2) $\triangle ABC$ は正三角形なので，その面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\left(\sqrt{a^2+b^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}s\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

さて，⑦より $(s-1)^2-3t^2=0$ から，$s=1\pm\sqrt{3}t$ ………⑨

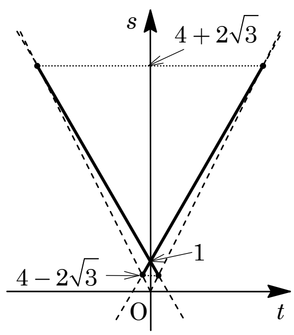
また，$s=(a+b)^2-2ab$ から，$(a+b)^2=s+2t$ となり，$s+2t\geqq 0$ ……⑩で，

$$a+b=\pm\sqrt{s+2t}$$

すると，a，b は，2 次方程式 $x^2\mp\sqrt{s+2t}\,x+t=0$ の 2 つの解となり，

$$D=(s+2t)-4t=s-2t\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

⑨かつ⑩かつ⑪を ts 平面上に図示すると，右図の実線部となる。



これより，$4-2\sqrt{3} \leqq s \leqq 4+2\sqrt{3}$ となり，⑧から，

$$\frac{\sqrt{3}}{4}(4-2\sqrt{3}) \leqq S \leqq \frac{\sqrt{3}}{4}(4+2\sqrt{3}),\ \ \sqrt{3}-\frac{3}{2} \leqq S \leqq \sqrt{3}+\frac{3}{2}$$

コメント

(2)では図をかいて s の範囲を求めましたが，⑨より t を消去しても可能です。

問　題

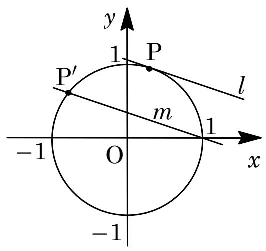
円 $C: x^2+y^2=1$ 上の点 P における接線を l とする。点 $(1,\ 0)$ を通り l と平行な直線を m とする。直線 m と円 C の $(1,\ 0)$ 以外の共有点を P' とする。ただし, m が直線 $x=1$ のときは P' を $(1,\ 0)$ とする。円 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ から点 $\mathrm{P}'(s',\ t')$ を得る上記の操作を T と呼ぶ。

(1)　s', t' をそれぞれ s と t の多項式として表せ。

(2)　点 P に操作 T を n 回繰り返して得られる点を P_n とおく。P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき, P_1, P_2, P_3 を図示せよ。

(3)　正の整数 n について, $\mathrm{P}_n=\mathrm{P}$ となるような点 P の個数を求めよ。　　[2014]

解答例



(1)　円 $x^2+y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ における接線 l と平行で, 点 $(1,\ 0)$ を通る直線 m の方程式は, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(s,\ t)$ より,

$$s(x-1)+ty=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで, $t\neq 0$ のときは, ②より $y=-\dfrac{s}{t}(x-1)$ となり, ①に代入すると,

$$x^2+\frac{s^2}{t^2}(x-1)^2=1,\quad t^2(x^2-1)+s^2(x-1)^2=0$$

$$(x-1)\{(s^2+t^2)x-(s^2-t^2)\}=0$$

$x\neq 1$ のとき, $x=\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}$ となり, $y=-\dfrac{s}{t}\left(\dfrac{s^2-t^2}{s^2+t^2}-1\right)=\dfrac{2st}{s^2+t^2}$

すると, $s^2+t^2=1$ から, $x=s^2-t^2$, $y=2st$ となり, $\mathrm{P}'(s',\ t')$ は,

$$s'=s^2-t^2,\quad t'=2st \cdots\cdots\cdots ③$$

なお, $t=0$ のときは $s=\pm 1$ から, $(s',\ t')=(1,\ 0)$ となり条件を満たす。

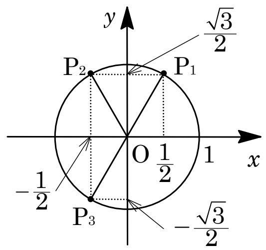
(2)　まず, $s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$ とおくと, ③より,

$$s'=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta,\quad t'=2\cos\theta\sin\theta=\sin 2\theta$$

点 P が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)=\left(\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき,

$$\mathrm{P}_1\left(\cos\frac{\pi}{3},\ \sin\frac{\pi}{3}\right),\quad \mathrm{P}_2\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)$$

$$\mathrm{P}_3\left(\cos\frac{4}{3}\pi,\ \sin\frac{4}{3}\pi\right)$$



よって, P_1, P_2, P_3 を図示すると, 右図のようになる。

(3)　$0 \leqq \theta < 2\pi$ として，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，(2)から $\mathrm{P}_1(\cos 2\theta,\ \sin 2\theta)$ となり，さらに $\mathrm{P}_2(\cos 4\theta,\ \sin 4\theta)$，$\mathrm{P}_3(\cos 8\theta,\ \sin 8\theta)$ から，帰納的に $\mathrm{P}_n(\cos 2^n\theta,\ \sin 2^n\theta)$ と表すことができる。

ここで，$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}$ のとき，k を整数として，$2^n\theta = \theta + 2k\pi$ なので，

$$(2^n - 1)\theta = 2k\pi\ ,\quad \theta = \frac{2k\pi}{2^n - 1}$$

すると，$0 \leqq \dfrac{2k\pi}{2^n - 1} < 2\pi$ より，$0 \leqq 2k\pi < 2\pi(2^n - 1)$，$0 \leqq k < 2^n - 1$

よって，$k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 2^n - 2$ から，$\mathrm{P}_n = \mathrm{P}$ となる点 P は $2^n - 1$ 個ある。

コメント

図形的な条件を三角関数の列へとつなぐ問題です。(3)は題意が把握しにくいので，$n = 1,\ 2,\ \cdots$ と具体例を考え，方針を立てました。

問　題

定数 $a,\ b,\ c,\ d$ に対して，平面上の点 $(p,\ q)$ を点 $(ap+bq,\ cp+dq)$ に移す操作を考える。ただし，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$ である。k を 0 でない定数とする。放物線 $C: y=x^2-x+k$ 上のすべての点は，この操作によって C 上に移る。

(1) a, b, c, d を求めよ。

(2) C 上の点 A における C の接線と，点 A をこの操作によって移した点 A$'$ における C の接線は，原点で直交する。このときの k の値および点 A の座標をすべて求めよ。

[2012]

解答例

(1) $C: y=x^2-x+k$ 上の任意の点 $(t,\ t^2-t+k)$ は，条件で与えられた操作によって，$(at+b(t^2-t+k),\ ct+d(t^2-t+k))$ に移る。この点が C 上にあることより，

$$ct+d(t^2-t+k)=\left\{at+b(t^2-t+k)\right\}^2-\left\{at+b(t^2-t+k)\right\}+k\ \cdots\cdots\cdots①$$

任意の t に対して①が成立するので，両辺の t^4 の係数を比べると $b=0$ が必要となる。これを①に代入して整理すると，

$$dt^2+(c-d)t+dk=a^2t^2-at+k\ \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，任意の t に対して②が成立するので，

$$d=a^2\ \cdots\cdots\cdots③,\quad c-d=-a\ \cdots\cdots\cdots④,\quad dk=k\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

$k\neq0$ なので，⑤より $d=1$ となり，③から $a=\pm1$

$a=1$ のとき，④から $c=0$ となるが，$(a,\ b,\ c,\ d)\neq(1,\ 0,\ 0,\ 1)$ より不適である。また，$a=-1$ のとき，④から $c=2$ となる。

以上より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(-1,\ 0,\ 2,\ 1)$

(2) 点 $\mathrm{A}(p,\ p^2-p+k)$ とおくと，(1)から，$\mathrm{A}'(-p,\ p^2+p+k)$ となる。

ここで，$y=x^2-x+k$ に対し，$y'=2x-1$ となるので，点 A における接線は，

$$y-(p^2-p+k)=(2p-1)(x-p),\quad y=(2p-1)x-p^2+k\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

また，点 A$'$ における接線は，

$$y-(p^2+p+k)=(-2p-1)(x+p),\quad y=-(2p+1)x-p^2+k\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

直線⑥と⑦が原点で直交することより，

$$-p^2+k=0\ \cdots\cdots\cdots⑧,\quad -(2p-1)(2p+1)=-1\ \cdots\cdots\cdots⑨$$

⑨より，$4p^2-1=1$ から $p=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，⑧より $k=\dfrac{1}{2}$

すると，点 A の y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}+\dfrac{1}{2}=1\mp\dfrac{1}{\sqrt{2}}$（複号同順）となり，

$$\mathrm{A}\left(\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\quad \mathrm{A}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}},\ 1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

コメント

1 次変換の問題ですが，その知識は必要ではありません。なお，①は複雑なので，いったん必要条件を求めて整理しています。

問　題

p, q を実数とする。放物線 $y=x^2-2px+q$ が，中心 $(p,\ 2q)$ で半径 1 の円と中心 $(p,\ p)$ で半径 1 の円の両方と共有点をもつ。この放物線の頂点が存在しうる領域を xy 平面上に図示せよ。 [2009]

解答例

まず，与えられた放物線 $y=x^2-2px+q$ を変形すると，

$$y=(x-p)^2-p^2+q \cdots\cdots\cdots①$$

また，中心が $(p,\ 2q)$ で，半径が 1 の円の方程式は，

$$(x-p)^2+(y-2q)^2=1 \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$y+p^2-q+(y-2q)^2=1$

$$y^2-(4q-1)y+p^2+4q^2-q-1=0 \cdots\cdots\cdots③$$

①②が共有点をもつ条件は，$D=(4q-1)^2-4(p^2+4q^2-q-1)\geqq 0$

$$-4q-4p^2+5\geqq 0,\ \ p^2+q\leqq\frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots④$$

③の解がともに $y<-p^2+q$ にある条件は，④に加えて，

$$\frac{4q-1}{2}<-p^2+q,\ \ p^2+q<\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots⑤$$

$$(-p^2+q)+p^2-q+(-p^2+q-2q)^2-1>0,\ (p^2+q)^2>1 \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥をまとめると，$p^2+q<-1$ となる。

すると，③の少なくとも 1 つの解が $y\geqq -p^2+q$ である条件は，

$$-1\leqq p^2+q\leqq\frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots⑦$$

同様にして，中心が $(p,\ p)$ で，半径が 1 の円の方程式は，

$$(x-p)^2+(y-p)^2=1 \cdots\cdots\cdots⑧$$

①⑧を連立して，$y+p^2-q+(y-p)^2=1$

$$y^2-(2p-1)y+2p^2-q-1=0 \cdots\cdots\cdots⑨$$

①⑧が共有点をもつ条件は，$D=(2p-1)^2-4(2p^2-q-1)\geqq 0$

$$4q-4p^2-4p+5\geqq 0,\ \ p^2+p-q\leqq\frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots⑩$$

⑨の解がともに $y<-p^2+q$ にある条件は，⑩に加えて，

$$\frac{2p-1}{2}<-p^2+q,\ \ p^2+p-q<\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots⑪$$

$$(-p^2+q)+p^2-q+(-p^2+q-p)^2-1>0,\ (p^2+p-q)^2>1 \cdots\cdots\cdots⑫$$

⑩⑪⑫をまとめると，$p^2+p-q<-1$ となる。

すると，⑨の少なくとも 1 つの解が $y \geqq -p^2+q$ である条件は,

$$-1 \leqq p^2+p-q \leqq \frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots ⑬$$

さて，放物線①の頂点を $(x,\ y)$ とおくと，①より，$x=p$，$y=-p^2+q$ となり，

$$p=x,\ q=y+x^2 \cdots\cdots\cdots ⑭$$

⑦⑭より，$-1 \leqq y+2x^2 \leqq \frac{5}{4}$ となり，

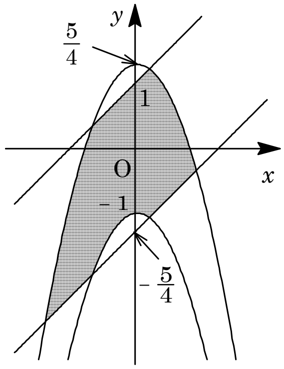
$$-2x^2-1 \leqq y \leqq -2x^2+\frac{5}{4} \cdots\cdots\cdots ⑮$$

⑬⑭より，$-1 \leqq x-y \leqq \frac{5}{4}$ となり，

$$x-\frac{5}{4} \leqq y \leqq x+1 \cdots\cdots\cdots ⑯$$

⑮⑯をまとめて図示すると，放物線①の頂点が存在しうる領域は，右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含まれる。



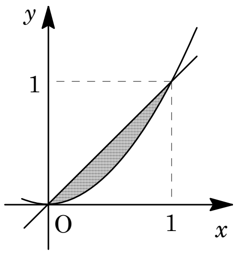
コメント

放物線と円の方程式の中にある $(x-p)^2$ に注目した解法で，最初に考えたものです。置換えをすれば, 2 回同じ計算をすることもなかったのですが。

問　題

a を正の実数とする。点 $(x,\ y)$ が，不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ の定める領域を動くとき，つねに $\frac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ となる。a の値の範囲を求めよ。 [2008]

解答例



不等式 $x^2 \leqq y \leqq x$ ……①の定める領域は右図の網点部である。

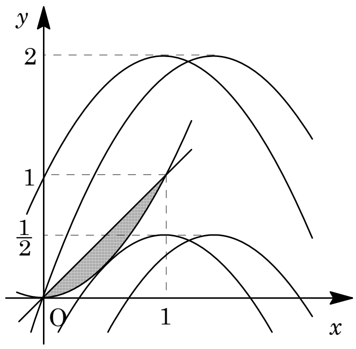
さて，$\frac{1}{2} \leqq (x-a)^2 + y \leqq 2$ より，

$$-(x-a)^2 + \frac{1}{2} \leqq y \leqq -(x-a)^2 + 2 \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，②で表される領域は，$y = -(x-a)^2 + \frac{1}{2}$ ……③と $y = -(x-a)^2 + 2$ ……④のグラフに挟まれた領域である。

ここで，③と $y = x^2$ を連立して，

$$x^2 = -(x-a)^2 + \frac{1}{2},\ \ 2x^2 - 2ax + a^2 - \frac{1}{2} = 0$$



すると，③のグラフが $y = x^2$ に接するのは，

$$D/4 = a^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{2}\right) = 0$$

$a > 0$ から，$a = 1$ となる。

また，④のグラフが原点を通るのは，

$$0 = -a^2 + 2$$

$a > 0$ から，$a = \sqrt{2}$ となる。

よって，領域①が領域②に含まれる a の値の範囲は，

$$1 \leqq a \leqq \sqrt{2}$$

コメント

図を見ながら必要な計算をしていきます。ただ，2 つの放物線の頂点の y 座標はそれぞれ固定されており，しかも x 座標は等しくなっています。このため，a の値の変化に伴う 2 つの放物線の動きは，複雑ではありません。

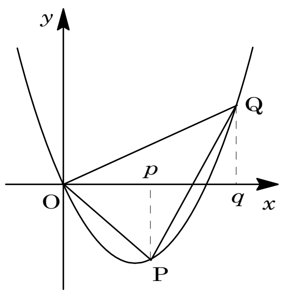
問　題

放物線 $y = ax^2 + bx\ (a > 0)$ を C とする。C 上に異なる 2 点 P, Q をとり，その x 座標をそれぞれ $p,\ q\ (0 < p < q)$ とする。

(1) 線分 OQ と C で囲まれた部分の面積が，△OPQ の面積の $\dfrac{3}{2}$ 倍であるとき，p と q の関係を求めよ。ただし, O は原点を表す。

(2) Q を固定して P を動かす。△OPQ の面積が最大となるときの p を q で表せ。また，そのときの△OPQ の面積と，線分 OQ と C で囲まれた部分の面積との比を求めよ。 [2007]

解答例



(1) 線分 OQ と放物線 $C : y = ax^2 + bx$ で囲まれた部分の面積を S とおく。また, OQ の傾きを m とすると, OQ と C との交点が $x = 0,\ q$ より,

$$S = \int_0^q (mx - ax^2 - bx)\,dx = \int_0^q -ax(x-q)\,dx$$
$$= \frac{a}{6}q^3$$

ここで，$\mathrm{P}(p,\ ap^2 + bp)$，$\mathrm{Q}(q,\ aq^2 + bq)$ より，

$$\triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\left| p(aq^2 + bq) - q(ap^2 + bp)\right|$$
$$= \frac{1}{2}\left| apq(q-p)\right| = \frac{1}{2}apq(q-p)$$

条件より，$S = \dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{OPQ}$ なので，$\dfrac{a}{6}q^3 = \dfrac{3}{2}\cdot\dfrac{1}{2}apq(q-p)$

$$2q^2 - 9pq + 9p^2 = 0,\ (2q-3p)(q-3p) = 0$$

よって，$q = \dfrac{3}{2}p$ または $q = 3p$

(2) (1)より，$\triangle\mathrm{OPQ} = \dfrac{1}{2}aq(qp - p^2) = -\dfrac{1}{2}aq\left(p - \dfrac{q}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{8}aq^3$

よって，$p = \dfrac{q}{2}$ のとき，△OPQ の面積は最大となり，その値は $\dfrac{1}{8}aq^3$ である。

このとき，$\triangle\mathrm{OPQ} : S = \dfrac{1}{8}aq^3 : \dfrac{1}{6}aq^3 = 3 : 4$ となる。

コメント

b の符号にかかわらず，放物線は下に凸なので，場合分けは必要ありませんでした。(2)では，(1)を誘導とし，平方完成を用いて最大値を求めました。図形的に，P における接線が OQ に平行な場合として，結論を導くこともできます。

問　題

a, b を正の定数とする。関数 $y=x^3-ax$ のグラフと，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線はちょうど 2 点 P, Q を共有している。ただし, P の x 座標は負, Q の x 座標は正である。

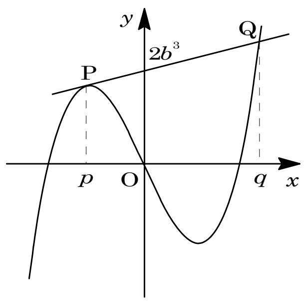
(1) 直線 PQ の方程式を a と b で表せ。

(2) P および Q の座標を a と b で表せ。

(3) $\angle\mathrm{POQ}=90°$ となる b が存在するような a の値の範囲を求めよ。ただし, O は原点である。 [2006]

解答例

(1) 曲線 $y=x^3-ax$ ……①上の点 P, Q の x 座標をそれぞれ p, q $(p<0<q)$ とし，点 $(0,\ 2b^3)$ を通る直線を $y=mx+2b^3$ ……②とおく。



また, 条件より, 点 P, Q の一方は①と②の接点, 他方は交点である。

(i) 点 P が交点, 点 Q が接点のとき

$x^3-ax-(mx+2b^3)=0$ は解 $x=p$ と重解 $x=q$ をもつことより,

$$x^3-ax-(mx+2b^3)=(x-p)(x-q)^2$$

定数項を比べると, $-2b^3=-pq^2$ となり, $b>0$, $p<0<q$ に反する。

(ii) 点 P が接点, 点 Q が交点のとき

$x^3-ax-(mx+2b^3)=0$ は重解 $x=p$ と解 $x=q$ をもつことより,

$$x^3-ax-(mx+2b^3)=(x-p)^2(x-q)$$

係数を比べると,

$$0=2p+q\ \cdots\cdots\cdots③,\quad -a-m=p^2+2pq\ \cdots\cdots\cdots④,\quad -2b^3=-p^2q\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

③から $q=-2p$ を④, ⑤に代入すると,

$$m=-a+3p^2\ \cdots\cdots\cdots⑥,\quad p=-b\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より $m=-a+3b^2$ となり, 直線 PQ の方程式は, ②より,

$$y=(-a+3b^2)x+2b^3$$

(2) ①⑦より $\mathrm{P}(-b,\ -b^3+ab)$, ③から $q=2b$ なので $\mathrm{Q}(2b,\ 8b^3-2ab)$ となる。

(3) (2)より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(-b,\ -b^3+ab)$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(2b,\ 8b^3-2ab)$ である。

条件から $\angle\mathrm{POQ}=90°$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ となり,

$$-2b^2+(-b^3+ab)(8b^3-2ab)=0$$

$b>0$ を用いてまとめると, $4b^4-5ab^2+a^2+1=0$

ここで, $t=b^2>0$ とおくと, $4t^2-5at+a^2+1=0\ \cdots\cdots\cdots⑧$

すると，求める条件は，⑧が $t>0$ の解をもつ a の範囲となる。

$a>0$ から，$\dfrac{5a}{4}>0$，$\dfrac{a^2+1}{4}>0$ に注意すると，

$$D=25a^2-16(a^2+1)=(3a+4)(3a-4)\geqq 0$$

よって，$a\geqq\dfrac{4}{3}$ である。

コメント

重解条件を利用して解きました。標準的で落とせない問題です。

問　題

原点を中心とする半径 1 の円を C とし，$0<a<1$，$b>1$ とする。$\mathrm{A}(a,\ 0)$と$\mathrm{N}(0,\ 1)$を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを P とおく。また，$\mathrm{B}(b,\ 0)$と N を通る直線が C と交わる点のうち N と異なるものを Q とおく。

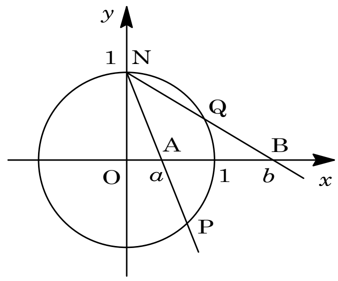
(1) P の座標を a で表せ。

(2) $\mathrm{AQ}\,/\!/\,\mathrm{PB}$ のとき，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となることを示せ。

(3) $\mathrm{AQ}\,/\!/\,\mathrm{PB}$，$\angle\mathrm{ANB}=45^\circ$ のとき，a の値を求めよ。　[2005]

解答例

(1) 直線 NA の方程式は，$y=-\dfrac{1}{a}x+1$



円$C: x^2+y^2=1$との交点は，

$$x^2+\left(-\frac{1}{a}x+1\right)^2=1,\ (a^2+1)x^2-2ax=0$$

$x\neq 0$ より，$x=\dfrac{2a}{a^2+1}$

$$y=-\frac{1}{a}\cdot\frac{2a}{a^2+1}+1=\frac{a^2-1}{a^2+1}$$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{a^2+1},\ \dfrac{a^2-1}{a^2+1}\right)$となる。

(2) (1)と同様にして，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{2b}{b^2+1},\ \dfrac{b^2-1}{b^2+1}\right)$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\left(\frac{2b}{b^2+1}-a,\ \frac{b^2-1}{b^2+1}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{BP}}=\left(\frac{2a}{a^2+1}-b,\ \frac{a^2-1}{a^2+1}\right)$$

$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ より，$\dfrac{a^2-1}{a^2+1}\left(\dfrac{2b}{b^2+1}-a\right)-\dfrac{b^2-1}{b^2+1}\left(\dfrac{2a}{a^2+1}-b\right)=0$

$$(a^2-1)2b-a(a^2-1)(b^2+1)-(b^2-1)2a+b(b^2-1)(a^2+1)=0$$

$$ab(a-b)+3(a-b)-a^2b^2(a-b)-(a^3-b^3)=0$$

$a\neq b$ より，$ab+3-a^2b^2-(a^2+ab+b^2)=0$，$a^2b^2+a^2+b^2=3$………①

$$(a^2+1)(b^2+1)=4,\ \sqrt{a^2+1}\sqrt{b^2+1}=2$$

よって，$\mathrm{AN}\cdot\mathrm{BN}=2$ となる。

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{NA}}=(a,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{NB}}=(b,\ -1)$，$|\overrightarrow{\mathrm{NA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{NB}}|=2$

また，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{NA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{NB}}=|\overrightarrow{\mathrm{NA}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{NB}}|\cos 45^\circ$ なので，

$$ab+1=2\times\frac{\sqrt{2}}{2},\ ab=\sqrt{2}-1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$a^2b^2+(a+b)^2-2ab=3$ から，②を代入すると，

$$(a+b)^2=3+2(\sqrt{2}-1)-(\sqrt{2}-1)^2=4\sqrt{2}-2$$

$a+b>0$ より，$a+b=\sqrt{4\sqrt{2}-2}$ ………③

②③より, a, b は，$x^2-\sqrt{4\sqrt{2}-2}\,x+(\sqrt{2}-1)=0$ の解であり, $a<b$ から，

$$a=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{4\sqrt{2}-2-4(\sqrt{2}-1)}}{2}=\frac{\sqrt{4\sqrt{2}-2}-\sqrt{2}}{2}$$

この値は $0<a<1$ を満たす。

コメント

愚直に解きましたが, a の値が，答としては，ためらうものでした。

問　題

a を定数とし, x の 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=x^2-3,\quad g(x)=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}$$

(1)　2 つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲に属する a に対して, 2 つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする。C_a の面積を a で表せ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき, 少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が 2 つの共有点をもつとき, $f(x)=g(x)$ は異なる 2 つの実数解をもつことより,

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3},\quad 3x^2-4ax+\frac{5}{3}a^2-3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式 $D/4=4a^2-3\left(\frac{5}{3}a^2-3\right)=-a^2+9>0$ から, $-3<a<3$ となる。

(2)　$-3<a<3$ のとき, ①の実数解は $x=\dfrac{2a\pm\sqrt{9-a^2}}{3}$ となる。これを $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$ とおくと, 2 つの放物線によって囲まれる図形 C_a の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta\left\{-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3}-(x^2-3)\right\}dx=-3\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{2}\left(\frac{2\sqrt{9-a^2}}{3}\right)^3=\frac{4}{27}\left(\sqrt{9-a^2}\right)^3$$

(3)　$y\leqq g(x)=-2(x-a)^2+\dfrac{a^2}{3}$ から, $y\leqq-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$

ここで, $h(a)=-\dfrac{5}{3}a^2+4xa-2x^2$ とおくと, $h(a)=-\dfrac{5}{3}\left(a-\dfrac{6}{5}x\right)^2+\dfrac{2}{5}x^2$

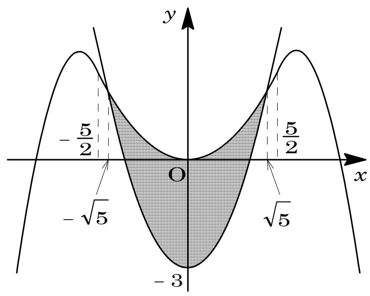
さて, $-3<a<3$ のとき, x を固定して, 領域 $y\leqq g(x)$, すなわち $y\leqq h(a)$ の動く平面上の部分を考える。

(i)　$\dfrac{6}{5}x\leqq-3\left(x\leqq-\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(-3)=-15-12x-2x^2$

(ii)　$-3<\dfrac{6}{5}x<3\left(-\dfrac{5}{2}<x<\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y\leqq h\left(\dfrac{6}{5}x\right)=\dfrac{2}{5}x^2$

(iii)　$\dfrac{6}{5}x\geqq3\left(x\geqq\dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$y<h(3)=-15+12x-2x^2$

(i)～(iii)の部分と，領域 $y \geqq f(x)$ を合わせると，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形が得られ，図示すると右図の網点部となる。



この面積は,

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left\{ \frac{2}{5}x^2 - (x^2 - 3) \right\} dx$$

$$= -\frac{3}{5}\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} (x+\sqrt{5})(x-\sqrt{5})\,dx$$

$$= -\frac{3}{5}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\sqrt{5}+\sqrt{5})^3 = 4\sqrt{5}$$

コメント

(3)では，領域の動く部分を，x の値を固定して，y のとり得る値の範囲として求めました。そこまで，やることはなかったのですが。

問　題

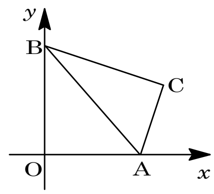
$a,\ b,\ c$ は 0 以上の実数とする。3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(1,\ c)$ は，$\angle\mathrm{ABC}=30^\circ$，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ を満たす。

(1) c を求めよ。

(2) AB の長さの最大値と最小値を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $\angle\mathrm{ACB}=180^\circ-30^\circ-60^\circ=90^\circ$ より，



$$\frac{\mathrm{AB}}{2}=\mathrm{AC}=\frac{\mathrm{BC}}{\sqrt{3}},\ \ \frac{\mathrm{AB}^2}{4}=\mathrm{AC}^2=\frac{\mathrm{BC}^2}{3}$$

すると，$\dfrac{a^2+b^2}{4}=(a-1)^2+c^2=\dfrac{1+(b-c)^2}{3}$

$$a^2+b^2=4\{(a-1)^2+c^2\}\cdots\cdots①$$

$$3(a^2+b^2)=4\{1+(b-c)^2\}\cdots\cdots②$$

①より，$3a^2-b^2+4c^2-8a+4=0\cdots\cdots\cdots③$

②より，$3a^2-b^2-4c^2+8bc-4=0\cdots\cdots\cdots④$

③－④より，$c^2-bc-a+1=0$，$a=c^2-bc+1\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤を④に代入して，$3(c^2-bc+1)^2-b^2-4c^2+8bc-4=0$

$$3c^4+3b^2c^2-6bc^3+2bc+2c^2-b^2-1=0$$

$$(3c^2-1)b^2-2c(3c^2-1)b+(3c^2-1)(c^2+1)=0$$

$$(3c^2-1)(b^2-2cb+c^2+1)=0,\ (3c^2-1)\{(b-c)^2+1\}=0$$

$(b-c)^2+1>0$，$c\geqq 0$ より，$c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2) $c=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ を①に代入して，$a^2+b^2=4\left\{(a-1)^2+\dfrac{1}{3}\right\}$

ここで，⑤より，$a=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{\sqrt{3}}b+1$，$b=\sqrt{3}\left(\dfrac{4}{3}-a\right)$ であり，$a\geqq 0,\ b\geqq 0$ より，$0\leqq a\leqq\dfrac{4}{3}$ となるので，$\dfrac{4}{3}\leqq a^2+b^2\leqq\dfrac{16}{3}$

以上より，AB の長さの最大値は $\sqrt{\dfrac{16}{3}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$，最小値は $\sqrt{\dfrac{4}{3}}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ である。

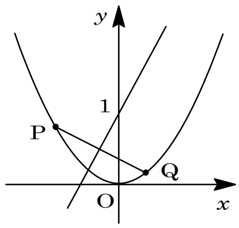
コメント

前問に続き，本問も複素数と考えましたが，同じ手段というのも気持ちが悪いので，座標計算だけで処理してみました。なお，設問から推測できるように，③かつ④だけで c の値がうまく求まります。

問　題

放物線 $y=x^2$ 上に，直線 $y=ax+1$ に関して対称な位置にある異なる 2 点 P, Q が存在するような a の範囲を求めよ。　[2001]

解答例



$p\neq q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，線分 PQ と直線 $y=ax+1$ が直交することより，

$$\frac{p^2-q^2}{p-q}\cdot a=-1\,,\ \ p+q=-\frac{1}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

また，PQ の中点 $\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$ が，直線 $y=ax+1$ 上にあることより，

$$\frac{p^2+q^2}{2}=a\cdot\frac{p+q}{2}+1\,,\ \ p^2+q^2=a(p+q)+2\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，$p^2+q^2=1\cdots\cdots\cdots③$

①③を満たす異なる $p,\ q$ が存在する条件は，直線①と円③が 2 つの共有点を持つ条件に等しいので，

$$\frac{\left|\frac{1}{a}\right|}{\sqrt{1+1}}<1\,,\ \ 1<\sqrt{2}\,|a|$$

よって，$a<-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<a$

コメント

線対称移動を題材にした問題です。後半の a の範囲を求めるところは，図をイメージしています。

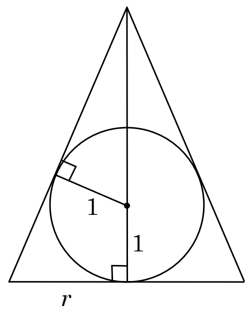
問　題

半径 1 の球が直円錐に内接している。この直円錐の底面の半径を r とし，表面積を S とする。

(1) S を r を用いて表せ。

(2) S の最小値を求めよ。 [2014]

解答例



(1) 半径 1 の球が内接している直円錐を，軸を含む平面で切断した切り口は右図のようになる。

ここで，直円錐の高さを h とおくと，

$$\frac{1}{h-1}=\frac{r}{\sqrt{h^2+r^2}},\ \ h^2+r^2=r^2(h-1)^2$$

すると，$(r^2-1)h=2r^2$ より，$h=\dfrac{2r^2}{r^2-1}$

これより，直円錐の表面積 S は，

$$S=\pi r^2+\frac{1}{2}\sqrt{h^2+r^2}\cdot 2\pi r=\pi r^2+r(h-1)\cdot\pi r=\pi r^2 h=\frac{2\pi r^4}{r^2-1}$$

(2) $r>1$ より $r^2-1>0$ となり，(1)から，

$$S=2\pi\left(r^2+1+\frac{1}{r^2-1}\right)=2\pi\left(r^2-1+\frac{1}{r^2-1}+2\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$r^2-1+\dfrac{1}{r^2-1}\geqq 2$

なお，等号は $r^2-1=\dfrac{1}{r^2-1}$，すなわち $r^2=2\ (r=\sqrt{2})$ のとき成立する。

よって，S の最小値は，$2\pi(2+2)=8\pi$ である。

コメント

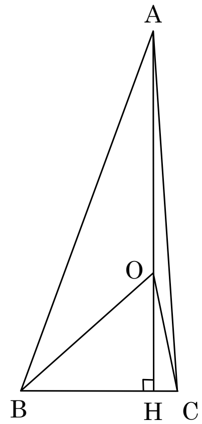
立体の基本的な問題です。(2)では分数関数が現れましたので，相加平均と相乗平均の出番です。

問　題

平面上の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=4$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積の最大値を求めよ。 [2013]

解答例

$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{OC}=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$ より，$\cos\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{3}{3\times2}=\dfrac{1}{2}$ となり，$\angle\mathrm{BOC}=60^\circ$ である。



すると，$\triangle\mathrm{OBC}=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\sin60^\circ=\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となり，

$$\mathrm{BC}^2=3^2+2^2-2\cdot3\cdot2\cos60^\circ=7,\ \ \mathrm{BC}=\sqrt{7}$$

ここで，点 O から直線 BC へ下ろした垂線の足を H とすると，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\mathrm{OH}=\frac{3}{2}\sqrt{3},\ \ \mathrm{OH}=\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}$$

以上より，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積が最大となるのは，点 A が HO の延長線上にあるときで，$\mathrm{OA}=4$ から，その値は，

$$\frac{1}{2}\cdot\sqrt{7}\cdot\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{7}}+4\right)=\frac{3}{2}\sqrt{3}+2\sqrt{7}$$

コメント

$\triangle\mathrm{OBC}$ は決定されるので，点 A が辺 BC からいちばん離れたところに位置する場合を求めればよいことになります。なお，OH の長さは勢いで求めてしまいましたが，必要ありませんでした。

問　題

点 O を中心とする半径 r の円周上に，2 点 A，B を$\angle\mathrm{AOB}<\dfrac{\pi}{2}$となるようにとり，$\theta=\angle\mathrm{AOB}$とおく。この円周上に点 C を，線分 OC が線分 AB と交わるようにとり，線分 AB 上に点 D をとる。また，点 P は線分 OA 上を，点 Q は線分 OB 上を，それぞれ動くとする。

(1)　$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$の最小値を r と θ で表せ。

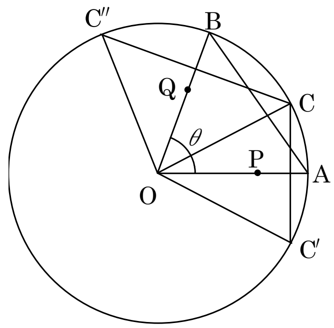
(2)　$a=\mathrm{OD}$とおく。$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$の最小値を a と θ で表せ。

(3)　さらに，点 D が線分 AB 上を動くときの$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$の最小値を r と θ で表せ。

[2011]

解答例

(1)　点 C の直線 OA，OB に関する対称点を，それぞれ C′，C″ とおくと，



$$\mathrm{OC}=\mathrm{OC'}=\mathrm{OC''}=r$$

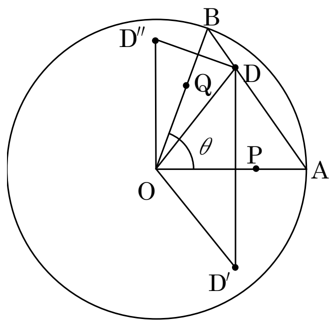
また，$\angle\mathrm{AOB}=\theta<\dfrac{\pi}{2}$から$\angle\mathrm{C'OC''}=2\theta<\pi$となり，

$$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}=\mathrm{C'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC''}\geqq\mathrm{C'C''}$$

よって，$\mathrm{CP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QC}$の最小値は，

$$\mathrm{C'C''}=2r\cdot\sin\left(\frac{1}{2}\cdot2\theta\right)=2r\sin\theta$$

(2)　点 D の直線 OA，OB に関する対称点を，それぞれ D′，D″ とおくと，



$$\mathrm{OD}=\mathrm{OD'}=\mathrm{OD''}=a$$

また，$\angle\mathrm{AOB}=\theta<\dfrac{\pi}{2}$から$\angle\mathrm{D'OD''}=2\theta<\pi$となり，

$$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}=\mathrm{D'P}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD''}\geqq\mathrm{D'D''}$$

よって，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$の最小値は，同様に，

$$\mathrm{D'D''}=2a\sin\theta$$

(3)　a の取り得る値の範囲は，$r\cos\dfrac{\theta}{2}\leqq a\leqq r$

よって，$\mathrm{DP}+\mathrm{PQ}+\mathrm{QD}$の最小値は，(2)より，$2r\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\theta$である。

コメント

折り返しを利用して最短経路を求める有名問題です。ただ，(2)は(1)の繰り返しなので，不気味な感じがします。

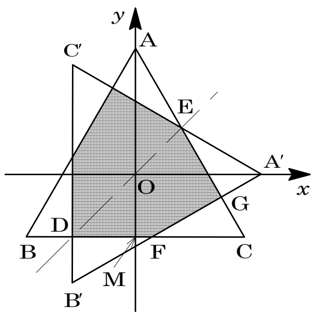
問　題

座標平面上に 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC がある。ただし，△ABC の重心は原点の位置にあり，辺 BC は x 軸と平行である。また，頂点 A は y 軸上にあって y 座標は正であり，頂点 C の x 座標は正である。直線 $y=x$ に関して 3 点 A, B, C と対称な点を，それぞれ A′，B′，C′ とする。

(1)　C′ の座標を求めよ。

(2)　△ABC と △A′B′C′ が重なる部分の面積を求めよ。　[2006]

解答例



(1)　BC の中点を M とすると，CM = 1 となり，

$$AM=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$$

OM : OA = 1 : 2 から，$OM=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

よって，$C\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$となり，直線 $y=x$ に関して対称移動すると，$C'\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 1\right)$となる。

(2)　BC と B′C′ は直線 $y=x$ に関して対称なので，その交点 D は $y=x$ 上にあり，$D\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$となる。

ここで，直線 AC は傾きが $\tan 120^\circ=-\sqrt{3}$，点 $A\left(0,\ \dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$から，その方程式は，

$$y=-\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

同様に, AC と A′C′ の交点 E も直線 $y=x$ 上にあり，その座標は，

$$x=-\sqrt{3}x+\frac{2}{3}\sqrt{3},\quad x=\frac{2\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})}=\frac{3-\sqrt{3}}{3}$$

よって，$E\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{3}\right)$となり，

$$\triangle CDE=\frac{1}{2}\left(1+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)\left(\frac{3-\sqrt{3}}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\right)=\frac{3+\sqrt{3}}{6}$$

また，直線 A′B′ は傾きが $\tan 30^\circ=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$，点 $A'\left(\dfrac{2}{3}\sqrt{3},\ 0\right)$から，その方程式は，

$$y=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\frac{2}{3}\sqrt{3}\right)$$

すると，A′B′ と BC の交点 F は，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(x-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}\right)$，$x=\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-1$

そこで, AC と A′B′ は直交することより,

$$\triangle\mathrm{CFG} = \frac{1}{2}\cdot\mathrm{CF}\cos 60^\circ\cdot\mathrm{CF}\sin 60^\circ = \frac{1}{2}\left(1-\frac{2}{3}\sqrt{3}+1\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より，求める図形は直線 $y = x$ に関して対称なので，その面積 S は,

$$S = 2(\triangle\mathrm{CDE}-\triangle\mathrm{CFG}) = 2\left(\frac{3+\sqrt{3}}{6}-\frac{2\sqrt{3}-3}{3}\right) = 3-\sqrt{3}$$

コメント

頂点や交点の座標を求め，三角形の面積へとつなぎました。計算量はやや多めです。なお，回転に注目する方法もあります。

問　題

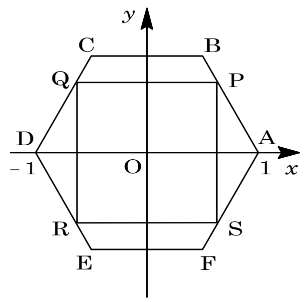
Hを1辺の長さが1の正六角形とする。

(1)　Hの中にある正方形のうち，1辺がHの1辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。

(2)　Hの中にある長方形のうち，1辺がHの1辺と平行なものの面積の最大値を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　原点を正六角形の中心とし，右図のように座標軸を設定して，両軸に平行な正方形PQRSを考える。



すると，対称性から正方形の面積が最大となるのは，頂点P, Q, R, Sが各象限に配置され，正方形の中心が原点となるときである。すると，4つの頂点は辺AB, CD, DE, FA上にあることになる。

さて，辺ABを表す直線は，$y=-\sqrt{3}(x-1)$であり，直線$y=x$との交点が，右図の頂点Pの位置なので，

$$x=-\sqrt{3}(x-1),\quad x=\frac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}=\frac{3-\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{P}\left(\dfrac{3-\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{3-\sqrt{3}}{2}\right)$となり，求める正方形の面積の最大値は，

$$\left(\frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)^2\times 4=12-6\sqrt{3}$$

(2)　(1)と同様に考えて，第1象限にある頂点Pの位置を考える。

まず，辺BC上にあるとき，長方形の面積が最大になるのは，明らかに頂点Pが六角形の頂点$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$に一致する場合である。また，点Pが辺AB上にあるとき，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq 1$として，$\mathrm{P}(t,\ -\sqrt{3}(t-1))$とおくと，長方形の面積$S$は，

$$S=-\sqrt{3}t(t-1)\times 4=-4\sqrt{3}(t^2-t)=-4\sqrt{3}\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\sqrt{3}$$

よって，$t=\dfrac{1}{2}$のとき, Sは最大値をとる。

以上より，点Pが辺BC上，辺CA上のいずれでも，点Bに一致するとき長方形の面積は最大となり，その最大値は$\sqrt{3}$である。

コメント

適当な大きさの正方形をかき，その後，選択マークをドラッグして最大の大きさのものに拡大するという手法で，解答例をかいています。

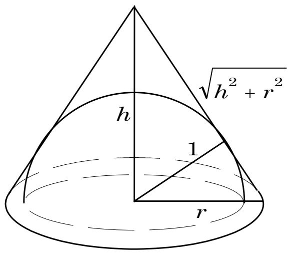
問　題

頂点が z 軸上にあり，底面が xy 平面上の原点を中心とする円である円錐がある。この円錐の側面が，原点を中心とする半径 1 の球に接している。

(1)　円錐の表面積の最小値を求めよ。

(2)　円錐の体積の最小値を求めよ。　[2002]

解答例



(1)　円錐の底面の半径を r，高さを h とすると，母線の長さは $\sqrt{h^2+r^2}$ となる。

このとき，右図の断面に注目して，

$$1 : r = h : \sqrt{h^2+r^2}\,,\quad \sqrt{h^2+r^2} = rh$$

$$h^2 + r^2 = r^2h^2\,,\quad r^2 = \frac{h^2}{h^2-1}$$

ここで，円錐の表面積を S とすると，

$$S = \pi r^2 + \frac{1}{2}\cdot 2\pi r\sqrt{h^2+r^2} = \pi r^2 + \pi r^2 h = \pi(1+h)r^2$$

$$= \pi(1+h)\cdot\frac{h^2}{h^2-1} = \pi\cdot\frac{h^2}{h-1} = \pi\cdot\frac{1}{\dfrac{1}{h}-\dfrac{1}{h^2}}$$

ここで，$\dfrac{1}{h} = t$ とおくと，$h>1$ より $0<t<1$ となり，さらに $f(t) = t - t^2$ とすると，$S = \dfrac{\pi}{f(t)}$ である。$f(t) = -\left(t-\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{4} \leqq \dfrac{1}{4}$ より $S \geqq 4\pi$ となり，S の最小値は 4π。

(2)　円錐の体積を V とすると，$V = \dfrac{1}{3}\pi r^2 h = \dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{h^3}{h^2-1} = \dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{1}{\dfrac{1}{h}-\dfrac{1}{h^3}}$

(1)と同様にして，$g(t) = t - t^3$ とおくと，$V = \dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\pi}{g(t)}$

$$g'(t) = 1 - 3t^2$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

右表より，$g(t) \leqq \dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ となる。これより，$V \geqq \dfrac{1}{3}\pi\cdot\dfrac{3\sqrt{3}}{2} = \dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ となり，V の最小値は $\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi$ である。

コメント

S の最小値は相加平均と相乗平均の関係を用いて求められましたが，V の最小値についてはうまくいきません。そこで，考え直して作ったのが上の解です。

問　題

四面体 OAPQ において，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ で，$\angle\mathrm{PAQ}=30^\circ$ である。

(1) $\triangle\mathrm{APQ}$ の面積 S を求めよ。

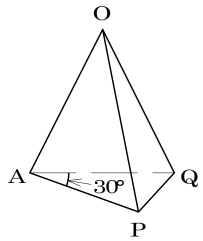
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ のとりうる範囲を求めよ。

(3) 四面体 OAPQ の体積 V の最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=p$，$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=q$ とおくと，条件より，

$$\mathrm{AP}=\sqrt{p^2+1},\ \mathrm{AQ}=\sqrt{q^2+1},\ \mathrm{PQ}=\sqrt{p^2+q^2}$$



ここで，$\triangle\mathrm{APQ}$ に余弦定理を適用して，

$$p^2+q^2=(p^2+1)+(q^2+1)-2\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\cos30^\circ$$

$$\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}=\frac{2}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$S=\frac{1}{2}\sqrt{p^2+1}\sqrt{q^2+1}\sin30^\circ=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{\sqrt{3}}{6}$

(2) ①より，$(p^2+1)(q^2+1)=\frac{4}{3}$，$q^2=\frac{4}{3(p^2+1)}-1=\frac{1-3p^2}{3(p^2+1)}\ \cdots\cdots\cdots②$

$q>0$ より $q^2>0$ なので $1-3p^2>0$ となり，$p>0$ と合わせて $0<p<\frac{1}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots③$

(3) $V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot1\cdot p\right)\cdot q=\frac{1}{6}pq$ となるので，

②より，$p^2q^2=\frac{p^2-3p^4}{3(p^2+1)}=-p^2+\frac{4}{3}+\frac{-4}{3p^2+3}=-\left(p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\right)+\frac{7}{3}$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，

$$p^2+1+\frac{4}{3p^2+3}\geqq2\sqrt{(p^2+1)\cdot\frac{4}{3p^2+3}}=2\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{4\sqrt{3}}{3}$$

等号が成立するのは，$p^2+1=\frac{4}{3p^2+3}$，$(p^2+1)^2=\frac{4}{3}$，すなわち $p^2=\frac{2}{\sqrt{3}}-1$ のときであるが，この値は③を満たので，$p^2q^2\leqq-\frac{4\sqrt{3}}{3}+\frac{7}{3}=\frac{7-4\sqrt{3}}{3}$ となり，

$$pq\leqq\sqrt{\frac{7-4\sqrt{3}}{3}}=\frac{\sqrt{7-2\sqrt{12}}}{\sqrt{3}}=\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\frac{2\sqrt{3}-3}{3}$$

以上より，V の最大値は $\frac{1}{6}\cdot\frac{2\sqrt{3}-3}{3}=\frac{2\sqrt{3}-3}{18}$ である。

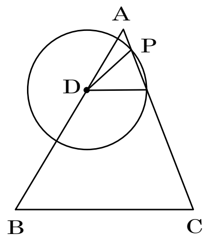
コメント

最大・最小問題に分数式が絡んでくると，相加平均・相乗平均の出番です。

問　題

三角形 ABC において，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ である。辺 AB 上に $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たす点 D をとる。辺 AC 上に $\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|=\frac{1}{3}\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ を満たす点 P が 2 つ存在するための k の条件を求めよ。ただし，$\left|\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{DP}}\right|$，$\left|\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right|$ はベクトルの長さを表し，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトルの内積を表す。　[2000]

解答例



$\mathrm{AB}=a$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=k$ より，

$$a\cdot 1\cdot\cos A=k,\ k=a\cos A\cdots\cdots\cdots①$$

△ABC に余弦定理を適用すると，①より，

$$\mathrm{BC}^2=a^2+1^2-2a\cdot 1\cdot\cos A=a^2+1-2k\cdots\cdots\cdots②$$

次に，$\mathrm{AP}=x$ とおき，△ADP に余弦定理を適用すると，$\mathrm{DP}=\frac{1}{3}\mathrm{BC}$，$\mathrm{AD}=\frac{1}{3}a$ より，

$$\left(\frac{1}{3}\mathrm{BC}\right)^2=\left(\frac{1}{3}a\right)^2+x^2-2\cdot\frac{1}{3}a\cdot x\cdot\cos A$$

①②より，$\frac{1}{9}(a^2+1-2k)=\frac{1}{9}a^2+x^2-\frac{2}{3}kx$

$$9x^2-6kx+2k-1=0,\ (3x-1)(3x-2k+1)=0$$

よって，$x=\frac{1}{3}$，$x=\frac{2k-1}{3}$

P が AC 上に 2 つ存在する条件は，$0\leqq\frac{2k-1}{3}\leqq 1$ かつ $\frac{2k-1}{3}\neq\frac{1}{3}$

すなわち，$\frac{1}{2}\leqq k\leqq 2$ かつ $k\neq 1$ より，$\frac{1}{2}\leqq k<1$，$1<k\leqq 2$

コメント

$\mathrm{AP}=x$ とおき，x についての 2 次方程式が $0\leqq x\leqq 1$ に異なる 2 解をもつ条件を求める問題です。しかし，いわゆる解の配置の常套手段で解くのではなく，$x=\frac{1}{3}$ が 1 つの解であることを読み取り，これを利用することがポイントです。

問　題

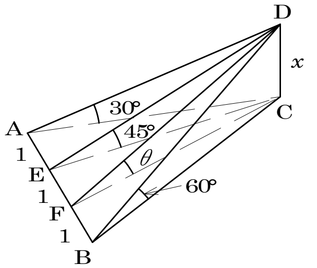
三角すい ABCD において辺 CD は底面 ABC に垂直である。$AB=3$ で，辺 AB 上の 2 点 E, F は，$AE=EF=FB=1$ を満たし，$\angle DAC=30^\circ$，$\angle DEC=45^\circ$，$\angle DBC=60^\circ$ である。

(1) 辺 CD の長さを求めよ。

(2) $\theta=\angle DFC$ とおくとき，$\cos\theta$ を求めよ。　[2000]

解答例

(1) $CD=x$ とおくと，$\angle ADC=60^\circ$，$\angle EDC=45^\circ$，$\angle BDC=30^\circ$ より，



$$AC=x\tan 60^\circ=\sqrt{3}x,\quad EC=x\tan 45^\circ=x$$

$$BC=x\tan 30^\circ=\frac{1}{\sqrt{3}}x$$

底面の△ACE に余弦定理を適用して,

$$\cos A=\frac{1+3x^2-x^2}{2\cdot 1\cdot\sqrt{3}x}=\frac{1+2x^2}{2\sqrt{3}x}\cdots\cdots\text{①}$$

底面の△ACB に余弦定理を適用し，$\cos A=\dfrac{9+3x^2-\frac{1}{3}x^2}{2\cdot 3\cdot\sqrt{3}x}=\dfrac{27+8x^2}{18\sqrt{3}x}\cdots\cdots$②

①②より，$\dfrac{1+2x^2}{2\sqrt{3}x}=\dfrac{27+8x^2}{18\sqrt{3}x}$，$9+18x^2=27+8x^2$，$10x^2=18$

よって，$x^2=\dfrac{9}{5}$ から，$CD=x=\sqrt{\dfrac{9}{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}}$

(2) ①より $\cos A=\dfrac{1+2\cdot\frac{9}{5}}{2\sqrt{3}\cdot\frac{3}{\sqrt{5}}}=\dfrac{23}{6\sqrt{15}}$ となり，$AC=\dfrac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}$ より，

底面の△ACF に余弦定理を適用して,

$$CF^2=\left(\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\right)^2+2^2-2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{\sqrt{5}}\cdot 2\cdot\frac{23}{6\sqrt{15}}=\frac{1}{5}$$

よって，$CF=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となり，$\tan\theta=\dfrac{CD}{CF}=3$ となる。

したがって，$\dfrac{1}{\cos^2\theta}=1+\tan^2\theta=10$ で $\cos\theta>0$ より，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ である。

コメント

測量との関連から，教科書の章末問題あたりで類題をよく見かけるものです。底面の三角形に注目して三角比の定理を適用していきます。

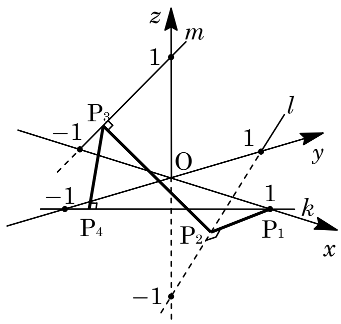
問　題

xy 平面上の直線 $x=y+1$ を k, yz 平面上の直線 $y=z+1$ を l, xz 平面上の直線 $z=x+1$ を m とする。直線 k 上に点 $P_1(1,\ 0,\ 0)$ をとる。l 上の点 P_2 を $P_1P_2\perp l$ となるように定め，m 上の点 P_3 を $P_2P_3\perp m$ となるように定め，k 上の点 P_4 を $P_3P_4\perp k$ となるように定める。以下，同様の手順で $l,\ m,\ k,\ l,\ m,\ k,\ \cdots$ 上の点 P_5，P_6，P_7，P_8，P_9，P_{10}，…を定める。

(1) 点 P_2，P_3 の座標を求めよ。

(2) 線分 P_nP_{n+1} の長さを n を用いて表せ。 [2017]

解答例



(1) t をパラメータとして，直線 k, l, m を表すと，

$$k:(x,\ y,\ z)=(0,\ -1,\ 0)+t(1,\ 1,\ 0)=(t,\ t-1,\ 0)$$

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ -1)+t(0,\ 1,\ 1)=(0,\ t,\ t-1)$$

$$m:(x,\ y,\ z)=(-1,\ 0,\ 0)+t(1,\ 0,\ 1)=(t-1,\ 0,\ t)$$

さて，k 上の点 $P_1(1,\ 0,\ 0)$ を $P_1(t_1,\ t_1-1,\ 0)$ とおくと，$t_1=1$ となる。

次に，l 上の点 P_2 を $P_2(0,\ t_2,\ t_2-1)$ とおくと，$\overrightarrow{P_1P_2}=(-t_1,\ t_2-t_1+1,\ t_2-1)$ となり，$P_1P_2\perp l$ から，

$$(t_2-t_1+1)+(t_2-1)=0\,,\ t_2=\frac{1}{2}t_1$$

よって，$t_2=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$ から，$P_2\left(0,\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$ である。

さらに，m 上の点 P_3 を $P_3(t_3-1,\ 0,\ t_3)$ とおくと，$\overrightarrow{P_2P_3}=(t_3-1,\ -t_2,\ t_3-t_2+1)$ となり，$P_2P_3\perp m$ から，

$$(t_3-1)+(t_3-t_2+1)=0\,,\ t_3=\frac{1}{2}t_2$$

よって，$t_3=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$ から，$P_3\left(-\frac{3}{4},\ 0,\ \frac{1}{4}\right)$ である。

(2) 同様に，k 上の点 P_4 を $P_4(t_4,\ t_4-1,\ 0)$ とおくと，$\overrightarrow{P_3P_4}=(t_4-t_3+1,\ t_4-1,\ -t_3)$ となり，$P_3P_4\perp k$ から，

$$(t_4-t_3+1)+(t_4-1)=0\,,\ t_4=\frac{1}{2}t_3$$

よって，$t_4=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$ から，$P_4\left(\frac{1}{8},\ -\frac{7}{8},\ 0\right)$ である。

これより，帰納的に $t_{n+1}=\frac{1}{2}t_n$ ……①となり，$t_1=1$ から $t_n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ ………②

さて，$L_n = |\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}|$ とおくと，(1)より，

$$L_1^{\,2} = |\overrightarrow{\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2}|^2 = (-t_1)^2 + (t_2 - t_1 + 1)^2 + (t_2 - 1)^2$$

$$L_2^{\,2} = |\overrightarrow{\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3}|^2 = (t_3 - 1)^2 + (-t_2)^2 + (t_3 - t_2 + 1)^2$$

$$L_3^{\,2} = |\overrightarrow{\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4}|^2 = (t_4 - t_3 + 1)^2 + (t_4 - 1)^2 + (-t_3)^2$$

すると，いずれの場合も $L_n^{\,2}$ は同じ式で表せ，①を用いると，帰納的に，

$$L_n^{\,2} = |\overrightarrow{\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}}|^2 = (-t_n)^2 + (t_{n+1} - t_n + 1)^2 + (t_{n+1} - 1)^2$$

$$= t_n^{\,2} + \Big(\frac{1}{2}t_n - t_n + 1\Big)^2 + \Big(\frac{1}{2}t_n - 1\Big)^2 = t_n^{\,2} + 2\Big(\frac{1}{2}t_n - 1\Big)^2 = \frac{3}{2}t_n^{\,2} - 2t_n + 2$$

②を代入すると，$L_n^{\,2} = \dfrac{3}{2}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{2n-2} - 2\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n-1} + 2 = 3\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{2n-1} - \Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{n-2} + 2$ となり，

$$L_n = \sqrt{3\Big(\frac{1}{2}\Big)^{2n-1} - \Big(\frac{1}{2}\Big)^{n-2} + 2}$$

コメント

空間図形と数列の融合問題です。最初，題意から n を 3 で割った余りで分類し，3 種類のパラメータを設定して処理を行っていたところ，記述量はすさまじいものになりそうでした。ところが，パラメータの値に規則的な変化が見つかり，そこでこの分類を取りやめ，書き改めたのが上の解答例です。

問　題

平面上の 2 つのベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$は零ベクトルではなく，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角度は$60°$である。このとき，$r=\dfrac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}$のとり得る値の範囲を求めよ。 [2016]

解答例

$|\vec{a}|=a>0$，$|\vec{b}|=b>0$とおくと，条件より$\vec{a}\cdot\vec{b}=ab\cos 60°=\dfrac{1}{2}ab$となり，

$$r=\frac{|\vec{a}+2\vec{b}|}{|2\vec{a}+\vec{b}|}=\sqrt{\frac{|\vec{a}+2\vec{b}|^2}{|2\vec{a}+\vec{b}|^2}}=\sqrt{\frac{|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}}=\sqrt{\frac{a^2+2ab+4b^2}{4a^2+2ab+b^2}}$$

ここで，$\dfrac{b}{a}=x>0$とおくと，$r=\sqrt{\dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}}$ ………①

さらに，$k=\dfrac{1+2x+4x^2}{4+2x+x^2}$ ……②とおき，$x>0$の範囲で動くとき，k のとり得る値の範囲を求める。すると，②より，$k(4+2x+x^2)=1+2x+4x^2$となり，

$$(k-4)x^2+(2k-2)x+(4k-1)=0 \text{ ………③}$$

そして，③が$x>0$に少なくとも 1 つの解をもつ条件から，kの範囲を求めていく。

(i)　$k=4$のとき

③は，$6x+15=0$となり，$x>0$に解をもたないので不適である。

(ii)　$k\neq 4$のとき

③は，$x^2+\dfrac{2(k-1)}{k-4}x+\dfrac{4k-1}{k-4}=0$，$\left(x+\dfrac{k-1}{k-4}\right)^2+\dfrac{4k-1}{k-4}-\left(\dfrac{k-1}{k-4}\right)^2=0$となり，

$$\left(x+\frac{k-1}{k-4}\right)^2+\frac{3k^2-15k+3}{(k-4)^2}=0$$

(ii-i)　$-\dfrac{k-1}{k-4}>0$ $(1<k<4)$のとき

求めるkの条件は，$\dfrac{3k^2-15k+3}{(k-4)^2}\leqq 0$となり，$k^2-5k+1\leqq 0$から，

$$\frac{5-\sqrt{21}}{2}\leqq k\leqq\frac{5+\sqrt{21}}{2}$$

$1<k<4$との共通範囲は，$\dfrac{5-\sqrt{21}}{2}<1$，$4<\dfrac{5+\sqrt{21}}{2}$から$1<k<4$である。

(ii-ii)　$-\dfrac{k-1}{k-4}\leqq 0$ $(k\leqq 1,\ 4<k)$のとき

求める k の条件は，$\dfrac{4k-1}{k-4}<0$となり$\dfrac{1}{4}<k<4$である。そして，$k\leqq 1$，$4<k$との共通範囲は，$\dfrac{1}{4}<k\leqq 1$となる。

(i)(ii)より，k の範囲は $\frac{1}{4}<k<4$ となり，r の範囲は，①から $\frac{1}{2}<r<2$ である。

コメント

　ベクトルが題材になっていますが，実質は，分数関数のとり得る値の範囲を求めるとき，実数解条件として処理する方法です。微分法は範囲外ですので。

問　題

xyz 空間において，原点を中心とする xy 平面上の半径 1 の円周上を点 P が動き，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ を中心とする xz 平面上の半径 1 の円周上を点 Q が動く。

(1) 線分 PQ の長さの最小値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さの最大値と，そのときの点 P, Q の座標を求めよ。　[2015]

解答例

(1) 原点が中心で xy 平面上の半径 1 の円周上の点 P は，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ と表せる。ただし $0\leqq\theta<2\pi$ である。また，点 $(0,\ 0,\ \sqrt{3})$ が中心で xz 平面上の半径 1 の円周上の点 Q は，$\mathrm{Q}(\cos\varphi,\ 0,\ \sqrt{3}+\sin\varphi)$ と表せる。ただし $0\leqq\varphi<2\pi$ である。

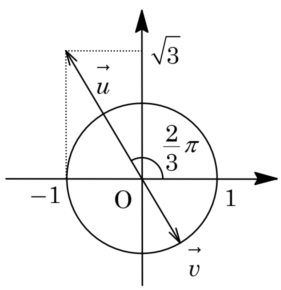
$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (\cos\theta-\cos\varphi)^2+\sin^2\theta+(\sqrt{3}+\sin\varphi)^2\\ &= 1-2\cos\theta\cos\varphi+1+3+2\sqrt{3}\sin\varphi = -2\cos\theta\cos\varphi+2\sqrt{3}\sin\varphi+5\end{aligned}$$

ここで，$\vec{u}=(-\cos\theta,\ \sqrt{3})$，$\vec{v}=(\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおくと，

$$\mathrm{PQ}^2 = 2\vec{u}\cdot\vec{v}+5$$

さて，まず θ を $0\leqq\theta<2\pi$ で固定して考えると，線分 PQ の長さが最小となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と逆向きになるときである。このとき PQ^2 の最小値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta+3}\cdot 1\cdot\cos\pi+5 = -2\sqrt{\cos^2\theta+3}+5$$



さらに，$0\leqq\cos^2\theta\leqq 1$ から，$\cos\theta=\pm1$ のとき，PQ^2 は最小値 $-2\sqrt{1+3}+5=1$，すなわち PQ は最小値 1 をとる。

(i) $\cos\theta=1\ (\theta=0)$ のとき

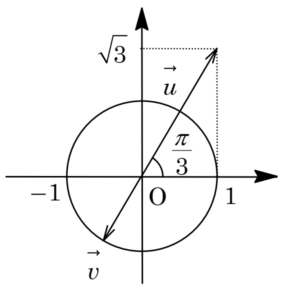
$\vec{u}=(-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\dfrac{2}{3}\pi+\pi=\dfrac{5}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\Big(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$

(ii) $\cos\theta=-1\ (\theta=\pi)$ のとき

$\vec{u}=(1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}+\pi=\dfrac{4}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\Big(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\Big)$$



(2) (1)より，線分 PQ の長さが最大となるのは，$\vec{v}$ が $\vec{u}$ と同じ向きになるときである。このとき PQ^2 の最大値は，

$$2\sqrt{\cos^2\theta+3}\cdot 1\cdot\cos 0+5 = 2\sqrt{\cos^2\theta+3}+5$$

さらに $\cos\theta=\pm1$ のとき，PQ^2 は最大値 $2\sqrt{1+3}+5=9$，PQ は最大値 3 をとる。

(i) $\cos\theta=1\ (\theta=0)$ のとき　$\vec{u}=(-1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\dfrac{2}{3}\pi$ となるので，

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\Big(-\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\Big)$$

(ii)　$\cos\theta=-1\ (\theta=\pi)$ のとき　$\vec{u}=(1,\ \sqrt{3})$ となり，$\varphi=\dfrac{\pi}{3}$ となるので，

$$\mathrm{P}(-1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{3}{2}\sqrt{3}\right)$$

コメント

1 文字固定の最大・最小問題です。内積の定義を利用して，図で考えています。

問　題

t を正の定数とする。原点を O とする空間内に，2 点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ がある。また動点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。 [2013]

解答例

点 $\mathrm{A}(2t,\ 2t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ t)$ に対して，$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から，

$$\begin{aligned}&\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}\\&=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})+(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\\&=3\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2-\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{3}\end{aligned}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}+\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=3$ なので，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}\right|^2=\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ となり，

$$\frac{\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right|^2}{9}+1=\frac{1}{9}\{(2t)^2+(2t)^2+t^2\}+1=t^2+1$$

すると，$(*)$から，点 P は中心 $\mathrm{C}\left(\dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{2}{3}t,\ \dfrac{1}{3}t\right)$ で半径 $r=\sqrt{t^2+1}$ の球面を描く。

このとき，OP の最大値は 3 なので，$\mathrm{OC}+r=3$ となり，$t>0$ から，

$$\sqrt{\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{1}{3}t\right)^2}+\sqrt{t^2+1}=3,\ \sqrt{t^2+1}=3-t$$

$0<t<3$ のもとで両辺を 2 乗すると，$t^2+1=9-6t+t^2$ となり，$t=\dfrac{4}{3}$ である。

コメント

球面のベクトル方程式が題材です。成分計算を最初から行うのは，得策とはいえません。

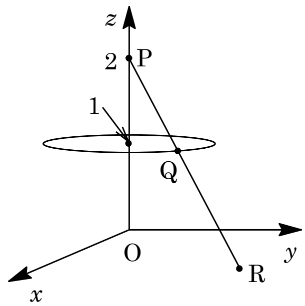
問　題

xyz 空間内の平面$z=2$上に点 P があり，平面$z=1$上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

(1)　P(0, 0, 2)とする。点 Q が平面$z=1$上で点(0, 0, 1)を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 R の軌跡の方程式を求めよ。

(2)　平面$z=1$上に，4 点A(1, 1, 1)，B(1, -1, 1)，C(-1, -1, 1)，D(-1, 1, 1)をとる。点 P が平面$z=2$で点(0, 0, 2)を中心とする半径 1 の円周上を動き，点 Q が正方形 ABCD 上を動くとき，点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2012]

解答例



(1)　P(0, 0, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0)とおくと，条件より，$s^2+t^2=1$ ………①

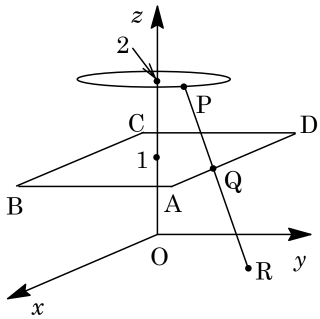
また，線分 PR の中点が Q より，

$$\frac{x}{2}=s \text{ ………②},\quad \frac{y}{2}=t \text{ ………③}$$

②③を①に代入すると，$\dfrac{x^2}{4}+\dfrac{y^2}{4}=1$から，

$$x^2+y^2=4$$

よって，点 R の軌跡の方程式は，$x^2+y^2=4$，$z=0$



(2)　P(p, q, 2)，Q(s, t, 1)，R(x, y, 0)とおくと，条件より，$p^2+q^2=1$ ………④

また，線分 PR の中点が Q より，

$$\frac{x+p}{2}=s \text{ ………⑤},\quad \frac{y+q}{2}=t \text{ ………⑥}$$

⑤⑥より，$p=2s-x$，$q=2t-y$

④に代入すると，$(2s-x)^2+(2t-y)^2=1$

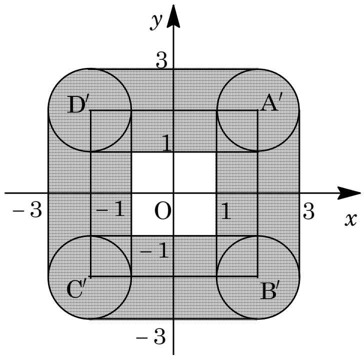
$$(x-2s)^2+(y-2t)^2=1 \text{ ………⑦}$$

さて，点 Q が辺 AB 上にあるとき，

$$s=1,\ -1\leqq t\leqq 1$$

⑦より，$(x-2)^2+(y-2t)^2=1$となり，点 R は xy 平面上で，中心(2, $2t$, 0)，半径 1 の円を描く。なお，$-2\leqq 2t\leqq 2$より，中心は点A′(2, 2, 0)とB′(2, -2, 0)を結ぶ線分上にある。

さらに，点 $\mathrm{C}'(-2,\ -2,\ 0)$，$\mathrm{D}'(-2,\ 2,\ 0)$ とおき，同様に考えると，Q が正方形 ABCD の辺上を動くとき，点 R は中心が正方形 $\mathrm{A}'\mathrm{B}'\mathrm{C}'\mathrm{D}'$ の辺上で半径が 1 の円周上を動く。



すると，点 R の動きうる領域は右図の網点部となり，その面積を S とすると，

$$S=4\left\{3^2-1^2-\left(1^2-\frac{\pi}{4}\right)\right\}=28+\pi$$

コメント

20 年前に，よく見かけた問題です。(2)は，まず Q を固定して R の変化をとらえ，その状態を保ったまま Q を動かすという手法です。

問　題

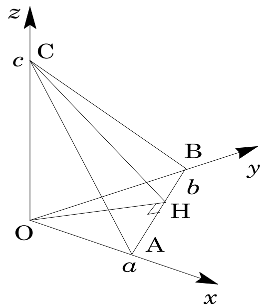
$a,\ b,\ c$ を正の定数とする。空間内に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ がある。

(1) 辺 AB を底辺とするとき，△ABC の高さを a, b, c で表せ。

(2) △ABC, △OAB, △OBC, △OCA の面積をそれぞれ $S,\ S_1,\ S_2,\ S_3$ とする。ただし, O は原点である。このとき，不等式 $\sqrt{3}S \geqq S_1+S_2+S_3$ が成り立つことを示せ。

(3) (2)の不等式において等号が成り立つための条件を求めよ。　[2011]

解答例



(1) O から AB に垂線 OH を引くと，三垂線の定理から，$\mathrm{CH}\perp\mathrm{AB}$ である。

$\mathrm{AB}=\sqrt{a^2+b^2}$ から，△OAB の面積を考えて，

$$\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\mathrm{OH},\ \ \mathrm{OH}=\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

よって，△ABC の底辺を AB とするとき，高さ CH は，

$$\mathrm{CH}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+c^2}=\sqrt{\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}+c^2}$$
$$=\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$

(2) まず，$S_1=\triangle\mathrm{OAB}=\frac{1}{2}ab$，$S_2=\triangle\mathrm{OBC}=\frac{1}{2}bc$，$S_3=\triangle\mathrm{OCA}=\frac{1}{2}ca$ であり，

$$S=\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CH}=\frac{1}{2}\sqrt{a^2+b^2}\cdot\sqrt{\frac{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}{a^2+b^2}}$$
$$=\frac{1}{2}\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}$$

さて，$\vec{p}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{q}=(ab,\ bc,\ ca)$ とし，$\vec{p}$ と $\vec{q}$ のなす角を θ とおくと，$a,\ b,\ c$ が正の数より，$0\leqq\theta<\frac{\pi}{2}$ となり，$\vec{p}\cdot\vec{q}=|\vec{p}||\vec{q}|\cos\theta\leqq|\vec{p}||\vec{q}|$ である。

よって，$\sqrt{3}\cdot\sqrt{a^2b^2+b^2c^2+c^2a^2}\geqq ab+bc+ca$ から，両辺を $\frac{1}{2}$ 倍して，

$$\sqrt{3}S\geqq S_1+S_2+S_3$$

(3) 等号が成立するのは，$\cos\theta=1$，すなわち $\vec{p}$ と $\vec{q}$ が同じ向きのときで，

$$(ab,\ bc,\ ca)=k(1,\ 1,\ 1)\ \ (k>0)$$

よって，$ab=bc=ca$，すなわち $a=b=c$ のときである。

コメント

(1)はいろいろな解法が考えられますが，昨年と同様に，三垂線の定理を利用しました。また, (2)は有名なコーシー・シュワルツの不等式を用いて解いています。

問　題

原点をOとする xyz 空間内で，x 軸上の点A，xy 平面上の点B，z 軸上の点Cを次を満たすように定める。$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OBC}=\theta$，$\angle\mathrm{AOB}=2\theta$，$\mathrm{OC}=3$

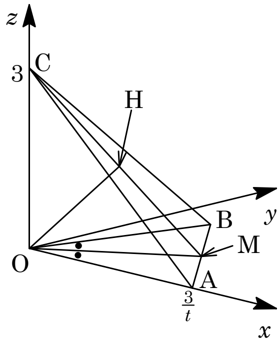
ただし，Aの x 座標，Bの y 座標，Cの z 座標はいずれも正であるとする。さらに，$\triangle\mathrm{ABC}$ 内の点のうち，Oからの距離が最小の点をHとする。また，$t=\tan\theta$ とおく。

(1) 線分OHの長さを t の式で表せ。

(2) Hの z 座標を t の式で表せ。　[2010]

解答例

(1) 条件から，$\mathrm{OC}=3$ より，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$



さらに，$\angle\mathrm{OAC}=\angle\mathrm{OBC}=\theta$，$\angle\mathrm{AOB}=2\theta$ であり，$0<2\theta<\pi\ \left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ なので，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\dfrac{3}{\tan\theta}$ となり，

$$\mathrm{A}\left(\frac{3}{\tan\theta},\ 0,\ 0\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{3\cos2\theta}{\tan\theta},\ \frac{3\sin2\theta}{\tan\theta},\ 0\right)$$

ここで，線分ABの中点をMとおくと，$\mathrm{CM}\perp\mathrm{AB}$，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{AB}$ から，$\mathrm{AB}\perp$（平面OMC）である。

そこで，OからCMに垂線 l を引いたとき，平面OMC上の垂線 l は，$l\perp$（平面ABC）となる。

すなわち，$\triangle\mathrm{ABC}$ 内の点で，Oからの距離が最小の点Hは，垂線 l の足である。

さて，$t=\tan\theta$ より，半角の公式を用いて，$t^2=\dfrac{1-\cos2\theta}{1+\cos2\theta}$ から，

$$t^2(1+\cos2\theta)=1-\cos2\theta,\ \cos2\theta=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

また，2倍角の公式 $\tan2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}$ より，$\sin2\theta=\dfrac{2t}{1-t^2}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}=\dfrac{2t}{1+t^2}$

すると，$\mathrm{A}\left(\dfrac{3}{t},\ 0,\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2},\ \dfrac{3}{t}\cdot\dfrac{2t}{1+t^2},\ 0\right)$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\left(\frac{3}{t},\ 0,\ -3\right)=\frac{3}{t}(1,\ 0,\ -t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(\frac{3}{t}\cdot\frac{2t^2}{1+t^2},\ -\frac{3}{t}\cdot\frac{2t}{1+t^2},\ 0\right)=\frac{6}{1+t^2}(t,\ -1,\ 0)$$

さて，平面ABCの法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}=a-ct=0\cdots\cdots\cdots①,\ \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=at-b=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a=ct$，$b=at=ct^2$ となり，$\vec{n}=c(t,\ t^2,\ 1)$ である。

これより，平面ABCの方程式は，$tx+t^2y+z-3=0$ となり，Oから下ろした垂線の長さOHは，

$$\mathrm{OH}=\frac{|-3|}{\sqrt{t^2+t^4+1}}=\frac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\mathrm{OH}\cdot\dfrac{\vec{n}}{|\vec{n}|}=\dfrac{3}{\sqrt{t^4+t^2+1}}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{t^4+t^2+1}}(t,\ t^2,\ 1)=\dfrac{3}{t^4+t^2+1}(t,\ t^2,\ 1)$

よって, H の z 座標は, $z=\dfrac{3}{t^4+t^2+1}$ である。

コメント

三垂線の定理の系から始めた後, 代数的処理という旗幟不鮮明な解になりました。

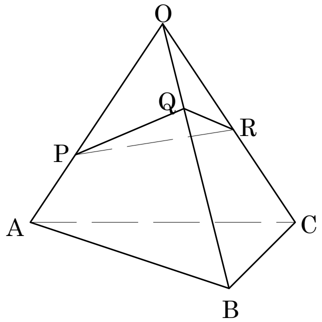
問　題

正四面体 OABC の 1 辺の長さを 1 とする。辺 OA を$2:1$に内分する点を P, 辺 OB を$1:2$に内分する点を Q とし, $0<t<1$ を満たす t に対して, 辺 OC を$t:1-t$に内分する点を R とする。

(1) PQ の長さを求めよ。

(2) △PQR の面積が最小となるときの t の値を求めよ。 [2008]

解答例



(1) $\mathrm{OP}=\frac{2}{3}$, $\mathrm{OQ}=\frac{1}{3}$より, △OPQ に余弦定理を適用して,

$$\mathrm{PQ}^2=\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cos 60^\circ=\frac{1}{3}$$

よって, $\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{3}}{3}$

(2) まず, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}$$

さて, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2=t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)\cdot\left(t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right)=\frac{1}{6}t-\frac{1}{9}-\frac{1}{3}t+\frac{4}{9}=-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}$$

また, (1)より, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{1}{3}$から, △PQR の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{3}\left(t^2-\frac{2}{3}t+\frac{4}{9}\right)-\left(-\frac{1}{6}t+\frac{1}{3}\right)^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}t^2-\frac{1}{9}t+\frac{1}{27}}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{11}{36}\left(t-\frac{2}{11}\right)^2+\left(\frac{1}{27}-\frac{1}{99}\right)}$$

よって, $t=\frac{2}{11}$ のとき, △PQR の面積は最小となる。

コメント

正四面体を題材にした頻出のもので, 参考書の例題に掲載されそうな問題です。

問　題

大きさがそれぞれ 5, 3, 1 の平面上のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$に対して，$\vec{z}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$とおく。

(1) $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を動かすとき，$|\vec{z}|$の最大値と最小値を求めよ。

(2) $\vec{a}$を固定し，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$を満たすように$\vec{b}$, $\vec{c}$を動かすとき，$|\vec{z}|$の最大値と最小値を求めよ。 [2006]

解答例

(1) $|\vec{a}|=5$, $|\vec{b}|=3$, $|\vec{c}|=1$より，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{a}+\vec{b}|+|\vec{c}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|+|\vec{c}|=9\cdots\cdots\cdots①$$

①において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が同じ向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が同じ向きのときである。

よって，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値 9 をとる。

また，$||\vec{a}|-|\vec{b}||\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq|\vec{a}|+|\vec{b}|$より，$2\leqq|\vec{a}+\vec{b}|\leqq8$となり，

$$|\vec{z}|=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|\geqq||\vec{a}+\vec{b}|-|\vec{c}||\geqq2-1=1\cdots\cdots\cdots②$$

②において等号が成立するのは，左側では$\vec{a}+\vec{b}$と$\vec{c}$が逆向きのとき，右側では$\vec{a}$と$\vec{b}$が逆向きのときである。

よって，$\vec{b}$, $\vec{c}$が$\vec{a}$と逆向きのとき，$|\vec{z}|$は最小値 1 をとる。

(2) 条件より，$\vec{a}\cdot\vec{z}=20$なので，$\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=20$となり，

$$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=20,\ \vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})=-5\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，③の条件のもとで，

$$|\vec{z}|^2=|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot(\vec{b}+\vec{c})+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$
$$=25+2\times(-5)+|\vec{b}+\vec{c}|^2=15+|\vec{b}+\vec{c}|^2$$

(1)と同様に，$||\vec{b}|-|\vec{c}||\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq|\vec{b}|+|\vec{c}|$から，$2\leqq|\vec{b}+\vec{c}|\leqq4\cdots\cdots\cdots④$

④の範囲の値は，すべて③を満たしており，$15+4\leqq|\vec{z}|^2\leqq15+16$から，

$$\sqrt{19}\leqq|\vec{z}|\leqq\sqrt{31}$$

よって，$\vec{b}$, $\vec{c}$が同じ向きのとき，$|\vec{z}|$は最大値$\sqrt{31}$をとり，$\vec{b}$, $\vec{c}$が逆向きのとき，最小値$\sqrt{19}$をとる。

コメント

ベクトルの三角不等式の問題です。(1)で$|\vec{z}|=0$となる場合があれば，この値がもちろん最小値ですが，このようなケースはありませんでした。なお，(2)では，ベクトルの和$\vec{b}+\vec{c}$を変化するベクトルとしてとらえています。

問　題

$a,\ c$ を実数とする。空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ a)$，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ 5)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ c)$ は同一平面上にある。

(1) c を a で表せ。

(2) 四角形 OABC の面積の最小値を求めよ。 [2003]

解答例

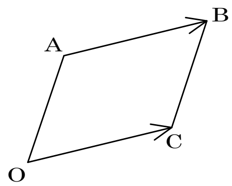
(1) 4 点 O, A, B, C が同一平面上にあるので, $x,\ y$ を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = x\overrightarrow{\mathrm{OA}} + y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と表せる。

$$(0,\ 1,\ c) = x(2,\ 0,\ a) + y(2,\ 1,\ 5)$$

$$2x + 2y = 0 \cdots\cdots①,\ \ y = 1 \cdots\cdots②,\ \ ax + 5y = c \cdots\cdots③$$

①②より $x = -1$，$y = 1$ となり，③に代入すると $c = -a + 5$ となる。

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = -\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ となり，四角形 OABC は平行四辺形である。その面積を S とすると,



$$S = \sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}})^2}$$

$$= \sqrt{(4 + a^2)(1 + c^2) - (ac)^2} = \sqrt{4 + a^2 + 4c^2}$$

(1)より，$c = -a + 5$ なので,

$$4 + a^2 + 4c^2 = 4 + a^2 + 4(-a + 5)^2 = 5a^2 - 40a + 104$$

$$= 5(a - 4)^2 + 24 \geqq 24$$

よって，$a = 4$ のとき S は最小値 $\sqrt{24} = 2\sqrt{6}$ をとる。

コメント

四角形が平行四辺形となるために楽に解ける問題です。

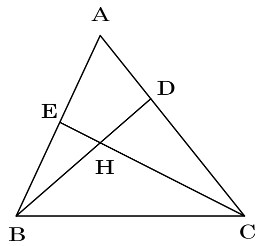
問　題

三角形 ABC において，$|\overrightarrow{AB}|=4$，$|\overrightarrow{AC}|=5$，$|\overrightarrow{BC}|=6$ である。辺 AC 上の点 D は $BD\perp AC$ を満たし，辺 AB 上の点 E は $CE\perp AB$ を満たす。CE と BD の交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AC}$ となる実数 r を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ となる実数 $s,\ t$ を求めよ。　[1999]

解答例



(1)　余弦定理より，$\cos A=\dfrac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5}=\dfrac{1}{8}$

これより，$AD=AB\cos A=\dfrac{1}{2}$ となるので，

$$\overrightarrow{AD}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{AC}}{5}=\frac{1}{10}\overrightarrow{AC}$$

条件より，$\overrightarrow{AD}=r\overrightarrow{AC}$ なので $r=\dfrac{1}{10}$ となる。

(2)　(1)より，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=4\cdot 5\cdot\dfrac{1}{8}=\dfrac{5}{2}$

条件より，$\overrightarrow{AH}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$ ………①

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AC}$ より，$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AC}=0$，$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB})\cdot\overrightarrow{AC}=0$ ………②

①②より，$\left((s-1)\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AC}=0$

$$\frac{5}{2}(s-1)+25t=0,\quad s+10t=1\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0$，$(\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AC})\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ………④

①④より，$\left(s\overrightarrow{AB}+(t-1)\overrightarrow{AC}\right)\cdot\overrightarrow{AB}=0$

$$16s+\frac{5}{2}(t-1)=0,\quad 32s+5t=5\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③⑤より，$s=\dfrac{1}{7}$，$t=\dfrac{3}{35}$

コメント

三角形の垂心のベクトル表示を求めるという頻出題の一つです。(2)では(1)の結果を利用しようか，それとも無視しようかと迷ってしまいます。どちらにせよ，計算量はほとんど同じですので，後者で解を書きました。

問　題

△ABC の 3 辺 BC, CA, AB を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_1，B_1，C_1 とおき，△$A_1B_1C_1$ の 3 辺 B_1C_1，C_1A_1，A_1B_1 を $t:1-t$ の比に内分する点をそれぞれ A_2，B_2，C_2 とおく。ただし，$0<t<1$ とする。

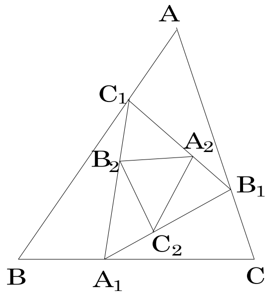
(1) △$A_2B_2C_2$ の辺 B_2C_2 が△ABC のいずれかの辺と平行となる t の値を求めよ。

(2) (1)のとき，△$A_2B_2C_2$ は△ABC に相似であることを示し，その相似比を求めよ。

[1998]

解答例

(1) $\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AC}=\vec{c}$ とする。



$$\overrightarrow{AB_2}=(1-t)\overrightarrow{AC_1}+t\overrightarrow{AA_1}$$
$$=(1-t)t\vec{b}+t\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}$$
$$=2t(1-t)\vec{b}+t^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{AC_2}=(1-t)\overrightarrow{AA_1}+t\overrightarrow{AB_1}$$
$$=(1-t)\left\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\right\}+t(1-t)\vec{c}$$
$$=(1-t)^2\vec{b}+2t(1-t)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{B_2C_2}=\overrightarrow{AC_2}-\overrightarrow{AB_2}=(3t^2-4t+1)\vec{b}-(3t^2-2t)\vec{c}$$

(i) $B_2C_2\,/\!/\,AC$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=0$，よって $t=\dfrac{1}{3}$

(ii) $B_2C_2\,/\!/\,AB$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{b}$ の実数倍より $3t^2-2t=0$，よって $t=\dfrac{2}{3}$

(iii) $B_2C_2\,/\!/\,BC$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}$ は $\vec{b}-\vec{c}$ の実数倍より $3t^2-4t+1=3t^2-2t$，
よって $t=\dfrac{1}{2}$

(2) (1)と同様にして，

$$\overrightarrow{AA_2}=t\overrightarrow{AC_1}+(1-t)\overrightarrow{AB_1}=t^2\vec{b}+(1-t)^2\vec{c}$$
$$\overrightarrow{C_2A_2}=\overrightarrow{AA_2}-\overrightarrow{AC_2}=(2t-1)\vec{b}-(3t^2-4t+1)\vec{c}$$
$$\overrightarrow{A_2B_2}=\overrightarrow{AB_2}-\overrightarrow{AA_2}=(2t-3t^2)\vec{b}+(2t-1)\vec{c}$$

(i) $t=\dfrac{1}{3}$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{C_2A_2}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，

$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$ より，△$A_2B_2C_2$∽△BCA で，相似比は $1:3$

(ii) $t=\dfrac{2}{3}$ のとき，$\overrightarrow{B_2C_2}=-\dfrac{1}{3}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{BA}$，$\overrightarrow{C_2A_2}=\dfrac{1}{3}\vec{b}-\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{CB}$，

$\overrightarrow{A_2B_2}=\dfrac{1}{3}\vec{c}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AC}$ より，△$A_2B_2C_2$∽△CAB で，相似比は $1:3$

(iii) $t=\dfrac{1}{2}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{B_2C_2}}=-\dfrac{1}{4}\vec{b}+\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{C_2A_2}}=-\dfrac{1}{4}\vec{c}=\dfrac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，
$\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\dfrac{1}{4}\vec{b}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，$\triangle\mathrm{A_2B_2C_2}\backsim\triangle\mathrm{ABC}$ で，相似比は $1:4$

コメント

よくある構図の頻出問題です。上のように 1 次独立なベクトルを設定するか，または頂点の位置ベクトルを設定して解いていけば，完答できる問題です。

問　題

連立方程式 $x^2 = yz+7$，$y^2 = zx+7$，$z^2 = xy+7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ。 [2017]

解答例

連立方程式 $x^2 = yz+7$ ……①，$y^2 = zx+7$ ……②，$z^2 = xy+7$ ……③に対して，

①－②より，$x^2 - y^2 = z(y-x)$，$(x-y)(x+y+z) = 0$ ………④

②－③より，$y^2 - z^2 = x(z-y)$，$(y-z)(x+y+z) = 0$ ………⑤

(i)　$x+y+z \neq 0$ のとき

④⑤より $x = y = z$ となり，①に代入すると $x^2 = x^2 + 7$ となり，成立しない。

(ii)　$x+y+z = 0$ のとき

④⑤は満たされ，$y = -(x+z)$ として①に代入すると，$x^2 = -(x+z)z + 7$ となり，

$$x^2 + zx + z^2 - 7 = 0 \text{ ………⑥}$$

ここで，x は実数より，$D = z^2 - 4(z^2 - 7) \geqq 0$ となり，

$$3z^2 - 28 \leqq 0,\ z^2 \leqq \frac{28}{3} \text{ ………⑦}$$

さて，整数 x, y, z は，$x+y+z = 0$ かつ $x \leqq y \leqq z$ より，$x \leqq 0$，$0 \leqq z$ ………⑧

⑦⑧より，$z = 0,\ 1,\ 2,\ 3$ となる。

(ii-i)　$z = 0$ のとき　⑥より $x^2 = 7$ となり，x が整数というのに反する。

(ii-ii)　$z = 1$ のとき　⑥より $x^2 + x - 6 = 0$ となり，$(x+3)(x-2) = 0$

⑧から $x = -3$，$y = -(-3+1) = 2$ となるが，$x \leqq y \leqq z$ に反する。

(ii-iii)　$z = 2$ のとき　⑥より $x^2 + 2x - 3 = 0$ となり，$(x+3)(x-1) = 0$

⑧から $x = -3$，$y = -(-3+2) = 1$ となり，$x \leqq y \leqq z$ を満たす。

(ii-iv)　$z = 3$ のとき　⑥より $x^2 + 3x + 2 = 0$ となり，$(x+2)(x+1) = 0$

⑧から $x = -2,\ -1$ となる。

$x = -2$ のとき，$y = -(-2+3) = -1$ となり，$x \leqq y \leqq z$ を満たす。

$x = -1$ のとき，$y = -(-1+3) = -2$ となり，$x \leqq y \leqq z$ に反する。

(i)(ii)より，$(x,\ y,\ z) = (-3,\ 1,\ 2)$，$(-2,\ -1,\ 3)$

コメント

連立方程式をまとめる問題です。上の解答例では，⑧の条件に着目して，まず y を消去し，0 以上である z の値から求めています。

問　題

$6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ を満たす 0 以上の整数 x をすべて求めよ。 [2016]

解答例

x が 0 以上の整数であるとき，方程式 $6\cdot 3^{3x}+1=7\cdot 5^{2x}$ ……①に対して，

(i) $x=0$ のとき

①の左辺の値は $6\cdot 3^{0}+1=7$，右辺の値も $7\cdot 5^{0}=7$ となり成立している。

(ii) $x=1$ のとき

①の左辺の値は $6\cdot 3^{3}+1=163$，右辺の値は $7\cdot 5^{2}=175$ となり成立しない。

(iii) $x=2$ のとき

①の左辺の値は $6\cdot 3^{6}+1=4375$，右辺の値も $7\cdot 5^{4}=4375$ となり成立している。

(iv) $x\geqq 3$ のとき

①より，$6\cdot 27^{x}+1=7\cdot 25^{x}$ となり，$\left(\dfrac{27}{25}\right)^{x}+\dfrac{1}{6\cdot 25^{x}}=\dfrac{7}{6}$ ……②から，

$$\left(\frac{27}{25}\right)^{x}+\frac{1}{6\cdot 25^{x}}>\left(\frac{27}{25}\right)^{x}=\left(1+\frac{2}{25}\right)^{x}\geqq\left(1+\frac{2}{25}\right)^{3}>1+3\cdot\frac{2}{25}=\frac{31}{25}$$

ここで，$\dfrac{31}{25}-\dfrac{7}{6}=\dfrac{186-175}{25\times 6}>0$ より $\dfrac{31}{25}>\dfrac{7}{6}$ となり，$\left(\dfrac{27}{25}\right)^{x}+\dfrac{1}{6\cdot 25^{x}}>\dfrac{7}{6}$

よって，②が成立する 3 以上の整数 x は存在しない。

(i)～(iv)より，①が成立する 0 以上の整数 x は，$x=0$，2 である。

コメント

定番の整数問題です。まず，$x=0$ は解というのが，すぐわかります。次に，x が大きな値をとるとき $3^{3x}\gg 5^{2x}$ という感覚で式を評価すると，$x=1$ のときには①の右辺の方が大きく，$x=0$ 以外に解がありそうです。そして，$x=2$ という解が見つかるわけです。他にはなさそうなので，その証明をしなくてはいけませんが，解答例では，$a>1$ のとき a^{x} の値がドンドン大きくなるということに着目し，二項定理を利用しつつ式変形をしています。

問　題

θ を実数とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_1=1,\ a_2=\cos\theta,\ a_{n+2}=\frac{3}{2}a_{n+1}-a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

により定める。すべての n について$a_n=\cos(n-1)\theta$が成り立つとき，$\cos\theta$を求めよ。

[2016]

解答例

漸化式　$a_1=1$，$a_2=\cos\theta$，$a_{n+2}=\dfrac{3}{2}a_{n+1}-a_n$ ……(＊)を満たす数列$\{a_n\}$に対し，その一般項が$a_n=\cos(n-1)\theta$であるとき，まず(＊)が$n=1$で成立することから，

$$a_3=\frac{3}{2}a_2-a_1,\ \cos2\theta=\frac{3}{2}\cos\theta-1$$

すると，$2\cos^2\theta-1=\dfrac{3}{2}\cos\theta-1$から，$4\cos^2\theta-3\cos\theta=0$

よって，$\cos\theta=0$または$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$が必要である。

(i)　$\cos\theta=0$のとき

$$a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}+a_n=\cos(n+1)\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos(n-1)\theta$$

$$=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta=-\frac{3}{2}\cos n\theta$$

すると，(＊)から，すべての n について$\cos n\theta=0$となるが，$n=2$のときに$\cos2\theta=-1$から成立しない。

(ii)　$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$のとき

$$a_{n+2}-\frac{3}{2}a_{n+1}+a_n=\cos(n+1)\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos(n-1)\theta$$

$$=\cos n\theta\cos\theta-\sin n\theta\sin\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\cos n\theta\cos\theta+\sin n\theta\sin\theta$$

$$=\frac{3}{4}\cos n\theta-\frac{3}{2}\cos n\theta+\frac{3}{4}\cos n\theta=0$$

すると，(＊)はすべてのnについて成立している。

(i)(ii)より，$\cos\theta=\dfrac{3}{4}$である。

コメント

漸化式が題材の問題です。一般項が与えられていますので，まず必要条件を求め，そのあと十分性の確認をしています。なお，(＊)に対して$n=1$，2で必要条件を求め，この段階で$\cos\theta$の値を絞り込んでも構いません。

問　題

n を 2 以上の整数とする。n 以下の正の整数のうち，n との最大公約数が 1 となるものの個数を $E(n)$ で表す。たとえば，$E(2)=1$，$E(3)=2$，$E(4)=2$，…，$E(10)=4$，… である。

(1)　$E(1024)$ を求めよ。

(2)　$E(2015)$ を求めよ。

(3)　m を正の整数とし，p と q を異なる素数とする。$n=p^mq^m$ のとき $\dfrac{E(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つことを示せ。 [2015]

解答例

(1)　条件より，$E(n)$ は n と互いに素な n 以下の正の整数の個数である。

まず，$1024=2^{10}$ より，1024 と互いに素でない正の整数は 2 の倍数となり，その 1024 以下の個数は $\dfrac{1024}{2}=512$ である。これより，

$$E(1024)=1024-512=512$$

(2)　$2015=5\times13\times31$ より，2015 と互いに素でない正の整数は，5 の倍数または 13 の倍数または 31 の倍数となる。その 2015 以下の個数は，

$$\frac{2015}{5}+\frac{2015}{13}+\frac{2015}{31}-\frac{2015}{5\times13}-\frac{2015}{5\times31}-\frac{2015}{13\times31}+\frac{2015}{5\times13\times31}$$
$$=403+155+65-31-13-5+1=575$$

よって，$E(2015)=2015-575=1440$

(3)　m を正の整数，p と q を異なる素数とし，$n=p^mq^m$ のとき，p^mq^m と互いに素でない正の整数は，p の倍数または q の倍数となる。その p^mq^m 以下の個数は，

$$\frac{p^mq^m}{p}+\frac{p^mq^m}{q}-\frac{p^mq^m}{pq}=p^{m-1}q^m+p^mq^{m-1}-p^{m-1}q^{m-1}$$

すると，$E(n)=p^mq^m-(p^{m-1}q^m+p^mq^{m-1}-p^{m-1}q^{m-1})$ となり，

$$3E(n)-n=3p^mq^m-3(p^{m-1}q^m+p^mq^{m-1}-p^{m-1}q^{m-1})-p^mq^m$$
$$=p^{m-1}q^{m-1}(2pq-3p-3q+3)$$

ここで，$2pq-3p-3q+3=\dfrac{1}{2}(4pq-6p-6q+6)=\dfrac{1}{2}\{(2p-3)(2q-3)-3\}$

この式は p, q について対等なので，$p<q$ とすると，$p\geqq2$，$q\geqq3$ となり，

$$(2p-3)(2q-3)-3\geqq1\times3-3=0$$

よって，$3E(n)-n\geqq0$ となり，$\dfrac{E(n)}{n}\geqq\dfrac{1}{3}$ が成り立つ。

コメント

互いに素ということを題材とした整数問題です。(3)では，証明する不等式を事前に同値変形していますが，必須というわけではありません。なお，2015 の素因数分解は気づきにくいので，どこかで出題されるだろうと思っていましたが……。

問　題

数列$\{a_k\}$を$a_k=k+\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$で定める。$n$を正の整数とする。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}a_k$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2$ を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $a_k=k+\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$に対し，$b_k=\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$とおくと，

$$\sum_{k=1}^{12n}a_k=\sum_{k=1}^{12n}k+\sum_{k=1}^{12n}b_k=6n(12n+1)+\sum_{k=1}^{12n}b_k$$

ここで，$s_k=b_{12k-11}+b_{12k-10}+\cdots+b_{12k}$とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}b_k=\sum_{k=1}^{n}s_k$となり，

$$s_k=\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+0+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1=0$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}a_k=6n(12n+1)+0=6n(12n+1)$

(2) ${a_k}^2=k^2+2k\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)+\cos^2\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$に対し，$c_k=k\cos\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$，$d_k=\cos^2\left(\dfrac{k\pi}{6}\right)$とおくと，${a_k}^2=k^2+2c_k+d_k$となり，

$$\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2=\sum_{k=1}^{12n}k^2+2\sum_{k=1}^{12n}c_k+\sum_{k=1}^{12n}d_k=2n(12n+1)(24n+1)+2\sum_{k=1}^{12n}c_k+\sum_{k=1}^{12n}d_k$$

ここで，$t_k=c_{12k-11}+c_{12k-10}+\cdots+c_{12k}$とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}c_k=\sum_{k=1}^{n}t_k$となり，

$$\begin{aligned}t_k&=\frac{\sqrt{3}}{2}(12k-11)+\frac{1}{2}(12k-10)+0-\frac{1}{2}(12k-8)-\frac{\sqrt{3}}{2}(12k-7)-(12k-6)\\&\quad-\frac{\sqrt{3}}{2}(12k-5)-\frac{1}{2}(12k-4)+0+\frac{1}{2}(12k-2)+\frac{\sqrt{3}}{2}(12k-1)+12k=6\end{aligned}$$

さらに，$u_k=d_{12k-11}+d_{12k-10}+\cdots+d_{12k}$とおくと，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}d_k=\sum_{k=1}^{n}u_k$となり，

$$u_k=\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1+\frac{3}{4}+\frac{1}{4}+0+\frac{1}{4}+\frac{3}{4}+1=6$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{12n}{a_k}^2=2n(12n+1)(24n+1)+2\cdot6n+6n=4n(144n^2+18n+5)$

コメント

周期性のある数列についての和を求めるものです。選択題のバランスのためか，2つの設問とも$k=12n$までの和となっており，場合分けは必要なく結論が導けます。

問　題

$a-b-8$ と $b-c-8$ が素数となるような素数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。

[2014]

解答例

素数 a, b, c に対して，条件より，p, q を素数とすると，

$$a-b-8=p\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b-c-8=q\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より $a-b=p+8>0$，②より $b-c=q+8>0$ となり，$a>b>c$ である。

(i)　$c\neq 2$ のとき

素数 a, b, c はすべて奇数となるので，①②より素数 p, q はともに偶数，すなわち $p=q=2$ である。すると，①②より，

$$a-b=10\ \cdots\cdots\cdots③,\quad b-c=10\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a=c+20=c+3\times6+2$，$b=c+10=c+3\times3+1$ となり，すなわち a, b, c を 3 で割った余りはすべて異なり，素数 a, b, c のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$c=3$，$b=13$，$a=23$

(ii)　$c=2$ のとき

素数 $a,\ b$ はともに奇数となるので，①より素数 p は偶数，すなわち $p=2$ である。また，②より素数 q は奇数である。すると，①②より，

$$a-b=10\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad b-10=q\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$a=q+20$，$b=q+10$ となり，$a>b>q$ である。そして，(i)と同様にすると，素数 a, b, q のいずれかは 3 の倍数である。

よって，$q=3$，$b=13$，$a=23$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(23,\ 13,\ 3)$，$(23,\ 13,\ 2)$

コメント

定番の整数問題です。よく利用される「素数で偶数なのは 2 だけ」ということが，最初のポイントです。なお，解答例では省きましたが，③④を導いたあと実験をして，3 で割った余りに着目をしました。

問　題

$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$ を満たす正の整数 $p,\,q$ の組をすべて求めよ。

[2013]

解答例

正の整数 $p,\,q$ に対して，$3p^3-p^2q-pq^2+3q^3=2013$ より，

$$3(p+q)(p^2-pq+q^2)-pq(p+q)=2013$$

$$(p+q)(3p^2-4pq+3q^2)=3\cdot 11\cdot 61\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$p+q\geqq 2$ であり，

$$3p^2-4pq+3q^2=2(p-q)^2+p^2+q^2\geqq p^2+q^2\geqq p+q$$

よって，$(*)$より，$p+q=3,\ 11,\ 33$ となる。

(i)　$p+q=3$ のとき

このとき，$(p,\ q)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$ となる。

ところが，$(*)$から $3p^2-4pq+3q^2=671$ となるが，ともに満たさない。

(ii)　$p+q=11$ のとき

$(*)$より，$3p^2-4pq+3q^2=183$ となり，$3(p+q)^2-10pq=183$ から，

$$363-10pq=180\,,\quad pq=18$$

$p,\,q$ は，方程式 $x^2-11x+18=0$ の 2 つの解となり，$(x-2)(x-9)=0$ より，

$$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$$

(iii)　$p+q=33$ のとき

$(*)$より，$3p^2-4pq+3q^2=61$ となり，$3(p+q)^2-10pq=61$ から，

$$3267-10pq=61\,,\quad 10pq=3206$$

$p,\,q$ は正の整数なので，成立しない。

(i)～(iii)より，$(p,\ q)=(2,\ 9),\ (9,\ 2)$

コメント

2013 という年度が題材の整数問題です。全部で 8 通りの場合分けをいかに少なくするかという技法が求められます。

問　題

1 つの角が120°の三角形がある。この三角形の 3 辺の長さ $x,\ y,\ z$ は $x<y<z$ を満たす整数である。

(1)　$x+y-z=2$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(2)　$x+y-z=3$ を満たす x, y, z の組をすべて求めよ。

(3)　$a,\ b$ を 0 以上の整数とする。$x+y-z=2^a3^b$ を満たす $x,\ y,\ z$ の組の個数を a と b の式で表せ。　[2012]

解答例

(1)　3 辺の長さが $x,\ y,\ z$ $(x<y<z)$ で 1 つの角が120°の三角形は，最大辺の対角が120°となるので，余弦定理より，

$$z^2=x^2+y^2-2xy\cos120^\circ,\ z^2=x^2+y^2+xy\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$x+y-z=2$ から，$z=x+y-2\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$(x+y-2)^2=x^2+y^2+xy$，$xy-4x-4y+4=0$

ここで，x, y, z は正の整数から，$(x-4)(y-4)=12$

$-4<x-4<y-4$ より，$(x-4,\ y-4)=(1,\ 12),\ (2,\ 6),\ (3,\ 4)$，

$$(x,\ y)=(5,\ 16),\ (6,\ 10),\ (7,\ 8)$$

よって，②より，$(x,\ y,\ z)=(5,\ 16,\ 19),\ (6,\ 10,\ 14),\ (7,\ 8,\ 13)$

(2)　条件より，$x+y-z=3$ から，$z=x+y-3\ \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$(x+y-3)^2=x^2+y^2+xy$，$xy-6x-6y+9=0$

ここで，x, y は正の整数から，$(x-6)(y-6)=27$

$-6<x-6<y-6$ より，$(x-6,\ y-6)=(1,\ 27),\ (3,\ 9)$，

$$(x,\ y)=(7,\ 33),\ (9,\ 15)$$

よって，③より，$(x,\ y,\ z)=(7,\ 33,\ 37),\ (9,\ 15,\ 21)$

(3)　条件より，$x+y-z=2^a3^b$ から，$z=x+y-2^a3^b\ \cdots\cdots\cdots④$

①④より，$(x+y-2^a3^b)^2=x^2+y^2+xy$，$xy-2^{a+1}3^bx-2^{a+1}3^by+2^{2a}3^{2b}=0$

ここで，x, y は正の整数から，$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)=2^{2a}3^{2b+1}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

さて，$x<y<z$ から，④に代入すると，$2^a3^b<x<y$ となり，

$$-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，$-2^a3^b<x-2^{a+1}3^b<y-2^{a+1}3^b<0$ と仮定すると，

$$(x-2^{a+1}3^b)(y-2^{a+1}3^b)<(2^a3^b)^2=2^{2a}3^{2b}$$

すると，$2^{2a}3^{2b}<2^{2a}3^{2b+1}$ から，⑤を満たす x, y は存在しない。

よって，$2^{2a}3^{2b+1}$ の約数 $x-2^{a+1}3^b$，$y-2^{a+1}3^b$ はともに正となる。

一方，$2^{2a}3^{2b+1}$ の正の約数の個数は，$(2a+1)(2b+2)$ であり，$2^{2a}3^{2b+1}$ は平方数でないので，$x-2^{a+1}3^b = y-2^{a+1}3^b$ の場合はありえない。

これから，⑤⑥を満たす$(x,\ y)$の個数は，$\dfrac{1}{2}(2a+1)(2b+2)=(2a+1)(b+1)$ となる。すなわち，①④を満たす$(x,\ y,\ z)$の個数は，$(2a+1)(b+1)$ である。

コメント

(1)(2)は頻出タイプの問題ですが，それを一般化した(3)は，論理をつめるのに時間がかかります。

問　題

(1)　自然数 x, y は，$1<x<y$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ を満たす。x, y の組をすべて求めよ。

(2)　自然数 x, y, z は，$1<x<y<z$ および $\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$ を満たす。x, y, z の組をすべて求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$1<x<y$ を満たす自然数 x, y に対して，条件より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)=\dfrac{5}{3}$ ………①

すると，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>0$ から，$\dfrac{5}{3}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^2$ となり，

$$\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{3}}<1+\frac{1}{x},\ \ \frac{1}{x}>\frac{\sqrt{5}-\sqrt{3}}{\sqrt{3}},\ \ x<\frac{\sqrt{3}}{\sqrt{5}-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{15}+3}{2}<\frac{7}{2}$$

よって，$x=2,\ 3$ である。

(i)　$x=2$ のとき　①より，$1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{10}{9}$ となり，$y=9$

(ii)　$x=3$ のとき　①より，$1+\dfrac{1}{y}=\dfrac{5}{4}$ となり，$y=4$

(2)　$1<x<y<z$ を満たす自然数 x, y, z に対して，条件より，

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{y}\right)\left(1+\frac{1}{z}\right)=\frac{12}{5}\text{ ………②}$$

すると，$1>\dfrac{1}{x}>\dfrac{1}{y}>\dfrac{1}{z}>0$ から，$\dfrac{12}{5}=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^3$ となり，

$$\frac{\sqrt[3]{12}}{\sqrt[3]{5}}<1+\frac{1}{x},\ \ \frac{1}{x}>\frac{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{5}}$$

$$x<\frac{\sqrt[3]{5}}{\sqrt[3]{12}-\sqrt[3]{5}}=\frac{\sqrt[3]{5}\left(\sqrt[3]{12^2}+\sqrt[3]{12\cdot 5}+\sqrt[3]{5^2}\right)}{12-5}=\frac{\sqrt[3]{720}+\sqrt[3]{300}+5}{7}$$

ここで，$\sqrt[3]{720}<9$，$\sqrt[3]{300}<7$ から，$x<\dfrac{9+7+5}{7}=3$ となり，$x=2$ である。

よって，②より，$\dfrac{3}{2}\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{12}{5}$，$\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1+\dfrac{1}{z}\right)=\dfrac{8}{5}$ ………③

同様にして，$\dfrac{8}{5}<\left(1+\dfrac{1}{y}\right)^2$ から，$\dfrac{\sqrt{8}}{\sqrt{5}}<1+\dfrac{1}{y}$，$\dfrac{1}{y}>\dfrac{\sqrt{8}-\sqrt{5}}{\sqrt{5}}$ となり，

$$y<\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{8}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{40}+5}{3}<\frac{7+5}{3}=4$$

よって，$y=3$ となり，③より $1+\dfrac{1}{z}=\dfrac{6}{5}$，すなわち $z=5$ である。

以上より，求める自然数の組は，$x=2$，$y=3$，$z=5$ である。

コメント

(1)の方程式は，分母を払うと有名な形になりますが，(2)と同じ方針にするために，不等式で評価する方法をとりました。

問　題

実数 p, q, r に対して, 3 次多項式 $f(x)$ を $f(x)=x^3+px^2+qx+r$ と定める。実数 a, c, および 0 でない実数 b に対して, $a+bi$ と c はいずれも方程式 $f(x)=0$ の解であるとする。ただし, i は虚数単位を表す。

(1)　$y=f(x)$ のグラフにおいて, 点 $(a,\ f(a))$ における接線の傾きを $s(a)$ とし, 点 $(c,\ f(c))$ における接線の傾きを $s(c)$ とする。$a\neq c$ のとき, $s(a)$ と $s(c)$ の大小を比較せよ。

(2)　さらに, a, c は整数であり, b は 0 でない整数であるとする。次を証明せよ。

(i)　p, q, r はすべて整数である。

(ii)　p が 2 の倍数であり, q が 4 の倍数であるならば, a, b, c はすべて 2 の倍数である。　[2010]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+px^2+qx+r$ （p, q, r は実数）に対して, $a+bi$, c（a, c は実数, b は 0 でない実数）が $f(x)=0$ の解であることから, $a-bi$ も解となり,

$$(a+bi)+(a-bi)+c=-p,\ \ p=-2a-c\cdots\cdots\cdots①$$

$$(a+bi)(a-bi)+(a-bi)c+c(a+bi)=q,\ \ q=a^2+b^2+2ac\cdots\cdots\cdots②$$

$$(a+bi)(a-bi)c=-r,\ \ r=-c(a^2+b^2)\cdots\cdots\cdots③$$

さて, 点 $(a,\ f(a))$, $(c,\ f(c))$ における接線の傾きが, それぞれ $s(a)$, $s(c)$ なので, $f'(x)=3x^2+2px+q$ から,

$$s(a)-s(c)=f'(a)-f'(c)=3(a^2-c^2)+2p(a-c)=(a-c)(3a+3c+2p)$$

①を代入して, $s(a)-s(c)=(a-c)(3a+3a-4a-2c)=-(a-c)^2$

$a\neq c$ のとき, $s(a)-s(c)<0$ より, $s(a)<s(c)$

(2)　(i)　a, b, c が整数のとき, ①②③より, p, q, r もすべて整数である。

(ii)　p が 2 の倍数のとき, ①から $c=-2a-p$ となるので, c は 2 の倍数である。

さらに, q が 4 の倍数のとき, ②から $a^2+b^2=q-2ac$ となるので, a^2+b^2 は 4 の倍数である。

さて, a が 2 の倍数のとき a^2 を 4 で割った余りは 0, a が 2 の倍数でないとき a^2 を 4 で割った余りは 1 となる。

そこで, a^2, b^2 とその和を 4 で割った余りをまとめると, 右表のようになる。

a^2 \ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

すると, a^2+b^2 は 4 の倍数であるのは, a^2, b^2 がともに 4 の倍数, すなわち a と b はいずれも 2 の倍数である。

以上より, a, b, c はすべて 2 の倍数である。

コメント

計算量を考えると，解を $f(x)=0$ に代入して条件を求めるというのは後回しです。その代わりに，解と係数の関係を利用しています。

問　題

0 以上の整数a_1，a_2が与えられたとき，数列$\{a_n\}$を，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$により定める。

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$のとき，a_{2010}を 10 で割った余りを求めよ。

(2)　$a_2=3a_1$のとき，$a_{n+4}-a_n$は 10 の倍数であることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}=a_{n+1}+6a_n$ ……(＊)で定められる数列$\{a_n\}$について，その一の位の数列を$\{b_n\}$とおくと，

$$b_1=1,\ b_2=2,\ b_3=8,\ b_4=0,\ b_5=8,\ b_6=8,\ b_7=6,\ b_8=4,\ b_9=0,$$
$$b_{10}=4,\ b_{11}=4,\ b_{12}=8,\ b_{13}=2,\ b_{14}=0,\ b_{15}=2,\ b_{16}=2,\ b_{17}=4,$$
$$b_{18}=6,\ b_{19}=0,\ b_{20}=6,\ b_{21}=6,\ b_{22}=2,\ b_{23}=8,\ b_{24}=0,\ \cdots\cdots$$

すると，$b_{22}=b_2$，$b_{23}=b_3$となり，(＊)から，$n\geqq 2$ において，数列$\{b_n\}$は周期 20 の周期数列となる。

さて，$2010=1+20\times 100+9$より，$b_{2010}=b_{1+9}=4$となるので，a_{2010}を 10 で割った余りは 4 である。

(2)　$a_2=3a_1$のとき, (＊)より,

$$a_3=a_2+6a_1=9a_1,\ a_4=a_3+6a_2=27a_1,\ a_5=a_4+6a_3=81a_1$$

これより，$a_n=3^{n-1}a_1$と予測できる。

まず, この予測の正しいことを, 数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1,\ 2$のとき　条件より成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$のとき　$a_k=3^{k-1}a_1$，$a_{k+1}=3^k a_1$と仮定すると, (＊)より,

$$a_{k+2}=a_{k+1}+6a_k=3^k a_1+6\cdot 3^{k-1}a_1=(1+2)\cdot 3^k a_1=3^{k+1}a_1$$

(i)(ii)より，すべての自然数nに対して，$a_n=3^{n-1}a_1$である。

すると，$a_{n+4}-a_n=3^{n+3}a_1-3^{n-1}a_1=(3^4-1)\cdot 3^{n-1}a_1=10\times(8\cdot 3^{n-1}a_1)$

よって，$a_{n+4}-a_n$は 10 の倍数である。

コメント

漸化式と整数の融合問題は，1993 年に東大，1994 年に京大で出題された後，しばらく頻出のものでした。ただ，本問は，上記の過去問と異なり，漸化式が簡単な形で解けるので，この結果を利用したほうがよいのかどうか，かえって迷ってしまいます。この影響のためか, (1)と(2)は異なる立場での解答例となっています。

問　題

2 以上の整数 m, n は $m^3+1^3=n^3+10^3$ を満たす。m, n を求めよ。　[2009]

解答例

$m^3+1^3=n^3+10^3$ より，$m^3-n^3=999$ となり，

$$(m-n)(m^2+mn+n^2)=3^3\times 37\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, $m\geqq 2$, $n\geqq 2$ から，$m^2+mn+n^2>0$ となり, $(*)$から $m-n\geqq 1$ である。

さらに，$m^2+mn+n^2>m^2-2mn+n^2=(m-n)^2\geqq m-n$ から,

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(1,\ 999),\ (3,\ 333),\ (9,\ 111),\ (27,\ 37)$$

また，$m^2+mn+n^2-(m-n)^2=3mn$ から，$m^2+mn+n^2-(m-n)^2$ は 3 の倍数となるので,

$$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(3,\ 333),\ (9,\ 111)$$

(i)　$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(3,\ 333)$ のとき

この場合，$m-n=3$，$mn=\dfrac{1}{3}(333-3^2)=108$ となり,

$$(n+3)n=108,\ n^2+3n-108=0,\ (n-9)(n+12)=0$$

$n\geqq 2$ から，$n=9$ となり，$m=9+3=12$

(ii)　$(m-n,\ m^2+mn+n^2)=(9,\ 111)$ のとき

この場合，$m-n=9$，$mn=\dfrac{1}{3}(111-9^2)=10$ となり,

$$(n+9)n=10,\ n^2+9n-10=0,\ (n-1)(n+10)=0$$

$n\geqq 2$ から, 解なしとなる。

(i)(ii)より，$m=12$，$n=9$

コメント

不定方程式の基本問題です。数の特性を活かして, 解の候補を絞り込むことがポイントです。

問　題

m を整数とし，$f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ とする。

(1) 整数 a と，0 ではない整数 b で，$f(a+bi)=0$ を満たすものが存在するような m をすべて求めよ。ただし，i は虚数単位である。

(2) (1)で求めたすべての m に対して，方程式 $f(x)=0$ を解け。 [2007]

解答例

(1) $f(x)=x^3+8x^2+mx+60$ に対して，$f(a+bi)=0$ より，

$$(a+bi)^3+8(a+bi)^2+m(a+bi)+60=0$$

$$(a^3-3ab^2+8a^2-8b^2+ma+60)+(3a^2b-b^3+16ab+mb)i=0$$

a, b, m は整数より，

$$a^3-3ab^2+8a^2-8b^2+ma+60=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$3a^2b-b^3+16ab+mb=0\cdots\cdots\cdots②$$

$b\neq 0$ なので，②より，$m=-3a^2+b^2-16a\cdots\cdots③$となり，①に代入すると，

$$a^3-3ab^2+8a^2-8b^2+a(-3a^2+b^2-16a)+60=0$$

$$a^3+4a^2+ab^2+4b^2=30,\ (a+4)(a^2+b^2)=30$$

すると，$a+4$，a^2+b^2 は 30 の約数となり，また $1\leqq a^2+b^2\leqq 30$ から $|a|\leqq 5$ であり，これより $1\leqq a+4\leqq 9$ となる。

(i) $(a+4,\ a^2+b^2)=(1,\ 30)$ のとき

$a=-3$ となるが，$b^2=21$ となり, b が整数であることに反する。

(ii) $(a+4,\ a^2+b^2)=(2,\ 15)$ のとき

$a=-2$ となるが，$b^2=11$ となり, b が整数であることに反する。

(iii) $(a+4,\ a^2+b^2)=(3,\ 10)$ のとき

$a=-1$，$b^2=9$ となり，$b=\pm 3$ である。このとき，③より $m=22$ となる。

(iv) $(a+4,\ a^2+b^2)=(5,\ 6)$ のとき

$a=1$ となるが，$b^2=5$ となり, b が整数であることに反する。

(v) $(a+4,\ a^2+b^2)=(6,\ 5)$ のとき

$a=2$，$b^2=1$ となり，$b=\pm 1$ である。このとき，③より $m=-43$ となる。

(i)～(v)より，$m=22$ または $m=-43$

(2) $m=22$ のとき，$x=-1\pm 3i$ が解になり，

$$f(x)=x^3+8x^2+22x+60=(x+6)(x^2+2x+10)$$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=-6,\ -1\pm 3i$

また，$m=-43$ のとき, $x=2\pm i$ が解になり，

$$f(x)=x^3+8x^2-43x+60=(x+12)(x^2-4x+5)$$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=-12,\ 2\pm i$

コメント

共役な虚数解を設定して，解と係数の関係を用いる方法もありますが，ここでは計算だけで押し通しました。

問　題

数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を，$a_1=2$，$a_{n+1}=4a_n$，$b_1=3$，$b_{n+1}=b_n+2a_n$，$c_1=4$，$c_{n+1}=\dfrac{c_n}{4}+a_n+b_n$と順に定める。放物線$y=a_nx^2+2b_nx+c_n$を$H_n$とする。

(1)　H_nはx軸と2点で交わることを示せ。

(2)　H_nとx軸の交点をP_n，Q_nとする。$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　放物線$H_n: y=a_nx^2+2b_nx+c_n$とx軸との共有点は，

$$a_nx^2+2b_nx+c_n=0\cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式をD_nとし，さらに$\dfrac{D_n}{4}=D'_n$とおく。

条件から，$a_{n+1}=4a_n\cdots\cdots②$，$b_{n+1}=b_n+2a_n\cdots\cdots③$，$c_{n+1}=\dfrac{c_n}{4}+a_n+b_n\cdots\cdots④$

ここで，②③④より，

$$\begin{aligned}D'_n&=b_n{}^2-a_nc_n=(b_{n-1}+2a_{n-1})^2-4a_{n-1}\left(\frac{c_{n-1}}{4}+a_{n-1}+b_{n-1}\right)\\&=b_{n-1}{}^2+4a_{n-1}b_{n-1}+4a_{n-1}{}^2-a_{n-1}c_{n-1}-4a_{n-1}{}^2-4a_{n-1}b_{n-1}\\&=b_{n-1}{}^2-a_{n-1}c_{n-1}=D'_{n-1}\end{aligned}$$

すると，$a_1=2$，$b_1=3$，$c_1=4$から，

$$D'_n=D'_1=b_1{}^2-a_1c_1=3^2-2\times4=1>0$$

よって，H_nはx軸と2点で交わる。

(2)　①の解は，$x=\dfrac{-b_n\pm\sqrt{D'_n}}{a_n}=\dfrac{-b_n\pm1}{a_n}$なので，

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\frac{-b_n+1}{a_n}-\frac{-b_n-1}{a_n}=\frac{2}{a_n}$$

②より，$a_n=2\cdot4^{n-1}$となり，

$$\sum_{k=1}^{n}\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{2\cdot4^{k-1}}=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4}\right)^{k-1}=\frac{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n}{1-\frac{1}{4}}=\frac{4}{3}\left\{1-\left(\frac{1}{4}\right)^n\right\}$$

コメント

まず，一般項a_n，b_nは簡単に求まりますが，c_nを求めるには，計算に時間がかかりそうです。そこで，方向転換をしたのが上記の解です。

問　題

次の条件(a)，(b)をともに満たす直角三角形を考える。ただし，斜辺の長さを p，その他の 2 辺の長さを q, r とする。

(a)　p, q, r は自然数で，そのうちの少なくとも 2 つは素数である。

(b)　$p+q+r=132$

(1)　q, r のどちらかは偶数であることを示せ。

(2)　p, q, r の組をすべて求めよ。　[2006]

解答例

(1)　三平方の定理より，$p^2=q^2+r^2$ ………①

また，条件(b)より，$p+q+r=132$ ………②

②より $p=132-q-r$ として，①に代入すると，

$$(132-q-r)^2=(q+r)^2-2qr,\ 66\times132-132(q+r)=-qr$$

よって，qr は偶数となることより, q, r のどちらかは偶数である。

(2)　まず, q が偶数のときを考える。

(i)　$q=2$ のとき　①より，$p^2-r^2=4$，$(p+r)(p-r)=4$

②から $p+r=130$ より，$130(p-r)=4$ となる。

これを満たす自然数 p, r は存在しない。

(ii)　$q\neq2$ のとき　条件(a)より p, r はともに素数になる。

①より，$r^2=(p+q)(p-q)$

r は素数で，しかも①から $p>r$，$p>q$ なので，$p-q=1$ ……③となり，

$$r^2=p+q \text{ ………④}$$

条件(b)より，$p+q=132-r$ ………⑤

④⑤より，$r^2+r-132=0$，$(r-11)(r+12)=0$

したがって，$r=11$ となり，④より $p+q=121$ から，③と合わせて，

$$p=61,\ q=60$$

次に, r が偶数のときを考えると，同様にして，

$$q=11,\ p=61,\ r=60$$

以上より，$(p,\ q,\ r)=(61,\ 60,\ 11)$，$(61,\ 11,\ 60)$

コメント

(1)では，いろいろな解法が考えられますが，不要な文字 p を消去する方法を採りました。また，(2)では，素数が絡む問題でよく利用する「2 以外の素数は奇数」という事実を用いています。

問　題

$a,\ b,\ c$ は整数で, $a<b<c$ を満たす。放物線 $y=x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$, $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ をとる。

(1)　$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とはならないことを示せ。ただし, $\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい。

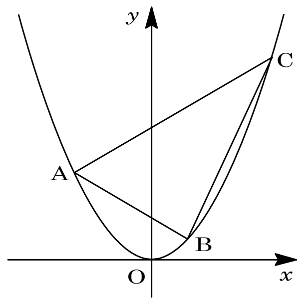
(2)　$a=-3$ のとき, $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ となる組 $(b,\ c)$ をすべて求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ より, 直線 AB の傾きは,

$$\frac{b^2-a^2}{b-a}=b+a$$

また $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ より, 直線 AC の傾きは $c+a$ となる。



ここで, 直線 AC, AB と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれ α, β $(-90^\circ<\alpha<90^\circ,\ -90^\circ<\beta<90^\circ)$ とおくと,

$$\tan\alpha=c+a,\ \tan\beta=b+a$$

$b<c$ より, $\beta<\alpha$ となり, $\angle\mathrm{BAC}=\alpha-\beta$ である。

そこで, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ から, 加法定理を用いて,

$$\tan 60^\circ=\frac{(c+a)-(b+a)}{1+(c+a)(b+a)},\ \sqrt{3}=\frac{c-b}{1+(c+a)(b+a)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の左辺は無理数, また $a,\ b,\ c$ が整数なので右辺は有理数となり成立しない。

よって, $\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$ とはならない。

(2)　$a=-3$, $\angle\mathrm{BAC}=45^\circ$ のとき, (1)と同様にして,

$$1=\frac{c-b}{1+(c-3)(b-3)},\ bc-3b-3c+10=c-b,\ bc-2b-4c+10=0$$

すると, $(b-4)(c-2)=-2$ より, $b-4$, $c-2$ は -2 の約数である。

$$(b-4,\ c-2)=(1,\ -2),\ (-1,\ 2),\ (2,\ -1),\ (-2,\ 1)$$

よって, $(b,\ c)=(5,\ 0),\ (3,\ 4),\ (6,\ 1),\ (2,\ 3)$

$-3<b<c$ を満たすのは, $(b,\ c)=(3,\ 4),\ (2,\ 3)$

コメント

(1)の 60° という角度の利用法は, sin を使うのであれば三角形の面積, cos であればベクトルの内積, tan であれば加法定理というのが, オーソドックスな線です。$\sqrt{3}$ が絡むのは sin と tan です。それで, $\sqrt{3}$ そのものの tan で解を書きました。

問　題

(1)　正の整数 n で n^3+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。

(2)　正の整数 n で n^n+1 が 3 で割り切れるものをすべて求めよ。　[2003]

解答例

(1)　k を 0 以上の整数として, n を $n=3k+1,\ 3k+2,\ 3k+3$ と分類する。

(i)　$n=3k+1$ のとき

$$n^3+1=(3k+1)^3+1=3(9k^3+9k^2+3k)+2$$

(ii)　$n=3k+2$ のとき

$$n^3+1=(3k+2)^3+1=3(9k^3+18k^2+12k+3)$$

(iii)　$n=3k+3$ のとき

$$n^3+1=(3k+3)^3+1=3\cdot 3^2(k+1)^3+1$$

(i)(ii)(iii)より，$n=3k+2$ ($k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) のとき，n^3+1 は 3 で割り切れる。

(2)　$l=1,\ 2,\ 3$ とすると，二項定理より，

$$(3k+l)^n=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i(3k)^{n-i}l^i=\sum_{i=0}^{n-1}3^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i\,k^{n-i}l^i+l^n$$

ここで，$\displaystyle\sum_{i=0}^{n-1}3^{n-i}{}_n\mathrm{C}_i\,k^{n-i}l^i$ が 3 の倍数になっていることを利用して，

(i)　$n=3k+1$ のとき　N_1 を整数として

$$n^n+1=(3k+1)^n+1=3N_1+1^n+1=3N_1+2$$

(ii)　$n=3k+2$ のとき　N_2，N_3 を整数として

$$n^n+1=(3k+2)^n+1=3N_2+2^n+1=3N_2+(3-1)^n+1$$
$$=3N_2+3N_3+(-1)^n+1$$

n^n+1 が 3 の倍数となる条件は $n=3k+2$ が奇数，すなわち k が奇数となることなので, m を 0 以上の整数として,

$$n=3(2m+1)+2=6m+5$$

(iii)　$n=3k+3$ のとき

$$n^n+1=(3k+3)^n+1=3^n(k+1)^n+1$$

(i)(ii)(iii)より，$n=6m+5$ ($m=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$) のとき，n^n+1 は 3 で割り切れる。

コメント

定番の整数問題です。(1)(2)とも，3 で割った余りで整数を分類することがポイントとなっています。

問　題

$k,\ x,\ y$ は正の整数とする。三角形の 3 辺の長さが $\dfrac{k}{x}$，$\dfrac{k}{y}$，$\dfrac{1}{xy}$ で，周の長さが $\dfrac{25}{16}$ である。k, x, y を求めよ。　[2002]

解答例

$k,\ x,\ y$ が正の整数なので，$\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{k}{x}$，$\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{k}{y}$ であり，ここで $x\leqq y$ とすると，$\dfrac{1}{xy}\leqq\dfrac{k}{y}\leqq\dfrac{k}{x}$ となり，条件より，

$$\frac{k}{x}+\frac{k}{y}+\frac{1}{xy}=\frac{25}{16}\cdots\cdots①,\quad \frac{k}{x}<\frac{k}{y}+\frac{1}{xy}\cdots\cdots②$$

②より，$ky<1+kx$，$k(y-x)<1\cdots\cdots\cdots③$

$x<y$ とすると，$y-x\geqq2$ となるが，$k\geqq1$ なので③は成立しない。したがって，$x=y$ となる。

また, $x\geqq y$ としたときも，同様にして $x=y$ となる。

このとき，①より，$\dfrac{2k}{x}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{25}{16}$，$32kx+16=25x^2\cdots\cdots\cdots④$

$$x(25x-32k)=16$$

これより, x は 16 の正の約数となり，$x=1,\ 2,\ 4,\ 8,\ 16$

④より，$k=\dfrac{25x^2-16}{32x}=\dfrac{(5x+4)(5x-4)}{32x}$ となり，k が整数になるのは $x=4$ のときだけで，このとき $k=3$ である。

以上より，$(k,\ x,\ y)=(3,\ 4,\ 4)$

コメント

$x=y$ であることを発見することがポイントですが，運が悪いとなかなか見つかりません。

問　題

$a,\ b,\ c,\ d$ を正の整数とする。複素数$w=a+bi$，$z=c+di$が$w^2z=1+18i$を満たす。a, b, c, dを求めよ。 [2000]

解答例

$w^2z=(a+bi)^2(c+di)=(a^2-b^2)c-2abd+\left\{(a^2-b^2)d+2abc\right\}i$なので，条件$w^2z=1+18i$……①に代入して，

$$(a^2-b^2)c-2abd=1\ \cdots\cdots\cdots②,\ (a^2-b^2)d+2abc=18\ \cdots\cdots\cdots③$$

$a\geqq1, b\geqq1, c\geqq1, d\geqq1$なので，②より，$(a^2-b^2)c=2abd+1>0$

よって，$a^2>b^2$，すなわち$a>b$………④

ここで，①より，$|w^2z|=\sqrt{1^2+18^2}=\sqrt{325}$

$$|w|^2|z|=\sqrt{325},\ |w|^2=\frac{\sqrt{325}}{|z|}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

さて，$|z|=\sqrt{c^2+d^2}\geqq\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$から，⑤と合わせて，

$$a^2+b^2=|w|^2\leqq\frac{\sqrt{325}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{325}{2}}<\sqrt{169}=13$$

a, bは正の整数なので，④から$(a,\ b)=(2,\ 1),\ (3,\ 1)$

(i)　$(a,\ b)=(2,\ 1)$のとき

②より$3c-4d=1$……⑥，③より$3d+4c=18$……⑦

⑥⑦から，$c=3,\ d=2$

(ii)　$(a,\ b)=(3,\ 1)$のとき

②より$8c-6d=1$……⑧，③より$8d+6c=18$……⑨

⑧⑨より$c=\dfrac{29}{25}$となり，cが整数という条件に反する。

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 3,\ 2)$

コメント

一橋大恒例の整数問題です。いろいろな解法が考えられますが，上の解では，絶対値に注目をして，a, b, c, dの範囲を絞り込みました。

問　題

$p,\ q$ は素数で, $p<q$ とする。

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しないことを示せ。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは, $p=2,\ q=3$ のときに限ることを示せ。 [1999]

解答例

(1) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より, $\dfrac{p+q}{pq}=\dfrac{1}{r}$, $(p+q)r=pq$ ………①

ここで, $p+q$ と pq が 2 以上の公約数 m をもつとすると, $a,\ b$ を自然数として, $p+q=ma$, $pq=mb$ と表される。すると, この式をまとめて $p(ma-p)=mb$ より $p^2=m(ap-b)$, $q(ma-q)=mb$ より $q^2=m(aq-b)$ となり, p^2 と q^2 は 2 以上の公約数 m をもつ。これは, $p,\ q$ が素数ということに反する。よって, $p+q$ と pq は互いに素である。

すると, ①より r が pq の倍数となるので, k を整数として $r=kpq$ と表せる。

①に代入して $(p+q)k=1$ ………②

$p,\ q$ は $p<q$ を満たす素数なので, $p+q\geqq 2+3=5$ となり, ②を満たす整数 k は存在しない。

よって, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r は存在しない。

(2) $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ より, $\dfrac{q-p}{pq}=\dfrac{1}{r}$, $(q-p)r=pq$ ………③

(1)と同様にして, $q-p$ と pq は互いに素であるので, ③より r が pq の倍数となり, l を整数として $r=lpq$ と表せる。

③に代入して $(q-p)l=1$ ………④

④より $q-p$ は 1 の約数となり, $p<q$ より $q-p=1$

これより, $p,\ q$ の一方が偶数, 他方が奇数となるが, 偶数の素数は 2 しかないので, $p=2,\ q=3$ となる。このとき $r=6$ となり適する。

よって, $\dfrac{1}{p}-\dfrac{1}{q}=\dfrac{1}{r}$ を満たす整数 r が存在するのは, $p=2,\ q=3$ のときに限る。

コメント

例年通りの整数問題です。96 年度と同様に, 大小関係からとりうる値の範囲を絞り込んでいくことをまず考えました。ところがそれではうまく証明できなかったので, $p,\ q$ が素数という条件をもとに考え直しました。

問　題

正の整数 n を 8 で割った余りを $r(n)$ とおく。正の整数の組 $(a,\ b)$ は，条件 $0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$，$0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ をみたすとする。

(1)　$a-r(a)$ と $r(b)$ を求めよ。

(2)　a と b を求めよ。　[1998]

解答例

$0<a-r(a)<\dfrac{4}{3}r(b)$ ………①　　$0<b-r(b)<\dfrac{4}{3}r(ab)$ ………②とする。

(1)　$0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$0\leqq\dfrac{4}{3}r(b)\leqq\dfrac{28}{3}<10$

①より，$0<a-r(a)<10$

また，$a-r(a)$ が 8 の倍数となることを考えあわせて，$a-r(a)=8$ ………③

すると，①より $8<\dfrac{4}{3}r(b)$ となり，$6<r(b)$

$0\leqq r(b)\leqq 7$ から，$r(b)=7$

(2)　(1)と同様にして，

②より，$b-r(b)=8$ ………④，$r(ab)=7$ ………⑤

④より，$b=r(b)+8=15$

⑤より，$r(15a)=7$

よって，$15a=8k+7$（k は自然数）

$$15(a-1)=8(k-1)$$

15 と 8 は互いに素より，$a-1$ は 8 の倍数となり，l を整数として，

$$a-1=8l,\ \ a=8l+1$$

すなわち，$r(a)=1$

③より，$a=r(a)+8=9$

コメント

不等式の処理が難しそうですが，(1)(2)とも誘導が丁寧についているため，見かけほどではありません。なお，(2)の後半の式変形は，不定方程式の解を求める常套手段の一つです。

問　題

数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=2a_n+3^n$　$(n=1,\ 2,\cdots\cdots)$で定める。

(1)　$b_n=a_n-3^n$とおく。b_{n+1}をb_nで表せ。

(2)　a_nを求めよ。

(3)　$a_n<10^{10}$をみたす最大の正の整数 n を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$としてよい。　[1998]

解答例

(1)　$a_{n+1}=2a_n+3^n$より，$a_{n+1}-3^{n+1}=2(a_n-3^n)$

よって，$b_{n+1}=2b_n$

(2)　(1)より，$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=(5-3^1)\cdot 2^{n-1}=2^n$

$a_n=b_n+3^n=2^n+3^n$

(3)　(2)より，$a_n=2^n+3^n<10^{10}$から，$3^n\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}<10^{10}$

両辺に対数をとって，$n\log_{10}3+\log_{10}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}<10\cdots\cdots\cdots①$

ここで$n\geqq 1$より，$1<\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\leqq\frac{5}{3}<2$

$$0<\log_{10}\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n+1\right\}<\log_{10}2\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$n\log_{10}3<10$とすると，$n<\frac{10}{\log_{10}3}\fallingdotseq 20.96$

nは整数より，$n\leqq 20$

また，$n\log_{10}3+\log_{10}2<10$とすると，$n<\frac{10-\log_{10}2}{\log_{10}3}\fallingdotseq 20.33$

nは整数より，$n\leqq 20$

よって②から，①をみたす整数nの値の範囲は$n\leqq 20$

これより，$a_n<10^{10}$をみたす最大整数は$n=20$となる。

コメント

(3)は対数を利用した概数計算ですが，nが大きくなると，$2^n\ll 3^n$となるという感覚があれば，後はどのようにしてこの感覚を表現するかだけです。

問　題

硬貨が 2 枚ある。最初は 2 枚とも表の状態で置かれている。次の操作を n 回行ったあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率を求めよ。

［操作］2 枚とも表，または 2 枚とも裏のときには，2 枚の硬貨両方を投げる。表と裏が 1 枚ずつのときには，表になっている硬貨だけを投げる。　[2016]

解答例

硬貨を投げて表，裏となる確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ であるとき，この硬貨 2 枚を投げると，2 枚とも表, 2 枚とも裏の確率はそれぞれ $\dfrac{1}{4}$，表と裏が 1 枚ずつの確率は $\dfrac{1}{2}$ となる。

さて，n を 0 以上の整数とし，与えられた操作を n 回行ったあと，2 枚の硬貨の表の枚数が 2 枚, 1 枚, 0 枚である確率をそれぞれ p_n，q_n，r_n とおく。

すると，$p_0=1$，$q_0=r_0=0$ のもとで，

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①,\quad r_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}r_n\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$p_n+q_n+r_n=1$ より，①から $q_{n+1}=\dfrac{1}{2}$ となる。

これより，$n\geqq1$ において $q_n=\dfrac{1}{2}$ となり，②から，

$$r_{n+1}=\frac{1}{4}p_n+\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{4}r_n=\frac{1}{4}(p_n+q_n+r_n)+\frac{1}{4}q_n=\frac{1}{4}\cdot1+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{8}$$

よって，$n\geqq2$ において $r_n=\dfrac{3}{8}$ である。

また，②から $r_1=\dfrac{1}{4}p_0+\dfrac{1}{2}q_0+\dfrac{1}{4}r_0=\dfrac{1}{4}$

以上より，n 回の操作のあと，硬貨が 2 枚とも裏になっている確率 r_n は,

$$r_1=\frac{1}{4},\quad r_n=\frac{3}{8}\ (n\geqq2)$$

コメント

漸化式と確率の融合問題です。立式はさほど難しくはないのですが，得られた結論が意外なため……。

問　題

x は 0 以上の整数である。右の表は 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 5 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤
科目 X の得点	x	6	4	7	4
科目 Y の得点	9	7	5	10	9

(1) $2n$ 個の実数 a_1, a_2, …, a_n, b_1, b_2, …, b_n について，$a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, $b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とすると，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

が成り立つことを示せ。

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数 r_{XY} を x で表せ。

(3) x の値を 2 増やして r_{XY} を計算しても値は同じであった。このとき，r_{XY} の値を四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。 [2016]

解答例

(1) $a=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$, $b=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k$ とするとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=na$, $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k=nb$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-b\sum_{k=1}^{n}a_k-a\sum_{k=1}^{n}b_k+ab\sum_{k=1}^{n}1$$

$$=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab-nab+nab=\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-nab$$

(2) X, Y の標準偏差をそれぞれ s_{X}, s_{Y}, X と Y の共分散を s_{XY} とおくと，

$$s_{\mathrm{X}}{}^2=\frac{1}{5}(x^2+6^2+4^2+7^2+4^2)-\left\{\frac{1}{5}(x+6+4+7+4)\right\}^2$$

$$=\frac{1}{5}(x^2+117)-\left\{\frac{1}{5}(x+21)\right\}^2=\frac{1}{25}(4x^2-42x+144)$$

$$s_{\mathrm{Y}}{}^2=\frac{1}{5}(9^2+7^2+5^2+10^2+9^2)-\left\{\frac{1}{5}(9+7+5+10+9)\right\}^2=\frac{336}{5}-8^2=\frac{16}{5}$$

また，(1)から，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(a_k-a)(b_k-b)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_kb_k-ab$ となり，

$$s_{\mathrm{XY}}=\frac{1}{5}(x\cdot 9+6\cdot 7+4\cdot 5+7\cdot 10+4\cdot 9)-\frac{1}{5}(x+21)\cdot 8$$

$$=\frac{1}{5}(9x+168)-\frac{8}{5}(x+21)=\frac{x}{5}$$

すると，X と Y の相関係数 r_{XY} は，

$$r_{\mathrm{XY}}=\frac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}}=\frac{\dfrac{x}{5}}{\dfrac{\sqrt{4x^2-42x+144}}{5}\cdot\dfrac{4}{\sqrt{5}}}=\frac{\sqrt{5}x}{4\sqrt{4x^2-42x+144}}$$

(3)　x を $x+2$ としたときの X と Y の相関係数を $r_{\mathrm{XY}}{}'$ とすると，(2)から，

$$r_{\mathrm{XY}}{}' = \frac{\sqrt{5}(x+2)}{4\sqrt{4(x+2)^2-42(x+2)+144}} = \frac{\sqrt{5}(x+2)}{4\sqrt{4x^2-26x+76}}$$

$r_{\mathrm{XY}} = r_{\mathrm{XY}}{}'$ より，$x\sqrt{4x^2-26x+76} = (x+2)\sqrt{4x^2-42x+144}$ となり，

$$x^2(4x^2-26x+76) = (x+2)^2(4x^2-42x+144)$$

まとめると，$7x^2-34x-48=0$，$(7x+8)(x-6)=0$ となり，$x=6$ である。

よって，$r_{\mathrm{XY}} = \dfrac{6\sqrt{5}}{4\sqrt{144-252+144}} = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ となり，小数第 1 位までの概数として表すと，$2.2<\sqrt{5}<2.3$ から $0.55<\dfrac{\sqrt{5}}{4}<0.58$ となるので，$r_{\mathrm{XY}}=0.6$ である。

コメント

誘導つきの相関係数の問題です。たった 5 つのデータについて求めても，という気もしますが，それでも計算はシビアです。

問　題

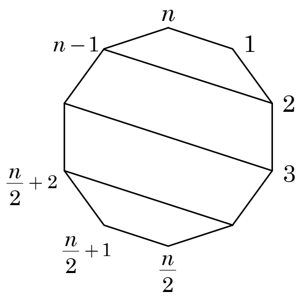
n を 4 以上の整数とする。正 n 角形の 2 つの頂点を無作為に選び, それらを通る直線を l とする。さらに, 残りの $n-2$ 個の頂点から 2 つの頂点を無作為に選び, それらを通る直線を m とする。直線 l と m が平行になる確率を求めよ。 [2015]

解答例

直線 l の決め方が ${}_n\mathrm{C}_2$ 通り, 直線 m の決め方が ${}_{n-2}\mathrm{C}_2$ 通りより, l, m の決め方 ${}_n\mathrm{C}_2\cdot{}_{n-2}\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{4}$ 通りが同様に確からしいとする。また, 正 n 角形の頂点に番号をつけ, 辺や対角線を両端の頂点番号の組として表す。

(I)　n が偶数のとき

(i)　l と m がともに 1 つの辺に平行なとき



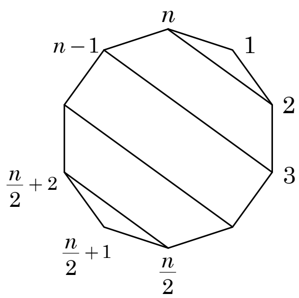
n と 1 を結んだ辺に対して平行線をかくと,

$$(n,\ 1),\ (n-1,\ 2),\ \cdots,\ \left(\frac{n}{2}+1,\ \frac{n}{2}\right)$$

この中から, l と m として, 2 本選ぶことより, ${}_{\frac{n}{2}}\mathrm{C}_2\times 2=\dfrac{n}{2}\left(\dfrac{n}{2}-1\right)$ 通りとなる。このような平行線のパターンは重複を考えると $\dfrac{n}{2}$ 通りあり, 合わせて,

$$\frac{n}{2}\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}=\frac{n^2}{8}(n-2)\ （通り）$$

(ii)　l と m がともに 1 つの辺に平行でないとき



1 つの頂点をはさんだ対角線となり, n と 2 を結んだ辺に対して平行線をかくと,

$$(n,\ 2),\ (n-1,\ 3),\ \cdots,\ \left(\frac{n}{2}+2,\ \frac{n}{2}\right)$$

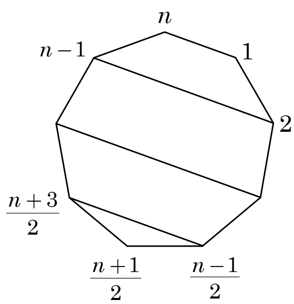
この中から, l と m として, 2 本選ぶことより, ${}_{\frac{n}{2}-1}\mathrm{C}_2\times 2=\left(\dfrac{n}{2}-1\right)\left(\dfrac{n}{2}-2\right)$ 通りとなる。このような平行線のパターンは重複を考えると $\dfrac{n}{2}$ 通りあり, 合わせて,

$$\left(\frac{n}{2}-1\right)\left(\frac{n}{2}-2\right)\frac{n}{2}=\frac{n}{8}(n-2)(n-4)\ （通り）$$

(i)(ii)より, $\dfrac{n^2}{8}(n-2)+\dfrac{n}{8}(n-2)(n-4)=\dfrac{n}{4}(n-2)^2$ 通りとなり, 求める確率は,

$$\frac{n}{4}(n-2)^2\cdot\frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{n-2}{(n-1)(n-3)}$$

(II) n が奇数のとき



n と 1 を結んだ辺に対して平行線をかくと,

$$(n,\ 1),\ (n-1,\ 2),\ \cdots,\ \left(\frac{n+3}{2},\ \frac{n-1}{2}\right)$$

この中から, l と m として, 2 本選ぶことより, ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\times 2=\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)$通りとなる。このような平行線のパターンは n 通りあり, 合わせて,

$$\frac{n-1}{2}\left(\frac{n-1}{2}-1\right)\cdot n=\frac{n}{4}(n-1)(n-3)\ \text{（通り）}$$

よって, 求める確率は,

$$\frac{n}{4}(n-1)(n-3)\cdot\frac{4}{n(n-1)(n-2)(n-3)}=\frac{1}{n-2}$$

コメント

単純な設定の問題ですが, 小さい n の値で実験していると, かなり時間がかかってしまいました。なお, 結果としていえることですが, n が偶数の場合からでなく, 奇数の場合から考え始めた方がよかったのではないかという感じがしています。

問　題

$a,\ b,\ c$ は異なる 3 つの正の整数とする。次のデータは 2 つの科目 X と Y の試験を受けた 10 人の得点をまとめたものである。

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
科目 X の得点	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
科目 Y の得点	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a

科目 X の得点の平均値と科目 Y の得点の平均値とは等しいとする。

(1) 科目 X の得点の分散を ${s_{\mathrm{X}}}^2$，科目 Y の得点の分散を ${s_{\mathrm{Y}}}^2$ とする。$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}$ を求めよ。

(2) 科目 X の得点と科目 Y の得点の相関係数を，四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

(3) 科目 X の得点の中央値が 65，科目 Y の得点の標準偏差が 11 であるとき，$a,\ b,\ c$ の組を求めよ。 [2015]

解答例

(1) 科目 X, Y の得点の平均値を，それぞれ $\overline{X}$，$\overline{Y}$ とすると，

$$\overline{X}=\frac{1}{10}(3a+3b+4c),\ \overline{Y}=\frac{1}{10}(5a+5b)$$

条件より，$\overline{X}=\overline{Y}$ なので，$3a+3b+4c=5a+5b$ となり，$2c=a+b$ から，

$$\overline{X}=\overline{Y}=c=\frac{a+b}{2}$$

与えられた得点表について，$X-\overline{X}$，$Y-\overline{Y}$ を計算し，$p=\dfrac{a-b}{2}$，$q=\dfrac{b-a}{2}$ とおくと，右表のようになり，

	①	②	③	④	⑤	⑥	⑦	⑧	⑨	⑩
X	a	c	a	b	b	a	c	c	b	c
Y	a	b	b	b	a	a	b	a	b	a
$X-\overline{X}$	p	0	p	q	q	p	0	0	q	0
$Y-\overline{Y}$	p	q	q	q	p	p	q	p	q	p

$${s_{\mathrm{X}}}^2=\frac{1}{10}(3p^2+3q^2+4\cdot 0)=\frac{3}{5}\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^2,\ {s_{\mathrm{Y}}}^2=\frac{1}{10}(5p^2+5q^2)=\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^2$$

よって，$\dfrac{{s_{\mathrm{X}}}^2}{{s_{\mathrm{Y}}}^2}=\dfrac{3}{5}$ となる。

(2) (1)より，$s_{\mathrm{X}}=\sqrt{\dfrac{3}{5}}\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$，$s_{\mathrm{Y}}=\left|\dfrac{a-b}{2}\right|$ となり，

$$s_{\mathrm{XY}}=\frac{1}{10}(2p^2+2pq+2q^2+4\cdot 0)=\frac{2}{5}\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^2-\frac{1}{5}\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^2=\frac{1}{5}\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^2$$

よって，相関係数 r は，$r=\dfrac{s_{\mathrm{XY}}}{s_{\mathrm{X}}s_{\mathrm{Y}}}=\dfrac{1}{5}\Big(\dfrac{a-b}{2}\Big)^2\cdot\Big\{\sqrt{\dfrac{3}{5}}\Big(\dfrac{a-b}{2}\Big)^2\Big\}^{-1}=\dfrac{\sqrt{15}}{15}$

さて，$(3.8)^2<15<4^2$ より，$3.8<\sqrt{15}<4$ となり，$0.25<\dfrac{\sqrt{15}}{15}<0.27$

したがって，相関係数 r の小数第 1 位までの概数は 0.3 である。

(3) 科目 X の得点は，a が 3 人，b が 3 人，c が 4 人で，しかも $c=\dfrac{a+b}{2}$ より，10 人の得点の中央値は c である。これより $c=65$ となり，$a+b=130$ ………(＊)

また，科目 Y の得点の標準偏差 $s_{\mathrm{Y}}=\left|\dfrac{a-b}{2}\right|=11$ から，$a-b=\pm 22$ ………(＊＊)

(＊)(＊＊)より，$(a,\ b)=(76,\ 54)$，$(54,\ 76)$ となるので，

$(a,\ b,\ c)=(76,\ 54,\ 65)$，$(54,\ 76,\ 65)$

コメント

現行課程で導入された「データの分析」からの出題で，基本的な内容になっています。なお，分散については，2 乗の平均から平均の 2 乗を引いて計算してもよいのですが，そうすると共分散の計算がややこしくなります。

問　題

数直線上の点 P を次の規則で移動させる。1 枚の硬貨を投げて，表が出れば P を $+1$だけ移動させ，裏が出れば P を原点に関して対称な点に移動させる。P は初め原点にあるとし，硬貨を n 回投げた後の P の座標を a_n とする。

(1)　$a_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　$a_4=1$ となる確率を求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ のとき，$a_n=n-3$ となる確率を n を用いて表せ。　[2014]

解答例

(1)　1 枚の硬貨を投げて表，裏が出る確率は，それぞれ $\dfrac{1}{2}$ ずつとする。

$a_3=0$ となるのは，表→裏→表または裏→裏→裏のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{4}$$

(2)　$a_4=1$ となるのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　$a_3=0$ で 4 回目に表が出る場合

この場合の確率は，(1)より，$\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ となる。

(ii)　$a_3=-1$ で 4 回目に裏が出る場合

$a_3=-1$ となるのは裏→表→裏のときだけであり，これよりこの場合の確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{16}$ となる。

(i)(ii)より，$a_4=1$ となる確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{3}{16}$ である。

(3)　$a_n=n-3\ (n\geqq 3)$ となるのは，次の 2 つの場合があり，その確率 p_n について，

(i)　$a_{n-1}=n-4$ で n 回目に表が出る場合

この場合の確率は，$p_{n-1}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}p_{n-1}$ となる。

(ii)　$a_{n-1}=-n+3$ で n 回目に裏が出る場合

まず，$-n+3\leqq a_{n-2}\leqq n-2$ なので，$a_{n-1}=-n+3$ となるのは，$a_{n-2}=n-3$ で $n-1$回目に裏が出る場合だけ，すなわち裏→表→表→…→表→裏と 1 回目と $n-1$回目に裏が出て，それ以外は表が出る場合である。

n 回目は裏が出ることより，この場合の確率は，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ となる。

(i)(ii)より，$p_n=\dfrac{1}{2}p_{n-1}+\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\quad(n\geqq 4)\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，(*)より，$2^n p_n=2^{n-1}p_{n-1}+1$ となり，$p_3=\dfrac{1}{4}$ から，

$$2^n p_n=2^3 p_3+(n-3)=8\cdot\frac{1}{4}+n-3=n-1$$

よって，$p_n = \dfrac{n-1}{2^n}$ $(n \geqq 3)$ である。

コメント

(1)と(2)が, (3)の漸化式を立式するための誘導となっています。特に, (ii)の場合に注意深さが要求されます。解答例では省きましたが，$a_5 = 2$ のときも考えて，一般化しています。

問　題

サイコロを n 回投げ，k 回目に出た目を a_k とする。また，s_n を $s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k$ で定める。

(1)　s_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　s_n が 6 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　s_n が 7 で割り切れる確率を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$s_n=\sum_{k=1}^{n}10^{n-k}a_k=10^{n-1}a_1+\cdots+10^2a_{n-2}+10a_{n-1}+a_n$ に対して，

(i)　$n\geqq 2$ のとき

s_n が 4 で割り切れる条件は，下 2 桁が 4 の倍数であることなので，

$(a_{n-1},\ a_n)=(1,\ 2),\ (3,\ 2),\ (5,\ 2),\ (2,\ 4),\ (4,\ 4),\ (6,\ 4),\ (1,\ 6),$
$(3,\ 6),\ (5,\ 6)$

この確率は，$\dfrac{6^{n-2}\times 9}{6^n}=\dfrac{1}{4}$ である。

(ii)　$n=1$ のとき　s_n が 4 で割り切れる確率は，$\dfrac{1}{6}$ である。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$s_n=10(10^{n-2}a_1+\cdots+10a_{n-2}+a_{n-1})+a_n=10s_{n-1}+a_n$

ここで，s_{n-1} を 6 で割った余りが，それぞれ 0, 1, 2, 3, 4, 5 であるとき，s_n が 6 で割り切れるのは，a_n が順に 6, 2, 4, 6, 2, 4 である場合だけとなる。

s_n が 6 で割り切れる確率を p_n とおくと，

$$p_n=\frac{1}{6}p_{n-1}+\frac{1}{6}(1-p_{n-1})=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots①$$

なお，$p_1=\dfrac{1}{6}$ より，①は $n=1$ のときも成立している。

(3)　まず，s_{n-1} を 7 で割った余りが 0 であるとき，a_n がどんな値でも s_n が 7 で割り切れる場合はない。

また，s_{n-1} を 7 で割った余りがそれぞれ 1, 2, 3, 4, 5, 6 であるとき，s_n が 7 で割り切れるのは，a_n が順に 4, 1, 5, 2, 6, 3 である場合だけとなる。

s_n が 7 で割り切れる確率を q_n とおくと，$q_1=0$ で，

$$q_n=0\times q_{n-1}+\frac{1}{6}(1-q_{n-1})=\frac{1}{6}-\frac{1}{6}q_{n-1}$$

変形すると，$q_n-\dfrac{1}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(q_{n-1}-\dfrac{1}{7}\right)$ となり，

$$q_n-\frac{1}{7}=\left(q_1-\frac{1}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$q_n=\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$ ………②

なお，$q_1=0$ より，②は $n=1$ のときも成立している。

コメント

(1)については，有名な知見をもとに解きましたが，それと同じ立脚点では，続く設問に対して難攻します。考え方の融通無碍な切り換えの要求されるところが，最大の難所となっています。

問　題

最初に 1 の目が上面にあるようにサイコロが置かれている。その後，4 つの側面から 1 つの面を無作為に選び，その面が上面となるように置き直す操作を n 回繰り返す。なお，サイコロの向かい合う面の目の数の和は 7 である。

(1) 最後に 1 の目が上面にある確率を求めよ。

(2) 最後に上面にある目の数の期待値を求めよ。　[2012]

解答例

(1) 操作を n 回繰り返した後，サイコロの上面が 1 である確率を p_n，6 である確率を q_n とおくと，上面が 2, 3, 4, 5 のいずれかである確率は $1-p_n-q_n$ となる。

さて，$n+1$ 回目に上面が 1 となるのは，n 回目に上面が 2, 3, 4, 5 のいずれかであり，次に $\frac{1}{4}$ の確率で 1 の側面を選んで上面となるように置き直せばよいことから，

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目に上面が 6 となるのは，同様に考えて，

$$q_{n+1}=\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$p_{n+1}=q_{n+1}$ となり，$p_1=q_1=0$ から，$n\geqq1$ で $p_n=q_n$ である。

①に代入すると，$p_{n+1}=\frac{1}{4}-\frac{1}{2}p_n$ となり，$p_{n+1}-\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{6}\right)$ から，

$$p_n-\frac{1}{6}=\left(p_1-\frac{1}{6}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

よって，$p_n=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

(2) n 回目に上面が 2, 3, 4, 5 となるいずれの場合も対等なので，その確率は，それぞれ $\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)$ ずつである。

操作を n 回繰り返した後，サイコロの上面の目の数の期待値 E は，$p_n=q_n$ から，

$$E=1\cdot p_n+(2+3+4+5)\cdot\frac{1}{4}(1-p_n-q_n)+6q_n$$
$$=p_n+\frac{7}{2}(1-2p_n)+6p_n=\frac{7}{2}$$

コメント

漸化式の確率への応用として有名な問題です。過去問を挙げると，きりがないくらい出題されています。

問　題

AとBの2人が, 1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1回めはAが投げる。

1, 2, 3の目が出たら, 次の回には同じ人が投げる。

4, 5の目が出たら, 次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら, 投げた人を勝ちとし, それ以降は投げない。

(1) n回目にAがサイコロを投げる確率a_nを求めよ。

(2) ちょうどn回目のサイコロ投げでAが勝つ確率p_nを求めよ。

(3) n回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率q_nを求めよ。 [2011]

解答例

(1) n回目にA, Bがサイコロを投げる確率を, それぞれa_n, b_nとおくと, 条件より, $a_1=1$, $b_1=0$である。

さて, $n+1$回目にAがサイコロを投げるのは, n回目にAがサイコロを投げ1, 2, 3のいずれかの目が出るか, またはn回目にBがサイコロを投げ4, 5のいずれかの目が出るときなので,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{3}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

また, $n+1$回目にBがサイコロを投げるのは, n回目にAがサイコロを投げ4, 5のいずれかの目が出るか, またはn回目にBがサイコロを投げ1, 2, 3のいずれかの目が出るときなので,

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots②$$

①＋②より, $a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{5}{6}(a_n+b_n)$となり,

$$a_n+b_n=(a_1+b_1)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots③$$

①－②より, $a_{n+1}-b_{n+1}=\frac{1}{6}(a_n-b_n)$となり,

$$a_n-b_n=(a_1-b_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より, $a_n=\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$

(2) n回目のサイコロ投げでAが勝つのは, n回目にAがサイコロを投げ, 6の目を出すときより, その確率p_nは, (1)より,

$$p_n=\frac{1}{6}a_n=\frac{1}{12}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}\right\}$$

(3)　n 回以内のサイコロ投げで A が勝つ確率 q_n は, (2)より,

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}p_k=\frac{1}{12}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^{k-1}+\left(\frac{1}{6}\right)^{k-1}\right\}=\frac{1}{12}\left\{\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n}{1-\frac{5}{6}}+\frac{1-\left(\frac{1}{6}\right)^n}{1-\frac{1}{6}}\right\}$$

$$=\frac{1}{12}\cdot 6\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}+\frac{1}{12}\cdot\frac{6}{5}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^n\right\}=\frac{3}{5}-\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{10}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

コメント

確率を計算するときに, 漸化式を立てることが有効なタイプの問題です。なお, (2)は疑心暗鬼になってしまう不思議な設問です。

問　題

　n を 3 以上の自然数とする。サイコロを n 回投げ，出た目の数をそれぞれ順に X_1，X_2，…，X_n とする。$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ に対して $X_i=X_{i-1}$ となる事象を A_i とする。

(1)　A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n を求めよ。

(2)　A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　A_2，A_3，…，A_n が 1 つも起こらないのは，$X_1\neq X_2\neq X_3\neq\cdots\neq X_{n-1}\neq X_n$ の場合より，その確率は，

$$1\times\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\cdots\times\frac{5}{6}=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

　これより，A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 1 つが起こる確率 p_n は，

$$p_n=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

(2)　A_2，A_3，…，A_n のうち，1 つだけが起こるのは，$X_1=X_2\neq X_3\neq\cdots\neq X_{n-1}\neq X_n$，$X_1\neq X_2=X_3\neq\cdots\neq X_{n-1}\neq X_n$，…，$X_1\neq X_2\neq X_3\neq\cdots\neq X_{n-1}=X_n$ の場合より，その確率は，

$${}_{n-1}\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{n-1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}=\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

　これより，A_2，A_3，…，A_n のうち少なくとも 2 つが起こる確率 q_n は，(1)の結果を合わせて，

$$q_n=p_n-\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}-\frac{n-1}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=1-\frac{n+4}{5}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$$

コメント

　余事象を考える確率の問題ですが，2000 年に出された類似した設定の問題と比べると，かなり基本的です。

問　題

$X,\ Y,\ Z$ と書かれたカードがそれぞれ 1 枚ずつある。この中から 1 枚のカードが選ばれたとき, xy 平面上の点 P を次の規則にしたがって移動する。

・X のカードが選ばれたとき, P を x 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Y のカードが選ばれたとき, P を y 軸の正の方向に 1 だけ移動する。

・Z のカードが選ばれたとき, P は移動せずそのままの位置にとどまる。

(1)　n を正の整数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。X のカードと Y のカードの 2 枚から無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。

(2)　n を正の 3 の倍数とする。最初, 点 P を原点の位置におく。X のカード, Y のカード, Z のカードの 3 枚のカードから無作為に 1 枚を選び, P を, 上の規則にしたがって移動するという試行を n 回繰り返す。

(i)　n 回の試行の後に P が到達可能な点の個数を求めよ。

(ii)　P が到達する確率が最大の点をすべて求めよ。　[2009]

解答例

(1)　(i)　k を $0\leqq k\leqq n$ の整数として, X のカードが k 回, Y のカードが $n-k$ 回選ばれたとき, 最初, 原点にあった点 P は点 $(k,\ n-k)$ に到達する。

この点は線分 $x+y=n$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上の格子点であるので, その個数は $n+1$ である。

(ii)　点 $(k,\ n-k)$ に到達する確率 $p(k)$ は,

$$p(k)={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^k\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}={}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{n!}{k!(n-k)!}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

これより, $\dfrac{p(k+1)}{p(k)}=\dfrac{k!(n-k)!}{(k+1)!(n-k-1)!}=\dfrac{n-k}{k+1}$ となり,

$$\frac{p(k+1)}{p(k)}>1 \iff \frac{n-k}{k+1}>1 \iff k<\frac{n-1}{2}$$

$$\frac{p(k+1)}{p(k)}=1 \iff \frac{n-k}{k+1}=1 \iff k=\frac{n-1}{2}$$

$$\frac{p(k+1)}{p(k)}<1 \iff \frac{n-k}{k+1}<1 \iff k>\frac{n-1}{2}$$

(a)　n が奇数のとき

$$p(0)<\cdots<p\left(\frac{n-3}{2}\right)<p\left(\frac{n-1}{2}\right)=p\left(\frac{n+1}{2}\right)>p\left(\frac{n+3}{2}\right)>\cdots>p(n)$$

よって，$p(k)$ は $k=\dfrac{n-1}{2}$，$\dfrac{n+1}{2}$ のとき最大となり，このとき点 P は,

$$\mathrm{P}\left(\frac{n-1}{2},\ \frac{n+1}{2}\right),\ \mathrm{P}\left(\frac{n+1}{2},\ \frac{n-1}{2}\right)$$

(b)　n が偶数のとき

$$p(0)<\cdots<p\left(\frac{n-2}{2}\right)<p\left(\frac{n}{2}\right)>p\left(\frac{n+2}{2}\right)>\cdots>p(n)$$

よって，$p(k)$ は $k=\dfrac{n}{2}$ のとき最大となり，このとき点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{n}{2},\ \dfrac{n}{2}\right)$ である。

(2)　(i)　$k,\ l$ を $0\leqq k\leqq n,\ 0\leqq l\leqq n,\ 0\leqq k+l\leqq n$ の整数として, X のカードが k 回, Y のカードが l 回, Z のカードが $n-k-l$ 回選ばれたとき，最初，原点にあった点 P は点 $(k,\ l)$ に到達する。

この点は領域 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq n$ 内の格子点であるので，その個数は

$$1+2+\cdots+(n+1)=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(ii)　点 $(k,\ l)$ に到達する確率 $p(k,\ l)$ は，$k+l=m$ として, m を固定すると,

$$p(k,\ l)=\frac{n!}{k!l!(n-m)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\frac{m!}{k!l!}\cdot\frac{n!}{m!(n-m)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

i を 0 以上の整数として, (1)の結果を利用すると,

(a)　m が奇数 $(m=2i+1)$ のとき

$p(k,\ l)$ は，$(k,\ l)=\left(\dfrac{m-1}{2},\ \dfrac{m+1}{2}\right),\ \left(\dfrac{m+1}{2},\ \dfrac{m-1}{2}\right)$ で最大となる。

このとき，$q_{2i+1}=p\left(\dfrac{m-1}{2},\ \dfrac{m+1}{2}\right)=p\left(\dfrac{m+1}{2},\ \dfrac{m-1}{2}\right)$ とおくと,

$$q_{2i+1}=p(i,\ i+1)=\frac{n!}{i!(i+1)!(n-2i-1)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(b)　m が偶数 $(m=2i)$ のとき

$p(k,\ l)$ は，$(k,\ l)=\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m}{2}\right)$ で最大となる。

このとき，$q_{2i}=p\left(\dfrac{m}{2},\ \dfrac{m}{2}\right)$ とおくと,

$$q_{2i}=p(i,\ i)=\frac{n!}{(i!)^2(n-2i)!}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(a)(b)より，$\dfrac{q_{2i+1}}{q_{2i}}=\dfrac{(i!)^2(n-2i)!}{i!(i+1)!(n-2i-1)!}=\dfrac{n-2i}{i+1}$

$$\frac{q_{2i+2}}{q_{2i+1}}=\frac{i!(i+1)!(n-2i-1)!}{\{(i+1)!\}^2(n-2i-2)!}=\frac{n-2i-1}{i+1}$$

n は正の 3 の倍数より,

$$\frac{q_{2i+1}}{q_{2i}}>1\ \Leftrightarrow\ \frac{n-2i}{i+1}>1\ \Leftrightarrow\ i<\frac{n-1}{3}\ \Leftrightarrow\ i\leqq\frac{n}{3}-1\cdots\cdots\cdots①$$

$$\frac{q_{2i+1}}{q_{2i}}<1\ \Leftrightarrow\ \frac{n-2i}{i+1}<1\ \Leftrightarrow\ i>\frac{n-1}{3}\ \Leftrightarrow\ i\geqq\frac{n}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

$$\frac{q_{2i+2}}{q_{2i+1}}>1 \iff \frac{n-2i-1}{i+1}>1 \iff i<\frac{n-2}{3} \iff i \leqq \frac{n}{3}-1 \cdots\cdots\cdots ③$$

$$\frac{q_{2i+2}}{q_{2i+1}}<1 \iff \frac{n-2i-1}{i+1}<1 \iff i>\frac{n-2}{3} \iff i \geqq \frac{n}{3} \cdots\cdots\cdots ④$$

①②より，$q_0<q_1$，$q_2<q_3$，…，$q_{\frac{2}{3}n-2}<q_{\frac{2}{3}n-1}$，$q_{\frac{2}{3}n}>q_{\frac{2}{3}n+1}$，$q_{\frac{2}{3}n+2}>q_{\frac{2}{3}n+3}$，…

③④より，$q_1<q_2$，$q_3<q_4$，…，$q_{\frac{2}{3}n-1}<q_{\frac{2}{3}n}$，$q_{\frac{2}{3}n+1}>q_{\frac{2}{3}n+2}$，$q_{\frac{2}{3}n+3}>q_{\frac{2}{3}n+4}$，…

以上より，q_m は $m=\frac{2}{3}n$ のとき，すなわち $q_{\frac{2}{3}n}=p\left(\frac{n}{3},\ \frac{n}{3}\right)$ が最大となり，このとき点 $\mathrm{P}\left(\frac{n}{3},\ \frac{n}{3}\right)$ である。

コメント

(2)の結論は予測できるものの，それを示すのは困難を極めます。(1)の結論を利用しても上記の程度の記述量が必要です。

問　題

n を 3 以上の整数とする。$2n$ 枚のカードがあり，そのうち赤いカードの枚数は 6，白いカードの枚数は $2n-6$ である。これら $2n$ 枚のカードを，箱 A と箱 B に n 枚ずつ無作為に入れる。2 つの箱の少なくとも一方に赤いカードがちょうど k 枚入っている確率を p_k とする。

(1)　p_2 を n の式で表せ。さらに，p_2 を最大にする n をすべて求めよ。

(2)　$p_1+p_2<p_0+p_3$ を満たす n をすべて求めよ。　[2008]

解答例

(1)　箱 A に(赤，白)$=(2,\ n-2)$枚，箱 B に(赤，白)$=(4,\ n-4)$枚の場合と，箱 B に(赤，白)$=(2,\ n-2)$枚，箱 A に(赤，白)$=(4,\ n-4)$枚の場合は，確率が同じなので, 2 つの箱の少なくとも一方に赤が 2 枚入っている確率 p_2 は, $n\geqq 4$ のとき，

$$p_2=\frac{{}_6\mathrm{C}_2\times{}_{2n-6}\mathrm{C}_{n-2}\times 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}=\frac{30\cdot\dfrac{(2n-6)!}{(n-2)!(n-4)!}}{\dfrac{(2n)!}{n!n!}}$$

$$=\frac{30n(n-1)n(n-1)(n-2)(n-3)}{2n(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)}$$

$$=\frac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$n=3$ のときは $p_2=0$ となり，このときも$(*)$は成立する。

さて, $n\geqq 4$ のとき，$f(n)=\dfrac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}$ とおくと，

$$\frac{f(n+1)}{f(n)}=\frac{\dfrac{15(n+1)n(n-2)}{4(2n+1)(2n-1)(2n-3)}}{\dfrac{15n(n-1)(n-3)}{4(2n-1)(2n-3)(2n-5)}}=\frac{(n+1)(n-2)(2n-5)}{(n-1)(n-3)(2n+1)}$$

ここで，$\dfrac{f(n+1)}{f(n)}>1$ すなわち $f(n)<f(n+1)$ を満たす n の範囲は,

$$(n+1)(n-2)(2n-5)>(n-1)(n-3)(2n+1)$$

よって，$n+10>2n+3$ から, $n<7$ となる。

すると，$n<7$ のとき $f(n)<f(n+1)$，$n=7$ のとき $f(n)=f(n+1)$，$n>7$ のとき $f(n)>f(n+1)$ より，

$$f(4)<f(5)<f(6)<f(7)=f(8)>f(9)>f(10)\cdots\cdots$$

以上より，p_2 を最大にする n は，$n=7,\ 8$ である。

(2)　(1)から，$p_2=\dfrac{30\times{}_{2n-6}\mathrm{C}_{n-2}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$ である。

(i)　$n \geqq 6$ のとき

$$p_0 = \frac{{}_{2n-6}\mathrm{C}_n \times 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n},\quad p_1 = \frac{{}_6\mathrm{C}_1 \times {}_{2n-6}\mathrm{C}_{n-1} \times 2}{{}_{2n}\mathrm{C}_n},\quad p_3 = \frac{{}_6\mathrm{C}_3 \times {}_{2n-6}\mathrm{C}_{n-3}}{{}_{2n}\mathrm{C}_n}$$

ここで，$p_1 + p_2 < p_0 + p_3$ より，

$$12 \times {}_{2n-6}\mathrm{C}_{n-1} + 30 \times {}_{2n-6}\mathrm{C}_{n-2} < 2 \times {}_{2n-6}\mathrm{C}_n + 20 \times {}_{2n-6}\mathrm{C}_{n-3}$$

$$\frac{12}{(n-1)!(n-5)!} + \frac{30}{(n-2)!(n-4)!} < \frac{2}{n!(n-6)!} + \frac{20}{(n-3)!(n-3)!}$$

まとめると，$n^3 - 6n^2 + 5n + 6 < 0$ となり，$(n-2)(n^2 - 4n - 3) < 0$ から，

$$n < 2 - \sqrt{7},\quad 2 < n < 2 + \sqrt{7}$$

すると，$2 + \sqrt{7} < 5$ から，適する n は存在しない。

(ii)　$n = 5$ のとき

$$p_1 + p_2 = \frac{12 \times {}_4\mathrm{C}_4}{{}_{10}\mathrm{C}_5} + \frac{30 \times {}_4\mathrm{C}_3}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{132}{{}_{10}\mathrm{C}_5},\quad p_0 + p_3 = 0 + \frac{20 \times {}_4\mathrm{C}_2}{{}_{10}\mathrm{C}_5} = \frac{120}{{}_{10}\mathrm{C}_5}$$

よって，$p_1 + p_2 < p_0 + p_3$ は成立しない。

(iii)　$n = 4$ のとき

$$p_1 + p_2 = 0 + \frac{30 \times {}_2\mathrm{C}_2}{{}_8\mathrm{C}_4} = \frac{30}{{}_8\mathrm{C}_4},\quad p_0 + p_3 = 0 + \frac{20 \times {}_2\mathrm{C}_1}{{}_8\mathrm{C}_4} = \frac{40}{{}_8\mathrm{C}_4}$$

よって，$p_1 + p_2 < p_0 + p_3$ は成立する。

(iv)　$n = 3$ のとき

$$p_0 = p_1 = p_2 = 0,\quad p_3 = 1$$

よって，$p_1 + p_2 < p_0 + p_3$ は成立する。

(i)～(iv)より，$p_1 + p_2 < p_0 + p_3$ を満たす n は，$n = 3,\ 4$ である。

コメント

確率の標準的な計算問題ですが，多量の計算が必要です。(2)の記述では，式変形のプロセスをかなり省略しています。

問　題

1 が書かれたカードが 1 枚, 2 が書かれたカードが 1 枚, …, n が書かれたカードが 1 枚の全部で n 枚のカードからなる組がある。この組から 1 枚を抜き出して元に戻す操作を 3 回行う。抜き出したカードに書かれた数を a, b, c とするとき, 得点 X を次の規則(i), (ii)に従って定める。

(i)　a, b, c がすべて異なるとき, X は a, b, c のうちの最大でも最小でもない値とする。

(ii)　a, b, c のうちに重複しているものがあるとき, X はその重複した値とする。

$1\leqq k\leqq n$ を満たす k に対して, $X=k$ となる確率を p_k とする。

(1)　p_k を n と k で表せ。

(2)　p_k が最大となる k を n で表せ。　[2007]

解答例

(1)　n 枚のカードから 1 枚を元に戻して 3 回抜き出す n^3 通りが同様に確からしい。

(i)　a, b, c がすべて異なるとき

$X=k$ となるのは, k のカードを 1 回, k より小さいカードを 1 回, k より大きいカードを 1 回抜き出す場合であり, その抜き出す順序も考えて, この確率は,

$$\frac{1\cdot(k-1)(n-k)}{n^3}\times 3!=\frac{6(k-1)(n-k)}{n^3}$$

(ii)　a, b, c のうち 2 個だけが等しいとき

$X=k$ となるのは, k のカードを 2 回, k 以外のカードを 1 回抜き出す場合であり, その抜き出す順序も考えて, この確率は, $\dfrac{1^2\cdot(n-1)}{n^3}\times 3=\dfrac{3(n-1)}{n^3}$

(iii)　a, b, c がすべて等しいとき

$X=k$ となるのは, k のカードを 3 回抜き出す場合であり, この確率は, $\dfrac{1^3}{n^3}=\dfrac{1}{n^3}$

(i)～(iii)より, $X=k$ となる確率を p_k は,

$$p_k=\frac{6(k-1)(n-k)}{n^3}+\frac{3(n-1)}{n^3}+\frac{1}{n^3}=\frac{1}{n^3}\left\{-6k^2+6(n+1)k-3n-2\right\}$$

(2)　(1)より, $p_k=\dfrac{1}{n^3}\left\{-6\left(k-\dfrac{n+1}{2}\right)^2+\dfrac{3(n+1)^2}{2}-3n-2\right\}$

よって, n が奇数のとき $k=\dfrac{n+1}{2}$ のとき p_k は最大となる。また, n が偶数のとき $k=\dfrac{n}{2}$, $\dfrac{n+2}{2}$ のとき p_k は最大となる。

コメント

(2)は 2 次関数の最大値を求めるものでした。なぜか付録のような扱いですが。

問　題

1, 2, 3, 4 が 1 つずつ記された 4 枚のカードがある。これらのカードから 1 枚を抜き出し元に戻すという試行を n 回繰り返す。抜き出した n 個の数の和を X_n とし，積を Y_n とする。

(1) $X_n \leqq n+3$ となる確率を n で表せ。

(2) Y_n が 8 で割り切れる確率を n で表せ。 [2006]

解答例

(1) 4 枚のカードから 1 枚を n 回抜き出す 4^n 通りの場合が同様に確からしい。

まず，n 個の数の和 $X_n \leqq n+3$ となるのは，1 を抜き出した回数が $n-3$ 回以上である。ただし, $n \geqq 3$ とする。

(i) 1 を n 回抜き出したとき　この確率は $\dfrac{1}{4^n}$ である。

(ii) 1 を $n-1$ 回抜き出したとき

残り 1 回は, 2, 3, 4 のいずれかを抜き出した場合より，この確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 3}{4^n} = \frac{3n}{4^n}$$

(iii) 1 を $n-2$ 回抜き出したとき

残り 2 回は，ともに 2 を抜き出したか，または 2 を 1 回，3 を 1 回抜き出した場合より，この確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1 \times {}_{n-1}\mathrm{C}_1}{4^n} = \frac{n(n-1)+2n(n-1)}{2\cdot 4^n} = \frac{3n(n-1)}{2\cdot 4^n}$$

(iv) 1 を $n-3$ 回抜き出したとき

残り 3 回は，すべて 2 を抜き出した場合より，この確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{4^n} = \frac{n(n-1)(n-2)}{6\cdot 4^n}$$

(i)～(iv)より，$X_n \leqq n+3$ となる確率は, $n \geqq 3$ のとき,

$$\frac{1}{4^n} + \frac{3n}{4^n} + \frac{3n(n-1)}{2\cdot 4^n} + \frac{n(n-1)(n-2)}{6\cdot 4^n} = \frac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6\cdot 4^n} \cdots\cdots\cdots ①$$

なお，$n=1$ のとき，$X_1 \leqq 4$ となる確率は 1 である。そこで，①に $n=1$ をあてはめると，$\dfrac{2\cdot 3\cdot 4}{6\cdot 4} = 1$ となり成立する。

また，$n=2$ のとき，$X_2 \leqq 5$ となる場合は，(1, 1)，(1, 2)，(1, 3)，(1, 4)，(2, 1)，(2, 2)，(2, 3)，(3, 1)，(3, 2)，(4, 1) の 10 通りより，その確率は $\dfrac{10}{4^2} = \dfrac{5}{8}$ である。そこで，①に $n=2$ をあてはめると，$\dfrac{3\cdot 4\cdot 5}{6\cdot 4^2} = \dfrac{5}{8}$ となり成立する。

以上より，$X_n \leqq n+3$ となる確率は，$\dfrac{(n+1)(n+2)(n+3)}{6\cdot 4^n}$ である。

(2) n 個の数の積 Y_n が 8 で割り切れない場合を考える。ただし, $n\geqq 2$ とする。

(i) 1 または 3 を n 回抜き出したとき　この確率は $\dfrac{2^n}{4^n}$ である。

(ii) 1 または 3 を $n-1$ 回抜き出したとき

残り 1 回は, 2, 4 のいずれかを抜き出した場合より，この確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1\times 2^{n-1}+{}_n\mathrm{C}_1\times 2^{n-1}}{4^n}=\frac{n\cdot 2^n}{4^n}$$

(iii) 1 または 3 を $n-2$ 回抜き出したとき

残り 2 回は，ともに 2 を抜き出した場合より，この確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2\times 2^{n-2}}{4^n}=\frac{n(n-1)\cdot 2^{n-3}}{4^n}$$

(i)～(iii)より，Y_n が 8 で割り切れない確率は, $n\geqq 2$ のとき,

$$\frac{2^n}{4^n}+\frac{n\cdot 2^n}{4^n}+\frac{n(n-1)\cdot 2^{n-3}}{4^n}=\frac{(n^2+7n+8)\cdot 2^{n-3}}{4^n}=\frac{n^2+7n+8}{2^{n+3}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

なお，$n=1$ のとき，Y_1 が 8 で割り切れない確率は 1 である。そこで，②に $n=1$ をあてはめると，$\dfrac{16}{2^4}=1$ となり成立する。

以上より，Y_n が 8 で割り切れない確率は $\dfrac{n^2+7n+8}{2^{n+3}}$ であるので，Y_n が 8 で割り切れる確率は，$1-\dfrac{n^2+7n+8}{2^{n+3}}$ となる。

コメント

$n=1$ などのチェックは必要ですが，正確に場合分けをすることがすべてと言っても過言ではありません。

問　題

A と B の 2 人があるゲームを繰り返し行う。1 回ごとのゲームで A が B に勝つ確率は p, B が A に勝つ確率は $1-p$ であるとする。n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になる確率を x_n とする。

(1)　x_n を p と n で表せ。

(2)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき，x_n を最大にする n を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　n 回目のゲームで初めて A と B の双方が 4 勝以上になるのは, 次の 2 つの場合がある。ただし, $n\geqq 8$ とする。

(i)　$n-1$ 回目までのゲームで A が 3 勝, B は 4 勝以上のとき

n 回目は A が勝つことより，その確率は,

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^3(1-p)^{n-4}\cdot p = {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^4(1-p)^{n-4} $$

(ii)　$n-1$ 回目までのゲームで A が 4 勝以上, B は 3 勝のとき

n 回目は B が勝つことより，その確率は,

$$ {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^{n-4}(1-p)^3\cdot(1-p) = {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^{n-4}(1-p)^4 $$

(i)(ii)より，$x_n = {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^4(1-p)^{n-4} + {}_{n-1}\mathrm{C}_3 p^{n-4}(1-p)^4$

$$ = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)p^4(1-p)^4\{(1-p)^{n-8}+p^{n-8}\} $$

なお, $n\leqq 7$ のときは，$x_n=0$ である。

(2)　$p=\dfrac{1}{2}$ のとき, $n\geqq 8$ において,

$$ x_n = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{n-8}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-8}\right\} $$
$$ = \frac{1}{6}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^8\left(\frac{1}{2}\right)^{n-9} = \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^n $$

すると，$x_{n+1}-x_n = \dfrac{1}{3}n(n-1)(n-2)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1} - \dfrac{1}{3}(n-1)(n-2)(n-3)\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

$$ = \frac{1}{3}(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\{n-2(n-3)\} $$
$$ = \frac{1}{3}(n-1)(n-2)(6-n)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1} $$

$n\geqq 8$ のとき，$x_{n+1}-x_n<0$ より，$x_n>x_{n+1}$ となり，$x_8>x_9>x_{10}>\cdots\cdots$

$n\leqq 7$ のときは $x_n=0$ から，x_n は $n=8$ のとき最大となる。

コメント

典型問題の 1 つです。(2)では，x_n が複雑な式ではなかったので，階差数列を考えました。

問　題

n 枚のカードがあり，1 枚目のカードに 1，2 枚目のカードに 2，…，n 枚目のカードに n が書かれている。これらの n 枚のカードのから無作為に 1 枚を取り出してもとに戻し，もう一度無作為に 1 枚を取り出す。取り出されたカードに書かれている数をそれぞれ x, y とする。また，k を n の約数とする。

(1)　$x+y$ が k の倍数となる確率を求めよ。

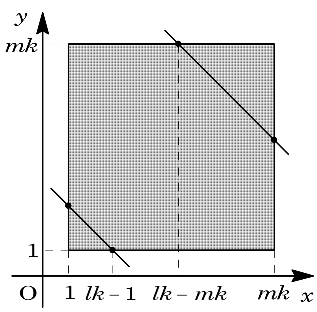
(2)　さらに，$k=pq$ とする。ただし，p, q は異なる素数である。xy が k の倍数となる確率を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　k を n の約数とするとき，$\dfrac{n}{k}=m$ とおき，$2n$ 以下の k の倍数を表すと，

$$k,\ 2k,\ \cdots,\ mk,\ (m+1)k,\ \cdots,\ 2mk$$

さて，$1\leqq x\leqq n$，$1\leqq y\leqq n$ を満たし，$x+y=lk$ $(1\leqq l\leqq 2m)$ となる $(x,\ y)$ は，右図の直線上の，正方形の内部または辺上に位置する格子点として図示できる。



(i)　$1\leqq l\leqq m$ のとき

線分 $x+y=lk$ $(1\leqq x\leqq lk-1)$ 上の格子点の個数は，$(lk-1)-1+1=lk-1$

(ii)　$m+1\leqq l\leqq 2m$ のとき

線分 $x+y=lk$ $(lk-mk\leqq x\leqq mk)$ 上の格子点の個数は，

$$mk-(lk-mk)+1=2mk-lk+1$$

(i)(ii)より，格子点の総数 N は，$N=\displaystyle\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l=m+1}^{2m}(2mk-lk+1)$ となる。

そこで，$l'=2m-l+1$ とおくと，

$$N=\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l'=1}^{m}\left\{2mk-(2m+1-l')k+1\right\}$$

$$=\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l'=1}^{m}(l'k-k+1)=\sum_{l=1}^{m}(lk-1)+\sum_{l=1}^{m}(lk-k+1)$$

$$=\sum_{l=1}^{m}(2lk-k)=2k\cdot\frac{1}{2}m(m+1)-km=km^2=k\cdot\frac{n^2}{k^2}=\frac{n^2}{k}$$

よって，$x+y$ が k の倍数となる確率は，$\dfrac{N}{n^2}=\dfrac{n^2}{k}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{k}$ である。

(2)　xy が p の倍数である事象を A，q の倍数である事象を B とすると，p と q が異なる素数なので，xy が $k=pq$ の倍数となる事象は $A\cap B$ となる。

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

さて，p は n の約数なので，x が p の倍数である確率は $\frac{1}{p}$，y が p の倍数である確率も $\frac{1}{p}$ である。

すると, x と y がともに p の倍数でない事象 $\overline{A}$ の確率は,

$$P(\overline{A})=\left(1-\frac{1}{p}\right)^2=\frac{(p-1)^2}{p^2}$$

同様にして，$P(\overline{B})=\left(1-\frac{1}{q}\right)^2=\frac{(q-1)^2}{q^2}$

また，x が p の倍数または q の倍数である確率は $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{pq}$，$y$ が p の倍数または q の倍数である確率も $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}-\frac{1}{pq}$ である。

すると, x と y がともに p の倍数でも q の倍数でもない事象 $\overline{A}\cap\overline{B}$ の確率は,

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(1-\frac{1}{p}-\frac{1}{q}+\frac{1}{pq}\right)^2=\frac{(pq-p-q+1)^2}{p^2q^2}=\frac{(p-1)^2(q-1)^2}{p^2q^2}$$

以上より, xy が k の倍数となる確率は,

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-\frac{(p-1)^2}{p^2}-\frac{(q-1)^2}{q^2}+\frac{(p-1)^2(q-1)^2}{p^2q^2}\\&=\frac{p^2q^2-q^2(p-1)^2-p^2(q-1)^2+(p-1)^2(q-1)^2}{p^2q^2}\\&=\frac{\{p^2-(p-1)^2\}\{q^2-(q-1)^2\}}{p^2q^2}=\frac{(2p-1)(2q-1)}{p^2q^2}\end{aligned}$$

コメント

難易度の高い確率の問題です。p, q, k, n に具体的に数値をあてはめて，じっくり考えると解法の道筋が見えてきます。なお，(2)では場合分けを避けたかったので，余事象を利用して解いています。

問　題

1 が書かれたカードが 2 枚, 2 が書かれたカードが 2 枚, …, n が書かれたカードが 2 枚の合計 $2n$ 枚のカードがある。カードをよく混ぜ合わせた後, 1 枚ずつ左から順に並べる。このとき, カードに書かれている数の列を, a_1, a_2, …, a_{2n} とする。$a_k \geqq a_{k+1}$ $(1 \leqq k < 2n)$ となる最小の k を X とする。

(1)　$X=1$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=n$ となる確率を求めよ。

(3)　m は $1 \leqq m < n$ を満たす整数とする。$X \geqq m$ となる確率を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$X=1$ となるのは $a_1 \geqq a_2$ の場合で, a_3, …, a_{2n} は任意である。

(i)　$a_1 > a_2$ のとき

1 から n までの数から 2 つ選び, 大きい方を a_1, 小さい方を a_2 に対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので, このときの確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_2 \times 2^2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n(n-1)}{2n(2n-1)} = \frac{n-1}{2n-1}$$

(ii)　$a_1 = a_2$ のとき

1 から n までの数から 1 つ選び, それを a_1, a_2 に対応させる。その数の書かれているカードは 2 枚あるので, このときの確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_1 \times 2}{{}_{2n}\mathrm{P}_2} = \frac{2n}{2n(2n-1)} = \frac{1}{2n-1}$$

(i)(ii)より, $X=1$ となる確率は, $\dfrac{n-1}{2n-1} + \dfrac{1}{2n-1} = \dfrac{n}{2n-1}$ である。

(2)　$X=n$ となるのは $a_1 < a_2 < a_3 < \cdots < a_{n-1} < a_n \geqq a_{n+1}$ の場合で, a_{n+2}, …, a_{2n} は任意である。このときは, $a_1=1$, $a_2=2$, $a_3=3$, …, $a_{n-1}=n-1$, $a_n=n$ の場合しかなく, しかも $a_n \geqq a_{n+1}$ はつねに成立する。

各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので, $X=n$ となる確率は,

$$\frac{2^n}{{}_{2n}\mathrm{P}_n} = \frac{2^n n!}{(2n)!}$$

(3)　$1 \leqq m < n$ を満たす整数に対して, $X \geqq m$ となるのは $a_1 < a_2 < \cdots < a_{m-1} < a_m$ の場合で, a_{m+1}, …, a_{2n} は任意である。

すると, 1 から n までの数から m 個選び, 小さい方から a_1, a_2, …, a_m を対応させる。各数の書かれているカードは 2 枚ずつあるので, $X \geqq m$ となる確率は,

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_m \times 2^m}{{}_{2n}\mathrm{P}_m} = \frac{\dfrac{n!}{(n-m)!\,m!}\cdot 2^m}{\dfrac{(2n)!}{(2n-m)!}} = \frac{2^m\,n!\,(2n-m)!}{(2n)!\,(n-m)!\,m!}$$

コメント

題意を読みとることができれば，有名な対応問題であることがわかります。このことは，(3)についても同様です。

問　題

最初の試行で 3 枚の硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く。次の試行で残った硬貨を同時に投げ，裏が出た硬貨を取り除く。以下この試行をすべての硬貨が取り除かれるまでくり返す。

(1)　試行が 1 回目で終了する確率 p_1，および 2 回目で終了する確率 p_2 を求めよ。

(2)　試行が n 回以上行われる確率 q_n を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　試行が 1 回目で終了するのは, 1 回目の結果がすべて裏のときである。

$$p_1=\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$$

試行が 2 回目で終了するのは，表の枚数に注目すると，次の 3 つの場合がある。

(i)　1 回目の結果が 3 枚→2 回目の結果が 0 枚のとき

1 回目の結果が 3 枚となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ で，このとき 2 回目の結果が 0 枚となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。

(ii)　1 回目の結果が 2 枚→2 回目の結果が 0 枚のとき

1 回目の結果が 2 枚となる確率は ${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$ で，このとき 2 回目の結果が 0 枚となる確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ である。

(iii)　1 回目の結果が 1 枚→2 回目の結果が 0 枚のとき

1 回目の結果が 3 枚となる確率は ${}_3\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$ で，このとき 2 回目の結果が 0 枚となる確率は $\frac{1}{2}$ である。

(i)(ii)(iii)より，試行が 2 回目で終了する確率は,

$$p_2=\frac{1}{8}\times\frac{1}{8}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{2}=\frac{19}{64}$$

(2)　n 回目の試行を行うときに，表が 3 枚，2 枚，1 枚である確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とすると，$q_n=a_n+b_n+c_n$ である。また，最初の試行は 3 枚の硬貨を投げるので，$a_1=1$，$b_1=c_1=0$ とすることができる。

n 回目の試行における表の枚数の推移を, (1)と同様に考えて,

$$a_{n+1}=\frac{1}{8}a_n\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots③$$

①＋②＋③より，$a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=\frac{7}{8}a_n+\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{2}c_n$ なので,

$$q_{n+1}=\frac{7}{8}a_n+\frac{3}{4}b_n+\frac{1}{2}(q_n-a_n-b_n)=\frac{3}{8}a_n+\frac{1}{4}b_n+\frac{1}{2}q_n\cdots\cdots\cdots④$$

さて，①より，$a_n=a_1\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

②に代入して，$b_{n+1}=\frac{1}{4}b_n+\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

$$b_{n+1}+3\left(\frac{1}{8}\right)^n=\frac{1}{4}\left\{b_n+3\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$$

$$b_n+3\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\left\{b_1+3\left(\frac{1}{8}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

$$b_n=3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-3\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$$

④に代入して，$q_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{3}{4}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\frac{3}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

$$q_{n+1}+3\left(\frac{1}{4}\right)^n-\left(\frac{1}{8}\right)^n=\frac{1}{2}\left\{q_n+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}\right\}$$

$$q_n+3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}-\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}=\left\{q_1+3\left(\frac{1}{4}\right)^0-\left(\frac{1}{8}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

以上より，$q_n=3\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}-3\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1}$

コメント

(1)と同じように(2)も考えると，上のような漸化式を解くことになります。設問に応じて考え方を変えるのは難しいことです。

問　題

1個のサイコロを n 回投げる。

(1)　$n \geqq 2$ のとき，1の目が少なくとも1回出て，かつ2の目も少なくとも1回出る確率を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ のとき，1の目が少なくとも2回出て，かつ2の目が少なくとも1回出る確率を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　1の目が少なくとも1回出る事象を A，2の目が少なくとも1回出る事象を B とすると，$\overline{A}$ は1の目が1回も出ない事象，$\overline{B}$ は2の目が1回も出ない事象，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は1と2の目がともに1回も出ない事象を表す。

$$P(\overline{A})=P(\overline{B})=\left(\frac{5}{6}\right)^n,\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1の目が少なくとも1回出て，かつ2の目も少なくとも1回出る事象は $A\cap B$ となるので，求める確率は，

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\}$$
$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

(2)　1の目が少なくとも2回出る事象を C とすると，$\overline{C}$ は1の目が1回も出ないかまたは1回だけ出る事象を表す。

$$P(\overline{C})=\left(\frac{5}{6}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

また，$\overline{C}\cap\overline{B}$ は2の目が1回も出なくて，1の目が1回も出ないかまたは1回だけ出る事象を表す。

$$P(\overline{C}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}\right)^n+\frac{n}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

1の目が少なくとも2回出て，かつ2の目が少なくとも1回出る事象は $C\cap B$ となるので，(1)と同様にして，求める確率は，

$$P(C\cap B)=1-\left\{P(\overline{C})+P(\overline{B})-P(\overline{C}\cap\overline{B})\right\}$$
$$=1-\left(1+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$
$$=1-\left(2+\frac{n}{5}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{n}{4}\right)\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

コメント

(1)は余事象を考えて処理をする頻出題です。(2)もまた，(1)とは独立に，この関係を用いました。(1)を誘導として設けた出題者の善意を無視してしまいましたが……。

問　題

箱 A, 箱 B のそれぞれに赤玉が 1 個, 白玉が 3 個, 合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後, 箱 A に赤玉が 1 個, 白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。　[1999]

解答例

箱 A に入っている赤玉の個数を a, 白玉の個数を b とすると, 次の場合がある。

$$(a,\ b)=(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2)$$

また, 題意の試行を n 回繰り返した後に, $(a,\ b)=(0,\ 4),\ (1,\ 3),\ (2,\ 2)$ となる確率をそれぞれ q_n, p_n, r_n とおく。

すると, $p_0=1$ で, $p_n+q_n+r_n=1$ ………①

次に, $n+1$ 回後に $(a,\ b)=(1,\ 3)$ となるのは, 次の 3 つの場合がある。

(i)　n 回後に $(a,\ b)=(0,\ 4)$ のとき

A から白, B から赤をとって交換する場合で, その確率は $1\times\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ となる。

(ii)　n 回後に $(a,\ b)=(1,\ 3)$ のとき

A から赤, B から赤をとって交換するか, または A から白, B から白をとって交換する場合で, その確率は $\dfrac{1}{4}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{5}{8}$ となる。

(iii)　n 回後に $(a,\ b)=(2,\ 2)$ のとき

A から赤, B から白をとって交換する場合で, その確率は $\dfrac{2}{4}\times 1=\dfrac{1}{2}$ となる。

(i)(ii)(iii)より, $p_{n+1}=\dfrac{1}{2}q_n+\dfrac{5}{8}p_n+\dfrac{1}{2}r_n$ ………②

すると①②より, $p_{n+1}=\dfrac{5}{8}p_n+\dfrac{1}{2}(1-p_n)=\dfrac{1}{8}p_n+\dfrac{1}{2}$

$$p_{n+1}-\frac{4}{7}=\frac{1}{8}\left(p_n-\frac{4}{7}\right)$$

よって, $p_n-\dfrac{4}{7}=\left(p_0-\dfrac{4}{7}\right)\left(\dfrac{1}{8}\right)^n=\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$ より, $p_n=\dfrac{4}{7}+\dfrac{3}{7}\left(\dfrac{1}{8}\right)^n$

コメント

確率と漸化式の融合問題です。

問　題

H 大学には 4 つの食堂があり，A 君と B さんは，それぞれ毎日正午に，前日とは異なる 3 つの食堂のうち 1 つを無作為に選んで昼食をとることにしている。最初の日，二人は別々の食堂で食事をしたとして，以下の確率を求めよ。

(1) n 日後に，はじめて二人が食堂で出会う確率。ただし$n \geqq 1$とする。

(2) n 日後に，二人が食堂で出会うのがちょうど 2 回目である確率。ただし$n \geqq 2$とする。 [1998]

解答例

(1) ある日, A と B が異なる食堂で食事をし，翌日は同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 2 = \frac{2}{9}$$

n 日後に，はじめて A と B が同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(1 - \frac{2}{9}\right)^{n-1} \cdot \frac{2}{9} = \frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-1}$$

(2) ある日, A と B が同じ食堂で食事をし，翌日も同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^2 \times 3 = \frac{1}{3}$$

以上まとめると，右のようになる。

翌日＼前日	同じ食堂	異なる食堂
同じ食堂	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{9}$
異なる食堂	$\frac{2}{3}$	$\frac{7}{9}$

n 日後に, A と B が同じ食堂で食事をするのが 2 回目であるのは,

(i) $n = 2$ のとき，その確率は，$\dfrac{2}{9} \times \dfrac{1}{3} = \dfrac{2}{27}$

(ii) $n \geqq 3$ のとき, k 日後（$1 \leqq k \leqq n-2$）に，はじめて同じ食堂で食事をすると,

$$\boxed{\text{最初}} \to \cdots \to \boxed{k-1\text{ 日後}} \to \boxed{k\text{日後}} \to \boxed{k+1\text{ 日後}} \to \cdots \to \boxed{n-1\text{ 日後}} \to \boxed{n\text{日後}}$$

$$\frac{7}{9} \quad \frac{7}{9} \qquad \frac{2}{9} \qquad \frac{2}{3} \qquad \frac{7}{9} \quad \frac{7}{9} \qquad \frac{2}{9}$$

その確率は，$\left(\dfrac{7}{9}\right)^{n-2} \cdot \dfrac{2}{9} \cdot \dfrac{2}{3} \cdot \left(\dfrac{7}{9}\right)^{(n-1)-(k+1)} \cdot \dfrac{2}{9} = \dfrac{8}{243}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{n-3}$

また，$n-1$ 日後に，はじめて同じ食堂で食事をする確率は,

$$\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} \cdot \frac{2}{9} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2}$$

よって求める確率は,

$$\sum_{k=1}^{n-2} \frac{8}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3} + \frac{2}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} = \frac{8(n-2)}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3} + \frac{2}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-2} = \frac{8n-2}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3}$$

$n = 2$ をあてはめると，$\dfrac{14}{243} \cdot \dfrac{9}{7} = \dfrac{2}{27}$ となり, (i)の場合を含む。

(i)(ii)より, n 日後に, A と B が同じ食堂で食事をするのが 2 回目である確率は,

$$\frac{8n-2}{243}\left(\frac{7}{9}\right)^{n-3}\quad(n\geqq 2)$$

コメント

(2)の(ii)で $k=n-1$ の場合を特別に考えなくてはいけないことは，一般的に考えておいて，例外があるかどうかで判断します。このとき，上の解のように状態の推移と推移確率を図にまとめておくと，わかりやすくなります。

問　題

1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC を平面上におく。△ABC を 1 つの辺に関して 180°折り返すという操作を繰り返し行う。辺 BC に関する折り返しをT_A，辺 CA に関する折り返しをT_B，辺 AB に関する折り返しをT_Cとする。△ABC は，最初 3 点 A, B, C がそれぞれ平面上の 3 点 O，B′，C′の上に置かれているとする。

(1) T_A，T_C，T_B，T_C，T_Aの順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を P とする。また，T_A，T_C，T_B，T_A，T_C，T_B，T_Aの順に折り返し操作を施したときの頂点 A の移り先を Q とする。$\theta=\angle\mathrm{POQ}$とするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

(2) 整数 k, l に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3k\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+3l\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$により定められる点 R は，$T_A$，$T_B$，$T_C$の折り返し操作を組み合わせることにより，点 A の移り先になることを示せ。

[2009]

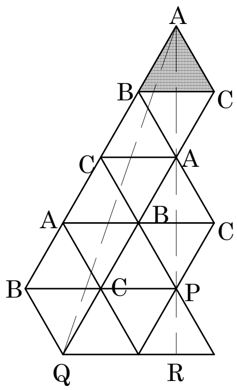
解答例

(1) 影をつけた 1 辺の長さが 2 の正三角形 ABC は，頂点が平面上で O，B′，C′の位置に置かれている。これを折り返してできる右図において，AP の延長上に点 R をとる。

すると，△AQR において，$\angle\mathrm{QAR}=\theta$，$\angle\mathrm{ARQ}=90°$，$\mathrm{AR}=5\sqrt{3}$，$\mathrm{QR}=3$ から，

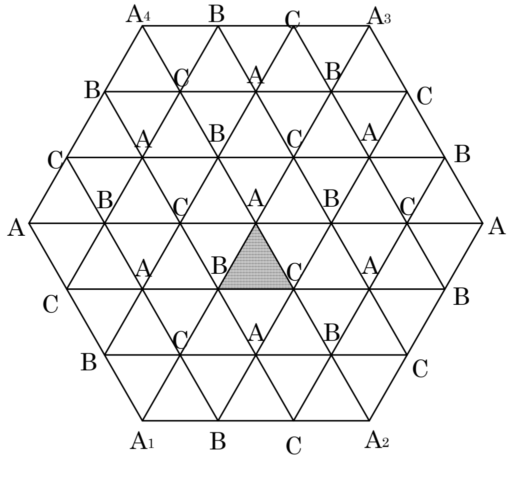
$$\tan\theta=\frac{\mathrm{QR}}{\mathrm{AR}}=\frac{3}{5\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{3}}{5}$$

$$\cos\theta=\sqrt{\frac{1}{1+\tan^2\theta}}=\sqrt{\frac{25}{28}}=\frac{5}{14}\sqrt{7}$$



(2) まず，T_A，T_C，T_B，T_A，T_C，T_Bの順に折り返す操作を「操作Ⅰ」，T_A，T_B，T_C，T_A，T_B，T_Cの順に折り返す操作を「操作Ⅱ」，T_B，T_C，T_A，T_B，T_C，T_Aの順に折り返す操作を「操作Ⅲ」，T_C，T_B，T_A，T_C，T_B，T_Aの順に折り返す操作を「操作Ⅳ」とする。

右図において，影をつけた三角形の頂点 A の移り先は，操作Ⅰによって A_1，操作Ⅱによって A_2，操作Ⅲによって A_3，操作Ⅳによって A_4 となり，



$$\overrightarrow{\mathrm{OA_1}}=3\overrightarrow{\mathrm{OB'}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA_2}}=3\overrightarrow{\mathrm{OC'}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA_3}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OB'}},\ \overrightarrow{\mathrm{OA_4}}=-3\overrightarrow{\mathrm{OC'}}$$

さて，整数 $k,\ l$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=3k\overrightarrow{\mathrm{OB'}}+3l\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=k(3\overrightarrow{\mathrm{OB'}})+l(3\overrightarrow{\mathrm{OC'}})$ から，

(i)　$k \geqq 0,\ l \geqq 0$ のとき

操作Ⅰを k 回，操作Ⅱを l 回組み合わせると，点Rは点Aの移り先となる。

(ii)　$k \geqq 0,\ l < 0$ のとき

操作Ⅰを k 回，操作Ⅳを $(-l)$ 回組み合わせると，点Rは点Aの移り先となる。

(iii)　$k < 0,\ l \geqq 0$ のとき

操作Ⅲを $(-k)$ 回，操作Ⅱを l 回組み合わせると，点Rは点Aの移り先となる。

(iv)　$k < 0,\ l < 0$ のとき

操作Ⅲを $(-k)$ 回，操作Ⅳを $(-l)$ 回組み合わせると，点Rは点Aの移り先となる。

コメント

(2)では，設定を自分で行います。この点が最も難しいところです。