第 3 講　隣接 2 項間型の漸化式(1)

イントロ　次の数列のはじめの 5 項を求めよ。($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$)

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+1$$

解説　$a_1=1$，$a_2=2a_1+1=3$，$a_3=2a_2+1=7$，$a_4=2a_3+1=15$，$a_5=2a_4+1=31$

まず，階差数列は，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=4$，$a_4-a_3=8$，$a_5-a_4=16$ となり，公比 2 の等比数列と予測できるので, Point 2 と同じ考え方で,

$$a_5=a_1+(2+4+8+16)=a_1+(2+2^2+2^3+2^4)=31$$

また，$a_1+1=2$，$a_2+1=4$，$a_3+1=8$，$a_4+1=16$，$a_5+1=32$ という規則性に気付いたときには，数列$\{a_n\}$の各項に 1 を加えた新しい数列を設定するとよい。つまり，$b_n=a_n+1$ とおき，数列$\{b_n\}$が公比 2 の等比数列と考え，

$$b_5=2\cdot 2^4=32\qquad \text{すなわち}\qquad a_5=b_5-1=32-1=31$$

計算の容易な後者の立場は，与えられた漸化式を $b_{n+1}=2b_n$，言い換えると $a_{n+1}+1=2(a_n+1)$ と変形することに等しく，等比型の基本タイプ

$$\boldsymbol{a_{n+1}=f(n)a_n+0}\quad \text{(ただし} f(n) \text{が定数の場合)}$$

を目標とした式変形であることがわかる。これは，もとの漸化式の定数項$+1$を a_n と a_{n+1} に振り分けているとみなすこともできる。一般化すると, Point 5 になる。

Point 5

$a_1=a,\ \ a_{n+1}=pa_n+q\ \ (p\neq 1,\ q\neq 0)$ で定められた数列

式変形の目標を，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ とし，$b_n=a_n-\alpha$ とおくと，

$$b_{n+1}=pb_n$$

これより，数列$\{b_n\}$は初項$b_1=a_1-\alpha$，公比 p の等比数列となる。

なお，目標の式を展開して $a_{n+1}=pa_n-p\alpha+\alpha$ とし，もとの漸化式と係数を比較すると，$-p\alpha+\alpha=q$ すなわち $\alpha=p\alpha+q$ より，α の値が求まる。

《注》漸化式 $a_{n+1}=pa_n+q$ ……①を公比 p の等比数列の漸化式と関連づけるには，定数項 q を新たに設定した数列の漸化式では 0 にする必要がある。その 1 つの方法として，①を満たす特殊な数列を利用するという手がある。

定数の処理ということから，これを定数数列 $a_n=\alpha$ とする。①に代入すると，

$$\alpha=p\alpha+q\ \cdots\cdots②$$

①，②の両辺の差をとると，目標の式 $a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$ が得られる。

例題 5　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=2a_n+1$$

解　$a_{n+1}=2a_n+1\cdots\cdots$①を満たす 1 つの数列を $a_n=\alpha$ とおく。

①に代入して，$\alpha=2\alpha+1$ より，$\alpha=-1$ となり，

$$-1=2\cdot(-1)+1\cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$a_{n+1}+1=2(a_n+1)$

$b_n=a_n+1$ とおくと $b_{n+1}=2b_n$ となり，数列$\{b_n\}$は公比 2 の等比数列であるので，

$$b_n=b_1\cdot2^{n-1}=(a_1+1)2^{n-1}=2\cdot2^{n-1}=2^n$$

したがって，$a_n=b_n-1=2^n-1$

《注》イントロのように $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおき，階差数列を利用すると，

$$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=(2a_{n+1}+1)-(2a_n+1)=2(a_{n+1}-a_n)=2b_n$$

よって，$b_n=b_1\cdot2^{n-1}=(a_2-a_1)2^{n-1}=2\cdot2^{n-1}=2^n$

$n\geqq2$ で，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}2^k=1+\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{2-1}=2^n-1$ （$n=1$ のときも成立する）

また，等差型の基本タイプ

$$\boldsymbol{a_{n+1}=1\times a_n+f(n)}$$

を目標とした式変形は次のようになるが，計算はさらに複雑になる。

①の a_n の係数 2 を新たに設定した数列の漸化式では 1 にすることを考えて，両辺を 2^{n+1} で割ると，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{2a_n}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+1}}\quad\text{すなわち}\quad\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくと，$b_{n+1}=b_n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

$n\geqq2$ で，$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}=\frac{a_1}{2^1}+\frac{\frac{1}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n$

この式は $n=1$ のときも成立する。

よって，$a_n=2^nb_n=2^n\left\{1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}=2^n-1$

練習 5　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=6,\ a_{n+1}=5a_n-4$

(2)　$a_1=0,\ 2a_{n+1}-a_n-2=0$

イントロ 次の数列のはじめの5項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\ \ a_{n+1}=2a_n-n$$

解説 $a_1=3$，$a_2=2a_1-1=5$，$a_3=2a_2-2=8$，$a_4=2a_3-3=13$，

$a_5=2a_4-4=22$

まず，階差数列は，$a_2-a_1=2$，$a_3-a_2=3$，$a_4-a_3=5$，$a_5-a_4=9$ となるが，これだけでは規則性が予測できない。もう一度，階差数列をとるという手もあるが，ここでは Point 5 と同じように，新たに設定した数列$\{b_n\}$の漸化式を$b_{n+1}=2b_n$とすることを考える。つまり，等比型の基本タイプ

$$\boldsymbol{a_{n+1}=f(n)a_n+0}\ \ (\text{ただし}\ f(n)\ \text{が定数の場合})$$

の形になるように，漸化式の$-n$の項をa_nとa_{n+1}に振り分けるわけである。

さて，$-n$はnの1次式なので，Point 5 と異なり，1次式$\alpha n+\beta$を用いて振り分ける。一般的には，次の Point 6 のようになる。

Point 6

$a_1=a$，$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ $(p\neq1)$ で定められた数列

式変形の目標を$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$とし，

$b_n=a_n-(\alpha n+\beta)$とおくと，$b_{n+1}=pb_n$となる。

これより，数列$\{b_n\}$は初項$b_1=a_1-\alpha-\beta$，公比pの等比数列である。

なお，目標の式を展開し，もとの漸化式と係数を比較すると，

$$-p(\alpha n+\beta)+\alpha(n+1)+\beta=qn+r,\ \ \alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+qn+r$$

となり，この式よりα，βを求める。

《注》漸化式$a_{n+1}=pa_n+qn+r$ ……①を公比pの等比数列の漸化式と関連づけるには，1次の項$qn+r$を新たに設定した数列の漸化式では0にする必要がある。その方法として，Point 5 と同じく，①を満たす特殊な数列を利用してみる。

1次式の処理ということから，これを等差数列$a_n=\alpha n+\beta$とする。

①に代入すると，

$$\alpha(n+1)+\beta=p(\alpha n+\beta)+qn+r\ \cdots\cdots②$$

①，②の両辺の差をとると，目標の式

$$a_{n+1}-\{\alpha(n+1)+\beta\}=p\{a_n-(\alpha n+\beta)\}$$

が得られる。

例題 6　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

$$a_1=3,\ \ a_{n+1}=2a_n-n$$

解　$a_{n+1}=2a_n-n$ ……①を満たす 1 つの数列を $a_n=\alpha n+\beta$ とおく。

①に代入して，$\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)-n$ より，

$$\alpha n+\alpha+\beta=(2\alpha-1)n+2\beta$$

すべての n に対して成り立つ条件は，$\alpha=2\alpha-1$，$\alpha+\beta=2\beta$

すると，$\alpha=1$，$\beta=1$ となり，

$$(n+1)+1=2(n+1)-n \cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$a_{n+1}-\{(n+1)+1\}=2\{a_n-(n+1)\}$

$b_n=a_n-(n+1)$ とおくと $b_{n+1}=2b_n$ となり，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列なので，

$$b_n=b_1\cdot 2^{n-1}=(a_1-1-1)2^{n-1}=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

したがって，$a_n=b_n+(n+1)=2^{n-1}+n+1$

《注》イントロのように $b_n=a_{n+1}-a_n$ とおき，階差数列を利用すると，

$$b_{n+1}=a_{n+2}-a_{n+1}=\{2a_{n+1}-(n+1)\}-(2a_n-n)$$
$$=2(a_{n+1}-a_n)-1=2b_n-1 \cdots\cdots\cdots①$$

これより，数列 $\{b_n\}$ の漸化式は Point 5 のタイプになっていることがわかる。

よって，①を満たす 1 つの数列を $b_n=\alpha$ とおく。

①に代入して，$\alpha=2\alpha-1$ より，$\alpha=1$ となり，

$$1=2\cdot 1-1 \cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$b_{n+1}-1=2(b_n-1)$

$c_n=b_n-1$ とおくと $c_{n+1}=2c_n$ となり，数列 $\{c_n\}$ は公比 2 の等比数列であるので，

$$c_n=c_1\cdot 2^{n-1}=(b_1-1)2^{n-1}=(a_2-a_1-1)2^{n-1}=1\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$$

したがって，$b_n=c_n+1=2^{n-1}+1$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(2^{k-1}+1)=3+\frac{1\cdot(2^{n-1}-1)}{2-1}+(n-1)=2^{n-1}+n+1$$

この式は，$n=1$ のときも成立する。

このように，簡単な漸化式にもかかわらず，かなりの計算量が必要です。

練習 6　次の数列の一般項を求めよ。$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

(1)　$a_1=1,\ \ a_{n+1}=3a_n+n-2$

(2)　$a_1=1,\ \ a_{n+1}=-a_n+2n$

問題 5

$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3a_n+4}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n=\dfrac{3a_n-1}{a_n+1}$ とおいて，b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

問題 6

数列 $\{a_n\}$ は，$a_1=1$，$a_{n+1}=2a_n+n^2$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ により定義されている。このとき，$b_n=a_n+n^2+2n+3$ とおく。

(1) b_{n+1} を b_n で表せ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ を利用して，一般項 a_n を求めよ。

第 3 講　隣接 2 項間型の漸化式（1）

練習 5

(1)　$a_{n+1}=5a_n-4$ より，$a_{n+1}-1=5(a_n-1)$

$$a_n-1=(a_1-1)\cdot 5^{n-1}=5\cdot 5^{n-1}=5^n$$

よって，$a_n=5^n+1$

(2)　$2a_{n+1}-a_n-2=0$ より $a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+1$ となり，$a_{n+1}-2=\frac{1}{2}(a_n-2)$

$$a_n-2=(a_1-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-2\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

よって，$a_n=2-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$

練習 6

(1)　$a_{n+1}=3a_n+n-2$ より，$a_{n+1}-\left\{-\frac{1}{2}(n+1)+\frac{3}{4}\right\}=3\left\{a_n-\left(-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)\right\}$

$$a_n-\left(-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}\right)=\left\{a_1-\left(-\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\right)\right\}\cdot 3^{n-1}=\frac{3}{4}\cdot 3^{n-1}=\frac{1}{4}\cdot 3^n$$

よって，$a_n=\frac{1}{4}\cdot 3^n-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}$

(2)　$a_{n+1}=-a_n+2n$ より，$a_{n+1}-\left\{(n+1)-\frac{1}{2}\right\}=-\left\{a_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)\right\}$

$$a_n-\left(n-\frac{1}{2}\right)=\left\{a_1-\left(1-\frac{1}{2}\right)\right\}\cdot(-1)^{n-1}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

よって，$a_n=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}+n-\frac{1}{2}$

問題 5

(1)　$b_n=\dfrac{3a_n-1}{a_n+1}$ より，$a_nb_n+b_n=3a_n-1$ となり，$a_n=\dfrac{-b_n-1}{b_n-3}$ ………①

①を $a_{n+1}=\dfrac{2a_n+1}{3a_n+4}$ に代入して，

$$\frac{-b_{n+1}-1}{b_{n+1}-3}=\frac{2\cdot\dfrac{-b_n-1}{b_n-3}+1}{3\cdot\dfrac{-b_n-1}{b_n-3}+4}=\frac{2(-b_n-1)+(b_n-3)}{3(-b_n-1)+4(b_n-3)}=\frac{-b_n-5}{b_n-15}$$

$(-b_{n+1}-1)(b_n-15)=(b_{n+1}-3)(-b_n-5)$ より，まとめて，$b_{n+1}=\frac{1}{5}b_n$ ………②

(2)　②より，$b_n=b_1\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\dfrac{3a_1-1}{a_1+1}\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{5}\right)^{n-1}$

(3) ①より，$a_n = \dfrac{-\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} - 1}{\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1} - 3} = \dfrac{-1-5^{n-1}}{1-3\cdot 5^{n-1}}$

問題 6

(1) $b_n = a_n + n^2 + 2n + 3$ より，$a_n = b_n - (n^2 + 2n + 3)$ ………①

①を $a_{n+1} = 2a_n + n^2$ に代入して，

$$b_{n+1} - \{(n+1)^2 + 2(n+1) + 3\} = 2\{b_n - (n^2 + 2n + 3)\} + n^2$$

まとめて，$b_{n+1} = 2b_n$ ………②

(2) ②より，$b_n = b_1 \cdot 2^{n-1} = (a_1 + 1^2 + 2 + 3)\cdot 2^{n-1} = 7 \cdot 2^{n-1}$

①より，$a_n = 7\cdot 2^{n-1} - n^2 - 2n - 3$