1　　［北海道大］

a は実数とし，2 つの曲線 $C_1 : y=(x-1)e^x$，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし，e は自然対数の底である。C_1 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における C_1 の接線が C_2 に接するとする。

(1)　a を t で表せ。

(2)　t が実数全体を動くとき，a の極小値，およびそのときの t の値を求めよ。

$\boxed{2}$ ［京都大］

(1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) $a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。

$\boxed{3}$ ［東京工大］

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\lim\limits_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。

$\boxed{4}$　　［名古屋大］

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x\quad(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。

1　　　　［北海道大］

(1)　$C_1 : y=(x-1)e^x$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ ……②に対して，

①より，$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ となり，点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線 l は，

$$y-(t-1)e^t=te^t(x-t),\quad y=te^tx-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots③$$

さて，②③を連立すると，$\dfrac{1}{2e}x^2+a=te^tx-(t^2-t+1)e^t$

$$\frac{1}{2e}x^2-te^tx+a+(t^2-t+1)e^t=0$$

C_2 と l が接することより，$D=t^2e^{2t}-4\cdot\dfrac{1}{2e}\{a+(t^2-t+1)e^t\}=0$ となり，

$$t^2e^{2t+1}-2a-2(t^2-t+1)e^t=0,\quad a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots④$$

(2)　$f(t)=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと，④より，$a=f(t)$ となり，

$$\begin{aligned}f'(t)&=te^{2t+1}+t^2e^{2t+1}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t\\&=(t+t^2)e^{2t+1}-(t^2+t)e^t\\&=t(t+1)e^t(e^{t+1}-1)\end{aligned}$$

ここで，$f'(t)=0$ の解は $t=-1,\ 0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↘		↗

すると，$t=0$ のとき $f(t)$ すなわち a は，極小値 $f(0)=-1$ をとる。

［解 説］

微分法の基本問題です。(1)の結論がややこしい形をしており，微分するには心が重かったのですが，杞憂に終わりました。

２　　　　［京都大］

(1)　$y=e^x+1$ に対して，$y'=e^x$ となり，点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は，

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t),\ \ y=e^tx-(t-1)e^t+1\cdots\cdots\cdots①$$

①が $(a,\ 0)$ を通ることより，$e^ta-(t-1)e^t+1=0$ となり，

$$e^ta=(t-1)e^t-1,\ \ a=-e^{-t}+t-1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと，$f'(t)=e^{-t}+1>0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+t-1)=\infty,\ \ \lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}(-e^{-t}+t-1)=-\infty$$

よって，$f(t)$ は単調増加し，任意の実数値をとり得る。

すなわち，方程式②は任意の a に対してただ 1 つの実数解をもつことより，点 $(a,\ 0)$ を通る接線①は，ただ 1 つ存在する。

(2)　条件を②に適用すると，$a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=e^{-a_{n+1}}+1>1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$a_1=1$ から，$a_n>1+(n-1)\cdot1=n\ \ (n\geqq2)$

よって，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となるので，③より，

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(e^{-a_{n+1}}+1)=1$$

［解 説］

頻出の接線の本数の問題です。(2)では，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ であることを示すのがポイントです。③の不等号に気づくかどうかだけですが。

３　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京工大］

(1)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$x = t^2\cos t$，$y = t^2\sin t$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = t^2(\cos t,\ \sin t)$

$$\frac{dx}{dt} = 2t\cos t - t^2\sin t,\ \frac{dy}{dt} = 2t\sin t + t^2\cos t$$

これより，$\vec{v} = t(2\cos t - t\sin t,\ 2\sin t + t\cos t)$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v} = t^3(2\cos^2 t - t\cos t\sin t + 2\sin^2 t + t\sin t\cos t) = 2t^3$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| = t^2,\ |\vec{v}| = t\sqrt{(2\cos t - t\sin t)^2 + (2\sin t + t\cos t)^2} = t\sqrt{t^2+4}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ $(0 \leqq \theta \leqq \pi)$ とすると，

$$\cos\theta(t) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|} = \frac{2t^3}{t^3\sqrt{t^2+4}} = \frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

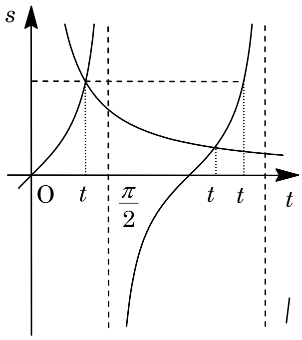
よって，$t\to\infty$ のとき $\cos\theta(t)\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t) = \frac{\pi}{2}$ である。

(2)　$t > 0$ において，$\vec{v}$ が y 軸に平行なるのは，$\dfrac{dx}{dt} = 0$ から $2\cos t - t\sin t = 0$

すなわち，$2\cos t = t\sin t$ から，$\cos t \neq 0$ となり，

$$\tan t = \frac{2}{t}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$の解は，$s = \tan t$ と $s = \dfrac{2}{t}$ の交点の t 座標として表せる。そして，正で最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とすると右図のようになる。



ここで，$t_3 = t_1 + \pi$ とおくと，$t_2 < t_3$ となるので，

$$t_2 - t_1 < t_3 - t_1 = \pi$$

［解　説］

速度ベクトルが題材の基本的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，いちばん感覚的に理解できるもので記載しました。

4　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大］

(1)　$f(x)=x^{-2}2^x=\dfrac{2^x}{x^2}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{2^x\log 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2^x(x\log 2-2)}{x^3}=\frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2-2}{x}$$

これより，$f'(x)>0$ となる条件は，$\dfrac{x\log 2-2}{x}>0$ すなわち $x(x\log 2-2)>0$ から，$x<0$，$\dfrac{2}{\log 2}<x$ である。

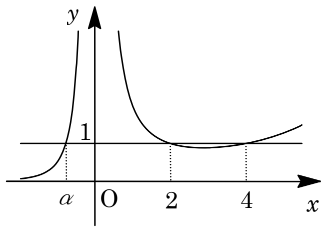
(2)　$x=0$ は方程式 $2^x=x^2$ を満たさないので，この方程式は，$x^{-2}2^x=1$ すなわち $f(x)=1$ と同値である。

さて，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to 0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

さらに，$f(2)=f(4)=1$ に注意して，$y=f(x)$ と $y=1$ のグラフをかくと右図のようになる。



したがって，$f(x)=1$ すなわち $2^x=x^2$ は，相異なる3個の実数解 $x=\alpha$，2，4をもつ。

(3)　まず，方程式 $2^x=x^2$ の解 $x=2$，4は有理数なので，もう1つの負の解 $x=\alpha$ について有理数かどうかを調べる。

そこで，α が有理数と仮定し，$\alpha=-\dfrac{n}{m}$ ($m,\ n$ は互いに素な自然数)とおくと，

$$2^{-\frac{n}{m}}=\left(-\frac{n}{m}\right)^2,\ 2^{-n}=\left(\frac{n^2}{m^2}\right)^m,\ \frac{1}{2^n}=\frac{n^{2m}}{m^{2m}}$$

$m,\ n$ は互いに素より，$n^{2m}=1$ ……①，$m^{2m}=2^n$ ……②

①より $n=1$ となり，②に代入すると $m^{2m}=2$ であるが，この式を満たす自然数 m は存在しない。これより，α は有理数でない。

以上より，方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものは $x=2$，4である。

［解　説］

微分の応用に関する問題です。(2)は(1)を誘導とした解法ですが，これを無視して直接的に $y=2^x$ と $y=x^2$ のグラフを描くことによって示しても構いません。実際，$x=2$，4という解はこちらの方法で見つけていますので。