《2018 入試対策》

筑波大学

理系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された筑波大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 関数

1　$f(x)$，$g(t)$ を，$f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ とおく。

(1)　$2g(t)-1=f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。　[2013]

2　x の方程式 $|\log_{10}x|=px+q$　($p,\ q$ は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする。

（Ⅰ）　3 つの解の比は，$1:2:3$ である。

（Ⅱ）　3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい。

このとき，$A=\log_{10}2$，$B=\log_{10}3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ。

[2012]

3　以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を示せ。

(2)　$2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3-3x+1=0$ の解であることを示せ。

(3)　$x^3-3x+1=(x-2\cos 80^\circ)(x-2\cos\alpha)(x-2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし $0^\circ<\alpha<\beta<180^\circ$ とする。　[2009]

4　$p,\ q$ を正の実数とする。x の方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ が 1 より大きい解をもつとき，点 $(\log_{10}p,\ \log_{10}q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。

[2008]

5　$f(x)=x^4+2x^2-4x+8$ とする。

(1)　$(x^2+t)^2-f(x)=(px+q)^2$ が x の恒等式となるような整数 $t,\ p,\ q$ の値を 1 組求めよ。

(2)　(1)で求めた $t,\ p,\ q$ の値を用いて方程式 $(x^2+t)^2=(px+q)^2$ を解くことにより，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。　[2006]

■ 図形と式

1　a を正の実数とする。2 つの関数

$$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3,\quad y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

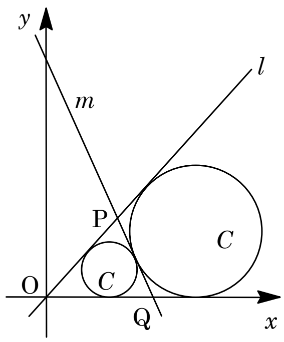
のグラフは，2 点 A, B で交わる。ただし, A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また, 2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を l とする。

(1)　2 点 A, B の座標を a を用いて表せ。

(2)　直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3)　原点と直線 l の距離 d を a を用いて表せ。また，$a>0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。　[2017]

2　xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。



(i)　円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii)　円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii)　円 C_2 は直線 l，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv)　円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l, x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1)　円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。　[2016]

3　以下の問いに答えよ。

(1)　座標平面において，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x^2+y\leqq 1,\ \ x-y\leqq 1$$

(2)　2 つの放物線 $y=x^2-2x+k$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　$x,\ y$ が(1)の連立不等式を満たすとき，$y-x^2+2x$ の最大値および最小値と，それらを与える x, y の値を求めよ。　[2015]

4　$f(x)=x^3-x$ とする。$y=f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。3 つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

(1)　$\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a, b を用いて表せ。

(2)　点 G の座標を a, b を用いて表せ。

(3)　点 G の x 座標が正で，y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。　[2014]

5　O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。　[2011]

6　xy 平面上に 2 定点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ をとる。また，m を 1 より大きい実数とする。

(1)　$\mathrm{AP}:\mathrm{OP}=m:1$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　点 A を通る直線で，(1)で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ。また，その共有点の座標も求めよ。　[2007]

■ 図形と計量

1 半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする。

(1) 線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2) $t=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。このとき，S を t を用いて表せ。

(3) 不等式 $S\geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。 [2015]

■ ベクトル

1 四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。このとき等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ が成り立つとする。t は実数の定数で，$0<t<1$ を満たすとする。線分 OA を $t:1-t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする。また，線分 PQ の中点を M とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と t を用いて表せ。

(2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき，線分 OB の長さを求めよ。

(3) 4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OCB}$ は合同であることを示せ。 [2016]

2 四面体 OABC おいて，次が満たされているとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

点 A, B, C を通る平面を α とする。点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ は垂直であることを示せ。

(2) 点 H は $\triangle\mathrm{ABC}$ の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{\mathrm{AH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{BH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を示せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=2$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1$ とする。このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。 [2012]

3 点 O を原点とする座標平面上に，2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(90^\circ<\theta<180^\circ)$ をとり，以下の条件を満たす 2 点 C, D を考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=1$$

また，△OAB の面積を S_1，△OCD の面積を S_2 とおく。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の成分を求めよ。

(2) $S_2=2S_1$ が成り立つとき，θ と S_1 の値を求めよ。

(3) $S=4S_1+3S_2$ を最小にする θ と，そのときの S の値を求めよ。 [2010]

4 座標空間において，原点 O を通り方向ベクトル $(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ をもつ直線を L_θ とする。点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$ から直線 L_θ に下ろした垂線と L_θ との交点を P_θ とする。

(1) θ が実数全体を動くとき，P_θ は xy 平面内の円周上を動くことを示し，その中心の座標と半径を求めよ。

(2) θ が $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとする。三角形 OAP_θ の面積の最大値と，そのときの P_θ の座標を求めよ。 [2006]

■ 整数と数列

1 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。以下の問いに答えよ。

(1) $b_n\geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(2) b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) a_{2017} の一の位の数を求めよ。 [2017]

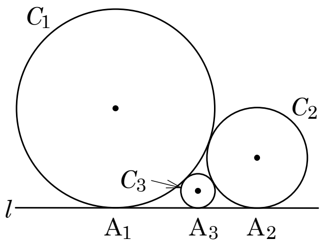
2 p と q は正の整数とする。2 次方程式 $x^2-2px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とする。ただし $\alpha>\beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\dfrac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。ただし，$\alpha^0=1$，$\beta^0=1$ と定める。

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，a_n は整数であることを示せ。

(3) 自然数 n に対し，$\dfrac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。p と q が $q<2p+1$ を満たすとき，b_n を a_n を用いて表せ。 [2015]

3　平面上の直線 l に同じ側で接する 2 つの円 C_1，C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。l，C_1，C_2 で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に l，C_n，C_{n+1}　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$r_1=16$，$r_2=9$ とする。



(1) l が C_1，C_2，C_3 と接する点を，それぞれ A_1，A_2，A_3 とおく。線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび r_3 の値を求めよ。

(2)　ある定数 a，b に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示せ。a, b の値も求めよ。

(3)　(2)で求めた a，b に対して，2 次方程式 $t^2=at+b$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 c，d の値を求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

(4)　(3)の c，d，α，β に対して，$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α，β を用いて表せ。　[2014]

4　3 つの数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が

$$a_{n+1}=-b_n-c_n,\quad b_{n+1}=-c_n-a_n,\quad c_{n+1}=-a_n-b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

および $a_1=a$，$b_1=b$，$c_1=c$ を満たすとする。ただし，a, b, c は定数とする。

(1)　$p_n=a_n+b_n+c_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{p_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{q_n\}$ の初項から第 $2n$ 項までの和を T_n とする。$a+b+c$ が奇数であれば，すべての自然数 n に対して T_n が正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。　[2013]

5 数列$\{a_n\}$を，$a_1=1$，$(n+3)a_{n+1}-na_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。

(1) $b_n=n(n+1)(n+2)a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 等式 $p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=b_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つように，定数$p,\ q,\ r$の値を定めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を$n$の式で表せ。　[2011]

6 自然数の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$(5+\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすものとする。

(1) $\sqrt{2}$は無理数であることを示せ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}をa_n，b_nを用いて表せ。

(3) すべての自然数nに対して，$a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$が成り立つような定数$p$，$q$を2組求めよ。

(4) a_n，b_nをnを用いて表せ。　[2009]

7 2つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$a_1=3,\ b_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n),\ b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$$

(1) すべての自然数nについて，$a_n{}^2-5b_n{}^2=4$であることを示せ。

(2) すべての自然数nについて，a_n，b_nは自然数かつa_n+b_nは偶数であることを証明せよ。　[2008]

8 (1) 一般項a_nがan^3+bn^2+cnで表される数列$\{a_n\}$において，$n^2=a_{n+1}-a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つように，定数$a,\ b,\ c$を定めよ。

(2) (1)の結果を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$となることを示せ。

(3) $1,\ 2,\ \cdots,\ n$の相異なる2数の積のすべての和を$S(n)$とする。たとえば，$S(3)=1\times2+1\times3+2\times3=11$である。$S(n)$を$n$の4次式で表せ。　[2007]

■ 複素数

1　$0 < a < \dfrac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $\mathrm{P}_1(w_1)$，$\mathrm{P}_2(w_2)$，$\mathrm{P}_3(w_3)$，$\mathrm{P}_4(w_4)$，$\mathrm{P}_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件(Ⅰ), (Ⅱ)を満たすとする。

（Ⅰ）　$(\cos^2 a)(w_2 - w_1)^2 + (\sin^2 a)(w_5 - w_1)^2 = 0$ が成り立つ。

（Ⅱ）　$\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2 - \sqrt{3}z + 1 = 0$ の解である。

また，五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　五角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3\mathrm{P}_4\mathrm{P}_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle \mathrm{P}_5\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$ を求めよ。

(2)　S を a を用いて表せ。

(3)　$R = |w_1 + w_2 + w_3 + w_4 + w_5|$ とする。このとき，$R^2 + 2S$ は a の値によらないことを示せ。　[2017]

2　複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

(1)　等式 $|z-1| = |z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2)　点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w = \dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3)　a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w = \dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。　[2016]

3　α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1)　複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z} + \overline{\alpha}z = |z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2)　複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P, Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P, Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。　[2015]

■ 曲線

1 xy 平面上に楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a>\sqrt{13})$，および双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1) a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) l_1 と l_2 が直交することを示せ。

(3) a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。 [2014]

2 楕円 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1，l_1' とし，l_1，l_1' に直交する C の 2 接線を l_2，l_2' とする。

(1) l_1，l_1' の方程式を m を用いて表せ。

(2) l_1 と l_1' の距離 d_1 および l_2 と l_2' の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし，平行な 2 直線 l，l' の距離とは，l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4) l_1，l_1'，l_2，l_2' で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。 [2013]

3 2 つの双曲線 $C:x^2-y^2=1$，$H:x^2-y^2=-1$ を考える。双曲線 H 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ に対して，方程式 $sx-ty=1$ で定まる直線を l とする。

(1) 直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2) 直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3) (2)における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の位置によらず一定であることを示せ。 [2012]

4　d を正の定数とする。2 点 $\mathrm{A}(-d,\ 0)$，$\mathrm{B}(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ。

(3)　点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

[2011]

5　直線 $l: mx+ny=1$ が，楕円 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ に接しながら動くとする。

(1)　点 $(m,\ n)$ の軌跡は楕円になることを示せ。

(2)　C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と l との距離を d_1 とし，もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と l との距離を d_2 とする。このとき $d_1d_2=b^2$ を示せ。　[2010]

6　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が双曲線 $\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$ 上を動くとき，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ と点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ との距離の最小値を $f(a)$ とする。

(1)　$f(a)$ を a で表せ。

(2)　$f(a)$ を a の関数とみなすとき，ab 平面上に曲線 $b=f(a)$ の概形をかけ。

[2009]

7　放物線 $C: y=x^2$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$　$(s<t)$ における接線の交点を $R(X,\ Y)$ とする。

(1)　X, Y を t, s を用いて表せ。

(2)　点 P, Q が $\angle\mathrm{PRQ}=\dfrac{\pi}{4}$ を満たしながら C 上を動くとき，点 R は双曲線上を動くことを示し，かつ，その双曲線の方程式を求めよ。　[2008]

8　xy 平面上で，2 次曲線 $C: x^2+ay^2+by=0$ が直線 $L: y=2x-1$ に点 P で接している。ただし，$a\neq-\dfrac{1}{4}$ とする。

(1)　a と b の関係式を求めよ。

(2)　C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に，b の値の範囲を求めよ。

(3)　C が楕円となる場合の接点 P の存在範囲を求め，xy 平面上に図示せよ。　[2007]

9　xy 平面において，媒介変数 t を用いて，$x=2\left(t+\dfrac{1}{t}+1\right)$，$y=t-\dfrac{1}{t}$ と表される曲線を C とする。

(1)　曲線 C の方程式を求め，その概形をかけ。

(2)　点 $(a,\ 0)$ を通り曲線 C に接する直線があるような a の値の範囲と，そのときの接線の方程式をすべて求めよ。　[2006]

10　実数 a に対して，曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ によって定める。

(1)　C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。

(2)　a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ。　[2005]

11　楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で，$x\geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

(1)　点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2)　点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および△APQ の面積を求めよ。　[2004]

12　2 点 $(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$ を焦点とする双曲線 C_1 と 2 点 $(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を焦点とする楕円 C_2 は 2 点 $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のみを共有している。

(1)　C_1 と C_2 の方程式を，それぞれ求めよ。

(2)　C_1 と漸近線を共有し，C_1 と異なる双曲線を C_3 とする。C_2 と C_3 が 2 点のみを共有するとき，C_3 の方程式を求めよ。　[2003]

13　a を正の実数とする。曲線 C_a を極方程式 $r=2a\cos(a-\theta)$ によって定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C_a は円になることを示し，その中心と半径を求めよ。

(2)　C_a が直線 $y=-x$ に接するような a をすべて求めよ。　[2002]

14　C を双曲線 $2x^2-2y^2=1$ とする。l, m を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ，$\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

(1)　直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2)　PQ^2 を，θ を用いて表せ。

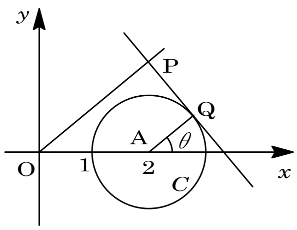
(3)　直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。　[2001]

15　次の問いに答えよ。

(1)　点 $(3,\ 0)$ を通り，円 $(x+3)^2+y^2=4$ と互いに外接する円の中心 $(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　(1)の軌跡上の点と定点 $(0,\ a)$ との距離の最小値を求めよ。　[2000]

16　xy 平面上において，点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。C 上の点 Q における C の接線に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ から下ろした垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角を θ とする。ただし，θ は $-\pi<\theta\leqq\pi$ を動くものとする。

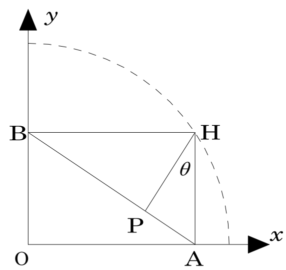


(1)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 座標が最小になるとき，P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。

(3)　直線 $x=k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

17　xy 平面の第 1 象限内の点 H が原点 O を中心とする半径 a の円周上にある。点 H から x 軸, y 軸におろした垂線の足をそれぞれ A, B とし，さらに点 H から線分 AB におろした垂線の足を P とする。線分 HP の長さを l，$\angle\mathrm{AHP}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1)　l を a と θ で表せ。

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $(x,\ y)$ を a と θ で表せ。

(3)　点 H が円周上を動くとき，線分 OP の長さの最小値を求めよ。　[1998]

■ 極限

1 xy 平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，実数 a に対して，a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号 $[\ \ ]$ をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1) n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

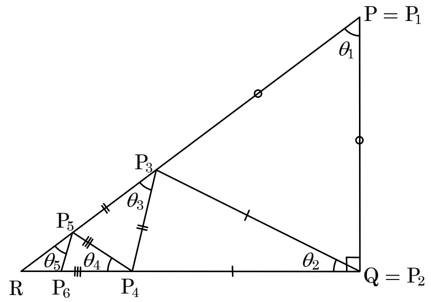
(2) 直線 $y = x$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y = N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)$ $(0 \leqq x \leqq N)$ と，x 軸，および直線 $x = N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。 [2017]

2 $\triangle$PQR において $\angle\mathrm{RPQ} = \theta$，$\angle\mathrm{PQR} = \dfrac{\pi}{2}$ とする。点 P_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次で定める。

$$\mathrm{P}_1 = \mathrm{P},\ \mathrm{P}_2 = \mathrm{Q},\ \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2} = \mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$$

ただし，点 P_{n+2} は線分 $\mathrm{P}_n\mathrm{R}$ 上にあるものとする。実数 θ_n $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$\theta_n = \angle\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+2}$ $(0 < \theta_n < \pi)$ で定める。



(1) θ_2，θ_3 を θ を用いて表せ。

(2) $\theta_{n+1} + \dfrac{\theta_n}{2}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ は n によらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n$ を求めよ。 [2016]

3 曲線 $C : y = \dfrac{1}{x+2}$ $(x > -2)$ を考える。曲線 C 上の点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ における接線を l_1 とし，l_1 と x 軸との交点を Q_1，点 Q_1 を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_2 とおく。以下同様に，自然数 $n\,(n \geqq 2)$ に対して，点 P_n における接線を l_n とし，l_n と x 軸との交点を Q_n，点 Q_n を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点を P_{n+1} とおく。

(1) l_1 の方程式を求めよ。

(2) P_n の x 座標を x_n $(n \geqq 1)$ とする。x_{n+1} を x_n を用いて表し，x_n を n を用いて表せ。

(3) l_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積 S_n を求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。 [2012]

4　e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$，$g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}dx\,,\ \ g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx$$

(1)　$f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ を示せ。

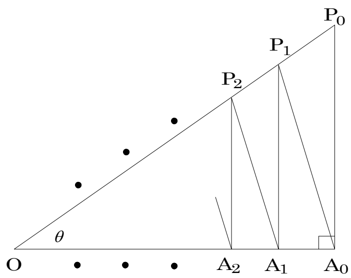
(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 $a,\ b$ を求めよ。　[2008]

5　曲線 $C: y=e^x$ 上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(a,\ e^a)$，$\mathrm{P}(t,\ e^t)$ における C のそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを $L_a(t)$ で表す。さらに，$r(a)=\displaystyle\lim_{t\to a}L_a(t)$ と定義する。

(1)　$r(a)$ を求めよ。

(2)　a が実数全体を動くとき，$r(a)$ の最小値を求めよ。　[2005]

6　直角三角形 $\mathrm{A_0P_0O}$ の斜辺 $\mathrm{OP_0}$ 上に点の列 $\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2},\cdots\cdots,\mathrm{P}_n,\cdots\cdots$ を，辺 $\mathrm{OA_0}$ 上に点の列 $\mathrm{A_1},\ \mathrm{A_2},\cdots\cdots,\mathrm{A}_n,\cdots\cdots$ を，それぞれ次のように定める。まず，$\mathrm{OP_1}=\mathrm{OA_0}$ とする。次に点 $\mathrm{P_1}$ から $\mathrm{OA_0}$ におろした垂線の足を $\mathrm{A_1}$ とする。次に $\mathrm{OP_2}=\mathrm{OA_1}$ とし，点 $\mathrm{P_2}$ から $\mathrm{OA_0}$ におろした垂線の足を $\mathrm{A_2}$ とする。以下，この操作をくり返す。$\angle\mathrm{P_0OA_0}=\theta$，$\mathrm{OA_0}=a$ とし，$\triangle\mathrm{A}_{n-1}\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の面積を S_n とする。$S(\theta)=S_1+S_2+\cdots\cdots+S_n+\cdots\cdots$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1)　S_1 を a と θ で表せ。

(2)　$S(\theta)$ を a と θ で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。　[1998]

■ 微分法

1 a, b, c を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta$, $-\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a, b, c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。　[2017]

2 関数 $f(x)=2x^2-9x+14-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ $(x>0)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。　[2017]

3 k を実数とする。xy 平面の曲線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=-x^2+2kx+1-k^2$ が異なる共有点 P, Q をもつとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また，原点を O とする。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) k が(1)の範囲を動くとき，△OPQ の重心 G の軌跡を求めよ。

(3) △OPQ の面積を S とするとき，S^2 を k を用いて表せ。

(4) k が(1)の範囲を動くとする。△OPQ の面積が最大となるような k の値と，そのときの重心 G の座標を求めよ。　[2016]

4 $f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ とおく。曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l とする。直線 l と y 軸の交点の y 座標を $b(t)$ とおく。

(1) 次の等式を示せ。$b(t)=\dfrac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})$

(2) $x\geqq 0$ のとき，$\log(1+x)\leqq x$ であることを示せ。

(3) $t\geqq 0$ のとき，$b(t)\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$ であることを示せ。

(4) $b(0)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}dt$ であることを示せ。　[2015]

5 関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える。$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_a とし，l_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，実数 k に対して $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^k e^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(1) $Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) $0<a<b$ である $a,\ b$ に対して，l_a と l_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ。

(3) (2)の $a,\ b$ に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく。$\displaystyle\lim_{a\to+0}Z(a)$ および $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ。 [2014]

6 $f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-\dfrac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a>0$ とする。

(1) $f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

(2) $f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下になる a の範囲を求めよ。

(3) $-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。 [2010]

7 n を自然数とし，1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して，不等式 $\displaystyle\int_{k-1}^{k}f(x)\,dx\leqq f(k)$ を示せ。

(2) 不等式 $\displaystyle\int_1^n \log x\,dx\leqq\log n!$ を示し，不等式 $n^n e^{1-n}\leqq n!$ を導け。

(3) $x\geqq 0$ に対して，不等式 $x^n e^{1-x}\leqq n!$ を示せ。 [2010]

8 $a\geqq b>0,\ x\geqq 0$ とし，n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1) $0\leqq e^x-(1+x)\leqq\dfrac{x^2e^x}{2}$

(2) $a^n-b^n\leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3) $e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqq\dfrac{x^2e^x}{2n}$ [2006]

9　関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log|x|}{x} & (|x|>1)\\ ax^3+bx^2+cx+d & (|x|\leqq 1)\end{cases}$$

と定める。ただし, a, b, c, d は定数とし，$f(x)$ は $x=\pm 1$ において微分可能とする。なお，log は $e=2.718\cdots$ を底とする自然対数である。

(1)　a, b, c, d の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最大値を求めよ。　[2004]

10　関数 $f(x)=\dfrac{x}{x^2+ax+b}$ が定める曲線 $y=f(x)$ は原点で直線 $y=x$ に接している。

(1)　b の値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)$ が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め，そのときの $f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(4)　$f(x)$ が最大値をもつが最小値はもたないとき，a の値と $f(x)$ の最大値を求めよ。

[2003]

11　a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x)=\frac{\log x}{(1+x)^a}\quad(x>0)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在することを示せ。

(2)　$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つであり，関数 $f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることを示せ。　[2002]

12　曲線 $y=x(1-x)$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1)　水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(2)　空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。　[2001]

13　関数 $f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$について，次の問いに答えよ。

(1)　閉区間$\left[\,0,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$における $f_n(x)$の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}$ を求めよ。　[2000]

14　すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}}\leqq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。　[2000]

15　eを自然対数の底とする。関数 $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=(1+e^x)^2f'(x)$とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$および$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)$を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$を用いてもよい。

(2)　$f(x)$はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ。 [1999]

16　関数 $f(x)$，$g(x)$を $\displaystyle f(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$，$\displaystyle g(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t\,dt$ と定める。このとき，$x\geqq 0$ における $f(x)$の最大値と $g(x)$の最小値を求めよ。　[1999]

■ 積分法

1　自然数 n に対し，関数 $\displaystyle F_n(x)=\int_x^{2x}e^{-t^n}dt\quad(x\geqq 0)$を考える。

(1)　関数 $F_n(x)\ (x\geqq 0)$はただ 1 つの点で最大値をとることを示し，$F_n(x)$が最大となるような x の値 a_n を求めよ。

(2)　(1)で求めた a_n に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n$ を求めよ。　[2011]

2　$f(x)$を整式で表される関数とし，$\displaystyle g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく。任意の実数 x について，$\displaystyle x(\,f(x)-1\,)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ が成り立つとする。

(1)　$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2)　$f(x)$は定数または 1 次式であることを示せ。

(3)　$f(x)$および $g(x)$を求めよ。　[2009]

3　(1)　$\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx$ を求めよ。

(2)　定数 a に対して，$f(x)=ax\sin x+x+\dfrac{\pi}{2}$ とおく。このとき，不等式

$$\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx \geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす a の範囲を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。　[2007]

4　次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ 1 つ存在するように，定数 a の値を求めよ。

$$f(x)=ax+\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\sin t\,dt\right)^4$$　[2005]

5　$f(x)=\sin^3 x$ とする。

(1)　$f'(0)$ および $f'(2\pi)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3)　$p(x)$ を x の 2 次式とするとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx=0$ を示せ。　[2004]

6　実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が，次の 2 つの条件(i)，(ii)を満たしている。

(i)　すべての x について，$f(x)>0$ である。

(ii)　すべての x, y について，$f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。

(1)　$f(0)=1$ を示せ。

(2)　$g(x)=\log f(x)$ とする。このとき，$g'(x)=f'(0)-x$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f'(0)=2$ となるような $f(x)$ を求めよ。　[2003]

7　$x\geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して，関数 $g(x)$ $(x>0)$ を次のように定める。

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt\ (0<x<1),\quad g(x)=\int_{x-1}^x f(t)\,dt\ (x\geqq 1)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x\neq 1$ のおける導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)$ のとき，$g(x)$ を求めよ。

(3)　次のような $g(x)$ を定める $f(x)$ を求めよ。

$$g(x)=\sin(2\pi x)+x\ (0<x<1),\quad g(x)=1\ (x\geqq 1)$$　[2002]

8　$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ において連続かつ $0 < x < 1$ において微分可能で $f'(x) > 0$ を満たす関数とする。$0 < t < 1$ に対し，$I(t) = \int_0^1 |f(t) - f(x)|x\,dx$ とおく。

(1)　導関数 $I'(t)$ を求めよ。

(2)　$I(t)$ が最小となる t の値を求めよ。　[2001]

9　(1)　$x > 0$ に対して次の不等式を示せ。

$$x - \frac{x^2}{2} < \log(1+x) < x$$

(2)　$f(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ で連続で，$f(x) \geqq 0$ を満たす関数とする。

$$a_n = \left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\cdots\left(1 + \frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right),\quad I = \int_0^1 f(x)\,dx$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = e^I$ であることを示せ。　[2001]

10　e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq 1 + x$ を示せ。

(2)　$\tan\theta = M \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx = \theta$ を示せ。

(3)　$M > 0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}dx < \frac{\pi}{2}$ を示せ。　[2000]

11　関数 $f(x) = \displaystyle\int_x^{2x+1} \frac{1}{t^2+1}dt$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f(x) = 0$ となる x を求めよ。

(2)　$f'(x) = 0$ となる x を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値を求めよ。　[1998]

■ 積分の応用

1 　関数 $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}\ (x\geqq 0)$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f'(a)=0$，$f''(b)=0$ を満たす $a,\ b$ を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(2)　$k\geqq 0$ のとき $V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}dx$ を k を用いて表せ。

(3)　(1)で求めた $a,\ b$ に対して曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2016]

2 　$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x),\quad g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\quad h(x)=\sin x$$

とおく。3 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ の $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす部分を，それぞれ C_1，C_2，C_3 とする。

(1)　C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とする。$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2015]

3 　xy 平面上の曲線 $C:y=x\sin x+\cos x-1\ (0<x<\pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。ただし $3<\pi<\dfrac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい。

(1)　曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ。

(2)　曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とする。$\alpha>\dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ。

(3)　曲線 C, y 軸および直線 $y=\dfrac{\pi}{2}-1$ で囲まれる部分の面積を S とする。また，xy 平面の原点 O, 点 A および曲線 C 上の点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}-1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする。$S<T$ であることを示せ。　[2014]

4　n は自然数とする。

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t\,dt = (-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　媒介変数 t によって,

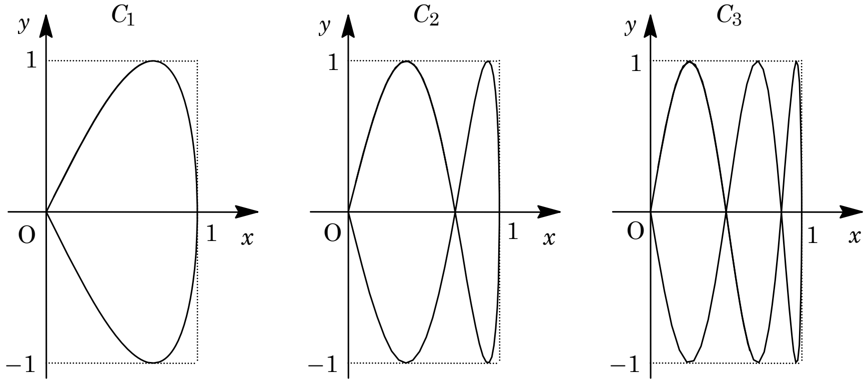
$x = \sin t$,　$y = \sin 2nt$　$(0 \leqq t \leqq \pi)$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right)\quad (n \geqq 2)$$

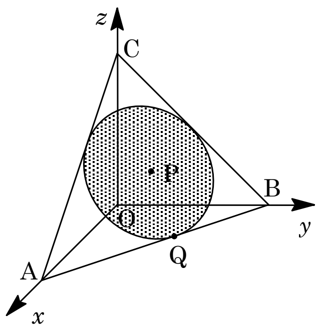
を用いてよい。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



[2013]

5　xyz 空間において，点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P, 円板 D と辺 AB の接点を Q とする。



(1)　点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2)　円板 D が平面 $z = t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。

(3)　円板 D と平面 $z = t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ。

(4)　円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。　[2013]

6 曲線 $C: y=\log x\ (x>0)$ を考える。自然数 n に対して，曲線 C 上に点 $\mathrm{P}(e^n,\ n)$，$\mathrm{Q}(e^{2n},\ 2n)$ をとり，x 軸上に点 $\mathrm{A}(e^n,\ 0)$，$\mathrm{B}(e^{2n},\ 0)$ をとる。四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(n)$ とする。また，線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を $S(n)$ とする。

(1) $V(n)$ を n の式で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}$ を求めよ。 [2012]

7 α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ および，その中心を通る直線 $l: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。

(2) 等式 $\displaystyle 2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 連立不等式 $y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha$，$x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq 1$ の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2011]

8 3 つの曲線

$C_1: y=\sin x\ \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_2: y=\cos x\ \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$，$C_3: y=\tan x\ \left(0\leqq x<\dfrac{\pi}{2}\right)$

について，以下の問いに答えよ。

(1) C_1 と C_2 の交点，C_2 と C_3 の交点，C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。

(2) C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2010]

9 xyz 空間内において，yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし，l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1) D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0\leqq t\leqq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値，最小値を求めよ。

(2) 平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)\ (0\leqq t\leqq 4)$ を求めよ。

(3) E の体積 V を求めよ。 [2009]

10　xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C: x^2+(y-2)^2=1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える。

(1)　直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を t と θ で表せ。

(2)　線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z=0$，$z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。

(3)　Q が C 上を 1 周するとき, (2)で求めた体積の最大値，最小値を求めよ。　[2008]

11　関数 $f(x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}$ について，以下の問いに答えよ。ただし，$a>0$，$b>1$ とする。

(1)　$f(x)\geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ。

(2)　曲線 $y=\sqrt{f(x)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(3)　$a=b\log b$ のとき, (2)で求めた体積 V を $V(b)$ と表す。このとき，$\displaystyle\lim_{b\to\infty}V(b)=2\pi$ となることを示せ。　[2007]

12　座標空間において，$|x|\leqq z^2$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる立体を R とする。点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り, x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし, R と C の共通部分を T とする。

(1)　$-1<h<1$ を満たす定数 h に対して，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2)　T の体積を求めよ。　[2006]

13　曲線 $C: y=\sin x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$ を考える。C 上の点 P における C の法線を l とする。

(1)　法線 l が点 $\mathrm{Q}(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　(1)の条件を満たす点 P に対し，直線 l，曲線 C，直線 $y=1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，直線 l，曲線 C，x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を比較せよ。　[2005]

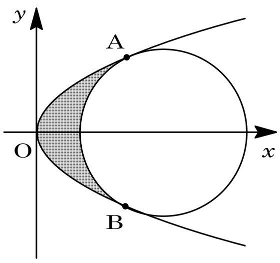
14　$f(x)$ は $x \geqq 0$ で連続で，$f(0)=0$ かつ $x>0$ において $f'(x)>0$ を満たすとする。$t>0$ に対して，曲線 $y=f(x)$ と x 軸および直線 $x=t$ とで囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $X(t)$，曲線 $y=f(x)$ と y 軸および直線 $y=f(t)$ とで囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $Y(t)$ とする。また，$X(0)=Y(0)=0$ とする。このとき，次を示せ。

(1)　$X'(t)=\pi f(t)^2$，$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)$ $(t>0)$ である。

(2)　$f(x)$ が整式でかつ，すべての $t \geqq 0$ に対して $X(t)=Y(t)$ が成り立つならば，$f(x)=x$ $(x \geqq 0)$ である。

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ならば，$X(t)=Y(t)$ $(t \geqq 0)$ である。　[2004]

15　右の図のように，円 $(x-a)^2+y^2=r^2$ $\left(r>\dfrac{1}{2}\right)$ が放物線 $y^2=x$ と 2 点 A, B で接している。



(1)　点 A の x 座標および a を r で表せ。

(2)　円と放物線で囲まれた部分(網点部分)を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(r)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{r \to \frac{1}{2}+0} \frac{V(r)}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^3}$ を求めよ。　[2003]

16　曲線 C を次の方程式で定める。　$y=\sqrt{x^2+4}$ $(x \geqq 0)$

C 上の点 P を通る傾き -1 の直線が x 軸と交わる点の x 座標を $2t$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

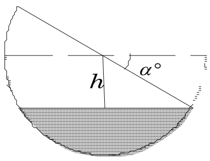
(1)　点 P の x 座標, y 座標を t で表せ。

(2)　点 P が C 上を動いたときの t の最小値を求めよ。

(3)　原点を O とし，線分 OP，曲線 C, y 軸で囲まれる図形の面積 S を t で表せ。

[2002]

17　水を満たした半径 2 の半球形の容器がある。これを静かに $\alpha°$ 傾けたとき，水面が h だけ下がり，こぼれ出た水の量と容器に残った水の量の比が $11:5$ となった。h と α を求めよ。　[1999]



18 関数$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $(x>0)$について次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

(2) $y=f(x)$のグラフの$1\leqq x\leqq 2$に対応する部分，2 直線$y=f(1)$，$y=f(2)$，およびy軸で囲まれた部分を，y軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

[1998]

分野別問題と解答例

関　数／図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$f(x)$，$g(t)$ を，$f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ とおく。

(1) $2g(t)-1=f(2\cos t)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$ が成り立つことを示せ。

(3) $2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は 3 次方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。 [2013]

解答例

(1) $f(x)=x^3-x^2-2x+1$，$g(t)=\cos 3t-\cos 2t+\cos t$ に対し，

$$\begin{aligned}2g(t)-1&=2\cos 3t-2\cos 2t+2\cos t-1\\&=2(4\cos^3 t-3\cos t)-2(2\cos^2 t-1)+2\cos t-1\\&=8\cos^3 t-4\cos^2 t-4\cos t+1=f(2\cos t)\end{aligned}$$

(2) $h(\theta)=2g(\theta)(\cos\theta+1)$ とおくと，

$$\begin{aligned}h(\theta)&=2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)(\cos\theta+1)\\&=2(\cos 3\theta\cos\theta-\cos 2\theta\cos\theta+\cos^2\theta+\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)\\&=\cos 4\theta+\cos 2\theta-\cos 3\theta-\cos\theta+1+\cos 2\theta+2(\cos 3\theta-\cos 2\theta+\cos\theta)\\&=\cos 4\theta+\cos 3\theta+\cos\theta+1\end{aligned}$$

ここで，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき，

$$\cos 4\theta+\cos 3\theta=\cos\frac{4}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=-\cos\frac{3}{7}\pi+\cos\frac{3}{7}\pi=0$$

よって，$h(\theta)=\cos\theta+1$ となり，$2g(\theta)\cos\theta+2g(\theta)=\cos\theta+1$ から，

$$2g(\theta)\cos\theta=1+\cos\theta-2g(\theta)$$

(3) (2)より，$2g(\theta)(\cos\theta+1)=\cos\theta+1$ であり，$\cos\theta+1\neq 0$ より $2g(\theta)=1$

すると，(1)より $f(2\cos\theta)=0$ となり，$2\cos\theta=2\cos\dfrac{\pi}{7}$ は $f(x)=0$ の解である。

コメント

三角関数の計算はやや難しいものの，誘導に従えば，(3)の結論へとスムーズにつながります。

問　題

x の方程式 $|\log_{10} x| = px+q$ （p，q は実数）が 3 つの相異なる正の解をもち，次の 2 つの条件を満たすとする。

（Ⅰ）　3 つの解の比は，$1:2:3$ である。

（Ⅱ）　3 つの解のうち最小のものは，$\dfrac{1}{2}$ より大きく，1 より小さい。

このとき，$A=\log_{10}2$，$B=\log_{10}3$ とおき，p と q を A と B を用いて表せ。

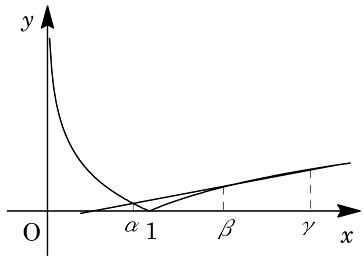
[2012]

解答例

$|\log_{10} x| = px+q$ の解を $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma\ (\alpha<\beta<\gamma)$ とおくと，条件より，

$$\beta = 2\alpha\ ,\ \gamma = 3\alpha$$

また，$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ より，$1<\beta<2$，$\dfrac{3}{2}<\gamma<3$ となり，



$$-\log_{10}\alpha = p\alpha+q \cdots\cdots①$$

$$\log_{10}\beta = p\beta+q\ ,\ \log_{10}2\alpha = 2p\alpha+q \cdots\cdots②$$

$$\log_{10}\gamma = p\gamma+q\ ,\ \log_{10}3\alpha = 3p\alpha+q \cdots\cdots③$$

①②より，$\log_{10}2\alpha+\log_{10}\alpha = p\alpha$，$\log_{10}2+2\log_{10}\alpha = p\alpha \cdots\cdots\cdots④$

①③より，$\log_{10}3\alpha+\log_{10}\alpha = 2p\alpha$，$\log_{10}3+2\log_{10}\alpha = 2p\alpha \cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$2\log_{10}2-\log_{10}3+2\log_{10}\alpha=0$ から，$\log_{10}\alpha = \dfrac{1}{2}\log_{10}\dfrac{3}{4} = \log_{10}\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\alpha = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}p = \log_{10}2+\log_{10}\frac{3}{4} = \log_{10}\frac{3}{2} = B-A\ ,\ \ p = \frac{2}{\sqrt{3}}(B-A)$$

さらに，①に代入すると，

$$q = -\log_{10}\frac{\sqrt{3}}{2}-(B-A) = -\frac{1}{2}B+A-B+A = 2A-\frac{3}{2}B$$

コメント

簡明な設定のうまくまとまった問題です。ただ，A，B という置き換えのため，同値な答が，複数，出現するような気がします。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\cos 3\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$ を示せ。

(2)　$2\cos 80^\circ$ は 3 次方程式 $x^3 - 3x + 1 = 0$ の解であることを示せ。

(3)　$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ となる角度 α，β を求めよ。ただし $0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ とする。　[2009]

解答例

(1)　$\cos 3\theta = \cos(2\theta + \theta) = \cos 2\theta\cos\theta - \sin 2\theta\sin\theta = (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2\sin^2\theta\cos\theta$

$$= (2\cos^2\theta - 1)\cos\theta - 2(1 - \cos^2\theta)\cos\theta = 4\cos^3\theta - 3\cos\theta$$

(2)　$x = 2\cos 80^\circ$ とおくと，$\cos 80^\circ = \dfrac{x}{2}$ となり, (1)より,

$$\cos 240^\circ = 4\cos^3 80^\circ - 3\cos 80^\circ$$

よって，$-\dfrac{1}{2} = 4\left(\dfrac{x}{2}\right)^3 - 3\cdot\dfrac{x}{2}$ から，$x^3 - 3x + 1 = 0$ となる。

(3)　$x^3 - 3x + 1 = (x - 2\cos 80^\circ)(x - 2\cos\alpha)(x - 2\cos\beta)$ より，$x^3 - 3x + 1 = 0$ の解を $x = 2\cos\theta$ $(0^\circ < \theta < 180^\circ)$ とおくと, (2)より,

$$\cos 3\theta = -\frac{1}{2}$$

$0^\circ < 3\theta < 540^\circ$ から，$3\theta = 120^\circ$，240°，480° となり,

$$\theta = 40^\circ,\ 80^\circ,\ 160^\circ$$

よって，$0^\circ < \alpha < \beta < 180^\circ$ から，$\alpha = 40^\circ$，$\beta = 160^\circ$ である。

コメント

3 倍角の公式を用いて, 3 次方程式の解を求める有名問題です。

問　題

p，q を正の実数とする。x の方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ が 1 より大きい解をもつとき，点 $(\log_{10}p,\ \log_{10}q)$ の存在する範囲を座標平面上に図示せよ。　[2008]

解答例

与えられた方程式 $\log_{10}(px)\cdot\log_{10}(qx)+1=0$ から，

$$(\log_{10}p+\log_{10}x)(\log_{10}q+\log_{10}x)+1=0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\log_{10}x=X$，$\log_{10}p=P$，$\log_{10}q=Q$ とおくと，①より，

$$(P+X)(Q+X)+1=0,\ X^2+(P+Q)X+PQ+1=0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，①が $x>1$ の解をもつ条件は，②が $X>0$ の解をもつ条件に対応するので，

(i)　$PQ+1>0$ $(PQ>-1)$ のとき

②が $X>0$ の解をもつ条件は，

$$D=(P+Q)^2-4(PQ+1)\geqq 0\cdots\cdots③,\ -(P+Q)>0\cdots\cdots④$$

③より，$(P-Q)^2-4\geqq 0$，$(P-Q+2)(P-Q-2)\geqq 0$

④より，$Q<-P$

(ii)　$PQ+1=0$ $(PQ=-1)$ のとき

②の解は $X=0$，$X=-(P+Q)$ となることより，$X>0$ の解をもつ条件は，

$$-(P+Q)>0,\ Q<-P$$

(iii)　$PQ+1<0$ $(PQ<-1)$ のとき

②はつねに $X>0$ の解をもつ。

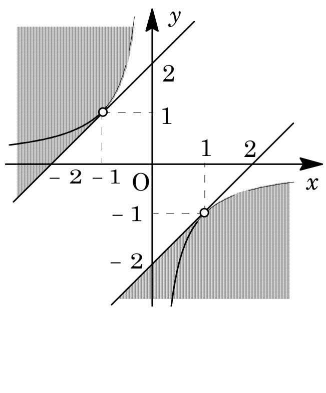
以上より，点 $(\log_{10}p,\ \log_{10}q)$，すなわち点 $(P,\ Q)$ が満たす条件は，

(i)　$xy>-1$ かつ $(x-y+2)(x-y-2)\geqq 0$ かつ $y<-x$

(ii)　$xy=-1$ かつ $y<-x$

(iii)　$xy<-1$

この領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界は領域に含み，破線の境界は領域に含まない。



コメント

対数の絡んだ解の配置の問題です。基本的ですが，慎重な処理が必要です。

問　題

$f(x)=x^4+2x^2-4x+8$ とする。

(1)　$(x^2+t)^2-f(x)=(px+q)^2$ が x の恒等式となるような整数 t, p, q の値を 1 組求めよ。

(2)　(1)で求めた t, p, q の値を用いて方程式 $(x^2+t)^2=(px+q)^2$ を解くことにより，方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。 [2006]

解答例

(1)　$(x^2+t)^2-f(x)=(px+q)^2$ より，

$$(2t-2)x^2+4x+t^2-8=p^2x^2+2pqx+q^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

①が x の恒等式となることより，

$$2t-2=p^2 \cdots\cdots ②,\ \ 4=2pq \cdots\cdots ③,\ \ t^2-8=q^2 \cdots\cdots ④$$

p, q は整数なので，③より $p=2$，$q=1$ とすると，$t=3$ で②④は満たされる。

よって，①が恒等式となる 1 組の整数値は，$(t,\ p,\ q)=(3,\ 2,\ 1)$

(2)　(1)より，$f(x)=(x^2+3)^2-(2x+1)^2$ なので，方程式 $f(x)=0$ は，

$$(x^2+3)^2-(2x+1)^2=0,\ \ (x^2+3+2x+1)(x^2+3-2x-1)=0$$

$$(x^2+2x+4)(x^2-2x+2)=0$$

よって，$f(x)=0$ の解は，$x=-1\pm\sqrt{3}i$，$x=1\pm i$ である。

コメント

4 次方程式を誘導つきで解く問題です。(1)では，1 組の解を求めればよいので，すべての場合をチェックしたわけではありません。

問　題

a を正の実数とする。2 つの関数

$$y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3,\ \ y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

のグラフは, 2 点 A, B で交わる。ただし, A の x 座標は B の x 座標より小さいとする。また, 2 点 A, B を結ぶ線分の垂直二等分線を l とする。

(1) 2 点 A, B の座標を a を用いて表せ。

(2) 直線 l の方程式を a を用いて表せ。

(3) 原点と直線 l の距離 d を a を用いて表せ。また, $a>0$ の範囲で d を最大にする a の値を求めよ。 [2017]

解答例

(1) $a>0$ のとき, $y=\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3$, $y=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$ を連立すると,

$$\frac{1}{3}ax^2-2a^2x+\frac{7}{3}a^3=-\frac{2}{3}ax^2+2a^2x-\frac{2}{3}a^3$$

$$ax^2-4a^2x+3a^3=0,\ \ a(x-a)(x-3a)=0$$

よって, $x=a,\ 3a$ より, $\mathrm{A}\left(a,\ \frac{2}{3}a^3\right)$, $\mathrm{B}\left(3a,\ -\frac{2}{3}a^3\right)$ である。

(2) 線分 AB の垂直二等分線 l 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して, $\mathrm{AP}=\mathrm{BP}$ から,

$$(x-a)^2+\left(y-\frac{2}{3}a^3\right)^2=(x-3a)^2+\left(y+\frac{2}{3}a^3\right)^2$$

$$-2ax+a^2-\frac{4}{3}a^3y=-6ax+9a^2+\frac{4}{3}a^3y$$

よって, $4ax-\frac{8}{3}a^3y-8a^2=0$ より, $l: 3x-2a^2y-6a=0$ となる。

(3) 原点と直線 l の距離 d は, $d=\dfrac{|-6a|}{\sqrt{9+4a^4}}=\dfrac{6a}{\sqrt{9+4a^4}}$

ここで, d を最大とする $a>0$ を求めるために, $d=\dfrac{6}{\sqrt{\dfrac{9}{a^2}+4a^2}}$ と変形すると,

$$\frac{9}{a^2}+4a^2\geqq 2\sqrt{\frac{9}{a^2}\cdot 4a^2}=12$$

等号は $\dfrac{9}{a^2}=4a^2\ \left(a=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)$ のときに成立する。

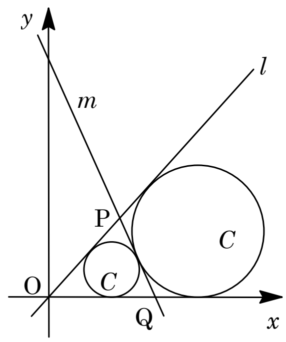
よって, d を最大にする a の値は, $a=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

コメント

放物線と直線に関する基本的な問題です。

問　題

xy 平面の直線 $y=(\tan 2\theta)x$ を l とする。ただし $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ とする。図で示すように，円 C_1，C_2 を以下の(i)～(iv)で定める。



(i)　円 C_1 は直線 l および x 軸の正の部分と接する。

(ii) 円 C_1 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_1 は $\sin 2\theta$ である。

(iii) 円 C_2 は直線 l，x 軸の正の部分，および円 C_1 と接する。

(iv) 円 C_2 の中心は第 1 象限にあり，原点 O から中心までの距離 d_2 は $d_1>d_2$ を満たす。

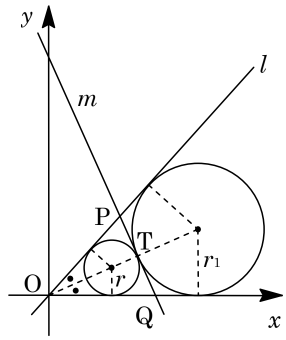
円 C_1 と円 C_2 の共通接線のうち，x 軸，直線 l と異なる直線を m とし，直線 m と直線 l，x 軸との交点をそれぞれ P, Q とする。

(1)　円 C_1，C_2 の半径を $\sin\theta$，$\cos\theta$ を用いて表せ。

(2)　θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲を動くとき，線分 PQ の長さの最大値を求めよ。

(3)　(2)の最大値を与える θ について直線 m の方程式を求めよ。　　[2016]

解答例



(1)　円 C_1，C_2 の半径を，それぞれ r_1，r_2 とする。

すると，$d_1=\sin 2\theta=2\sin\theta\cos\theta$ から，

$$r_1=d_1\sin\theta=2\sin^2\theta\cos\theta$$

また，$r_2=d_2\sin\theta$，$d_1-d_2=r_1+r_2$ から，

$$2\sin\theta\cos\theta-d_2=2\sin^2\theta\cos\theta+d_2\sin\theta$$

$$(1+\sin\theta)d_2=2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)$$

よって，$d_2=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$ となり，

$$r_2=\frac{2\sin^2\theta\cos\theta(1-\sin\theta)}{1+\sin\theta}$$

(2)　円 C_1 と C_2 の接点を T とおくと，$\mathrm{OT}\perp\mathrm{PQ}$ から，

$$\mathrm{PQ}=2\mathrm{OT}\tan\theta=2(d_1-r_1)\tan\theta=2(2\sin\theta\cos\theta-2\sin^2\theta\cos\theta)\tan\theta$$

$$=4\sin\theta\cos\theta(1-\sin\theta)\tan\theta=4\sin^2\theta(1-\sin\theta)$$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ から $0<t<\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，$\mathrm{PQ}=f(t)$ として，

$$f(t)=4t^2(1-t)=4t^2-4t^3$$

$$f'(t)=8t-12t^2=4t(2-3t)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，PQ の最大値は $f\left(\frac{2}{3}\right)=4\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{1}{3}=\frac{16}{27}$ である。

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(3)　(2)から，$\sin\theta=\frac{2}{3}$ より $\cos\theta=\frac{\sqrt{5}}{3}$ となり，このとき直線 m の傾きは，

$$\tan\left(\theta+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\cos\theta}{\sin\theta}=-\frac{\sqrt{5}}{2}$$

また，$\mathrm{PQ}=\frac{16}{27}$ から $\mathrm{TQ}=\frac{8}{27}$ となり，$\mathrm{OQ}=\frac{\mathrm{TQ}}{\sin\theta}=\frac{8}{27}\cdot\frac{3}{2}=\frac{4}{9}$ から点 Q の座標は $\mathrm{Q}\left(\frac{4}{9},\ 0\right)$ である。すると，直線 m の方程式は，

$$y=-\frac{\sqrt{5}}{2}\left(x-\frac{4}{9}\right)=-\frac{\sqrt{5}}{2}x+\frac{2}{9}\sqrt{5}$$

コメント

円と接線の関係をもとに，微分を利用して最大・最小へと繋ぐ問題です。問題文に参考図が書かれているため，解きやすくなっています。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　座標平面において，次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x^2+y\leqq 1,\quad x-y\leqq 1$$

(2)　2 つの放物線 $y=x^2-2x+k$ と $y=-x^2+1$ が共有点をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(3)　$x,\ y$ が(1)の連立不等式を満たすとき，$y-x^2+2x$ の最大値および最小値と，それらを与える x, y の値を求めよ。　[2015]

解答例

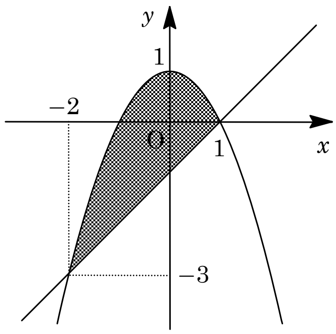
(1)　領域 $D: x^2+y\leqq 1,\ x-y\leqq 1$ の境界線は，

$$x^2+y=1\cdots\cdots\cdots①,\quad x-y=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立すると，$x^2+x-2=0$ より，

$$(x,\ y)=(1,\ 0),\ (-2,\ -3)$$

よって，領域 D は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。



(2)　$y=x^2-2x+k\cdots\cdots③$と①を連立すると，

$$x^2-2x+k=-x^2+1,\quad 2x^2-2x+k-1=0\cdots\cdots\cdots④$$

共有点をもつことより，$D/4=1-2(k-1)\geqq 0$ となり，$k\leqq\dfrac{3}{2}$ である。

(3)　まず，$y-x^2+2x=k$ とおくと，③と一致する。

そして，③を $y=(x-1)^2+k-1$ と変形すると，軸が $x=1$ の放物線となり，以下，この放物線が領域 D と共有点をもつ k の値の範囲を求める。

すると，k の値の最大値は，(2)から $k=\dfrac{3}{2}$ である。このとき，④より $x=\dfrac{1}{2}$，①より $y=\dfrac{3}{4}$ である。また，k の値が最小となるのは，③が点$(-2,\ -3)$を通るときで，このとき $k=-11$ となる。

以上より，$y-x^2+2x$ の最大値は $\dfrac{3}{2}\left(x=\dfrac{1}{2},\ y=\dfrac{3}{4}\right)$ であり，最小値は $-11\ (x=-2,\ y=-3)$ となる。

コメント

領域と最大・最小についての基本問題です。細かすぎるほどの誘導がついています。

問　題

$f(x)=x^3-x$ とする。 $y=f(x)$ のグラフに点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた接線は 3 本あるとする。3 つの接点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\gamma,\ f(\gamma))$ を頂点とする三角形の重心を G とする。

(1) $\alpha+\beta+\gamma$，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha$ および $\alpha\beta\gamma$ を a, b を用いて表せ。

(2) 点 G の座標を a, b を用いて表せ。

(3) 点 G の x 座標が正で, y 座標が負となるような点 P の範囲を図示せよ。 [2014]

解答例

(1) $f(x)=x^3-x$ に対し, $f'(x)=3x^2-1$ となり, 点 $(t,\ t^3-t)$ における接線は,

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t),\quad y=(3t^2-1)x-2t^3$$

点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通ることより, $b=(3t^2-1)a-2t^3$, $2t^3-3at^2+a+b=0$ ………①

ここで, $g(t)=2t^3-3at^2+a+b$ とおくと, $g'(t)=6t^2-6at=6t(t-a)$ となり,

条件より, t についての 3 次方程式①が, 異なる 3 実数解をもつことから,

$$a\neq 0,\quad g(0)\cdot g(a)=(a+b)(-a^3+a+b)<0 \text{ ………②}$$

②のもとで, ①の 3 つの実数解が $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ なので,

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}a,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\quad \alpha\beta\gamma=-\frac{a+b}{2}$$

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ とおくと, (1)より, $x=\dfrac{1}{3}(\alpha+\beta+\gamma)=\dfrac{1}{2}a$ ………③

$$\begin{aligned}y&=\frac{1}{3}(\alpha^3-\alpha+\beta^3-\beta+\gamma^3-\gamma)\\&=\frac{1}{3}\{(\alpha+\beta+\gamma)(\alpha^2+\beta^2+\gamma^2-\alpha\beta-\beta\gamma-\gamma\alpha)+3\alpha\beta\gamma-(\alpha+\beta+\gamma)\}\\&=\frac{1}{3}\left\{\frac{3}{2}a\left(\frac{9}{4}a^2-3\cdot 0\right)-3\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{3}{2}a\right\}=\frac{9}{8}a^3-a-\frac{1}{2}b \text{ ………④}\end{aligned}$$

よって, $\mathrm{G}\left(\dfrac{1}{2}a,\ \dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{1}{2}b\right)$ となる。

(3) 条件から, ③④について, $\dfrac{1}{2}a>0$ かつ $\dfrac{9}{8}a^3-a-\dfrac{1}{2}b<0$ となり,

$$a>0 \text{ ………⑤},\quad b>\frac{9}{4}a^3-2a \text{ ………⑥}$$

そこで, ②⑤⑥の共通部分を求めるために, $a+b=0$ と $b=\dfrac{9}{4}a^3-2a$ を連立して,

$$-a=\frac{9}{4}a^3-2a,\quad 9a^3-4a=0$$

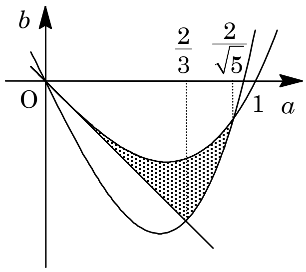
$a>0$ より, $a=\dfrac{2}{3}$ となる。

また，$-a^3+a+b=0$ と $b=\dfrac{9}{4}a^3-2a$ を連立し，

$$a^3-a=\frac{9}{4}a^3-2a,\ 5a^3-4a=0$$

$a>0$ より，$a=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となる。

よって，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。



コメント

領域の図示をテーマとした標準的な問題です。ただ，記述量は非常に多いため，上の解答例では，3 次曲線の概形については省いています。

問　題

O を原点とする xy 平面において，直線 $y=1$ の $|x|\geqq 1$ を満たす部分を C とする。

(1)　C 上に点 $\mathrm{A}(t,\ 1)$ をとるとき，線分 OA の垂直二等分線の方程式を求めよ。

(2)　点 A が C 全体を動くとき，線分 OA の垂直二等分線が通過する範囲を求め，それを図示せよ。　[2011]

解答例

(1)　線分 OA の垂直二等分線の方程式は，中点が $\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 1)$ より，

$$t\left(x-\frac{1}{2}t\right)+\left(y-\frac{1}{2}\right)=0,\ 2tx+2y-t^2-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　①を t についてまとめると，$t^2-2xt-2y+1=0\cdots\cdots\cdots②$

すると，$|t|\geqq 1$ のとき直線①が通過する点 $(x,\ y)$ は，t についての 2 次方程式②が $|t|\geqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ $(x,\ y)$ の条件として求められる。

ここで，$f(t)=t^2-2xt-2y+1=(t-x)^2-x^2-2y+1$ とおくと，

(i)　$|x|\geqq 1$ $(x\leqq -1,\ 1\leqq x)$ のとき

求める条件は，$f(x)=-x^2-2y+1\leqq 0$ より，

$$y\geqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

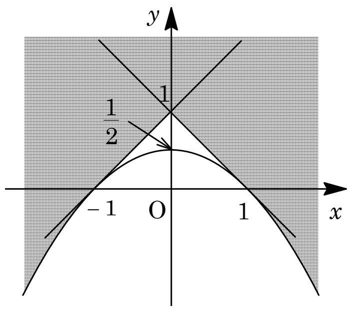
(ii)　$|x|<1$ $(-1<x<1)$ のとき

求める条件は，$f(1)=1-2x-2y+1\leqq 0$ または $f(-1)=1+2x-2y+1\leqq 0$ より，

$$y\geqq -x+1 \text{ または } y\geqq x+1$$

(i)(ii)より，求める領域は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。



コメント

直線の通過領域を求める頻出問題です。2 次方程式の実数解の条件として処理をしています。

問　題

xy 平面上に 2 定点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ と $\mathrm{O}(0,\ 0)$ をとる。また，m を 1 より大きい実数とする。

(1)　$\mathrm{AP}:\mathrm{OP}=m:1$ を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　点 A を通る直線で，(1)で求めた軌跡との共有点が 1 個のものを求めよ。また，その共有点の座標も求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$\mathrm{AP}:\mathrm{OP}=m:1$ より，$\mathrm{AP}=m\mathrm{OP}$ すなわち $\mathrm{AP}^2=m^2\mathrm{OP}^2$ となり，

$$(x-1)^2+y^2=m^2(x^2+y^2),\ (m^2-1)x^2+(m^2-1)y^2+2x-1=0$$

$m>1$ より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{m^2-1}x-\dfrac{1}{m^2-1}=0$

$$\left(x+\frac{1}{m^2-1}\right)^2+y^2=\left(\frac{m}{m^2-1}\right)^2\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，点 P の軌跡は，中心 $\left(-\dfrac{1}{m^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{m}{m^2-1}$ の円である。

(2)　$\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通る直線 l を，$x=1$ または $y=a(x-1)$（a は実数）とおく。

(i)　$l:x=1$ のとき

円$(*)$の中心と直線の距離は，$1+\dfrac{1}{m^2-1}=\dfrac{m^2}{m^2-1}$ となるが，$m>1$ より，

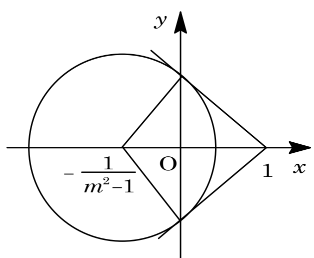
$$\frac{m^2}{m^2-1}>\frac{m}{m^2-1}$$

よって，直線 $x=1$ と円$(*)$の共有点はない。

(ii)　$l:y=a(x-1)$ のとき

条件から，円$(*)$の中心と直線 $ax-y-a=0$ の距離が，半径に等しいことより，

$$\frac{\left|-\dfrac{a}{m^2-1}-a\right|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{m}{m^2-1},\ \frac{m|a|}{\sqrt{a^2+1}}=1$$



よって，$m^2a^2=a^2+1$ から，$a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{m^2-1}}$ となり，

$$l:y=\pm\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}(x-1)$$

さて，直線 l の法線方向の単位ベクトル $\vec{n}$ の成分は，

$$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1)=\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\left(\pm\frac{1}{\sqrt{m^2-1}},\ -1\right)=\pm\left(\frac{1}{m},\ \mp\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\right)$$

以上より，接点の座標$(x,\ y)$は，右上図より，

$$(x,\ y)=\left(-\frac{1}{m^2-1},\ 0\right)+\frac{m}{m^2-1}\left(\frac{1}{m},\ \mp\frac{\sqrt{m^2-1}}{m}\right)=\left(0,\ \mp\frac{1}{\sqrt{m^2-1}}\right)$$

コメント

接点の座標を求めるときに，少し工夫をし，単位ベクトルを利用して計算量を減らしています。

問　題

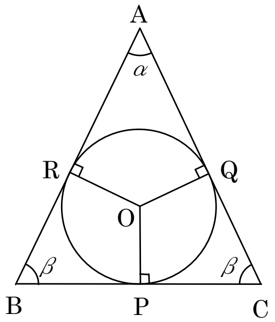
半径 1 の円を内接円とする三角形 ABC が，辺 AB と辺 AC の長さが等しい二等辺三角形であるとする。辺 BC, CA, AB と内接円の接点をそれぞれ P, Q, R とする。また，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とし，三角形 ABC の面積を S とする。

(1) 線分 AQ の長さを α を用いて表し，線分 QC の長さを β を用いて表せ。

(2) $t=\tan\dfrac{\beta}{2}$ とおく。このとき，S を t を用いて表せ。

(3) 不等式 $S\geqq 3\sqrt{3}$ が成り立つことを示せ。さらに，等号が成立するのは，三角形 ABC が正三角形のときに限ることを示せ。 [2015]

解答例



(1) 二等辺三角形 ABC の半径 1 の内接円の中心を O とおくと，△AOQ において，

$$\tan\frac{\alpha}{2}=\frac{1}{\mathrm{AQ}},\quad \mathrm{AQ}=\frac{1}{\tan\frac{\alpha}{2}}$$

△COQ において同様に，$\mathrm{QC}=\dfrac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}$

(2) まず，$\mathrm{BC}=2\mathrm{PC}=2\mathrm{QC}=\dfrac{2}{\tan\frac{\beta}{2}}=\dfrac{2}{t}$

また，A, O, P は同一直線上にあるので，

$$\mathrm{AP}=\mathrm{PC}\tan\beta=\mathrm{QC}\tan\beta=\frac{1}{\tan\frac{\beta}{2}}\cdot\frac{2\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan^2\frac{\beta}{2}}=\frac{1}{t}\cdot\frac{2t}{1-t^2}=\frac{2}{1-t^2}$$

よって，△ABC の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AP}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{t}\cdot\dfrac{2}{1-t^2}=\dfrac{2}{t(1-t^2)}$

(3) $\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{\pi-\alpha}{4}$ より $0<\dfrac{\beta}{2}<\dfrac{\pi}{4}$ となり，$0<\tan\dfrac{\beta}{2}<1$ すなわち $0<t<1$ である。

さて，$f(t)=t(1-t^2)$ とおくと，$S=\dfrac{2}{f(t)}$ となり，

$$f'(t)=1-3t^2$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$0<t<1$ において $0<f(t)\leqq\dfrac{2}{3\sqrt{3}}$ であり，

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{2}{3\sqrt{3}}$	↘	0

$$S\geqq 2\cdot\frac{3\sqrt{3}}{2}=3\sqrt{3}$$

等号が成り立つのは，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\left(\tan\dfrac{\beta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$のときなので，$\beta=\dfrac{\pi}{3}$である。このとき$\alpha=\dfrac{\pi}{3}$となり，△ABC は正三角形である。

コメント

三角比と図形についての基本問題です。加えて，最小値を求めるときに微分法を利用するように構成されています。

問　題

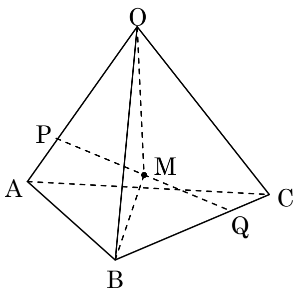
四面体 OABC において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。このとき等式 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ が成り立つとする。t は実数の定数で，$0<t<1$ を満たすとする。線分 OA を $t:1-t$ に内分する点を P とし，線分 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q とする。また，線分 PQ の中点を M とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ と t を用いて表せ。

(2) 線分 OM と線分 BM の長さが等しいとき，線分 OB の長さを求めよ。

(3) 4 点 O, A, B, C が点 M を中心とする同一球面上にあるとする。このとき，$\triangle$OAB と $\triangle$OCB は合同であることを示せ。　[2016]

解答例



(1) OP : PA $=t:1-t$，BQ : QC $=t:1-t$，PM $=$ QM より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{1-t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{t}{2}\vec{a}-\frac{1+t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$

さて，AC の中点を D とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1-t}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{BM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{1+t}{2}\vec{b}$$

ここで，条件から $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BM}}|$ なので，$\left|t\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1-t}{2}\vec{b}\right|^2=\left|t\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\frac{1+t}{2}\vec{b}\right|^2$ となり，

$$t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}+\frac{(1-t)^2}{4}|\vec{b}|^2=-t(1+t)\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}+\frac{(1+t)^2}{4}|\vec{b}|^2$$

すると，$2t\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}=t|\vec{b}|^2$ から，$|\vec{b}|^2=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\vec{b}=(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{b}$

よって，条件 $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1$ より，$|\vec{b}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$

(3) (2)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{CM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{t}{2}\vec{a}+\frac{1-t}{2}\vec{b}+\frac{t-2}{2}\vec{c}$

さて，BA を $t:1-t$ に内分する点を E とすると，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t}{2}\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{CM}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t-2}{2}\vec{c}$$

ここで，条件から $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CM}}|$ なので，$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t}{2}\vec{c}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OE}}+\frac{t-2}{2}\vec{c}\right|^2$ となり，

$$2t\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{c}+t^2|\vec{c}|^2=2(t-2)\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{c}+(t-2)^2|\vec{c}|^2$$

すると，$|\vec{c}|^2=\frac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OE}}\cdot\vec{c}=\frac{1}{1-t}\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot\vec{c}=\frac{1}{1-t}$ となり，$|\vec{c}|=\sqrt{\frac{1}{1-t}}$

同様に，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{t-2}{2}\vec{a}+\frac{1-t}{2}\vec{b}+\frac{t}{2}\vec{c}$ となり，条件から $|\overrightarrow{\mathrm{OM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AM}}|$ より，$\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{t}{2}\vec{a}\right|^2=\left|\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+\frac{t-2}{2}\vec{a}\right|^2$ なので，

$$|\vec{a}|^2=\frac{1}{1-t}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\vec{a}=\frac{1}{1-t}\{(1-t)\vec{b}+t\vec{c}\}\cdot\vec{a}=\frac{1}{1-t},\ |\vec{a}|=\sqrt{\frac{1}{1-t}}$$

そこで，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OCB}$ において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\sqrt{\dfrac{1}{1-t}}$，$\mathrm{OB}=\sqrt{2}$ (共通)

さらに，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ から，$\sqrt{\dfrac{2}{1-t}}\cos\angle\mathrm{AOB}=\sqrt{\dfrac{2}{1-t}}\cos\angle\mathrm{COB}$ から，

$$\cos\angle\mathrm{AOB}=\cos\angle\mathrm{COB},\ \angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{COB}$$

よって，$\triangle\mathrm{OAB}$ と $\triangle\mathrm{OCB}$ は合同である。

コメント

空間ベクトルの四面体への応用問題です。量的にやや多いので，(2)(3)で，ベクトルの置換えを行っています。

問　題

四面体 OABC おいて，次が満たされているとする。

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$$

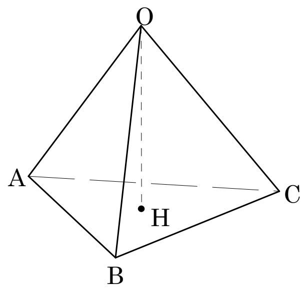
点 A, B, C を通る平面を α とする。点 O を通り平面 α と直交する直線と，平面 α との交点を H とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直であることを示せ。

(2)　点 H は△ABC の垂心であること，すなわち $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$，$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$ を示せ。

(3)　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$ とする。このとき，△ABC の各辺の長さおよび線分 OH の長さを求めよ。　[2012]

解答例



(1)　条件より，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ なので，

$$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ \ \overrightarrow{OA}\cdot(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=0$$

よって，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ となり，$\overrightarrow{OA}\perp\overrightarrow{BC}$ である。

(2)　条件より，$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{BC}$ なので $\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$ から，

$$(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{AH})\cdot\overrightarrow{BC}=0$$

ここで，(1)の結論を用いると $\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=0$，すなわち $\overrightarrow{AH}\perp\overrightarrow{BC}$ である。

同様にして，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}$ から，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{CA}=0$ ………①

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{CA}$ から，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{CA}=(\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{BH})\cdot\overrightarrow{CA}=0$ となり，①より，

$$\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{CA}=0,\ \ \overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{CA}$$

さらに，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}$ から，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{AB}=0$ ………②

$\overrightarrow{OH}\perp\overrightarrow{AB}$ から，$\overrightarrow{OH}\cdot\overrightarrow{AB}=(\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{CH})\cdot\overrightarrow{AB}=0$ となり，②より，

$$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{AB}=0,\ \ \overrightarrow{CH}\perp\overrightarrow{AB}$$

(3)　$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=2$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=1$ のとき，

$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OA}|^2=|\overrightarrow{OB}|^2-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OA}+|\overrightarrow{OA}|^2=4-2+4=6$$

よって，$AB=|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{6}$ となり，同様にして，$BC=CA=\sqrt{6}$

すると，△ABC は正三角形となり，その垂心 H は重心に一致し，

$$AH=\frac{2}{3}\cdot\sqrt{6}\sin 60^\circ=\frac{2\sqrt{6}}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\sqrt{2}$$

これより，$OH=\sqrt{OA^2-AH^2}=\sqrt{2}$ となる。

コメント

条件の対称性から「同様にして」という表現で，細部の記述を省略しています。

問　題

点 O を原点とする座標平面上に，2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(90° < \theta < 180°)$ をとり，以下の条件を満たす 2 点 C, D を考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 1$$

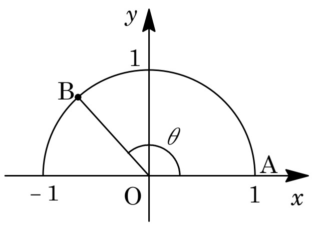
また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S_1，$\triangle\mathrm{OCD}$ の面積を S_2 とおく。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の成分を求めよ。

(2)　$S_2 = 2S_1$ が成り立つとき，θ と S_1 の値を求めよ。

(3)　$S = 4S_1 + 3S_2$ を最小にする θ と，そのときの S の値を求めよ。　[2010]

解答例



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = (1,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(90° < \theta < 180°)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = (p,\ q)$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = (r,\ s)$ とおく。

まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 1$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ より，

$$p = 1 \cdots\cdots\text{①},\quad p\cos\theta + q\sin\theta = 0 \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$q = -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \left(1,\ -\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}} = 1$ より，

$$r = 0 \cdots\cdots\text{③},\quad r\cos\theta + s\sin\theta = 1 \cdots\cdots\text{④}$$

③④より，$s = \dfrac{1}{\sin\theta}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}} = \left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$

(2)　$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S_1，$\triangle\mathrm{OCD}$ の面積を S_2 は，

$$S_1 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta,\quad S_2 = \frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{1}{\sin\theta} + 0\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right| = \frac{1}{2\sin\theta}$$

$S_2 = 2S_1$ より，$\dfrac{1}{2\sin\theta} = \sin\theta$，$\sin^2\theta = \dfrac{1}{2}$

$90° < \theta < 180°$ より，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ から，$\theta = 135°$

このとき，$S_1 = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ となる。

(3)　(2)より，$S = 4S_1 + 3S_2 = 2\sin\theta + \dfrac{3}{2\sin\theta}$ となり，$\sin\theta > 0$ から，

$$2\sin\theta + \frac{3}{2\sin\theta} \geqq 2\sqrt{2\sin\theta\cdot\frac{3}{2\sin\theta}} = 2\sqrt{3}$$

等号は，$2\sin\theta = \dfrac{3}{2\sin\theta}$ すなわち $\sin\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ $(\theta = 120°)$ のとき成立する。

よって，$\theta = 120°$ のとき, S は最小値 $2\sqrt{3}$ をとる。

コメント

ベクトルの成分計算についての基本問題です。

問　題

座標空間において，原点 O を通り方向ベクトル$(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$をもつ直線を$L_\theta$とする。点$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$から直線$L_\theta$に下ろした垂線と$L_\theta$との交点を$\mathrm{P}_\theta$とする。

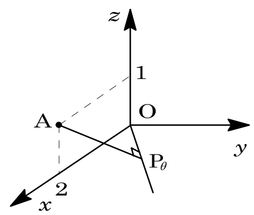
(1) θが実数全体を動くとき，P_θは xy 平面内の円周上を動くことを示し，その中心の座標と半径を求めよ。

(2) θが$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとする。三角形$\mathrm{OAP}_\theta$の面積の最大値と，そのときの$\mathrm{P}_\theta$の座標を求めよ。　[2006]

解答例

(1) tを実数とし，$\vec{u}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$とおくと，

$$L_\theta : (x,\ y,\ z)=t\vec{u}=t(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$$



これより，L_θ上の点P_θは，$\mathrm{P}_\theta(t\cos\theta,\ t\sin\theta,\ 0)$とおくことができる。

ここで，$\mathrm{A}(2,\ 0,\ 1)$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}_\theta}=(t\cos\theta-2,\ t\sin\theta,\ -1)$$

条件より，AP_θとL_θは直交するので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}_\theta}\cdot\vec{u}=0$

$$\cos\theta(t\cos\theta-2)+t\sin^2\theta=0,\ t=2\cos\theta$$

よって，$\mathrm{P}_\theta(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$と表せる。

さて，$\mathrm{P}_\theta(x,\ y,\ z)$とおくと，

$$x=2\cos^2\theta,\ y=2\sin\theta\cos\theta,\ z=0$$

すると，$x=1+\cos2\theta$，$y=\sin2\theta$から，点P_θの描く円の方程式は

$$(x-1)^2+y^2=1,\ z=0$$

すなわち, xy 平面上で，中心$(1,\ 0,\ 0)$，半径 1 の円を描く。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(2,\ 0,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}=(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta,\ 0)$より，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}=4\cos^2\theta,\ |\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}|=\sqrt{4\cos^4\theta+4\sin^2\theta\cos^2\theta}=\sqrt{4\cos^2\theta(\cos^2\theta+\sin^2\theta)}=2\cos\theta$$

ここで，$\triangle\mathrm{OAP}_\theta$の面積を$S$とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_\theta})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\cdot4\cos^2\theta-16\cos^4\theta}$$

$$=\sqrt{5\cos^2\theta-4\cos^4\theta}=\sqrt{-4\left(\cos^2\theta-\frac{5}{8}\right)^2+\frac{25}{16}}$$

すると，$\cos\theta=\sqrt{\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt{10}}{4}$，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{5}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき，S は最大値 $\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{4}$ をとる。このとき，P_θ の座標は，$x=2\times\dfrac{5}{8}$，$y=2\times\dfrac{\sqrt{10}}{4}\times\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ から,

$$P_\theta\left(\frac{5}{4},\ \frac{\sqrt{15}}{4},\ 0\right)$$

コメント

(2)では, 有名な三角形の面積公式を利用しています。

問　題

数列$\{a_n\}$が，$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_{n+2} = 3{a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3{a_n}^2 + a_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$を満たすとする。また，$b_n = a_{n+1} - a_n$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$b_n \geqq 0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$を示せ。

(2)　b_n $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　a_{2017}の一の位の数を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$a_1 = 1$，$a_2 = 3$，$a_{n+2} = 3{a_{n+1}}^2 - 6a_{n+1}a_n + 3{a_n}^2 + a_{n+1}$に対して，

$$a_{n+2} - a_{n+1} = 3(a_{n+1} - a_n)^2$$

ここで，$b_n = a_{n+1} - a_n$とおくと，$b_1 = 2 \geqq 0$，$b_{n+1} = 3{b_n}^2$………①

よって，帰納的に，$b_n \geqq 0$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$である。

(2)　以下，b_nの一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n = 1$のとき　$b_1 = 2$より成立している。

(ii)　$n = k$のとき　b_kの一の位の数が 2 であると仮定する。

これより，l_kを 0 以上の整数として，$b_k = 10l_k + 2$とおくと，①から，

$$b_{k+1} = 3{b_k}^2 = 3(10l_k + 2)^2 = 300{l_k}^2 + 120l_k + 12 = 10(30{l_k}^2 + 12l_k + 1) + 2$$

よって，b_{k+1}の一の位の数は 2 である。

(i)(ii)より，b_nの一の位の数は 2 である。

(3)　(2)より，l_nを 0 以上の整数として，$b_n = 10l_n + 2$とおくことができ，

$$a_{n+1} - a_n = 10l_n + 2 \text{………②}$$

すると，$n \geqq 2$において，②から，$a_n = a_1 + \sum_{k=1}^{n-1}(10l_k + 2)$となり，

$$a_{2017} = 1 + 10\sum_{k=1}^{2016} l_k + 2\cdot 2016 = 10\sum_{k=1}^{2016} l_k + 4033 = 10\left(\sum_{k=1}^{2016} l_k + 403\right) + 3$$

したがって，a_{2017}の一の位の数は 3 である。

コメント

整数と漸化式の融合問題です。(1)は簡単に記しましたが，丁寧に書くなら数学的帰納法です。また，(2)(3)は合同式を用いると，少し簡略になります。

問　題

p と q は正の整数とする。2 次方程式 $x^2-2px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とする。ただし $\alpha>\beta$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\frac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。ただし，$\alpha^0=1$，$\beta^0=1$ と定める。

(1) すべての自然数 n に対して，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n に対して，a_n は整数であることを示せ。

(3) 自然数 n に対し，$\frac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数を b_n とする。p と q が $q<2p+1$ を満たすとき，b_n を a_n を用いて表せ。　[2015]

解答例

(1) 2 次方程式 $x^2-2px-q=0$ の 2 つの実数解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=2p,\ \alpha\beta=-q\ \cdots\cdots\text{①}$$

ここで，$a_n=\frac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\cdots\cdots$②より，①を利用すると，

$$2pa_{n+1}+qa_n=(\alpha+\beta)\cdot\frac{1}{2}(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta\cdot\frac{1}{2}(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})$$

$$=\frac{1}{2}(\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1})-\frac{1}{2}(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\frac{1}{2}(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})$$

よって，$a_{n+2}=2pa_{n+1}+qa_n\cdots\cdots$③が成り立つ。

(2) $a_1=\frac{1}{2}(\alpha^0+\beta^0)=1$，$a_2=\frac{1}{2}(\alpha+\beta)=p$ となり，ともに整数である。

すると，③から帰納的に，すべての自然数 n に対して a_n は整数である。

(3) $f(x)=x^2-2px-q$ とおくと，条件より，

$$f(0)=-q<0,\ f(-1)=1+2p-q>0$$

これより，$f(x)=0$ の実数解 α，$\beta\ (\alpha>\beta)$ は，$\alpha>0$，$-1<\beta<0$ となる。

②より，$\frac{\alpha^{n-1}}{2}=a_n-\frac{\beta^{n-1}}{2}\cdots\cdots$④となり，$-1<\beta^{n-1}<1$ から $-\frac{1}{2}<\frac{\beta^{n-1}}{2}<\frac{1}{2}$

すると，$\frac{\alpha^{n-1}}{2}$ 以下の最大の整数 b_n は，

(i) n が偶数($n-1$ が奇数)のとき　$-\frac{1}{2}<\frac{\beta^{n-1}}{2}<0$ から，④より $b_n=a_n$ である。

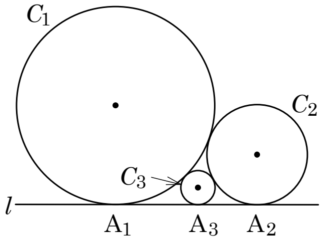
(ii) n が奇数($n-1$ が偶数)のとき　$0<\frac{\beta^{n-1}}{2}<\frac{1}{2}$ から，④より $b_n=a_n-1$ である。

コメント

隣接 3 項間型の漸化式の標準問題です。(3)の問題文の $q<2p+1$ という意味深な不等式は，グラフを対応させると，β が -1 より大きいことを示しています。

問　題

平面上の直線 l に同じ側で接する 2 つの円 C_1, C_2 があり，C_1 と C_2 も互いに外接している。l, C_1, C_2 で囲まれた領域内に，これら 3 つと互いに接する円 C_3 を作る。同様に l, C_n, C_{n+1} $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で囲まれた領域内にあり，これら 3 つと互いに接する円を C_{n+2} とする。円 C_n の半径を r_n とし，$x_n = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，$r_1=16$，$r_2=9$ とする。



(1) l が C_1，C_2，C_3 と接する点を，それぞれ A_1，A_2，A_3 とおく。線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ の長さおよび r_3 の値を求めよ。

(2) ある定数 a, b に対して $x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示せ。a, b の値も求めよ。

(3) (2)で求めた a, b に対して，2 次方程式 $t^2=at+b$ の解を α，β $(\alpha>\beta)$ とする。$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$ を満たす有理数 c, d の値を求めよ。ただし，$\sqrt{5}$ が無理数であることは証明なしで用いてよい。

(4) (3)の c, d, α，β に対して，$x_n=c\alpha^{n+1}+d\beta^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを示し，数列 $\{r_n\}$ の一般項を α，β を用いて表せ。　[2014]

解答例

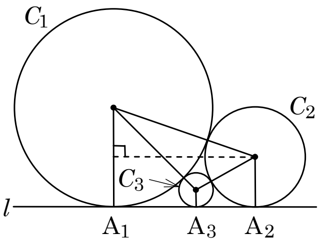
(1) 右図より，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-(r_1-r_2)^2}=2\sqrt{r_1r_2}$

となり，同様に，

$$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3=2\sqrt{r_1r_3},\quad \mathrm{A}_2\mathrm{A}_3=2\sqrt{r_2r_3}$$

ここで，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2=\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3+\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3$ より，

$$2\sqrt{r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_3}+2\sqrt{r_2r_3}\ \cdots\cdots\cdots①$$



$r_1=16$，$r_2=9$ なので，①から，

$$2\cdot4\cdot3=2\cdot4\sqrt{r_3}+2\cdot3\sqrt{r_3},\quad \sqrt{r_3}=\frac{12}{7}$$

よって，$r_3=\dfrac{144}{49}$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2=24$，$\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3=\dfrac{96}{7}$，$\mathrm{A}_2\mathrm{A}_3=\dfrac{72}{7}$

(2) ①と同様にして，$2\sqrt{r_nr_{n+1}}=2\sqrt{r_nr_{n+2}}+2\sqrt{r_{n+1}r_{n+2}}$

両辺を $2\sqrt{r_nr_{n+1}r_{n+2}}$ で割って，$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}}=\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}+\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ となり，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$ から，

$$x_{n+2}=x_{n+1}+x_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

条件より，$x_{n+2}=ax_{n+1}+bx_n$ なので，$a=b=1$

(3)　2 次方程式$t^2=t+1$の解をα，$\beta\ (\alpha>\beta)$とすると，$\alpha=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$\beta=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

ここで，$x_1=c\alpha^2+d\beta^2$から，$\dfrac{1}{4}=c\Big(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^2+d\Big(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^2$となり，

$$1=c(6+2\sqrt{5})+d(6-2\sqrt{5})$$

$c,\ d$が有理数，$\sqrt{5}$が無理数なので，$6c+6d=1$……③，$2c-2d=0$……④

③④より，$c=d=\dfrac{1}{12}$

(4)　$x_n=\dfrac{1}{12}\alpha^{n+1}+\dfrac{1}{12}\beta^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$となることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1,\ 2$のとき　$n=1$のときは(3)より成立し，

$$\frac{1}{12}\alpha^3+\frac{1}{12}\beta^3=\frac{1}{12}\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)^3+\frac{1}{12}\Big(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\Big)^3=\frac{1}{12}\cdot\frac{2(1+15)}{8}=\frac{1}{3}$$

すると，$x_2=\dfrac{1}{\sqrt{r_2}}=\dfrac{1}{3}$より，$n=2$のときも成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$のとき

$x_k=\dfrac{1}{12}\alpha^{k+1}+\dfrac{1}{12}\beta^{k+1}$，$x_{k+1}=\dfrac{1}{12}\alpha^{k+2}+\dfrac{1}{12}\beta^{k+2}$と仮定すると，②より，

$$x_{k+2}=x_{k+1}+x_k=\frac{1}{12}\alpha^{k+2}+\frac{1}{12}\beta^{k+2}+\frac{1}{12}\alpha^{k+1}+\frac{1}{12}\beta^{k+1}$$

$$=\frac{1}{12}\alpha^{k+1}(\alpha+1)+\frac{1}{12}\beta^{k+1}(\beta+1)=\frac{1}{12}\alpha^{k+1}\cdot\frac{3+\sqrt{5}}{2}+\frac{1}{12}\beta^{k+1}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}$$

$$=\frac{1}{12}\alpha^{k+1}\cdot\alpha^2+\frac{1}{12}\beta^{k+1}\cdot\beta^2=\frac{1}{12}\alpha^{k+3}+\frac{1}{12}\beta^{k+3}$$

よって，$n=k+2$のときも成立する。

(i)(ii)より，$x_n=\dfrac{1}{12}\alpha^{n+1}+\dfrac{1}{12}\beta^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

さらに，$x_n=\dfrac{1}{\sqrt{r_n}}$から，$r_n=\dfrac{1}{{x_n}^2}=\dfrac{144}{(\alpha^{n+1}+\beta^{n+1})^2}$である。

コメント

有名な構図の問題で，本年度は名大・理系で出題されています。ただ，筑波大では，良くも悪くも，誘導が丁寧です。

問　題

3 つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$が

$$a_{n+1}=-b_n-c_n\,,\ b_{n+1}=-c_n-a_n\,,\ c_{n+1}=-a_n-b_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

および$a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$を満たすとする。ただし, a, b, cは定数とする。

(1) $p_n=a_n+b_n+c_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{p_n\}$の初項から第 n 項までの和S_nを求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$, $\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(3) $q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与えられる数列$\{q_n\}$の初項から第 $2n$ 項までの和をT_nとする。$a+b+c$が奇数であれば, すべての自然数 n に対してT_nが正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示せ。 [2013]

解答例

(1) 条件より, $a_1=a$, $b_1=b$, $c_1=c$であり, $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$において,

$$a_{n+1}=-b_n-c_n\,,\ b_{n+1}=-c_n-a_n\,,\ c_{n+1}=-a_n-b_n$$

さて, $p_n=a_n+b_n+c_n$とすると, $p_1=a+b+c$であり,

$$p_{n+1}=a_{n+1}+b_{n+1}+c_{n+1}=-2(a_n+b_n+c_n)=-2p_n$$

よって, $p_n=p_1(-2)^{n-1}=(a+b+c)(-2)^{n-1}$となり, 第$n$項までの和$S_n$は,

$$S_n=\frac{(a+b+c)\{1-(-2)^n\}}{1-(-2)}=\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^n\}$$

(2) (1)より, $a_{n+1}=-b_n-c_n=a_n-p_n$となり, $n\geqq 2$において,

$$a_n=a_1-\sum_{k=1}^{n-1}p_k=a-\frac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}\ \text{（}n=1\text{のときも成立）}$$

同様にして, $b_n=b-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$, $c_n=c-\dfrac{a+b+c}{3}\{1-(-2)^{n-1}\}$

(3) $q_n=(-1)^n\{(a_n)^2+(b_n)^2+(c_n)^2\}$, $T_n=\displaystyle\sum_{l=1}^{2n}q_l$に対し, $a+b+c$が奇数のとき, すべての自然数 n においてT_nは正の奇数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$のとき　$T_1=q_1+q_2$より,

$$T_1=-(a_1)^2-(b_1)^2-(c_1)^2+(a_2)^2+(b_2)^2+(c_2)^2$$
$$=-a^2-b^2-c^2+(-b-c)^2+(-c-a)^2+(-a-b)^2$$
$$=a^2+b^2+c^2+2bc+2ca+2ab=(a+b+c)^2$$

よって, T_1は正の奇数である。

(ii)　$n=k$ のとき　T_k が正の奇数であると仮定すると，

$$T_{k+1}=T_k+q_{2k+1}+q_{2k+2}$$
$$=T_k-(a_{2k+1})^2-(b_{2k+1})^2-(c_{2k+1})^2+(a_{2k+2})^2+(b_{2k+2})^2+(c_{2k+2})^2$$
$$=T_k+(a_{2k+1}+b_{2k+1}+c_{2k+1})^2=T_k+(p_{2k+1})^2$$

ここで，(1)から，$(p_{2k+1})^2=\{(a+b+c)(-2)^{2k}\}^2=(a+b+c)^2\cdot 16^k$ となり，$(p_{2k+1})^2$ は正の偶数であるので，T_{k+1} は正の奇数となる。

(i)(ii)より，すべての自然数 n において T_n は正の奇数である。

コメント

連立漸化式の基本的な問題です。ただ，出現する文字が多く，気疲れしてしまいます。(3)は，証明ですが，やや省略気味に記しています。

問　題

数列$\{a_n\}$を，$a_1=1$，$(n+3)a_{n+1}-na_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。

(1)　$b_n=n(n+1)(n+2)a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　等式　$p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=b_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つように，定数$p,\ q,\ r$の値を定めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$を$n$の式で表せ。　[2011]

解答例

(1)　条件より，$a_1=1$，$(n+3)a_{n+1}-na_n=\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}$から，

$$(n+1)(n+2)(n+3)a_{n+1}-n(n+1)(n+2)a_n=(n+2)-(n+1)$$

$b_n=n(n+1)(n+2)a_n$より，$b_{n+1}-b_n=1$となるので，

$$b_n=b_1+(n-1)=1\cdot 2\cdot 3\cdot a_1+n-1=n+5$$

(2)　(1)より，$p(n+1)(n+2)+qn(n+2)+rn(n+1)=n+5$の係数を比べて，

$$p+q+r=0\cdots\cdots①,\ 3p+2q+r=1\cdots\cdots②,\ 2p=5\cdots\cdots③$$

③より，$p=\dfrac{5}{2}$となり，①②に代入して，$q+r=-\dfrac{5}{2}$，$2q+r=-\dfrac{13}{2}$

これより，$q=-4$，$r=\dfrac{3}{2}$

(3)　(1)より，$a_n=\dfrac{n+5}{n(n+1)(n+2)}$となり，(2)の結果を用いると，

$$a_n=\frac{p}{n}+\frac{q}{n+1}+\frac{r}{n+2}=\frac{5}{2n}-\frac{4}{n+1}+\frac{3}{2(n+2)}$$

$$=\frac{5}{2n}-\frac{5+3}{2(n+1)}+\frac{3}{2(n+2)}=\frac{5}{2}\Big(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\Big)-\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\Big)$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k=\frac{5}{2}\Big(1-\frac{1}{n+1}\Big)-\frac{3}{2}\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\Big)=\frac{5}{2}\cdot\frac{n}{n+1}-\frac{3}{2}\cdot\frac{n}{2(n+2)}$

$$=\frac{10n(n+2)-3n(n+1)}{4(n+1)(n+2)}=\frac{n(7n+17)}{4(n+1)(n+2)}$$

コメント

(3)の解法は，上のようなものが想定されていると思われますが，もし$4=\dfrac{5+3}{2}$に気付かなかったときは，(2)を無視し，$a_n=\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}+\dfrac{5}{n(n+1)(n+2)}$として和を求めます。

問　題

自然数の数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$(5+\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすものとする。

(1)　$\sqrt{2}$は無理数であることを示せ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}をa_n，b_nを用いて表せ。

(3) すべての自然数 n に対して，$a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$が成り立つような定数 p，qを 2 組求めよ。

(4)　a_n，b_nを n を用いて表せ。　[2009]

解答例

(1)　k, lを整数として，$\sqrt{2}=\dfrac{l}{k}$ ($k>0$, k と l は互いに素)と仮定すると，

$$\sqrt{2}k=l,\ 2k^2=l^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

これより，l^2は偶数，すなわち l は偶数である。

すると, m を整数として $l=2m$ と表せ，①に代入すると，

$$2k^2=4m^2,\ k^2=2m^2$$

これより，k^2は偶数，すなわち k は偶数である。

したがって, k と l はともに偶数となり，互いに素という仮定に反する。

よって，$\sqrt{2}$は有理数でない，すなわち無理数である。

(2)　条件より，$a_{n+1}+b_{n+1}\sqrt{2}=(5+\sqrt{2})^{n+1}=(5+\sqrt{2})(a_n+b_n\sqrt{2})$

$$=(5a_n+2b_n)+(a_n+5b_n)\sqrt{2}$$

a_n，b_nは自然数，$\sqrt{2}$は無理数より，

$$a_{n+1}=5a_n+2b_n\ \cdots\cdots\cdots②,\ b_{n+1}=a_n+5b_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

(3)　②③を$a_{n+1}+pb_{n+1}=q(a_n+pb_n)$に適用すると，

$$5a_n+2b_n+p(a_n+5b_n)=q(a_n+pb_n)$$

任意の n に対して成立することより，

$$5+p=q\ \cdots\cdots④,\ 2+5p=pq\ \cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$2+5p=p(5+p)$，$p=\pm\sqrt{2}$

④から，$(p,\ q)=(\sqrt{2},\ 5+\sqrt{2})$，$(-\sqrt{2},\ 5-\sqrt{2})$

(4)　条件から，$a_1=5$，$b_1=1$である。

まず，$a_{n+1}+\sqrt{2}b_{n+1}=(5+\sqrt{2})(a_n+\sqrt{2}b_n)$から，

$$a_n+\sqrt{2}b_n=(a_1+\sqrt{2}b_1)(5+\sqrt{2})^{n-1}=(5+\sqrt{2})^n\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

また，$a_{n+1}-\sqrt{2}b_{n+1}=(5-\sqrt{2})(a_n-\sqrt{2}b_n)$から，

$$a_n-\sqrt{2}b_n=(a_1-\sqrt{2}b_1)(5-\sqrt{2})^{n-1}=(5-\sqrt{2})^n\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$a_n=\dfrac{1}{2}\{(5+\sqrt{2})^n+(5-\sqrt{2})^n\}$，$b_n=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\{(5+\sqrt{2})^n-(5-\sqrt{2})^n\}$

コメント

連立漸化式の応用についての有名問題です。この解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を次の漸化式によって定める。

$$a_1=3,\ b_1=1,\ a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n),\ b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$$

(1) すべての自然数nについて，$a_n{}^2-5b_n{}^2=4$であることを示せ。

(2) すべての自然数 n について，a_n，b_nは自然数かつa_n+b_nは偶数であることを証明せよ。 [2008]

解答例

(1) $a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n)$，$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$より，

$$\begin{aligned}a_{n+1}{}^2-5b_{n+1}{}^2&=\frac{1}{4}(3a_n+5b_n)^2-\frac{5}{4}(a_n+3b_n)^2\\&=\frac{1}{4}(9a_n{}^2+30a_nb_n+25b_n{}^2)-\frac{5}{4}(a_n{}^2+6a_nb_n+9b_n{}^2)\\&=a_n{}^2-5b_n{}^2\end{aligned}$$

よって，$a_n{}^2-5b_n{}^2=a_1{}^2-5b_1{}^2=3^2-5\times1^2=4$

(2) すべての自然数 n について，a_n，b_nは自然数でa_n+b_nは偶数であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$のとき

$a_1=3$，$b_1=1$より，a_1，b_1は自然数で，$a_1+b_1=4$は偶数である。

(ii) $n=k$のとき

a_k，b_kは自然数でa_k+b_kは偶数であると仮定すると，

$$a_{k+1}=\frac{1}{2}(3a_k+5b_k)=(a_k+2b_k)+\frac{1}{2}(a_k+b_k)$$

$$b_{k+1}=\frac{1}{2}(a_k+3b_k)=b_k+\frac{1}{2}(a_k+b_k)$$

$$a_{k+1}+b_{k+1}=\frac{1}{2}(3a_k+5b_k)+\frac{1}{2}(a_k+3b_k)=2(a_k+2b_k)$$

これより，a_{k+1}，b_{k+1}は自然数で$a_{k+1}+b_{k+1}$は偶数である。

(i)(ii)より，a_n，b_nは自然数でa_n+b_nは偶数である。

コメント

整数と漸化式の融合問題です。意外な感じですが，(1)と(2)の間に直接的な関係はありません。

問　題

(1)　一般項 a_n が an^3+bn^2+cn で表される数列 $\{a_n\}$ において，$n^2=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つように，定数 $a,\ b,\ c$ を定めよ。

(2)　(1)の結果を用いて，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$ となることを示せ。

(3)　1，2，…，n の相異なる 2 数の積のすべての和を $S(n)$ とする。たとえば，$S(3)=1\times2+1\times3+2\times3=11$ である。$S(n)$ を n の 4 次式で表せ。　[2007]

解答例

(1)　$a_n=an^3+bn^2+cn$ に対して，$n^2=a_{n+1}-a_n$ より，

$$n^2=a\{(n+1)^3-n^3\}+b\{(n+1)^2-n^2\}+c\{(n+1)-n\}$$

$$3an^2+(3a+2b)n+(a+b+c)=n^2$$

どんな n に対しても成立する条件は，

$$3a=1,\ 3a+2b=0,\ a+b+c=0$$

よって，$a=\frac{1}{3}$，$b=-\frac{1}{2}$，$c=\frac{1}{6}$

(2)　(1)より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\sum_{k=1}^{n}(a_{k+1}-a_k)=a_{n+1}-a_1$ となり，$a_1=a+b+c=0$ から，

$$\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{1}{3}(n+1)^3-\frac{1}{2}(n+1)^2+\frac{1}{6}(n+1)$$

$$=\frac{1}{6}(n+1)\{2(n+1)^2-3(n+1)+1\}=\frac{1}{6}(n+1)(2n^2+n)$$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)　1, 2, …, n の相異なる 2 数の積のすべての和 $S(n)$ は，

$$S(n)=\frac{1}{2}\{(1+2+3+\cdots+n)^2-(1^2+2^2+3^3+\cdots+n^2)\}$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{4}n^2(n+1)^2-\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right\}$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)\{3n(n+1)-2(2n+1)\}=\frac{1}{24}n(n+1)(3n^2-n-2)$$

$$=\frac{1}{24}n(n+1)(n-1)(3n+2)$$

コメント

数列の和の公式を証明する基本問題です。また, (3)は有名問題です。

問　題

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。複素数平面上において，原点を中心とする半径 1 の円の上に異なる 5 点 $P_1(w_1)$，$P_2(w_2)$，$P_3(w_3)$，$P_4(w_4)$，$P_5(w_5)$ が反時計まわりに並んでおり，次の 2 つの条件(Ⅰ), (Ⅱ)を満たすとする。

(Ⅰ)　$(\cos^2\alpha)(w_2-w_1)^2+(\sin^2\alpha)(w_5-w_1)^2=0$ が成り立つ。

(Ⅱ)　$\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解である。

また，五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とする。以下の問いに答えよ。

(1)　五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の頂点 P_1 における内角 $\angle P_5P_1P_2$ を求めよ。

(2)　S を α を用いて表せ。

(3)　$R=|w_1+w_2+w_3+w_4+w_5|$ とする。このとき，R^2+2S は α の値によらないことを示せ。　[2017]

解答例

(1)　原点を中心とする半径 1 の円上に反時計まわりに並んだ 5 点 $P_1(w_1)$，$P_2(w_2)$，$P_3(w_3)$，$P_4(w_4)$，$P_5(w_5)$ に対して，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，条件(Ⅰ)より，

$$(\cos^2\alpha)(w_2-w_1)^2+(\sin^2\alpha)(w_5-w_1)^2=0$$

すると，$(w_2-w_1)^2=-(\tan^2\alpha)(w_5-w_1)^2$ から，$\left(\dfrac{w_2-w_1}{w_5-w_1}\right)^2=-(\tan^2\alpha)$ となり，

$$\frac{w_2-w_1}{w_5-w_1}=\pm(\tan\alpha)i\cdots\cdots\cdots①$$

よって，$\arg\left(\dfrac{w_2-w_1}{w_5-w_1}\right)=\pm\dfrac{\pi}{2}$ から，$\angle P_5P_1P_2=\left|\pm\dfrac{\pi}{2}\right|=\dfrac{\pi}{2}$

(2)　①より，$\left|\dfrac{w_2-w_1}{w_5-w_1}\right|=\tan\alpha$ となり，$|w_2-w_1|=(\tan\alpha)|w_5-w_1|$

すると，直角三角形 $P_5P_1P_2$ は，直角をはさむ辺の長さに，$P_1P_2=(\tan\alpha)P_1P_5$ という関係があるので，これから $\angle P_2P_5P_1=\alpha$ となり，

$$\angle P_2OP_1=2\angle P_2P_5P_1=2\alpha$$

また，条件(Ⅱ)より，$\dfrac{w_3}{w_2}$ と $-\dfrac{w_4}{w_2}$ は方程式 $z^2-\sqrt{3}z+1=0$ の解 $z=\dfrac{\sqrt{3}\pm i}{2}$ より，

(i)　$\dfrac{w_3}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$，$-\dfrac{w_4}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$ のとき

$$w_3=\left(\cos\frac{\pi}{6}+i\sin\frac{\pi}{6}\right)w_2,\quad w_4=\left(\cos\frac{5}{6}\pi+i\sin\frac{5}{6}\pi\right)w_2$$

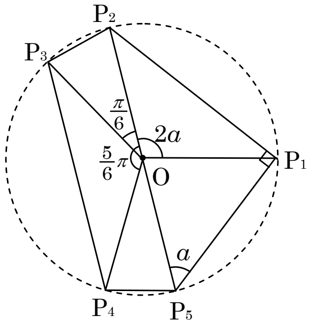
(ii)　$\dfrac{w_3}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}-i}{2}$，$-\dfrac{w_4}{w_2}=\dfrac{\sqrt{3}+i}{2}$ のとき

$$w_3=\left(\cos\frac{11}{6}\pi+i\sin\frac{11}{6}\pi\right)w_2,\quad w_4=\left(\cos\frac{7}{6}\pi+i\sin\frac{7}{6}\pi\right)w_2$$

これは，P_2，P_3，P_4 が，円上を反時計まわりに並んでいることに反する。

(i)(ii)より，P_3 は P_2 を $\dfrac{\pi}{6}$，P_4 は P_2 を $\dfrac{5}{6}\pi$ だけ原点のまわりに回転させた点である。

以上より，五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ は右図のようになり，



$$\triangle P_1OP_2=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2a=\frac{1}{2}\sin2a$$

$$\triangle P_5OP_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-2a)=\frac{1}{2}\sin2a$$

$$\triangle P_2OP_3=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\frac{\pi}{6}=\frac{1}{4}$$

$$\triangle P_3OP_4=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

$$\triangle P_4OP_5=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\left(\pi-\frac{5}{6}\pi\right)=\frac{1}{4}$$

よって，五角形 $P_1P_2P_3P_4P_5$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sin2a+\frac{1}{2}\sin2a+\frac{1}{4}+\frac{\sqrt{3}}{4}+\frac{1}{4}=\sin2a+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{4}$$

(3)　$R=\left|w_1+w_2+w_3+w_4+w_5\right|$ に対し，$w_1=1$ としても一般性を失うことなく，

$$w_2=\cos2a+i\sin2a\text{ , }\ w_5=-\cos2a-i\sin2a$$

$$w_3=\cos\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)+i\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right),\ w_4=\cos\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)+i\sin\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)$$

ここで，$t=w_1+w_2+w_3+w_4+w_5$ とおくと，

$$t=1+\cos\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)+\cos\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)+i\left\{\sin\left(2a+\frac{\pi}{6}\right)+\sin\left(2a+\frac{5}{6}\pi\right)\right\}$$

$$=1+2\cos\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3}+2i\sin\left(2a+\frac{\pi}{2}\right)\cos\frac{\pi}{3}=1-\sin2a+i\cos2a$$

これより，$R^2=\left|t\right|^2=(1-\sin2a)^2+(\cos2a)^2=2-2\sin2a$ となり，

$$R^2+2S=2-2\sin2a+2\sin2a+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=3+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，R^2+2S は a の値によらない。

コメント

複素数平面上の図形の関する問題です。与えられた 2 つの条件を，絶対値や偏角を計算して，図形的な言葉に翻訳することがポイントです。

問　題

複素数平面上を動く点 z を考える。次の問いに答えよ。

(1) 等式 $|z-1|=|z+1|$ を満たす点 z の全体は虚軸であることを示せ。

(2) 点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z}$ が描く図形は直線から 1 点を除いたものとなる。この図形を描け。

(3) a を正の実数とする。点 z が虚軸上を動くとき，$w=\dfrac{z+1}{z-a}$ が描く図形は円から 1 点を除いたものとなる。この円の中心と半径を求めよ。　[2016]

解答例

(1) $|z-1|=|z+1|$ ……①に対して，左辺は点 z と点 1 との距離，右辺は点 z と点 -1 との距離を表す。

これより，①を満たす点 z の全体は，点 1 と点 -1 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸となる。

(2) $w=\dfrac{z+1}{z}$ $(z\neq 0)$ より，$wz=z+1$ となり，$(w-1)z=1$ ………②

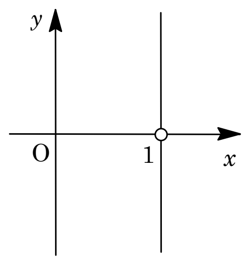
ここで，$w=1$ とすると②は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{1}{w-1}$ ………③

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{1}{w-1}+1\right|$ となり，$\left|\dfrac{2-w}{w-1}\right|=\left|\dfrac{w}{w-1}\right|$ から，

$\dfrac{|2-w|}{|w-1|}=\dfrac{|w|}{|w-1|}$，$|2-w|=|w|$

すると，点 z が原点を除いた虚軸上を動くとき，点 w は点 2 と点 0 を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 1 を通り実軸に垂直な直線上を動く。ただし $w\neq 1$ から点 1 は除く。

図示すると，右図のようになる。



(3) $a>0$ で $w=\dfrac{z+1}{z-a}$ より，$w(z-a)=z+1$ となり，$(w-1)z=aw+1$ ………④

ここで，$w=1$ とすると④は成立しないので，$w\neq 1$ で $z=\dfrac{aw+1}{w-1}$ ………⑤

⑤を①に代入すると，$\left|\dfrac{aw+1}{w-1}-1\right|=\left|\dfrac{aw+1}{w-1}+1\right|$ となり，

$\left|\dfrac{(a-1)w+2}{w-1}\right|=\left|\dfrac{(a+1)w}{w-1}\right|$，$|(a-1)w+2|=|(a+1)w|$

両辺を 2 乗して，$|(a-1)w+2|^2=(a+1)^2|w|^2$ より，

$\{(a-1)w+2\}\{(a-1)\overline{w}+2\}=(a+1)^2w\overline{w}$

$4aw\overline{w}-2(a-1)w-2(a-1)\overline{w}=4$，$w\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}w-\dfrac{a-1}{2a}\overline{w}=\dfrac{1}{a}$ ………⑥

⑥より，$\left(w-\dfrac{a-1}{2a}\right)\left(\overline{w}-\dfrac{a-1}{2a}\right)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{(a-1)^2}{4a^2}$ となり，

$$\left|w-\frac{a-1}{2a}\right|^2=\frac{(a+1)^2}{4a^2},\ \left|w-\frac{a-1}{2a}\right|=\frac{a+1}{2a}$$

よって，点 z が虚軸上を動くとき，点 w は中心 $\dfrac{a-1}{2a}$ で半径 $\dfrac{a+1}{2a}$ の円を描く。ただし，$w\neq1$ から点 1 は除く。

コメント

複素数平面上の変換を問う問題です。(1)において，まず①を変形して，$z+\overline{z}=0$ という関係を導き，この式をもとに(2), (3)を解くという方法もあります。

問　題

α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1)　複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2)　複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P，Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。　[2015]

解答例

(1)　$\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ より，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z=0$ となり，$|z|^2-\alpha\overline{z}-\overline{\alpha}z+\alpha\overline{\alpha}=\alpha\overline{\alpha}$ から，

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|^2=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|=|\alpha|$$

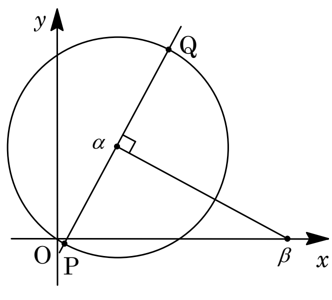
よって，z の描く図形 C は，点 α を中心とし半径が $|\alpha|$ の円である。すなわち，原点を通る円となる。

(2)　α は虚数，β は正の実数より，$\beta-\overline{\alpha}=\overline{\beta-\alpha}$ である。

さて，$w=(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ とおくと，

$$w=(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=\frac{(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}|\beta-\alpha|^2$$

ここで，w は純虚数より，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となる。



すると，z の描く図形 L は，点 α を通り，点 α と点 β を結ぶ線分に垂直な直線 $(z\neq\alpha)$ であり，C と L は 2 つの共有点をもつ。この 2 点を P, Q とすると，P, Q は円 C の直径の両端となるので，

$$\mathrm{PQ}=2|\alpha|=2\sqrt{\alpha\overline{\alpha}}$$

(3)　$\mathrm{R}(\beta)$ としたとき，$\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になる条件は，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|,\ (\beta-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})=3\alpha\overline{\alpha},\ \beta^2-(\alpha+\overline{\alpha})\beta-2\alpha\overline{\alpha}=0$$

すると，$\beta>0$ より，$\beta=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{(\alpha+\overline{\alpha})^2+8\alpha\overline{\alpha}}}{2}=\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+10\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}^2}}{2}$

コメント

複素数平面上で，円と直線の表現方法が問われています。

問　題

xy 平面上に楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a>\sqrt{13})$，および双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ があり，C_1 と C_2 は同一の焦点をもつとする。また C_1 と C_2 の交点 $\mathrm{P}\left(2\sqrt{1+\dfrac{t^2}{b^2}},\ t\right)$ $(t>0)$ における C_1，C_2 の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1) a と b の間に成り立つ関係式を求め，点 P の座標を a を用いて表せ。

(2) l_1 と l_2 が直交することを示せ。

(3) a が $a>\sqrt{13}$ を満たしながら動くときの点 P の軌跡を図示せよ。　[2014]

解答例

(1) 楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{9}=1$ $(a>\sqrt{13})$ ……①の焦点の座標は $(\pm\sqrt{a^2-9},\ 0)$ であり，

双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{4}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(b>0)$ ……②の焦点の座標は $(\pm\sqrt{4+b^2},\ 0)$ である。

条件より，$\sqrt{a^2-9}=\sqrt{4+b^2}$ から，$a^2-9=4+b^2$，$a^2-b^2=13$ ……③

また，C_1 と C_2 の第 1 象限の交点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ は，①②より，

$$\frac{s^2}{a^2}+\frac{t^2}{9}=1\ \cdots\cdots④,\quad \frac{s^2}{4}-\frac{t^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$9s^2+a^2t^2=9a^2$，$b^2s^2-4t^2=4b^2$ となり，

$$\begin{pmatrix}9 & a^2\\ b^2 & -4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}9a^2\\ 4b^2\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{-36-a^2b^2}\begin{pmatrix}-4 & -a^2\\ -b^2 & 9\end{pmatrix}\begin{pmatrix}9a^2\\ 4b^2\end{pmatrix}$$

③を代入すると，

$$\begin{pmatrix}s^2\\ t^2\end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2b^2}\begin{pmatrix}36a^2+4a^2b^2\\ 9a^2b^2-36b^2\end{pmatrix}=\frac{1}{36+a^2(a^2-13)}\begin{pmatrix}4a^2(9+a^2-13)\\ 9(a^2-4)(a^2-13)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{(a^2-4)(a^2-9)}\begin{pmatrix}4a^2(a^2-4)\\ 9(a^2-4)(a^2-13)\end{pmatrix}=\frac{1}{a^2-9}\begin{pmatrix}4a^2\\ 9(a^2-13)\end{pmatrix}$$

これより，$s=\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}}$，$t=\dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}$ となり，$\mathrm{P}\left(\dfrac{2a}{\sqrt{a^2-9}},\ \dfrac{3\sqrt{a^2-13}}{\sqrt{a^2-9}}\right)$

(2) $\mathrm{P}(s,\ t)$ における C_1 の接線 l_1，C_2 の接線 l_2 の法線ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ とおくと，$\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{s}{a^2},\ \dfrac{t}{9}\right)$，$\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{s}{4},\ -\dfrac{t}{b^2}\right)$ となり，(1)から，

$$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\frac{s^2}{4a^2}-\frac{t^2}{9b^2}=\frac{4a^2}{4a^2(a^2-9)}-\frac{9(a^2-13)}{9(a^2-13)(a^2-9)}=0$$

よって，l_1 と l_2 は直交する。

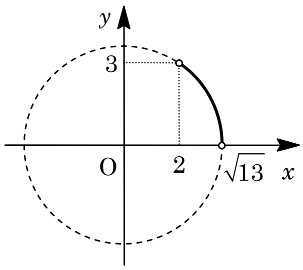
(3)　(1)より，$s^2=\dfrac{4a^2}{a^2-9}=4+\dfrac{36}{a^2-9}$，$t^2=\dfrac{9(a^2-13)}{a^2-9}=9-\dfrac{36}{a^2-9}$

これより，$s^2+t^2=13$

また，$a>\sqrt{13}$ のとき，$0<\dfrac{36}{a^2-9}<9$ より，

$$4<s^2<13\ (2<s<\sqrt{13})，\ 0<t^2<9\ (0<t<3)$$

よって，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡は右図の実線部である。



コメント

計算量は半端ではありません。特に(3)において，1 行目の変形をしなかったときは，たいへんなことになります。

問　題

楕円 $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ の，直線 $y=mx$ と平行な 2 接線を l_1，$l_1{}'$ とし，l_1，$l_1{}'$ に直交する C の 2 接線を l_2，$l_2{}'$ とする。

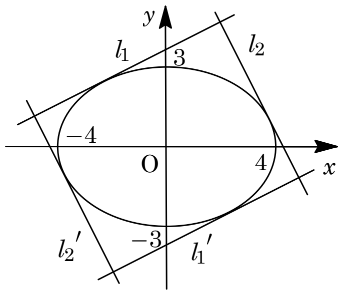
(1) l_1，$l_1{}'$ の方程式を m を用いて表せ。

(2) l_1 と $l_1{}'$ の距離 d_1 および l_2 と $l_2{}'$ の距離 d_2 をそれぞれ m を用いて表せ。ただし，平行な 2 直線 l，l' の距離とは，l 上の 1 点と直線 l' の距離である。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2$ は m によらず一定であることを示せ。

(4) l_1，$l_1{}'$，l_2，$l_2{}'$ で囲まれる長方形の面積 S を d_1 を用いて表せ。さらに m が変化するとき，S の最大値を求めよ。 [2013]

解答例



(1) $C:\dfrac{x^2}{16}+\dfrac{y^2}{9}=1$ から，$9x^2+16y^2=9\cdot16$ ………①

直線 $y=mx$ に平行な直線を $y=mx+n$ ……②とおき，①に代入すると，

$$9x^2+16(mx+n)^2=9\cdot16$$

$$(9+16m^2)x^2+32mnx+16n^2-9\cdot16=0$$

①②が接することより，

$$D/4=16^2m^2n^2-(9+16m^2)(16n^2-9\cdot16)=0$$

$$16m^2n^2-(9+16m^2)(n^2-9)=0\text{，}\ n^2-9-16m^2=0$$

よって，$n=\pm\sqrt{16m^2+9}$ から，l_1，$l_1{}'$ の方程式は，$y=mx\pm\sqrt{16m^2+9}$

(2) 原点と l_1，$l_1{}'$ の距離はともに $\dfrac{\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}$ なので，l_1 と $l_1{}'$ の距離 d_1 は，

$$d_1=\frac{2\sqrt{16m^2+9}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，l_2 と $l_2{}'$ の距離 d_2 は，$m\neq0$ のとき，③において m を $-\dfrac{1}{m}$ に置き換え，

$$d_2=\frac{2\sqrt{16\left(-\frac{1}{m}\right)^2+9}}{\sqrt{\left(-\frac{1}{m}\right)^2+1}}=\frac{2\sqrt{9m^2+16}}{\sqrt{m^2+1}}\ \cdots\cdots\cdots④$$

なお，$m=0$ のときは $d_2=8$ となるが，このときも④は成立している。

(3) $(d_1)^2+(d_2)^2=\dfrac{4(16m^2+9)}{m^2+1}+\dfrac{4(9m^2+16)}{m^2+1}=100$

(4)　l_1，l_1'，l_2，l_2'で囲まれる長方形の面積Sは，$S=d_1d_2=d_1\sqrt{100-(d_1)^2}$

ここで，$d_1=t$とおくと，$6\leqq t<8$となり，

$$S=t\sqrt{100-t^2}=\sqrt{100t^2-t^4}=\sqrt{-(t^2-50)^2+2500}$$

よって，$36\leqq t^2<64$から，$t^2=50$のときSは最大値$\sqrt{2500}=50$をとる。

コメント

楕円の有名問題です。誘導が非常に細かく付いています。

問　題

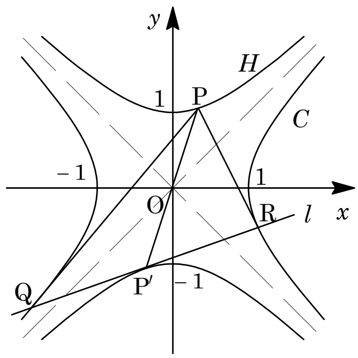
2 つの双曲線$C: x^2-y^2=1$，$H: x^2-y^2=-1$を考える。双曲線 H 上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$に対して，方程式$sx-ty=1$で定まる直線を l とする。

(1)　直線 l は点 P を通らないことを示せ。

(2)　直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わることを示し，△PQR の重心 G の座標を s, t を用いて表せ。

(3)　(2)における 3 点 G, Q, R に対して，△GQR の面積は点$\mathrm{P}(s,\ t)$の位置によらず一定であることを示せ。　[2012]

解答例



(1)　$C: x^2-y^2=1$ ……①，$H: x^2-y^2=-1$ ……②に対して，H 上の点$\mathrm{P}(s,\ t)$の原点対称の点を$\mathrm{P}'(-s,\ -t)$とおくと，P'における H の接線の方程式は，

$$-sx-(-t)y=-1,\ sx-ty=1 \text{………③}$$

よって，直線$l: sx-ty=1$は点 P を通らない。

(2)　①③を連立して，$x^2-\dfrac{1}{t^2}(sx-1)^2=1$となり，

$$(t^2-s^2)x^2+2sx-t^2-1=0$$

点$\mathrm{P}(s,\ t)$は H 上の点から，$s^2-t^2=-1$……④となり，

$$x^2+2sx-t^2-1=0 \text{………⑤}$$

⑤は，$D/4=s^2+t^2+1>0$となるので，異なる 2 実数解をもつ。すなわち，直線 l と双曲線 C は異なる 2 点 Q, R で交わる。

そこで，⑤の解を$x=\alpha,\ \beta$とおくと，$\mathrm{Q}\left(\alpha,\ \dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)$，$\mathrm{R}\left(\beta,\ \dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)$と表せ，

$$\alpha+\beta=-2s,\ \frac{\alpha+\beta}{2}=-s$$

これより，線分 QR の中点はP'となり，△PQR の重心 G は線分PP'を$2:1$に内分する点である。

よって，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-2s+s}{3},\ \dfrac{-2t+t}{3}\right)$から，$\mathrm{G}\left(\dfrac{-s}{3},\ \dfrac{-t}{3}\right)$である。

(3)　$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{1}{2}\left|\alpha\left(\dfrac{s}{t}\beta-\dfrac{1}{t}\right)-\beta\left(\dfrac{s}{t}\alpha-\dfrac{1}{t}\right)\right|=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{\beta-\alpha}{t}\right|=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{s^2+t^2+1}}{|t|}$

④より，$\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{\sqrt{t^2-1+t^2+1}}{|t|}=\dfrac{\sqrt{2t^2}}{|t|}=\sqrt{2}$

以上より，$\triangle\mathrm{GQR}=\dfrac{1}{3}\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{OQR}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ となり，点 P の位置によらず一定の値をとる。

コメント

(1)は普通に連立して計算をしてもよいのですが，直線 l の方程式が，いかにも意味ありげなので工夫をしました。そして，図形的に結論を記しています。

問　題

d を正の定数とする。2 点 A$(-d,\ 0)$，B$(d,\ 0)$ からの距離の和が $4d$ である点 P の軌跡として定まる楕円 E を考える。点 A, 点 B, 原点 O から楕円 E 上の点 P までの距離をそれぞれ AP, BP, OP とかく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　楕円 E の長軸と短軸の長さを求めよ。

(2)　$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2$ および $\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$ を，OP と d を用いて表せ。

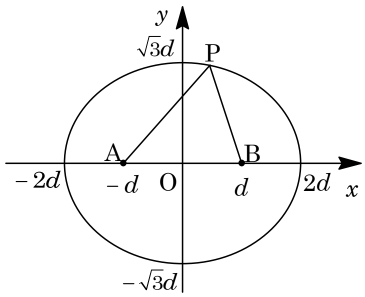
(3)　点 P が楕円 E 全体を動くとき，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値と最小値を d を用いて表せ。

[2011]

解答例

(1)　焦点が A$(-d,\ 0)$，B$(d,\ 0)$ より，楕円 E の中心は原点となるので，

$$E:\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1\quad(a^2-b^2=d^2)$$



条件より，$2a=4d$ から，$a=2d$ となり，

$$b^2=a^2-d^2=3d^2,\ b=\sqrt{3}d$$

これより，長軸の長さは $2a=4d$，短軸の長さは $2b=2\sqrt{3}d$ となる。

(2)　P$(x,\ y)$ とおくと，

$$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2=(x+d)^2+y^2+(x-d)^2+y^2=2(x^2+y^2)+2d^2$$
$$=2\mathrm{OP}^2+2d^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{AP}+\mathrm{BP}=4d$ なので，①より，

$$2\mathrm{OP}^2+2d^2=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=16d^2-2\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}$$

よって，$\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP}=8d^2-\mathrm{OP}^2-d^2=7d^2-\mathrm{OP}^2\cdots\cdots\cdots②$

(3)　$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=(\mathrm{AP}+\mathrm{BP})(\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2-\mathrm{AP}\cdot\mathrm{BP})$ なので，①②より，

$$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3=4d(2\mathrm{OP}^2+2d^2-7d^2+\mathrm{OP}^2)=4d(3\mathrm{OP}^2-5d^2)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\sqrt{3}d\leqq\mathrm{OP}\leqq2d$ から $3d^2\leqq\mathrm{OP}^2\leqq4d^2$ であり，③より，$\mathrm{AP}^3+\mathrm{BP}^3$ の最大値は $4d(12d^2-5d^2)=28d^3$，最小値は $4d(9d^2-5d^2)=16d^3$ となる。

コメント

楕円の定義について，基本事項を確認する問題です。なお，①式は中線定理です。

問　題

直線 $l: mx+ny=1$ が，楕円 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ に接しながら動くとする。

(1)　点 $(m,\ n)$ の軌跡は楕円になることを示せ。

(2)　C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と l との距離を d_1 とし，もう 1 つの焦点 $F_2(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と l との距離を d_2 とする。このとき $d_1d_2=b^2$ を示せ。　[2010]

解答例

(1)　楕円 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上の接点を $(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおくと，接線の方程式は，

$$\frac{a\cos\theta}{a^2}x+\frac{b\sin\theta}{b^2}y=1,\quad \frac{\cos\theta}{a}x+\frac{\sin\theta}{b}y=1\cdots\cdots\cdots①$$

①が直線 $l: mx+ny=1$ に一致することより，

$$m=\frac{\cos\theta}{a},\quad n=\frac{\sin\theta}{b}$$

これより，$a^2m^2+b^2n^2=1\cdots\cdots②$ となり，点 $(m,\ n)$ の軌跡は楕円になる。

(2)　C の焦点 $F_1(-\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$，$F_2(\sqrt{a^2-b^2},\ 0)$ と $l: mx+ny-1=0$ との距離を，それぞれ d_1，d_2 とすると，

$$d_1=\frac{|-m\sqrt{a^2-b^2}-1|}{\sqrt{m^2+n^2}},\quad d_2=\frac{|m\sqrt{a^2-b^2}-1|}{\sqrt{m^2+n^2}}$$

すると，$d_1d_2=\dfrac{|-m^2(a^2-b^2)+1|}{m^2+n^2}=\dfrac{|-a^2m^2+b^2m^2+1|}{m^2+n^2}$

②を代入すると，$d_1d_2=\dfrac{|b^2n^2+b^2m^2|}{m^2+n^2}=\dfrac{b^2(n^2+m^2)}{m^2+n^2}=b^2$

コメント

(1)では，接線の公式を利用しました。重解条件の利用によっても②を導けますが，計算量はかなり増加します。

問　題

点P$(x,\ y)$が双曲線$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$上を動くとき，点P$(x,\ y)$と点A$(a,\ 0)$との距離の最小値を$f(a)$とする。

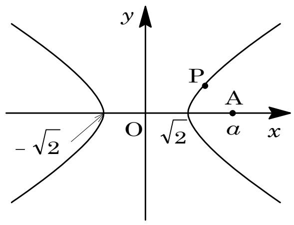
(1)　$f(a)$をaで表せ。

(2)　$f(a)$をaの関数とみなすとき, ab平面上に曲線$b=f(a)$の概形をかけ。

[2009]

解答例

(1)　$\dfrac{x^2}{2}-y^2=1$より，$y^2=\dfrac{x^2}{2}-1$ ……(＊)となり，



$$\mathrm{AP}^2=(x-a)^2+y^2=(x-a)^2+\frac{x^2}{2}-1$$
$$=\frac{3}{2}x^2-2ax+a^2-1$$
$$=\frac{3}{2}\left(x-\frac{2}{3}a\right)^2+\frac{1}{3}a^2-1$$

ここで, (＊)から，$\dfrac{x^2}{2}-1\geqq 0$より，$x\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq x$

(i)　$\dfrac{2}{3}a\leqq-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}\leqq\dfrac{2}{3}a$ $\left(a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a\right)$のとき

$x=\dfrac{2}{3}a$でAP^2は最小となり, APの最小値$f(a)=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$

(ii)　$-\sqrt{2}<\dfrac{2}{3}a<0$ $\left(-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0\right)$のとき

$x=-\sqrt{2}$でAP^2は最小となり, APの最小値$f(a)=\sqrt{(-\sqrt{2}-a)^2}=|\,a+\sqrt{2}\,|$

(iii)　$0\leqq\dfrac{2}{3}a<\sqrt{2}$ $\left(0\leqq a<\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)$のとき

$x=\sqrt{2}$でAP^2は最小となり, APの最小値$f(a)=\sqrt{(\sqrt{2}-a)^2}=|\,a-\sqrt{2}\,|$

(2)　曲線$b=f(a)$に対して, (1)より,

(i)　$a\leqq-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\leqq a$のとき

曲線$b=\sqrt{\dfrac{1}{3}a^2-1}$は，$b^2=\dfrac{1}{3}a^2-1$から，双曲線$\dfrac{1}{3}a^2-b^2=1$の上半分となる。

また，漸近線は，$b=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}a$である。

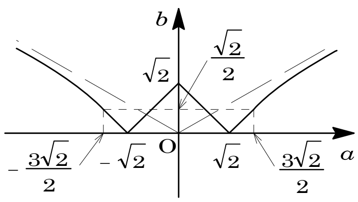
(ii)　$-\dfrac{3\sqrt{2}}{2}<a<0$のとき

曲線$b=|\,a+\sqrt{2}\,|$は，折れ線$b=|\,a\,|$をa軸方向に$-\sqrt{2}$だけ平行移動したもの。

(iii) $0 \leqq a < \dfrac{3\sqrt{2}}{2}$ のとき

曲線 $b = |a - \sqrt{2}|$ は，折れ線 $b = |a|$ を a 軸方向に $\sqrt{2}$ だけ平行移動したもの。

以上より，曲線 $b = f(a)$ の概形は，右図のようになる。



コメント

最初に双曲線のグラフを書き，「当たり」をつけておくとミスが防げます。

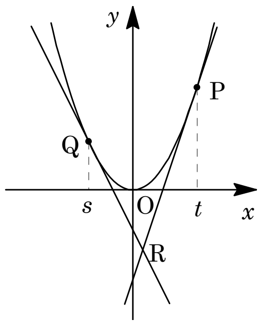
問　題

放物線$C: y = x^2$上の異なる 2 点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$　$(s<t)$における接線の交点を$R(X,\ Y)$とする。

(1)　X, Yをt, sを用いて表せ。

(2)　点 P, Q が$\angle\mathrm{PRQ} = \dfrac{\pi}{4}$を満たしながら$C$上を動くとき，点 R は双曲線上を動くことを示し，かつ，その双曲線の方程式を求めよ。　[2008]

解答例



(1)　$C: y = x^2$に対し，$y' = 2x$より，$\mathrm{P}(t,\ t^2)$における接線の方程式は，

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots\cdots①$$

同様に，$\mathrm{Q}(s,\ s^2)$における接線の方程式は，

$$y = 2sx - s^2 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2tx - t^2 = 2sx - s^2$，$2(t-s)x = t^2 - s^2$

$s<t$より$x = \dfrac{t+s}{2}$となり，①から$y = 2t\cdot\dfrac{t+s}{2} - t^2 = ts$

①②の交点は$R(X,\ Y)$より，$X = \dfrac{t+s}{2}$，$Y = ts \cdots\cdots\cdots③$

(2)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{RP}} = \dfrac{t-s}{2}(1,\ 2t)$，$\overrightarrow{\mathrm{RQ}} = \dfrac{t-s}{2}(-1,\ -2s)$となり，条件より，この 2 つのベクトルのなす角が$\dfrac{\pi}{4}$なので，

$$\cos\frac{\pi}{4} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{RP}}||\overrightarrow{\mathrm{RQ}}|},\quad \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{-1-4ts}{\sqrt{1+4t^2}\sqrt{1+4s^2}}$$

$-1-4st>0\ (4st<-1)$のもとで，両辺を 2 乗すると，

$$2(-1-4ts)^2 = (1+4t^2)(1+4s^2),\quad 16t^2s^2 - 4(t^2+s^2) + 16ts + 1 = 0$$

変形して，$16t^2s^2 - 4(t+s)^2 + 24ts + 1 = 0$

③を代入すると，$16Y^2 - 16X^2 + 24Y + 1 = 0$

$$16\left(Y + \frac{3}{4}\right)^2 - 16X^2 = 8,\quad 2X^2 - 2\left(Y + \frac{3}{4}\right)^2 = -1$$

よって，$R(X,\ Y)$は双曲線上を動き，その方程式は$2x^2 - 2\left(y + \dfrac{3}{4}\right)^2 = -1$である。

コメント

2 接線のなす角の扱いについては，内積を利用しています。tan の加法定理を用いても可能です。なお，題意が双曲線の方程式を求めるだけということなので，(2)の記述はアバウトです。s, tの実数条件や$4st<-1$を加味すると，R の軌跡は双曲線の下側の枝となります。

問　題

xy 平面上で，2 次曲線 $C: x^2+ay^2+by=0$ が直線 $L: y=2x-1$ に点 P で接している。ただし，$a\neq -\frac{1}{4}$ とする。

(1) a と b の関係式を求めよ。

(2) C が楕円，放物線，双曲線となるそれぞれの場合に，b の値の範囲を求めよ。

(3) C が楕円となる場合の接点 P の存在範囲を求め，xy 平面上に図示せよ。　[2007]

解答例

(1) $C: x^2+ay^2+by=0$ ……①，$L: y=2x-1$ ……②が接することより，

$$x^2+a(2x-1)^2+b(2x-1)=0,\ (4a+1)x^2-2(2a-b)x+a-b=0 \text{ ……③}$$

$4a+1\neq 0$ から，$D/4=(2a-b)^2-(4a+1)(a-b)=0$ となり，

$$b^2+b-a=0$$

(2) (1)から，$a=b^2+b\neq -\frac{1}{4}$ より，$\left(b+\frac{1}{2}\right)^2\neq 0$ すなわち $b\neq -\frac{1}{2}$ のもとで，

$$C: x^2+(b^2+b)y^2+by=0 \text{ ………④}$$

(i) $b^2+b=0$ $(b=0,\ -1)$ のとき

$b=0$ のとき④は $x=0$，$b=-1$ のとき④は $y=x^2$ となる。

(ii) $b^2+b\neq 0$ $(b\neq 0,\ b\neq -1)$ のとき

④より，$x^2+(b^2+b)\left(y^2+\frac{1}{b+1}y\right)=0$

$$x^2+(b^2+b)\left(y+\frac{1}{2b+2}\right)^2=\frac{b}{4b+4}$$

よって，$b^2+b>0$ $(b<-1,\ 0<b)$ のとき $\frac{b}{4b+4}>0$ となり楕円を表し，また，$b^2+b<0$ $(-1<b<0)$ のとき双曲線を表す。

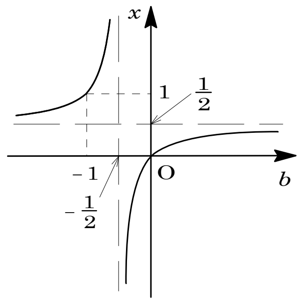
以上より，2 次曲線 C は $b<-1,\ 0<b$ のとき楕円，$-1<b<-\frac{1}{2}$，$-\frac{1}{2}<b<0$ のとき双曲線，$b=-1$ のとき放物線となる。

(3) 接点 P の x 座標は，③より，

$$x=\frac{2a-b}{4a+1}=\frac{2(b^2+b)-b}{4(b^2+b)+1}=\frac{b(2b+1)}{(2b+1)^2}$$
$$=\frac{b}{2b+1}=\frac{1}{2}-\frac{1}{2(2b+1)}$$

C は $b<-1,\ 0<b$ のとき楕円となるので，

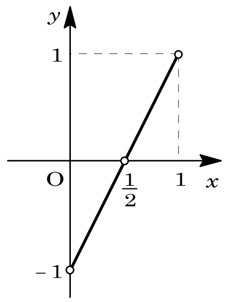
$$0<x<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}<x<1$$



よって，接点 P の存在範囲は，

$$y = 2x - 1\left(0 < x < \frac{1}{2},\ \frac{1}{2} < x < 1\right)$$

これを図示すると，右図の太線部となる。ただし，白丸は含まない。



コメント

計算量はやや多めですが, 2 次曲線の標準的な問題です。

問　題

xy 平面において，媒介変数 t を用いて，$x=2\left(t+\dfrac{1}{t}+1\right)$，$y=t-\dfrac{1}{t}$ と表される曲線を C とする。

(1) 曲線 C の方程式を求め，その概形をかけ。

(2) 点 $(a,\ 0)$ を通り曲線 C に接する直線があるような a の値の範囲と，そのときの接線の方程式をすべて求めよ。 [2006]

解答例

(1) 条件から，$x-2=2\left(t+\dfrac{1}{t}\right)$……①，$y=t-\dfrac{1}{t}$……②なので，

$$x-2+2y=4t\ \cdots\cdots\cdots③,\quad x-2-2y=\frac{4}{t}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(x-2+2y)(x-2-2y)=16$

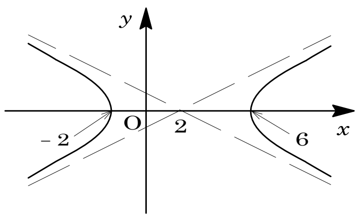
$$(x-2)^2-4y^2=16,\quad \frac{(x-2)^2}{16}-\frac{y^2}{4}=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで, t が 0 以外の任意の値をとるとき，$t+\dfrac{1}{t}\leqq -2$，$2\leqq t+\dfrac{1}{t}$ から，①より，

$$x\leqq -2,\quad 6\leqq x$$

また，②より y はすべての実数値をとりうる。

以上より，曲線 C は⑤で表される双曲線全体となり，その概形は右図のようになる。なお，双曲線の漸近線は，$y=\pm\dfrac{1}{2}(x-2)$ である。



(2) 点 $(a,\ 0)$ を通り，傾き m の接線は，$y=m(x-a)$………⑥

⑤⑥より，$(x-2)^2-4m^2(x-a)^2=16$

$$(1-4m^2)x^2+(-4+8am^2)x-(4a^2m^2+12)=0$$

$1-4m^2\neq 0\left(m\neq\pm\dfrac{1}{2}\right)$ のもとで，$D/4=0$ より，

$$(-2+4am^2)^2+(1-4m^2)(4a^2m^2+12)=0,\quad (a^2-4a-12)m^2+4=0$$

この式を満たす $\pm\dfrac{1}{2}$ でない m が存在する条件は,

$$a^2-4a-12<0,\quad \frac{1}{4}(a^2-4a-12)+4\neq 0$$

よって，$-2<a<6$ かつ $a\neq 2$ となる。

このとき，$m=\pm\sqrt{\dfrac{-4}{a^2-4a-12}}=\pm\dfrac{2}{\sqrt{-a^2+4a+12}}$

なお, x 軸に垂直な接線は，$x=6\ (a=6)$，$x=-2\ (a=-2)$ である。

以上より，接線の存在する a の値の範囲は，$-2\leqq a<2$，$2<a\leqq 6$ であり，接線の方程式は，$-2<a<2$，$2<a<6$ のとき，

$$y=\pm\frac{2}{\sqrt{-a^2+4a+12}}(x-a)$$

また，$a=6$ のとき $x=6$，$a=-2$ のとき $x=-2$ である。

コメント

双曲線のパラメータ表示の問題です。なお，曲線 C が双曲線の全体になることについては，簡単に触れるに留めました。

問　題

実数 a に対して，曲線 C_a を方程式 $(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ によって定める。

(1)　C_a は a の値と無関係に 4 つの定点を通ることを示し，その 4 定点の座標を求めよ。

(2)　a が正の実数全体を動くとき，C_a が通過する範囲を図示せよ。　[2005]

解答例

(1)　C_a：$(x-a)^2+ay^2=a^2+3a+1$ より，$x^2+ay^2-2ax-3a-1=0$

$$(y^2-2x-3)a+(x^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

どんな a に対しても①が成立する条件は，

$$y^2-2x-3=0 \cdots\cdots\cdots ②,\quad x^2-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③より，$x=\pm 1$

$x=1$ のとき②から $y=\pm\sqrt{5}$，$x=-1$ のとき②から $y=\pm 1$ となり，定点の座標は，

$$(1,\ \sqrt{5}),\ (1,\ -\sqrt{5}),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

(2)　$a>0$ のとき C_a が通過する点 $(x,\ y)$ は，①が $a>0$ の解をもつ $(x,\ y)$ である。

(i)　$y^2-2x-3\neq 0$ のとき

①より，$a=-\dfrac{x^2-1}{y^2-2x-3}>0$ から，

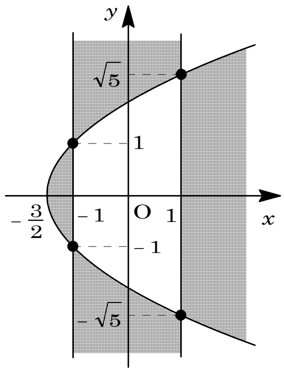
$$-(x^2-1)(y^2-2x-3)>0$$

$$(x+1)(x-1)(y^2-2x-3)<0$$

(ii)　$y^2-2x-3=0$ のとき

①より，$x^2-1=0$

(1)から，$(x,\ y)=(1,\ \pm\sqrt{5}),\ (-1,\ \pm 1)$



(i)(ii)より，C_a が通過する範囲は右図の網点部となる。

ただし，黒丸以外の境界は含まない。

コメント

曲線の通過領域を実数解条件として翻訳する頻出問題です。①式がパラメータ a についての 1 次式なので，複雑な処理は必要ありません。なお，領域図示の過程は省きましたが，原点は不等式を満たさないので，その隣接領域からはじめて，市松模様に網点をつけています。

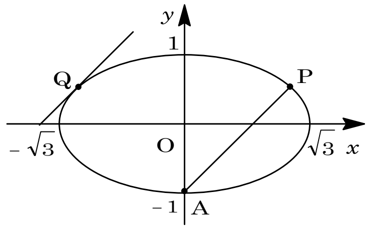
問　題

楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点で，$x\geqq 0$ の範囲にあり，定点 $\mathrm{A}(0,\ -1)$ との距離が最大となる点を P とする。

(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 点 Q は楕円 C 上を動くとする。△APQ の面積が最大となるとき，点 Q の座標および△APQ の面積を求めよ。　[2004]

解答例



(1) 点 P は楕円 $C:\dfrac{x^2}{3}+y^2=1$ 上の点なので，

$\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$$\begin{aligned}\mathrm{AP}^2&=(\sqrt{3}\cos\theta)^2+(\sin\theta+1)^2\\&=3\cos^2\theta+\sin^2\theta+2\sin\theta+1\\&=-2\sin^2\theta+2\sin\theta+4\\&=-2\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

これより，AP は $\sin\theta=\dfrac{1}{2}$ のとき，最大値 $\sqrt{\dfrac{9}{2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ をとる。このとき，点 P の座標は，$x\geqq 0$ より $\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{\pi}{6},\ \sin\dfrac{\pi}{6}\right)$，すなわち $\mathrm{P}\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2) まず，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}+1\right)=\dfrac{3}{2}(1,\ 1)$ である。

楕円 C 上の点 Q を $(\sqrt{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi)$ とおくとき，Q における接線の方程式は，

$$\frac{\sqrt{3}\cos\varphi}{3}x+(\sin\varphi)y=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

この接線が直線 AP と平行になるとき，△APQ の面積は最大となる。このとき，$(*)$の法線ベクトルの成分が $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi,\ \sin\varphi\right)$ から，

$$1\times\frac{\sqrt{3}}{3}\cos\varphi+1\times\sin\varphi=0,\ \ \frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\left(\varphi+\frac{\pi}{6}\right)=0$$

$\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\pi$ より，$\varphi+\dfrac{\pi}{6}=\pi$，$\varphi=\dfrac{5}{6}\pi$

以上より，点 Q の座標は $\left(\sqrt{3}\cos\dfrac{5}{6}\pi,\ \sin\dfrac{5}{6}\pi\right)$，すなわち $\mathrm{Q}\left(-\dfrac{3}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

△APQ の面積の最大値は，$\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot\dfrac{3}{2}=\dfrac{9}{4}$ となる。

コメント

いろいろな解法が考えられますが，上の解では，(1)，(2)とも楕円のパラメータ表示を利用しています。なお，最後の△APQ の面積計算は簡単でした。

問　題

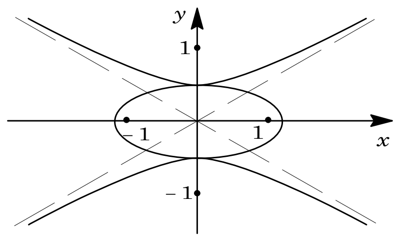
2 点$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$を焦点とする双曲線C_1と 2 点$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$を焦点とする楕円C_2は 2 点$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$のみを共有している。

(1)　C_1とC_2の方程式を，それぞれ求めよ。

(2)　C_1と漸近線を共有し，C_1と異なる双曲線をC_3とする。C_2とC_3が 2 点のみを共有するとき，C_3の方程式を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　焦点が$(0,\ 1)$，$(0,\ -1)$である双曲線C_1の方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=-1$　$(a^2+b^2=1^2)$とおくと，2 点$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$を通ることより$b=\frac{1}{2}$となり，



$$a^2=1-\frac{1}{4}=\frac{3}{4},\ a=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$C_1:\dfrac{4x^2}{3}-4y^2=-1$

焦点が$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$である楕円C_2の方程式を$\dfrac{x^2}{p^2}+\dfrac{y^2}{q^2}=1$　$(p^2-q^2=1^2)$とおくと，2 点$\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(0,\ -\frac{1}{2}\right)$を通ることより$q=\frac{1}{2}$となり，

$$p^2=1+\frac{1}{4}=\frac{5}{4},\ p=\frac{\sqrt{5}}{2}$$

よって，$C_2:\dfrac{4x^2}{5}+4y^2=1$

(2)　双曲線C_3は，双曲線C_1と漸近線を共有し，楕円C_2と 2 点を共有するので，その方程式を$\dfrac{x^2}{c^2}-\dfrac{y^2}{d^2}=1$とおくことができる。

さて，C_1の漸近線は$y=\pm\dfrac{b}{a}x$より，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}x$となるので，

$$\frac{d}{c}=\frac{1}{\sqrt{3}},\ d=\frac{1}{\sqrt{3}}c\ \cdots\cdots\cdots①$$

C_2と共有する 2 点は$\left(\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{5}}{2},\ 0\right)$なので，$c=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ $\cdots\cdots\cdots$②

①②より，$d=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\dfrac{\sqrt{5}}{2\sqrt{3}}$となり，$C_3:\dfrac{4x^2}{5}-\dfrac{12y^2}{5}=1$

コメント

楕円と双曲線についての基本事項の確認問題です。

問　題

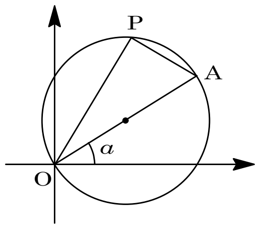
α を正の実数とする。曲線 C_α を極方程式 $r = 2a\cos(\alpha - \theta)$ によって定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　C_α は円になることを示し，その中心と半径を求めよ。

(2)　C_α が直線 $y = -x$ に接するような α をすべて求めよ。　[2002]

解答例

(1)　点 $\mathrm{A}(2\alpha,\ \alpha)$ と原点を結ぶ線分を直径とする円周上の点を $\mathrm{P}(r,\ \theta)$ とおくと，$\angle\mathrm{OPA} = \dfrac{\pi}{2}$ となる。



よって，極方程式 $r = 2a\cos(\alpha - \theta)$ は，中心 $(\alpha,\ \alpha)$，半径 α の円を表す。なお，点 P が点 A，点 O に一致しているときも成立している。

(2)　C_α が直線 $y = -x$ に接するとき，OA と $y = -x$ が直交する。

よって，n を 0 以上の整数として，$\alpha = n\pi + \dfrac{\pi}{4}$ となる。

コメント

この程度の記述でよいのか，もっと詳しく書いた方がよいのか，とまどってしまいます。そんな問題です。

問　題

C を双曲線 $2x^2-2y^2=1$ とする。l, m を点 $(1,\ 0)$ を通り，x 軸とそれぞれ θ，$\theta+\dfrac{\pi}{4}$ の角をなす 2 直線とする。ここで θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないとする。

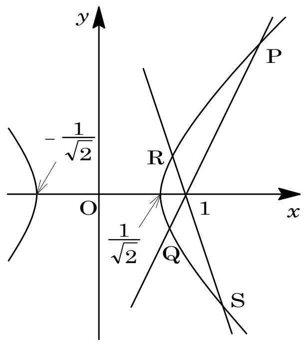
(1)　直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点 P, Q で交わることを示せ。

(2)　PQ^2 を，θ を用いて表せ。

(3)　直線 m と曲線 C の交点を R, S とするとき，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}$ は θ によらない定数となることを示せ。　[2001]

解答例

(1)　直線 l の方向ベクトルを $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とすることができるので，



$$(x,\ y)=(1,\ 0)+t(\cos\theta,\ \sin\theta)$$
$$=(1+t\cos\theta,\ t\sin\theta)$$

$2x^2-2y^2=1$ に代入して，

$$2(1+t\cos\theta)^2-2t^2\sin^2\theta=1$$
$$2(\cos^2\theta-\sin^2\theta)t^2+4t\cos\theta+1=0$$
$$2t^2\cos 2\theta+4t\cos\theta+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

θ は $\dfrac{\pi}{4}$ の整数倍でないので，$\cos 2\theta\neq 0$ となり，

$$D/4=4\cos^2\theta-2\cos 2\theta=4\cos^2\theta-2(2\cos^2\theta-1)=2$$

$D>0$ より t は 2 つ存在し，直線 l は双曲線 C と相異なる 2 点で交わる。

(2)　$(*)$の解を $t=\alpha,\ \beta$ とすると，$\mathrm{P}(1+\alpha\cos\theta,\ \alpha\sin\theta)$，$\mathrm{Q}(1+\beta\cos\theta,\ \beta\sin\theta)$ となり，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-\frac{2\cos\theta}{\cos 2\theta},\quad \alpha\beta=\frac{1}{2\cos 2\theta}$$

よって，$\mathrm{PQ}^2=(1+\alpha\cos\theta-1-\beta\cos\theta)^2+(\alpha\sin\theta-\beta\sin\theta)^2$

$$=(\alpha-\beta)^2\cos^2\theta+(\alpha-\beta)^2\sin^2\theta=(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta$$
$$=\frac{4\cos^2\theta}{\cos^2 2\theta}-\frac{2}{\cos 2\theta}=\frac{4\cos^2\theta-2\cos 2\theta}{\cos^2 2\theta}=\frac{2}{\cos^2 2\theta}$$

(3)　(2)と同様にして，$\mathrm{RS}^2=\dfrac{2}{\cos^2 2\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)}=\dfrac{2}{\cos^2\left(2\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)}=\dfrac{2}{\sin^2 2\theta}$

したがって，$\dfrac{1}{\mathrm{PQ}^2}+\dfrac{1}{\mathrm{RS}^2}=\dfrac{\cos^2 2\theta}{2}+\dfrac{\sin^2 2\theta}{2}=\dfrac{1}{2}$

コメント

一般的に計算量の多い 2 次曲線と直線の関係についての問題です。媒介変数を利用して，計算量を減らす工夫がポイントです。

問　題

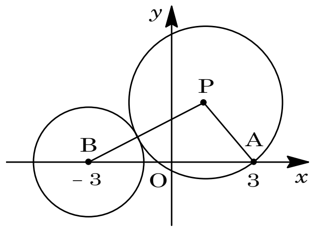
次の問いに答えよ。

(1)　点$(3,\ 0)$を通り，円$(x+3)^2+y^2=4$と互いに外接する円の中心$(X,\ Y)$の軌跡を求めよ。

(2)　(1)の軌跡上の点と定点$(0,\ a)$との距離の最小値を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$\mathrm{A}(3,\ 0)$，$\mathrm{B}(-3,\ 0)$とし，円の中心を$\mathrm{P}(X,\ Y)$とおく。

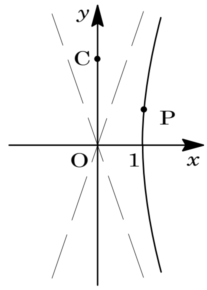


条件より，$\mathrm{PB}-2=\mathrm{PA}$，$\mathrm{PB}-\mathrm{PA}=2$

すると，点Pは2点A, Bを焦点とする双曲線の右側の枝を描く。

この方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(c^2=a^2+b^2)$とすると，

$2a=2$より$a=1$，また$c=3$から$b^2=3^2-1^2=8$となる。



よって，$x^2-\dfrac{y^2}{8}=1$　$(x>0)$

(2)　(1)より，点$\mathrm{P}(X,\ Y)$は$X^2-\dfrac{Y^2}{8}=1$ $(X>0)$を満たし，$\mathrm{C}(0,\ a)$とおくと，

$$\mathrm{PC}^2=X^2+(Y-a)^2=1+\frac{Y^2}{8}+(Y-a)^2$$
$$=\frac{9}{8}Y^2-2aY+a^2+1=\frac{9}{8}\left(Y-\frac{8}{9}a\right)^2+\frac{1}{9}a^2+1$$

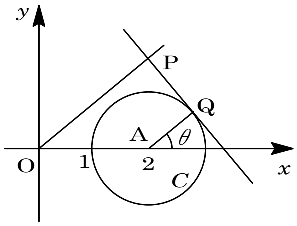
Yは任意の値をとりうるので，$Y=\dfrac{8}{9}a$のときPC^2は最小値をとる。このときPCは最小値$\sqrt{\dfrac{1}{9}a^2+1}=\dfrac{1}{3}\sqrt{a^2+9}$をとる。

コメント

有名頻出問題です。類題は98年の東北大などで出ています。

問　題

xy 平面上において，点 $\mathrm{A}(2,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。C 上の点 Q における C の接線に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ から下ろした垂線の足を P とする。図のように x 軸と線分 AQ のなす角を θ とする。ただし，θ は $-\pi<\theta\leqq\pi$ を動くものとする。



(1)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $(x,\ y)$ を θ を用いて表せ。

(2)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の x 座標が最小になるとき, P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。

(3)　直線 $x=k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるとき，k のとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(2+\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

直線 PQ の方程式は，$\cos\theta(x-2-\cos\theta)+\sin\theta(y-\sin\theta)=0$

$x\cos\theta+y\sin\theta=2\cos\theta+1$ ………①

直線 OP は PQ と垂直なので，その方程式は，$-x\sin\theta+y\cos\theta=0$ ………②

①②より，$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(2\cos\theta+1)\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=(2\cos\theta+1)\begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 0\end{pmatrix}=(2\cos\theta+1)\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\end{pmatrix}$$

よって，$x=(2\cos\theta+1)\cos\theta$，$y=(2\cos\theta+1)\sin\theta$

(2)　$x=f(\theta)$，$y=g(\theta)$ とおくと，$f(-\theta)=f(\theta)$，$g(-\theta)=-g(\theta)$ より，点 P の軌跡は x 軸対称となる。以下，θ が $0\leqq\theta\leqq\pi$ を動くときを考える。

さて，$\dfrac{dx}{d\theta}=-2\sin\theta\cos\theta+(2\cos\theta+1)(-\sin\theta)$

$=-\sin\theta(4\cos\theta+1)$

$\cos\theta=-\dfrac{1}{4}$ の解を $\theta=\alpha$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi)$ とおくと，

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$	0	$+$	
x	3	$\searrow$	$-\dfrac{1}{8}$	$\nearrow$	1

$\theta=\alpha$ のとき点 P の x 座標が最小になる。

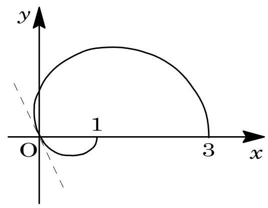
このとき $x=-\dfrac{1}{8}$，また $\sin\alpha=\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{4}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$ より，$y=\dfrac{\sqrt{15}}{8}$ となる。

x 軸に関する対称性を考えて, x 座標が最小の点 P の座標は，$\left(-\dfrac{1}{8},\ \pm\dfrac{\sqrt{15}}{8}\right)$

(3)　原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標を設定すると，点 P の軌跡は，

$r=2\cos\theta+1$

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において r は単調減少し，$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ では $r \geqq 0$，$\dfrac{2}{3}\pi < \theta \leqq \pi$ では $r < 0$ となるので，点 P の軌跡の概形は右図のような曲線になる。



さらに，この曲線とこれを x 軸対称した曲線とを合わせた曲線が，$-\pi < \theta \leqq \pi$ における点 P の軌跡である。

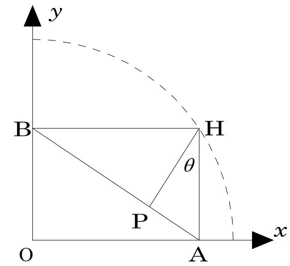
すると，直線 $x = k$ が点 P の軌跡と相異なる 4 点で交わるのは，(2)の結果を用いて，$-\dfrac{1}{8} < k < 0$，$0 < k < 1$ となる。

コメント

(3)でも，(2)と同じく y の増減を調べ，点 P の軌跡の概形を調べようかとも思いました。しかし，それほどの設問でもないので，極方程式で概形を考えました。

問　題

xy 平面の第 1 象限内の点 H が原点 O を中心とする半径 a の円周上にある。点 H から x 軸, y 軸におろした垂線の足をそれぞれ A, B とし, さらに点 H から線分 AB におろした垂線の足を P とする。線分 HP の長さを l, $\angle\mathrm{AHP}=\theta$ とするとき, 次の問いに答えよ。

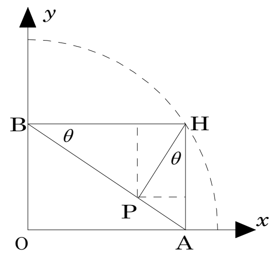


(1) l を a と θ で表せ。

(2) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の座標 $(x,\ y)$ を a と θ で表せ。

(3) 点 H が円周上を動くとき, 線分 OP の長さの最小値を求めよ。 [1998]

解答例



(1) 四角形 OAHB は長方形より, $\mathrm{AB}=\mathrm{OH}=a$

また, $\angle\mathrm{ABH}=\angle\mathrm{AHP}=\theta$

よって, $\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AB}\cdot\mathrm{HP}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{AH}\cdot\mathrm{BH}$ から,

$$a\cdot l=a\sin\theta\cdot a\cos\theta$$

$$l=a\sin\theta\cos\theta$$

(2) $\mathrm{OA}=\mathrm{BH}=a\cos\theta$, $\mathrm{OB}=\mathrm{AH}=a\sin\theta$ から,

$$\mathrm{H}(a\cos\theta,\ a\sin\theta)$$

$$x=a\cos\theta-l\sin\theta=a\cos\theta-a\sin^2\theta\cos\theta=a\cos^3\theta$$

$$y=a\sin\theta-l\cos\theta=a\sin\theta-a\cos^2\theta\sin\theta=a\sin^3\theta$$

(3) $$\mathrm{OP}^2=a^2\cos^6\theta+a^2\sin^6\theta=a^2(\cos^2\theta+\sin^2\theta)(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)$$

$$=a^2(\cos^4\theta-\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta)=a^2\left\{(\cos^2\theta+\sin^2\theta)^2-3\cos^2\theta\sin^2\theta\right\}$$

$$=a^2\left\{1-3\left(\frac{\sin 2\theta}{2}\right)^2\right\}=a^2\left(1-\frac{3}{4}\sin^2 2\theta\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より, $2\theta=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき OP^2 は最小値 $\dfrac{1}{4}a^2$ をとる。

よって, このとき OP は最小値 $\dfrac{1}{2}a$ をとる。

コメント

点 P の軌跡はアステロイドの一部分となります。これがわかれば, (3)の結論はすぐに導けます。なお, (3)は微分の利用も可能ですが, やや大袈裟です。

問　題

xy 平面において, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また, 実数 a に対して, a 以下の最大の整数を $[a]$ で表す。記号$[\quad]$をガウス記号という。以下の問いでは N を自然数とする。

(1) n を $0 \leqq n \leqq N$ を満たす整数とする。点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上にある格子点の個数をガウス記号を用いて表せ。

(2) 直線 $y=x$ と, x 軸, および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $A(N)$ とおく。このとき $A(N)$ を求めよ。

(3) 曲線 $y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)\ (0\leqq x\leqq N)$ と, x 軸, および直線 $x=N$ で囲まれた領域（境界を含む）にある格子点の個数を $B(N)$ とおく。(2)の $A(N)$ に対して $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{B(N)}{A(N)}$ を求めよ。 [2017]

解答例

(1) 点 $(n,\ 0)$ と点 $\left(n,\ N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right)$ を結ぶ線分上の格子点の座標を $(n,\ l)$ とおくと, $l=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ \left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]$ より, その個数は $\left[N\sin\left(\dfrac{\pi n}{2N}\right)\right]+1$ である。

(2) 直線 $y=x$, x 軸, $x=N$ で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数 $A(N)$ は,

$$A(N)=1+\sum_{k=1}^{N}(k+1)=\sum_{k=1}^{N+1}k=\frac{1}{2}(N+1)(N+2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3) 曲線 $y=N\sin\left(\dfrac{\pi x}{2N}\right)\ (0\leqq x\leqq N)$, x 軸, 直線 $x=N$ で囲まれた領域(境界含む)にある格子点の個数 $B(N)$ は,

$$B(N)=1+\sum_{k=1}^{N}\left\{\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]+1\right\}=N+1+\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\cdots\cdots\cdots②$$

さて, 一般的に, $[a]\leqq a<[a]+1$ から, $a-1<[a]\leqq a$ となり,

$$N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-1<\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

$$N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)-N<\sum_{k=1}^{N}\left[N\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)\right]\leqq N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$$

②より, $1+N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)<B(N)\leqq N+1+N\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)$ となり, ①から,

$$\frac{2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}<\frac{B(N)}{A(N)}\leqq\frac{2N+2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\left(\frac{\pi k}{2N}\right)}{(N+1)(N+2)}$$

さて，$I(N)=\dfrac{2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\Big(\dfrac{\pi k}{2N}\Big)}{(N+1)(N+2)}$，$J(N)=\dfrac{2N+2+2N\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\Big(\dfrac{\pi k}{2N}\Big)}{(N+1)(N+2)}$とおくと，

$$I(N)=\frac{2}{(N+1)(N+2)}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\Big(\frac{\pi k}{2N}\Big)$$

$$J(N)=\frac{2}{N+2}+\frac{4N^2}{\pi(N+1)(N+2)}\cdot\frac{\pi}{2N}\sum_{k=1}^{N}\sin\Big(\frac{\pi k}{2N}\Big)$$

すると，$N\to\infty$のとき，$\dfrac{\pi}{2N}\displaystyle\sum_{k=1}^{N}\sin\Big(\dfrac{\pi k}{2N}\Big)\to\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$より，

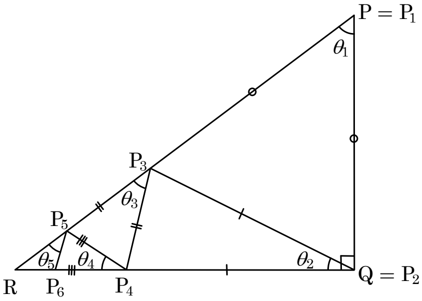
$$I(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi},\quad J(N)\to 0+\frac{4}{\pi}\cdot 1=\frac{4}{\pi}$$

したがって，$I(N)<\dfrac{B(N)}{A(N)}\leqq J(N)$から，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\dfrac{B(N)}{A(N)}=\dfrac{4}{\pi}$となる。

コメント

格子点の個数を題材にした数列の極限の問題ですが，それに区分求積が絡むという味付けが施されています。

問　題



$\triangle$PQR において$\angle RPQ=\theta$，$\angle PQR=\dfrac{\pi}{2}$とする。点$P_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を次で定める。

$$P_1=P,\ P_2=Q,\ P_nP_{n+2}=P_nP_{n+1}$$

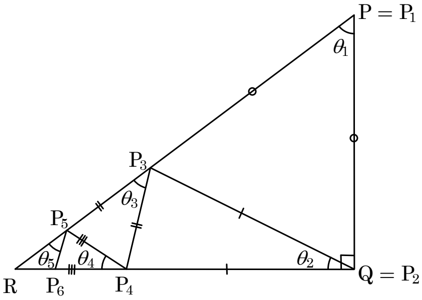
ただし，点P_{n+2}は線分P_nR上にあるものとする。実数θ_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を，$\theta_n=\angle P_{n+1}P_nP_{n+2}$ $(0<\theta_n<\pi)$で定める。

(1) θ_2，θ_3をθを用いて表せ。

(2) $\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$はnによらない定数であることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n$を求めよ。　[2016]

解答例



(1) 右図より$\theta_1=\theta$なので，$\theta_2=\dfrac{\pi}{2}-\dfrac{\pi-\theta_1}{2}=\dfrac{\theta}{2}$

$$\theta_3=\pi-\frac{\pi-\theta_1}{2}-\frac{\pi-\theta_2}{2}=\frac{\theta_1+\theta_2}{2}$$
$$=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{4}=\frac{3}{4}\theta$$

(2) $\dfrac{\pi-\theta_n}{2}+\dfrac{\pi-\theta_{n+1}}{2}+\theta_{n+2}=\pi$より，

$$\theta_{n+2}=\frac{\theta_{n+1}}{2}+\frac{\theta_n}{2}$$

すると，$\theta_{n+2}+\dfrac{\theta_{n+1}}{2}=\dfrac{\theta_{n+1}}{2}+\dfrac{\theta_n}{2}+\dfrac{\theta_{n+1}}{2}=\theta_{n+1}+\dfrac{\theta_n}{2}$となるので，

$$\theta_{n+1}+\frac{\theta_n}{2}=\theta_2+\frac{\theta_1}{2}=\frac{\theta}{2}+\frac{\theta}{2}=\theta\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) $(*)$より，$\theta_{n+1}=-\dfrac{\theta_n}{2}+\theta$となり，$\theta_{n+1}-\dfrac{2}{3}\theta=-\dfrac{1}{2}\Big(\theta_n-\dfrac{2}{3}\theta\Big)$と変形すると，

$$\theta_n-\frac{2}{3}\theta=\Big(\theta_1-\frac{2}{3}\theta\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{\theta}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1},\ \theta_n=\frac{\theta}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}+\frac{2}{3}\theta$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\theta_n=\lim_{n\to\infty}\Big\{\frac{\theta}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}+\frac{2}{3}\theta\Big\}=\frac{2}{3}\theta$

コメント

図形がらみの数列の問題では，問題文に参考図が書いてあるかどうかで，難易がかなり違ってきます。本問でも，図を書くところから始めると，かなり時間を費やすのではないかと思えます。また，隣接 3 項間型の漸化式の変形についても，誘導を(2)の設問にするほど丁寧です。

問　題

曲線$C : y=\dfrac{1}{x+2}$ $(x>-2)$を考える。曲線 C 上の点$P_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$における接線を$l_1$とし，$l_1$と x 軸との交点をQ_1，点Q_1を通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点をP_2とおく。以下同様に，自然数 $n\,(n\geqq 2)$に対して，点P_nにおける接線をl_nとし，l_nと x 軸との交点をQ_n，点Q_nを通り x 軸と垂直な直線と曲線 C との交点をP_{n+1}とおく。

(1)　l_1の方程式を求めよ。

(2)　P_nの x 座標をx_n $(n\geqq 1)$とする。x_{n+1}をx_nを用いて表し，x_nを n を用いて表せ。

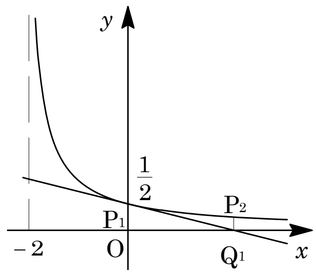
(3)　l_n，x 軸，y 軸で囲まれる三角形の面積S_nを求め，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$C : y=\dfrac{1}{x+2}$に対し，$y'=-\dfrac{1}{(x+2)^2}$

点$P_1\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$における接線$l_1$の傾きは$-\dfrac{1}{4}$より，その方程式は，

$$y-\frac{1}{2}=-\frac{1}{4}x\,,\quad y=-\frac{1}{4}x+\frac{1}{2}$$



(2)　(1)と同様に，点$P_n\left(x_n,\ \dfrac{1}{x_n+2}\right)$における接線$l_n$の傾きは，$-\dfrac{1}{(x_n+2)^2}$より，その方程式は，

$$y-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(x-x_n)\cdots\cdots\cdots①$$

x 軸との交点Q_nの x 座標は，①より，

$$-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(x-x_n)\,,\quad x_n+2=x-x_n$$

よって，$x=2x_n+2$となり，Q_nの x 座標はP_{n+1}の x 座標x_{n+1}と等しいことより，

$$x_{n+1}=2x_n+2\cdots\cdots\cdots②$$

②を変形すると，$x_{n+1}+2=2(x_n+2)$となり，$x_1=0$のもとで，

$$x_n+2=(x_1+2)2^{n-1}=2^n\,,\quad x_n=2^n-2$$

(3)　接線l_nと y 軸との交点をR_nとすると，R_nの y 座標は①より，

$$y-\frac{1}{x_n+2}=-\frac{1}{(x_n+2)^2}(-x_n)\,,\quad y=\frac{x_n}{(x_n+2)^2}+\frac{1}{x_n+2}=\frac{2x_n+2}{(x_n+2)^2}$$

すると，$\triangle OQ_nR_n$の面積S_nは，

$$S_n=\frac{1}{2}(2x_n+2)\cdot\frac{(2x_n+2)}{(x_n+2)^2}=\frac{2(x_n+1)^2}{(x_n+2)^2}=\frac{(2^n-1)^2}{2^{2n-1}}$$

よって，$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty} \dfrac{2^{2n} - 2^{n+1} + 1}{2^{2n-1}} = \lim_{n\to\infty} (2 - 2^{-n+2} + 2^{-2n+1}) = 2$

コメント

漸化式と極限についての基本的な問題です。

問　題

e は自然対数の底とする。$t>e$ において関数 $f(t)$, $g(t)$ を次のように定める。

$$f(t)=\int_1^e \frac{t^2\log x}{t-x}dx\,,\ \ g(t)=\int_1^e \frac{x^2\log x}{t-x}dx$$

(1)　$f(t)-g(t)$ を t の 1 次式で表せ。

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき $\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ が成り立つことを用いて，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ を示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=0$ となる定数 a,b を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$f(t)-g(t)=\displaystyle\int_1^e\frac{t^2-x^2}{t-x}\log x\,dx=\int_1^e(t+x)\log x\,dx=t\int_1^e\log x\,dx+\int_1^e x\log x\,dx$

$$=t\Big[x\log x-x\Big]_1^e+\Big[\frac{x^2}{2}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{2}\int_1^e x^2\cdot\frac{1}{x}dx$$

$$=t\{e-(e-1)\}+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{2}\int_1^e x\,dx=t+\frac{e^2}{2}-\frac{1}{4}(e^2-1)=t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}$$

(2)　$1\leqq x\leqq e$ かつ $t>e$ のとき，$0<\dfrac{1}{t-x}\leqq\dfrac{1}{t-e}$ より，

$$0<\int_1^e\frac{x^2\log x}{t-x}dx\leqq\int_1^e\frac{x^2\log x}{t-e}dx=\frac{1}{t-e}\int_1^e x^2\log x\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_1^e x^2\log x\,dx=k>0$ とおくと，$0<g(t)\leqq\dfrac{k}{t-e}$ となる。

すると, $t\to\infty$ のとき $\dfrac{k}{t-e}\to 0$ なので，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}g(t)=0$ である。

(3)　(1)より，$f(t)-\dfrac{bt^2}{t-a}=g(t)+t+\dfrac{e^2}{4}+\dfrac{1}{4}-\dfrac{bt^2}{t-a}$

$$=g(t)+t+\frac{e^2}{4}+\frac{1}{4}-\left(bt+ab+\frac{a^2b}{t-a}\right)$$

$$=g(t)+(1-b)t+\frac{1}{4}(e^2+1)-ab-\frac{a^2b}{t-a}$$

$t\to\infty$ のとき，$g(t)\to 0$，$\dfrac{a^2b}{t-a}\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)$が有限な値となるために必要な条件は，$1-b=0$，$b=1$ である。

このとき，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\left(f(t)-\frac{bt^2}{t-a}\right)=\lim_{t\to\infty}\left\{g(t)+\frac{1}{4}(e^2+1)-a-\frac{a^2}{t-a}\right\}=0$ より，

$$\frac{1}{4}(e^2+1)-a=0,\ \ a=\frac{1}{4}(e^2+1)$$

コメント

(2)の k の値を計算すると，$\dfrac{1}{9}(2e^3+1)$ となります。ここでは必要ありませんが。

問　題

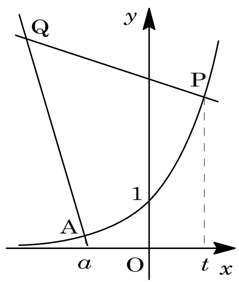
曲線$C: y=e^x$上の異なる 2 点$\mathrm{A}(a,\ e^a)$，$\mathrm{P}(t,\ e^t)$におけるCのそれぞれの法線の交点を Q として，線分 AQ の長さを$L_a(t)$で表す。さらに，$r(a)=\lim\limits_{t\to a}L_a(t)$と定義する。

(1)　$r(a)$を求めよ。

(2)　aが実数全体を動くとき，$r(a)$の最小値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$C: y=e^x$より，$y'=e^x$



$\mathrm{A}(a,\ e^a)$における法線の方程式は，

$$y-e^a=-\frac{1}{e^a}(x-a)\cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{P}(t,\ e^t)$における法線の方程式は，

$$y-e^t=-\frac{1}{e^t}(x-t)\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$y-e^a+e^a-e^t=-\dfrac{1}{e^t}(x-a+a-t)$

①を代入すると，$-\dfrac{1}{e^a}(x-a)+\dfrac{1}{e^t}(x-a)=e^t-e^a+\dfrac{1}{e^t}(t-a)$

$$x-a=-e^ae^t-e^a\,\frac{t-a}{e^t-e^a}$$

さて，条件より，$L_a(t)=\sqrt{(x-a)^2+(y-e^a)^2}=\sqrt{(x-a)^2+\dfrac{1}{e^{2a}}(x-a)^2}$

$$=\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\,|x-a|$$

ここで，$\lim\limits_{t\to a}|x-a|=\lim\limits_{t\to a}\left(e^ae^t+e^a\,\dfrac{t-a}{e^t-e^a}\right)=(e^a)^2+e^a\cdot\dfrac{1}{e^a}=e^{2a}+1$から，

$$r(a)=\lim_{t\to a}L_a(t)=\sqrt{1+\frac{1}{e^{2a}}}\,(e^{2a}+1)=\frac{\sqrt{(e^{2a}+1)^3}}{e^a}$$

(2)　$e^{2a}=s>0$，$f(s)=\dfrac{(s+1)^3}{s}$とおくと，(1)より，$r(a)=\sqrt{f(s)}$となる。

$$f'(s)=\frac{3(s+1)^2s-(s+1)^3}{s^2}$$

$$=\frac{(s+1)^2(2s-1)}{s^2}$$

s	0	…	$\frac{1}{2}$	…
$f'(s)$		$-$	0	$+$
$f(s)$		↘	$\frac{27}{4}$	↗

右表より，$f(s)$は最小値$\dfrac{27}{4}$をとるので，

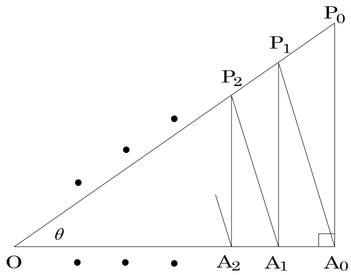
$r(a)$の最小値は$\sqrt{\dfrac{27}{4}}=\dfrac{3\sqrt{3}}{2}$である。

コメント

計算量が多いので，少し工夫をしています。なお，$\displaystyle\lim_{t\to a}\frac{t-a}{e^t-e^a}$ は，微分係数の定義を利用して，極限値を求めています。

問　題

直角三角形 A_0P_0O の斜辺 OP_0 上に点の列 $P_1, P_2, \cdots\cdots, P_n, \cdots\cdots$ を，辺 OA_0 上に点の列 $A_1, A_2, \cdots\cdots, A_n, \cdots\cdots$ を，それぞれ次のように定める。まず，$OP_1 = OA_0$ とする。次に点 P_1 から OA_0 におろした垂線の足を A_1 とする。次に $OP_2 = OA_1$ とし，点 P_2 から OA_0 におろした垂線の足を A_2 とする。以下，この操作をくり返す。$\angle P_0OA_0 = \theta$，$OA_0 = a$ とし，$\triangle A_{n-1}P_{n-1}P_n$ の面積を S_n とする。$S(\theta) = S_1 + S_2 + \cdots\cdots + S_n + \cdots\cdots$ とするとき，次の問いに答えよ。



(1)　S_1 を a と θ で表せ。

(2)　$S(\theta)$ を a と θ で表せ。

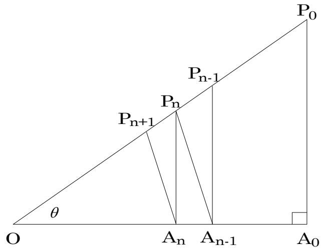
(3)　$\displaystyle\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta}$ を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$S_1 = \triangle OA_0P_0 - \triangle OA_0P_1$

$$= \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\tan\theta - \frac{1}{2}\cdot a\cdot a\sin\theta$$

$$= \frac{1}{2}a^2(\tan\theta - \sin\theta)$$



(2)　$A_nP_n /\!/ A_{n-1}P_{n-1}$，$A_nP_{n+1} /\!/ A_{n-1}P_n$ より，

$$\triangle A_nP_nP_{n+1} \backsim \triangle A_{n-1}P_{n-1}P_n$$

その相似比は $A_nP_n : A_{n-1}P_{n-1}$，すなわち $OA_n : OA_{n-1}$ となる。

ここで，$OA_n = OP_n\cos\theta = OA_{n-1}\cos\theta$ から，この相似比は $\cos\theta : 1$ となり，面積比は相似比の 2 乗より，

$$S_{n+1} = \cos^2\theta\cdot S_n$$

条件から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$0<\cos^2\theta<1$

$$S(\theta) = \sum_{n=1}^{\infty}S_n = \frac{S_1}{1-\cos^2\theta} = \frac{\frac{1}{2}a^2(\tan\theta-\sin\theta)}{\sin^2\theta} = \frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta\cos\theta}$$

(3)　$$\lim_{\theta\to+0}\frac{S(\theta)}{\theta} = \lim_{\theta\to+0}\frac{1}{2}a^2\cdot\frac{1-\cos\theta}{\theta\sin\theta\cos\theta} = \frac{1}{2}a^2\lim_{\theta\to+0}\frac{1-\cos^2\theta}{\theta\sin\theta\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

$$= \frac{1}{2}a^2\lim_{\theta\to+0}\frac{\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)} = \frac{1}{4}a^2$$

コメント

無限等比級数の図形への応用というよく見かける問題です。問題文に図が書いてありますので，相似比の 2 乗が面積比というのを用いることも気づきやすいのではないかと思われます。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，β, m をそれぞれ $0<\beta<1$，$m>0$ を満たす実数とする。また，関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ で極値をとり，$f(-1)=f(\beta)=-m$，$f(1)=f(-\beta)=m$ を満たすとする。

(1) a,b,c および β, m の値を求めよ。

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ に対して $f(-1)\leqq g(x)\leqq f(1)$ を満たすとする。$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，$h(-1)$，$h(-\beta)$，$h(\beta)$，$h(1)$ それぞれと 0 との大きさを比較することにより，$h(x)$ を求めよ。　[2017]

解答例

(1) 関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ は $x=\beta,\ -\beta$ $(0<\beta<1)$ で極値をとるので，$f'(\beta)=f'(-\beta)=0$ となり，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ から，

$$f'(x)=3(x+\beta)(x-\beta)=3x^2-3\beta^2$$

すると，k を定数として，$f(x)=x^3-3\beta^2x+k$ である。

さて，条件より，$m>0$ で，$f(-1)=f(\beta)=-m$ より，

$$-1+3\beta^2+k=-m\cdots\cdots\cdots①,\ -2\beta^3+k=-m\cdots\cdots\cdots②$$

また，$f(1)=f(-\beta)=m$ より，

$$1-3\beta^2+k=m\cdots\cdots\cdots③,\ 2\beta^3+k=m\cdots\cdots\cdots④$$

②④より，$k=0$，$m=2\beta^3$ となり，①③に代入すると①と③は一致し，

$$2\beta^3+3\beta^2-1=0,\ (2\beta-1)(\beta+1)^2=0$$

すると，$0<\beta<1$ から $\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$m=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

そして，$f(x)=x^3-\dfrac{3}{4}x$ から，$a=0$，$b=-\dfrac{3}{4}$，$c=0$

(2) 関数 $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ は，$-1\leqq x\leqq 1$ のとき $-m\leqq g(x)\leqq m$ を満たし，$h(x)=f(x)-g(x)$ とおくとき，

$$h(-1)=f(-1)-g(-1)=-m-g(-1)\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$h(-\beta)=f(-\beta)-g(-\beta)=m-g(-\beta)\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑥$$

$$h(\beta)=f(\beta)-g(\beta)=-m-g(\beta)\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑦$$

$$h(1)=f(1)-g(1)=m-g(1)\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$h(x)$ は 2 次以下の関数となり，$h(x)=sx^2+tx+u$ とおくと，⑤⑧より，

$$s-t+u\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑨,\ s+t+u\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑩$$

そして，$\beta=\dfrac{1}{2}$ から，⑥⑦より，

$$\frac{1}{4}s-\frac{1}{2}t+u\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑪,\ \frac{1}{4}s+\frac{1}{2}t+u\leqq 0\cdots\cdots\cdots⑫$$

すると，⑩－⑨から $t \geqq 0$，⑫－⑪から $t \leqq 0$ となるので，$t=0$ である。

これより，⑨から $s+u \leqq 0$，⑩から $s+u \geqq 0$ となるので，$s+u=0$ ………⑬

さらに，⑪から $\dfrac{1}{4}s+u \geqq 0$，⑫から $\dfrac{1}{4}s+u \leqq 0$ となるので，$\dfrac{1}{4}s+u=0$ ………⑭

⑬⑭より，$s=u=0$ となり，以上より $h(x)=0$ である。

コメント

微分の応用問題です。なお，(2)は図を書くと結論は明らかなのですが，それを示すのは……。ということで，数式を用いて処理をしました。

問　題

関数 $f(x)=2x^2-9x+14-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}\ (x>0)$ について以下の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の解をすべて求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ のすべての極値を求めよ。

(3) 曲線 $y=f(x)$ と x 軸とで囲まれた部分の面積を求めよ。　[2017]

解答例

(1) $x>0$ のとき，$f(x)=2x^2-9x+14-\dfrac{9}{x}+\dfrac{2}{x^2}$ に対して，$f(x)=0$ とすると，

$$2\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+14=0\,,\ \ 2\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-9\left(x+\frac{1}{x}\right)+10=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=x+\dfrac{1}{x}$ とおくと，$t\geqq 2\sqrt{x\cdot\dfrac{1}{x}}=2$ となり，(*)から，

$$2t^2-9t+10=0\,,\ (2t-5)(t-2)=0\,,\ t=\frac{5}{2},\ 2$$

$t=\dfrac{5}{2}$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}=\dfrac{5}{2}$ となり，$2x^2-5x+2=0$ から，$x=\dfrac{1}{2},\ 2$ となる。

$t=2$ のとき，$x+\dfrac{1}{x}=2$ となり，$x^2-2x+1=0$ から，$x=1$ となる。

以上より，$f(x)=0$ の解は，$x=\dfrac{1}{2},\ 2,\ 1$ である。

(2) $x>0$ のとき，$f'(x)=4x-9+\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{4}{x^3}=\dfrac{1}{x^3}(4x^4-9x^3+9x-4)$ となり，

$$f'(x)=\frac{1}{x^3}(x-1)(x+1)(4x^2-9x+4)$$

ここで，$f'(x)=0$ とすると，$x>0$ では $x=1,\ \dfrac{9\pm\sqrt{17}}{8}$ から，$\alpha=\dfrac{9-\sqrt{17}}{8}$，$\beta=\dfrac{9+\sqrt{17}}{8}$ とおき，$f(x)$ の増減を調べると，右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘		↗	0	↘		↗

さて，α の条件は，$4\alpha^2-9\alpha+4=0$ から $4\alpha-9+\dfrac{4}{\alpha}=0$ となり，$\alpha+\dfrac{1}{\alpha}=\dfrac{9}{4}$

同様に，$\beta+\dfrac{1}{\beta}=\dfrac{9}{4}$ となるので，(*)から，

$$f(\alpha)=f(\beta)=2\left(\frac{9}{4}\right)^2-9\cdot\frac{9}{4}+10=-\frac{1}{8}$$

したがって，$f(x)$ の極大値は $0\,(x=1)$，極小値は $-\dfrac{1}{8}\ \left(x=\dfrac{9\pm\sqrt{17}}{8}\right)$ である。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S は，$-\dfrac{1}{2}\leqq x\leqq 2$ で $f(x)\leqq 0$ より，

$$S=-\int_{\frac{1}{2}}^{2}\left(2x^2-9x+14-\frac{9}{x}+\frac{2}{x^2}\right)dx=\left[-\frac{2}{3}x^3+\frac{9}{2}x^2-14x+9\log|x|+\frac{2}{x}\right]_{\frac{1}{2}}^{2}$$

$$=-\frac{21}{4}+\frac{135}{8}-21+9\log 4-3=-\frac{99}{8}+18\log 2$$

コメント

微積分の総合問題です。ポイントは(2)の極小値を求める計算です。

問　題

k を実数とする。xy 平面の曲線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ が異なる共有点 P, Q をもつとする。ただし点 P, Q の x 座標は正であるとする。また，原点を O とする。

(1) k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) k が(1)の範囲を動くとき，△OPQ の重心 G の軌跡を求めよ。

(3) △OPQ の面積を S とするとき，S^2 を k を用いて表せ。

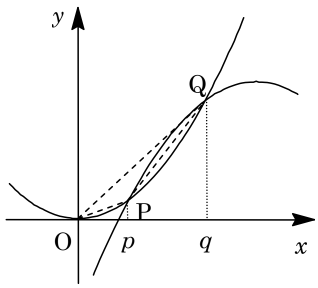
(4) k が(1)の範囲を動くとする。△OPQ の面積が最大となるような k の値と，そのときの重心 G の座標を求めよ。　[2016]

解答例

(1) $C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ ……②

を連立して，$x^2 = -x^2 + 2kx + 1 - k^2$ から，

$$2x^2 - 2kx + k^2 - 1 = 0 \text{ ………③}$$



条件より，③は異なる正の解をもち，それを $x = p,\ q$ とおくと，

$$D/4 = k^2 - 2(k^2 - 1) > 0 \text{ ………④}$$

$$p + q = k > 0 \text{ ……⑤},\quad pq = \frac{k^2 - 1}{2} > 0 \text{ ……⑥}$$

④より $k^2 - 2 < 0$ となり，$-\sqrt{2} < k < \sqrt{2}$ ……④′，⑥より $k < -1,\ 1 < k$ ……⑥′

したがって，④′⑤⑥′から，$1 < k < \sqrt{2}$

(2) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと，△OPQ の重心 $\mathrm{G}(x,\ y)$ は，

$$x = \frac{1}{3}(p + q) \text{ ………⑦},\quad y = \frac{1}{3}(p^2 + q^2) = \frac{1}{3}\{(p + q)^2 - 2pq\} \text{ ………⑧}$$

⑤⑥を代入すると，$x = \dfrac{k}{3}$，$y = \dfrac{1}{3}\{k^2 - (k^2 - 1)\} = \dfrac{1}{3}$

よって，(1)から，G の軌跡は線分 $y = \dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3} < x < \dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$ となる。

(3) △OPQ の面積 S は，$S = \dfrac{1}{2}|pq^2 - p^2q| = \dfrac{1}{2}pq|q - p|$ となり，⑤⑥から，

$$S^2 = \frac{1}{4}p^2q^2(q - p)^2 = \frac{1}{4}(pq)^2\{(p + q)^2 - 4pq\}$$

$$= \frac{1}{4}\cdot\frac{(k^2 - 1)^2}{4}\{k^2 - 2(k^2 - 1)\} = -\frac{1}{16}(k^2 - 1)^2(k^2 - 2)$$

(4) $t = k^2$ とおくと，(1)から $1 < t < 2$ となり，このとき $S^2 = f(t)$ とすると，

$$f(t) = -\frac{1}{16}(t - 1)^2(t - 2) = -\frac{1}{16}(t^3 - 4t^2 + 5t - 2)$$

$$f'(t) = -\frac{1}{16}(3t^2 - 8\mathrm{t} + 5)$$
$$= -\frac{1}{16}(3t-5)(t-1)$$

t	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$f'(t)$	0	$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$S^2 = f(t)$ は $t = \frac{5}{3}$ のとき最大値をとる。

すなわち，△OPQ の面積 S は，$k = \sqrt{\frac{5}{3}} = \frac{\sqrt{15}}{3}$ のとき最大となり，このとき(2)から $\mathrm{G}\left(\frac{\sqrt{15}}{9},\ \frac{1}{3}\right)$ である。

コメント

放物線を題材にした微分と最大・最小に関する典型題です。

問　題

$f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ とおく。曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線を l とする。直線 l と y 軸の交点の y 座標を $b(t)$ とおく。

(1) 次の等式を示せ。$b(t)=\dfrac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})$

(2) $x\geqq 0$ のとき，$\log(1+x)\leqq x$ であることを示せ。

(3) $t\geqq 0$ のとき，$b(t)\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$ であることを示せ。

(4) $b(0)=\displaystyle\lim_{x\to\infty}\int_0^x\frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}dt$ であることを示せ。　[2015]

解答例

(1) $f(x)=\log(e^x+e^{-x})$ より $f'(x)=\dfrac{e^x-e^{-x}}{e^x+e^{-x}}$ となり，曲線 $y=f(x)$ の点 $(t,\ f(t))$ における接線 l は，$y-f(t)=f'(t)(x-t)$ となるので，y 切片 $b(t)$ は，

$$b(t)=f'(t)(-t)+f(t)=-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}t+\log(e^t+e^{-t})$$

$$=-\frac{e^t-e^{-t}}{e^t+e^{-t}}t+\log e^t(1+e^{-2t})=\frac{-e^t+e^{-t}}{e^t+e^{-t}}t+t+\log(1+e^{-2t})$$

$$=\frac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}+\log(1+e^{-2t})\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $x\geqq 0$ のとき，$g(x)=x-\log(1+x)$ とおくと，

$$g'(x)=1-\frac{1}{1+x}=\frac{x}{1+x}\geqq 0$$

よって，$g(x)\geqq g(0)=0$ となり，$\log(1+x)\leqq x$ ……②である。

(3) ②より $1+x\leqq e^x$ となり，$x\leqq e^x$ から $xe^{-x}\leqq 1$ なので，$\dfrac{2te^{-t}}{e^t+e^{-t}}\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}$ ………③

また，②より，$\log(1+e^{-2t})\leqq e^{-2t}$ ………④

よって，①③④より，$b(t)\leqq\dfrac{2}{e^t+e^{-t}}+e^{-2t}$ ………⑤

(4) $b'(t)=\dfrac{2(e^{-t}-te^{-t})(e^t+e^{-t})-2te^{-t}(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}+\dfrac{-2e^{-2t}}{1+e^{-2t}}$

$$=\frac{2(-2t+1+e^{-2t})}{(e^t+e^{-t})^2}+\frac{-2e^{-t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{-4t}{(e^t+e^{-t})^2}$$

すると，$\displaystyle\int_0^x\frac{4t}{(e^t+e^{-t})^2}dt=-\int_0^x b'(t)dt=-b(x)+b(0)$ となり，①⑤より，

$$0\leqq b(x)\leqq\frac{2}{e^x+e^{-x}}+e^{-2x}$$

よって，$x \to \infty$ のとき $b(x) \to 0$ となるので，$b(0) = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \frac{4t}{(e^t + e^{-t})^2}dt$

コメント

(3)まではスムーズに流れていきます。(4)の証明すべき式の左辺は $b(0)$ なので，①との関連を考え，さらに被積分関数の分母に注目すると，微分という方針が立ちます。しかし，計算に踏み出すには勇気が必要です。

問　題

関数 $f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ を $x>0$ で考える。$y=f(x)$ のグラフの点 $(a,\ f(a))$ における接線を l_a とし，l_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とする。以下の問いに答えよ。ただし，実数 k に対して $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^ke^{-t}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(1)　$Y(a)$ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　$0<a<b$ である a, b に対して，l_a と l_b が x 軸上で交わるとき，a のとりうる値の範囲を求め，b を a で表せ。

(3)　(2)の a, b に対して，$Z(a)=Y(a)-Y(b)$ とおく。$\displaystyle\lim_{a\to+0}Z(a)$ および $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}$ を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$f(x)=e^{-\frac{x^2}{2}}$ に対して，$f'(x)=-xe^{-\frac{x^2}{2}}$ となり，点 $(a,\ f(a))$ における接線 l_a は，

$$y-e^{-\frac{a^2}{2}}=-ae^{-\frac{a^2}{2}}(x-a),\quad y=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

l_a と y 軸との交点を $(0,\ Y(a))$ とすると，$Y(a)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$ となり，

$$Y'(a)=2ae^{-\frac{a^2}{2}}-(a^2+1)ae^{-\frac{a^2}{2}}$$
$$=-a(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$$

a	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$Y'(a)$	0	$+$	0	$-$
$Y(a)$	1	↗	$\dfrac{2}{\sqrt{e}}$	↘

$a>0$ において，$Y(a)$ の増減は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}Y(a)=\lim_{a\to\infty}(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}=0$ から，

$$0<Y(a)\leqq\frac{2}{\sqrt{e}}$$

(2)　l_a と x 軸との交点は，$(*)$から，$0=-ae^{-\frac{a^2}{2}}x+(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}$ となり，

$$x=\frac{a^2+1}{a}=a+\frac{1}{a}$$

同様に，l_b と x 軸との交点は $x=b+\dfrac{1}{b}$ となり，条件より，$a+\dfrac{1}{a}=b+\dfrac{1}{b}$

$$b-a+\frac{1}{b}-\frac{1}{a}=0,\ (b-a)\Big(1-\frac{1}{ab}\Big)=0$$

$0<a<b$ から，$1-\dfrac{1}{ab}=0$ すなわち $b=\dfrac{1}{a}$ であり，$0<a<1$ となる。

(3)　$Z(a)=Y(a)-Y(b)=(a^2+1)e^{-\frac{a^2}{2}}-(b^2+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$

$a\to+0$ のとき $b\to\infty$ となり，$\displaystyle\lim_{a\to+0}Z(a)=1-0=1$

また，$Z'(a)=-a(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}+b(b-1)(b+1)e^{-\frac{b^2}{2}}\cdot\dfrac{db}{da}$

すると，$\dfrac{db}{da}=-\dfrac{1}{a^2}=-b^2$ から，

$$Z'(a)=-a(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}-b^3(b-1)(b+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$$

よって，$\dfrac{Z'(a)}{a}=-(a-1)(a+1)e^{-\frac{a^2}{2}}-b^4(b-1)(b+1)e^{-\frac{b^2}{2}}$ から，

$$\lim_{a\to+0}\frac{Z'(a)}{a}=1-0=1$$

コメント

計算量の多い問題です。$\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^ke^{-t}=0$ の適用については，やや雑な記述となっています。

問　題

$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ とおく。ただし $a>0$ とする。

(1)　$f(-1)\leqq f(3)$ となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の極小値が $f(-1)$ 以下になる a の範囲を求めよ。

(3)　$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の最小値を a を用いて表せ。　[2010]

解答例

(1)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}ax^2$ より，$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$，$f(3)=9-\frac{9}{2}a$

$f(-1)\leqq f(3)$ から，$-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a\leqq 9-\frac{9}{2}a$ となり，$a\leqq\frac{7}{3}$

$a>0$ と合わせて，$0<a\leqq\frac{7}{3}$

(2)　$f'(x)=x^2-ax=x(x-a)$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，極小値 $f(a)=-\frac{1}{6}a^3$ が $f(-1)$ 以下であることから，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}a^3$	$\nearrow$

$$-\frac{1}{6}a^3\leqq-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a,\ a^3-3a-2\geqq 0,\ (a+1)^2(a-2)\geqq 0$$

$a>0$ より, $a\geqq 2$

(3)　(i)　$0<a<3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり, (2)の結果から，最小値は,

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{1}{6}a^3$	$\nearrow$	

(i-i)　$0<a<2$ のとき　$f(-1)=-\frac{1}{3}-\frac{1}{2}a$

(i-ii)　$2\leqq a<3$ のとき　$f(a)=-\frac{1}{6}a^3$

(ii)　$a\geqq 3$ のとき

$-1\leqq x\leqq 3$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり, (1)の結果から，最小値は,

$$f(3)=9-\frac{9}{2}a$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	3
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

コメント

(1)と(2)の誘導によって, (3)は計算が不要となっています。

問　題

n を自然数とし，1 から n までの自然数の積を $n!$ で表す。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　単調に増加する連続関数 $f(x)$ に対して，不等式 $\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqq f(k)$ を示せ。

(2)　不等式 $\int_{1}^{n} \log x\,dx \leqq \log n!$ を示し，不等式 $n^n e^{1-n} \leqq n!$ を導け。

(3)　$x \geqq 0$ に対して，不等式 $x^n e^{1-x} \leqq n!$ を示せ。　[2010]

解答例

(1)　$f(x)$ は単調増加する連続関数なので，$k-1 \leqq x \leqq k$ において，$f(x) \leqq f(k)$

$$\int_{k-1}^{k} f(x)\,dx \leqq \int_{k-1}^{k} f(k)\,dx = f(k)\int_{k-1}^{k} dx = f(k)$$

(2)　$x>0$ で $f(x)=\log x$ とおくと，$f(x)$ は単調増加する連続関数なので，(1)から，

$$\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \log k \cdots\cdots\cdots ①$$

$n \geqq 2$ のとき，①の両辺を，$k=2$ から $k=n$ まで和をとると，

$$\sum_{k=2}^{n}\int_{k-1}^{k} \log x\,dx \leqq \sum_{k=2}^{n}\log k$$

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx \leqq \log 2+\log 3+\cdots+\log n = \log(2\times 3\times\cdots\times n) = \log n! \cdots\cdots\cdots ②$$

なお，②は $n=1$ のときも成立している。

さて，②の左辺は，

$$\int_{1}^{n} \log x\,dx = \Big[\,x\log x - x\,\Big]_1^n = n\log n - n + 1 = \log n^n + \log e^{1-n} = \log n^n e^{1-n}$$

これより，②は，$n^n e^{1-n} \leqq n!$ となる。

(3)　$x \geqq 0$ において，$g(x) = x^n e^{1-x} - n!$ とおくと，

$$g'(x) = nx^{n-1}e^{1-x} - x^n e^{1-x} = x^{n-1}e^{1-x}(n-x)$$

$g(x)$ の増減は右表のようになり，(2)より，

$$g(n) = n^n e^{1-n} - n! \leqq 0$$

x	0	$\cdots$	n	$\cdots$
$g'(x)$	0	＋	0	－
$g(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，$x \geqq 0$ において，$g(x) \leqq 0$ すなわち $x^n e^{1-x} \leqq n!$ である。

コメント

至れり尽くせりというぐらい，誘導が非常に細かくついている微分法の不等式への応用問題です。

問　題

$a \geqq b > 0$, $x \geqq 0$ とし, n は自然数とする。次の不等式を示せ。

(1)　$0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2)　$a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$

(3)　$e^x - \left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n \leqq \dfrac{x^2e^x}{2n}$　[2006]

解答例

(1)　$x \geqq 0$ において，$f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと，$f'(x) = e^x - 1 \geqq 0$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$f(x) \geqq f(0) = 0$ となり，$e^x - (1+x) \geqq 0$ ………①

また, $x \geqq 0$ において，$g(x) = \dfrac{x^2e^x}{2} - e^x + (1+x)$ とおくと,

$$g'(x) = \frac{2xe^x + x^2e^x}{2} - e^x + 1 = \frac{(x^2+2x-2)e^x}{2} + 1$$

$$g''(x) = \frac{(2x+2)e^x + (x^2+2x-2)e^x}{2} = \frac{(x^2+4x)e^x}{2} \geqq 0$$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$g'(x) \geqq g'(0) = 0$ より,

$$g(x) \geqq g(0) = 0,\ \frac{x^2e^x}{2} \geqq e^x - (1+x) \text{ ………②}$$

①②より, $x \geqq 0$ のとき，$0 \leqq e^x - (1+x) \leqq \dfrac{x^2e^x}{2}$

(2)　(i)　$a > b > 0$ のとき

$$\frac{a^n - b^n}{a-b} = a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \cdots + b^{n-1}$$
$$< a^{n-1} + a^{n-1} + a^{n-1} + \cdots + a^{n-1} = na^{n-1}$$

よって，$a^n - b^n < n(a-b)a^{n-1}$

(ii)　$a = b > 0$ のとき　$a^n - b^n = n(a-b)a^{n-1} = 0$

(i)(ii)より, $a \geqq b > 0$ のとき，$a^n - b^n \leqq n(a-b)a^{n-1}$ ………③

(3)　$x \geqq 0$ のとき, ①より，$e^{\frac{x}{n}} \geqq 1 + \dfrac{x}{n} > 0$ となるので, ③より,

$$\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^n - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)\left(e^{\frac{x}{n}}\right)^{n-1}$$

$$e^x - \left(1+\frac{x}{n}\right)^n \leqq n\left(e^{\frac{x}{n}} - 1 - \frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x} \text{ ………④}$$

②より，$e^{\frac{x}{n}} - 1 - \dfrac{x}{n} \leqq \dfrac{\left(\frac{x}{n}\right)^2 e^{\frac{x}{n}}}{2} = \dfrac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}$ となるので,

$$n\left(e^{\frac{x}{n}}-1-\frac{x}{n}\right)e^{\frac{n-1}{n}x}\leqq n\cdot\frac{x^2e^{\frac{x}{n}}}{2n^2}e^{\frac{n-1}{n}x}=\frac{x^2e^x}{2n}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より, $x\geqq 0$ のとき, $e^x-\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^n\leqq\dfrac{x^2e^x}{2n}$

コメント

(1)と(2)の不等式が，(3)の不等式を証明するための親切な誘導となっています。そっけない感じのする問題文ですが，内容には味わいがあります。

問　題

関数$f(x)$を

$$f(x)=\begin{cases}\dfrac{\log|x|}{x} & (|x|>1)\\ ax^3+bx^2+cx+d & (|x|\leqq 1)\end{cases}$$

と定める。ただし，a, b, c, d は定数とし，$f(x)$は$x=\pm 1$において微分可能とする。なお，log は$e=2.718\cdots$を底とする自然対数である。

(1)　a, b, c, d の値を求めよ。

(2)　$f(x)$の最大値を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$|x|>1$ のとき $f(x)=\dfrac{\log|x|}{x}$，$|x|\leqq 1$ のとき $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$

まず，$f(x)$は$x=\pm 1$において微分可能なので，$x=\pm 1$で連続である。

$\displaystyle\lim_{x\to 1+0} f(x)=f(1)$ より，$0=a+b+c+d$ ………①

$\displaystyle\lim_{x\to -1-0} f(x)=f(-1)$ より，$0=-a+b-c+d$ ………②

①②より，$a+c=0$，$b+d=0$ となり，$c=-a$，$d=-b$ から，

$$f(x)=ax^3+bx^2-ax-b\quad(|x|\leqq 1)$$

このとき，$\displaystyle\lim_{h\to +0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{\log(1+h)}{h(1+h)}=\lim_{h\to +0}\frac{\log(1+h)^{\frac{1}{h}}}{1+h}=\log e=1$

$$\lim_{h\to -0}\frac{f(1+h)-f(1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{a(1+h)^3+b(1+h)^2-a(1+h)-b}{h}=2a+2b$$

$f(x)$は$x=1$において微分可能なので，$2a+2b=1$ ………③

また，$\displaystyle\lim_{h\to -0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to -0}\frac{\log(1-h)}{h(-1+h)}=\lim_{h\to -0}\frac{\log(1-h)^{-\frac{1}{h}}}{1-h}=\log e=1$

$$\lim_{h\to +0}\frac{f(-1+h)-f(-1)}{h}=\lim_{h\to +0}\frac{a(-1+h)^3+b(-1+h)^2-a(-1+h)-b}{h}$$
$$=2a-2b$$

$f(x)$は$x=-1$において微分可能なので，$2a-2b=1$ ………④

③④より $a=\dfrac{1}{2}$，$b=0$ となり，$c=-a=-\dfrac{1}{2}$，$d=-b=0$ である。

(2)　(1)より，$|x|\leqq 1$ のとき $f(x)=\dfrac{1}{2}x^3-\dfrac{1}{2}x$ となり，

$$f(-x)=-\frac{1}{2}x^3+\frac{1}{2}x=-f(x)$$

また，$|x|>1$ のとき $f(-x)=\dfrac{\log|-x|}{-x}=-f(x)$

よって，$y=f(x)$ のグラフは原点対称となっており，以下 $x\geqq 0$ で考える。

(i)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき

$$f'(x)=\frac{3}{2}x^2-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(\sqrt{3}x+1)(\sqrt{3}x-1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘	$-\frac{1}{3\sqrt{3}}$	↗	0

(ii)　$x>1$ のとき

$$f'(x)=\frac{\frac{1}{x}\cdot x-\log x}{x^2}=\frac{1-\log x}{x^2}$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$$

x	1	$\cdots$	e	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗	$\frac{1}{e}$	↘	0

$x<0$ のときを考え合わせると，$f(x)$の最大値は，$f\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\frac{1}{3\sqrt{3}}$ または $f(e)=\frac{1}{e}$ である。

ここで，$3\sqrt{3}>e$ から，$\frac{1}{3\sqrt{3}}<\frac{1}{e}$ であるので，$f(x)$ の最大値は $\frac{1}{e}$ となる。

コメント

$x=\pm1$ において微分可能という条件を，まず連続という必要条件から攻めていくことがポイントとなります。

問　題

関数$f(x)=\dfrac{x}{x^2+ax+b}$が定める曲線$y=f(x)$は原点で直線$y=x$に接している。

(1)　bの値を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$を求めよ。

(3)　$f(x)$が最大値と最小値をもつような a の値の範囲を求め，そのときの$f(x)$の最大値と最小値を求めよ。

(4)　$f(x)$が最大値をもつが最小値はもたないとき，a の値と$f(x)$の最大値を求めよ。

[2003]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{x}{x^2+ax+b}$より，$f'(x)=\dfrac{x^2+ax+b-x(2x+a)}{(x^2+ax+b)^2}=\dfrac{-x^2+b}{(x^2+ax+b)^2}$

曲線$y=f(x)$が原点で直線$y=x$に接しているので，$f'(0)=1$

よって，$b=1$である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{x}{x^2+ax+1}=\lim_{x\to-\infty}\frac{1}{x+a+x^{-1}}=0$

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{x}{x^2+ax+1}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{x+a+x^{-1}}=0$

(3)　$f(x)$が最大値と最小値をもつためには，まず$x^2+ax+1=0$が実数解をもたないことが必要であるので，

$D=a^2-4<0$，$-2<a<2$

このとき，$f'(x)=\dfrac{-(x-1)(x+1)}{(x^2+ax+1)^2}$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↘		↗		↘	0

右表から，$-2<a<2$のとき，最大値と最小値をもち，最大値は$f(1)=\dfrac{1}{2+a}$，最小値は$f(-1)=\dfrac{-1}{2-a}$である。

(4)　(i)　$D>0$ ($a<-2$，$2<a$)のとき

$x^2+ax+1=0$は異なる 2 実数解α，β ($\alpha<-1<\beta<0$ または $0<\alpha<1<\beta$)をもち，$x=\alpha$，$x=\beta$の前後で$+\infty$または$-\infty$に発散するので，$f(x)$は最大値も最小値ももたない。

(ii)　$D=0$ ($a=-2$)のとき

$f(x)=\dfrac{x}{x^2-2x+1}=\dfrac{x}{(x-1)^2}$

$f'(x)=\dfrac{-(x+1)}{(x-1)^3}$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	×	$-$	
$f(x)$	0	↘	$-\dfrac{1}{4}$	↗	×	↘	0

よって，$f(x)$は最小値をもつが，最大値はもたない。

(iii) $D=0\ (a=2)$ のとき

$$f(x)=\frac{x}{x^2+2x+1}=\frac{x}{(x+1)^2}$$

$$f'(x)=\frac{-(x-1)}{(x+1)^3}$$

x	$-\infty$	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	$\times$	$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\searrow$	$\times$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$	$\searrow$	0

よって，$f(x)$ は最大値 $\dfrac{1}{4}$ をもち，最小値はもたない。

(i)(ii)(iii)より，最大値をもつが最小値をもたないのは，$a=2$ のときである。

コメント

場合分けの説明を(3)でするのか(4)でするのか，迷ってしまいます。

問　題

a を正の定数とし，関数 $f(x)$ を以下のように定める。

$$f(x)=\frac{\log x}{(1+x)^a}\quad(x>0)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在することを示せ。

(2) $f'(c)=0$ となる c はただ 1 つであり，関数 $f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることを示せ。 [2002]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{\log x}{(1+x)^a}$ より，$f'(x)=\dfrac{x^{-1}(1+x)^a-a\log x\cdot(1+x)^{a-1}}{(1+x)^{2a}}=\dfrac{1+x-ax\log x}{x(1+x)^{a+1}}$

ここで，$g(x)=1+x-ax\log x$ とおくと，$f'(x)=\dfrac{g(x)}{x(1+x)^{a+1}}$ となり，

$$g(e^{\frac{1}{a}})=1+e^{\frac{1}{a}}-ae^{\frac{1}{a}}\cdot\frac{1}{a}=1,\quad g(e^{\frac{2}{a}})=1+e^{\frac{2}{a}}-ae^{\frac{2}{a}}\cdot\frac{2}{a}=1-e^{\frac{2}{a}}<0$$

$x>0$ なので $x(1+x)^{a+1}>0$ より，$f'(e^{\frac{1}{a}})>0$，$f'(e^{\frac{2}{a}})<0$

よって，$e^{\frac{1}{a}}$ と $e^{\frac{2}{a}}$ の間に $f'(c)=0$ となる c が存在する。

(2) $g'(x)=1-a\log x-ax\cdot\dfrac{1}{x}=1-a-a\log x$

$g'(x)=0$ の解は $\log x=\dfrac{1-a}{a}$ より $x=e^{\frac{1-a}{a}}$

また，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=-\infty$ から，

x	0	$\cdots$	$e^{\frac{1-a}{a}}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

$g(x)$ の増減は右表のようになる。

よって，$g(x)=0$ となる x は 1 つしかなく，言い換えると，$f'(c)=0$ となる c はただ 1 つである。

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=c$ で最大値をとることになる。

x	0	$\cdots$	c	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

コメント

微分法の標準的な問題です。ただ，$\displaystyle\lim_{x\to+0}g(x)=1$ はプロセス抜きで答えるしかないでしょう。

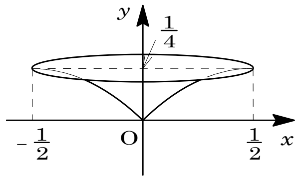
問　題

曲線 $y = x(1-x)$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ を y 軸のまわりに回転してできる容器に，単位時間あたり一定の割合 V で水を注ぐ。

(1) 水面の上昇する速度 u を水面の高さ h の関数として表せ。

(2) 空の容器に水がいっぱいになるまでの時間を求めよ。　[2001]

解答例



(1) $y = x(1-x)$ より，$x^2 - x + y = 0$

$0 \leqq x \leqq \dfrac{1}{2}$ より，$x = \dfrac{1}{2}(1 - \sqrt{1-4y})$

$$x^2 = \frac{1}{2}(1 - 2y - \sqrt{1-4y})$$

$0 \leqq y \leqq h$ における水量を W とすると，

$$W = \int_0^h \pi x^2 dy = \frac{\pi}{2}\int_0^h (1 - 2y - \sqrt{1-4y})\,dy$$

すると，$\dfrac{dW}{dh} = \dfrac{\pi}{2}(1 - 2h - \sqrt{1-4h})$ ………①

ここで条件より，$\dfrac{dW}{dt} = V$，$\dfrac{dh}{dt} = u$，$\dfrac{dW}{dt} = \dfrac{dW}{dh}\cdot\dfrac{dh}{dt}$ なので，

$$V = \frac{dW}{dh}u \text{ ………②}$$

①②より，$V = \dfrac{\pi}{2}(1 - 2h - \sqrt{1-4h})u$ なので，

$$u = \frac{2V}{\pi(1 - 2h - \sqrt{1-4h})} = \frac{V(1 - 2h + \sqrt{1-4h})}{2\pi h^2}$$

(2) $\dfrac{dW}{dt} = V$ で，$t = 0$ のとき $W = 0$ から，$W = Vt$ ………③

$h = \dfrac{1}{4}$ のとき，容器に水がいっぱいになり，このときの水量 W は，

$$W = \frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{1}{4}} (1 - 2y - \sqrt{1-4y})\,dy = \frac{\pi}{2}\Big[\,y - y^2 + \frac{1}{6}(1-4y)^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^{\frac{1}{4}} = \frac{\pi}{96} \text{ ………④}$$

③④より，$Vt = \dfrac{\pi}{96}$ となり，求める時間は $t = \dfrac{\pi}{96V}$ である。

コメント

以前はよく出題されていた水の問題に久々に出会いました。演習する価値のある問題です。

問　題

関数 $f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　閉区間 $\left[\,0,\ \dfrac{\pi}{2}\,\right]$ における $f_n(x)$ の最大値 M_n と最小値 L_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}$ を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$f_n(x)=\sin^{n+2}x+2\cos^{n+2}x$ より，

$$f_n'(x)=(n+2)\sin^{n+1}x\cos x-2(n+2)\cos^{n+1}x\sin x$$
$$=(n+2)\sin x\cos x(\sin^n x-2\cos^n x)$$

また，$\sin^n\alpha=2\cos^n\alpha$ すなわち $\tan^n\alpha=2$，$\tan\alpha=2^{\frac{1}{n}}$ を満たす α が，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ にただ 1 つ存在し，これより $f_n(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f_n'(x)$	0	－	0	＋	0
$f_n(x)$	2	↘		↗	1

このとき，$1+2^{\frac{2}{n}}=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ から $\cos^2\alpha=\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-1}$，$\cos\alpha=\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}$

すると，$f_n(\alpha)=\sin^{n+2}\alpha+2\cos^{n+2}\alpha=\sin^n\alpha\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cos^2\alpha$

$$=2\cos^n\alpha\sin^2\alpha+2\cos^n\alpha\cos^2\alpha=2\cos^n\alpha=2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$$

以上より，$M_n=2$，$L_n=2\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{n}{2}}$

(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{L_n}=\lim_{n\to\infty}2^{\frac{1}{n}}\left(1+2^{\frac{2}{n}}\right)^{-\frac{1}{2}}=1\times2^{-\frac{1}{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$

コメント

問題を見たときに，(2)は e の定義式を利用する設問と推測しましたが，その予想は，はずれてしまいました。

問　題

すべての正の実数 x について $x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ となる正の実数 a を求めよ。　[2000]

解答例

$x^{\sqrt{a}} \leqq a^{\sqrt{x}}$ より，$\log x^{\sqrt{a}} \leqq \log a^{\sqrt{x}}$，$\sqrt{a}\log x \leqq \sqrt{x}\log a$ なので，

$$\frac{\log x}{\sqrt{x}} \leqq \frac{\log a}{\sqrt{a}} \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x) = \dfrac{\log x}{\sqrt{x}}$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{\frac{1}{x}\sqrt{x} - \log x \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}}{x} = \frac{2 - \log x}{2x\sqrt{x}}$$

x	0	$\cdots$	e^2	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$\dfrac{2}{e}$	$\searrow$	0

すると，(∗)はどんな正の実数 x についても，$f(x) \leqq f(a)$ ということなので，この条件を満たす a の値は，上表より $a = e^2$ となる。

コメント

毎年のように類題の出る頻出有名問題です。ポイントは(∗)の形に不等式を変形することです。

問　題

e を自然対数の底とする。関数 $f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$g(x)=(1+e^x)^2f'(x)$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to-\infty}g(x)$ を求めよ。必要ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{x}{e^x}=0$ を用いてもよい。

(2)　$f(x)$ はただ 1 つの極値をもち，さらにそれが極大値であることを示せ。 [1999]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{x-e^{x-1}}{1+e^x}$ より，$f'(x)=\dfrac{(1-e^{x-1})(1+e^x)-(x-e^{x-1})e^x}{(1+e^x)^2}$

条件より，$g(x)=(1+e^x)^2f'(x)=(1-e^{x-1})(1+e^x)-(x-e^{x-1})e^x$

$$=1-e^{x-1}-xe^x+e^x=1-\left(x-1+\frac{1}{e}\right)e^x$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$

また，$t=-x$ とおくと，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}xe^x=\lim_{t\to+\infty}(-t)e^{-t}=-\lim_{t\to+\infty}\frac{t}{e^t}=0$ となるので，

$$\lim_{x\to-\infty}g(x)=1$$

(2)　$g'(x)=-e^x-\left(x-1+\dfrac{1}{e}\right)e^x=-\left(x+\dfrac{1}{e}\right)e^x$

ここで，右表より $g\left(-\dfrac{1}{e}\right)>1>0$ かつ $\displaystyle\lim_{x\to+\infty}g(x)=-\infty$ なので，$g(x)=0$ はただ 1 つの実数解を $x>-\dfrac{1}{e}$ においてもつ。

x	$-\infty$	$\cdots$	$-\frac{1}{e}$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	1	$\nearrow$		$\searrow$	$-\infty$

この実数解を $x=\alpha$ とすると，この値の前後で $g(x)$ の符号は正から負へと変わる。

すると，$f'(x)$ の符号も $x=\alpha$ の前後で正から負へと変わる。

x	$-\infty$	$\cdots$	α	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$f(x)$ は $x=\alpha$ においてのみ極値をもち，しかもそれは極大値である。

コメント

$f(x)$ の極値に関する問題ですが，(1)が(2)のていねいな誘導となっています。親切すぎるのではないかと思うほどですが。

問　題

関数 $f(x)$, $g(x)$ を $f(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt$, $g(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t\,dt$ と定める。このとき, $x\geqq 0$ における $f(x)$ の最大値と $g(x)$ の最小値を求めよ。 [1999]

解答例

まず, $(e^{-t}\sin t)'=-e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t$ ………①

$(e^{-t}\cos t)'=-e^{-t}\cos t-e^{-t}\sin t$ ………②

①＋②より, $e^{-t}\sin t=-\frac{1}{2}\left\{e^{-t}(\sin t+\cos t)\right\}'$

①－②より, $e^{-t}\cos t=\frac{1}{2}\left\{e^{-t}(\sin t-\cos t)\right\}'$

$$f(x)=\int_0^x e^{-t}\sin t\,dt=-\frac{1}{2}\Big[e^{-t}(\sin t+\cos t)\Big]_0^x=-\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x+\cos x)+\frac{1}{2}$$

$$g(x)=\int_0^x e^{-t}\cos t\,dt=\frac{1}{2}\Big[e^{-t}(\sin t-\cos t)\Big]_0^x=\frac{1}{2}e^{-x}(\sin x-\cos x)+\frac{1}{2}$$

さて, $f(x)$ が極大値をとるのは, $f'(x)$ の符号が正から負に変わるときなので, $f'(x)=e^{-x}\sin x$ より, $x=(2k-1)\pi$ （k は自然数）においてである。

$$f\big((2k-1)\pi\big)=-\frac{1}{2}e^{-(2k-1)\pi}(-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1+e^{-(2k-1)\pi}\right)$$

すると, k の値が増加するに従って $f\big((2k-1)\pi\big)$ の値は減少するので, 極大値が最大となるのは, $k=1$ すなわち $x=\pi$ のときである。

x	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π	$\cdots$	3π	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

したがって, 増減表より, $f(x)$ の最大値は $f(\pi)=\frac{1}{2}(1+e^{-\pi})$ となる。

また, $g(x)$ が極小値をとるのは, $g'(x)$ の符号が負から正に変わるときなので, $g'(x)=e^{-x}\cos x$ より, $x=\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi$ （k は自然数）においてである。

$$g\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\right)=\frac{1}{2}e^{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}(-1)+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi}\right)$$

すると, k の値が増加するに従って $g\left(\left(2k-\frac{1}{2}\right)\pi\right)$ の値も増加するので, 極小値が最小となるのは, $k=1$ すなわち $x=\frac{3}{2}\pi$ においてである。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$g(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

ここで, $g\left(\frac{3}{2}\pi\right)=\frac{1}{2}\left(1-e^{-\frac{3}{2}\pi}\right)>g(0)=0$ より, $g(x)$ の最小値は $g(0)=0$ となる。

コメント

曲線 $y = e^{-t}\sin t$ と t 軸ではさまれた面積について考えると，結論はほぼ明らかです。これを明確に示すのが本問のねらいでしょう。

問　題

自然数 n に対し，関数 $F_n(x)=\displaystyle\int_x^{2x} e^{-t^n}dt\quad(x\geqq 0)$ を考える。

(1) 関数 $F_n(x)\ (x\geqq 0)$ はただ 1 つの点で最大値をとることを示し，$F_n(x)$ が最大となるような x の値 a_n を求めよ。

(2) (1)で求めた a_n に対し，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n$ を求めよ。　[2011]

解答例

(1) 自然数 n に対し，$f_n(t)=e^{-t^n}$ とおくと，$F_n(x)=\displaystyle\int_x^{2x} f_n(t)dt$ より，

$$F_n{}'(x)=f_n(2x)\cdot 2-f_n(x)=2e^{-(2x)^n}-e^{-x^n}=e^{-x^n}\left(2e^{-(2^n-1)x^n}-1\right)$$

ここで，$g(x)=2e^{-(2^n-1)x^n}-1$ とおくと，$2^n-1\geqq 1$ から，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(0)=2-1=1,\ \lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left(2e^{-(2^n-1)x^n}-1\right)=-1$$

これより，$x\geqq 0$ において，$g(x)=0$ はただ 1 つの実数解をもち，

$$e^{-(2^n-1)x^n}=\frac{1}{2},\ -(2^n-1)x^n=-\log 2,\ x^n=\frac{\log 2}{2^n-1}$$

よって，$x=\left(\dfrac{\log 2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$ となり，この値を $x=\alpha$ とおくと，$F_n(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$F_n{}'(x)$		$+$	0	$-$
$F_n(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

すると，関数 $F_n(x)\ (x\geqq 0)$ はただ 1 つの点で最大値をとり，$F_n(x)$ が最大となる x の値 a_n は，

$$a_n=\alpha=\left(\frac{\log 2}{2^n-1}\right)^{\frac{1}{n}}$$

(2) (1)より，$\log a_n=\dfrac{1}{n}\log\left(\dfrac{\log 2}{2^n-1}\right)=\dfrac{\log(\log 2)}{n}-\dfrac{\log(2^n-1)}{n}$

ここで，自然数 n に対し，$2^{n-1}\leqq 2^n-1<2^n$ より，

$$(n-1)\log 2\leqq\log(2^n-1)<n\log 2,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)\log 2\leqq\frac{\log(2^n-1)}{n}<\log 2$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{\log(\log 2)}{n}-\frac{\log(2^n-1)}{n}\right\}=-\log 2$

コメント

関数の形が複雑なため，式変形に注意力が要求されますが，内容的は基本的です。

問　題

$f(x)$ を整式で表される関数とし，$g(x)=\int_0^x e^t f(t)\,dt$ とおく。任意の実数 x について，$x\left(f(x)-1\right)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ が成り立つとする。

(1) $xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1$ が成り立つことを示せ。

(2) $f(x)$ は定数または 1 次式であることを示せ。

(3) $f(x)$ および $g(x)$ を求めよ。 [2009]

解答例

(1) 条件より，$x\left(f(x)-1\right)=2\int_0^x e^{-t}g(t)\,dt$ ………①

①の両辺を x で微分すると，

$$f(x)-1+xf'(x)=2e^{-x}g(x),\ \ e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)=2g(x)\ \text{………②}$$

②の両辺を x で微分すると，条件から $g'(x)=e^x f(x)$ なので，

$$e^x\left(f(x)-1+xf'(x)\right)+e^x\left(f'(x)+f'(x)+xf''(x)\right)=2e^x f(x)$$

よって，$f(x)-1+xf'(x)+2f'(x)+xf''(x)=2f(x)$ より，

$$xf''(x)+(x+2)f'(x)-f(x)=1\ \text{………③}$$

(2) $f(x)$ を n 次の整式とし，x^n の係数を $a(\neq 0)$ とおく。ただし, $n\geqq 2$ とする。すると，$f'(x)$ は $n-1$ 次，$f''(x)$ は $n-2$ 次の整式となる。

そこで，③の両辺の x^n の係数を比較すると，

$$na-a=0$$

よって，$n=1$ から不適となり，これより $f(x)$ は定数または 1 次式である。

(3) まず，$g(x)=0$ であり， ②の両辺に $x=0$ を代入すると，

$$f(0)-1=0,\ \ f(0)=1$$

(2)の結論を合わせると，$f(x)=px+1$ とおくことができ，③より，

$$p(x+2)-(px+1)=1$$

よって，$p=1$ から，$f(x)=x+1$ となり，

$$g(x)=\int_0^x e^t(t+1)\,dt=\Big[e^t(t+1)\Big]_0^x-\int_0^x e^t\,dt=e^x(x+1)-1-\Big[e^t\Big]_0^x$$

$$=e^x(x+1)-1-e^x+1=xe^x$$

コメント

積分方程式の問題です。(2)の設問のような，ていねいな誘導のため，見かけよりは解きやすくなっています。

問　題

(1) $\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx$ を求めよ。

(2) 定数 a に対して，$f(x)=ax\sin x+x+\dfrac{\pi}{2}$ とおく。このとき，不等式

$$\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx \geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

を満たす a の範囲を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数とする。　[2007]

解答例

(1) $I=\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{\pi} x^2(1+\cos 2x)\,dx$ とおく。

ここで，$\displaystyle\int_0^{\pi} x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^{\pi}=\frac{\pi^3}{3}$

$$\int_0^{\pi} x^2\cos 2x\,dx=\frac{1}{2}\left[x^2\sin 2x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}2x\sin 2x\,dx=-\int_0^{\pi}x\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[x\cos 2x\right]_0^{\pi}-\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\cos 2x\,dx=\frac{\pi}{2}-\frac{1}{4}\left[\sin 2x\right]_0^{\pi}=\frac{\pi}{2}$$

よって，$I=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{\pi^3}{3}+\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi^3}{6}+\dfrac{\pi}{4}$

(2) $J=\displaystyle\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx$ とおくと，$f(x)=ax\sin x+x+\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$J=\int_0^{\pi}(a\sin x+ax\cos x+1)^2dx$$

$$=\int_0^{\pi}(a^2\sin^2 x+a^2x^2\cos^2 x+1+2a^2x\sin x\cos x+2ax\cos x+2a\sin x)\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\pi}(a^2\sin^2 x+2a^2x\sin x\cos x)\,dx=a^2\left[x\sin^2 x\right]_0^{\pi}=0$

$$\int_0^{\pi}(2ax\cos x+2a\sin x)\,dx=2a\left[x\sin x\right]_0^{\pi}=0$$

よって, (1)より，$J=\displaystyle\int_0^{\pi}(a^2x^2\cos^2 x+1)\,dx=a^2\left(\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\pi$

また，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{2}a+\pi$ から，$\displaystyle\int_0^{\pi}\{f'(x)\}^2dx\geqq f\left(\frac{\pi}{2}\right)$ を満たす a の範囲は,

$$a^2\left(\frac{\pi^3}{6}+\frac{\pi}{4}\right)+\pi\geqq\frac{\pi}{2}a+\pi,\quad a\{(2\pi^2+3)a-6\}\geqq 0$$

以上より, $a\leqq 0$, $\dfrac{6}{2\pi^2+3}\leqq a$

コメント

定積分の計算問題です。(2)は，そのまま計算してもよいのですが，何か裏があるとみるのが常識的です。

問　題

次の関係式を満たす関数 $f(x)$ がただ 1 つ存在するように，定数 a の値を求めよ。

$$f(x)=ax+\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt\right)^4$$ [2005]

解答例

条件より，$f(x)=ax+\frac{1}{4}\left(\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt\right)^4$ なので，$c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，

$$f(x)=ax+\frac{1}{4}c^4$$

すると，$c=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(at+\frac{1}{4}c^4\right)\sin t\,dt=\left[-\left(at+\frac{1}{4}c^4\right)\cos t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}a\cos t\,dt$

$$=\frac{1}{4}c^4+a\Big[\sin t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{4}c^4+a$$

よって，$c-\frac{1}{4}c^4=a$ ………(＊)

ここで，$g(c)=c-\frac{1}{4}c^4$ とおくと，

$$g'(c)=1-c^3=-(c-1)(c^2+c+1)$$

c	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(c)$	$+$	0	$-$
$g(c)$	$\nearrow$	$\frac{3}{4}$	$\searrow$

$\lim_{c\to\infty}g(c)=\lim_{c\to-\infty}g(c)=-\infty$ より，(＊)を満たす c^4 がただ 1 つ存在するのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　c がただ 1 つ存在するとき

$g(c)$ の増減より，$a=\frac{3}{4}$

(ii)　絶対値が等しく，符号の異なる 2 つの c が存在するとき

$\alpha\neq 0$ として，$g(-\alpha)=g(\alpha)$ とおくと，

$$-\alpha-\frac{1}{4}\alpha^4=\alpha-\frac{1}{4}\alpha^4$$

よって，$\alpha=0$ となり，不適である。

(i)(ii)より，$a=\frac{3}{4}$

コメント

(ii)の場合を忘れがちですが，c^4 という設定は，この場合の検討を要求しているように思われます。

問　題

$f(x)=\sin^3 x$ とする。

(1) $f'(0)$ および $f'(2\pi)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\int_0^{2\pi} f(x)\,dx$ を求めよ。

(3) $p(x)$ を x の 2 次式とするとき，$\displaystyle\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx=0$ を示せ。　[2004]

解答例

(1) $f(x)=\sin^3 x$ より，$f'(x)=3\sin^2 x\cos x$ となり，

$$f'(0)=0,\quad f'(2\pi)=0$$

(2)
$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx=\int_0^{2\pi}\sin^3 x\,dx=\int_0^{2\pi}(1-\cos^2 x)\sin x\,dx$$
$$=\int_0^{2\pi}(\sin x-\cos^2 x\sin x)\,dx=\Big[-\cos x+\frac{1}{3}\cos^3 x\Big]_0^{2\pi}=0$$

(3) $p(x)=ax^2+bx+c\ (a\neq 0)$ とおくと, (1), (2)より,

$$\int_0^{2\pi} p(x)f''(x)\,dx=\int_0^{2\pi}(ax^2+bx+c)f''(x)\,dx$$
$$=\Big[(ax^2+bx+c)f'(x)\Big]_0^{2\pi}-\int_0^{2\pi}(2ax+b)f'(x)\,dx$$
$$=-\Big[(2ax+b)f(x)\Big]_0^{2\pi}+\int_0^{2\pi}2af(x)\,dx$$
$$=2a\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0$$

コメント

(2)の結論はグラフの対称性から明らかなのですが，そのまま計算しても容易に示せます。

問　題

実数全体で定義された微分可能な関数 $f(x)$ が，次の 2 つの条件(i)，(ii)を満たしている。

(i)　すべての x について，$f(x)>0$ である。

(ii)　すべての x, y について，$f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$ が成り立つ。

(1)　$f(0)=1$ を示せ。

(2)　$g(x)=\log f(x)$ とする。このとき，$g'(x)=f'(0)-x$ が成り立つことを示せ。

(3)　$f'(0)=2$ となるような $f(x)$ を求めよ。 [2003]

解答例

(1)　条件(ii)より，$f(x+y)=f(x)f(y)e^{-xy}$ ………①

①に $x=y=0$ を代入すると，$f(0)=\{f(0)\}^2$

条件(i)より $f(0)>0$ なので，$f(0)=1$ である。

(2)　①より，$\log f(x+y)=\log f(x)f(y)e^{-xy}=\log f(x)+\log f(y)-xy$

$$g(x+y)=g(x)+g(y)-xy$$

x を固定して，両辺を y で微分すると，$g'(x+y)=g'(y)-x$

$y=0$ を代入すると，$g'(x)=g'(0)-x$

ここで，$g'(x)=\dfrac{1}{f(x)}f'(x)$ なので，(1)より，$g'(0)=\dfrac{1}{f(0)}f'(0)=f'(0)$

よって，$g'(x)=f'(0)-x$ ………②

(3)　$f'(0)=2$ のとき，②より，$g'(x)=2-x$

$$g(x)=\int(2-x)\,dx=2x-\frac{x^2}{2}+C$$

$e^C=K$ とすると，$f(x)=e^{g(x)}=e^{2x-\frac{x^2}{2}+C}=Ke^{2x-\frac{x^2}{2}}$

(1)から $f(0)=1$ なので，$K=1$ となり，$f(x)=e^{2x-\frac{x^2}{2}}$ である。

コメント

実数全体で $f(x)$ は微分可能なので，(2)では，x を固定して，y で微分をしました。

問　題

$x \geqq 0$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して，関数 $g(x)$ $(x>0)$ を次のように定める。

$$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt\ (0<x<1),\quad g(x)=\int_{x-1}^x f(t)\,dt\ (x\geqq 1)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x \neq 1$ のおける導関数 $g'(x)$ を求めよ。

(2)　$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)$ のとき，$g(x)$ を求めよ。

(3)　次のような $g(x)$ を定める $f(x)$ を求めよ。

$$g(x)=\sin(2\pi x)+x\ (0<x<1),\quad g(x)=1\ (x\geqq 1)$$

[2002]

解答例

(1)　条件より，$g(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ $(0<x<1)$ なので，$0<x<1$ のとき $g'(x)=f(x)$

また，$g(x)=\int_{x-1}^x f(t)\,dt$ $(x\geqq 1)$ より，$x>1$ のとき $g'(x)=f(x)-f(x-1)$

(2)　$0<x<1$ のとき，$g(x)=\int_0^x 2\pi\cos(2\pi t)\,dt=\left[\sin(2\pi t)\right]_0^x=\sin(2\pi x)$

$x\geqq 1$ のとき，$g(x)=\int_{x-1}^x 2\pi\cos(2\pi t)\,dt=\left[\sin(2\pi t)\right]_{x-1}^x$

$$=\sin(2\pi x)-\sin(2\pi(x-1))=\sin(2\pi x)-\sin(2\pi x)=0$$

(3)　(1)より，$0<x<1$ のとき $f(x)=g'(x)=2\pi\cos(2\pi x)+1$ ………①

$x>1$ のとき，$f(x)-f(x-1)=g'(x)=0$ となり，

$$f(x)=f(x-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$1<x<2$ のとき，$0<x-1<1$ なので，①②より，

$$f(x)=2\pi\cos(2\pi(x-1))+1=2\pi\cos(2\pi x)+1$$

すると，$\lim_{x\to 1-0} f(x)=\lim_{x\to 1+0} f(x)=2\pi+1$ となっており，$f(x)$ は $x=1$ で連続である。また，$f(0)=2\pi+1$ と定義すると，$0\leqq x<2$ において，

$$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)+1$$

同様にして，②を利用していくと，$f(x)=2\pi\cos(2\pi x)+1$ $(x\geqq 0)$

コメント

記述の方法の難しい問題です。内容的には，もう一ひねりあるのかとも思ったのですが……。

問　題

$f(x)$ を $0\leqq x\leqq 1$ において連続かつ $0<x<1$ において微分可能で $f'(x)>0$ を満たす関数とする。$0<t<1$ に対し，$I(t)=\displaystyle\int_0^1 |f(t)-f(x)|\,x\,dx$ とおく。

(1)　導関数 $I'(t)$ を求めよ。

(2)　$I(t)$ が最小となる t の値を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq 1$ において単調に増加するので，$0\leqq x<t$ で $f(x)<f(t)$, $t<x\leqq 1$ で $f(x)>f(t)$ となる。

$$I(t)=\int_0^1 |f(t)-f(x)|\,x\,dx=\int_0^t \{f(t)-f(x)\}x\,dx-\int_t^1 \{f(t)-f(x)\}x\,dx$$
$$=f(t)\int_0^t x\,dx-\int_0^t xf(x)\,dx-f(t)\int_t^1 x\,dx+\int_t^1 xf(x)\,dx$$
$$=\frac{t^2}{2}f(t)-\left(\frac{1}{2}-\frac{t^2}{2}\right)f(t)-\int_0^t xf(x)\,dx+\int_t^1 xf(x)\,dx$$
$$=\left(t^2-\frac{1}{2}\right)f(t)-\int_0^t xf(x)\,dx-\int_1^t xf(x)\,dx$$

すると，$I'(t)=2tf(t)+\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)f'(t)-tf(t)-tf(t)=\left(t^2-\dfrac{1}{2}\right)f'(t)$

(2)　(1)より，$I'(t)=\left(t+\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(t-\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)f'(t)$

$f'(t)>0$ なので，右表より $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $I(t)$ は最小となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$I'(t)$		$-$	0	$+$	
$I(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

コメント

絶対値のついた関数を積分する問題です。ただし，$f'(x)>0$ という条件があるため，煩雑な計算は必要ありません。

問　題

(1)　$x>0$ に対して次の不等式を示せ。

$$x-\frac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$$

(2)　$f(x)$ を $0\leqq x\leqq 1$ で連続で，$f(x)\geqq 0$ を満たす関数とする。

$$a_n=\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)\cdots\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right),\quad I=\int_0^1 f(x)\,dx$$

とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^I$ であることを示せ。　[2001]

解答例

(1)　$g(x)=x-\log(1+x)$ $(x>0)$ とおくと，$g'(x)=1-\dfrac{1}{1+x}=\dfrac{x}{1+x}>0$

$x>0$ に対して，$g(x)>g(0)=0$ なので，$\log(1+x)<x$

また，$h(x)=\log(1+x)-x+\dfrac{x^2}{2}$ $(x>0)$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{1}{1+x}-1+x=\frac{x^2}{1+x}>0$$

$x>0$ に対して，$h(x)>h(0)=0$ なので，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)$

以上より，$x-\dfrac{x^2}{2}<\log(1+x)<x$

(2)　$\log a_n=\log\left(1+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{1}{n}\right)\right)\left(1+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{2}{n}\right)\right)\cdots\left(1+\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{n}{n}\right)\right)$

$$=\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{1}{n}\right)\right)+\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{2}{n}\right)\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{n}{n}\right)\right)$$

$$=\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)$$

$\dfrac{1}{n}f\left(\dfrac{k}{n}\right)\geqq 0$ なので, (1)より,

$$\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\leqq\log\left(1+\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\right)\leqq\frac{1}{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)-\frac{1}{2n^2}\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\leqq\log a_n\leqq\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{k}{n}\right)\to\int_0^1 f(x)\,dx=I$

また，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\to\int_0^1\{f(x)\}^2dx$ より，$\dfrac{1}{n^2}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(f\left(\frac{k}{n}\right)\right)^2\to 0$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log a_n=I$

すると，対数関数は連続関数なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=e^I$ である。

コメント

はさみうちの原理に加えて，区分求積法も利用し，極限値を証明する問題です。うまい誘導がついています。

問　題

e を自然対数の底とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^x \geqq 1+x$ を示せ。

(2)　$\tan\theta = M\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx = \theta$ を示せ。

(3)　$M>0$ のとき，不等式 $\displaystyle\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}dx < \frac{\pi}{2}$ を示せ。　[2000]

解答例

(1)　$f(x) = e^x - (1+x)$ とおくと，$f'(x) = e^x - 1$

$x \geqq 0$ のとき，$f'(x) \geqq 0$ より，$f(x) \geqq f(0) = 0$

よって, $x \geqq 0$ のとき，$e^x \geqq 1+x$ ………①

(2)　$x = \tan\varphi\left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$x=0$ のとき $\varphi = 0$ となり，また条件より，

$x = M$ のとき $\varphi = \theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ となるので,

$$\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx = \int_0^\theta \frac{1}{1+\tan^2\varphi}\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi = \int_0^\theta d\varphi = \Big[\,\varphi\,\Big]_0^\theta = \theta \text{………②}$$

(3)　①より，$e^{x^2} \geqq 1+x^2$ から，$\dfrac{1}{e^{x^2}} \leqq \dfrac{1}{1+x^2}$ となり, $M>0$ に対して,

$$\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}dx \leqq \int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx$$

ここで，②より，$\displaystyle\int_0^M \frac{1}{1+x^2}dx = \theta < \frac{\pi}{2}$

したがって，$\displaystyle\int_0^M \frac{1}{e^{x^2}}dx < \frac{\pi}{2}$

コメント

ノーヒントで(3)の結論の証明では難問ですが，(1)(2)のていねいな誘導のおかげで，基本題となっています。

問　題

関数$f(x)=\int_x^{2x+1}\dfrac{1}{t^2+1}dt$について次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$となるxを求めよ。

(2)　$f'(x)=0$となるxを求めよ。

(3)　$f(x)$の最大値を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$g(t)=\dfrac{1}{t^2+1}$とおくと，つねに$g(t)>0$より，

$2x+1>x$　$(x>-1)$のとき，$f(x)>0$

$2x+1<x$　$(x<-1)$のとき，$f(x)<0$

よって，$f(x)=0$となるのは，$2x+1=x$のときだけである。

すなわち，$x=-1$

(2)　$f'(x)=g(2x+1)\cdot(2x+1)'-g(x)=\dfrac{2}{(2x+1)^2+1}-\dfrac{1}{x^2+1}$

$$=\frac{1}{2x^2+2x+1}-\frac{1}{x^2+1}=\frac{-x(x+2)}{(2x^2+2x+1)(x^2+1)}$$

$f'(x)=0$とすると，$x(x+2)=0$から$x=0,\ -2$

(3)　(1)より，$f(x)$の最大値は$x>-1$に存在するので，$x>-1$における$f(x)$の値の増減を調べる。

x	-1	……	0	……	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	↗		↘	

最大値は$f(0)=\int_0^1\dfrac{1}{t^2+1}dt$となり，$t=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$f(0)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

コメント

逆三角関数は高校数学の範囲外なので，直接的な積分計算を回避して，設問に答えていきます。この考え方が採用できたかどうかで，本問の出来は決まります。

問　題

関数 $f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}$ $(x \geqq 0)$ について次の問いに答えよ。

(1)　$f'(a)=0$，$f''(b)=0$ を満たす a，b を求め，$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\sqrt{x}e^{-x}=0$ であることは証明なしで用いてよい。

(2)　$k \geqq 0$ のとき $V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}dx$ を k を用いて表せ。

(3)　(1)で求めた a，b に対して曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$f(x)=2\sqrt{x}e^{-x}$ $(x \geqq 0)$ に対して，$f'(x)=2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{x}}e^{-x}-2\sqrt{x}e^{-x}=\dfrac{1-2x}{\sqrt{x}}e^{-x}$

$$f''(x)=\frac{-2\sqrt{x}-(1-2x)\cdot(2\sqrt{x})^{-1}}{x}e^{-x}-\frac{1-2x}{\sqrt{x}}e^{-x}=\frac{4x^2-4x-1}{2x\sqrt{x}}e^{-x}$$

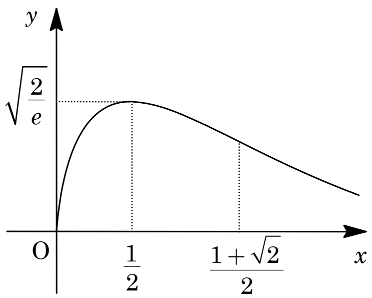
$f'(a)=0$，$f''(b)=0$ から，

$$a=\frac{1}{2},\ b=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

そして，$f(x)$ の増減，凹凸は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1+\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f''(x)$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↗	$\sqrt{\frac{2}{e}}$	↘		↘	0

また，$y=f(x)$ のグラフの概形は右下図の通りである。



(2)　$V(k)=\displaystyle\int_0^k xe^{-2x}dx$

$$=\Big[-\frac{1}{2}xe^{-2x}\Big]_0^k+\frac{1}{2}\int_0^k e^{-2x}dx$$

$$=-\frac{1}{2}ke^{-2k}-\frac{1}{4}\Big[e^{-2x}\Big]_0^k$$

$$=-\frac{1}{2}ke^{-2k}-\frac{1}{4}e^{-2k}+\frac{1}{4}$$

$$=-\frac{1}{4}(2k+1)e^{-2k}+\frac{1}{4}$$

(3)　曲線 $y=f(x)$ と x 軸および 2 直線 $x=a$，$x=b$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_a^b 4xe^{-2x}dx=4\pi\int_0^b xe^{-2x}dx-4\pi\int_0^a xe^{-2x}dx=4\pi\{V(b)-V(a)\}$$

ここで，(1)から，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$ なので，

$$V=4\pi\Big\{-\frac{1}{4}(2+\sqrt{2})e^{-(1+\sqrt{2})}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 2e^{-1}-\frac{1}{4}\Big\}=\Big(-\frac{2+\sqrt{2}}{e^{1+\sqrt{2}}}+\frac{2}{e}\Big)\pi$$

コメント

微分法を利用してグラフの概形をかき，積分法を利用して回転体の体積を求めるという基本的な知識の確認問題です。

問　題

$f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を

$$f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x),\ \ g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right),\ \ h(x)=\sin x$$

とおく。3 つの曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$，$y=h(x)$ の $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ を満たす部分を，それぞれ C_1，C_2，C_3 とする。

(1) C_2 と C_3 の交点の座標を求めよ。

(2) C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とする。$\sin\alpha$，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(3) C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2015]

解答例

(1) $0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$g(x)=\frac{1}{\sqrt{2}}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)$，$h(x)=\sin x$ に対し，$C_2:y=g(x)$ と $C_3:y=h(x)$ を連立すると，

$$\frac{1}{2}(\sin x+\cos x)=\sin x,\ \ \cos x=\sin x$$

よって，$x=\frac{\pi}{4}$ となり，$y=\sin\frac{\pi}{4}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

これより，交点の座標は，$\left(\frac{\pi}{4},\ \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$ となる。

(2) $f(x)=\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)$ に対し，$C_1:y=f(x)$ と $C_3:y=h(x)$ を連立すると，

$$\frac{1}{2}(\cos x-\sin x)=\sin x,\ \ \cos x=3\sin x$$

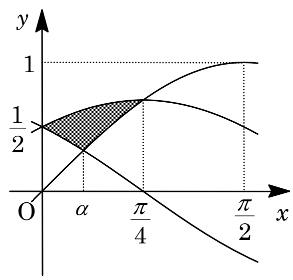
すると，$\sin^2x+\cos^2x=1$ から $10\sin^2x=1$ となり，$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{2}$ から $\sin x=\frac{1}{\sqrt{10}}$

$$\cos x=3\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}=\frac{3}{\sqrt{10}}$$

よって，C_1 と C_3 の交点の x 座標を α とすると，$\sin\alpha=\frac{1}{\sqrt{10}}$，$\cos\alpha=\frac{3}{\sqrt{10}}$

(3) C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を S とおくと，

$$S=\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\{g(x)-h(x)\}dx$$



すると，(2)の結果から，

$$\int_0^{\alpha}\{g(x)-f(x)\}dx=\int_0^{\alpha}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{\alpha}$$

$$=1-\cos\alpha=1-\frac{3}{\sqrt{10}}$$

$$\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\{g(x)-h(x)\}dx=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}(-\sin x+\cos x)dx=\frac{1}{2}\Big[\cos x+\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=\frac{1}{2}(\sqrt{2}-\cos\alpha-\sin\alpha)=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{2}{\sqrt{10}}$$

よって，$S=1-\dfrac{3}{\sqrt{10}}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{2}{\sqrt{10}}=1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}-\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

コメント

面積計算の基本問題です。計算も複雑ではありません。

問　題

xy 平面上の曲線 $C: y = x\sin x + \cos x - 1\ (0 < x < \pi)$ に対して，以下の問いに答えよ。ただし $3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ であることは証明なしで用いてよい。

(1) 曲線 C と x 軸の交点はただ 1 つであることを示せ。

(2) 曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とする。$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ であることを示せ。

(3) 曲線 C，y 軸および直線 $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる部分の面積を S とする。また，xy 平面の原点 O，点 A および曲線 C 上の点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする三角形 OAB の面積を T とする。$S < T$ であることを示せ。　[2014]

解答例

(1) $C: y = x\sin x + \cos x - 1\ (0 < x < \pi)$ に対して，

$$y' = \sin x + x\cos x - \sin x = x\cos x$$

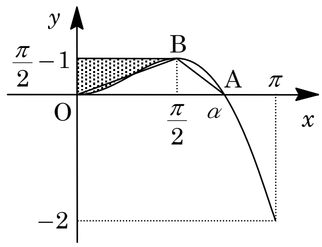
すると，y の増減は右表のようになり，曲線 C と x 軸は，$\dfrac{\pi}{2} < x < \pi$ において，ただ 1 つの交点をもつ。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
y'		$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	$\dfrac{\pi}{2}-1$	$\searrow$	-2

(2) $x = \dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$3 < \pi < \dfrac{16}{5}$ から，

$$y = \frac{2}{3}\pi\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2} - 1 = \frac{\sqrt{3}}{3}\pi - \frac{3}{2} > \frac{\sqrt{3}}{3}\cdot 3 - \frac{3}{2} = \sqrt{3} - \frac{3}{2} > 0$$

よって，曲線 C と x 軸の交点を $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$ とすると，$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ である。



(3) 曲線 C，y 軸および直線 $y = \dfrac{\pi}{2} - 1$ で囲まれる網点部の面積 S は，

$$S = \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - \int_0^{\frac{\pi}{2}}(x\sin x + \cos x - 1)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) + \Big[x\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} - \int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos x\,dx - \Big[\sin x - x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right) - 1 - 1 + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{4} - 2$$

また，原点 O，点 A および点 $\mathrm{B}\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2} - 1\right)$ を頂点とする △OAB の面積 T は，

$$T = \frac{\alpha}{2}\left(\frac{\pi}{2} - 1\right)$$

すると, (2)より，$\alpha > \dfrac{2}{3}\pi$ なので,

$$T-S=\frac{\alpha}{2}\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)-\frac{\pi^2}{4}+2>\frac{\pi}{3}\Big(\frac{\pi}{2}-1\Big)-\frac{\pi^2}{4}+2=-\frac{\pi}{12}(\pi+4)+2$$

さらに，$3<\pi<\dfrac{16}{5}$ から，$T-S>-\dfrac{1}{12}\cdot\dfrac{16}{5}\Big(\dfrac{16}{5}+4\Big)+2=\dfrac{2}{25}>0$

よって，$S<T$ である。

コメント

微積分の基本問題です。評価式が複数ありますが，どれも見通しはよいものです。

問　題

n は自然数とする。

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数 k に対して

$$\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t\, dt = (-1)^{k+1} \frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi + \cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

が成り立つことを示せ。

(2)　媒介変数 t によって,

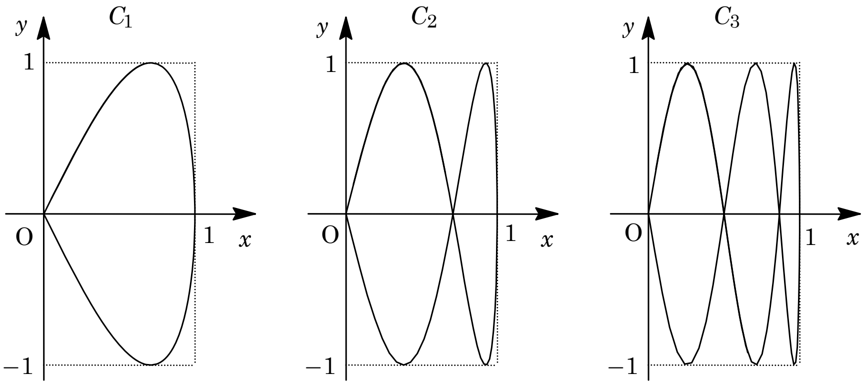
$$x = \sin t,\ \ y = \sin 2nt \quad (0 \leqq t \leqq \pi)$$

と表される曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n を求めよ。ただし必要なら

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos\frac{k}{2n}\pi = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}} - 1\right) \quad (n \geqq 2)$$

を用いてよい。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。



[2013]

解答例

(1)　$I_k = \displaystyle\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \sin 2nt \cos t\, dt = \frac{1}{2}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} \{\sin(2n+1)t + \sin(2n-1)t\}dt$ とおくと,

$$I_k = -\frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2n+1)t}{2n+1}\right]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi} - \frac{1}{2}\left[\frac{\cos(2n-1)t}{2n-1}\right]_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}$$

$$= -\frac{\cos\frac{2n+1}{2n}k\pi - \cos\frac{2n+1}{2n}(k-1)\pi}{2(2n+1)} - \frac{\cos\frac{2n-1}{2n}k\pi - \cos\frac{2n-1}{2n}(k-1)\pi}{2(2n-1)}$$

ここで, $\cos\dfrac{2n\pm1}{2n}k\pi = \cos\left(k\pi \pm \dfrac{k}{2n}\pi\right) = (-1)^k \cos\dfrac{k}{2n}\pi$ より,

$$I_k=-\frac{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi+(-1)^k\cos\frac{k-1}{2n}\pi}{2(2n+1)}-\frac{(-1)^k\cos\frac{k}{2n}\pi+(-1)^k\cos\frac{k-1}{2n}\pi}{2(2n-1)}$$

$$=(-1)^{k+1}\left\{\frac{1}{2(2n+1)}+\frac{1}{2(2n-1)}\right\}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

$$=(-1)^{k+1}\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

(2)　C_n：$x=\sin t$，$y=\sin 2nt\ (0\leqq t\leqq\pi)$ に対して，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，

$$f(\pi-t)=\sin(\pi-t)=\sin t=f(t)$$

$$g(\pi-t)=\sin(2n\pi-2nt)=-\sin 2nt=-g(t)$$

これより，曲線 C_n の $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ の部分と $\frac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$ の部分は x 軸対称になる。

さて，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において $f(t)=\sin t$ は単調に増加し，また $g(t)=\sin 2nt=0$ とすると，k を整数として $2nt=k\pi$，$t=\frac{k}{2n}\pi$ である。

これより，曲線 C_n で囲まれた部分の面積 S_n は，

$$\frac{S_n}{2}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|g(t)|f'(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin 2nt|\cos t\,dt=\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}|\sin 2nt|\cos t\,dt$$

ここで，区間 $\frac{k-1}{2n}\pi\leqq t\leqq\frac{k}{2n}\pi$ において，$g(t)=\sin 2nt$ の符号は変わらないので，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}|\sin 2nt|\cos t\,dt=\sum_{k=1}^{n}\left|\int_{\frac{k-1}{2n}\pi}^{\frac{k}{2n}\pi}\sin 2nt\cos t\,dt\right|=\sum_{k=1}^{n}|I_k|$$

(1)より，$|I_k|=\frac{2n}{4n^2-1}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$ であり，

$$\frac{S_n}{2}=\sum_{k=1}^{n}|I_k|=\frac{2n}{4n^2-1}\sum_{k=1}^{n}\left(\cos\frac{k}{2n}\pi+\cos\frac{k-1}{2n}\pi\right)$$

そこで，与えられた関係式 $\sum_{k=1}^{n-1}\cos\frac{k}{2n}\pi=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)$ を利用すると，

$$S_n=\frac{4n}{4n^2-1}\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)+\cos\frac{\pi}{2}+\cos 0+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}-1\right)\right\}$$

$$=\frac{4n}{4n^2-1}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}$$

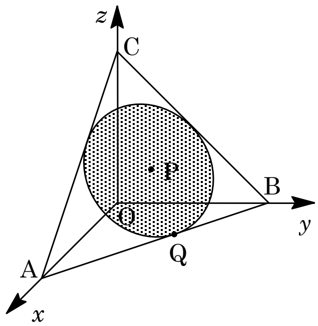
(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\lim_{n\to\infty}\frac{4n}{4n^2-1}\cdot\frac{1}{\tan\frac{\pi}{4n}}=\lim_{n\to\infty}\frac{16n^2}{\pi(4n^2-1)}\cdot\frac{\frac{\pi}{4n}}{\tan\frac{\pi}{4n}}=\frac{4}{\pi}$

コメント

問題に曲線が示してありますが，これがヒントとなっています。(2)において，積分区間を分割し，絶対値を積分の外側に出すことへの誘導です。

問　題

xyz 空間において，点 A(1, 0, 0)，B(0, 1, 0)，C(0, 0, 1) を通る平面上にあり，正三角形 ABC に内接する円板を D とする。円板 D の中心を P，円板 D と辺 AB の接点を Q とする。



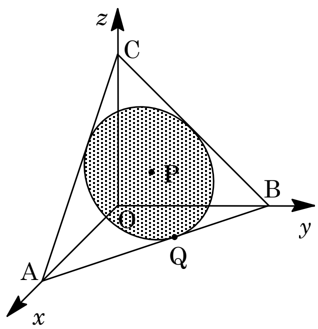
(1)　点 P と点 Q の座標を求めよ。

(2)　円板 D が平面 $z=t$ と共有点をもつ t の範囲を求めよ。

(3)　円板 D と平面 $z=t$ の共通部分が線分であるとき，その線分の長さを t を用いて表せ。

(4)　円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　点 P は△ABC の重心，点 Q は辺 AB の中点より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

(2)　$\mathrm{PQ}^2=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{6}$ であるので，

点 P を中心とし半径 PQ の球面およびその内部は，

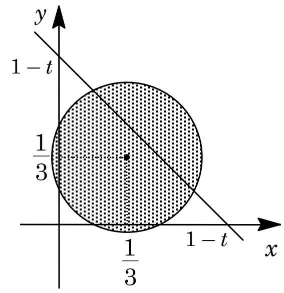
$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2+\left(z-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots①$$

3 点 A, B, C を通る平面は，$x+y+z=1\cdots\cdots\cdots②$

これより，円板 D は，①と②の連立式として表される。

さて，円板 D と平面 $z=t\cdots\cdots③$が共有点をもつ条件は，③と①②を連立して，

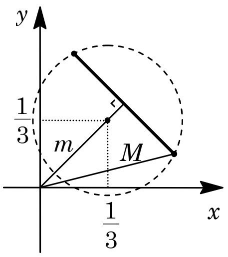
$$\left(x-\frac{1}{3}\right)^2+\left(y-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2,\ x+y=1-t$$



すると，平面 $z=t$ 上で，点$\left(\frac{1}{3},\ \frac{1}{3}\right)$と直線 $x+y=1-t$ の距離 $\dfrac{\left|\frac{1}{3}+\frac{1}{3}-1+t\right|}{\sqrt{1^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left|t-\frac{1}{3}\right|$ が，半径 $\sqrt{\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2}$ 以下であることから，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\left|t-\frac{1}{3}\right|\leqq\sqrt{\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2},\ \left(t-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{3}-2\left(t-\frac{1}{3}\right)^2,\ \left(t-\frac{1}{3}\right)^2\leqq\frac{1}{9}$$

よって，$-\frac{1}{3}\leqq t-\frac{1}{3}\leqq\frac{1}{3}$ より，$0\leqq t\leqq\frac{2}{3}$ となる。



(3)　(2)のとき，共通部分の線分の長さを l とすると，

$$\left(\frac{l}{2}\right)^2=\left\{\frac{1}{6}-\left(t-\frac{1}{3}\right)^2\right\}-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{3}\right)^2=t-\frac{3}{2}t^2$$

よって，$l=2\sqrt{t-\frac{3}{2}t^2}$ である。

(4)　平面 $z=t$ 上で，共通部分の線分を z 軸のまわりに回転したときできるドーナツ形の外径を M，内径を m とし，その面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\pi(M^2-m^2)=\pi\left(\frac{l}{2}\right)^2=\pi\left(t-\frac{3}{2}t^2\right)$$

よって，円板 D を z 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V は，

$$V=\int_0^{\frac{2}{3}}\pi\left(t-\frac{3}{2}t^2\right)dt=-\frac{3}{2}\pi\int_0^{\frac{2}{3}}t\left(t-\frac{2}{3}\right)dt=\frac{3}{2}\pi\cdot\frac{1}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{2}{27}\pi$$

コメント

平面図形の回転体の体積を求める有名題です。空間図形の方程式を利用しています。

問　題

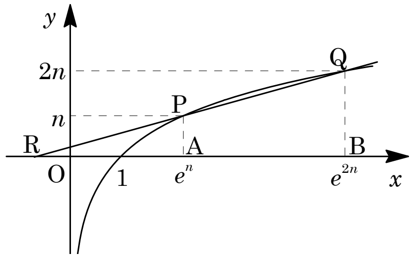
曲線$C: y=\log x\ (x>0)$を考える。自然数 n に対して，曲線 C 上に点$\mathrm{P}(e^n,\ n)$，$\mathrm{Q}(e^{2n},\ 2n)$をとり，x 軸上に点$\mathrm{A}(e^n,\ 0)$，$\mathrm{B}(e^{2n},\ 0)$をとる。四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を$V(n)$とする。また，線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を$S(n)$とする。

(1)　$V(n)$を n の式で表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}$を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　直線 PQ と x 軸との交点を R とおくと，R は線分 AB を$1:2$に外分する点となり，その座標は，$\mathrm{R}(2e^n-e^{2n},\ 0)$である。



さて，△RPA を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐と，△RQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐の体積比は，$1^3:2^3=1:8$ である。

すると，四角形 APQB を x 軸のまわりに 1 回転してできる円錐台の体積$V(n)$は，

$$V(n)=\left(1-\frac{1}{8}\right)\cdot\frac{1}{3}\pi(2n)^2(e^{2n}-2e^n+e^{2n})=\frac{7}{3}\pi n^2(e^{2n}-e^n)$$

(2)　線分 PQ と曲線 C で囲まれる部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積$S(n)$は，

$$S(n)=\pi\int_{e^n}^{e^{2n}}(\log x)^2dx-V(n)$$

ここで，$\displaystyle I=\int_{e^n}^{e^{2n}}(\log x)^2dx=\Big[\,x(\log x)^2\,\Big]_{e^n}^{e^{2n}}-2\int_{e^n}^{e^{2n}}\log x\,dx$

$$=4n^2e^{2n}-n^2e^n-2\Big[\,x\log x-x\,\Big]_{e^n}^{e^{2n}}$$

$$=4n^2e^{2n}-n^2e^n-2(2ne^{2n}-e^{2n}-ne^n+e^n)$$

$$=(4n^2-4n+2)e^{2n}-(n^2-2n+2)e^n$$

よって，$S(n)=\pi(4n^2-4n+2)e^{2n}-\pi(n^2-2n+2)e^n-V(n)$となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S(n)}{V(n)}=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{7}\cdot\frac{(4n^2-4n+2)e^{2n}-(n^2-2n+2)e^n}{n^2(e^{2n}-e^n)}-1\right\}$$

$$=\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{3}{7}\cdot\frac{(4-4n^{-1}+2n^{-2})-(1-2n^{-1}+2n^{-2})e^{-n}}{1-e^{-n}}-1\right\}$$

$$=\frac{3}{7}\cdot4-1=\frac{5}{7}$$

コメント

円錐台の体積を求めるには，定積分の実行でも，もちろん構いません。しかし，点 P, Q の y 座標に注目すると，上の解答例のような省エネの方法がおすすめです。

問　題

α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。円 $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ および，その中心を通る直線 $l: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l と円 C の 2 つの交点の座標を α を用いて表せ。

(2) 等式 $2\displaystyle\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$ が成り立つことを示せ。

(3) 連立不等式 $y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha$，$x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq 1$ の表す xy 平面上の図形を D とする。図形 D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

[2011]

解答例

(1) $l: y=(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ と $C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ を連立すると，

$$x^2+(\tan^2\alpha)x^2=1,\ \ \frac{1}{\cos^2\alpha}x^2=1,\ \ x=\pm\cos\alpha$$

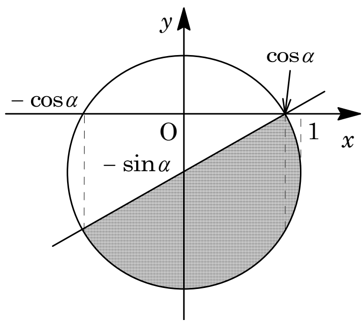
すると，$y=\pm\sin\alpha-\sin\alpha$ から，$x=\cos\alpha$ のとき $y=0$，$x=-\cos\alpha$ のとき $y=-2\sin\alpha$ となり，l と C の交点は，$(\cos\alpha,\ 0)$，$(-\cos\alpha,\ -2\sin\alpha)$ である。

(2) $f(x)=\sqrt{1-x^2}$ とおくと，$f(-x)=f(x)$ から，$f(x)$ は偶関数であり，

$$\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_{0}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

よって，$2\displaystyle\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\int_{0}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx=2\times\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2}$

(3) $y\leqq(\tan\alpha)x-\sin\alpha$ かつ $x^2+(y+\sin\alpha)^2\leqq 1$ の表す図形 D は右図の網点部となる。ここで，D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を V とする。



さて，$C: x^2+(y+\sin\alpha)^2=1$ より，

$$y=\pm\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha$$

そこで，$V_1=\pi\displaystyle\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\left(-\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha\right)^2dx$

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(2\sin\alpha)^2\cdot 2\cos\alpha=\frac{8}{3}\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$$

$$V_3=\pi\int_{\cos\alpha}^{1}\left\{\left(-\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha\right)^2-\left(\sqrt{1-x^2}-\sin\alpha\right)^2\right\}dx$$

すると，$V=V_1-V_2+V_3$ となり，

$$V_1=\pi\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}(1-x^2+\sin^2\alpha)\,dx+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=2\pi\int_0^{\cos\alpha}(-x^2+1+\sin^2\alpha)\,dx+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=2\pi\Big[-\frac{x^3}{3}+(1+\sin^2\alpha)x\Big]_0^{\cos\alpha}+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{2}{3}\pi\cos^3\alpha+2\pi(1+\sin^2\alpha)\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$=-\frac{8}{3}\pi\cos^3\alpha+4\pi\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

$$V_2=\frac{8}{3}\pi\cos\alpha-\frac{8}{3}\pi\cos^3\alpha$$

$$V_3=\pi\int_{\cos\alpha}^{1}4\sin\alpha\sqrt{1-x^2}\,dx=4\pi\sin\alpha\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx$$

(2)から，$2\displaystyle\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx+\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{\pi}{2}$なので，

$$V=4\pi\cos\alpha-\frac{8}{3}\pi\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\Big\{\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx+2\int_{\cos\alpha}^{1}\sqrt{1-x^2}\,dx\Big\}$$

$$=\frac{4}{3}\pi\cos\alpha+2\pi\sin\alpha\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{4}{3}\pi\cos\alpha+\pi^2\sin\alpha$$

コメント

(3)では，求積の方法について迷いますが，(2)の結果を活用することを考えるのが，本問では最適でしょう。

問　題

3 つの曲線

$$C_1: y=\sin x\ \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right),\ C_2: y=\cos x\ \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right),\ C_3: y=\tan x\ \left(0\leqq x<\frac{\pi}{2}\right)$$

について，以下の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の交点，C_2 と C_3 の交点，C_3 と C_1 の交点のそれぞれについて y 座標を求めよ。

(2)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$C_1: y=\sin x$ ……①，$C_2: y=\cos x$ ……②，$C_3: y=\tan x$ ……③に対し，

まず，C_1 と C_2 の交点は，①②から，$\sin x=\cos x$ より，$\sqrt{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より，$x=\frac{\pi}{4}$，$y=\frac{\sqrt{2}}{2}$

また，C_2 と C_3 の交点は，②③から，$\cos x=\tan x$ より，

$$\cos^2 x=\sin x,\quad \sin^2 x+\sin x-1=0$$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ における解を $x=\alpha$ とおくと，$\sin\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$y=\cos\alpha=\sqrt{\sin\alpha}=\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}$$

さらに，C_3 と C_1 の交点は，③①から，$\tan x=\sin x$ より，$\sin x(\cos x-1)=0$

$0\leqq x<\frac{\pi}{2}$ より，$x=0$，$y=0$

(2)　C_1，C_2，C_3 によって囲まれる図形の面積 S は，

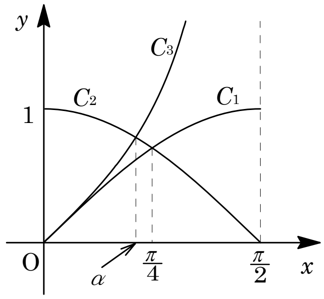
$$S=\int_0^{\alpha}\tan x\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}\cos x\,dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sin x\,dx$$

$$=\Big[-\log|\cos x|\Big]_0^{\alpha}+\Big[\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}+\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=-\log(\cos\alpha)+\log 1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\sin\alpha+\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

$$=-\log\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{2}}-\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-1$$

$$=-\frac{1}{2}\log\frac{-1+\sqrt{5}}{2}+\sqrt{2}-\frac{\sqrt{5}}{2}-\frac{1}{2}$$



コメント

基本的な求積問題です。まったく同じ問題を解いたという記憶はあるものの，出典は思い浮かびません。

問　題

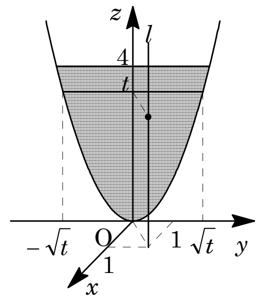
xyz 空間内において，yz 平面上で放物線 $z=y^2$ と直線 $z=4$ で囲まれる平面図形を D とする。点 $(1,\ 1,\ 0)$ を通り z 軸に平行な直線を l とし，l のまわりに D を 1 回転させてできる立体を E とする。

(1) D と平面 $z=t$ との交わりを D_t とする。ただし $0\leqq t\leqq 4$ とする。点 P が D_t 上を動くとき，点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値，最小値を求めよ。

(2) 平面 $z=t$ による E の切り口の面積 $S(t)\ (0\leqq t\leqq 4)$ を求めよ。

(3) E の体積 V を求めよ。　[2009]

解答例



(1) まず，平面図形 $D: x=0,\ \ y^2\leqq z\leqq 4$ と平面 $z=t$ との交わり D_t は，線分となり，

$$x=0,\ -\sqrt{t}\leqq y\leqq\sqrt{t},\ z=t\cdots\cdots\cdots(*)$$

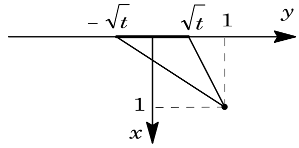
また，直線 l と平面 $z=t$ との交わりは点 $(1,\ 1,\ t)$ である。

さて，$(*)$上の点 P と点 $(1,\ 1,\ t)$ との距離の最大値を M，最小値を m とおくと，

(i) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

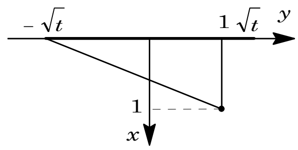
$$m=\sqrt{(1-\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2-2\sqrt{t}+t}$$



(ii) $1\leqq t\leqq 4$ のとき

$$M=\sqrt{(1+\sqrt{t})^2+1^2}=\sqrt{2+2\sqrt{t}+t}$$

$$m=1$$



(2) D を l のまわりに 1 回転させてできる立体 E を，平面 $z=t$ によって切断したとき，その切り口の面積 $S(t)$ は，

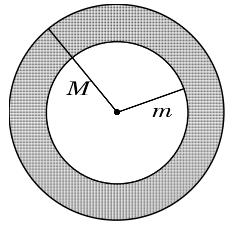
$$S(t)=\pi(M^2-m^2)$$

(i) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-(2-2\sqrt{t}+t)\}=4\pi\sqrt{t}$$

(ii) $1\leqq t\leqq 4$ のとき

$$S(t)=\pi\{(2+2\sqrt{t}+t)-1\}=\pi(1+2\sqrt{t}+t)$$



(3) E の体積 V は，

$$V=\int_0^4 S(t)\,dt=4\pi\int_0^1\sqrt{t}\,dt+\pi\int_1^4(1+2\sqrt{t}+t)\,dt$$

$$=4\pi\Big[\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}\Big]_0^1+\pi\Big[t+\frac{4}{3}t^{\frac{3}{2}}+\frac{1}{2}t^2\Big]_1^4=\frac{8}{3}\pi+\Big(3+\frac{28}{3}+\frac{15}{2}\Big)\pi=\frac{45}{2}\pi$$

コメント

平面図形を回転したときにできる立体の体積を求めるものです。回転軸に垂直な断面がドーナツ形になるので，その外径と内径を求めるところがポイントです。

問　題

xyz 空間内の点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ と，xy 平面上の円 $C : x^2+(y-2)^2=1$ に属する点 $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 2+\sin\theta,\ 0)$ を考える。

(1) 直線 PQ と平面 $z=t$ の交点の座標を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とするとき，$\alpha^2+\beta^2$ を t と θ で表せ。

(2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面と平面 $z=0$，$z=1$ によって囲まれる立体の体積を θ で表せ。

(3) Q が C 上を 1 周するとき, (2)で求めた体積の最大値, 最小値を求めよ。　[2008]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$ より，直線 PQ は, u を実数として,

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 1)+u(\cos\theta-1,\ 2+\sin\theta,\ -1)$$

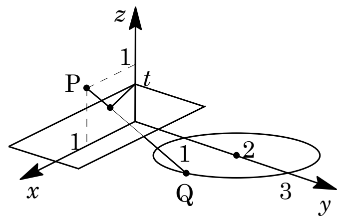
さて，平面 $z=t$ と交わるのは，$1-u=t$ より，$u=1-t$ のときであり，このとき，

$$x=1+(1-t)(\cos\theta-1)=(1-\cos\theta)t+\cos\theta,\quad y=(1-t)(2+\sin\theta)$$

条件より，交点を $(\alpha,\ \beta,\ t)$ とおくと，

$$\alpha^2+\beta^2=\{(1-\cos\theta)t+\cos\theta\}^2+(2+\sin\theta)^2(1-t)^2$$
$$=(6+4\sin\theta-2\cos\theta)t^2+(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)t+(5+4\sin\theta)$$

(2) 線分 PQ を z 軸のまわりに 1 回転させてできる曲面を，平面 $z=t$ で切断したときにできる切り口は，中心が $(0,\ 0,\ t)$ で，半径が $\sqrt{\alpha^2+\beta^2}$ の円である。



その断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi(\alpha^2+\beta^2)$$

よって，求める立体の体積 V は, (1)より,

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\pi\int_0^1(\alpha^2+\beta^2)\,dt$$
$$=\pi\left\{\frac{1}{3}(6+4\sin\theta-2\cos\theta)+\frac{1}{2}(-10-8\sin\theta+2\cos\theta)+(5+4\sin\theta)\right\}$$
$$=\frac{\pi}{3}(6+4\sin\theta+\cos\theta)$$

(3) α を $\cos\alpha=\dfrac{4}{\sqrt{17}}$，$\sin\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$ を満たす角と決めると, (2)より,

$$V=\frac{\pi}{3}\{6+\sqrt{17}\sin(\theta+\alpha)\}$$

すると，$0\leqq\theta<2\pi$ より，$-1\leqq\sin(\theta+\alpha)\leqq1$ となり，V の最大値は $\dfrac{\pi}{3}(6+\sqrt{17})$，最小値は $\dfrac{\pi}{3}(6-\sqrt{17})$ である。

コメント

軸とねじれの位置にある線分を回転したときにできる曲面で囲まれた立体の体積を求める頻出問題です。ただ，本問は計算量が多めです。

問　題

関数 $f(x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}$ について，以下の問いに答えよ。ただし，$a>0$，$b>1$ とする。

(1)　$f(x)\geqq 0$ を満たす x の範囲を求めよ。

(2)　曲線 $y=\sqrt{f(x)}$ と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V を求めよ。

(3)　$a=b\log b$ のとき，(2)で求めた体積 V を $V(b)$ と表す。このとき，$\displaystyle\lim_{b\to\infty}V(b)=2\pi$ となることを示せ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{ax}-e^{-ax}$ に対して，$f(x)\geqq 0$ とすると，

$$b+\frac{1}{b}\geqq e^{ax}+\frac{1}{e^{ax}},\quad e^{2ax}-\left(b+\frac{1}{b}\right)e^{ax}+1\leqq 0$$

すると，$(e^{ax}-b)\left(e^{ax}-\dfrac{1}{b}\right)\leqq 0$ となり，$b>1$ から，

$$\frac{1}{b}\leqq e^{ax}\leqq b,\quad -\frac{1}{a}\log b\leqq x\leqq\frac{1}{a}\log b$$

(2)　$f(-x)=b+\dfrac{1}{b}-e^{-ax}-e^{ax}=f(x)$ より，曲線 $y=\sqrt{f(x)}$ は y 軸対称である。

すると，この曲線と x 軸で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V は，

$$\begin{aligned}V&=2\pi\int_0^{\frac{1}{a}\log b}f(x)\,dx=2\pi\left[\left(b+\frac{1}{b}\right)x-\frac{1}{a}e^{ax}+\frac{1}{a}e^{-ax}\right]_0^{\frac{1}{a}\log b}\\&=2\pi\left\{\left(b+\frac{1}{b}\right)\frac{1}{a}\log b-\frac{1}{a}(e^{\log b}-1)+\frac{1}{a}(e^{-\log b}-1)\right\}\\&=2\pi\left\{\frac{b^2+1}{b}\cdot\frac{\log b}{a}-\frac{1}{a}(b-1)+\frac{1}{a}\left(\frac{1}{b}-1\right)\right\}\\&=\frac{2\pi}{ab}\left\{(b^2+1)\log b-b^2+1\right\}\end{aligned}$$

(3)　$a=b\log b$ のとき，(2)より，

$$V(b)=\frac{2\pi}{b^2\log b}\left\{(b^2+1)\log b-b^2+1\right\}=2\pi\left(\frac{b^2+1}{b^2}-\frac{b^2-1}{b^2}\cdot\frac{1}{\log b}\right)$$

よって，$\displaystyle\lim_{b\to\infty}V(b)=2\pi\lim_{b\to\infty}\left\{\left(1+\frac{1}{b^2}\right)-\left(1-\frac{1}{b^2}\right)\frac{1}{\log b}\right\}=2\pi$

コメント

微積分の基本レベルの総合問題です。

問　題

座標空間において，$|x| \leqq z^2$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる立体を R とする。点 $(0,\ 0,\ 1)$ を通り，x 軸と平行な直線を l とする。l を中心軸とする半径 1 の円柱を C とし，R と C の共通部分を T とする。

(1)　$-1<h<1$ を満たす定数 h に対して，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面による T の切り口の面積を求めよ。

(2)　T の体積を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　条件より，立体 $R : |x| \leqq z^2$ ………①

l を中心軸とする半径 1 の円柱 C の方程式は，

$$C : y^2 + (z-1)^2 \leqq 1 \text{ ………②}$$

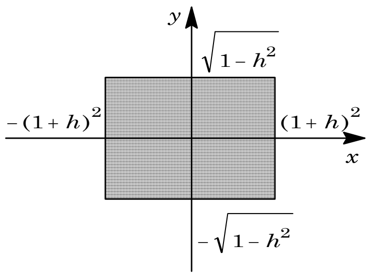
また，点 $(0,\ 0,\ 1+h)$ を通り z 軸に垂直な平面の方程式は，

$$z = 1 + h \text{ ………③}$$

③を①に代入して，$|x| \leqq (1+h)^2$，$-(1+h)^2 \leqq x \leqq (1+h)^2$

③を②に代入して，$y^2 + h^2 \leqq 1$，$-\sqrt{1-h^2} \leqq y \leqq \sqrt{1-h^2}$

R と C の共通部分 T を平面③で切断したときの切り口を図示すると，右図の網点部となる。その面積 $S(h)$ は，



$$S(h) = 2(1+h)^2 \cdot 2\sqrt{1-h^2}$$
$$= 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}$$

(2)　T の体積を V とすると，

$$V = \int_{-1}^{1} S(h)\,dh = \int_{-1}^{1} 4(1+h)^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 4\int_{-1}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{-1}^{1} h\sqrt{1-h^2}\,dh + 4\int_{-1}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$
$$= 8\int_{0}^{1}\sqrt{1-h^2}\,dh + 8\int_{0}^{1} h^2\sqrt{1-h^2}\,dh$$

ここで，原点が中心で，半径 1 の四分円の面積は $\dfrac{\pi}{4}$ より，$\displaystyle\int_0^1 \sqrt{1-h^2}\,dh = \frac{\pi}{4}$

また，$h = \sin\theta \left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\int_0^1 h^2\sqrt{1-h^2}\,dh = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta$$
$$= \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

以上より，$V=8\times\dfrac{\pi}{4}+8\times\dfrac{\pi}{16}=\dfrac{5}{2}\pi$ である。

コメント

10 年以上も前，旧旧課程の頃に頻出していた共通部分の体積を求める問題です。ここ数年は，空間図形の内容が削減されたため，散見される程度でしたが，やや風向きが変わってきたのでしょうか。

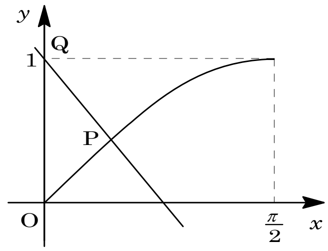
問　題

曲線$C : y=\sin x\ \left(0<x<\dfrac{\pi}{2}\right)$を考える。$C$ 上の点 P における C の法線を l とする。

(1)　法線 l が点 Q$(0,\ 1)$ を通るような点 P がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　(1)の条件を満たす点 P に対し，直線 l，曲線 C，直線 $y=1$ で囲まれる部分の面積を S_1 とし，直線 l，曲線 C，x 軸で囲まれる部分の面積を S_2 とする。S_1 と S_2 の大小を比較せよ。　[2005]

解答例



(1)　$C : y=\sin x$ に対して，$y'=\cos x$ なので，

P$(t,\ \sin t)$ における法線の方程式は，

$$y-\sin t=-\frac{1}{\cos t}(x-t)$$

Q$(0,\ 1)$ を通ることより，$1-\sin t=-\dfrac{1}{\cos t}(-t)$

$$\cos t(1-\sin t)-t=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(t)=\cos t(1-\sin t)-t$ とおくと，

$$f'(t)=-\sin t(1-\sin t)-\cos^2 t-1$$

$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ より，$0<\sin t<1$ なので $f'(t)<0$ となる。

これより，$f(t)$ は単調減少し，$f(0)=1$，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=-\dfrac{\pi}{2}$ から $f(t)=0$ はただ 1 つの解をもち，法線が点 Q を通るような点 P はただ 1 つ存在する。

(2)　直線 l，曲線 C, y 軸で囲まれる部分の面積を S_3 とおくと，

$$S_1+S_3=\frac{\pi}{2}\times 1-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=\frac{\pi}{2}-1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$(*)$の解を $t=\alpha$ とおくと，P$(\alpha,\ \sin\alpha)$ から，

$$l : y-\sin\alpha=-\frac{1}{\cos\alpha}(x-\alpha)$$

x 軸との交点は，$-\sin\alpha=-\dfrac{1}{\cos\alpha}(x-\alpha)$ より，$x=\sin\alpha\cos\alpha+\alpha$ となり，

$$S_2+S_3=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)\times 1=\frac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$S_2-S_1=\dfrac{1}{2}(\sin\alpha\cos\alpha+\alpha)-\dfrac{\pi}{2}+1$

ここで，$(*)$から，$\cos\alpha(1-\sin\alpha)-\alpha=0$，$\sin\alpha\cos\alpha+\alpha=\cos\alpha$ なので，

$$S_2-S_1=\frac{1}{2}\cos\alpha-\frac{\pi}{2}+1=\frac{1}{2}(\cos\alpha-\pi+2)<0$$

よって，$S_1>S_2$ である。

コメント

点 P の座標は求まりませんが，このことは P の x 座標である α の条件として回避できます。その条件を，面積の大小関係の決定につなぐわけです。

問　題

$f(x)$は $x \geqq 0$ で連続で，$f(0)=0$ かつ $x>0$ において$f'(x)>0$を満たすとする。$t>0$に対して，曲線$y=f(x)$と x 軸および直線$x=t$とで囲まれる図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を$X(t)$，曲線$y=f(x)$と y 軸および直線$y=f(t)$とで囲まれる図形を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を$Y(t)$とする。また，$X(0)=Y(0)=0$とする。このとき，次を示せ。

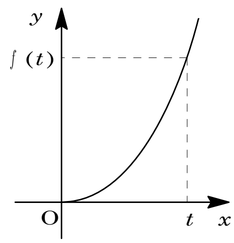
(1)　$X'(t)=\pi f(t)^2$，$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)$ $(t>0)$ である。

(2)　$f(x)$が整式でかつ，すべての $t \geqq 0$ に対して$X(t)=Y(t)$が成り立つならば，$f(x)=x$ $(x \geqq 0)$ である。

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ ならば，$X(t)=Y(t)$ $(t \geqq 0)$ である。　[2004]

解答例

(1)　まず，$X(t)=\pi\int_0^t \{f(x)\}^2 dx$ より，$X'(t)=\pi\{f(t)\}^2$



また，$f(x)$は$x \geqq 0$ で連続で，単調に増加するので，

$$Y(t)=\pi\int_0^{f(t)} x^2 dy=\pi\int_0^t x^2 f'(x)\,dx$$

よって，$Y'(t)=\pi t^2 f'(t)$

(2)　$t \geqq 0$ に対して$X(t)=Y(t)$より，$X'(t)=Y'(t)$ $(t>0)$となるので, (1)から,

$$\pi\{f(t)\}^2=\pi t^2 f'(t),\ \{f(t)\}^2=t^2 f'(t)\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)$が定数の場合は，明らかに(∗)は成立しないので，$n \geqq 1$ として，$f(x)$を n 次の整式とする。

(∗)の左辺の次数は $2n$，右辺の次数は$2+(n-1)=n+1$から，

$$2n=n+1,\ n=1$$

これより，$f(x)=ax+b$ $(a \neq 0)$とおくことができる。

(∗)に代入して，$(at+b)^2=at^2$，$(a^2-a)t^2+2abt+b^2=0$

すべての $t>0$ に対して成立するので，

$$a^2-a=0,\ 2ab=0,\ b^2=0$$

$a \neq 0$から，$a=1$，$b=0$となり，$f(x)=x$ $(x \geqq 0)$である。

(3)　$f(x)=\dfrac{x}{1+x}$ のとき，$f(0)=0$ かつ$f'(x)=\dfrac{1}{(1+x)^2}>0$ $(x>0)$であり，

$$\{f(t)\}^2=\frac{t^2}{(1+t)^2}=t^2 f'(t)$$

よって, (1)より，$X'(t)=Y'(t)$

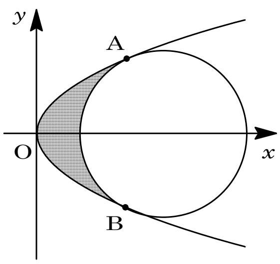
すると，$X(0)=Y(0)$ から，$t \geqq 0$ において，$X(t)=Y(t)$ である。

コメント

抽象関数が題材で，しかも問題文が長いのですが，案ずるほどではありませんでした。

問　題

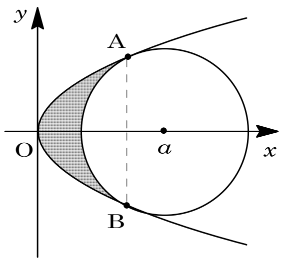
右の図のように，円 $(x-a)^2+y^2=r^2\ \left(r>\dfrac{1}{2}\right)$ が放物線 $y^2=x$ と 2 点 A, B で接している。



(1)　点 A の x 座標および a を r で表せ。

(2)　円と放物線で囲まれた部分(網点部分)を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を $V(r)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to\frac{1}{2}+0}\frac{V(r)}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^3}$ を求めよ。　[2003]

解答例



(1)　$(x-a)^2+y^2=r^2$ ……①と $y^2=x$ ……②が $x>0$ で接するので，②を①に代入し，$(x-a)^2+x=r^2$

$$x^2-(2a-1)x+a^2-r^2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③が正の重解をもつことより，$2a-1>0$ ………④

$$D=(2a-1)^2-4(a^2-r^2)=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$-4a+1+4r^2=0$，$a=\dfrac{1+4r^2}{4}$

$r>\dfrac{1}{2}$ より $a>\dfrac{1+1}{4}=\dfrac{1}{2}$ となり，④は満たされている。

また，接点 A の x 座標は，③の重解なので

$$x=\frac{2a-1}{2}=\frac{1+4r^2}{4}-\frac{1}{2}=\frac{4r^2-1}{4}$$

(2)　放物線②の $0\leqq x\leqq\dfrac{2a-1}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1，円①の $a-r\leqq x\leqq\dfrac{2a-1}{2}$ の部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とすると，$V(r)=V_1-V_2$ である。

$$V_1=\int_0^{\frac{2a-1}{2}}\pi x\,dx=\pi\left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{2a-1}{2}}=\frac{\pi}{2}\left(\frac{2a-1}{2}\right)^2$$

(1)より，$V_1=\dfrac{\pi}{2}\left(\dfrac{4r^2-1}{4}\right)^2=\dfrac{\pi}{2}\left(r-\dfrac{1}{2}\right)^2\left(r+\dfrac{1}{2}\right)^2$

$$V_2=\int_{a-r}^{\frac{2a-1}{2}}\pi\{r^2-(x-a)^2\}dx=\pi\int_{-r}^{-\frac{1}{2}}(r^2-t^2)\,dt\quad(t=x-a)$$

よって，$V_2=\pi\left[r^2x-\dfrac{t^3}{3}\right]_{-r}^{-\frac{1}{2}}=\pi r^2\left(-\dfrac{1}{2}+r\right)-\dfrac{\pi}{3}\left(-\dfrac{1}{8}+r^3\right)$

$$=\frac{\pi}{3}\left(r-\frac{1}{2}\right)\left(2r^2-\frac{1}{2}r-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{3}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\left(2r+\frac{1}{2}\right)$$

$$V(r)=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\left\{3\left(r+\frac{1}{2}\right)^2-2\left(2r+\frac{1}{2}\right)\right\}$$

$$=\frac{\pi}{6}\left(r-\frac{1}{2}\right)^2\left(3r^2-r-\frac{1}{4}\right)=\frac{\pi}{6}\left(r-\frac{1}{2}\right)^3\left(3r+\frac{1}{2}\right)$$

以上より，$\displaystyle\lim_{r\to\frac{1}{2}+0}\frac{V(r)}{\left(r-\frac{1}{2}\right)^3}=\lim_{r\to\frac{1}{2}+0}\frac{\pi}{6}\left(3r+\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{3}$

コメント

円と放物線が原点以外で接する場合なので，(1)では重解条件を用いて計算をしています。

問　題

曲線 C を次の方程式で定める。　$y=\sqrt{x^2+4}\ (x\geqq 0)$

C 上の点 P を通る傾き -1 の直線が x 軸と交わる点の x 座標を $2t$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

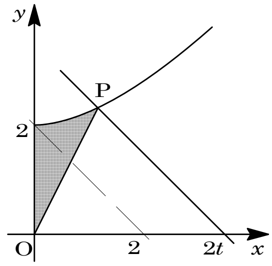
(1) 点 P の x 座標, y 座標を t で表せ。

(2) 点 P が C 上を動いたときの t の最小値を求めよ。

(3) 原点を O とし，線分 OP，曲線 C, y 軸で囲まれる図形の面積 S を t で表せ。

[2002]

解答例



(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ \sqrt{p^2+4})$ を通る傾き -1 の直線は，

$$y-\sqrt{p^2+4}=-(x-p)$$

点 $(2t,\ 0)$ を通ることより，$-\sqrt{p^2+4}=-2t+p$

$$p^2+4=(-2t+p)^2,\ tp=t^2-1$$

$$p=\frac{t^2-1}{t}=t-\frac{1}{t},\ \sqrt{p^2+4}=2t-p=t+\frac{1}{t}$$

したがって，$\mathrm{P}\left(t-\dfrac{1}{t},\ t+\dfrac{1}{t}\right)$ となる。

(2) 点 P が C 上を動くとき，$2t\geqq 2$ から $t\geqq 1$ となり, t の最小値は 1 である。

(3) $S=\displaystyle\int_0^p y\,dx-\frac{1}{2}p\sqrt{p^2+1}=\int_0^p y\,dx-\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)\left(t+\frac{1}{t}\right)=\int_0^p y\,dx-\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)$

ここで, (1)より曲線 C は，$x=u-\dfrac{1}{u}$，$y=u+\dfrac{1}{u}$ と表せる。

すると，$dx=\left(1+\dfrac{1}{u^2}\right)du$ で，$x=0$ のとき $u=1$，$x=p$ のとき $u=t$ となり,

$$\int_0^p y\,dx=\int_1^t\left(u+\frac{1}{u}\right)\left(1+\frac{1}{u^2}\right)du=\int_1^t\left(u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)du$$

$$=\left[\frac{u^2}{2}+2\log|u|-\frac{1}{2u^2}\right]_1^t=\frac{1}{2}\left(t^2-\frac{1}{t^2}\right)+2\log t$$

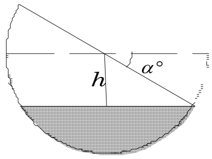
以上より，$S=\dfrac{1}{2}\left(t^2-\dfrac{1}{t^2}\right)+2\log t-\dfrac{1}{2}\left(t^2-\dfrac{1}{t^2}\right)=2\log t$

コメント

(1)は(3)の積分を実行するための誘導となっています。なお, (2)については，図より明らかなのですが，関係式 $2t=p+\sqrt{p^2+4}$ を用いても簡単です。

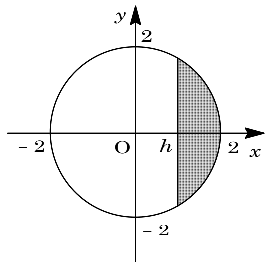
問　題

水を満たした半径 2 の半球形の容器がある。これを静かに$\alpha°$傾けたとき，水面が h だけ下がり，こぼれ出た水の量と容器に残った水の量の比が$11:5$となった。hとαを求めよ。　　[1999]



解答例

まず，$x^2+y^2=4\ \ (0\leqq x\leqq 2)$を x 軸のまわりに回転して容器を作ると考える。



半球形の容器の体積は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{4}{3}\pi\cdot 2^3=\dfrac{16}{3}\pi$となるので，こぼれ出た水の量は，条件より$\dfrac{11}{11+5}\cdot\dfrac{16}{3}\pi=\dfrac{11}{3}\pi$となる。

したがって，$\pi\displaystyle\int_0^h(4-x^2)\,dx=\dfrac{11}{3}\pi$

$$4h-\frac{h^3}{3}=\frac{11}{3},\ h^3-12h+11=0,\ (h-1)(h^2+h-11)=0$$

$0<h<2$より$h=1$となり，このとき$\sin\alpha°=\dfrac{1}{2}$なので，$\alpha=30$である。

コメント

超有名問題です。同じ構図の問題がたびたび出題されてきました。

問　題

関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $(x>0)$ について次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフの $1\leqq x\leqq 2$ に対応する部分，2 直線 $y=f(1)$，$y=f(2)$，および y 軸で囲まれた部分を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。

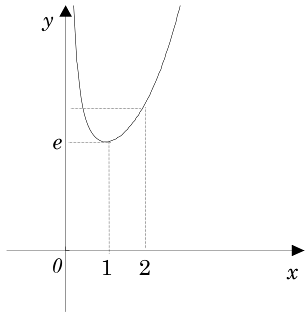
[1998]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{x}$ $(x>0)$ より，

$$f'(x)=\frac{e^x x-e^x}{x^2}=\frac{e^x(x-1)}{x^2}$$

x	0	……	1	……	∞
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	∞	↘	e	↗	∞



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

(2)　$f(1)=e$，$f(2)=\dfrac{e^2}{2}$ から，求める体積 V は，

$$V=\int_e^{\frac{e^2}{2}}\pi x^2dy=\int_1^2\pi x^2 f'(x)\,dx=\pi\int_1^2 x^2\cdot\frac{e^x(x-1)}{x^2}dx$$

$$=\pi\left\{\Big[(x-1)e^x\Big]_1^2-\int_1^2 e^x dx\right\}=\pi\left\{e^2-(e^2-e)\right\}=\pi e$$

コメント

y 軸回転体の体積を求める問題ですが, x が y の関数として単純な式では表せませんので, ここでは変数を y から x へと置換しました。これは必修技法の一つです。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆