1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大］

座標平面上の点 P(1, 1) を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1)　k, q, r の値を求めよ。

(2)　曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3)　$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q \sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

(4)　円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。

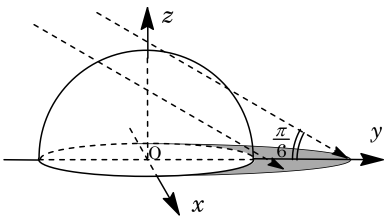
$\boxed{2}$ ［千葉大］

平面上に 2 つの円$C_1 : x^2+y^2=1$，$C_2 : \left(x+\dfrac{3}{2}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{4}$があり，点$(-1,\ 0)$で接している。

点P_1はC_1上を反時計まわりに一定の速さで動き，点P_2はC_2上を反時計まわりに一定の速さで動く。2 点P_1，P_2はそれぞれ点$(1,\ 0)$および点$(-1,\ 0)$を時刻 0 に同時に出発する。P_1はC_1を一周して時刻2πに点$(1,\ 0)$に戻り，P_2はC_2を二周して時刻2πに点$(-1,\ 0)$に戻るものとする。P_1とP_2の中点を M とおく。

P_1がC_1を一周するときの点 M の軌跡の概形を図示して，その軌跡によって囲まれる図形の面積を求めよ。

3　　［九州大］



座標空間内に，原点 O(0, 0, 0) を中心とする半径 1 の球がある。右の概略図のように，y 軸の負の方向から仰角 $\dfrac{\pi}{6}$ で太陽光線が当たっている。この太陽光線はベクトル $(0,\ \sqrt{3},\ -1)$ に平行である。球は光を通さないものとする。以下の問いに答えよ。

(1) 球の $z \geqq 0$ の部分が xy 平面上につくる影を考える。k を $-1<k<1$ を満たす実数とするとき，xy 平面上の直線 $x=k$ において，球の外で光が当たらない部分の y 座標の範囲を k を用いて表せ。

(2) xy 平面上において，球の外で光が当たらない部分の面積を求めよ。

(3) $z \geqq 0$ において，球の外で光が当たらない部分の体積を求めよ。

$\boxed{4}$　［大阪大］

座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。

$\boxed{5}$　［東京工大］

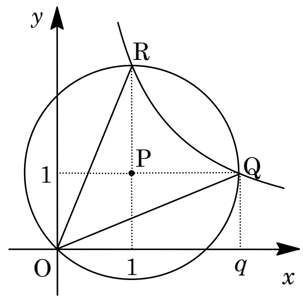
$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t,\ 0)$ $(-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t)\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ を示せ。

1　　　　［広島大］



(1)　円 C_1 は中心 P(1, 1)，半径は $\sqrt{2}$ から，

$$C_1 : (x-1)^2+(y-1)^2=2 \cdots\cdots\text{①}$$

また，C_1 と $C_2 : y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)\cdots\cdots$②は点 Q, R で交わり，PQ は x 軸に平行であることより，$\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ となる。これより，$q=1+\sqrt{2}$ である。そして，C_2 が点 Q を通ることより，②から $k=(1+\sqrt{2})\cdot 1=1+\sqrt{2}$ である。

さらに，C_1，C_2 がともに直線 $y=x$ について対称なので $\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$ となり，$r=1$ である。

(2)　C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 1$$
$$=(1+\sqrt{2})\Big[\log x\Big]_1^{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})$$

(3)　$I=\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ に対して，$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，

$$I=\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4)　円 C_1 の $y\geqq 1$ の部分は，①より $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ となる。

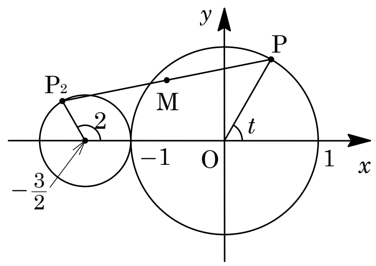
すると，求める回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2dx-\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2}dx$$
$$=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left\{3-(x-1)^2+2\sqrt{2-(x-1)^2}\right\}dx-(1+\sqrt{2})^2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}dx$$
$$=\pi\Big[3x-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_1^{1+\sqrt{2}}+2\pi I-(1+\sqrt{2})^2\pi\Big[-\frac{1}{x}\Big]_1^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\left(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\pi+2\pi\cdot\frac{\pi}{2}-(1+\sqrt{2})^2\left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}+1\right)\pi$$
$$=\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi+\pi^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\pi=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\right)\pi+\pi^2$$

［解 説］

定積分による求積問題です。誘導つきで計算量も標準的です。なお，(2)はよく見かけるものです。

2 ［千葉大］



C_1 は原点中心で半径 1 の円，C_2 は点$\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$中心で半径 $\dfrac{1}{2}$ の円である。このとき，時刻 $t=0$ から $t=2\pi$ において，点 P_1 は C_1 上を点$(1,\ 0)$から反時計まわりに一周，点 P_2 は C_2 上を点$(-1,\ 0)$から反時計まわりに二周することから，$\mathrm{P}_1(\cos t,\ \sin t)$

$$\mathrm{P}_2\left(-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t,\ \frac{1}{2}\sin 2t\right)$$

すると，P_1 と P_2 の中点 $\mathrm{M}(x,\ y)$ は，

$$x=\frac{1}{2}\left(\cos t-\frac{3}{2}+\frac{1}{2}\cos 2t\right)=\frac{1}{4}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t-\frac{3}{4}$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\sin t+\frac{1}{2}\sin 2t\right)=\frac{1}{4}\sin 2t+\frac{1}{2}\sin t$$

さて，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，$f(2\pi-t)=f(t)$，$g(2\pi-t)=-g(t)$

これより，点 M の軌跡について，$0\leqq t\leqq\pi$ の部分と $\pi\leqq t\leqq 2\pi$ の部分は x 軸について対称となる。以下，$0\leqq t\leqq\pi$ の場合について，軌跡の概形を調べる。

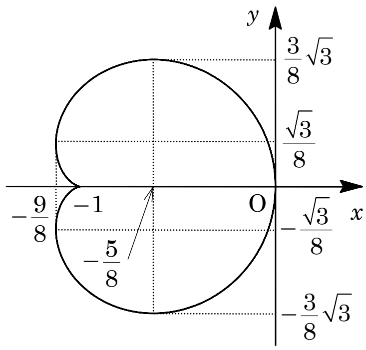
$$\frac{dx}{dt}=-\frac{1}{2}\sin 2t-\frac{1}{2}\sin t=-\sin\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{1}{2}\cos 2t+\frac{1}{2}\cos t=\cos\frac{3}{2}t\cos\frac{t}{2}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
$\dfrac{dx}{dt}$	0	$-$		$-$	0	$+$	0
x	0	↘	$-\dfrac{5}{8}$	↘	$-\dfrac{9}{8}$	↗	-1
$\dfrac{dy}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	0
y	0	↗	$\dfrac{3}{8}\sqrt{3}$	↘	$\dfrac{\sqrt{3}}{8}$	↘	0

t の値の変化に伴う x, y の値の変化は右表のようになる。

さらに，この $0\leqq t\leqq\pi$ における曲線を x 軸対称し，もとの曲線と合わせた曲線が，求める点 M の軌跡である。図示すると，右図のようになる。



また，M の軌跡によって囲まれる図形の面積 S は，$0\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の曲線部分を $y=y_1$，$\dfrac{2}{3}\pi\leqq t\leqq\pi$ の曲線部分を $y=y_2$ とおくと，

$$S=2\int_{-\frac{9}{8}}^{0}y_1\,dx-2\int_{-\frac{9}{8}}^{-1}y_2\,dx$$

$$=2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{0}g(t)f'(t)\,dt-2\int_{\frac{2}{3}\pi}^{\pi}g(t)f'(t)\,dt=2\int_{\pi}^{0}g(t)f'(t)\,dt$$

ここで，$g(t)=\dfrac{1}{4}(\sin 2t+2\sin t)$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2}(\sin 2t+\sin t)$ から，

$$
\begin{aligned}
S&=2\int_{\pi}^{0}-\frac{1}{8}(\sin 2t+2\sin t)(\sin 2t+\sin t)\,dt\\
&=\frac{1}{4}\int_{0}^{\pi}(\sin^2 2t+3\sin 2t\sin t+2\sin^2 t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(1-\cos 4t-3\cos 3t+3\cos t+2-2\cos 2t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\int_{0}^{\pi}(3-\cos 4t-3\cos 3t-2\cos 2t+3\cos t)\,dt\\
&=\frac{1}{8}\Big[\,3t-\frac{\sin 4t}{4}-\sin 3t-\sin 2t+3\sin t\,\Big]_0^{\pi}=\frac{3}{8}\pi
\end{aligned}
$$

［解　説］

パラメータ曲線についての微積分です。方針は明確に決まりますが，この問題のように計算量が多いのが，その特徴です。そのため，対称性を把握して，記述量を減らすことがポイントになります。

3　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大］

(1)　xy 平面上の点$(x_0,\ y_0,\ 0)$を通り，方向ベクトル$(0,\ \sqrt{3},\ -1)$の直線は，

$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ 0)+t(0,\ \sqrt{3},\ -1)\quad (t\text{ は実数})\cdots\cdots\cdots①$$

また，原点を中心とする半径 1 の球は，$x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots②$

①②を連立すると，$x_0{}^2+(y_0+\sqrt{3}t)^2+(-t)^2=1$

$$4t^2+2\sqrt{3}y_0t+x_0{}^2+y_0{}^2-1=0\cdots\cdots\cdots③$$

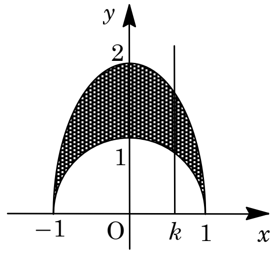
条件より，①と②が$z\geqq 0$すなわち$-t\geqq 0\ (t\leqq 0)$で接することより，

$$D/4=3y_0{}^2-4(x_0{}^2+y_0{}^2-1)=0\cdots\cdots④,\quad -\frac{\sqrt{3}}{4}y_0\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より$4x_0{}^2+y_0{}^2=4$，⑤より$y_0\geqq 0$となり，xy 平面上にできる影の境界線は，

$$4x^2+y^2=4,\quad y\geqq 0$$

すると，球の外の影は右図の網点部となる。そして，直線$x=k$と領域の境界線$4x^2+y^2=4$，$x^2+y^2=1$の交点は，それぞれ$y=\sqrt{4-4k^2}=2\sqrt{1-k^2}$，$y=\sqrt{1-k^2}$であるので，求める$y$座標の範囲は，$\sqrt{1-k^2}\leqq y\leqq 2\sqrt{1-k^2}$

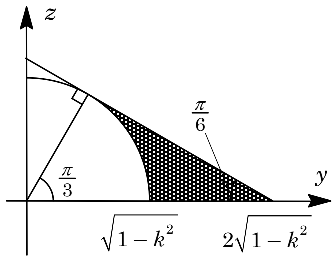


(2)　右図の網点部の面積は，$\dfrac{1}{2}(\pi\cdot 1\cdot 2-\pi\cdot 1^2)=\dfrac{1}{2}\pi$である。

(3)　球の外で光が当たらない部分を平面$x=k$で切断すると，その切り口は右図の網点部となる。

その面積を$S(k)$とおくと，

$$S(k)=\frac{1}{2}\cdot 2\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\sin\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-k^2}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}$$
$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)(1-k^2)$$



よって，球の外で光が当たらない部分の体積Vは，

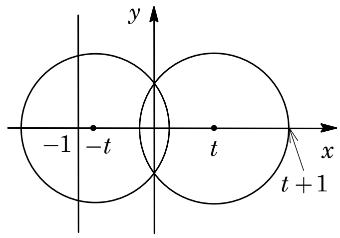
$$V=\int_{-1}^{1}S(k)dk=2\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)\int_0^1(1-k^2)dk=\frac{4}{3}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{6}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{3}-\frac{2}{9}\pi$$

［解 説］

20 年ほど前には，よく出題された平行光源が題材となっています。その後，高校課程では空間図形の分野は薄められ，見かけることが少なくなりました。ただ，今年からの現行課程では，教科書の記述からすると，空間図形の分野は強化されていますので，繰り返す歴史の一つの例かもしれません。

$\boxed{4}$ 　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［大阪大］

(1) 時刻 t において，球 A は中心の座標が $(t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したもの，また球 B は中心の座標が $(-t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x+t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したものである。



さて，球 $A,\ B$ の交線は yz 平面上にあるので，$x\geqq -1$ における $A\cup B$ の体積 $V(t)$ は，

$$V(t)=\pi\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\pi\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$ とすると，

$$I_1=\left[\,x-\frac{1}{3}(x+t)^3\,\right]_{-1}^{0}=1-\frac{1}{3}\{t^3-(-1+t)^3\}=-t^2+t+\frac{2}{3}$$

$$I_2=\left[\,x-\frac{1}{3}(x-t)^3\,\right]_{0}^{t+1}=t+1-\frac{1}{3}(1+t^3)=-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$$

よって，$V(t)=\pi(I_1+I_2)=\pi\left(-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\right)$

(2) $f(t)=-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}$ とおくと，$V(t)=\pi f(t)$ となり，

$$f'(t)=-t^2-2t+2$$

すると，$0\leqq t\leqq 1$ における $f'(t)=0$ の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		↗			↘

ここで，$f(t)$ を $-f'(t)$ で割ると，$f(t)=-f'(t)\left(-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{3}\right)+2t+\dfrac{2}{3}$ から，

$$f(-1+\sqrt{3})=2(-1+\sqrt{3})+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}$$

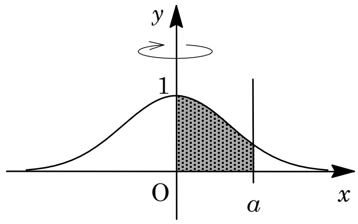
よって，$V(t)$ の最大値は，$\pi f(-1+\sqrt{3})=\left(-\dfrac{4}{3}+2\sqrt{3}\right)\pi$ である。

［解 説］

阪大・理系の定番である立体の体積を求める問題です。ただ，例年に比べ穏やかな内容になっています。

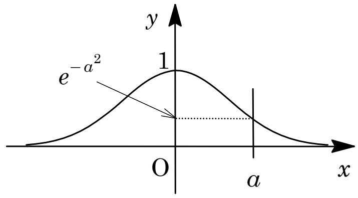
5　　　　［東京工大］

(1)　曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 A の体積 V は，



$$V=\int_0^a 2\pi x\cdot e^{-x^2}\,dx=2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^a$$
$$=-\pi\left(e^{-a^2}-1\right)=\pi\left(1-e^{-a^2}\right)$$

(2)　xy 平面に垂直に z 軸をとり，A について平面 $y=k$ で切断したときの切り口を考えると，



(i)　$0\leqq k\leqq e^{-a^2}$ のとき

切り口は，$x^2+(y-k)^2+z^2=a^2$ かつ $y=k$ より，

$x^2+z^2=a^2\ \ (0\leqq y\leqq e^{-a^2})$………①

(ii)　$e^{-a^2}\leqq k\leqq 1$ のとき

$y=e^{-x^2}$ を変形すると $x^2=-\log y$，$x\geqq 0$ において $x=\sqrt{-\log y}$ となる。

すると，切り口は，$x^2+(y-k)^2+z^2=-\log k$ かつ $y=k$ より，

$x^2+z^2=-\log y\ \ (e^{-a^2}\leqq y\leqq 1)$………②

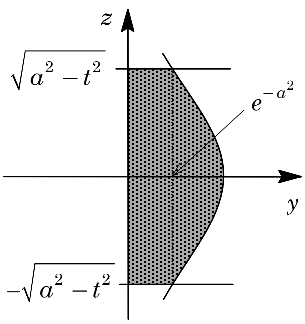
さて，A を平面 $x=t\ (-a\leqq t\leqq a)$ で切断すると，

①より，$0\leqq y\leqq e^{-a^2}$ において，$t^2+z^2=a^2$ から，

$z=\pm\sqrt{a^2-t^2}$

②より，$e^{-a^2}\leqq y\leqq 1$ において，$t^2+z^2=-\log y$ から，

$y=e^{-(z^2+t^2)}$



よって，切り口は右図の網点部となる。この面積を $S(t)$ とすると，$-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2}\leqq\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$ から，

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}}e^{-(z^2+t^2)}\,dz\leqq\int_{-a}^{a}e^{-(z^2+t^2)}\,dz=\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

(3)　(2)より，$V=\displaystyle\int_{-a}^{a}S(t)\,dt\leqq\int_{-a}^{a}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds\Big)dt=\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt$

ここで，$I=\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ とおくと，$\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\Big(\int_{-a}^{a}e^{-s^2}\,ds\Big)dt=I\int_{-a}^{a}e^{-t^2}\,dt=I^2$

よって，$V\leqq I^2$ すなわち $\sqrt{V}\leqq I$ となり，(1)から $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$

［解 説］

回転体 A をいったん立式した後，平面 $x=t$ によって切断し，その切り口を図示するというやや迂遠な解法で記しています。