《2018 入試対策》

東京工業大学

数　学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された東京工業大学（前期日程）の数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 東工大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

１　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

２　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 水平な平面 α の上に半径 r_1 の球 S_1 と半径 r_2 の球 S_2 が乗っており，S_1 と S_2 は外接している。

(1) S_1，S_2 が α と接する点をそれぞれ P_1，P_2 とする。線分 P_1P_2 の長さを求めよ。

(2) α の上に乗っており，S_1 と S_2 の両方に外接している球すべてを考える。それらの球と α の接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。[2016]

2 a を正の定数とする。原点を O とする座標平面上に定点 $A = A(a,\ 0)$ と，A と異なる動点 $P = P(x,\ y)$ をとる。次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し，$\dfrac{AQ}{AP} \leqq 2$ ならば $\dfrac{QP}{OQ} \leqq \dfrac{AP}{OA}$

を満たす P からなる領域を D とする。D を図示せよ。[2010]

3 平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，α $\left(ただし 0 < \alpha < \dfrac{\pi}{3}\right)$ である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点 P，L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2) 2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。[2008]

4 実数 x, y が $x^2 + y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1) $s = x + y$，$t = xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2) 負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy + m(x + y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。[2005]

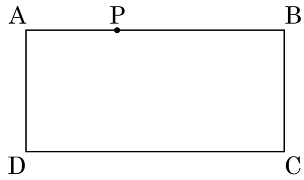
5 $a > 0$ とし，x, y が 4 つの不等式

$$x \geqq 0,\ \ y \geqq 0,\ \ 2x + 3y \leqq 12,\ \ ax + \left(4 - \frac{3}{2}a\right)y \leqq 8$$

を同時にみたしているとする。このとき $x + y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ。[1998]

■ 図形と計量

1　a を 1 以上の実数とする。図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている。ただし $AD=1$，$AB=a$ である。P を辺 AB 上の点とし，$AP=x$ とする。頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を 1 回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする。

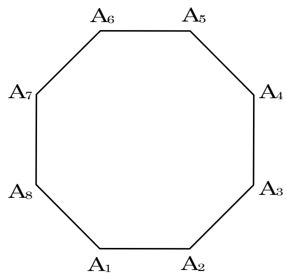


(1)　S を a と x で表せ。

(2)　$a=1$ とする。P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ。

なお，配布された白紙を自由に使ってよい。（白紙は回収しない）　[2017]

2　1 辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。



(1)　△PQR の面積の最大値を求めよ。

(2)　Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR=90^\circ$ となるとき△PQR の面積の最大値を求めよ。　[2007]

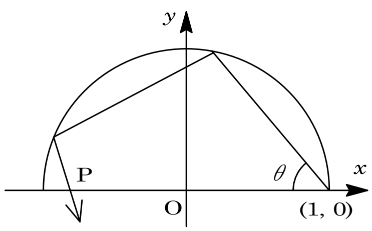
3　平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a)　3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b)　3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。　[2006]

4　1 辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を P とする。P が線対称な五角形になるように折るとき，P の面積の最小値を求めよ。　[2001]

5　$(x,\ y)$ 平面において，半円：$x^2+y^2=1$，$y\geqq 0$ の内側が鏡になっているとする。図のように，定点 $(1,\ 0)$ より，x 軸となす角 θ で光線が発射され，2 回半円に反射したのち，x 軸上の点 P を通過したとする。



(1)　このような状況が起こるための θ の範囲を求めよ。

(2)　P の座標を θ を用いて表せ。

(3)　θ が(1)の範囲を動くときの P の動く範囲を求めよ。　[2000]

6　3 辺の長さが 1，1，a である三角形の面積を，周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する。それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。　[1999]

7　R を隣りあう 2 辺の長さ $a,\ b$ が $2a>b>a$ をみたす長方形とし，A を次の性質(P)を持つ半径 x の円とする。

(P)　R の内部にあって隣りあう 2 辺にだけ接する。

(1)　性質(P)を持つ円で円 A に外接するものが 4 つ存在するために，円 A の半径 x がみたすべき条件を $a,\ b$ を使って表せ。

(2)　x が(1)の条件をみたすとき，円 A に外接する 4 つの円のうち 2 番目に大きい円を B とする。x が変化するとき円 A と円 B の面積の和の最小値を求めよ。　[1998]

■ ベクトル

1　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする。頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H′ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。このとき，$p,\ q,\ r$ および $s,\ t$ を x の式で表せ。

(2)　四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ。また，x が変化するときの V の最大値を求めよ。　[2015]

2　辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D，辺 OC の中点を E とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ。　[2012]

3 空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を，それぞれ K, L, M, N とする。

(1) $4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

(2) 四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3) 辺 AC の中点を P とし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで，四面体 PKLN の体積を求めよ。 [2006]

4 △ABC において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x:1-x$ $(0\leqq x<1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y:1-y$ $(0\leqq y<1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき，R が△AMN に含まれるような $(x,\ y)$ 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ。（ただし，辺 AB，辺 AC を $0:1$ の比に内分する点とは，ともに点 A のこととする） [2003]

5 空間内にある 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC で，A の座標が $(0,\ 0,\ 1)$ であり，B と C の z 座標が等しいものを考える。点 $\mathrm{L}(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$ にある光源が xy 平面上に作るこの三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。 [2002]

■ 整数と数列

1 次の条件(i), (ii)をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

(i) N の正の約数は 12 個。

(ii) N の正の約数を小さい方から順に並べたとき，7 番目の数は 12。

ただし，N の約数には 1 と N も含める。 [2017]

2 n を 2 以上の自然数とする。

(1) n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2) n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

[2016]

3　3 以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\ \ b_n=\frac{n^2-1}{8}$$

(1)　a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

(2)　a_n-b_n は 4 の倍数であることを示せ。　[2014]

4　2 次方程式 $x^2-3x+5=0$ の 2 つの解 α，β に対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$ はすべての正の整数 n について 5 の整数倍になることを示せ。　[2013]

5　$\log_{10}3=0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99}3^n$ の桁数を求めよ。　[2012]

6　実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\,\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるものは何個あるか。　[2012]

7　a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*)\quad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものを a_1，a_2，a_3，…とする。ここに $[\ \ ]$ はガウス記号で，実数 u に対し，$[\,u\,]$ は u 以下の最大の整数を表す。

(1)　$a=7$，8，9 の各々について $(*)$ の解があるかどうかを判定し，ある場合は解 x を求めよ。

(2)　a_1，a_2 を求めよ。

(3)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。　[2010]

8　N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m，n からなる組 $(m,\ n)$ で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。　[2009]

9　p を素数，n を 0 以上の整数とする。

(1)　m は整数で $0\leqq m\leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で，p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2)　1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x，y に対し，その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。　[2007]

10　e を自然対数の底とし，数列 $\{a_n\}$ を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n\, dx \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(1)　$n \geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$

(2)　$n \geqq 1$ に対し，$a_n > a_{n+1} > 0$ となることを示せ。

(3)　$n \geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3\cdot 5\cdot \cdots \cdot (2n-1)}{4\cdot 6\cdot \cdots \cdot (2n)}(e-2)$$ [2005]

11　2 辺の長さの比が $1 : a\ (a>1)$ の長方形がある。この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ，再び同じ要領で正方形を取り去り，残りが正方形でない限りこの操作を続ける。たとえば，$a=3$，$a=\dfrac{3}{2}$ の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

(1)　3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。

(2)　n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。 [2003]

■ 確率

1　n は正の整数とし，文字 a，b，c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。A_n の要素に対し次の条件(＊)を考える。

(＊)　文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を 1 つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1)　A_n から要素を 1 つ選ぶとき，それが条件(＊)を満たす確率 $P(n)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 12$ とする。A_n から要素を 1 つ選んだところ，これは条件(＊)を満たし，その 7 番目の文字は c であった。このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ。 [2017]

2　△ABC を 1 辺の長さ 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り，出た目を順に X, Y, Z とする。出た目に応じて，点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たすようにとる。

(1)　△PQR が正三角形になる確率を求めよ。

(2)　点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C, Q, P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A, R, Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする。T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

(3)　△PQR の面積を S とし，S のとり得る値の最小値を m とする。m の値および $S=m$ となる確率を求めよ。　[2016]

3　6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。　[2013]

4　1 から 6 までの目がそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ。　[2012]

5　1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1)　$p(8)$ を求めよ。

(2)　正の整数 k に対し，$p(3k+2)$ を k で表せ。　[2010]

6　いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が $\dfrac{1}{6}$ とは限らないとする。このサイコロを 2 回振ったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1)　$P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2}-\dfrac{3}{2}P$ であることを示せ。　[2008]

7 3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする。このとき次の操作を n 回くり返す。まず，P を投げて表が出れば Q を，裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて，表が出れば赤玉を，裏が出れば白玉をつぼの中に入れる。

(1) n 回ともコイン Q を選び，つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2) つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3) $n=2004$，$p=\dfrac{1}{2}$，$q=\dfrac{1}{2}$，$r=\dfrac{1}{5}$ のとき，つぼの中に何個の赤玉が入っていることが最も起こりやすいかを求めよ。 [2004]

8 箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき，はじめから j 回目 $(j=1,\ \cdots,\ k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし，X_1，$\cdots$，X_k のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1) $N \geqq 3$ のとき $P_N(1)$，$P_N(2)$，$P_N(3)$ を N で表せ。

(2) $P_3(4)$，$P_3(5)$ を求めよ。

(3) $k \leqq N$ のとき，$P_N(k)$ を N と k で表せ。 [2001]

■ 論証

1 n を相異なる素数 p_1，p_2，$\cdots$，p_k $(k \geqq 1)$ の積とする。a, b を n の約数とするとき, a, b の最大公約数を G, 最小公倍数を L とし，$f(a,\ b)=\dfrac{L}{G}$ とする。

(1) $f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ。

(2) $f(a,\ b)=b$ ならば，$a=1$ であることを示せ。

(3) m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする。$S(f(a,\ b))+S(a)+S(b)$ が偶数であることを示せ。 [2015]

■ 複素数

1　実数 $a,\ b,\ c$ に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また，複素数平面内の単位円周から 2 点$1,\ -1$ を除いたものを T とする。

(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点$(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。　[2017]

2　(1)　極座標表示された複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2$ を $r,\ \theta,\ n$ を用いて表せ。

(3)　複素数 z が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすならば，すべての自然数 n に対し，

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$$

が成り立つことを示せ。　[2000]

3　複素平面上の点列 A_n $(n\geqq 0)$ が複素数列 a_n+ib_n (a_n，b_n は実数，i は虚数単位)を表すとする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=a_\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=b_\infty$ がともに存在するとき，複素数 $a_\infty+ib_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　複素平面上の点列 P_n $(n\geqq 0)$ を次のように定める。P_0 は 0 を表す点とし，P_1 は $1+i$ を表す点とする。以下 $n\geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し，長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2)　点列 Q_n $(n\geqq 0)$ は次のように定める。Q_0 は 0 を表す点とし，Q_1 は $z=x+iy$ を表す点とする。以下 $n\geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し，長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と(1)の P_∞ が一致するとき z を求めよ。　[1999]

■ 曲線

1　$a,\ b$ を正の実数とし，円 $C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。

(1)　C_1 が C_2 に内接するための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

2　楕円 $\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。　[2002]

3　楕円 $C : \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる。C 上の点 $\mathrm{B}(p,\ q)$ $(q>0)$ における接線 l と線分 BA のなす角が，l と直線 $x=p$ のなす角に等しいとする。ただし 2 直線のなす角は鋭角の方をとることにする。

(1)　座標 p を a で表せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a \to 1} p$ および $\displaystyle\lim_{a \to \infty} \frac{p}{a}$ を求めよ。　[1998]

■ 極限

1　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。また，数列 $\{b_n\}$ を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　すべての n に対して，不等式 $b_n \leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$ が成り立つことを示せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n \to \infty} b_n$ を求めよ。　[2015]

2　正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n \to \infty} S_n$ を求めよ。　[2013]

3　実数 x に対し, x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a, b を正の実数とするとき, 極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するような実数 c の最大値と, そのときの極限値を求めよ。　[2008]

4　(1)　整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ と正数 a_n に対して, $f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ とおく。2 つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x)$, $y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0, $n\geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x)$, $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。　[2007]

5　n を自然数とする。

(1)　次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

(2)　関数 $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき, $\displaystyle\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$ および $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ を示せ。

(3)　(2)の x_n に対して, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n\log n$ を求めよ。　[2002]

6　n は 2 以上の自然数とする。関数 $y=e^x$ ……(ア), $y=e^{nx}-1$ ……(イ)について以下の問いに答えよ。

(1)　(ア)と(イ)のグラフは第 1 象限においてただ一つの交点をもつことを示せ。

(2)　(1)で得られた交点の座標を $(a_n,\ b_n)$ としたとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

(3)　第 1 象限内で(ア)と(イ)のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n$ を求めよ。　[2000]

7　(1)　$f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ とし, t を実数とする。すべての自然数 n に対し実数 $f_n(t)$ が

$$f_n(t)=f(f_{n-1}(t)),\quad n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \text{ただし } f_0(t)=t$$

によって帰納的に定義できるための t の条件を求めよ。

(2)　$a\geqq 1$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt$ を求めよ。　[1998]

■ 微分法

1　a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする。

(1)　点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ。

(2)　Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする。P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ。　[2016]

2　xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2)　$\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。　[2015]

3　$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$(*)\qquad \frac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つことを示せ。

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式$(*)$が成り立つような a の範囲を求めよ。

[2014]

4　k を定数とするとき，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数を求めよ。

[2013]

5　3 次関数 $y=x^3-3x^2+2x$ のグラフを C，直線 $y=ax$ を l とする。

(1)　C と l が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲内にあるとき，C と l によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。　[2012]

6　定数 k は $k>1$ を満たすとする。xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点 X, Y が $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ を満たしながら動いている。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と線分 OX, OY が交わる点をそれぞれ P, Q とするとき，△OPQ の面積の最大値を k を用いて表せ。　[2011]

7　正の整数 $a,\ b$ に対し，$x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1)　接点の座標 $(s,\ t)$ を a を用いて表せ。また，b を a の関数として表せ。

(2)　$0<h<s$ を満たす h に対し，直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a$，$y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\displaystyle\lim_{h\to 0}A(h)$ を a で表せ。　[2008]

8　以下の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b$ を正の定数とし，$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ とおく。$t>0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2)　m を正の定数とし，xy 座標平面において条件

　(a)　$y>x>0$　　(b)　すべての $t>0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^x-\log t\geqq m$

を満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を D とする。D の概形を図示せよ。

(3)　(2)の領域 D の面積を求めよ。　[2006]

9　$a,\ b$ を正の実数とする。

(1)　区間 $a<x$ における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2)　区間 $a<x$ における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。　[2004]

10　関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\quad f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1)　$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2)　$f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。　[2003]

11　1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし，高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り，その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。　[2000]

12　正の実数 a, b, p に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ。　[1999]

13　斜辺の長さが 1 である正 n 角錐を考える。つまり，底面を正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$，頂点を O と表せば $\mathrm{OA}_1=\mathrm{OA}_2=\cdots=\mathrm{OA}_n=1$ である。そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする。

(1)　C_n の体積 V_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n$ を求めよ。　[1999]

■ 積分法

1　実数 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ の最大値と最小値を求めよ。　[2017]

2　n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\quad a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\quad(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1)　a_2 および a_3 を求めよ。

(2)　一般項 a_k を求めよ。

(3)　$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。　[2012]

3　実数 x に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\cos t-x\sin 2t|\,dt$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。　[2011]

4　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1)　$0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解をもつことを示せ。

(2)　$J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき, J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3)　(2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。　[2010]

5　以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx$ を求めよ。

(2)　次の不等式を示せ。

$$0\leqq\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

(3)　a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[a]$ で表す。$[a]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt-1\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

[2006]

6　次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$，$g(x)$ を連続な偶関数, m を正の整数とするとき,

$$\int_0^{m\pi}f(\sin x)g(\cos x)dx=m\int_0^{\pi}f(\sin x)g(\cos x)dx$$

を証明せよ。

(2)　正の整数 m, n が $m\pi\leqq n<(m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx\leqq\int_0^{1}\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx\leqq\frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

を証明せよ。

(3)　極限値 $\lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。　[2004]

7　実数 a に対し，積分 $f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}|\sin x-a\cos x|dx$ を考える。$f(a)$ の最小値を求めよ。　[2002]

8　$a>0,\ t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\int_0^a \left| e^{-x}-\frac{1}{t} \right| dx$ を考える。

(1)　a を固定したとき, t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2)　$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。　[2001]

9　2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt+\left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1} \right)e=(2n-1)!$$

を示せ。ここで e は自然対数の底である。　[1999]

■ 積分の応用

1　次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする。

$$x=3\cos t-\cos 3t,\quad y=3\sin t-\sin 3t$$

ただし, $0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ である。

(1)　$\frac{dx}{dt}$ および $\frac{dy}{dt}$ を計算し, C の概形を図示せよ。

(2)　C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2016]

2　$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸, y 軸, および直線 $x=a$ で囲まれた図形を, y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

(1)　A の体積 V を求めよ。

(2)　点 $(t,\ 0)\ (-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき, 不等式 $S(t)\leqq\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3)　不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ を示せ。　[2015]

3　点$\mathrm{P}(t,\ s)$が$s=\sqrt{2}t^2-2t$を満たしながらxy平面上を動くときに，点Pを原点を中心として45°回転した点Qの軌跡として得られる曲線をCとする。さらに，曲線Cとx軸で囲まれた図形をDとする。

(1)　点$\mathrm{Q}(x,\ y)$の座標を，tを用いて表せ。

(2)　直線$y=a$と曲線Cがただ1つの共有点をもつような定数aの値を求めよ。

(3)　図形Dをy軸のまわりに1回転してできる回転体の体積Vを求めよ。　[2014]

4　xy平面上の曲線$C:y=x^3+x^2+1$を考え，C上の点$(1,\ 3)$をP_0とする。$k=1$，2，3，…に対して，点$\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$における$C$の接線と$C$の交点のうちで$\mathrm{P}_{k-1}$と異なる点を$\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$とする。このとき，$\mathrm{P}_{k-1}$と$\mathrm{P}_k$を結ぶ線分と$C$によって囲まれた部分の面積を$S_k$とする。

(1)　S_1を求めよ。

(2)　x_kをkを用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$を求めよ。　[2014]

5　xyz空間に4点$\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$をとる。四面体PABCの$x^2+y^2\geqq 1$を満たす部分の体積を求めよ。　[2012]

6　平面上に1辺の長さが1の正方形DおよびDと交わる直線があるとする。この直線を軸にDを回転して得られる回転体について以下の問いに答えよ。

(1)　Dと同じ平面上の直線lはDのどの辺にも平行でないものとする。軸とする直線はlと平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線はDと唯1点で交わることを示せ。

(2)　Dと交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ。　[2011]

7　点Pから放物線$y=\dfrac{1}{2}x^2$へ2本の接線が引けるとき，2つの接点をA，Bとし，線分PA，PBおよびこの放物線で囲まれる図形の面積をSとする。PA，PBが直交するときのSの最小値を求めよ。　[2009]

8 xyz 空間の原点と点 $(1,\ 1,\ 1)$ を通る直線を l とする。

(1) l 上の点 $\left(\dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3},\ \dfrac{t}{3}\right)$ を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式 $0 \leqq y \leqq x(1-x)$ の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。 [2009]

9 正数 a に対して，放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を，A を中心に $-30°$ 回転した直線を l とする。l と $y=x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a,\ 0)$ を C，原点を O とする。

(1) l の式を求めよ。

(2) 線分 OC，CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$，線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。 [2007]

10 D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a) D の中心は C 上にある。

(b) D が乗っている平面は常にベクトル $(0,\ 1,\ 0)$ と直交する。 [2005]

11 $0<r<1$ とする。空間において，点 $(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球と点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-r^2}$ の球との共通部分の体積を $V(r)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$ を求めよ。

(2) r が $0<r<1$ の範囲を動くとき，$V(r)$ を最大にする r の値および $V(r)$ の最大値を求めよ。 [2004]

12 (1) 3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ (a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2) (1)で求めた直線のうち，傾きの大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする。C と l_1 が囲む部分の面積を S_1，C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この 2 つの面積比 $S_1 : S_2$ を求めよ。 [2003]

13　xyz 空間内の動点 P を考える。P は $z \leqq 0$ の部分では最大秒速 a メートルで，$z>0$ の部分では最大秒速 1 メートルで動けるものとする。P がはじめに原点 $(0,\ 0,\ 0)$ にあるとき，その 1 秒後までに P が到達し得る範囲の体積を求めよ。ただし，$a>1$ とする。　[2001]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

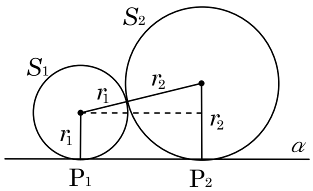
問　題

水平な平面αの上に半径r_1の球S_1と半径r_2の球S_2が乗っており，S_1とS_2は外接している。

(1)　S_1，S_2がαと接する点をそれぞれP_1，P_2とする。線分P_1P_2の長さを求めよ。

(2)　αの上に乗っており，S_1とS_2の両方に外接している球すべてを考える。それらの球とαの接点は，1 つの円の上または 1 つの直線の上にあることを示せ。[2016]

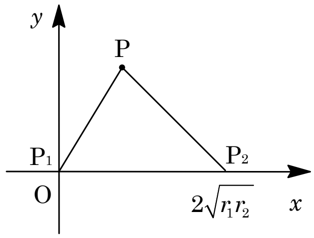
解答例



(1)　球S_1，S_2と平面αの接点P_1，P_2を含み，αに垂直な断面を考えると，三平方の定理から，

$$P_1P_2=\sqrt{(r_1+r_2)^2-|r_1-r_2|^2}=\sqrt{4r_1r_2}=2\sqrt{r_1r_2}$$

(2)　S_1とS_2の両方に外接している球 S について，半径をr，平面αとの接点を P とする。



ここで，α上に座標系を設定して，P_1を原点とし，P_2をx軸の正の部分にとると，(1)から$P_2(2\sqrt{r_1r_2},\ 0)$となる。そして，$P(x,\ y)$とおく。

すると，(1)の結論から，$P_1P=2\sqrt{r_1r}$，$P_2P=2\sqrt{r_2r}$となることから，

$$\sqrt{x^2+y^2}=2\sqrt{r_1r}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad \sqrt{(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2}=2\sqrt{r_2r}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$x^2+y^2=4r_1r$，$(x-2\sqrt{r_1r_2})^2+y^2=4r_2r$となり，$r$を消去すると，

$$r_2(x^2+y^2)=r_1(x^2-4\sqrt{r_1r_2}x+4r_1r_2+y^2)$$

$$(r_2-r_1)x^2+(r_2-r_1)y^2+4r_1\sqrt{r_1r_2}x-4r_1^2r_2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$r_1=r_2$のとき　③から，$4r_1^2x-4r_1^3=0$となり，$x=r_1$

よって，点 P は線分P_1P_2の垂直二等分線上にある。

(ii)　$r_1\neq r_2$のとき　③から，$x^2+y^2+\dfrac{4r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}x-\dfrac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1}=0$となり，

$$\left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^3r_2}{(r_2-r_1)^2}+\frac{4r_1^2r_2}{r_2-r_1},\quad \left(x+\frac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1}\right)^2+y^2=\frac{4r_1^2r_2^2}{(r_2-r_1)^2}$$

よって，点 P は中心$\left(-\dfrac{2r_1\sqrt{r_1r_2}}{r_2-r_1},\ 0\right)$，半径$\dfrac{2r_1r_2}{|r_2-r_1|}$の円上にある。

コメント

外接する球面に関する問題で，ときどき見かけるものです。(2)については，2 つの定点P_1，P_2からの距離の条件から，点 P の軌跡は垂直二等分線またはアポロニウスの円というのがわかります。ただ，解答例ではそのプロセスも簡単に記しています。

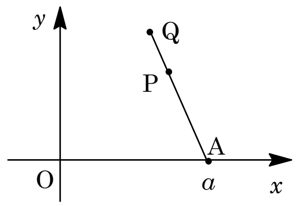
問　題

a を正の定数とする。原点を O とする座標平面上に定点 $\mathrm{A}=\mathrm{A}(a,\ 0)$ と，A と異なる動点 $\mathrm{P}=\mathrm{P}(x,\ y)$ をとる。次の条件

A から P に向けた半直線上の点 Q に対し，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} \leqq 2$ ならば $\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} \leqq \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$

を満たす P からなる領域を D とする。D を図示せよ。　[2010]

解答例



半直線 AP 上の点 Q に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおく。

すると，$\dfrac{\mathrm{AQ}}{\mathrm{AP}} \leqq 2$ より，$\mathrm{P}(x,\ y) \neq \mathrm{A}(a,\ 0)$ のもとで，

$$0 \leqq t \leqq 2$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=\overrightarrow{\mathrm{AP}}-\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(a+t(x-a),\ ty)$$

$$=(a(1-t)+tx,\ ty)$$

さて，$\dfrac{\mathrm{QP}}{\mathrm{OQ}} \leqq \dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{OA}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}} \neq \vec{0}$ ……①のもとで，

$$\mathrm{OA}\cdot\mathrm{QP} \leqq \mathrm{OQ}\cdot\mathrm{AP} \text{………②}$$

①から，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \neq t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AO}} \neq \vec{0}$ から $0<t \leqq 2$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} \neq \dfrac{1}{t}\overrightarrow{\mathrm{AO}}$

すると，$\dfrac{1}{t} \geqq \dfrac{1}{2}$ から，$\mathrm{P}(x,\ y)$ は, x 軸上の $x \leqq \dfrac{a}{2}$ の部分には存在しない。

また，②から，$a|1-t||\overrightarrow{\mathrm{AP}}| \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|$，$a^2(1-t)^2 \leqq |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2$ となり，

$$a^2(1-t)^2 \leqq \{a(1-t)+tx\}^2+t^2y^2,\ (x^2+y^2-2ax)t^2+2axt \geqq 0 \text{………③}$$

③は，$t=0$ では成立しているので，$0<t \leqq 2$ でつねに成立する条件を求める。

そこで，$0<t \leqq 2$ において，③は，

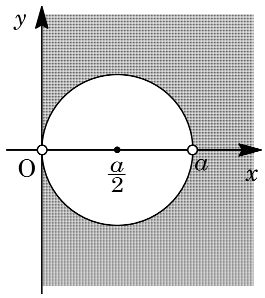
$$(x^2+y^2-2ax)t+2ax \geqq 0$$

$f(t)=(x^2+y^2-2ax)t+2ax$ とおくと，求める条件は,

$$f(0)=2ax \geqq 0,\ f(2)=2x^2+2y^2-2ax \geqq 0$$

まとめると, $x \geqq 0$ かつ $\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2+y^2 \geqq \dfrac{a^2}{4}$

よって，条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の存在領域 D は，右図の網点部となる。ただし，白丸以外の境界は領域に含む。



コメント

問題文に与えられた条件が比の形で書かれているため，取り組みにくい感じがします。なお，点 Q はこの条件を満たす任意の点として解答をしています。

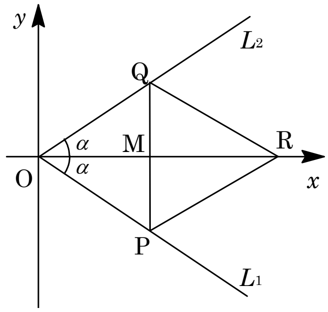
問　題

平面の原点 O を端点とし，x 軸となす角がそれぞれ $-\alpha$，$\alpha\left(ただし 0<\alpha<\dfrac{\pi}{3}\right)$である半直線を L_1，L_2 とする。L_1 上に点 P，L_2 上に点 Q を線分 PQ の長さが 1 となるようにとり，点 R を，直線 PQ に対し原点 O の反対側に△PQR が正三角形になるようにとる。

(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，点 R の座標を求めよ。

(2) 2 点 P，Q が，線分 PQ の長さを 1 に保ったまま L_1，L_2 上を動くとき，点 R の軌跡はある楕円の一部であることを示せ。 [2008]

解答例



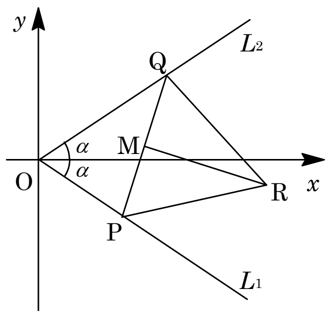
(1) 線分 PQ が x 軸と直交するとき，PQ $=1$ より，

$$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ -\frac{1}{2}\right),\ \mathrm{Q}\left(\frac{1}{2\tan\alpha},\ \frac{1}{2}\right)$$

さて, PQ の中点 M は，$\mathrm{M}\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha},\ 0\right)$となり，

$$\mathrm{MR}=\mathrm{MP}\tan\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

よって，$\mathrm{R}\left(\dfrac{1}{2\tan\alpha}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$である。



(2) 半直線 L_1，L_2 の方向ベクトルの成分は，それぞれ$(\cos\alpha,\ -\sin\alpha)$，$(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$とすることができるので, $p>0$, $q>0$ として，

$$\mathrm{P}(p\cos\alpha,\ -p\sin\alpha),\ \mathrm{Q}(q\cos\alpha,\ q\sin\alpha)$$

すると，PQ $=1$ より，

$$(p-q)^2\cos^2\alpha+(p+q)^2\sin^2\alpha=1\cdots\cdots\cdots①$$

さて, PQ の中点 M は,

$$\mathrm{M}\left(\frac{p\cos\alpha+q\cos\alpha}{2},\ \frac{-p\sin\alpha+q\sin\alpha}{2}\right)$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=(p\cos\alpha-q\cos\alpha,\ -p\sin\alpha-q\sin\alpha)$，$|\overrightarrow{\mathrm{QP}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha,\ p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ より，R$(x,\ y)$とおくと，

$$x=\frac{1}{2}(p\cos\alpha+q\cos\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\sin\alpha+q\sin\alpha)$$

$$=\frac{1}{2}(\cos\alpha+\sqrt{3}\sin\alpha)(p+q)=\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p+q)\cdots\cdots②$$

$$y=\frac{1}{2}(-p\sin\alpha+q\sin\alpha)+\frac{\sqrt{3}}{2}(p\cos\alpha-q\cos\alpha)$$
$$=\frac{1}{2}(-\sin\alpha+\sqrt{3}\cos\alpha)(p-q)=\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)(p-q)\cdots\cdots③$$

$0<\alpha<\frac{\pi}{3}$ より，$\cos\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$，$\sin\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)>0$ となり，②③を①に代入すると，

$$\frac{\sin^2\alpha}{\cos^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}x^2+\frac{\cos^2\alpha}{\sin^2\left(\frac{\pi}{3}-\alpha\right)}y^2=1$$

よって，点 R の軌跡は楕円の一部である。

コメント

図形と方程式の重要題の 1 つで，単位ベクトルの効用が実感できる問題です。

問　題

実数 x, y が $x^2+y^2 \leqq 1$ を満たしながら変化するとする。

(1)　$s=x+y$，$t=xy$ とするとき，点 $(s,\ t)$ の動く範囲を st 平面上に図示せよ。

(2)　負でない定数 $m \geqq 0$ をとるとき，$xy+m(x+y)$ の最大値，最小値を m を用いて表せ。　[2005]

解答例

(1)　$s=x+y$，$t=xy$ より，実数 x, y は，2 次方程式 $u^2-su+t=0$ の解なので，

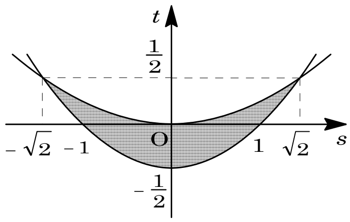
$$D=s^2-4t \geqq 0,\quad t \leqq \frac{1}{4}s^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，$x^2+y^2 \leqq 1$ から，$(x+y)^2-2xy \leqq 1$ となり，

$$s^2-2t \leqq 1,\quad t \geqq \frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ②$$

①②の境界線の交点は，$\dfrac{1}{4}s^2=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ より，

$$s=\pm\sqrt{2},\quad t=\frac{1}{2}$$

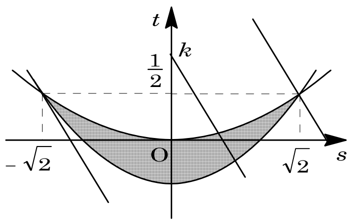


よって，点 $(s,\ t)$ の動く範囲は右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。

(2)　$xy+m(x+y)=k$ とおくと，$t+ms=k$ から，

$$t=-ms+k \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，st 平面上で③は傾き $-m$ の直線群を表し，(1)の領域を共有点の存在する k の範囲を求める。



まず，$-m \leqq 0$ なので，k は $(s,\ t)=\left(\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ において最大となり，最大値は $\dfrac{1}{2}+\sqrt{2}m$ である。

また，②の境界線 $t=\dfrac{1}{2}s^2-\dfrac{1}{2}$ と直線③が接するとき，

$$-ms+k=\frac{1}{2}s^2-\frac{1}{2},\quad s^2+2ms-2k-1=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

④より，接点の s 座標は $s=-m$ となる。

(i)　$-m \leqq -\sqrt{2}$ ($m \geqq \sqrt{2}$) のとき

図より，k は $(s,\ t)=\left(-\sqrt{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ において最小となり，最小値は $\dfrac{1}{2}-\sqrt{2}m$ である。

(ii)　$-m \geqq -\sqrt{2}$ ($0 \leqq m \leqq \sqrt{2}$) のとき

図より，k は接点 $(s,\ t)=\left(-m,\ \dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}\right)$ において最小となり，最小値は $\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}-m^2$ すなわち $-\dfrac{1}{2}m^2-\dfrac{1}{2}$ となる。

コメント

経験済みというのが当然なぐらいの頻出題です。(2)の場合分けも煩雑なものではありません。

問　題

$a>0$ とし, x, y が 4 つの不等式

$$x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ 2x+3y\leqq 12,\ \ ax+\left(4-\frac{3}{2}a\right)y\leqq 8$$

を同時にみたしているとする。このとき $x+y$ の最大値 $f(a)$ を求めよ。　　　　[1998]

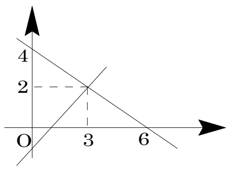
解答例

$ax+\left(4-\frac{3}{2}a\right)y=8$ は $a\left(x-\frac{3}{2}y\right)+4y-8=0$ と変形すると, a が正のどんな値をとっても $x-\frac{3}{2}y=0$ かつ $4y-8=0$ となる点 $(x,\ y)=(3,\ 2)$ を通る直線を表し, x 切片 $\frac{8}{a}$, y 切片 $\frac{16}{8-3a}$ $\left(a\neq\frac{8}{3}\right)$ である。また, $ax+\left(4-\frac{3}{2}a\right)y\leqq 8$ の表す領域は, 境界線 $ax+\left(4-\frac{3}{2}a\right)y=8$ によって分けられる平面のうち原点を含む領域である。

$x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ 2x+3y\leqq 12$ の表す領域は, 3 点 $(0,\ 0)$, $(6,\ 0)$, $(0,\ 4)$ を頂点とする三角形の内部または周上である。

ここで, $x+y=k$ とおき, この直線と与えられた領域とが共有点をもつ k の範囲を求める。

(i)　$8-3a<0$ $\left(a>\frac{8}{3}\right)$ のとき

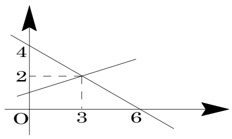


$x+y=k$ は $(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大値 5 をとる。

(ii)　$8-3a=0$ $\left(a=\frac{8}{3}\right)$ のとき

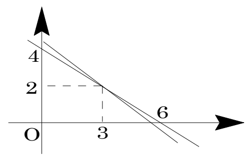
$x+y=k$ は $(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大値 5 をとる。

(iii)　$8-3a>0$ $\left(0<a<\frac{8}{3}\right)$ のとき



(iii-i)　$\frac{16}{8-3a}\leqq 4$ $\left(0<a\leqq\frac{4}{3}\right)$ のとき

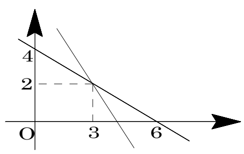
$x+y=k$ は $(x,\ y)=(6,\ 0)$ で最大値 6 をとる。



(iii-ii)　$4<\frac{16}{8-3a}<5$ $\left(\frac{4}{3}<a<\frac{8}{5}\right)$ のとき

$x+y=k$ は $(x,\ y)=\left(\frac{8}{a},\ 0\right)$ で最大値 $\frac{8}{a}$ をとる。

(iii-iii)　$\frac{16}{8-3a}\geqq 5$ $\left(\frac{8}{5}\leqq a<\frac{8}{3}\right)$ のとき



$x+y=k$ は $(x,\ y)=(3,\ 2)$ で最大値 5 をとる。

以上より, $f(a)=6$ $\left(0<a\leqq\frac{4}{3}\right)$,

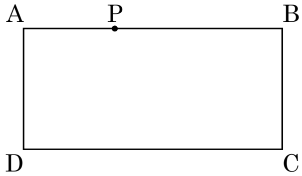
$$f(a)=\frac{8}{a}\ \left(\frac{4}{3}<a<\frac{8}{5}\right),\ \ f(a)=5\ \left(\frac{8}{5}\leqq a\right)$$

コメント

領域と最大・最小という頻出題です。直線 $ax+\left(4-\dfrac{3}{2}a\right)y=8$ が定点 $(3,\ 2)$ を通過し，その点が直線 $2x+3y=12$ 上にあることを見つけるのがポイントです。

問　題

a を 1 以上の実数とする。図のような長方形の折り紙 ABCD が机の上に置かれている。ただし $\mathrm{AD}=1$，$\mathrm{AB}=a$ である。P を辺 AB 上の点とし，$\mathrm{AP}=x$ とする。頂点 D を持ち上げて P と一致するように折り紙を 1 回折ったとき，もとの長方形 ABCD からはみ出る部分の面積を S とする。



(1) S を a と x で表せ。

(2) $a=1$ とする。P が A から B まで動くとき，S を最大にするような x の値を求めよ。

なお，配布された白紙を自由に使ってよい。（白紙は回収しない）　[2017]

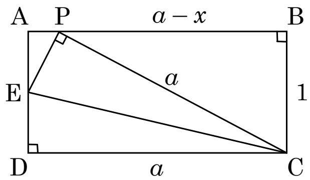
解答例

(1) 長方形 ABCD に対して，折り目である線分 PD の垂直二等分線と辺 AD または AB との交点を E，辺 BC または CD との交点を F とおく。

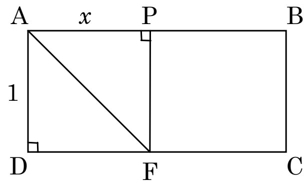
ここで，点 F が頂点 C に一致するとき，△PBC において，$(a-x)^2+1^2=a^2$ から，

$$-2ax+x^2+1=0\,,\ \ x^2-2ax+1=0$$

$0<x<a$ より，$x=a-\sqrt{a^2-1}$

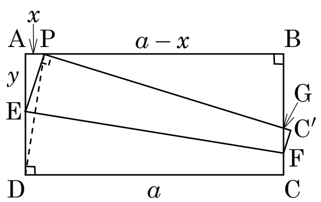


また，点 E が頂点 A に一致するとき，右図より，$x=1$ である。



これより，折り返した図形が長方形 ABCD からはみ出る部分の面積について，x の範囲を，$0\leqq x<a-\sqrt{a^2-1}$，$a-\sqrt{a^2-1}\leqq x\leqq 1$，$1<x\leqq a$ の場合に分けて考える。

(i) $0\leqq x<a-\sqrt{a^2-1}$ のとき



$x>0$ のとき，$\mathrm{AE}=y$ とおくと，△AEP において，

$$x^2+y^2=(1-y)^2,\ \ y=\frac{1-x^2}{2}$$

ここで，△AEP と△BPG は相似なので，

$$\mathrm{PG}=(a-x)\frac{1-y}{y}=(a-x)\frac{1+x^2}{1-x^2}$$

$$\mathrm{GC'}=a-(a-x)\frac{1+x^2}{1-x^2}=\frac{a-ax^2-(a+ax^2-x-x^3)}{1-x^2}=\frac{x^3-2ax^2+x}{1-x^2}$$

さらに，△AEP と△C′FG は相似なので，はみ出る部分△C′FG の面積 S は，

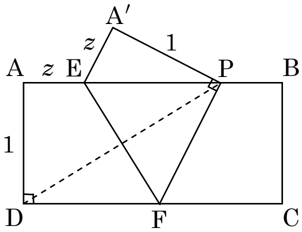
$$S=\frac{1}{2}xy\cdot\Big(\frac{\mathrm{GC'}}{\mathrm{PA}}\Big)^2=\frac{1}{2}x\cdot\frac{1-x^2}{2}\Big\{\frac{x^3-2ax^2+x}{x(1-x^2)}\Big\}^2=\frac{x(x^2-2ax+1)^2}{4(1-x^2)}$$

なお，この式は$x=0$のときも成立する。

(ii)　$a-\sqrt{a^2-1} \leqq x \leqq 1$のとき

長方形ABCDからはみ出る部分はないので，$S=0$である。

(iii)　$1 < x \leqq a$のとき



AE$=z$とおくと，△A′EPにおいて，

$$z^2+1^2=(x-z)^2,\ z=\frac{x^2-1}{2x}$$

はみ出る部分△A′EPの面積Sは,

$$S=\frac{1}{2}z\cdot 1=\frac{x^2-1}{4x}$$

(2)　$a=1$のとき，Sが最大となるのは，(1)の(i)の場合なので，$0 \leqq x < 1$で,

$$S=\frac{x(x^2-2x+1)^2}{4(1-x^2)}=\frac{x(x-1)^4}{4(1-x^2)}=\frac{x(1-x)^3}{4(1+x)}$$

$$S'=\frac{\{(1-x)^3-3x(1-x)^2\}(1+x)-x(1-x)^3}{4(1+x)^2}$$

$$=\frac{-(1-x)^2(3x^2+4x-1)}{4(1+x)^2}$$

すると，S の増減は右表のようになり，$x=\dfrac{-2+\sqrt{7}}{3}$のときSは最大になる。

x	0	$\cdots$	$\frac{-2+\sqrt{7}}{3}$	$\cdots$	1
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

コメント

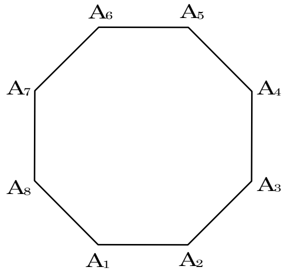
モデルを作る白紙が提供されたため，見当をつけるのは容易ですが，数式処理は予想以上に面倒なものでした。なお，本問に既視感を覚えたので，調べたところ 2001 年に同様な出題がありました。二重になる部分でしたが。

問　題

1 辺の長さが 1 の正八角形 $A_1A_2\cdots A_8$ の周上を 3 点 P, Q, R が動くとする。

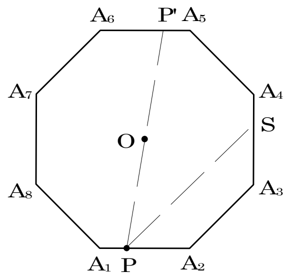
(1)　△PQR の面積の最大値を求めよ。

(2)　Q が正八角形の頂点 A_1 に一致し，$\angle PQR = 90°$ となるとき△PQR の面積の最大値を求めよ。　[2007]



解答例

(1)　まず，点 P を辺 A_1A_2 上に固定する。さらに，正八角形の中心を O とし，点 P, Q の O に関する対称点をそれぞれ P′，Q′ とおく。また，PS // A_6A_7 となるように点 S を辺 A_3A_4 上にとる。



以下，対称性より，点 Q が PA_2，A_2A_3，A_3A_4，A_4A_5，A_5P' 上にあるときを考える。

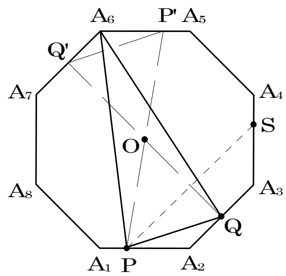
(i)　点 Q が PA_2，A_2A_3，A_3S 上にあるとき

$P'Q'$ // PQ より，点 R が点 A_6 にあるとき，△PQR の面積はつねに最大になり，

$$\triangle PQR \leqq \triangle PQA_6$$

このとき点 Q を動かすと，PA_6 からの距離が最大となるのは，Q が S に一致するときである。すなわち，

$$\triangle PQA_6 \leqq \triangle PSA_6$$



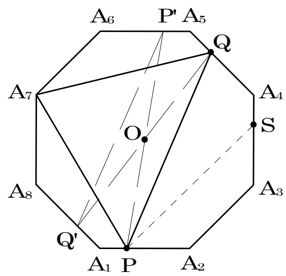
(ii)　点 Q が SA_4，A_4A_5，A_5P' 上にあるとき

$P'Q'$ // PQ より，点 R が点 A_7 にあるとき，△PQR の面積はつねに最大になり，

$$\triangle PQR \leqq \triangle PQA_7$$

このとき点 Q を動かすと，PA_7 からの距離が最大となるのは，Q が A_4 に一致するときである。すなわち，

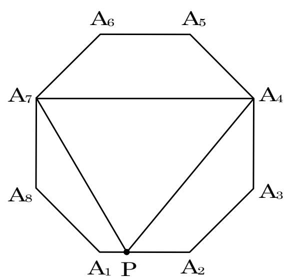
$$\triangle PQA_7 \leqq \triangle PA_4A_7$$



(i)(ii)より，$\triangle PSA_6$ と $\triangle PA_4A_7$ の面積を比べると，

$$\triangle PA_4A_7 \geqq \triangle PA_4A_6 \geqq \triangle PSA_6$$

以上より，△PQR の面積は，$\triangle PQR = \triangle PA_4A_7$ のとき最大となる。



さて，$A_4A_7=\dfrac{1}{\sqrt{2}}+1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=1+\sqrt{2}$ となり，また，P から A_4A_7 までの距離は，$1+\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ より，

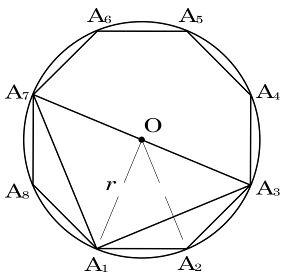
$$\triangle PA_4A_7=\frac{1}{2}(1+\sqrt{2})\left(1+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{4+3\sqrt{2}}{4}$$

(2)　点 Q が頂点 A_1 に一致するとき，正八角形の外接円の直径の両端として，P''，Q'' をとるとき，$\angle P''QR''=90^\circ$ となる。

そこで，$\triangle P''QR''$ の面積が最大となるのは，$A_1O\perp P''R''$ のときであり，直径 $P''R''$ が A_3A_7 に一致する。

よって，$\triangle PQR$ の面積は，$\triangle PQR=\triangle A_1A_3A_7$ のとき最大となる。

さて，$\sin 22.5^\circ=\sqrt{\dfrac{1-\cos 45^\circ}{2}}=\dfrac{\sqrt{2-\sqrt{2}}}{2}$ から，外接円の半径 r は，



$$r=\frac{\frac{1}{2}}{\sin 22.5^\circ}=\frac{1}{\sqrt{2-\sqrt{2}}}$$

以上より，$\triangle PQR$ の面積の最大値は，

$$\triangle A_1A_3A_7=\frac{1}{2}r^2\times 2=\frac{1}{2-\sqrt{2}}=\frac{2+\sqrt{2}}{2}$$

コメント

平面図形の最大・最小問題ですが，制限時間のある入試ではキツイ内容です。特に，どこまで記述すればよいのか迷ってしまいます。(1)では丁寧に書きましたが……。

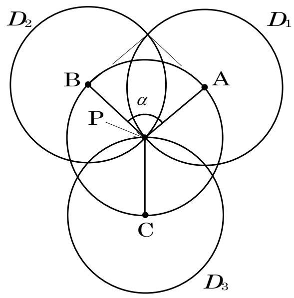
問　題

平面上を半径 1 の 3 個の円板が下記の条件(a)と(b)を満たしながら動くとき，これら 3 個の円板の和集合の面積 S の最大値を求めよ。

(a)　3 個の円板の中心はいずれも定点 P を中心とする半径 1 の円周上にある。

(b)　3 個の円板すべてが共有する点は P のみである。　[2006]

解答例



右図のように 3 個の半径 1 の円板を D_1，D_2，D_3 とし，その中心をそれぞれ A, B, C とおく。

さらに，$\angle\mathrm{APB}=\alpha$，$\angle\mathrm{BPC}=\beta$，$\angle\mathrm{CAP}=\gamma$ とおくと，$0\leqq\alpha\leqq\pi$，$\pi-\alpha\leqq\beta\leqq\pi$，$\pi-\alpha\leqq\gamma\leqq\pi$ において，

$$\alpha+\beta+\gamma=2\pi\cdots\cdots\cdots①$$

すると，D_1 と D_2 の共通部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\cdot1^2(\pi-\alpha)\times2-1^2\sin\alpha=\pi-\alpha-\sin\alpha$$

D_2 と D_3，D_3 と D_1 の共通部分の面積も同様に考えることができ, 3 個の円板 D_1，D_2，D_3 の和集合の面積 S は，①を利用して，

$$S=\pi\cdot1^2\times3-\{(\pi-\alpha-\sin\alpha)+(\pi-\beta-\sin\beta)+(\pi-\gamma-\sin\gamma)\}$$
$$=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta+\sin\gamma=2\pi+\sin\alpha+\sin\beta-\sin(\alpha+\beta)$$
$$=2\pi+\sin\alpha+2\cos\frac{\beta+\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\beta-\alpha-\beta}{2}$$
$$=2\pi+\sin\alpha-2\cos\left(\frac{\alpha}{2}+\beta\right)\sin\frac{\alpha}{2}$$

さて，α を $0\leqq\alpha\leqq\pi$ で固定すると，$\pi-\alpha\leqq\beta\leqq\pi$ から $-\frac{\alpha}{2}+\pi\leqq\frac{\alpha}{2}+\beta\leqq\frac{\alpha}{2}+\pi$ となる。よって，$\frac{\alpha}{2}+\beta=\pi$ ……②のとき, S は最大となり，

$$S=2\pi+\sin\alpha+2\sin\frac{\alpha}{2}$$

そこで，α を $0\leqq\alpha\leqq\pi$ で変化させると，

$$S'=\cos\alpha+\cos\frac{\alpha}{2}=2\cos^2\frac{\alpha}{2}+\cos\frac{\alpha}{2}-1$$
$$=\left(2\cos\frac{\alpha}{2}-1\right)\left(\cos\frac{\alpha}{2}+1\right)$$

α	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$	$\cdots$	π
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

以上より，$\alpha=\frac{2}{3}\pi$ のとき S は最大値をとり，その値は，

$$S=2\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}+2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\pi+\frac{3\sqrt{3}}{2}$$

なお，このとき①②より，$\beta=\gamma=\frac{2}{3}\pi$ である。

コメント

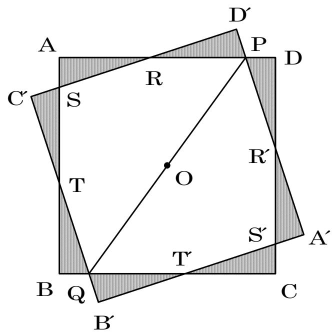
東工大らしい問題です。結論は容易に推測できるものの，それを示すのは簡単ではありません。なお，条件(b)は，α，β，γ の範囲に反映しています。

問　題

1 辺の長さが 1 の正方形の紙を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき二重になる部分の多角形を P とする。P が線対称な五角形になるように折るとき，P の面積の最小値を求めよ。 [2001]

解答例

正方形 ABCD を 1 本の線分に沿って折り曲げたとき，二重になる部分が五角形になることより，折り目の線分の一端 P が AD 上，他端 Q が BC 上にあるとしても差し支えない。



このとき，正方形の各頂点を線分 PQ に関して対称移動し，A が A′，B が B′，C が C′，D が D′ に移ったとすると，正方形 ABCD と正方形 A′B′C′D′ は合同になる。

さて，二重になる部分は五角形 PRSTQ であるが，線対称になっていることより，TQ = RP が成立する。これから，△TBQ と△RD′P が合同になるので，BQ = PD′ が成り立つ。

また，PD′ は PD を対称移動したので，PD′ = PD であり，BQ = PD となる。

すると，線分 PQ は正方形 ABCD の中心 O を通り，正方形 D′C′B′A′ は正方形 ABCD を O を中心として回転した図形になる。

よって，右上図の網点をつけた 8 つの直角三角形は合同である。

ここで，AS = a，BT = b とおくと，ST = 1 − AS − BT なので，

$$\sqrt{a^2+b^2}=1-a-b,\ a^2+b^2=(1-a-b)^2,\ (2a-2)b=2a-1$$

$a<\frac{1}{2}$ において，$b=\frac{2a-1}{2a-2}$

五角形 P の面積を S とすると，台形 ABQP の面積が $\frac{1}{2}$ より，

$$S=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}ab\cdot 2=\frac{1}{2}-ab=\frac{1}{2}-a\cdot\frac{2a-1}{2a-2}=\frac{-2a^2+2a-1}{2a-2}$$

$$=-a-\frac{1}{2a-2}=1-a+\frac{1}{2-2a}-1\geqq 2\sqrt{\frac{1}{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

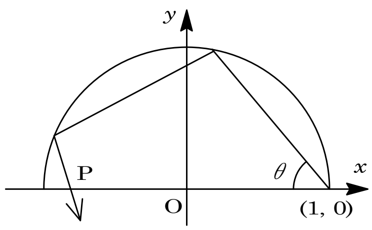
等号は $1-a=\frac{1}{2-2a}$ のとき成立する。このとき，$(1-a)^2=\frac{1}{2}$ から $a=1-\frac{1}{\sqrt{2}}$ となり，これは $0<a<\frac{1}{2}$ を満たす。よって，五角形 P の面積の最小値は $\sqrt{2}-1$ である。

コメント

実際に正方形を折って考えないと，イメージがつかめないほどの内容です。

問　題

$(x,\ y)$平面において，半円：$x^2+y^2=1$，$y\geqq 0$の内側が鏡になっているとする。図のように，定点$(1,\ 0)$より，x軸となす角θで光線が発射され，2回半円に反射したのち，x軸上の点Pを通過したとする。



(1)　このような状況が起こるためのθの範囲を求めよ。

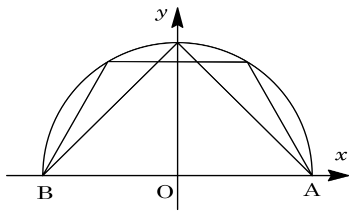
(2)　Pの座標をθを用いて表せ。

(3)　θが(1)の範囲を動くときのPの動く範囲を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$A(1,\ 0)$，$B(-1,\ 0)$とおく。

まず，Aから光線が発射され，半円で1回反射してBに到達するとき，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$となる。また，2回反射してBに到達するとき，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$となる。

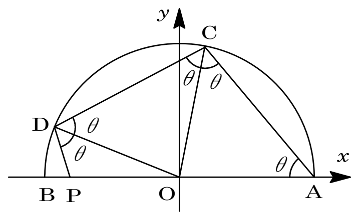


よって，条件を満たすθは，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$である。

(2)　$\angle AOC=\angle COD=\pi-2\theta$より，

$$\angle DOP=\pi-2(\pi-2\theta)=4\theta-\pi$$

$$\angle DPO=\pi-(\theta+4\theta-\pi)=2\pi-5\theta$$



$\triangle DPO$に正弦定理を適用して，

$$\frac{OP}{\sin\theta}=\frac{1}{\sin(2\pi-5\theta)}$$

$$OP=\frac{\sin\theta}{\sin(2\pi-5\theta)}=-\frac{\sin\theta}{\sin 5\theta}$$

点Pはx軸上の負の部分にあるので，$P\left(\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta},\ 0\right)$となる。

(3)　$i^0=1$として，$\cos 5\theta+i\sin 5\theta=(\cos\theta+i\sin\theta)^5=\displaystyle\sum_{k=0}^{5}{}_5C_k\cos^{5-k}\theta\cdot\sin^k\theta\cdot i^k$

$$\begin{aligned}\sin 5\theta&={}_5C_1\cos^4\theta\sin\theta-{}_5C_3\cos^2\theta\sin^3\theta+{}_5C_5\sin^5\theta\\&=5\cos^4\theta\sin\theta-10\cos^2\theta\sin^3\theta+\sin^5\theta\end{aligned}$$

(2)より，$x=\dfrac{\sin\theta}{\sin 5\theta}=\dfrac{1}{5\cos^4\theta-10\cos^2\theta\sin^2\theta+\sin^4\theta}$

$$=\frac{1}{5\cos^4\theta-10\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)+(1-\cos^2\theta)^2}$$

$$=\frac{1}{16\cos^4\theta-12\cos^2\theta+1}=\frac{1}{16\left(\cos^2\theta-\frac{3}{8}\right)^2-\frac{5}{4}}$$

(1)より，$\dfrac{\pi}{4}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$なので$\dfrac{1}{4}<\cos^2\theta<\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{5}{4}\leqq 16\left(\cos^2\theta-\dfrac{3}{8}\right)^2-\dfrac{5}{4}<-1$から$-1<x\leqq-\dfrac{4}{5}$となる。すなわち，点Pは$x$軸上の$-1<x\leqq-\dfrac{4}{5}$の部分を動く。

コメント

ややや直観的すぎるかもしれませんが，(1)は最初に考えたように書きました。また，(3)は微分するとたいへんな計算になりましたので，方針転換した後の解です。

問　題

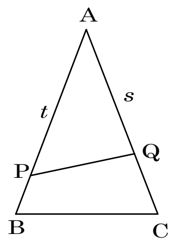
3 辺の長さが 1, 1, a である三角形の面積を，周上の 2 点を結ぶ線分で 2 等分する。それらの線分の長さの最小値を a を用いて表せ。 [1999]

解答例

$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$，$\mathrm{BC}=a$ とすると，三角形の形成条件より $0<a<2$ となる。

(i)　線分の両端がともに等辺上にあるとき

右図のように 2 点 P, Q を設定し，$\mathrm{AP}=t$，$\mathrm{AQ}=s$ $(0<t\leqq 1,\ 0<s\leqq 1)$ として，$\triangle\mathrm{ABC}=2\triangle\mathrm{APQ}$ のときを考える。



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot\sin A=2\cdot\frac{1}{2}ts\sin A,\ 2ts=1\cdots\cdots\cdots①$$

余弦定理より，$\cos A=\dfrac{1+1-a^2}{2\cdot 1\cdot 1}=1-\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\mathrm{PQ}^2=t^2+s^2-2ts\cos A=t^2+\dfrac{1}{4t^2}-1+\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots③$

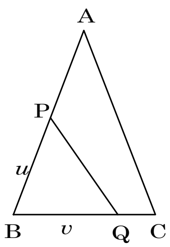
ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$t^2+\dfrac{1}{4t^2}\geqq 2\sqrt{t^2\cdot\dfrac{1}{4t^2}}=1$

等号は $t^2=\dfrac{1}{4t^2}$ のとき成立し，$0<t\leqq 1$ を満たすのは $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときとなる。このとき①より，$s=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$0<s\leqq 1$ を満たす。

以上より，PQ^2 の最小値 m_1 は③より，$m_1=1-1+\dfrac{a^2}{2}=\dfrac{a^2}{2}$

(ii)　線分の両端が一方は等辺上で他方は底辺上にあるとき

右図のように 2 点 P, Q を設定し，$\mathrm{BP}=u$，$\mathrm{BQ}=v$ $(0<u\leqq 1,\ 0<v\leqq a)$ として，$\triangle\mathrm{BAC}=2\triangle\mathrm{BPQ}$ のときだけを考えても一般性は失われない。



$$\frac{1}{2}\cdot 1\cdot a\cdot\sin B=2\cdot\frac{1}{2}uv\sin B,\ 2uv=a\cdots\cdots\cdots④$$

このとき，$\cos B=\dfrac{\mathrm{BC}}{2\mathrm{AB}}=\dfrac{a}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$\mathrm{PQ}^2=u^2+v^2-2uv\cos B=u^2+\dfrac{a^2}{4u^2}-\dfrac{a^2}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$

ここで，$0<v\leqq a$ なので④から $0<\dfrac{a}{2u}\leqq a$，すなわち $\dfrac{1}{2}\leqq u$ となり，$0<u\leqq 1$ と合わせて $\dfrac{1}{2}\leqq u\leqq 1$ となる。

さて，$u^2=x$ とおき，$f(x)=x+\dfrac{a^2}{4x}$ を考える。

$$f'(x)=1-\frac{a^2}{4x^2}=\frac{(2x-a)(2x+a)}{4x^2}$$

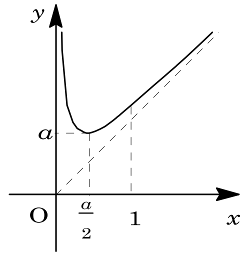
x	0	$\cdots$	$\frac{a}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	a	$\nearrow$

$\frac{1}{2}\leqq u\leqq 1$ より，$\frac{1}{4}\leqq x\leqq 1$

また, $0<a<2$ から，$0<\frac{a}{2}<1$

(ii-i)　$\frac{1}{4}\leqq\frac{a}{2}$　$\left(\frac{1}{2}\leqq a<2\right)$のとき

$f(x)$の最小値は$f\left(\frac{a}{2}\right)=a$



このときPQ^2は最小値m_2をとり，⑥より

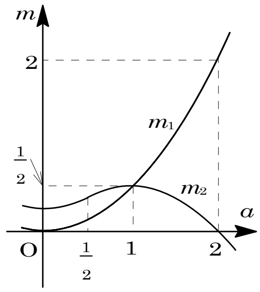
$$m_2=a-\frac{a^2}{2}=-\frac{1}{2}(a-1)^2+\frac{1}{2}$$

(ii-ii)　$\frac{a}{2}<\frac{1}{4}$　$\left(0<a<\frac{1}{2}\right)$のとき

$f(x)$の最小値は$f\left(\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}+a^2$

このときPQ^2は最小値m_2をとり，⑥より

$$m_2=\frac{1}{4}+a^2-\frac{a^2}{2}=\frac{a^2}{2}+\frac{1}{4}$$



(i)(ii)をまとめて, a とPQ^2の最小値 m との関係をグラフにすると，右図のようになる。

これより，$0<a<1$ のとき $m=m_1=\frac{a^2}{2}$，$1\leqq a<2$ のとき $m=m_2=a-\frac{a^2}{2}$

よって, PQ の最小値は，$0<a<1$ のとき $\sqrt{\frac{a^2}{2}}=\frac{a}{\sqrt{2}}$，$1\leqq a<2$ のとき $\sqrt{a-\frac{a^2}{2}}$

コメント

(ii)の場合も(i)の場合と同じく，まず相加平均と相乗平均の関係を用いて最小値m_2を求めようとしました。ところが，等号成立条件が「あやしい」と感じましたので，関数を対応させて丁寧に解いてみました。最終的には，杞憂に過ぎなかったものの，解は長くなってしまいました。

問　題

R を隣りあう 2 辺の長さ $a,\ b$ が $2a>b>a$ をみたす長方形とし，A を次の性質(P)を持つ半径 x の円とする。

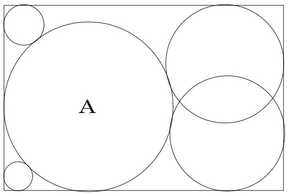
(P)　R の内部にあって隣りあう 2 辺にだけ接する。

(1)　性質(P)を持つ円で円 A に外接するものが 4 つ存在するために，円 A の半径 x がみたすべき条件を $a,\ b$ を使って表せ。

(2)　x が(1)の条件をみたすとき，円 A に外接する 4 つの円のうち 2 番目に大きい円を B とする。x が変化するとき円 A と円 B の面積の和の最小値を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　右図のように円 C_1，C_2，C_3，C_4 を A に外接し，R の 2 辺と接するように設定し，その半径をそれぞれ r_1，r_2，r_3，r_4 とする。



まず，円 A が性質(P)をもつことより，

$0<2x<a$ ………①

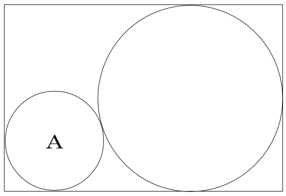
①の範囲で，性質(P)をみたす円 C_1，C_2 は存在し，x が増加するとき，r_1 は単調増加，r_2 は単調減少する。

また $2x=a$ のとき，$r_1=r_2$ となるので，①の範囲で

$r_1<r_2$ ………②

さて $2a>b>a$ から，C_3 と C_4 が一致し，$r_3=r_4=\dfrac{a}{2}$ のときの A の半径を x_0 とするとき，性質(P)をみたす円 C_3，C_4 が存在する条件は，$x>x_0$ ………③

①③より，$x_0<x<\dfrac{a}{2}$



ここで，三平方の定理より，

$$\left(x_0+\frac{a}{2}\right)^2=\left(b-\frac{a}{2}-x_0\right)^2+\left(\frac{a}{2}-x_0\right)^2$$

$$ax_0=\left(b-\frac{a}{2}-x_0\right)^2-ax_0$$

$$x_0{}^2-(a+2b)x_0+b^2-ab+\frac{a^2}{4}=0$$

$$x_0=\frac{a+2b\pm\sqrt{(a+2b)^2-4b^2+4ab-a^2}}{2}=\frac{a+2b\pm2\sqrt{2ab}}{2}$$

$x_0<\dfrac{a}{2}$ より，$x_0=\dfrac{a+2b-2\sqrt{2ab}}{2}=\dfrac{(\sqrt{2b}-\sqrt{a}\,)^2}{2}$

以上より，$\dfrac{(\sqrt{2b}-\sqrt{a}\,)^2}{2}<x<\dfrac{a}{2}$

(2)　(1)と同様にして，

$(x+r_4)^2=(b-r_4-x)^2+(r_4-x)^2$ から，$r_4{}^2-(2x+2b)r_4+b^2-2bx+x^2=0$

$r_4<b$ より，$r_4=x+b-2\sqrt{bx}=(\sqrt{b}-\sqrt{x})^2$

また a, b を交換すると $r_2=(\sqrt{a}-\sqrt{x})^2$ となるので，$a<b$ から $r_2<r_4$ ………④

さらに，$(x+r_3)^2=(b-r_3-x)^2+(a-r_3-x)^2$

$$r_3{}^2-(2x-2a-2b)r_3+a^2-2ax+b^2-2bx+x^2=0$$

$r_3<\dfrac{a}{2}$ より，$r_3=a+b-x-\sqrt{2ab}$

ここで，$r_3-r_4=a-2x-\sqrt{2ab}+2\sqrt{bx}=(\sqrt{a}-\sqrt{2x})(\sqrt{a}+\sqrt{2x}-\sqrt{2b})$

(1)から，$(\sqrt{2b}-\sqrt{a})^2<2x<a$ なので，$\sqrt{a}-\sqrt{2x}>0$，$\sqrt{a}+\sqrt{2x}-\sqrt{2b}>0$

よって，$r_3>r_4$ ………⑤

②④⑤より $r_1<r_2<r_4<r_3$ となり，円 B は円 C_4 となる。

求める面積を S とすると，$S=\pi(x^2+r_4{}^2)=\pi\left\{x^2+(\sqrt{b}-\sqrt{x})^4\right\}$

$\dfrac{S}{\pi}=f(x)$ とおくと，

$$f'(x)=2x+4(\sqrt{b}-\sqrt{x})^3\cdot\left(-\frac{1}{2\sqrt{x}}\right)=\frac{2}{\sqrt{x}}\left\{(\sqrt{x})^3-(\sqrt{b}-\sqrt{x})^3\right\}$$

$f'(x)>0$ とすると，$\sqrt{x}>\sqrt{b}-\sqrt{x}$ から $x>\dfrac{b}{4}$

ここで，$2a>b>a$ より，$\dfrac{b}{4}-\dfrac{a}{2}=\dfrac{1}{4}(b-2a)<0$，

$$\frac{b}{4}-\frac{(\sqrt{2b}-\sqrt{a})^2}{2}=-\frac{1}{4}(3b-4\sqrt{2ab}+2a)=-\frac{1}{4}(3\sqrt{b}-\sqrt{2a})(\sqrt{b}-\sqrt{2a})>0 \text{ から，}$$

$$\frac{(\sqrt{2b}-\sqrt{a})^2}{2}<\frac{b}{4}<\frac{a}{2}$$

これより，$x=\dfrac{b}{4}$ のとき $f(x)$ は最小，すなわち S は最小となる。

x	$\dfrac{(\sqrt{2b}-\sqrt{a})^2}{2}$	$\cdots$	$\dfrac{b}{4}$	$\cdots$	$\dfrac{a}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

このとき，

$$S=\pi\left\{\frac{b^2}{16}+\left(\frac{\sqrt{b}}{2}\right)^4\right\}=\frac{\pi}{8}b^2$$

コメント

(1)(2)とも，どこまでどのように答案を書けば完全といえるのか迷う問題です。特に(2)は，円 B が円 C_4 となることを明らかとして解を書いてもよいのかどうか苦慮してしまいます。上の解ではこの点にも触れるように書きましたが，書きすぎかもしれません。なお，実戦的には少々の減点は覚悟して，答案を大雑把に書いた方がよいのではないかと思えます。

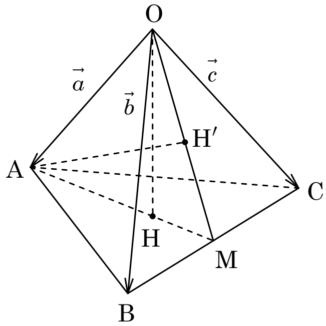
問　題

四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ とする。頂点 O から平面 ABC に垂線を下ろし，平面 ABC との交点を H とする。頂点 A から平面 OBC に垂線を下ろし，平面 OBC との交点を H' とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=s\vec{b}+t\vec{c}$ と表す。このとき，p, q, r および s, t を x の式で表せ。

(2) 四面体 OABC の体積 V を x の式で表せ。また，x が変化するときの V の最大値を求めよ。 [2015]

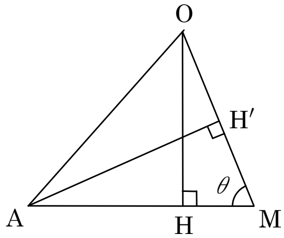
解答例



(1) $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{BC}=1$，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=x$ より，辺 BC の中点を M とおくと，四面体 OABC は平面 OAM に関して対称となる。

すると，頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H，および頂点 A から平面 OBC に下ろした垂線の足 H' は平面 OAM 上にある。

ここで，$\mathrm{OM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$\mathrm{AM}=\sqrt{x^2-\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}$ より，$\angle\mathrm{OMA}=\theta$ とおくと，



$$\cos\theta=\frac{\dfrac{3}{4}+x^2-\dfrac{1}{4}-1}{2\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}}=\frac{2x^2-1}{\sqrt{3}\sqrt{4x^2-1}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より，$\mathrm{MH}=\mathrm{OM}\cos\theta=\dfrac{2x^2-1}{2\sqrt{4x^2-1}}$ となり，

$$\mathrm{MH}:\mathrm{AM}=\frac{2x^2-1}{2\sqrt{4x^2-1}}:\frac{1}{2}\sqrt{4x^2-1}=(2x^2-1):(4x^2-1)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c})+\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}\left(\vec{a}-\dfrac{1}{2}\vec{b}-\dfrac{1}{2}\vec{c}\right)=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}\vec{a}+\dfrac{x^2}{4x^2-1}(\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=p\vec{a}+q\vec{b}+r\vec{c}$ より，$p=\dfrac{2x^2-1}{4x^2-1}$，$q=r=\dfrac{x^2}{4x^2-1}$

また，$(*)$より，$\mathrm{MH'}=\mathrm{AM}\cos\theta=\dfrac{2x^2-1}{2\sqrt{3}}$ となり，

$$\mathrm{MH'}:\mathrm{OM}=\frac{2x^2-1}{2\sqrt{3}}:\frac{\sqrt{3}}{2}=(2x^2-1):3$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OH'}}=\left(1-\dfrac{2x^2-1}{3}\right)\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{2(2-x^2)}{3}\cdot\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}=\dfrac{2-x^2}{3}(\vec{b}+\vec{c})$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}'}=s\vec{b}+t\vec{c}$ より，$s=t=\dfrac{2-x^2}{3}$

(2)　(＊)より，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{(2x^2-1)^2}{3(4x^2-1)}}=\dfrac{2\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}\sqrt{4x^2-1}}$ となり，

$$\mathrm{AH}'=\mathrm{AM}\sin\theta=\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}$$

ここで，正三角形 OBC の面積は，$\dfrac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{OM}=\dfrac{1}{2}\cdot 1\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ となるので，四面体 OABC の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\mathrm{AH}'=\frac{\sqrt{3}}{12}\cdot\frac{\sqrt{-x^4+4x^2-1}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}\sqrt{-x^4+4x^2-1}$$

ここで，$V=\dfrac{1}{12}\sqrt{-(x^2-2)^2+3}$ と変形すると，V は $x^2=2$ すなわち $x=\sqrt{2}$ のとき最大となり，このとき辺 OA は面 OBC に垂直となる。

よって，V の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{12}$ である。

コメント

空間ベクトルの四面体への応用問題ですが，与えられた対称性をもとに図形的な解法をとっています。また，(2)において「V を x の式で表せ」という設問がなければ，最大値は辺 OA が面 OBC に垂直なときとして，いきなり導けますが……。

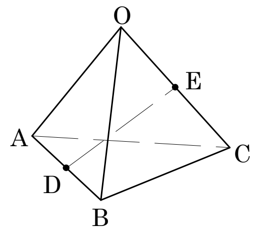
問　題

辺の長さが 1 である正四面体 OABC において辺 AB の中点を D, 辺 OC の中点を E とする。2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DE}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を求めよ。 [2012]

解答例

条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$ であり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$



$\overrightarrow{\mathrm{DE}}=-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ から,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{DE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}&=\frac{1}{2}(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})\\&=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}+1\right)=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

コメント

ベクトルの基本題です。

問　題

空間内の四面体 ABCD を考える。辺 AB, BC, CD, DA の中点を，それぞれ K, L, M, N とする。

(1)　$4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$ を示せ。ここに $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の長さを表す。

(2)　四面体 ABCD のすべての面が互いに合同であるとする。このとき $|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ を示せ。

(3)　辺 AC の中点を P とし，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\sqrt{5}$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{6}$ とする。(2)の仮定のもとで，四面体 PKLN の体積を求めよ。　[2006]

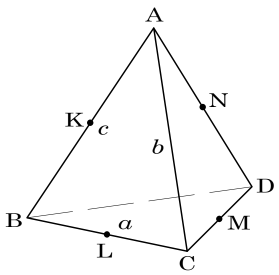
解答例

(1)　$4\overrightarrow{\mathrm{MK}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{LN}}=4\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}\right)\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AD}}}{2}-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{2}\right)$

$=(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}})$

$=(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{BD}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{BD}})$

$=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|^2$



(2)　△ABC について，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とする。

(i)　3 辺の長さが異なるとき（$a\neq b$，$b\neq c$，$c\neq a$）

△ABC≡△ABD より，$\mathrm{BD}=a$ または $\mathrm{AD}=a$ である。

ここで，$\mathrm{BD}=a$ のときは，△BCD について BC = BD となり不適である。

よって，$\mathrm{AD}=a$ となり，このとき $\mathrm{BD}=b$ となる。

同様に考えると，△ABC≡△ACD より，$\mathrm{CD}=c$ かつ $\mathrm{AD}=a$ となる。

以上より，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。

(ii)　2 辺の長さのみ等しいとき（$a=b\neq c$ または $a=c\neq b$ または $b=c\neq a$）

まず，$a=b\neq c$ のとき，△ABC≡△ABD より，$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}=a$ である。

また，△ABC≡△ACD より $\mathrm{CD}=c$ となり，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。なお，対称性から，$a=c\neq b$，$b=c\neq a$ のときも同様となる。

(iii)　3 辺の長さが等しいとき（$a=b=c$）

四面体 ABCD は正四面体であり，AD = BC，BD = CA，CD = AB である。

(i)～(iii)より，

$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$

(3)　(2)より，四面体 ABCD は，右図のように直方体に埋め込まれる。この直方体の辺の長さを p, q, r とおくと，

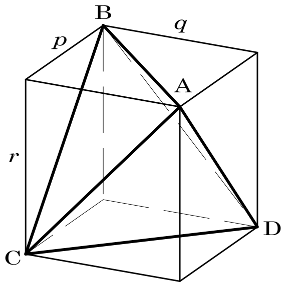
$$p^2+q^2=3,\ \ p^2+r^2=5,\ \ q^2+r^2=6$$

これより，$p^2+q^2+r^2=7$ となり，

$$p=1,\ \ q=\sqrt{2},\ \ r=2$$

そこで，四面体 ABCD の体積を V_0 とおくと，

$$V_0=pqr-\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}pqr\times 4=\frac{1}{3}pqr=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$



四面体 PKLN の体積は, P が辺 AC の中点より四面体 PKAN の体積に等しい。

よって，$\left(\frac{1}{2}\right)^3V_0=\frac{\sqrt{2}}{12}$ である。

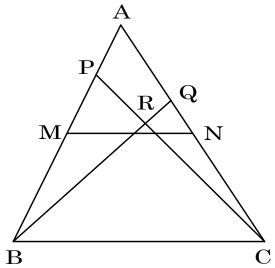
コメント

(3)は，(1)，(2)を無視して，等面四面体が直方体に埋め込まれるということを利用しています。なお, 2001 年東北大で, 1993 年東大で類する問題が出ています。

問　題

$\triangle ABC$ において，辺 AB の中点を M，辺 AC の中点を N とする。辺 AB を $x:1-x\ (0\leqq x<1)$ の比に内分する点 P と，辺 AC を $y:1-y\ (0\leqq y<1)$ の比に内分する点 Q をとり，線分 BQ と線分 CP の交点を R とする。このとき，R が$\triangle AMN$ に含まれるような $(x,\ y)$ 全体を xy 平面に図示し，その面積を求めよ。（ただし，辺 AB，辺 AC を $0:1$ の比に内分する点とは，ともに点 A のこととする）　[2003]

解答例



$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立なので，t, s を実数として，

$$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}$$

R は PC 上にあるので，$\overrightarrow{AR}=\dfrac{t}{x}\overrightarrow{AB}+s\overrightarrow{AC}\ (x\neq 0)$ より，

$$\frac{t}{x}+s=1\ \cdots\cdots\cdots ①$$

R は BQ 上にあるので，$\overrightarrow{AR}=t\overrightarrow{AB}+\dfrac{s}{y}\overrightarrow{AC}\ (y\neq 0)$ より，

$$t+\frac{s}{y}=1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①から $s=1-\dfrac{t}{x}$ として，②に代入すると，$t+\dfrac{1}{y}\left(1-\dfrac{t}{x}\right)=1$

$$\frac{1-xy}{xy}t=\frac{1-y}{y},\quad t=\frac{x(1-y)}{1-xy}\cdots\cdots ③,\quad s=1-\frac{1}{x}\cdot\frac{x(1-y)}{1-xy}=\frac{y(1-x)}{1-xy}\cdots\cdots ④$$

なお，③④から，$x=0$ のときは $(t,\ s)=(0,\ y)$，$y=0$ のときは $(t,\ s)=(x,\ 0)$ となり，条件を満たす。

さて，点 R は$\triangle AMN$ の内部または周上にあることより，

$$t\geqq 0,\ s\geqq 0,\ t+s\leqq\frac{1}{2}$$

$0\leqq x<1$，$0\leqq y<1$ より，$t\geqq 0$，$s\geqq 0$ は満たしているので，$t+s\leqq\dfrac{1}{2}$ より，

$$\frac{x(1-y)}{1-xy}+\frac{y(1-x)}{1-xy}\leqq\frac{1}{2},\quad 2x(1-y)+2y(1-x)\leqq 1-xy$$

$$(3x-2)y\geqq 2x-1\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

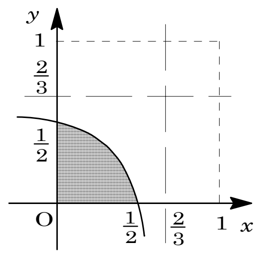
$3x-2>0\ \left(x>\dfrac{2}{3}\right)$のとき，⑤より $y\geqq\dfrac{2x-1}{3x-2}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3(3x-2)}$

$3x-2=0\ \left(x=\dfrac{2}{3}\right)$のとき，⑤は成立しない。

$3x-2<0\ \left(x<\dfrac{2}{3}\right)$のとき，⑤より

$$y\leqq\frac{2x-1}{3x-2}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3(3x-2)}$$

以上，まとめて図示すると，右図の網点部となる。



なお，境界は領域に含まれる。そして，この領域の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\left\{\frac{2}{3}+\frac{1}{3(3x-2)}\right\}dx=\left[\frac{2}{3}x+\frac{1}{9}\log|3x-2|\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{9}\left(\log\frac{1}{2}-\log 2\right)=\frac{1}{3}-\frac{2}{9}\log 2$$

コメント

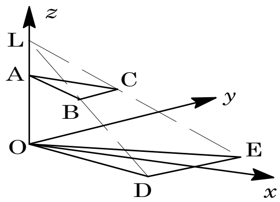
ベクトルの標準的な問題です。計算量も適当です。

問　題

空間内にある 1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC で，A の座標が$(0,\ 0,\ 1)$であり，B と C の z 座標が等しいものを考える。点 $\mathrm{L}(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$にある光源が xy 平面上に作るこの三角形の影の部分の面積の最大値を求めよ。 [2002]

解答例

2 点 B, C を xz 平面に関して対称な点とすると，$\mathrm{BC}=1$ より，$\mathrm{B}\left(a,\ -\frac{1}{2},\ b\right)$，$\mathrm{C}\left(a,\ \frac{1}{2},\ b\right)$とおける。



$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ より，$a^2+\frac{1}{4}+(b-1)^2=1$ ………$(*)$

ここで, $\mathrm{L}(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})$ より，直線 LB は,

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 1+\sqrt{2})+t\left(a,\ -\frac{1}{2},\ b-1-\sqrt{2}\right)$$

xy 平面と交わるのは，$z=0$ から $1+\sqrt{2}+t(b-1-\sqrt{2})=0$，$t=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}$ のときである。$t_0=\dfrac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}$ とおくと，$x=t_0a$，$y=-\frac{1}{2}t_0$ から，$\mathrm{D}\left(t_0a,\ -\frac{1}{2}t_0,\ 0\right)$となる。同様にして $\mathrm{E}\left(t_0a,\ \frac{1}{2}t_0,\ 0\right)$となり，△ODE の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\cdot t_0\cdot t_0a=\frac{1}{2}{t_0}^2a=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}\right)^2a$$

$(*)$より，$a^2+\frac{1}{4}+b^2-2b=0$，$a^2=-b^2+2b-\frac{1}{4}=-(b-1)^2+\frac{3}{4}$ となるので,

$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{1+\sqrt{2}}{1+\sqrt{2}-b}\right)^2\sqrt{-(b-1)^2+\frac{3}{4}}$$

さて，$1+\sqrt{2}-b=u$ とおくと，$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq u\leqq\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$ であり,

$$S=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{2u^2}\sqrt{-(\sqrt{2}-u)^2+\frac{3}{4}}=\frac{(1+\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{\frac{-4(u-\sqrt{2})^2+3}{u^4}}$$

そこで，$f(u)=\dfrac{-4(u-\sqrt{2})^2+3}{u^4}$ とおくと，$S=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{4}\sqrt{f(u)}$

$$f'(u)=\frac{-8(u-\sqrt{2})u^4-\{-4(u-\sqrt{2})^2+3\}\cdot 4u^3}{u^8}$$

$$=\frac{8u^2-24\sqrt{2}u+20}{u^5}$$

$$=\frac{4(\sqrt{2}u-1)(\sqrt{2}u-5)}{u^5}$$

u	$\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$		↗	4	↘	

したがって，$u=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$f(u)$ は最大値 4 をとり，S の最大値は $\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{4}\times\sqrt{4}=\dfrac{(1+\sqrt{2})^2}{2}$ である。

コメント

相似を利用して図形的に解こうか，方程式を立てて代数的に解こうか迷いました。

問　題

次の条件(i), (ii)をともに満たす正の整数 N をすべて求めよ。

(i)　N の正の約数は 12 個。

(ii)　N の正の約数を小さい方から順に並べたとき, 7 番目の数は 12。

ただし, N の約数には 1 と N も含める。　[2017]

解答例

まず, 条件(ii)から, $12=2^2\cdot 3$ が N の正の約数より, N を素因数分解すると,

$$N=2^a\cdot 3^b\cdot 5^c\cdot 7^d\cdot 11^e\cdot 13^f\cdot 17^g\cdot 19^h\cdots\cdots$$

ただし, a は 2 以上, b は 1 以上, $c, d, e, f, g, h, \cdots$ は 0 以上の整数である。

次に, 条件(i)より, N の正の約数は 12 個なので, $c, d, e, f, g, h, \cdots$ の値はすべて 0, またはいずれかのみ 1 で他は 0 である。

さらに, 条件(ii)から, N は正の約数 1, 2, 3, 4, 6, 12 をもち, 12 が小さい方から並べて 7 番目になることから, N の 11 以下の正の約数が 1, 2, 3, 4, 6 以外にもう 1 つだけある。これより, $f=g=h=\cdots=0$ となる。以下, $(a,\ b)$ の値で場合分けをする。

(a)　$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき

$12=(2+1)\times(1+1)\times(1+1)$ より, $c=1$ または $d=1$ または $e=1$ である。

(a-i)　$(c,\ d,\ e)=(1,\ 0,\ 0)$ のときは, $N=2^2\cdot 3\cdot 5=60$ となるが, 1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 5 と 10 があり, 不適である。

(a-ii)　$(c,\ d,\ e)=(0,\ 1,\ 0)$ のときは, $N=2^2\cdot 3\cdot 7=84$ となり, 1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 7 だけなので, 適する。

(a-iii)　$(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 1)$ のときは, $N=2^2\cdot 3\cdot 11=132$ となり, 1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 11 だけなので, 適する。

(b)　$(a,\ b)=(2,\ 3)$ のとき

$12=(2+1)\times(3+1)$ より, $(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 0)$ である。

このとき, $N=2^2\cdot 3^3=108$ となり, 1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 9 だけなので, 適する。

(c)　$(a,\ b)=(3,\ 2)$ のとき

$12=(3+1)\times(2+1)$ より, $(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 0)$ である。

このとき, $N=2^3\cdot 3^2=72$ となるが, 1, 2, 3, 4, 6 以外の 11 以下の正の約数は 8 と 9 があり, 不適である。

(d)　$(a,\ b)=(5,\ 1)$ のとき

$12=(5+1)\times(1+1)$ より, $(c,\ d,\ e)=(0,\ 0,\ 0)$ である。

　このとき，$N=2^5\cdot 3=96$ となり，1，2，3，4，6 以外の 11 以下の正の約数は 8 だけなので，適する。

(a)～(d)より，求める N は，$N=84$，96，108，132 である。

コメント

約数を題材とした整数問題ですが，かなり面倒です。「11 以下の正の約数が 1，2，3, 4, 6 以外にもう 1 つだけ」ということに着目しています。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。

(1)　n が素数または 4 のとき，$(n-1)!$ は n で割り切れないことを示せ。

(2)　n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れることを示せ。

[2016]

解答例

(1)　n が素数のとき，n より小さい自然数 $n-1$，$n-2$，$n-3$，…，3，2，1 は，いずれも n と互いに素である。

すると，それらの数の積 $(n-1)!$ は n と互いに素になり，n で割り切れない。

また，$n=4$ のとき $(n-1)!=3!=6$ は n で割り切れない。

(2)　素数でなくかつ 4 でもない n は，6 以上の合成数であり，

(i)　$n=pq$（p は 2 以上の自然数，q は 3 以上の自然数，$p\neq q$）のとき

$(n-1)!=(pq-1)(pq-2)(pq-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$pq-p=p(q-1)$ は p の倍数，$pq-q=q(p-1)$ は q の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=pq$ で割り切れる。

(ii)　$n=r^2$（r は 3 以上の素数）のとき

$(n-1)!=(r^2-1)(r^2-2)(r^2-3)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$ となり，$r^2-r=r(r-1)$ は r の倍数，$r^2-2r=r(r-2)$ は r の倍数であるので，$(n-1)!$ は $n=r^2$ で割り切れる。

(i)(ii)より，n が素数でなくかつ 4 でもないとき，$(n-1)!$ は n で割り切れる。

コメント

整数からむ証明問題です。方針を立てるために，まず具体例を考え，それを一般化して解答例を作りました。

問　題

3 以上の奇数 n に対して，a_n と b_n を次のように定める。

$$a_n=\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1),\quad b_n=\frac{n^2-1}{8}$$

(1)　a_n と b_n はどちらも整数であることを示せ。

(2)　a_n-b_n は 4 の倍数であることを示せ。　[2014]

解答例

(1)　連続する 3 整数の積 $(k-1)k(k+1)$ は 6 の倍数より，$a_n=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(k-1)k(k+1)$ は整数である。また，n は 3 以上の奇数より，l を自然数として $n=2l+1$ と表すと，

$$b_n=\frac{n^2-1}{8}=\frac{1}{8}(4l^2+4l)=\frac{1}{2}l(l+1)$$

すると，$l(l+1)$ は偶数なので，b_n は整数である。

(2)　$a_n=\dfrac{1}{6}\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{4}\{(k-1)k(k+1)(k+2)-(k-2)(k-1)k(k+1)\}$

$$=\frac{1}{24}(n-2)(n-1)n(n+1)=\frac{1}{24}(2l-1)2l(2l+1)(2l+2)$$

$$=\frac{1}{6}l(l+1)(2l-1)(2l+1)$$

すると，$a_n-b_n=\dfrac{1}{6}l(l+1)(2l-1)(2l+1)-\dfrac{1}{2}l(l+1)$

$$=\frac{1}{6}l(l+1)\{(2l-1)(2l+1)-3\}=\frac{1}{6}l(l+1)(4l^2-4)$$

$$=\frac{2}{3}(l-1)l(l+1)^2$$

連続する 3 整数の積 $(l-1)l(l+1)$ は 6 の倍数より，a_n-b_n は 4 の倍数となる。

コメント

整数の基本問題です。なお，a_n は階差数列を作って求めましたが，普通に和の公式を適用しても構いません。

問　題

2 次方程式$x^2-3x+5=0$の 2 つの解α，βに対し，$\alpha^n+\beta^n-3^n$はすべての正の整数nについて5の整数倍になることを示せ。 [2013]

解答例

$x^2-3x+5=0$の2つの解α，βに対して，$\alpha+\beta=3$，$\alpha\beta=5$………(＊)

さて，すべての正の整数nについて，$\alpha^n+\beta^n-3^n$は5の整数倍になることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$のとき　(＊)を利用すると，

$$\alpha^1+\beta^1-3^1=0,\ \alpha^2+\beta^2-3^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta-9=-10$$

ともに，$\alpha^n+\beta^n-3^n$は5の整数倍になる。

(ii)　$n=k,\ k+1$のとき　l, mを整数として，5の整数倍を仮定すると，

$$\alpha^k+\beta^k-3^k=5l,\ \alpha^{k+1}+\beta^{k+1}-3^{k+1}=5m$$

このとき，$\alpha^2=3\alpha-5$，$\beta^2=3\beta-5$に注意して，

$$\alpha^{k+2}+\beta^{k+2}-3^{k+2}=3\alpha^{k+1}-5\alpha^k+3\beta^{k+1}-5\beta^k-3^{k+2}$$
$$=3(5m+3^{k+1})-5(5l+3^k)-3^{k+2}=5(3m-5l-3^k)$$

$n=k+2$のときも5の整数倍となる。

(i)(ii)より，すべての正の整数nについて，$\alpha^n+\beta^n-3^n$は5の整数倍になる。

コメント

数学的帰納法を利用する有名問題です。

問　題

$\log_{10} 3 = 0.4771$ として，$\displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n$ の桁数を求めよ。　[2012]

解答例

$S_{99} = \displaystyle\sum_{n=0}^{99} 3^n$ とおくと，$S_{99} = \dfrac{3^{100}-1}{3-1} = \dfrac{1}{2}(3^{100}-1)$

さて，$2\cdot 3^{99} < 3^{100}-1 < 3^{100}$ より，$3^{99} < S_{99} < \dfrac{3^{100}}{2}$ となり，

$$99\log_{10} 3 < \log_{10} S_{99} < 100\log_{10} 3 - \log_{10} 2$$

ここで，$\log_{10} 3 = 0.4771$ から，$47.2329 < \log_{10} S_{99} < 47.71 - \log_{10} 2 < 47.71$

よって，S_{99} は 48 桁の整数である。

コメント

有名問題です。最高位の数を調べなければいけないかとも思いましたが，この問題では不要でした。

問　題

実数 a に対して，a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。10000 以下の正の整数 n で $[\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるものは何個あるか。　[2012]

解答例

正の整数 n, k に対して，$k^2 \leqq n < (k+1)^2$ のとき，$[\sqrt{n}\,] = k$ となる。

さて，$k^2 \leqq n < (k+1)^2$ の区間にある k の倍数は，k^2，$k(k+1)$ 以外を調べると，

$$k(k+2)-(k+1)^2 = -1 < 0,\ k(k+2) < (k+1)^2$$

$$k(k+3)-(k+1)^2 = k-1 \geqq 0,\ (k+1)^2 \leqq k(k+3)$$

これより，k^2，$k(k+1)$，$k(k+2)$ の 3 個となる。

すると，10000 以下の整数 n で，$[\sqrt{n}\,]$ が n の約数となるのは，$10000 = 100^2$ に注目すると，$1^2 \leqq n < 2^2$，$2^2 \leqq n < 3^2$，$\cdots$，$99^2 \leqq n < 100^2$ の各区間に 3 個ずつあり，これに 10000 も加えて，合わせて，$3\times 99+1 = 298$ 個存在する。

コメント

読解力の問題です。最初は実験をして，考え方を整理しました。ただ，結論は意外なほどシンプルなものでした。

問　題

a を正の整数とする。正の実数 x についての方程式

$$(*)\quad x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$$

が解をもたないような a を小さい順に並べたものを a_1, a_2, a_3, $\cdots$とする。ここに[ ]はガウス記号で, 実数 u に対し, $[u]$は u 以下の最大の整数を表す。

(1) $a=7$, 8, 9 の各々について(*)の解があるかどうかを判定し, ある場合は解 x を求めよ。

(2) a_1, a_2 を求めよ。

(3) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}$ を求めよ。 [2010]

解答例

(1) x を正の実数として, $x=\left[\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)\right]$……(*)が解をもつ条件は,

$$x\leqq\frac{1}{2}\left(x+\frac{a}{x}\right)<x+1\quad(x\text{ は正の整数})\cdots\cdots\cdots①$$

①より, $2x^2\leqq x^2+a$ から, $x\leqq\sqrt{a}$

また, $x^2+a<2x^2+2x$ から $x^2+2x-a>0$ となり, $x>\sqrt{a+1}-1$ より, ①は,

$$\sqrt{a+1}-1<x\leqq\sqrt{a}\quad(x\text{ は正の整数})\cdots\cdots\cdots②$$

$a=7$ のとき, ②から $\sqrt{8}-1<x\leqq\sqrt{7}$ となり, 解は $x=2$

$a=8$ のとき, ②から $3-1<x\leqq\sqrt{8}$ となり, 解なし

$a=9$ のとき, ②から $\sqrt{10}-1<x\leqq 3$ となり, 解は $x=3$

(2) $a=1$ のとき, ②から $\sqrt{2}-1<x\leqq 1$ となり, 解は $x=1$

$a=2$ のとき, ②から $\sqrt{3}-1<x\leqq\sqrt{2}$ となり, 解は $x=1$

$a=3$ のとき, ②から $2-1<x\leqq\sqrt{3}$ となり, 解なし

$a=4$ のとき, ②から $\sqrt{5}-1<x\leqq 2$ となり, 解は $x=2$

$a=5$ のとき, ②から $\sqrt{6}-1<x\leqq\sqrt{5}$ となり, 解は $x=2$

$a=6$ のとき, ②から $\sqrt{7}-1<x\leqq\sqrt{6}$ となり, 解は $x=2$

そこで, (1)の結果と合わせると, (*)が解をもたないのは, $a=3$, 8, $\cdots$ となり,

$$a_1=3,\ a_2=8$$

(3) まず, n を正の整数として,

(i) $n^2\leqq a<(n+1)^2-1$ ($n\leqq\sqrt{a}$ かつ $\sqrt{a+1}-1<n$) のとき

②の整数解は, $x=n$ である。

(ii) $a=(n+1)^2-1$ のとき

②に代入すると, $n<x\leqq\sqrt{(n+1)^2-1}\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$\sqrt{(n+1)^2-1}-n=\dfrac{2n}{\sqrt{n^2+2n}+n}<\dfrac{2n}{n+n}=1$ から，③は整数解をもたない。

(i)(ii)より，$a_n=(n+1)^2-1=n(n+2)$ となり，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{a_n}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}-\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=\frac{3}{4}$$

コメント

ガウス記号を題材としたおもしろい問題です。初めに考えた通りを記述しましたので, (2)は冗長な解答例となっています。

問　題

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組$(m,\ n)$で，方程式 $x^2-nx+m=0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。　[2009]

解答例

$1\leqq m\leqq 2N$……①，$1\leqq n\leqq 2N$……②において，方程式 $x^2-nx+m=0$ の実数解を $x=\alpha,\ \beta$ とおく。N 以上の解を少なくとも 1 つもつことより，

(a)　$N<\alpha\leqq\beta$ のとき　$\dfrac{n}{2}>N$ が必要となるが，②に反する。

(b)　$\alpha<N<\beta$ のとき　条件は，$N^2-nN+m<0$ より，$m<Nn-N^2$

(c)　$N=\alpha\leqq\beta$ または $\alpha\leqq\beta=N$ のとき

条件は，$N^2-nN+m=0$，$m=Nn-N^2$

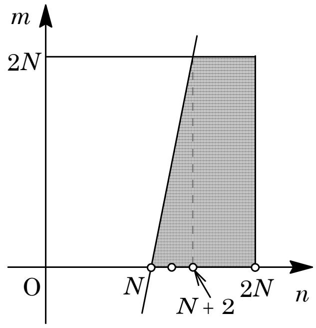
(a)(b)(c)より，$m\leqq Nn-N^2$ ………③

さて，③の境界線 $m=Nn-N^2$ において，$m=2N$ のとき，

$$2N=Nn-N^2,\ \ n=N+2$$

(i)　$N+2\leqq 2N$ $(N\geqq 2)$ のとき

①②③を満たす$(n,\ m)$は，右図の網点部にある格子点が対応する。ただし，n 軸以外の境界は領域に含まれる。



すると，領域内の格子点の個数 S は，

$$S=\sum_{k=N}^{N+2}(Nk-N^2)+2N(2N-N-2)$$
$$=N\cdot\frac{N+N+2}{2}\cdot 3-3N^2+2N(N-2)$$
$$=2N^2-N$$

(ii)　$N+2>2N$ $(N=1)$ のとき

①②③より，$1\leqq m\leqq 2$，$1\leqq n\leqq 2$，$m\leqq n-1$ となり，この不等式を満たす格子点$(n,\ m)$は，$(n,\ m)=(2,\ 1)$のみである。

ここで，$N=1$ のとき $2N^2-N=1$ より，格子点の個数は $S=2N^2-N$ と表せる。

(i)(ii)より，求める$(m,\ n)$は，$2N^2-N$ 組存在する。

コメント

N 以上の実数解が 1 個，2 個と場合分けを覚悟して問題に臨みましたが，その必要はありませんでした。

問　題

p を素数, n を 0 以上の整数とする。

(1) m は整数で $0 \leqq m \leqq n$ とする。1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れないものの個数を求めよ。

(2) 1 から p^{n+1} までの 2 つの整数 x, y に対し, その積 xy が p^{n+1} で割り切れるような組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。 [2007]

解答例

(1) $0 \leqq m \leqq n$ のとき, 1 から p^{n+1} までの整数の中で, p^m で割り切れるのは,

$$p^m,\ 2p^m,\ 3p^m,\ \cdots\cdots,\ p^{n+1-m}p^m$$

これより, p^{n+1-m} 個の整数があり, また p^{m+1} で割り切れるのは,

$$p^{m+1},\ 2p^{m+1},\ 3p^{m+1},\ \cdots\cdots,\ p^{n-m}p^{m+1}$$

これより, p^{n-m} 個の整数がある。

したがって, p^m で割り切れ p^{m+1} で割り切れない整数の個数は,

$$p^{n+1-m} - p^{n-m} = (p-1)p^{n-m}$$

(2) (i) $x = p^{n+1}$ のとき

任意の y で, 積 xy が p^{n+1} で割り切れるので, $(x,\ y)$ の個数は p^{n+1} である。

(ii) $x = p^m\ (0 \leqq m \leqq n)$ のとき

x が p^m で割り切れるが p^{m+1} では割り切れず, しかも積 xy が p^{n+1} で割り切れる条件は, y が p^{n+1-m} で割り切れることである。すなわち y は,

$$p^{n+1-m},\ 2p^{n+1-m},\ 3p^{n+1-m},\ \cdots\cdots,\ p^m p^{n+1-m}$$

すると, x の個数は(1)より $(p-1)p^{n-m}$, y の個数は p^m より, $(x,\ y)$ の個数は

$$(p-1)p^{n-m} \times p^m = (p-1)p^n$$

(i)(ii)より, 積 xy が p^{n+1} で割り切れる $(x,\ y)$ の個数は,

$$p^{n+1} + \sum_{m=0}^{n}(p-1)p^n = p^{n+1} + (n+1)(p-1)p^n = (n+2)p^{n+1} - (n+1)p^n$$

コメント

たとえば $p=2$, $m=3$, $n=10$ と, 具体的に数値を入れて, まず考えています。上の解は, それを一般的に記述したにすぎません。

問　題

e を自然対数の底とし，数列$\{a_n\}$を次式で定義する。

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n \, dx \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

(1) $n \geqq 3$ のとき，次の漸化式を示せ。 $a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1})$

(2) $n \geqq 1$ に対し，$a_n > a_{n+1} > 0$ となることを示せ。

(3) $n \geqq 2$ のとき，以下の不等式が成立することを示せ。

$$a_{2n} < \frac{3 \cdot 5 \cdots\cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots\cdot (2n)}(e-2)$$

[2005]

解答例

(1) $n \geqq 2$ のとき，条件より，

$$a_n = \int_1^e (\log x)^n \, dx = \Big[x(\log x)^n \Big]_1^e - \int_1^e x \cdot n(\log x)^{n-1} x^{-1} \, dx$$

$$= e - n\int_1^e (\log x)^{n-1} dx = e - na_{n-1} \quad (n \geqq 2) \cdots\cdots\cdots ①$$

$n \geqq 3$ のとき，①より，$a_{n-1} = e - (n-1)a_{n-2} \cdots\cdots\cdots ②$

①－②から，$a_n - a_{n-1} = -na_{n-1} + (n-1)a_{n-2}$ となり，

$$a_n = (n-1)(a_{n-2} - a_{n-1}) \quad (n \geqq 3)$$

(2) $1 \leqq x \leqq e$ において，$(\log x)^{n+1} \geqq 0$ （等号は $x = 1$ のときのみ成立）より，

$$a_{n+1} = \int_1^e (\log x)^{n+1} dx > 0$$

また, (1)より，$a_{n+2} = (n+1)(a_n - a_{n+1}) > 0$ から，$a_n > a_{n+1}$

よって，$a_n > a_{n+1} > 0$

(3) (2)より，$a_{2n-1} > a_{2n} > 0 \cdots\cdots\cdots ③$

また(1)より，$a_{2n} = (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n-1}) \quad (n \geqq 2) \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$a_{2n} < (2n-1)(a_{2n-2} - a_{2n})$ となり，

$$2n a_{2n} < (2n-1)a_{2n-2},\quad a_{2n} < \frac{2n-1}{2n} a_{2n-2} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

$a_n > 0$ より，⑤から，$a_{2n} < \dfrac{2n-1}{2n} \cdot \dfrac{2n-3}{2n-2} \cdots\cdots \dfrac{5}{6} \cdot \dfrac{3}{4} a_2$

ここで，$a_2 = \displaystyle\int_1^e (\log x)^2 dx = e - 2\int_1^e \log x \, dx = e - 2\Big[x\log x - x \Big]_1^e = e - 2$

以上より，$a_{2n} < \dfrac{3 \cdot 5 \cdots\cdot (2n-1)}{4 \cdot 6 \cdots\cdot (2n)}(e-2)$

コメント

(3)の結論の不等式から，どのような漸化式を導けばよいのか推測できます。そのための誘導が, (1)と(2)です。

問　題

2 辺の長さの比が$1:a\ (a>1)$の長方形がある。この長方形から 1 本の線分にそって切ることにより正方形を取り去る。残った図形が正方形でなければ，再び同じ要領で正方形を取り去り，残りが正方形でない限りこの操作を続ける。たとえば，$a=3$，$a=\dfrac{3}{2}$の場合はどちらも 2 回でこの操作は終わる。

(1)　3 回でこの操作が終わるような a の値をすべて求めよ。

(2)　n 回の操作で終わるような a の値の最大値と最小値を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　縦の長さが 1，横の長さが a の長方形を考えると，$a>1$ より，1 回目に取り去る正方形の 1 辺の長さは 1 である。また，3 回で操作が終わるため，3 回目に取り去る正方形と，残った正方形は同じ大きさである。

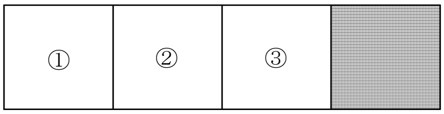
ここで，n 回目に取り去る正方形の 1 辺の長さをl_n，最後に残った正方形の 1 辺の長さを L とすると，

$$1=l_1\geqq l_2\geqq l_3=L$$

(i)　$l_1=l_2=l_3$のとき

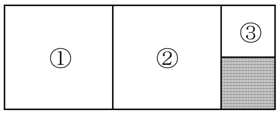
$l_1=l_2=l_3=L=1$なので，右図から，

$a=4$



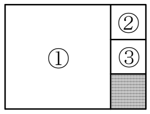
(ii)　$l_1=l_2>l_3$のとき

$1=l_1=l_2>l_3=L$なので，右図から，$a=2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{5}{2}$



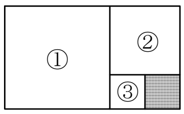
(iii)　$l_1>l_2=l_3$のとき

$1=l_1>l_2=l_3=L$なので，右図から，$a=1+\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{3}$



(iv)　$l_1>l_2>l_3$のとき

$1=l_1>l_2>l_3=L$なので，右図から，$a=1+\dfrac{2}{3}=\dfrac{5}{3}$



(2)　a が最大となるのは$1=l_1=l_2=l_3=\cdots=l_n=L$のときである。

このとき，$a=n+1$となる。

a が最小となるのは$1=l_1>l_2=l_3=\cdots=l_n=L$のときである。

このとき，$l_2=l_3=\cdots=l_n=L=\dfrac{1}{n}$より，$a=1+\dfrac{1}{n}$となる。

コメント

答は直観的にわかるのですが，それをどのように記述するとよいのか，迷います。上の解答例では直観的な部分を残しています。

問　題

n は正の整数とし，文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列すべての集合を A_n とする。A_n の要素に対し次の条件(∗)を考える。

(∗)　文字 c が 2 つ以上連続して現れない。

以下 A_n から要素を 1 つ選ぶとき，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。

(1)　A_n から要素を 1 つ選ぶとき，それが条件(∗)を満たす確率 $P(n)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 12$ とする。A_n から要素を 1 つ選んだところ，これは条件(∗)を満たし，その 7 番目の文字は c であった。このとき，この要素の 10 番目の文字が c である確率を $Q(n)$ とする。極限値 $\lim_{n\to\infty} Q(n)$ を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　文字 a, b, c を重複を許して n 個並べてできる文字列の集合 A_n の要素は 3^n 個あり，どの要素も同じ確率で選ばれるとする。このとき，文字 c が 2 つ以上連続して現れない場合(∗)を考える。

そこで，(∗)を満たし，k 番目の文字が a, b, c である並べ方を，それぞれ a_k，b_k，c_k 通りとすると，

$$a_{k+1} = a_k + b_k + c_k,\ b_{k+1} = a_k + b_k + c_k,\ c_{k+1} = a_k + b_k$$

ここで，$d_k = a_k + b_k$ とおくと，$d_1 = 2$，$c_1 = 1$ として，

$$d_{k+1} = 2d_k + 2c_k \cdots\cdots\text{①},\ c_{k+1} = d_k \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$d_{k+1} = 2d_k + 2d_{k-1}\ (k \geqq 2) \cdots\cdots$③

そこで，2 次方程式 $x^2 = 2x + 2$ を対応させ，その解を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，

$$\alpha = 1 - \sqrt{3},\ \beta = 1 + \sqrt{3}$$

さて，③を変形すると，$d_{k+1} - \alpha d_k = \beta(d_k - \alpha d_{k-1})$ となり，$d_2 = 4 + 2 = 6$ から，

$$d_{k+1} - \alpha d_k = (d_2 - \alpha d_1)\beta^{k-1} = \{6 - 2(1 - \sqrt{3})\}\beta^{k-1} = (4 + 2\sqrt{3})\beta^{k-1} = \beta^{k+1}$$

同様に，③を変形すると，$d_{k+1} - \beta d_k = \alpha(d_k - \beta d_{k-1})$ となり，

$$d_{k+1} - \beta d_k = (d_2 - \beta d_1)\alpha^{k-1} = \{6 - 2(1 + \sqrt{3})\}\alpha^{k-1} = (4 - 2\sqrt{3})\alpha^{k-1} = \alpha^{k+1}$$

よって，$(-\alpha + \beta)d_k = \beta^{k+1} - \alpha^{k+1}$ となり，$d_k = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\beta^{k+1} - \alpha^{k+1})$

⑤より，$c_k = \dfrac{1}{2\sqrt{3}}(\beta^k - \alpha^k)\ (k \geqq 2)$ となり，この式は $k = 1$ のときも成立する。

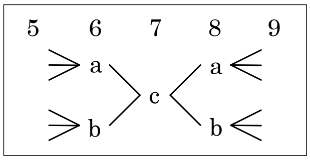
以上より，A_n から要素を 1 つ選ぶとき，それが(∗)を満たす確率 $P(n)$ は，

$$P(n) = \frac{d_n + c_n}{3^n} = \frac{1}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}(\beta^{n+1} - \alpha^{n+1} + \beta^n - \alpha^n)$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}\{\beta^n(\beta + 1) - \alpha^n(\alpha + 1)\}$$

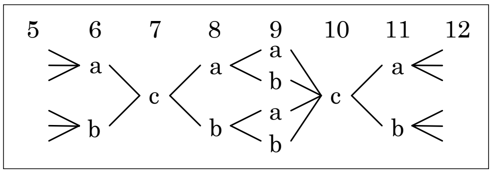
$$=\frac{1}{2\sqrt{3}\cdot 3^n}\{(2+\sqrt{3})\beta^n-(2-\sqrt{3})\alpha^n\}=\frac{1}{4\sqrt{3}\cdot 3^n}(\beta^{n+2}-\alpha^{n+2})$$
$$=\frac{1}{4\sqrt{3}\cdot 3^n}\{(1+\sqrt{3})^{n+2}-(1-\sqrt{3})^{n+2}\}$$

(2)　$n \geqq 12$ のとき，A_n の要素で(＊)を満たし，7 番目の文字が c である確率を p_X とおくと，



$$p_X=\frac{(d_5+c_5)\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot(d_{n-8}+c_{n-8})}{3^n}$$

同様に，A_n の要素で(＊)を満たし，7 番目と 10 番目の文字が c である確率を p_Y とおくと，



$$p_Y=\frac{(d_5+c_5)\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot 2\cdot 1\cdot 2\cdot(d_{n-11}+c_{n-11})}{3^n}$$

これより，A_n の要素で(＊)を満たし，7 番目の文字が c であったとき，10 番目の文字が c である確率 $Q(n)$ は，

$$Q(n)=\frac{p_Y}{p_X}=\frac{2^4(d_5+c_5)(d_{n-11}+c_{n-11})}{2^2(d_5+c_5)(d_{n-8}+c_{n-8})}=\frac{4\{(1+\sqrt{3})^{n-9}-(1-\sqrt{3})^{n-9}\}}{(1+\sqrt{3})^{n-6}-(1-\sqrt{3})^{n-6}}$$
$$=4\cdot\frac{1-\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n-9}}{(1+\sqrt{3})^3-(1-\sqrt{3})^3\left(\frac{1-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}\right)^{n-9}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)=\frac{4}{(1+\sqrt{3})^3}=\frac{2}{5+3\sqrt{3}}=3\sqrt{3}-5$ となる。

コメント

確率と漸化式の融合問題です。加えて極限の味付けもあり，量的にかなりのものとなっています。なお，解答例は最初に考えたもので記しましたが，いきなり①と②から始めると，少し簡素になります。

問　題

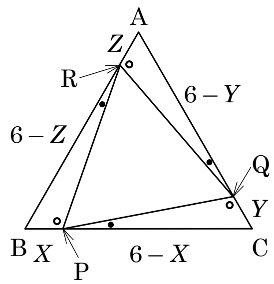
$\triangle$ABC を 1 辺の長さ 6 の正三角形とする。サイコロを 3 回振り，出た目を順に X, Y, Z とする。出た目に応じて，点 P, Q, R をそれぞれ線分 BC, CA, AB 上に，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\dfrac{X}{6}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=\dfrac{Y}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\dfrac{Z}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を満たすようにとる。

(1)　$\triangle$PQR が正三角形になる確率を求めよ。

(2)　点 B, P, R を互いに線分で結んでできる図形を T_1，点 C, Q, P を互いに線分で結んでできる図形を T_2，点 A, R, Q を互いに線分で結んでできる図形を T_3 とする。T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率を求めよ。

(3)　$\triangle$PQR の面積を S とし，S のとり得る値の最小値を m とする。m の値および $S=m$ となる確率を求めよ。　[2016]

解答例



(1)　1 辺の長さ 6 の正三角形 ABC に対し，点 P, Q, R を，それぞれ辺 BC, CA, AB 上に，BP $=X$，CQ $=Y$，AR $=Z$ となるようにとる。

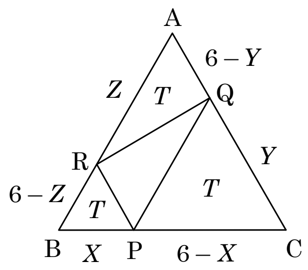
ここで，$\triangle$PQR が正三角形のとき $\angle$BRP $=\theta$ とおくと，

$$\angle\mathrm{BPR}=120^\circ-\theta,\ \angle\mathrm{CPQ}=120^\circ-(120^\circ-\theta)=\theta$$

同様に考えると，$\angle\mathrm{CQP}=120^\circ-\theta$ となり，

$$\angle\mathrm{AQR}=\theta,\ \angle\mathrm{ARQ}=120^\circ-\theta$$

すると，RP $=$ PQ $=$ QR から $\triangle\mathrm{BPR}\equiv\triangle\mathrm{CQP}\equiv\triangle\mathrm{ARQ}$ となり，$X=Y=Z$ から，$\triangle$PQR が正三角形になる確率は，$X=Y=Z=6$ も含めて $\dfrac{6}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。



(2)　与えられた T_1，T_2，T_3 に対して，T_1 と T_2 が正三角形，T_3 が正三角形でない場合を考える。

このとき，$X\neq6$，$Y\neq6$，$Z\neq6$，$X=6-Z$，$Y=6-X$，$Z\neq6-Y$ から，$(X,\ Y,\ Z)$ の組は，

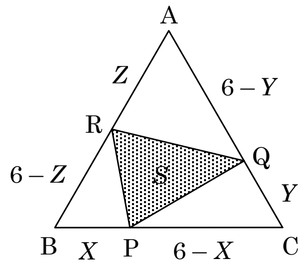
$$(1,\ 5,\ 5),\ (2,\ 4,\ 4),\ (4,\ 2,\ 2),\ (5,\ 1,\ 1)$$

すると，T_2 と T_3 のみが正三角形，T_3 と T_1 のみが正三角形の場合も同様に 4 通りずつとなるので，T_1，T_2，T_3 のうち，ちょうど 2 つが正三角形になる確率は，$\dfrac{4\times3}{6^3}=\dfrac{1}{18}$ である。

(3)　$\triangle$PQR の面積 S とすると,

$$S=\frac{1}{2}\cdot 6^2\sin 60^\circ-\frac{1}{2}\{X(6-Z)+Y(6-X)+Z(6-Y)\}\sin 60^\circ$$

$$=9\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{4}\{X(6-Z)+Y(6-X)+Z(6-Y)\}$$



ここで，$F=X(6-Z)+Y(6-X)+Z(6-Y)$ とおくと, S が最小になるのは F が最大になるときである。

さて, F を X についてまとめると,

$$F=(6-Y-Z)X-YZ+6Y+6Z$$

まず, Y と Z の値を固定して,

(i)　$6-Y-Z>0$ $(2\leqq Y+Z\leqq 5)$ のとき

$X=6$ のとき F は最大になり，$F=(6-Y-Z)\cdot 6-YZ+6Y+6Z=-YZ+36$

次に Z を固定すると，$Y=1$ のとき F は最大になり，$F=-Z+36$

これより，$Z=1$ のとき F は最大値 35 をとる。

なお, 条件 $6-Y-Z>0$ は満たされている。

(ii)　$6-Y-Z=0$ $(Y+Z=6)$ のとき

このとき，$F=-(6-Z)Z+6(6-Z)+6Z=Z^2-6Z+36=(Z-3)^2+27$

これより，$1\leqq Z\leqq 5$ なので $Z=1$ または $Z=5$ のとき F は最大値 31 をとる。

(iii)　$6-Y-Z<0$ $(7\leqq Y+Z\leqq 12)$ のとき

$X=1$ のとき F は最大になり,

$$F=(6-Y-Z)-YZ+6Y+6Z=-YZ+5Y+5Z+6$$

次に Z を固定すると，$F=(5-Z)Y+5Z+6$

(iii-i)　$5-Z>0$ $(Z\leqq 4)$ のとき

$Y=6$ のとき F は最大になり，$F=(5-Z)\cdot 6+5Z+6=-Z+36$

これより，$Z=1$ のとき F は最大値 35 をとる。

なお, 条件 $6-Y-Z<0$ は満たされている。

(iii-ii)　$5-Z=0$ $(Z=5)$ のとき

このとき，$F=-5+36=31$ となる。

(iii-iii)　$5-Z<0$ $(Z=6)$ のとき

このとき，$F=-Y+36$ から，$Y=1$ のとき F は最大になり最大値 35 をとる。

なお, 条件 $6-Y-Z<0$ は満たされている。

(i)〜(iii)より, F は最大値 35 をとり，このとき $(X,\ Y,\ Z)$ は,

$$(X,\ Y,\ Z)=(6,\ 1,\ 1),\ (1,\ 6,\ 1),\ (1,\ 1,\ 6)$$

以上より，S のとり得る最小値 m は，$m = 9\sqrt{3} - \dfrac{\sqrt{3}}{4}\cdot 35 = \dfrac{\sqrt{3}}{4}$

そして，$S = m$ となる確率は，$\dfrac{3}{6^3} = \dfrac{1}{72}$ である。

コメント

確率の問題ですが，それを計算するまでのプロセスに一癖ある 3 つの設問で構成されています。(1)は，図形的に考えれば結論はほぼ確定ですが，それを示すのに初め辺の長さに着目したものの複雑になり，角に変更というわけです。(2)も(1)と同様な印象です。また，(3)は独立な 3 変数がからむ最大・最小問題で，基本に従って処理していますが，かなり記述量が多くなりました。

問　題

6 個のさいころを同時に投げるとき，ちょうど 4 種類の目が出る確率を既約分数で表せ。 [2013]

解答例

6 個のさいころを同時に投げるとき，6^6 通りの目の出方が同様に確からしい。

ちょうど 4 種類の目が出るとき，その目の選び方が ${}_6C_4=15$ 通りある。このとき，次の 2 つの場合について，その出方の数を求める。

(i)　同じ目が 3 個出るとき

同じ目の選び方が ${}_4C_1=4$ 通りで，さいころとの対応は $\dfrac{6!}{3!}$ 通りである。

(ii)　同じ目が 2 個ずつ 2 種類出るとき

同じ目の選び方が ${}_4C_2=6$ 通りで，さいころとの対応は $\dfrac{6!}{2!2!}$ 通りである。

(i)(ii)より，ちょうど 4 種類の目が出る確率は，

$$\frac{15\times\left(4\times\dfrac{6!}{3!}+6\times\dfrac{6!}{2!2!}\right)}{6^6}=\frac{15\times(4\times5!+3\times3\times5!)}{6^6}=\frac{15\times13\times5!}{6^6}=\frac{325}{648}$$

コメント

難しくはないものの，ミスをしていないかどうか，気にかかる問題です。

問　題

1 から 6 までの目がそれぞれ$\dfrac{1}{6}$の確率で出るさいころを同時に 3 個投げるとき，目の積が 10 の倍数になる確率を求めよ。 [2012]

解答例

まず，事象 X の確率を $P(X)$ で表す。

さて，さいころを 3 個投げたとき，目の積が 2 の倍数となる事象を A, 5 の倍数となる事象を B とすると，目の積が 10 の倍数となる事象は $A\cap B$ であり，

$$P(\overline{A})=\left(\frac{3}{6}\right)^3=\frac{27}{216},\ P(\overline{B})=\left(\frac{5}{6}\right)^3=\frac{125}{216},\ P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{2}{6}\right)^3=\frac{8}{216}$$

すると，加法定理を用いて，

$$\begin{aligned}P(A\cap B)&=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})\\&=1-\frac{27}{216}-\frac{125}{216}+\frac{8}{216}=\frac{72}{216}=\frac{1}{3}\end{aligned}$$

コメント

確率の頻出題です。

問　題

1 から n までの数字がもれなく一つずつ書かれた n 枚のカードの束から同時に 2 枚のカードを引く。このとき，引いたカードの数字のうち小さい方が 3 の倍数である確率を $p(n)$ とする。

(1)　$p(8)$ を求めよ。

(2)　正の整数 k に対し，$p(3k+2)$ を k で表せ。　[2010]

解答例

(1)　8 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_8C_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が 3 となる確率は $\dfrac{{}_5C_1}{{}_8C_2}=\dfrac{5}{28}$，小さい方が 6 となる確率は $\dfrac{{}_2C_1}{{}_8C_2}=\dfrac{2}{28}$ であるので，

$$p(8)=\frac{5}{28}+\frac{2}{28}=\frac{1}{4}$$

(2)　$3k+2$ 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_{3k+2}C_2$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，引いたカードの数字の小さい方が $3l$ ($l=1,\ 2,\ \cdots,\ k$) となる確率は，

$$\frac{{}_{3k+2-3l}C_1}{{}_{3k+2}C_2}=\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}$$

$l=1,\ 2,\ \cdots,\ k$ の和をとると，

$$p(3k+2)=\sum_{l=1}^{k}\frac{2(3k+2-3l)}{(3k+2)(3k+1)}=\frac{2}{(3k+2)(3k+1)}\cdot\frac{(3k-1)+2}{2}\cdot k=\frac{k}{3k+2}$$

コメント

不思議なぐらい基本的な問題です。なお，(2)の和は，シグマの公式でなく，等差数列の和として計算しています。

問　題

いびつなサイコロがあり，1 から 6 までのそれぞれの目が出る確率が$\dfrac{1}{6}$とは限らないとする。このサイコロを 2 回振ったとき同じ目が出る確率を P とし，1 回目に奇数，2 回目に偶数の目が出る確率を Q とする。

(1)　$P \geqq \dfrac{1}{6}$ であることを示せ。また，等号が成立するための必要十分条件を求めよ。

(2)　$\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$ であることを示せ。　[2008]

解答例

(1)　題意のサイコロを振ったとき，k の目が出る確率を p_k とおくと，

$$p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1 \cdots\cdots\cdots(*)$$

サイコロを 2 回振ったとき，同じ目の出る確率 P は，$(*)$より，

$$\begin{aligned}P &= {p_1}^2 + {p_2}^2 + {p_3}^2 + {p_4}^2 + {p_5}^2 + {p_6}^2 \\ &= \left(p_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(p_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(p_6 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{3}(p_1 + p_2 + \cdots + p_6) - \frac{1}{6} \\ &= \left(p_1 - \frac{1}{6}\right)^2 + \left(p_2 - \frac{1}{6}\right)^2 + \cdots + \left(p_6 - \frac{1}{6}\right)^2 + \frac{1}{6}\end{aligned}$$

よって，$P \geqq \dfrac{1}{6}$ となる。

また，等号が成立するのは，$p_1 = p_2 = p_3 = p_4 = p_5 = p_6 = \dfrac{1}{6}$ のときである。

(2)　サイコロを 2 回振ったとき，1 回目に奇数，2 回目に偶数の出る確率 Q は，

$$Q = (p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6)$$

相加平均と相乗平均の関係を利用すると，$(*)$より，

$$(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6) \leqq \left(\frac{p_1 + p_3 + p_5 + p_2 + p_4 + p_6}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

よって，$Q \leqq \dfrac{1}{4}$ となる。

また，$3P + 2Q - 1 = 3({p_1}^2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_6}^2) + 2(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6) - 1$

ここで，$(*)$から，$1 = (p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6)^2$ に注目すると，

$$\begin{aligned}&3({p_1}^2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_6}^2) + 2(p_1 + p_3 + p_5)(p_2 + p_4 + p_6) - 1 \\ &= 2({p_1}^2 + {p_2}^2 + \cdots + {p_6}^2) - 2(p_1p_3 + p_3p_5 + p_5p_1 + p_2p_4 + p_4p_6 + p_6p_2) \\ &= (p_1 - p_3)^2 + (p_3 - p_5)^2 + (p_5 - p_1)^2 + (p_2 - p_4)^2 + (p_4 - p_6)^2 + (p_6 - p_2)^2\end{aligned}$$

よって，$3P + 2Q - 1 \geqq 0$ より，$Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$ となる。

以上より，$\dfrac{1}{4} \geqq Q \geqq \dfrac{1}{2} - \dfrac{3}{2}P$ が成立する。

コメント

(1)は，有名なコーシー・シュワルツの不等式を利用するという手もありますが，ここでは結論を予測して平方完成をしました。(2)の右側の不等式の証明は難ですが，式を変形しているうちに気付いた方法で記しています。

問　題

3 枚のコイン P, Q, R がある。P, Q, R の表の出る確率をそれぞれ p, q, r とする。このとき次の操作を n 回くり返す。まず, P を投げて表が出れば Q を, 裏が出れば R を選ぶ。次にその選んだコインを投げて, 表が出れば赤玉を, 裏が出れば白玉をつぼの中に入れる。

(1)　n 回ともコイン Q を選び, つぼの中には k 個の赤玉が入っている確率を求めよ。

(2)　つぼの中が赤玉だけとなる確率を求めよ。

(3)　$n=2004$, $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$, $r=\dfrac{1}{5}$ のとき, つぼの中に何個の赤玉が入っていることが最も起こりやすいかを求めよ。　[2004]

解答例

(1)　コイン Q を選び, つぼの中に赤玉が入る確率は pq, 白玉が入る確率は $p(1-q)$ より, つぼの中に赤玉が k 個, 白玉が $n-k$ 個入っている確率は,

$$ {}_n\mathrm{C}_k(pq)^k\{p(1-q)\}^{n-k}={}_n\mathrm{C}_k p^n q^k(1-q)^{n-k} $$

(2)　コイン R を選び, つぼの中に赤玉が入る確率は $(1-p)r$ なので, コイン Q を選んだ場合も合わせて, つぼの中に赤玉が入る確率は,

$$ pq+(1-p)r=pq-pr+r $$

したがって, つぼの中が赤玉だけとなる確率は, $(pq-pr+r)^n$ である。

(3)　つぼの中に赤玉が k 個, 白玉が $n-k$ 個入っている確率を P_k とすると,

$$ P_k={}_n\mathrm{C}_k(pq-pr+r)^k\{1-(pq-pr+r)\}^{n-k} $$

$n=2004$, $p=\dfrac{1}{2}$, $q=\dfrac{1}{2}$, $r=\dfrac{1}{5}$ のとき,

$$ P_k={}_{2004}\mathrm{C}_k\left(\frac{7}{20}\right)^k\left(\frac{13}{20}\right)^{2004-k}\quad(0\leqq k\leqq 2004) $$

$$ \frac{P_{k+1}}{P_k}=\frac{\dfrac{2004!}{(k+1)!(2003-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k+1}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2003-k}}{\dfrac{2004!}{k!(2004-k)!}\left(\dfrac{7}{20}\right)^{k}\left(\dfrac{13}{20}\right)^{2004-k}}=\frac{7}{13}\cdot\frac{2004-k}{k+1} $$

そこで, $\dfrac{P_{k+1}}{P_k}>1$ とすると, $7(2004-k)>13(k+1)$ から, $k<700+\dfrac{3}{4}$ となる。

すると, $k\leqq 700$ のとき $P_{k+1}>P_k$, $k\geqq 701$ のとき $P_{k+1}<P_k$ となり,

$$ P_0<P_1<P_2<\cdots\cdots<P_{700}<P_{701}>P_{702}>\cdots\cdots>P_{2003}>P_{2004} $$

よって, P_{701} が最大となり, 赤玉が 701 個入っている場合が最も起こりやすい。

コメント

確率の最大・最小に関する頻出問題です。(1)の確率は, $p^n\times{}_n\mathrm{C}_k q^k(1-q)^{n-k}$ とみても OK です。

問　題

箱の中に 1 から N までの番号が 1 つずつ書かれた N 枚のカードが入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う。このとき，はじめから j 回目 $(j=1,\ \cdots,\ k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし，$X_1,\ \cdots,\ X_k$ のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする。

(1) $N\geqq 3$ のとき $P_N(1)$，$P_N(2)$，$P_N(3)$ を N で表せ。

(2) $P_3(4)$，$P_3(5)$ を求めよ。

(3) $k\leqq N$ のとき，$P_N(k)$ を N と k で表せ。　[2001]

解答例

(1) カードを 1 回取り出したとき，番号が 1 である確率は，$P_N(1)=\dfrac{1}{N}$

カードを 2 回取り出したとき，その番号が 1 回目が 2，1 回目と 2 回目の和が 2 である確率は，$P_N(2)=\dfrac{1}{N}+\dfrac{1}{N^2}=\dfrac{N+1}{N^2}$

カードを 3 回取り出したとき，その番号が 1 回目が 3，1 回目と 2 回目の和が 3，1 回目と 2 回目と 3 回目の和が 3 である確率は，

$$P_N(3)=\frac{1}{N}+\frac{2}{N^2}+\frac{1}{N^3}=\frac{(N+1)^2}{N^3}$$

(2) 1，2，3 の 3 枚のカードを 1 枚取り出して戻すという試行を 4 回行ったとき，2 回目までの和が 4 となる組合せは$(1,\ 3)$，$(2,\ 2)$，3 回目までの和が 4 となる組合せは$(1,\ 1,\ 2)$，4 回目までの和が 4 となる組合せは$(1,\ 1,\ 1,\ 1)$なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(4)=\frac{2+1}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{37}{81}$$

次に，同じ試行を 5 回行ったとき，2 回目までの和が 5 となる組合せは$(2,\ 3)$，3 回目までの和が 5 となる組合せは$(1,\ 1,\ 3)$，$(1,\ 2,\ 2)$，4 回目までの和が 5 となる組合せは$(1,\ 1,\ 1,\ 2)$，5 回目までの和が 5 となる組合せは$(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$なので，それらの順列を考えて，

$$P_3(5)=\frac{2}{3^2}+\frac{3+3}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{1}{3^5}=\frac{121}{243}$$

(3) j 回目に取り出したカードの番号を Y_j とすると，$X_j=Y_1+Y_2+\cdots+Y_j$

ここで，N 枚のカードから 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行ったとき，j 回目 $(j=1,\ \cdots,\ k)$ までの和が k となるのは，

$$Y_1+Y_2+\cdots+Y_j=k\ (1\leqq Y_1\leqq N,\ 1\leqq Y_2\leqq N,\ \cdots,\ 1\leqq Y_j\leqq N)$$

この方程式を満たす $(Y_1,\ Y_2,\ \cdots,\ Y_j)$ は，$k\leqq N$ より ${}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}$ 通りなので，

$$P_N(k)=\sum_{j=1}^{k}\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j}=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0}{N}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_1}{N^2}+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_2}{N^3}+\cdots+\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}$$

$$=\frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_0N^{k-1}+{}_{k-1}\mathrm{C}_1N^{k-2}+{}_{k-1}\mathrm{C}_2N^{k-3}+\cdots+{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}}{N^k}=\frac{(N+1)^{k-1}}{N^k}$$

コメント

(3)の具体例が(1)であり，(3)の条件である $k\leqq N$ が成り立たない場合の具体例が(2)という構成です。

問　題

n を相異なる素数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k\ (k \geqq 1)$ の積とする。$a,\ b$ を n の約数とするとき，a, b の最大公約数を G，最小公倍数を L とし，$f(a,\ b) = \dfrac{L}{G}$ とする。

(1)　$f(a,\ b)$ が n の約数であることを示せ。

(2)　$f(a,\ b) = b$ ならば，$a = 1$ であることを示せ。

(3)　m を自然数とするとき，m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とする。$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b)$ が偶数であることを示せ。　[2015]

解答例

(1)　素数の集合 $P = \{p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_k\}$ の部分集合として，$Q = \{q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_i\}$，$R = \{r_1,\ r_2,\ \cdots,\ r_j\}$，$S = \{s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_l\}$ を設定する。ただし，集合 $Q,\ R,\ S$ は，$Q \cap R = R \cap S = S \cap Q = \varnothing$ で，$i + j + l \leqq k$ であるとする。

さて，$n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k$ であり，n の約数 a, b を次のように表す。

$$a = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_i \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_j,\quad b = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_i \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cdots \cdot s_l$$

そこで，a, b の最大公約数を G，最小公倍数を L とすると，

$$G = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_i,\quad L = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_i \cdot r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_j \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cdots \cdot s_l$$

これより，$f(a,\ b) = \dfrac{L}{G} = r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_j \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cdots \cdot s_l$ であり，$R \subset P$ かつ $S \subset P$ より，$f(a,\ b)$ は $n = p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k$ の約数となる。

(2)　$f(a,\ b) = b$ のとき，$r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_j \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cdots \cdot s_l = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_i \cdot s_1 \cdot s_2 \cdot \cdots \cdot s_l$ より，

$$r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_j = q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_i$$

ここで，$r_1 \cdot r_2 \cdot \cdots \cdot r_j$ と $q_1 \cdot q_2 \cdot \cdots \cdot q_i$ は互いに素なので，$j \geqq 1$，$i \geqq 1$ のときは成立しない。よって，$a = 1 \times 1 = 1$ である。

(3)　自然数 m の約数であるような素数の個数を $S(m)$ とすると，

$$S(f(a,\ b)) = j + l,\quad S(a) = i + j,\quad S(b) = i + l$$

よって，$S(f(a,\ b)) + S(a) + S(b) = 2(i + j + l)$ となり，この値は偶数である。

コメント

整数を題材とした論証問題です。ただ，素因数分解したとき，素数 1 つずつの積 $p_1 \cdot p_2 \cdot \cdots \cdot p_k$ の形で表されるような自然数だけが対象となっています。なお，上の解答例では，約数 a, b は正としています。また，記述に雑なところも少々……。

問　題

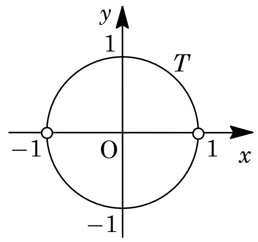
実数 $a,\ b,\ c$ に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また，複素数平面内の単位円周から 2 点1，-1 を除いたものを T とする。

(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。　[2017]

解答例



(1)　$f(x)=x^2+cx+1$ (c は実数)に対して，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にある条件は，2 つの解がともに虚数で，しかも絶対値が 1 ということである。

そこで，解を $x=\alpha,\ \overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ ($|\alpha|^2=1$) となり，$|\alpha|=1$ は満たされている。

よって，求める条件は，解が虚数すなわち $D=c^2-4<0$ から $-2<c<2$ である。

(2)　$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ ($a,\ b$ は実数)に対して，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるとき，4 つの解はすべて虚数で，しかも絶対値が 1 である。これより，解を $x=\alpha,\ \overline{\alpha},\ \beta,\ \overline{\beta}$ とおき，$F(x)$ の x^4 の係数が 1 であることに注意すると，

$$F(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$
$$=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}$$

ここで，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ で，また $\alpha+\overline{\alpha}$，$\beta+\overline{\beta}$ はともに実数なので，それぞれ $-c_1$，$-c_2$ とおくと，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ と表せる。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は，(1)(2)から，

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)\quad(-2<c_1<2,\ -2<c_2<2)$$

すると，$F(x)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1$ となり，

$$c_1+c_2=a\cdots\cdots\cdots①,\quad c_1c_2+2=b\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，c_1，c_2 は 2 次方程式 $t^2-at+(b-2)=0$ ……③の 2 つの解となる。

ここで，③の左辺を $g(t)$ とおき変形すると，$g(t)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b-2$ となり，$g(t)=0$ の解がともに $-2<t<2$ から，求める条件は，

$-\dfrac{a^2}{4}+b-2 \leqq 0$ ……④，$-2<\dfrac{a}{2}<2$ ……⑤，$g(-2)=2+2a+b>0$ ……⑥

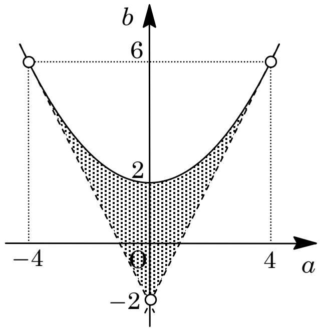
$g(2)=2-2a+b>0$ ……⑦

④～⑦をまとめると，$b \leqq \dfrac{a^2}{4}+2$，$-4<a<4$

$b>-2a-2$，$b>2a-2$

点$(a,\ b)$の範囲を図示すると，右図の網点部となる。

ただし，実線の境界線のみ領域に含む。



コメント

複素数と方程式の標準的な問題です。丁寧な誘導のため，結論に至る流れはスムーズです。

問　題

(1)　極座標表示された複素数 $z=r(\cos\theta+i\sin\theta)$ が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすための必要十分条件を r と θ を用いて表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2$ を r，θ，n を用いて表せ。

(3)　複素数 z が $\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ を満たすならば，すべての自然数 n に対し，

$$\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$$

が成り立つことを示せ。　[2000]

解答例

(1)　$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ より，$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|^2<\dfrac{1}{4}$ なので，$z+\dfrac{1}{2}=r\cos\theta+\dfrac{1}{2}+ir\sin\theta$ から，

$$\left(r\cos\theta+\frac{1}{2}\right)^2+r^2\sin^2\theta<\frac{1}{4},\quad r^2+r\cos\theta<0$$

$r>0$ より，$r+\cos\theta<0$

(2)　(i)　$z=1$ のとき　$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|n+1\right|^2=(n+1)^2$

(ii)　$z\neq1$ のとき　$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\left|\dfrac{z^{n+1}-1}{z-1}\right|^2=\dfrac{\left|z^{n+1}-1\right|^2}{\left|z-1\right|^2}$

$$\begin{aligned}\left|z^{n+1}-1\right|^2&=\left|r^{n+1}\left\{\cos(n+1)\theta+i\sin(n+1)\theta\right\}-1\right|^2\\&=\left|r^{n+1}\cos(n+1)\theta-1+ir^{n+1}\sin(n+1)\theta\right|^2\\&=\left\{r^{n+1}\cos(n+1)\theta-1\right\}^2+\left\{r^{n+1}\sin(n+1)\theta\right\}^2\\&=r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1\end{aligned}$$

$$\left|z-1\right|^2=r^2-2r\cos\theta+1$$

したがって，$\left|1+z+\cdots+z^n\right|^2=\dfrac{r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}$

(3)　(2)より，

$$\begin{aligned}\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1&\iff\frac{r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1}{r^2-2r\cos\theta+1}<1\\&\iff r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta+1<r^2-2r\cos\theta+1\\&\iff r^{2n+2}-2r^{n+1}\cos(n+1)\theta-r^2+2r\cos\theta<0\\&\iff r^2(r^{2n}-1)-2r\left\{r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta\right\}<0\end{aligned}$$

ここで, (1)より，$0<r<-\cos\theta\leqq1$ なので $r^{2n}-1<0$ となり，$r^2(r^{2n}-1)<0$

また，$r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta>r^n\cos(n+1)\theta+r\geqq r(-r^{n-1}+1)>0$

$$-2r\left\{r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta\right\}<0$$

以上より，$r^2(r^{2n}-1)-2r\left\{r^n\cos(n+1)\theta-\cos\theta\right\}<0$

すなわち，$\left|z+\dfrac{1}{2}\right|<\dfrac{1}{2}$ のとき $\left|1+z+\cdots+z^n\right|<1$ が成立する。

コメント

問題文が曖昧なのですが，ここでは $r>0$ として解を作りました。なお，(3)の不等式の証明には，時間がかかってしまいました。最後は押さえ込みで処理しました。

問　題

複素平面上の点列 A_n $(n \geqq 0)$ が複素数列 $a_n + ib_n$ (a_n, b_n は実数，i は虚数単位)を表すとする。極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = a_\infty$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = b_\infty$ がともに存在するとき，複素数 $a_\infty + ib_\infty$ を表す点 A_∞ を A_n の極限点ということにする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 複素平面上の点列 P_n $(n \geqq 0)$ を次のように定める。P_0 は 0 を表す点とし，P_1 は $1+i$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-2}\mathrm{P}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{3}$ 回転し，長さを $\dfrac{2}{3}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n}$ となるように P_n を定める。P_n の極限点 P_∞ が表す複素数を求めよ。

(2) 点列 Q_n $(n \geqq 0)$ は次のように定める。Q_0 は 0 を表す点とし，Q_1 は $z = x + iy$ を表す点とする。以下 $n \geqq 2$ に対しては，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-2}\mathrm{Q}_{n-1}}$ を反時計まわりに $\dfrac{\pi}{6}$ 回転し，長さを $\dfrac{1}{2}$ 倍したベクトルが $\overrightarrow{\mathrm{Q}_{n-1}\mathrm{Q}_n}$ となるように Q_n を定める。Q_n の極限点 Q_∞ と(1)の P_∞ が一致するとき z を求めよ。　[1999]

解答例

(1) $\mathrm{P}_n(w_n)$ とすると，$w_0 = 0$，$w_1 = 1+i$ となる。また $\mathrm{P}_\infty(w_\infty)$ とおく。

ここで，$\alpha = \dfrac{2}{3}\left(\cos\dfrac{1}{3}\pi + i\sin\dfrac{1}{3}\pi\right) = \dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2} = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{3}$ とすると，条件より，

$$w_n - w_{n-1} = \alpha(w_{n-1} - w_{n-2})$$

$$w_{n+1} - w_n = (w_1 - w_0)\alpha^n = (1+i)\alpha^n$$

$n \geqq 1$ で，$w_n = w_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}(1+i)\alpha^k = (1+i)\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$

$|\alpha| = \dfrac{2}{3} < 1$ より，$n \to \infty$ のとき $\alpha^n \to 0$，$w_n \to w_\infty$ なので，

$$w_\infty = \frac{1+i}{1-\alpha} = \frac{1+i}{1-\frac{1+\sqrt{3}i}{3}} = \frac{3(1+i)}{2-\sqrt{3}i} = \frac{3(2-\sqrt{3}) + 3(2+\sqrt{3})i}{7}$$

(2) $\mathrm{Q}_n(z_n)$ とすると，$z_0 = 0$，$z_1 = z$ となる。また $\mathrm{Q}_\infty(z_\infty)$ とおく。

ここで，$\beta = \dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{1}{6}\pi + i\sin\dfrac{1}{6}\pi\right) = \dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3}+i}{2} = \dfrac{\sqrt{3}+i}{4}$ とすると，条件より，

$$z_n - z_{n-1} = \beta(z_{n-1} - z_{n-2})$$

$$z_{n+1} - z_n = (z_1 - z_0)\beta^n = z\beta^n$$

$n \geqq 1$ で，$z_n = z_0 + \displaystyle\sum_{k=0}^{n-1} z\beta^k = z\frac{1-\beta^n}{1-\beta}$

$|\beta| = \dfrac{1}{2} < 1$ より，$n \to \infty$ のとき $\beta^n \to 0$，$z_n \to z_\infty$ なので，

$$z_\infty = \frac{z}{1-\beta} = \frac{z}{1-\dfrac{\sqrt{3}+i}{4}} = \frac{4z}{(4-\sqrt{3})-i}$$

条件より，$z_\infty = w_\infty$ なので，$\dfrac{4z}{(4-\sqrt{3})-i} = \dfrac{3(2-\sqrt{3})+3(2+\sqrt{3})i}{7}$

よって，$z = \dfrac{3}{28}\left\{(2-\sqrt{3})+(2+\sqrt{3})i\right\}\left\{(4-\sqrt{3})-i\right\}$

$$= \frac{3(13-5\sqrt{3})+9(1+\sqrt{3})i}{28}$$

コメント

複素数列の極限に関する有名頻出問題です。

問　題

a, b を正の実数とし，円 $C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$ と楕円 $C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。

(1)　C_1 が C_2 に内接するための a, b の条件を求めよ。

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ とし，C_1 が C_2 に内接しているとする。このとき，第 1 象限における C_1 と C_2 の接点の座標 $(p,\ q)$ を求めよ。

(3)　(2)の条件のもとで，$x \geqq p$ の範囲において，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　円 $C_1 : (x-a)^2+y^2=a^2$ 上の任意の点を $(a+a\cos\theta,\ a\sin\theta)$ とおくと，C_1 が楕円 $C_2 : x^2+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ に内接する条件は，ある θ において等号が成り立ち，

$$(a+a\cos\theta)^2+\frac{a^2\sin^2\theta}{b^2} \leqq 1,\ a^2b^2(1+\cos\theta)^2+a^2(1-\cos^2\theta) \leqq b^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

①を変形し，$a^2(b^2-1)\cos^2\theta+2a^2b^2\cos\theta+a^2b^2+a^2-b^2 \leqq 0$

ここで，$t=\cos\theta$ とおくと，$-1 \leqq t \leqq 1$ において，

$$a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

ただし，ある t $(-1 \leqq t \leqq 1)$ で等号が成り立つ。

以下，$a>0$，$b>0$ のもとで，②が成り立つ条件を求める。

まず，$f(t)=a^2(b^2-1)t^2+2a^2b^2t+a^2b^2+a^2-b^2$ とおき，

(i)　$b>1$ のとき

$f(-1)=-b^2<0$ となるので，求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$

よって，$(4a^2-1)b^2=0$ から，$a=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$b=1$ のとき

$f(t)=2a^2t+2a^2-1$ となり，求める条件は，$f(1)=4a^2-1=0$

よって，$a=\dfrac{1}{2}$

(iii)　$0<b<1$ のとき

$$f(t)=a^2(b^2-1)\Big(t+\frac{b^2}{b^2-1}\Big)^2-\frac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2$$

ここで，$-\dfrac{b^2}{b^2-1}=\dfrac{b^2}{1-b^2}>0$ に注意して，

(iii-i)　$0<-\dfrac{b^2}{b^2-1}\leqq 1\left(0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$のとき

求める条件は，$f\left(-\dfrac{b^2}{b^2-1}\right)=-\dfrac{a^2b^4}{b^2-1}+a^2b^2+a^2-b^2=0$から，

$-a^2b^4+(b^2-1)(a^2b^2+a^2-b^2)=0$，$a^2+b^4-b^2=0$

よって，$a=\sqrt{b^2-b^4}=b\sqrt{1-b^2}$

(iii-ii)　$-\dfrac{b^2}{b^2-1}>1\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}<b<1\right)$のとき

求める条件は，$f(1)=4a^2b^2-b^2=0$から，$a=\dfrac{1}{2}$

(i)～(iii)より，C_1がC_2に内接するための条件は，

$a=b\sqrt{1-b^2}\ \left(0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right)$，$a=\dfrac{1}{2}\left(b>\dfrac{\sqrt{2}}{2}\text{のとき}\right)$

(2)　$b=\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}$のとき，$0<b\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$を満たすので，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-\dfrac{1}{3}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

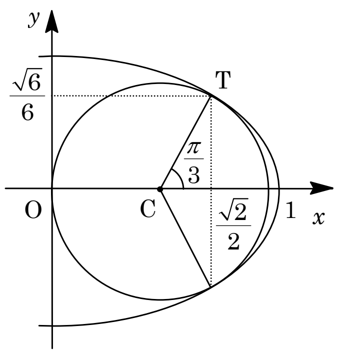
このとき，$f(t)=0$の重解は，$t=-\dfrac{b^2}{b^2-1}=-\dfrac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}-1}=\dfrac{1}{2}$となり，$\cos\theta=\dfrac{1}{2}$

$0<\theta<\pi$より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$となり，$\sin\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

すると，第1象限の接点の座標$\mathrm{T}(p,\ q)$は，

$p=\dfrac{\sqrt{2}}{3}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$q=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{\sqrt{6}}{6}$

(3)　(2)のとき，$C_1:\left(x-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{2}{9}$となり，中心$\mathrm{C}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 0\right)$，半径$\dfrac{\sqrt{2}}{3}$の円である。そして，半径 CT を$x$軸の正の向きから測った角は$\dfrac{\pi}{3}$である。



また，$C_2:x^2+3y^2=1$となり，$y=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}$

すると，$x\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$の範囲において，$C_1$と$C_2$で囲まれた部分の面積$S$は，$x$軸についての対称性を考えて，

$$\frac{S}{2}=\int_{\frac{\sqrt{2}}{2}}^{1}\frac{1}{\sqrt{3}}\sqrt{1-x^2}\,dx-\left\{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)\cdot\frac{\sqrt{6}}{6}\right\}$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2\right\}-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left(\frac{\pi}{8}-\frac{1}{4}\right)-\left(\frac{\pi}{27}-\frac{\sqrt{3}}{36}\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{24}-\frac{1}{27}\right)\pi-\frac{\sqrt{3}}{18}$$

よって，$S=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{12}-\dfrac{2}{27}\right)\pi-\dfrac{\sqrt{3}}{9}$ となる。

コメント

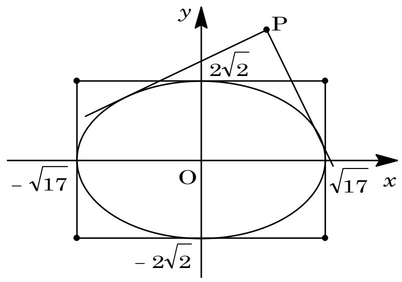
円をパラメータ表示して，2 次不等式の処理に帰着させましたが，かなり時間がかかる問題です。なお，楕円をパラメータ表示した方が，数式処理は簡単だったようです。後から気づきましたが……。

問　題

楕円$\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$の外部の点$\mathrm{P}(a,\ b)$から引いた 2 本の接線が直交するような点 P の軌跡を求めよ。　[2002]

解答例

まず，楕円$\dfrac{x^2}{17}+\dfrac{y^2}{8}=1$ ……①に対して，4 点$\pm(\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$，$\pm(\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$から①に引いた 2 本の接線は明らかに直交する。



次に，上記の 4 点以外の点$\mathrm{P}(a,\ b)$を通る接線は，その傾きをmとすると，

$$y-b=m(x-a)$$

$$y=mx-ma+b\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$8x^2+17(mx-ma+b)^2=17\cdot 8$

$$(17m^2+8)x^2-34m(ma-b)x+17(ma-b)^2-17\cdot 8=0$$

重解をもつことより，

$$D/4=17^2m^2(ma-b)^2-(17m^2+8)\{17(ma-b)^2-17\cdot 8\}=0$$

$$17m^2(ma-b)^2-(17m^2+8)\{(ma-b)^2-8\}=0$$

$$17\cdot 8m^2-8(ma-b)^2+64=0,\ (17-a^2)m^2+2abm+8-b^2=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$17-a^2\neq 0$より，③の実数解を$m=m_1,\ m_2$とすると，2 本の接線が直交する条件は，解と係数の関係を用いて，

$$m_1m_2=-1,\ \frac{8-b^2}{17-a^2}=-1,\ a^2+b^2=25\ \cdots\cdots\cdots④$$

点 P が 4 点$\pm(\sqrt{17},\ 2\sqrt{2})$，$\pm(\sqrt{17},\ -2\sqrt{2})$のときも④をみたすので，これより点$\mathrm{P}(a,\ b)$の軌跡は，円$x^2+y^2=25$である。

コメント

有名問題です。方程式$D=0$をうまく計算していくことがすべてです。

問　題

楕円 $C: \dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$ $(a>1)$ 上に点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ をとる。C 上の点 $\mathrm{B}(p,\ q)$ $(q>0)$ における接線 l と線分 BA のなす角が，l と直線 $x=p$ のなす角に等しいとする。ただし 2 直線のなす角は鋭角の方をとることにする。

(1) 座標 p を a で表せ。

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{a\to1}p$ および $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a}$ を求めよ。 [1998]

解答例

(1) 接線 l は $\dfrac{px}{a^2}+qy=1$ から，その法線ベクトルが $\dfrac{1}{a^2}(p,\ a^2q)$ となるので，方向ベクトル $\vec{l}$ は，$\vec{l}=(a^2q,\ -p)$ とおくことができる。

また，直線 $x=p$ の方向ベクトルを $\vec{u}=(0,\ 1)$ とする。

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(a-p,\ -q)$ なので，条件より，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|}+\frac{\vec{u}}{|\vec{u}|}=k\vec{l}\quad(k\text{ は実数})$$

$$\frac{1}{\sqrt{(a-p)^2+(-q)^2}}(a-p,\ -q)+(0,\ 1)=k(a^2q,\ -p)$$

$$\frac{a-p}{\sqrt{(a-p)^2+(-q)^2}}=ka^2q\cdots\cdots①\qquad\frac{-q}{\sqrt{(a-p)^2+(-q)^2}}+1=-kp\cdots\cdots②$$

①×p＋②×a^2q より

$$p(a-p)-a^2q^2+a^2q\sqrt{(a-p)^2+q^2}=0$$

ここで $\dfrac{p^2}{a^2}+q^2=1$ より，$q^2=1-\dfrac{p^2}{a^2}=\dfrac{(a-p)(a+p)}{a^2}$ を代入してまとめると，

$$aq\sqrt{(a-p)^2+\frac{(a-p)(a+p)}{a^2}}=a-p$$

$q>0$　$a-p>0$ から，両辺を 2 乗して，まとめていくと，

$$a^2\cdot\frac{(a-p)(a+p)}{a^2}\left\{(a-p)^2+\frac{(a-p)(a+p)}{a^2}\right\}=(a-p)^2$$

$$(a+p)\left\{(a-p)+\frac{a+p}{a^2}\right\}=1\text{ より，}(a^2-1)p^2-2ap-a^4=0\cdots\cdots③$$

③の左辺を $f(p)$ とおくと，$f(-a)=a^2>0$，$f(a)=-3a^2<0$ で，$-a<p<a$ より，③の解は $p=\dfrac{a-\sqrt{a^6-a^4+a^2}}{a^2-1}=\dfrac{a-a\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1}$

(2) $\displaystyle\lim_{a\to 1} p = \lim_{a\to 1}\frac{a(1-\sqrt{a^4-a^2+1})}{a^2-1} = \lim_{a\to 1}\frac{a\cdot a^2(1-a^2)}{(a^2-1)(1+\sqrt{a^4-a^2+1})} = -\frac{1}{2}$

$$\lim_{a\to\infty}\frac{p}{a} = \lim_{a\to\infty}\frac{1-\sqrt{a^4-a^2+1}}{a^2-1} = \lim_{a\to\infty}\frac{\frac{1}{a^2}-\sqrt{1-\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a^4}}}{1-\frac{1}{a^2}} = -1$$

コメント

角の二等分線の問題です。ベクトルか tan の加法定理かを利用しますが，上の解では前者を用いました。昨年，放物線を題材として，北大で類題が出ています。

問　題

数列$\{a_n\}$を，$a_1=5$，$a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。また，数列$\{b_n\}$を，$b_n=\dfrac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) すべてのnに対して，不等式 $b_n\leqq 3+\dfrac{4}{n+1}$が成り立つことを示せ。

(3) 極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。　[2015]

解答例

(1) $a_{n+1}=\dfrac{4a_n-9}{a_n-2}=4-\dfrac{1}{a_n-2}$に対して，$a_1=5$から，$a_2=4-\dfrac{1}{5-2}=\dfrac{11}{3}$

$$a_3=4-\frac{1}{\frac{11}{3}-2}=\frac{17}{5},\quad a_4=4-\frac{1}{\frac{17}{5}-2}=\frac{23}{7}$$

これより，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$と推測できるので，以下，数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$のとき　$a_1=\dfrac{6-1}{2-1}=5$より成立する。

(ii) $n=k$のとき　$a_k=\dfrac{6k-1}{2k-1}$と仮定すると，

$$a_{k+1}=4-\frac{1}{a_k-2}=4-\frac{1}{\frac{6k-1}{2k-1}-2}=4-\frac{2k-1}{2k+1}=\frac{6k+5}{2k+1}=\frac{6(k+1)-1}{2(k+1)-1}$$

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{6n-1}{2n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$である。

(2) $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}ka_k=\sum_{k=1}^{n}\frac{k(6k-1)}{2k-1}=\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\frac{1}{2k-1}\Big)$とおくと，$s_n\leqq\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(3k+2)$

さらに，$t_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$とおくと，$s_n\leqq 3t_n+2n$となり，

$$b_n=\frac{a_1+2a_2+\cdots+na_n}{1+2+\cdots+n}=\frac{s_n}{t_n}\leqq\frac{3t_n+2n}{t_n}=3+\frac{2n}{t_n}=3+\frac{4}{n+1}$$

(3) $s_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\Big(3k+1+\frac{1}{2k-1}\Big)>\sum_{k=1}^{n}3k=3t_n$から，$b_n=\dfrac{s_n}{t_n}>\dfrac{3t_n}{t_n}=3$となり, (2)から,

$$3<b_n\leqq 3+\frac{4}{n+1}$$

よって，$n\to\infty$のとき$\dfrac{4}{n+1}\to 0$から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=3$である。

コメント

丁寧な誘導のついた数列の極限の問題です。なお，(1)は普通に，推測→帰納法のパターンで記していますが，式変形により漸化式を解くことも可能です。

問　題

正の整数 n に対し，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲において $\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の区間の長さの総和を S_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。 [2013]

解答例

$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$\sin 4nx \geqq \sin x$ を満たす x の範囲は，$0 \leqq 4nx \leqq 2n\pi$ から，

$$2k\pi + x \leqq 4nx \leqq (2k+1)\pi - x \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

すると，$2k\pi + x \leqq 4nx$ より，$x \geqq \dfrac{2\pi}{4n-1}k$

また，$4nx \leqq (2k+1)\pi - x$ より，$x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1}$

よって，$\dfrac{2\pi}{4n-1}k \leqq x \leqq \dfrac{2\pi}{4n+1}k + \dfrac{\pi}{4n+1} \quad (k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)\cdots\cdots\cdots(*)$

$(*)$の x の区間の長さを d_k，その総和を S_n とおくと，

$$d_k = \frac{2\pi}{4n+1}k + \frac{\pi}{4n+1} - \frac{2\pi}{4n-1}k$$

$$S_n = \sum_{k=0}^{n-1} d_k = \frac{2\pi}{4n+1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + \frac{\pi}{4n+1}n - \frac{2\pi}{4n-1}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$

$$= \frac{n^2}{4n+1}\pi - \frac{n(n-1)}{4n-1}\pi = \frac{n(2n+1)}{(4n+1)(4n-1)}\pi$$

これより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{2+\frac{1}{n}}{\left(4+\frac{1}{n}\right)\left(4-\frac{1}{n}\right)}\pi = \frac{1}{8}\pi$ となる。

コメント

最初は和積公式で変形しましたが，深みにはまりそうなので，不等式を満たす x の範囲を，$x \leqq 4nx \leqq \pi - x$，$2\pi + x \leqq 4nx \leqq 2\pi + \pi - x$，$4\pi + x \leqq 4nx \leqq 4\pi + \pi - x$，…として求め，それをまとめたのが，上の解答例です。

問　題

実数 x に対し，x 以上の最小の整数を $f(x)$ とする。a, b を正の実数とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^c\left(\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}\right)$ が収束するような実数 c の最大値と，そのときの極限値を求めよ。 [2008]

解答例

k を整数とするとき，$f(x)$ の定義より，$f(x+k)=f(x)+k$ となり，

$$f(ax-7)=f(ax)-7,\quad f(bx+3)=f(bx)+3$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{f(ax-7)}-\frac{1}{f(bx+3)}=\frac{1}{f(ax)-7}-\frac{1}{f(bx)+3}$

$$=\frac{f(bx)-f(ax)+10}{\left(f(ax)-7\right)\left(f(bx)+3\right)}\cdots\cdots\cdots(*)$$

同様に，$f(x)$ の定義より，$x\leqq f(x)<x+1$ となり，

$$ax\leqq f(ax)<ax+1,\quad bx\leqq f(bx)<bx+1$$

すると, $x>0$ において,

$$a\leqq\frac{f(ax)}{x}<a+\frac{1}{x},\quad b\leqq\frac{f(bx)}{x}<b+\frac{1}{x}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(ax)}{x}=a$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{f(bx)}{x}=b$

ここで，$g(x)=x^c\left(\dfrac{1}{f(ax-7)}-\dfrac{1}{f(bx+3)}\right)$ とおくと，

(i)　$a\neq b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-1}\cdot\dfrac{\dfrac{f(bx)}{x}-\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{10}{x}}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(bx)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$ は，$c-1>0$ のとき発散，$c-1\leqq 0$ のとき収束する。

よって，収束する c の最大値は $c=1$ で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{b-a}{ab}$ である。

(ii)　$a=b$ のとき

$(*)$より，$g(x)=x^{c-2}\cdot\dfrac{10}{\left(\dfrac{f(ax)}{x}-\dfrac{7}{x}\right)\left(\dfrac{f(ax)}{x}+\dfrac{3}{x}\right)}$

すると，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)$ は，$c-2>0$ のとき発散，$c-2\leqq 0$ のとき収束する。

よって，収束する c の最大値は $c=2$ で，このとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=\frac{10}{a^2}$ である。

コメント

題意を言い換えた不等式$x \leqq f(x) < x+1$のみで評価すると，$a=b$のときがアバウトになりすぎます。そこで，収束する形を作るという基本に戻ったのが上の解です。もっとも，さらに基本なのは「x が大きくなると$f(x)$は x と同じようなもの」という感覚ですが。

問　題

(1)　整数 $n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ と正数 a_n に対して，$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ とおく。2 つの曲線 $y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ が接するような a_n を求めよ。

(2)　$f_n(x)$ は(1)で定めたものとする。$y=f_0(x)$，$y=e^{-x}$ と y 軸で囲まれる図形の面積を S_0，$n\geqq 1$ に対し $y=f_{n-1}(x)$，$y=f_n(x)$ と $y=e^{-x}$ で囲まれる図形の面積を S_n とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)$ を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f_n(x)=a_n(x-n)(n+1-x)$ に対して，

$$f_n{}'(x)=a_n\{(n+1-x)-(x-n)\}=a_n(-2x+2n+1)$$

また，$y=e^{-x}$ に対して，$y'=-e^{-x}$

さて, 2 曲線 $y=a_n(x-n)(n+1-x)$ と $y=e^{-x}$ が $x=t_n$ で接するとすると,

$$a_n(-2t_n+2n+1)=-e^{-t_n}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad a_n(t_n-n)(n+1-t_n)=e^{-t_n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$a_n>0$ より，①②から，$2t_n-2n-1=(t_n-n)(n+1-t_n)$

$$t_n{}^2-(2n-1)t_n+n^2-n-1=0$$

よって，$t_n=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{(2n-1)^2-4(n^2-n-1)}}{2}=\dfrac{2n-1\pm\sqrt{5}}{2}$

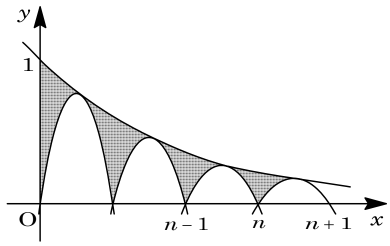
$n<t_n<n+1$ から，$t_n=\dfrac{2n-1+\sqrt{5}}{2}$ となり，①に代入すると,

$$a_n=\frac{-1}{-(2n-1+\sqrt{5})+2n+1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}=(2+\sqrt{5})e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

(2)　まず，$y=f_n(x)$ と x 軸によって囲まれる部分の面積は,

$$\int_n^{n+1}a_n(x-n)(n+1-x)\,dx=\frac{a_n}{6}(n+1-n)^3=\frac{a_n}{6}$$

ここで，$0\leqq x\leqq n$ において，曲線 $y=e^{-x}$ と $y=f_0(x)$，$y=f_1(x)$，$\cdots$，$y=f_{n-1}(x)$ によってはさまれた部分の面積を T_n とおくと,



$$T_n=\int_0^n e^{-x}dx-\frac{1}{6}\sum_{k=0}^{n-1}a_k$$

$$=-\left[\,e^{-x}\,\right]_0^n-\frac{2+\sqrt{5}}{6}\sum_{k=0}^{n-1}e^{-\frac{2n-1+\sqrt{5}}{2}}$$

$$=-e^{-n}+1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$$

さて，条件より，$T_n<S_0+S_1+\cdots+S_n<T_{n+1}$ であり,

$$\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}T_{n+1}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6}e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(S_0+S_1+\cdots+S_n)=1-\frac{2+\sqrt{5}}{6(e-1)}e^{\frac{3-\sqrt{5}}{2}}$

コメント

(2)では，最初，S_n を定積分で立式しましたが，とうてい計算を実行する気になれません。そこで，$\dfrac{1}{6}$ 公式が登場したわけです。

問　題

n を自然数とする。

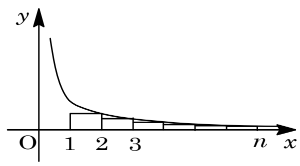
(1)　次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)$

(2)　関数 $y=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ の極値を与える x の最小値を x_n とする。このとき，$\displaystyle\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}$ および $0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$ を示せ。

(3)　(2)の x_n に対して，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n\log n$ を求めよ。　[2002]

解答例

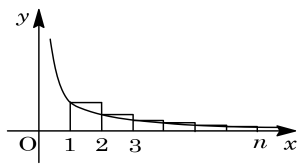
(1)　$y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ は単調減少関数なので，



$$\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$$

また $n\geqq2$ で，$\displaystyle 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}>\int_1^n\frac{1}{x}dx=\log n$



$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}>\frac{1}{n}+\log n$$

よって，$\displaystyle\frac{1}{n}+\log n<1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}<1+\log n$

$$\frac{1}{n\log n}+1<\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{\log n}+1$$

$n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{n\log n}\to0$，$\dfrac{1}{\log n}\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)=1$

(2)　$f(x)=x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ とおくと，

$$f'(x)=(x-1)(x-2)\cdots(x-n)+x(x-2)\cdots(x-n)$$
$$+\cdots+x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)$$

$x=x_n$ で極値をとることより，$f'(x_n)=0$ となり，

$$(x_n-1)(x_n-2)\cdots(x_n-n)+x_n(x_n-2)\cdots(x_n-n)$$
$$+\cdots+x_n(x_n-1)(x_n-2)\cdots(x_n-n+1)=0$$

両辺÷$x_n(x_n-1)(x_n-2)\cdots(x_n-n)$ から，

$$\frac{1}{x_n}+\frac{1}{x_n-1}+\frac{1}{x_n-2}+\cdots+\frac{1}{x_n-n}=0$$

$$\frac{1}{x_n}=\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて, k を $0\leqq k\leqq n$ の整数とすると,

$$f'(k)=k(k-1)(k-2)\cdots2\cdot1\cdot(-1)\cdot(-2)\cdots\{-(n-k)\}=(-1)^{n-k}k!(n-k)!$$

これより，$f'(0)$，$f'(1)$，$f'(2)$，$\cdots$，$f'(n-1)$，$f'(n)$は順に符号が変化する。また，$f'(x)$は n 次式から，$f'(x)=0$の実数解は n 個以下である。すると，区間$(0,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$\cdots$，$(n-1,\ n)$に1つずつ実数解をもつことになる。

その最小の解をx_nとすると，$0<x_n<1$となり，①より$\dfrac{1}{x_n}\geqq\dfrac{1}{1-x_n}$である。

よって，$1-x_n\geqq x_n$より$x_n\leqq\dfrac{1}{2}$となり，まとめて$0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$である。

(3)　①より，$\dfrac{1}{x_n\log n}=\dfrac{1}{\log n}\left(\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}\right)\cdots\cdots\cdots$②

(2)より，$0<x_n\leqq\dfrac{1}{2}$なので，$1+\dfrac{1}{2}+\cdots+\dfrac{1}{n}<\dfrac{1}{1-x_n}+\dfrac{1}{2-x_n}+\cdots+\dfrac{1}{n-x_n}$

$$\frac{1}{1-x_n}+\frac{1}{2-x_n}+\cdots+\frac{1}{n-x_n}\leqq\frac{1}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{3}{2}}+\cdots+\frac{1}{n-\frac{1}{2}}<2+1+\cdots+\frac{1}{n-1}$$

②より，$\dfrac{1}{\log n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)<\dfrac{1}{x_n\log n}<\dfrac{1}{\log n}\left(2+1+\cdots+\dfrac{1}{n-1}\right)$

$$\frac{1}{\log n}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n}\right)<\frac{1}{x_n\log n}<\frac{2}{\log n}+\frac{1}{\log n}\left(1+\cdots+\frac{1}{n-1}+\frac{1}{n}\right)$$

(1)より, $n\to\infty$のとき，$\dfrac{1}{\log n}\left(1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\cdots+\dfrac{1}{n}\right)\to1$なので，$\dfrac{1}{x_n\log n}\to1$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n\log n=1$

コメント

(2)の結論は，$f(x)$のグラフを考えると感覚的にはわかるのですが，それを証明しようとすると，時間がかかってしまいます。

問　題

n は 2 以上の自然数とする。関数 $y=e^x$ ……(ア)，$y=e^{nx}-1$ ……(イ)について以下の問いに答えよ。

(1) (ア)と(イ)のグラフは第 1 象限においてただ一つの交点をもつことを示せ。

(2) (1)で得られた交点の座標を $(a_n,\ b_n)$ としたとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ と $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。

(3) 第 1 象限内で(ア)と(イ)のグラフおよび y 軸で囲まれた部分の面積を S_n とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n$ を求めよ。 [2000]

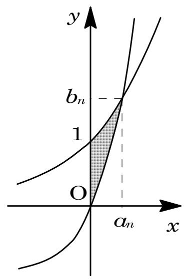
解答例

(1) $y=e^x$ ……(ア)，$y=e^{nx}-1$ ……(イ)

(ア)(イ)より，$e^x=e^{nx}-1$，$e^{nx}-e^x-1=0$

$f(x)=e^{nx}-e^x-1$ とおくと，

$$f'(x)=ne^{nx}-e^x=e^x\left\{ne^{(n-1)x}-1\right\}$$



$x\geqq 0$ において，$n-1\geqq 1$ より $ne^{(n-1)x}\geqq n>1$ なので $f'(x)>0$ となり，$f(x)$ は単調増加となる。

また，$f(0)=-1<0$，さらに，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)=e-e^{\frac{1}{n}}-1\geqq e-e^{\frac{1}{2}}-1$

ここで，$(e-1)^2-e=e^2-3e+1=\left(e-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{5}{4}>1.2^2-\dfrac{5}{4}>0$ となるので，$e-1>e^{\frac{1}{2}}$ から，$f\left(\dfrac{1}{n}\right)>0$ である。

以上より，$f(x)=0$ は $0<x<\dfrac{1}{n}$ において，ただ一つの解をもつ。すなわち，(ア)と(イ)のグラフは第 1 象限においてただ一つの交点をもつ。

(2) (1)より，$0<a_n<\dfrac{1}{n}$ なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(ア)(イ)より，$b_n=e^{a_n}$，$b_n=e^{na_n}-1$

$$e^{a_n}=e^{na_n}-1,\quad na_n=\log(e^{a_n}+1)$$

$$\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}\log(e^{a_n}+1)=\log 2$$

(3) $S_n=\displaystyle\int_0^{a_n}\left\{e^x-(e^{nx}-1)\right\}dx=\left[e^x-\frac{1}{n}e^{nx}+x\right]_0^{a_n}=e^{a_n}-1-\frac{1}{n}(e^{na_n}-1)+a_n$

$$nS_n=n(e^{a_n}-1)-e^{na_n}+1+na_n=\frac{e^{a_n}-1}{a_n}\cdot na_n-e^{na_n}+1+na_n$$

(2)より，$n\to\infty$ のとき，$a_n\to 0$ より $\dfrac{e^{a_n}-1}{a_n}\to 1$，さらに $na_n\to\log 2$ なので，

$$\lim_{n\to\infty} nS_n = 1\cdot\log 2 - e^{\log 2} + 1 + \log 2 = 2\log 2 - 1$$

コメント

最初，$f\left(\dfrac{1}{n}\right) > 0$ の代わりに，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x) = \infty$ から(1)の結論を導きましたが，それでは(2)の $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が求まりません。この $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ の値が 0 であることはグラフから明らかなので，いっそう手間取りました。

問　題

(1)　$f(x)=\dfrac{2x-1}{x}$ とし, t を実数とする。すべての自然数 n に対し実数 $f_n(t)$ が

$$f_n(t)=f(f_{n-1}(t)),\ \ n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ \text{ただし}\ f_0(t)=t$$

によって帰納的に定義できるための t の条件を求めよ。

(2)　$a \geqq 1$ に対して, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt$ を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$f_0(t)=t,\ \ f_1(t)=f(f_0(t))=\dfrac{2t-1}{t},\ \ f_2(t)=f(f_1(t))=\dfrac{2\cdot\dfrac{2t-1}{t}-1}{\dfrac{2t-1}{t}}=\dfrac{3t-2}{2t-1}$

これより, $t\neq\dfrac{n-1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$ ならば $f_n(t)$ は定義でき,

$f_n(t)=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$ となると推測できるので, これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

$t\neq 0$ で $f_1(t)=\dfrac{2t-1}{t}$ より成立。

(ii)　$n=k$ のとき

$f_k(t)=\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}$ $\left(t\neq\dfrac{k-1}{k}\right)$ と仮定するとき, $t\neq\dfrac{k}{k+1}$ ならば,

$$f_{k+1}(t)=\frac{2\cdot\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}-1}{\dfrac{(k+1)t-k}{kt-(k-1)}}=\frac{2(k+1)t-2k-kt+(k-1)}{(k+1)t-k}=\frac{(k+2)t-(k+1)}{(k+1)t-k}$$

(i)(ii)より, すべての自然数 n で $t\neq\dfrac{n-1}{n}$ ならば, $f_n(t)=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}$

また同様に考えて, この命題の裏の命題も正しいので, 逆の命題も成立する。

以上より, $f_n(t)$ が定義できる条件は, $t\neq\dfrac{n-1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\cdots\cdots)$

(2)　$f_n(t)-1=\dfrac{(n+1)t-n}{nt-(n-1)}-1=\dfrac{t-1}{nt-(n-1)}=\dfrac{1}{n}-\dfrac{1}{n}\cdot\dfrac{1}{nt-(n-1)}$

$$I_n=n^2\int_a^{a+\frac{1}{n}}(f_n(t)-1)\,dt=\int_a^{a+\frac{1}{n}}\left\{n-\frac{n}{nt-(n-1)}\right\}dt$$

$$=\Big[\,nt-\log\left|nt-(n-1)\right|\,\Big]_a^{a+\frac{1}{n}}=1-\log\left|\frac{(a-1)n+2}{(a-1)n+1}\right|$$

$a=1$ のとき, $I_n=1-\log 2$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=1-\log 2$

$a>1$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=\lim_{n\to\infty}\left\{1-\log\left|\frac{a-1+\frac{2}{n}}{a-1+\frac{1}{n}}\right|\right\}=1-\log 1=1$

コメント

まず(2)の設問から，$f_n(t)$ の形は決まるだろうと予測ができます。実際そのとおりになるのですが，(1)の題意に沿った答案としてまとめるときに，どこまで書けばよいのか判断に苦しみます。上ではやや乱暴に書いてみました。

問　題

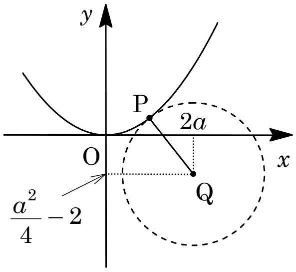
a を正の定数とし，放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ を C_1 とする。

(1)　点 P が C_1 上を動くとき，P と点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ の距離の最小値を求めよ。

(2)　Q を中心とする円 $(x-2a)^2+\left(y-\dfrac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ を C_2 とする。P が C_1 上を動き，点 R が C_2 上を動くとき，P と R の距離の最小値を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$C_1: y=\dfrac{x^2}{4}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ と，点 $\mathrm{Q}\left(2a,\ \dfrac{a^2}{4}-2\right)$ $(a>0)$ との距離は，



$$\mathrm{PQ}^2=(t-2a)^2+\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)^2$$

さて，$f(t)=\mathrm{PQ}^2$ とおくと，

$$f'(t)=2(t-2a)+2\left(\frac{t^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)\cdot\frac{t}{2}$$

$$=\frac{t^3}{4}+\left(4-\frac{a^2}{4}\right)t-4a=\frac{1}{4}(t-a)(t^2+at+16)$$

ここで，$f'(t)=0$ とすると，$t=a$ または $t^2+at+16=0$ ……(＊)となり，(＊)の判別式 $D=a^2-64=(a+8)(a-8)$ から，

(i)　$0<a<8$ のとき

$f'(t)=0$ の解は $t=a$ だけとなり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	a^2+4	↗

よって，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$ である。

(ii)　$a=8$ のとき

$f'(t)=\dfrac{1}{4}(t-8)(t+4)^2$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	-4	$\cdots$	8	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↘	68	↗

よって，$f(t)$ の最小値は $f(8)=68$ である。

(iii)　$a>8$ のとき

(＊)の解を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすると，$a>0$ から $t=\alpha,\ \beta$ はともに負となり，$f(t)$ の増減は右表の通りで，

t	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘		↗		↘	a^2+4	↗

$$f(\alpha)=(\alpha-2a)^2+\left(\frac{\alpha^2}{4}-\frac{a^2}{4}+2\right)^2\geqq(\alpha-2a)^2>4a^2$$

$$f(\alpha)-f(a)>4a^2-(a^2+4)=3a^2-4>0$$

よって，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$ である。

(i)～(iii)より，$f(t)$ の最小値は $f(a)=a^2+4$ となる。

以上より，PQ の最小値は $\sqrt{f(a)}=\sqrt{a^2+4}$ である。

(2) 放物線 C_1 と Q を中心とし半径 $\sqrt{2}a$ の円 $C_2:(x-2a)^2+\left(y-\frac{a^2}{4}+2\right)^2=2a^2$ の位置関係は，(1)から PQ の最小値が $\sqrt{a^2+4}$ であることを利用すると，

(i) $\sqrt{2}a \geqq \sqrt{a^2+4}$ $(a \geqq 2)$ のとき

このとき，C_1 と C_2 の共有点は存在する。すると，C_1 上の点 P と C_2 上の点 R の距離はこの共有点において最小となり，最小値は 0 である。

(ii) $\sqrt{2}a < \sqrt{a^2+4}$ $(0<a<2)$ のとき

このとき，C_1 と C_2 の共有点は存在しない。すると，PQ の最小値が $\sqrt{a^2+4}$ より，C_1 上の点 P と C_2 上の点 R の距離の最小値は $\sqrt{a^2+4}-\sqrt{2}a$ である。

コメント

放物線と円が題材となっている最大・最小についての問題です。(1)では，論理の詰めをどのようにするかで，記述量に違いが出てきます。結論は明らかなのですが。

問　題

xy 平面上を運動する点 P の時刻 t $(t>0)$ における座標 $(x,\ y)$ が，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ で表されている。原点を O とし，時刻 t における P の速度ベクトルを $\vec{v}$ とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ とするとき，極限値 $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)$ を求めよ。

(2) $\vec{v}$ が y 軸に平行になるような t $(t>0)$ のうち，最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とする。このとき，不等式 $t_2-t_1<\pi$ を示せ。 [2015]

解答例

(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$x=t^2\cos t$，$y=t^2\sin t$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t^2(\cos t,\ \sin t)$

$$\frac{dx}{dt}=2t\cos t-t^2\sin t,\quad \frac{dy}{dt}=2t\sin t+t^2\cos t$$

これより，$\vec{v}=t(2\cos t-t\sin t,\ 2\sin t+t\cos t)$ となる。

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}=t^3(2\cos^2 t-t\cos t\sin t+2\sin^2 t+t\sin t\cos t)=2t^3$

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=t^2,\ |\vec{v}|=t\sqrt{(2\cos t-t\sin t)^2+(2\sin t+t\cos t)^2}=t\sqrt{t^2+4}$$

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\vec{v}$ とのなす角を $\theta(t)$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とすると，

$$\cos\theta(t)=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{v}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\vec{v}|}=\frac{2t^3}{t^3\sqrt{t^2+4}}=\frac{2}{\sqrt{t^2+4}}$$

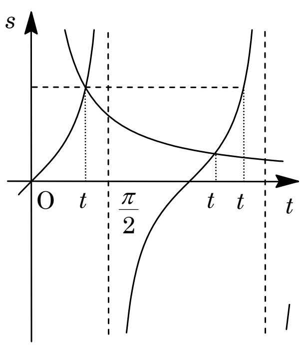
よって，$t\to\infty$ のとき $\cos\theta(t)\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\theta(t)=\frac{\pi}{2}$ である。

(2) $t>0$ において，$\vec{v}$ が y 軸に平行なるのは，$\dfrac{dx}{dt}=0$ から $2\cos t-t\sin t=0$

すなわち，$2\cos t=t\sin t$ から，$\cos t\neq 0$ となり，

$$\tan t=\frac{2}{t}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$(*)$の解は，$s=\tan t$ と $s=\dfrac{2}{t}$ の交点の t 座標として表せる。そして，正で最も小さいものを t_1，次に小さいものを t_2 とすると右図のようになる。



ここで，$t_3=t_1+\pi$ とおくと，$t_2<t_3$ となるので，

$$t_2-t_1<t_3-t_1=\pi$$

コメント

速度ベクトルが題材の基本的な問題です。(2)はいろいろな方法が考えられますが，いちばん感覚的に理解できるもので記載しました。

問　題

$a>1$ とし，次の不等式を考える。

$$(*)\quad \frac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$$

(1)　$a=2$ のとき，すべての $t>0$ に対して上の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

(2)　すべての $t>0$ に対して上の不等式(＊)が成り立つような a の範囲を求めよ。

[2014]

解答例

(1)　まず，$t>0$ のとき，$f(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{2}}$ とおくと，

$$f'(t)=e^t-e^{\frac{t}{2}}-\frac{t}{2}e^{\frac{t}{2}}=\left(e^{\frac{t}{2}}-1-\frac{t}{2}\right)e^{\frac{t}{2}}$$

さらに，$g(t)=e^{\frac{t}{2}}-1-\frac{t}{2}$ とおくと，$g'(t)=\frac{1}{2}e^{\frac{t}{2}}-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left(e^{\frac{t}{2}}-1\right)$

すると，$t>0$ のとき，$g'(t)>0$ から $g(t)>g(0)=0$ となり，すなわち $f'(t)>0$ から，$f(t)>f(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{2}}$ が成り立つ。

(2)　(1)と同様にして，$t>0$ のとき，$h(t)=e^t-1-te^{\frac{t}{a}}$ とおくと，

$$h'(t)=e^t-e^{\frac{t}{a}}-\frac{t}{a}e^{\frac{t}{a}}=\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\frac{t}{a}\right)e^{\frac{t}{a}}$$

$k(t)=e^{\frac{a-1}{a}t}-1-\dfrac{t}{a}$ とおくと，$k'(t)=\dfrac{a-1}{a}e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a}=\dfrac{a-1}{a}\left(e^{\frac{a-1}{a}t}-\dfrac{1}{a-1}\right)$

さて，$a>1$ より，$\dfrac{1}{a-1}>0$，$\dfrac{a-1}{a}>0$ となり，

(i)　$0<\dfrac{1}{a-1}\leqq 1$　$(a\geqq 2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)>0$ から $k(t)>k(0)=0$ となり，すなわち $h'(t)>0$ から，$h(t)>h(0)=0$ である。

よって，すべての $t>0$ に対して，不等式 $\dfrac{e^t-1}{t}\geqq e^{\frac{t}{a}}$ が成り立つ。

(ii)　$\dfrac{1}{a-1}>1$　$(1<a<2)$ のとき

$t>0$ において，$k'(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在する。これを α とおくと $k(t)$ の増減は右表のようになり，$k(\alpha)<0$，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}k(t)=\infty$ から，$\alpha<\beta$ を満たすある β に対して，$k(\beta)=0$ となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	∞
$k'(t)$		$-$	0	$+$	
$k(t)$	0	↘		↗	

すなわち，$h'(\beta)=0$ である。すると，$h(t)$ の増減は右表のようになり，すべての $t>0$ に対して $h(t)>0$，すなわち $\dfrac{e^t-1}{t} \geqq e^{\frac{t}{a}}$ は成立しない。

t	0	$\cdots$	β	$\cdots$
$h'(t)$		$-$	0	$+$
$h(t)$	0	$\searrow$		$\nearrow$

(i)(ii)より，求める a の範囲は，$a \geqq 2$ である。

コメント

微分法の不等式への応用問題です。なお，$\lim\limits_{t\to\infty} k(t)=\infty$ は証明なしで用いています。

問　題

k を定数とするとき，方程式 $e^x - x^e = k$ の異なる正の解の個数を求めよ。　[2013]

解答例

$x>0$ において，$f(x)=e^x-x^e$ とおくと，

$$f'(x)=e^x-ex^{e-1}=e(e^{x-1}-x^{e-1})$$

ここで，$g_1(x)=e^{x-1}$，$g_2(x)=x^{e-1}$ とし，$F(x)=\log g_1(x)-\log g_2(x)$ とおくと，

$$F(x)=x-1-(e-1)\log x$$

$$F'(x)=1-\frac{e-1}{x}=\frac{x-(e-1)}{x}$$

x	0	$\cdots$	$e-1$	$\cdots$
$F'(x)$		$-$	0	$+$
$F(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$F(x)$ の値の増減は右表のようになり，$F(1)=F(e)=0$ に注意すると，$1<e-1<e$ から，

$0<x<1$ または $e<x$ のとき $F(x)>0$，$1<x<e$ のとき $F(x)<0$ となる。

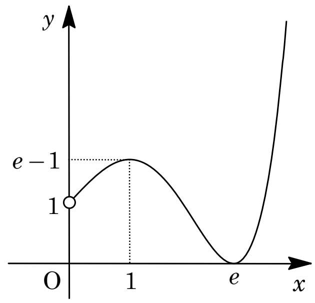
さらに，$f'(x)$ の符号と $F(x)$ の符号は一致することより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	e	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\nearrow$	$e-1$	$\searrow$	0	$\nearrow$

$$\lim_{x\to+0}f(x)=1$$

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}(e^x-x^e)=\lim_{x\to\infty}e^x\left(1-\frac{x^e}{e^x}\right)=\infty$$

これより，$x>0$ における $y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，直線 $y=k$ との共有点の個数を調べると，方程式 $e^x-x^e=k$ の異なる正の解の個数は，



$k<0$ のとき 0 個

$k=0$，$k>e-1$ のとき 1 個

$0<k\leqq 1$，$k=e-1$ のとき 2 個

$1<k<e-1$ のとき 3 個

コメント

微分の応用問題ですが，スムーズな処理を行うために，上の解答例では，対数をとりました。なお，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^e}{e^x}=0$ は，証明なしで利用しています。

問　題

3 次関数 $y=x^3-3x^2+2x$ のグラフを C, 直線 $y=ax$ を l とする。

(1)　C と l が原点以外の共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲内にあるとき，C と l によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ が最小となる a の値を求めよ。　[2012]

解答例

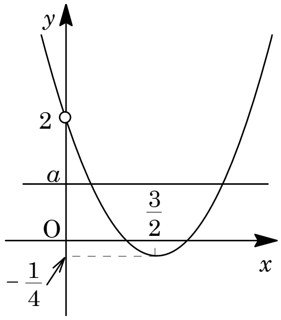
(1)　$y=x^3-3x^2+2x$ ……①と $y=ax$ ……②を連立して，

$$x^3-3x^2+2x=ax\,,\ \ x(x^2-3x+2-a)=0$$

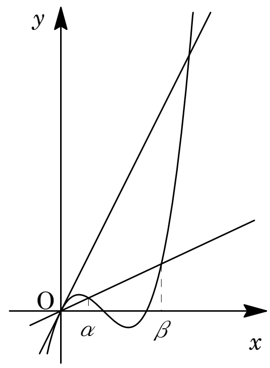
$x\neq 0$ のとき，$x^2-3x+2-a=0$ ………③

③が $x=0$ 以外の解をもつ条件は，$x^2-3x+2=a$ から，$y=x^2-3x+2=\left(x-\dfrac{3}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ のグラフと直線 $y=a$ が，$x\neq 0$ の共有点をもつ条件に等しい。

よって，右図より，$a\geqq -\dfrac{1}{4}$ である。



(2)　①より，$y'=3x^2-6x+2$ から，$x=0$ のとき $y'=2$ となり，曲線 C における原点での接線の方程式は，$y=2x$ である。(1)から，$a\geqq -\dfrac{1}{4}$ のとき，C と l によって囲まれる部分の面積 $S(a)$ は，



(i)　$a\geqq 2$ のとき　明らかに $S(a)\geqq S(2)$ である。

(ii)　$-\dfrac{1}{4}\leqq a<2$ のとき

C と l の交点を $x=0,\ \alpha,\ \beta\ (0<\alpha\leqq\beta)$ とおくと ③より，

$$\alpha+\beta=3\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ \alpha\beta=2-a\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$\beta=3-\alpha$ となり，⑤に代入すると，

$$2-a=3\alpha-\alpha^2,\ \ a=\alpha^2-3\alpha+2\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑥を用いると，

$$S(a)=\int_0^{\alpha}\{x^3-3x^2+(2-a)x\}dx+\int_{\alpha}^{\beta}-\{x^3-3x^2+(2-a)x\}dx$$

$$=\Big[\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{2-a}{2}x^2\Big]_0^{\alpha}-\Big[\frac{x^4}{4}-x^3+\frac{2-a}{2}x^2\Big]_{\alpha}^{\beta}$$

$$=2\Big(\frac{\alpha^4}{4}-\alpha^3+\frac{2-a}{2}\alpha^2\Big)-\Big(\frac{\beta^4}{4}-\beta^3+\frac{2-a}{2}\beta^2\Big)$$

$$=\frac{\alpha^4}{2}-2\alpha^3+(3\alpha-\alpha^2)\alpha^2-\frac{(3-\alpha)^4}{4}+(3-\alpha)^3-\frac{3\alpha-\alpha^2}{2}(3-\alpha)^2$$

$$= -\frac{\alpha^4}{2} + \alpha^3 - \frac{1}{4}(3-\alpha)^4 + \frac{1}{2}(2-\alpha)(3-\alpha)^3$$

ここで，$S(a) = T(\alpha)$ とおくと，

$$T'(\alpha) = -2\alpha^3 + 3\alpha^2 + (3-\alpha)^3 - \frac{1}{2}(3-\alpha)^3 - \frac{3}{2}(2-\alpha)(3-\alpha)^2$$

$$= -2\alpha^3 + 3\alpha^2 + \frac{1}{2}(3-\alpha)^2\{3-\alpha-3(2-\alpha)\}$$

$$= \alpha^2(-2\alpha+3) + \frac{1}{2}(3-\alpha)^2(2\alpha-3) = -\frac{1}{2}(2\alpha-3)(\alpha^2+6\alpha-9)$$

さて，$T'(\alpha) = 0$ の解は，

$$\alpha = \frac{3}{2},\ -3\pm3\sqrt{2}$$

また，$-\frac{1}{4} \leqq a < 2$ のとき，(1)の図より，

α	0	$\cdots$	$-3+3\sqrt{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$
$T'(\alpha)$		$-$	0	$+$	0
$T(\alpha)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$0 < \alpha \leqq \frac{3}{2}$ となり，この範囲における $T(\alpha)$ の値の変化は上表のようになる。

これより，$\alpha = -3+3\sqrt{2}$ において，$T(\alpha)$ は最小となる。

(i)(ii)より，$S(2) = \lim_{\alpha\to0} T(\alpha)$ に注意すると，$S(a)$ が最小となる a の値は，⑥から，

$$a = (-3+3\sqrt{2})^2 - 3(-3+3\sqrt{2}) + 2 = 38 - 27\sqrt{2}$$

コメント

計算量はかなりのものです。$S(a)$ を 1 つの変数で表すならば，上の解のように α の関数とするのが，いちばん簡単でしょう。

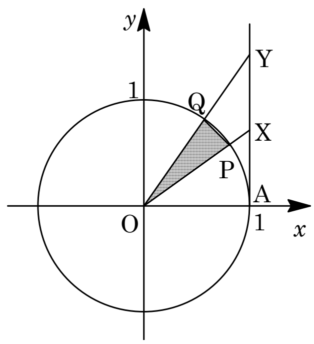
問　題

定数 k は $k>1$ を満たすとする。xy 平面上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ を通り x 軸に垂直な直線の第 1 象限に含まれる部分を，2 点 X, Y が $\mathrm{AY}=k\mathrm{AX}$ を満たしながら動いている。原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円と線分 OX, OY が交わる点をそれぞれ P, Q とするとき，△OPQ の面積の最大値を k を用いて表せ。 [2011]

解答例

$t>0$ として，$\mathrm{X}(1,\ t)$ とおくと，条件より，$\mathrm{Y}(1,\ kt)$ となる。ここで，$\angle\mathrm{AOX}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOY}=\beta$ とおくと，

$$\tan\alpha=t,\ \tan\beta=kt\cdots\cdots\cdots①$$



さて，△OPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot1^2\sin(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}\sin(\beta-\alpha)\cdots\cdots\cdots②$$

S が最大となるのは，$0<\beta-\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ から $\beta-\alpha$ が最大となるときである。すなわち，$\tan(\beta-\alpha)$ が最大値をとる場合である。

そこで，$f(t)=\tan(\beta-\alpha)$ とおくと，①から，$f(t)=\dfrac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\dfrac{(k-1)t}{1+kt^2}$

$$f'(t)=\frac{(k-1)\{(1+kt^2)-t\cdot2kt\}}{(1+kt^2)^2}=\frac{(k-1)(1-kt^2)}{(1+kt^2)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{k}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$+$	0	$-$
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$f(t)$ の値は右表のように増減し，$t=\dfrac{1}{\sqrt{k}}$ のときに最大となる。よって，最大値は，

$$\tan(\beta-\alpha)=f\left(\frac{1}{\sqrt{k}}\right)=\frac{(k-1)\cdot\frac{1}{\sqrt{k}}}{1+k\cdot\frac{1}{k}}=\frac{k-1}{2\sqrt{k}}$$

このとき，$\sin(\beta-\alpha)=\dfrac{k-1}{\sqrt{(2\sqrt{k})^2+(k-1)^2}}=\dfrac{k-1}{k+1}$ となり，②から S の最大値は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{k-1}{k+1}=\frac{k-1}{2(k+1)}$$

コメント

図形量の最大値を問う基本題です。θ が鋭角のとき，$\sin\theta$ と $\tan\theta$ は，ともに単調増加する関数という事実を利用しています。

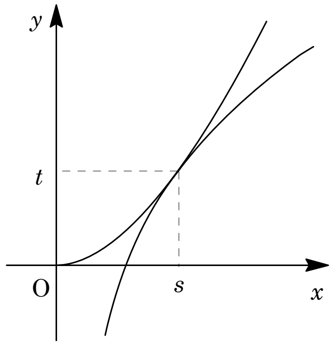
問　題

正の整数 a, b に対し, $x>0$ で定義された 2 つの関数 x^a と $\log bx$ のグラフが 1 点で接するとする。

(1) 接点の座標 $(s,\ t)$ を a を用いて表せ。また, b を a の関数として表せ。

(2) $0<h<s$ を満たす h に対し, 直線 $x=h$ および 2 つの曲線 $y=x^a$, $y=\log bx$ で囲まれる領域の面積を $A(h)$ とする。$\displaystyle\lim_{h\to 0}A(h)$ を a で表せ。 [2008]

解答例



(1) $y=x^a$ ……①に対し, $y'=ax^{a-1}$

また, $y=\log bx$ ……②に対し, $y'=\dfrac{1}{x}$

①と②のグラフが点 $(s,\ t)$ で接することより,

$$s^a=\log bs\ \cdots\cdots\cdots③,\quad as^{a-1}=\frac{1}{s}\ \cdots\cdots\cdots④$$

④から, $s^a=\dfrac{1}{a}$ となり $s=\dfrac{1}{a^{\frac{1}{a}}}=a^{-\frac{1}{a}}$

①から, $t=s^a=\dfrac{1}{a}$

③④から, $\dfrac{1}{a}=\log\dfrac{b}{a^{\frac{1}{a}}}$ となり, $b=a^{\frac{1}{a}}e^{\frac{1}{a}}=(ae)^{\frac{1}{a}}$

(2) 2 曲線 $y=x^a$, $y=\log bx$ と直線 $x=h$ $(0<h<s)$ で囲まれる領域の面積 $A(h)$ は,

$$A(h)=\int_h^s(x^a-\log bx)\,dx=\Big[\frac{1}{a+1}x^{a+1}-x\log b-x\log x+x\Big]_h^s$$

$$=\frac{1}{a+1}(s^{a+1}-h^{a+1})-(s-h)\log b-(s\log s-h\log h)+s-h$$

ここで, $h\to 0$ のとき, $h\log h\to 0$ なので, (1)の結果を用いると,

$$\lim_{h\to 0}A(h)=\frac{1}{a+1}s^{a+1}-s\log b-s\log s+s=s\Big(\frac{1}{a+1}s^a-\log b-\log s+1\Big)$$

$$=a^{-\frac{1}{a}}\Big(\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{a}\log ae+\frac{1}{a}\log a+1\Big)=a^{-\frac{1}{a}}\Big(\frac{1}{a+1}\cdot\frac{1}{a}-\frac{1}{a}+1\Big)$$

$$=a^{-\frac{1}{a}}\Big(\frac{1}{a}-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a}+1\Big)=\frac{a}{a+1}a^{-\frac{1}{a}}$$

コメント

微積分の基本問題で, 計算量も少なめです。なお, 本問では, $\displaystyle\lim_{h\to 0}h\log h=0$ の利用に, 証明は不要でしょう。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　a, b を正の定数とし，$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ とおく。$t>0$ における関数 $g(t)$ の増減を調べ，極値を求めよ。

(2)　m を正の定数とし，xy 座標平面において条件

(a)　$y>x>0$　　　(b)　すべての $t>0$ に対し $\dfrac{1}{y}t^x-\log t\geqq m$

を満たす点 $(x,\ y)$ からなる領域を D とする。D の概形を図示せよ。

(3)　(2)の領域 D の面積を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$g(t)=\dfrac{1}{b}t^a-\log t$ より，

$$g'(t)=\frac{a}{b}t^{a-1}-\frac{1}{t}=\frac{a}{bt}\Big(t^a-\frac{b}{a}\Big)$$

関数 $g(t)$ の増減は右表のようになり，極小値は，

t	0	$\cdots$	$\left(\frac{b}{a}\right)^{\frac{1}{a}}$	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$
$g(t)$		↘		↗

$$g\Big(\Big(\frac{b}{a}\Big)^{\frac{1}{a}}\Big)=\frac{1}{b}\cdot\frac{b}{a}-\frac{1}{a}\log\frac{b}{a}=\frac{1}{a}\Big(1-\log\frac{b}{a}\Big)$$

(2)　条件(a)より $y>x>0$……①なので，(1)から，$\dfrac{1}{y}t^x-\log t\geqq\dfrac{1}{x}\Big(1-\log\dfrac{y}{x}\Big)$

すると，条件(b)が成立する条件は，$\dfrac{1}{x}\Big(1-\log\dfrac{y}{x}\Big)\geqq m$ となり，

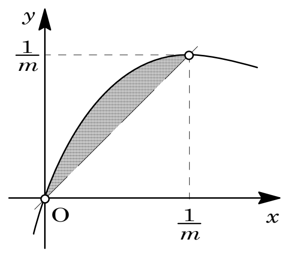
$$\log\frac{y}{x}\leqq 1-mx\ ,\quad y\leqq xe^{1-mx}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(x)=xe^{1-mx}$ とおくと，

$$f'(x)=e^{1-mx}-mxe^{1-mx}=(1-mx)e^{1-mx}$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{m}$	$\cdots$	∞
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	↗	$\frac{1}{m}$	↘	0

よって，①②を満たす領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし破線の境界は含まない。



(3)　領域 D の面積 S は，$S=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{m}}xe^{1-mx}dx-\frac{1}{2m^2}$

さて，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{m}}xe^{1-mx}dx=\Big[-\frac{1}{m}xe^{1-mx}\Big]_0^{\frac{1}{m}}+\frac{1}{m}\int_0^{\frac{1}{m}}e^{1-mx}dx$

$$=-\frac{1}{m^2}+\frac{1}{m}\Big[-\frac{1}{m}e^{1-mx}\Big]_0^{\frac{1}{m}}$$

$$=-\frac{1}{m^2}-\frac{1}{m^2}(1-e)=-\frac{2}{m^2}+\frac{e}{m^2}$$

よって，$S=-\dfrac{2}{m^2}+\dfrac{e}{m^2}-\dfrac{1}{2m^2}=\dfrac{1}{m^2}\Big(e-\dfrac{5}{2}\Big)$

コメント

式の形から明らかなように，(1)が(2)の誘導となっています。(1)で求めた最小値を利用して(2)を解きなさいというメッセージを読み取ることができます。

問　題

a, b を正の実数とする。

(1)　区間 $a<x$ における関数 $f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ の増減を調べよ。

(2)　区間 $a<x$ における関数 $g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在するための必要十分条件を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{x^4}{(x-a)^3}$ より，$f'(x)=\dfrac{4x^3(x-a)^3-x^4\cdot 3(x-a)^2}{(x-a)^6}=\dfrac{x^3(x-4a)}{(x-a)^4}$

これより，$f(x)$ の増減は，右の表のようになる。なお，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ である。

x	a	$\cdots$	$4a$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	$\dfrac{256}{27}a$	$\nearrow$

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{(x-a)^2}-\dfrac{b}{x^3}$ より，

$$g'(x)=\frac{-2}{(x-a)^3}+\frac{3b}{x^4}=\frac{-2x^4+3b(x-a)^3}{x^4(x-a)^3}$$

ここで，$h(x)=-2x^4+3b(x-a)^3$ とおくと，$a<x$ で $h(x)$ の符号と $g'(x)$ の符号は一致し，

$$h(x)=-2(x-a)^3\left\{\frac{x^4}{(x-a)^3}-\frac{3b}{2}\right\}=-2(x-a)^3\left\{f(x)-\frac{3b}{2}\right\}$$

(i)　$\dfrac{3b}{2}\leqq\dfrac{256}{27}a\left(b\leqq\dfrac{512}{81}a\right)$ のとき

$a<x$ において，$f(x)-\dfrac{3b}{2}\geqq 0$ なので，$h(x)\leqq 0$ すなわち $g'(x)\leqq 0$ となる。

よって，$g(x)$ は単調減少するので，$g(x)$ のグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線は存在しない。

(ii)　$\dfrac{3b}{2}>\dfrac{256}{27}a\left(b>\dfrac{512}{81}a\right)$ のとき

(1)より，$f(x)-\dfrac{3b}{2}=0$ は $a<x$ で異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになる。なお，$\displaystyle\lim_{x\to a+0}g(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}g(x)=0$ である。

x	a	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$
$g(x)$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$g(x)$ は $a<x$ で連続なので，このグラフと相異なる 3 点で交わる x 軸に平行な直線が存在する。

(i)(ii)より，求める条件は，$b > \dfrac{512}{81}a$ である。

コメント

(2)で関数 $h(x)$ を設定しましたが，振り返ってみると冗長でした。$g'(x)$ のまま同じように処理ができます。

問　題

関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の漸化式により定める。

$$f_1(x)=x^2,\quad f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$$

ただし，$f_n^{(k)}(x)$ は $f_n(x)$ の第 k 次導関数を表す。

(1)　$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを示し，x^{n+1} の係数を求めよ。

(2)　$f_n^{(1)}(0)$，$f_n^{(2)}(0)$，$f_n^{(3)}(0)$，$f_n^{(4)}(0)$ を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$f_1(x)=x^2$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$f_k(x)$ が $k+1$ 次多項式であるとする。

このとき $f_k^{(2)}(x)$ は $k-1$ 次多項式となり，$x^3f_k^{(2)}(x)$ は $k+2$ 次多項式である。

すると，$f_{k+1}(x)=f_k(x)+x^3f_k^{(2)}(x)$ より，$f_{k+1}(x)$ は $k+2$ 次多項式となる。

(i)(ii)より，$f_n(x)$ は $n+1$ 次多項式である。

さて，$f_n(x)$ の x^{n+1} の係数を a_n とすると，$a_1=1$ で，$f_n^{(2)}(x)$ の x^{n-1} の係数は $n(n+1)a_n$ となるので，$f_{n+1}(x)=f_n(x)+x^3f_n^{(2)}(x)$ から x^{n+2} の係数を比べると，

$$a_{n+1}=n(n+1)a_n$$

$n\geqq 2$ で，$a_n=a_1(1\cdot 2)\cdot(2\cdot 3)\cdot(3\cdot 4)\cdots(n-1)n=(n-1)!n!$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=0!1!=1$ となり成立する。

よって，$a_n=(n-1)!n!$

(2)　$g_n(x)$ を x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項が 0 の 5 次以上の多項式として，

$$f_n(x)=g_n(x)+p_nx^4+q_nx^3+r_nx^2+s_nx+t_n$$

すると条件より，

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)&=f_n(x)+x^3\{g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n\}\\&=f_n(x)+x^3g_n^{(2)}(x)+12p_nx^5+6q_nx^4+2r_nx^3\end{aligned}$$

ここで x^4，x^3，x^2，x の係数および定数項を比べると，

$$p_{n+1}=p_n+6q_n\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=q_n+2r_n\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=r_n\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=s_n\cdots\cdots④,\quad t_{n+1}=t_n\cdots\cdots⑤$$

また，$f_1(x)=x^2$ より，$p_1=q_1=0$，$r_1=1$，$s_1=t_1=0$ となり，

③より $r_n=1$，④⑤より $s_n=t_n=0$

②に代入して，$q_{n+1}=q_n+2$ より，$q_n=0+2(n-1)=2(n-1)$

さらに①に代入して，$p_{n+1}=p_n+12(n-1)$ より，$n\geqq 2$ で，

$$p_n=0+\sum_{k=1}^{n-1}12(k-1)=6(n-1)(n-2)$$

$n=1$ をあてはめると，$p_1=0$ となり成立する。

よって，$f_n^{(1)}(x)=g_n^{(1)}(x)+4p_nx^3+3q_nx^2+2r_nx+s_n$ より，$f_n^{(1)}(0)=s_n=0$

$f_n^{(2)}(x)=g_n^{(2)}(x)+12p_nx^2+6q_nx+2r_n$ より，$f_n^{(2)}(0)=2r_n=2$

$f_n^{(3)}(x)=g_n^{(3)}(x)+24p_nx+6q_n$ より，$f_n^{(3)}(0)=6q_n=12(n-1)$

$f_n^{(4)}(x)=g_n^{(4)}(x)+24p_n$ より，$f_n^{(4)}(0)=24p_n=144(n-1)(n-2)$

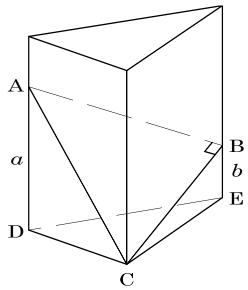
コメント

(1)と(2)は同じ解法をとっています。比べる位置が異なるだけです。

問　題

1 辺の長さが 1 の正三角形を底面とし，高さが 2 の三角柱を考える。この三角柱を平面で切り，その断面が 3 辺とも三角柱の側面上にある直角三角形であるようにする。そのような直角三角形の面積がとりうる値の範囲を求めよ。 [2000]

解答例



断面の直角三角形の 1 つの頂点 C を三角柱の底面上におき，$\mathrm{AD}=a$，$\mathrm{BE}=b$ として右図のように設定する。

$$\mathrm{AC}=\sqrt{a^2+1},\ \mathrm{BC}=\sqrt{b^2+1}$$
$$\mathrm{AB}=\sqrt{(a-b)^2+1}$$

$0\leqq b\leqq a\leqq 2$ とすると，AC が最大辺となり，$\angle\mathrm{B}=90°$ となる。

三平方の定理を適用して，$a^2+1=b^2+1+(a-b)^2+1$

$$2b^2-2ab+1=0,\ a=b+\frac{1}{2b}$$

すると，$0\leqq b\leqq b+\dfrac{1}{2b}\leqq 2$ より，$2b^2-4b+1\leqq 0$ となり，$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$

このとき，△ABC の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+1}\sqrt{(a-b)^2+1}=\frac{1}{2}\sqrt{(b^2+1)\Big(\frac{1}{4b^2}+1\Big)}=\frac{1}{2}\sqrt{b^2+\frac{1}{4b^2}+\frac{5}{4}}$$

ここで，$f(b)=b^2+\dfrac{1}{4b^2}+\dfrac{5}{4}$ とおくと，$f'(b)=2b-\dfrac{1}{2b^3}=\dfrac{4b^4-1}{2b^3}$

さて，$f(b)=\Big(b+\dfrac{1}{2b}\Big)^2+\dfrac{1}{4}$ と変形すると，

b	$\frac{2-\sqrt{2}}{2}$	…	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	…	$\frac{2+\sqrt{2}}{2}$
$f'(b)$		$-$	0	$+$	
$f(b)$	$\frac{17}{4}$	↘	$\frac{9}{4}$	↗	$\frac{17}{4}$

$$f\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2+\frac{1}{4}=2+\frac{1}{4}=\frac{9}{4}$$

$$f\Big(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}\Big)=\Big(\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{2\pm\sqrt{2}}\Big)^2+\frac{1}{4}=4+\frac{1}{4}=\frac{17}{4}$$

増減表から $\dfrac{9}{4}\leqq f(b)\leqq\dfrac{17}{4}$ となるので，$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{9}{4}}\leqq S\leqq\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{17}{4}}$ より，

$$\frac{3}{4}\leqq S\leqq\frac{\sqrt{17}}{4}$$

コメント

$b=\dfrac{2\pm\sqrt{2}}{2}$ のとき，$f(b)$ の値をそのまま計算するとたいへんそうなので工夫をしました。しかし，$f(b)=b+\dfrac{1}{2b}$ と設定したほうがよかったかもしれません。

問　題

正の実数 a, b, p に対して，$A=(a+b)^p$ と $B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ の大小関係を調べよ。

[1999]

解答例

$A=(a+b)^p$，$B=2^{p-1}(a^p+b^p)$ に対して，$\dfrac{b}{a}=x$ とおくと，$x>0$ として，

$$A=a^p(1+x)^p,\ B=2^{p-1}(a^p+a^px^p)=a^p\cdot 2^{p-1}(1+x^p)$$

すると，$A-B=a^p\left\{(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)\right\}$

ここで，$f(x)=(1+x)^p-2^{p-1}(1+x^p)$ とおくと，

$$f'(x)=p(1+x)^{p-1}-2^{p-1}\cdot px^{p-1}=p\left\{(1+x)^{p-1}-(2x)^{p-1}\right\}$$

(i)　$p-1>0$　($p>1$) のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f(x)$ の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\leqq 0$

よって, $A\leqq B$（等号は $a=b$ のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$

(ii)　$p-1=0$　($p=1$) のとき

$f(x)=(1+x)-2^0(1+x)=0$ より，$A=B$

(iii)　$p-1<0$　($0<p<1$) のとき

$f'(x)>0 \iff (1+x)^{p-1}>(2x)^{p-1} \iff 1+x<2x \iff 1<x$

$f'(x)<0 \iff (1+x)^{p-1}<(2x)^{p-1} \iff 1+x>2x \iff 0<x<1$

$f(x)$ の値の増減は右図のようになり，

$f(x)\geqq 0$

よって, $A\geqq B$（等号は $a=b$ のとき成立）

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$

(i)(ii)(iii)をまとめて，

$p>1$ かつ $a\neq b$ のとき $A<B$, また $0<p<1$ かつ $a\neq b$ のとき $A>B$, さらにこれらの場合以外の $p=1$ または $a=b$ のとき $A=B$

コメント

A も B も a と b についての p 次式で，しかも定数項が 0 なので，a と b の比を考えて文字を減らしました。この常套手段で結論が導けます。

問　題

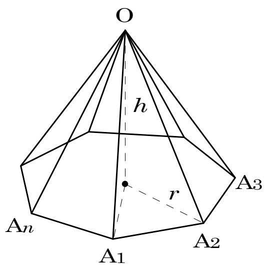
斜辺の長さが 1 である正 n 角錐を考える。つまり，底面を正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$，頂点を O と表せば $\mathrm{OA}_1=\mathrm{OA}_2=\cdots=\mathrm{OA}_n=1$ である。そのような正 n 角錐のなかで最大の体積をもつものを C_n とする。

(1) C_n の体積 V_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n$ を求めよ。 [1999]

解答例

(1) 底面の正 n 角形の面積を S，外接円の半径を r とし，正 n 角錐の高さを h とすると，条件より，



$$r^2+h^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$S=\left(\frac{1}{2}r^2\sin\frac{2\pi}{n}\right)\times n=\frac{nr^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}\cdots\cdots\cdots②$$

よって，正 n 角錐の体積を V とすると，①②より，

$$V=\frac{1}{3}Sh=\frac{1}{6}nr^2h\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{1}{6}n(1-h^2)h\sin\frac{2\pi}{n}$$

$f(h)=(1-h^2)h$ とおくと，①より，

$0<h<1$ で，$f'(h)=1-3h^2$

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$		$+$	0	$-$	
$f(h)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より，$h=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，$f(h)$ は最大値

$f\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。

よって，V の最大値 V_n は，$V_n=\dfrac{1}{6}n\dfrac{2}{9}\sqrt{3}\sin\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{\sqrt{3}}{27}n\sin\dfrac{2\pi}{n}$

(2) (1)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}V_n=\frac{\sqrt{3}}{27}\lim_{n\to\infty}n\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{\sqrt{3}}{27}\lim_{n\to\infty}2\pi\cdot\frac{\sin\frac{2\pi}{n}}{\frac{2\pi}{n}}=\frac{2\sqrt{3}}{27}\pi$

コメント

本問のような問題が出されたのは，あっさり解ける問題も必要ということでしょうか。

問　題

実数 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ の最大値と最小値を求めよ。 [2017]

解答例

まず，$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt$ に対して，$u=t-\pi$ とおくと，

$$f(x+\pi)=\int_{x+\pi}^{x+\frac{3}{2}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin(u+\pi)|}{1+\sin^2(u+\pi)}du$$
$$=\int_x^{x+\frac{\pi}{2}}\frac{|\sin u|}{1+\sin^2 u}du=f(x)$$

これより，$f(x)$ は周期 π の周期関数なので，以下，$0\leqq x\leqq\pi$ で考えて，

$$f'(x)=\frac{\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{2}\right)\right|}{1+\sin^2\left(x+\frac{\pi}{2}\right)}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}=\frac{|\cos x|}{1+\cos^2 x}-\frac{|\sin x|}{1+\sin^2 x}$$
$$=\frac{|\cos x|(1+\sin^2 x)-|\sin x|(1+\cos^2 x)}{(1+\cos^2 x)(1+\sin^2 x)}$$

ここで，$g(x)=|\cos x|(1+\sin^2 x)-|\sin x|(1+\cos^2 x)$ とおくと，

(i)　$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$g(x)=\cos x(1+\sin^2 x)-\sin x(1+\cos^2 x)$$
$$=\cos x-\sin x+\sin x\cos x(\sin x-\cos x)$$
$$=(\sin x-\cos x)(\sin\cos x-1)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)(\sin 2x-2)$$

すると，$f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致するので，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

(ii)　$\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ のとき

$$g(x)=-\cos x(1+\sin^2 x)-\sin x(1+\cos^2 x)$$
$$=-\sin x-\cos x-\sin x\cos x(\sin x+\cos x)$$
$$=-(\sin x+\cos x)(\sin\cos x+1)$$
$$=-\frac{\sqrt{2}}{2}\sin\left(x+\frac{\pi}{4}\right)(\sin 2x+2)$$

すると，$f'(x)$ と $g(x)$ の符号は一致するので，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}\pi$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

したがって，$f(x)$ は $x=\dfrac{\pi}{2}$ で連続で $f(0)=f(\pi)$ より，最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)$，最小値は $f\left(\dfrac{3}{4}\pi\right)$ となる。

さて，$F(t)=\displaystyle\int\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt$ とおくと，

$$\begin{aligned}
F(t)&=\int\frac{\sin t}{2-\cos^2 t}dt=\int\frac{\sin t}{(\sqrt{2}+\cos t)(\sqrt{2}-\cos t)}dt\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\int\left(\frac{1}{\sqrt{2}-\cos t}+\frac{1}{\sqrt{2}+\cos t}\right)\sin t\,dt\\
&=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\{-\log(\sqrt{2}-\cos t)+\log(\sqrt{2}+\cos t)\}+C\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}-\cos t}{\sqrt{2}+\cos t}+C
\end{aligned}$$

すると，

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{\pi}{4}\right)&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{3}{4}\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt=F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F\left(\frac{\pi}{4}\right)\\
&=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}}{3\sqrt{2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 9=\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
f\left(\frac{3}{4}\pi\right)&=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{|\sin t|}{1+\sin^2 t}dt=\int_{\frac{3}{4}\pi}^{\pi}\frac{\sin t}{1+\sin^2 t}dt+\int_{\pi}^{\frac{5}{4}\pi}\frac{-\sin t}{1+\sin^2 t}dt\\
&=F(\pi)-F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F\left(\frac{5}{4}\pi\right)+F(\pi)=2F(\pi)-F\left(\frac{3}{4}\pi\right)-F\left(\frac{5}{4}\pi\right)\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log\frac{3\sqrt{2}}{\sqrt{2}}\\
&=\frac{1}{\sqrt{2}}\log(\sqrt{2}+1)^2-\frac{1}{\sqrt{2}}\log 3=\frac{1}{\sqrt{2}}\log\frac{3+2\sqrt{2}}{3}
\end{aligned}$$

以上より，$f(x)$ の最大値は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log 3$，最小値は $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\log\dfrac{3+2\sqrt{2}}{3}$ である。

コメント

定積分の計算問題ですが，周期性を見つけるのが，最初のポイントです。ただ，その後，すさまじい計算が待ち受けています。

問　題

n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)},\ \ a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i\quad (k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。

(1)　a_2 および a_3 を求めよ。

(2)　一般項 a_k を求めよ。

(3)　$b_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。 [2012]

解答例

(1)　条件より，$a_1=\dfrac{1}{n(n+1)}$，$a_{k+1}=-\dfrac{1}{k+n+1}+\dfrac{n}{k}\displaystyle\sum_{i=1}^{k}a_i$ なので，

$$a_2=-\frac{1}{1+n+1}+\frac{n}{1}\cdot a_1=-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+1}=\frac{1}{(n+1)(n+2)}$$

$$a_3=-\frac{1}{2+n+1}+\frac{n}{2}\cdot(a_1+a_2)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left\{\frac{1}{n(n+1)}+\frac{1}{(n+1)(n+2)}\right\}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}\right)=-\frac{1}{n+3}+\frac{n}{2}\cdot\frac{2}{n(n+2)}$$

$$=-\frac{1}{n+3}+\frac{1}{n+2}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

(2)　(1)より，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ ……①と予測できるので，以下，数学的帰納法を用いて，①を証明する。

(i)　$k=1$ のとき　①は明らかに成立している。

(ii)　$k\leqq l$ のとき　①が成立していると仮定すると，

$$a_{l+1}=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\sum_{i=1}^{l}a_i=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}(a_1+a_2+\cdots+a_l)$$

$$=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+l-1}-\frac{1}{n+l}\right)$$

$$=-\frac{1}{l+n+1}+\frac{n}{l}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+l}\right)=-\frac{1}{n+l+1}+\frac{1}{n+l}=\frac{1}{(n+l)(n+l+1)}$$

(i)(ii)より，すべての自然数 k で，$a_k=\dfrac{1}{(n+k-1)(n+k)}$ である。

(3)　(2)より，$\dfrac{1}{(n+k)^2}<a_k<\dfrac{1}{(n+k-1)^2}$ となり，$\dfrac{1}{n+k}<\sqrt{a_k}<\dfrac{1}{n+k-1}$ から，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1},\ \ \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}<b_n<\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\Big[\log(1+x)\Big]_0^1=\log 2$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{n+k-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{1+\frac{k-1}{n}}=\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\log 2$$

よって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$である。

コメント

(2)は，いわゆる強化型の数学的帰納法です。(3)は，不等式で評価をして，区分求積法につなぐものです。どちらも，一癖ある典型題です。

問　題

実数 x に対して，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t-x\sin 2t\right|dt$ とおく。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2)　定積分 $\int_0^1 f(x)dx$ を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　条件より，$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t-x\sin 2t\right|dt$ を変形して，

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos t-2x\sin t\cos t\right|dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\left|1-2x\sin t\right|dt$$

(i)　$2x<1\left(x<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t(1-2x\sin t)dt=\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1-x$$

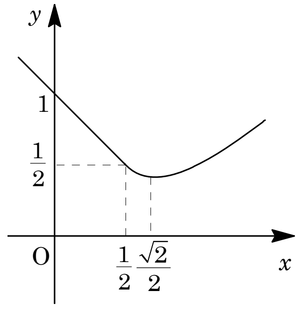
(ii)　$2x\geqq 1\left(x\geqq\frac{1}{2}\right)$ のとき

まず，$0\leqq t\leqq\frac{\pi}{2}$ において，$1=2x\sin t$ である t はただ 1 つ存在し，これを $t=\alpha$ とおくと，$\sin\alpha=\frac{1}{2x}$ となり，

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^{\alpha}\cos t(1-2x\sin t)dt+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}-\cos t(1-2x\sin t)dt\\&=\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_0^{\alpha}-\Big[\sin t-x\sin^2 t\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{2}}\\&=\sin\alpha-x\sin^2\alpha-(1-x)+\sin\alpha-x\sin^2\alpha\\&=2\cdot\frac{1}{2x}-2x\cdot\frac{1}{4x^2}-1+x\\&=x+\frac{1}{2x}-1\end{aligned}$$

すると，$f'(x)=1-\frac{1}{2x^2}=\frac{2x^2-1}{2x^2}$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$



(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は，

$$f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{1}{\sqrt{2}}-1=\sqrt{2}-1$$

(2) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{2}+1\Big)\cdot\frac{1}{2}+\int_{\frac{1}{2}}^1\Big(x+\frac{1}{2x}-1\Big)dx=\frac{3}{8}+\Big[\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log x-x\Big]_{\frac{1}{2}}^1$

$\displaystyle=\frac{3}{8}+\frac{1}{2}\Big(1-\frac{1}{4}\Big)-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}\log 2$

コメント

絶対値の付いた関数の定積分です。(1)の最小値については，相加平均と相乗平均の関係を利用する手もあります。

問　題

$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ とする。

(1)　$0<x<\pi$ において，$f(x)=0$ は唯一の解をもつことを示せ。

(2)　$J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx$ とする。(1)の唯一の解を α とするとき, J を $\sin\alpha$ の式で表せ。

(3)　(2)で定義された J と $\sqrt{2}$ の大小を比較せよ。　[2010]

解答例

(1)　$f(x)=1-\cos x-x\sin x$ に対して,

$$f'(x)=\sin x-\sin x-x\cos x=-x\cos x$$

$0<x<\pi$ において，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)=0$ は唯一の解をもつ。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$	0	↘		↗	2

(2)　$f(x)=0$ の解を $x=\alpha$ とすると，$1-\cos\alpha=\alpha\sin\alpha$ ………(＊)

$$J=\int_0^{\pi}|f(x)|dx=\int_0^{\alpha}-f(x)dx+\int_{\alpha}^{\pi}f(x)dx$$

ここで，$F(x)=\int f(x)dx$ とおくと,

$$F(x)=\int(1-\cos x-x\sin x)dx=x-\sin x+x\cos x-\int\cos x\,dx$$

$$=x-2\sin x+x\cos x+C$$

よって, (＊)を用いると,

$$J=-\Big[F(x)\Big]_0^{\alpha}+\Big[F(x)\Big]_{\alpha}^{\pi}=F(0)+F(\pi)-2F(\alpha)$$

$$=-2\alpha+4\sin\alpha-2\alpha\cos\alpha=-2\cdot\frac{1-\cos\alpha}{\sin\alpha}(1+\cos\alpha)+4\sin\alpha$$

$$=-2\cdot\frac{\sin^2\alpha}{\sin\alpha}+4\sin\alpha=2\sin\alpha$$

(3)　(1)より，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\pi$ であるが,

$$f\Big(\frac{3}{4}\pi\Big)=1+\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{3}{4}\pi\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(\sqrt{2}+1-\frac{3}{4}\pi\Big)>\frac{\sqrt{2}}{2}\Big(1.4+1-\frac{3}{4}\times3.2\Big)=0$$

これより，$\frac{\pi}{2}<\alpha<\frac{3}{4}\pi$ となり,

$$J=2\sin\alpha>2\sin\frac{3}{4}\pi=\sqrt{2}$$

コメント

微積分の標準的な問題です。誘導も細かく付けられています。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　自然数 n に対し $I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx$ を求めよ。

(2)　次の不等式を示せ。

$$0\leqq\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s\quad(0\leqq s\leqq 1)$$

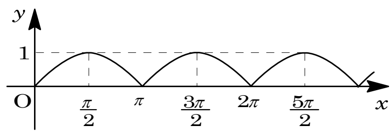
(3)　a を正の数とし, a を超えない最大の整数を $[\,a\,]$ で表す。$[\,a\,]$ が奇数のとき次の不等式が成り立つことを示せ。

$$0\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt-1\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[\,a\,]}{a}\right)$$

[2006]

解答例

(1)　$f(x)=|\sin x|$ とおくと,



$$f(x+\pi)=|\sin(x+\pi)|=|-\sin x|=f(x)$$

また, k を整数として,

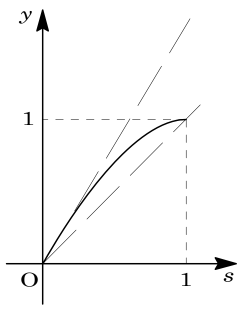
$$f(k\pi-x)=|\sin(k\pi-x)|=|\sin x|=f(x)$$

これより，$y=f(x)$ のグラフは周期 π であり，しかも直線 $x=\frac{k\pi}{2}$ に関して対称であるので,

$$I(n)=\int_0^{\frac{n\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin x|dx=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin x\,dx=-n\Big[\cos x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=n$$

(2)　$0\leqq s\leqq 1$ において，$g(s)=\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx=\Big[\sin x\Big]_0^{\frac{s\pi}{2}}=\sin\frac{s\pi}{2}$ とおく。

$$g'(s)=\frac{\pi}{2}\cos\frac{s\pi}{2}\geqq 0,\quad g''(s)=-\frac{\pi^2}{4}\sin\frac{s\pi}{2}\leqq 0$$



これより，$y=g(s)$ のグラフは，右図のように，上に凸で単調に増加し，$g'(0)=\frac{\pi}{2}$ から,

$$s\leqq g(s)\leqq\frac{\pi}{2}s,\quad 0\leqq g(s)-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s$$

よって，$0\leqq\int_0^{\frac{s\pi}{2}}\cos x\,dx-s\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)s\quad(0\leqq s\leqq 1)$

(3)　まず，$at=x$ とおくと,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{[\,a\,]\pi}{2}}|\sin x|dx+\frac{1}{a}\int_{\frac{[\,a\,]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx$$

ここで, (1)の結果を用いると,

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt=\frac{[a]}{a}+\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$x-\dfrac{[a]\pi}{2}=u$ とおくと，$[a]$が奇数より，

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\left|\sin\left(u+\frac{[a]\pi}{2}\right)\right|du=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}|\cos u|du$$

$0\leqq\dfrac{a-[a]}{2}\pi<\dfrac{\pi}{2}$ から，

$$\frac{1}{a}\int_{\frac{[a]\pi}{2}}^{\frac{a\pi}{2}}|\sin x|dx=\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\cos u\,du\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$0\leqq a-[a]<1$ なので, (2)より，

$$a-[a]\leqq\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\cos x\,dx\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)(a-[a])+(a-[a])$$

$$1-\frac{[a]}{a}\leqq\frac{1}{a}\int_0^{\frac{a-[a]}{2}\pi}\cos x\,dx\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)+\left(1-\frac{[a]}{a}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，

$$\frac{[a]}{a}+1-\frac{[a]}{a}\leqq\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt\leqq\frac{[a]}{a}+\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)+\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$$

以上より，$0\leqq\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}|\sin at|dt-1\leqq\left(\frac{\pi}{2}-1\right)\left(1-\frac{[a]}{a}\right)$

コメント

グラフを見ながら解いています。(1)と(2)は直接的ですが，(3)もグラフを対応させて方針を立てました。つまり，$y=f(x)$ のグラフの特徴から，$[a]$が奇数という条件の利用方法を考えたわけです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$，$g(x)$を連続な偶関数, mを正の整数とするとき,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx$$

を証明せよ。

(2)　正の整数 m, n が $m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ を満たしているとき,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

を証明せよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　まず, 積分区間 $0 \leqq x \leqq m\pi$ を m 等分して,

$$\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \sum_{k=1}^{m}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$t = x-(k-1)\pi$ とおくと,

$$\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big)g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big)dt$$

さて，$\sin(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\sin t$，$\cos(t+(k-1)\pi) = (-1)^{k-1}\cos t$ と表すことができ，さらに $f(x)$，$g(x)$ は偶関数より,

$$f\big(\sin(t+(k-1)\pi)\big) = f\big((-1)^{k-1}\sin t\big) = f(\sin t)$$

$$g\big(\cos(t+(k-1)\pi)\big) = g\big((-1)^{k-1}\cos t\big) = g(\cos t)$$

よって，$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = \int_0^{\pi} f(\sin t)g(\cos t)\,dt \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$\displaystyle\int_0^{m\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx = m\int_0^{\pi} f(\sin x)g(\cos x)\,dx$

(2)　$\displaystyle I_n = \int_0^1 \frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx$ として，$nx = t$ とおくと,

$$I_n = \int_0^n \frac{|\sin t|}{(1+\cos^2 t)^2}\cdot\frac{dt}{n} = \frac{1}{n}\int_0^n \frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx$$

ここで，$m\pi \leqq n < (m+1)\pi$ において，$\dfrac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2} \geqq 0$ なので,

$$I_n \geqq \frac{1}{n}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \geqq \frac{1}{(m+1)\pi}\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ③$$

$$I_n \leqq \frac{1}{n}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq \frac{1}{m\pi}\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ④$$

さて，$f(x)=|x|$，$g(x)=\dfrac{1}{(1+x^2)^2}$ とおくと，$f(x)$，$g(x)$ は連続な偶関数なので, (1)の結論から,

$$\int_0^{m\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = m\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑤$$

同様にして，$\displaystyle\int_0^{(m+1)\pi}\frac{|\sin x|}{(1+\cos^2 x)^2}dx = (m+1)\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \cdots\cdots\cdots ⑥$

③～⑥より，$\displaystyle\frac{m}{(m+1)\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx$

(3)　まず，$\cos x = u$ とおくと，

$$\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{(1+\cos^2 x)^2}dx = \int_1^{-1}\frac{1}{(1+u^2)^2}(-du) = 2\int_0^{1}\frac{1}{(1+u^2)^2}du$$

さらに，$u=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，

$$2\int_0^{1}\frac{1}{(1+u^2)^2}du = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{(1+\tan^2\theta)^2}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}\cdot d\theta = 2\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\, d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta = \left[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}} = \frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}$$

そこで, (2)の結論から,

$$\frac{m}{(m+1)\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) \leqq I_n \leqq \frac{m+1}{m\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)$$

$n\to\infty$のとき $m\to\infty$となるので, はさみうちの原理を用いると,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{1}\frac{|\sin nx|}{(1+\cos^2 nx)^2}dx = \lim_{m\to\infty} I_n = \frac{1}{\pi}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{4}+\frac{1}{2\pi}$$

コメント

(3)の極限値が到達点となりますが，このために与えられた誘導の意味を考えながら, (1)と(2)の証明を進めます。決して易しくはありませんが，演習する価値の大きな一題です。

問　題

実数 a に対し，積分 $f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx$ を考える。$f(a)$ の最小値を求めよ。 [2002]

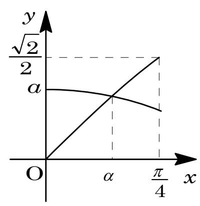
解答例

$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left|\sin x-a\cos x\right|dx$ に対して，

(i)　$a\leqq 0$ のとき　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\sin x-a\cos x\geqq 0$ なので，

$$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-a\cos x)\,dx=\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=-\frac{\sqrt{2}}{2}a+1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(ii)　$0<a<1$ のとき　$0<x<\frac{\pi}{4}$ における $\sin x-a\cos x=0$ の解を $x=\alpha$ とおくと，



$$\sin\alpha=a\cos\alpha\,,\ \ a=\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}=\tan\alpha\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$f(a)=\int_0^{\alpha}-(\sin x-a\cos x)\,dx+\int_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}(\sin x-a\cos x)\,dx$$

$$=-\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_0^{\alpha}+\Big[-\cos x-a\sin x\Big]_{\alpha}^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=2\cos\alpha+2a\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}a-1-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$f'(a)=-2\sin\alpha\frac{d\alpha}{da}+2\sin\alpha+2a\cos\alpha\frac{d\alpha}{da}-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$=-2\sin\alpha\frac{d\alpha}{da}+2\sin\alpha+2\sin\alpha\frac{d\alpha}{da}-\frac{\sqrt{2}}{2}=2\sin\alpha-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

ここで，$(*)$より $0<a<1$ のとき $0<\alpha<\frac{\pi}{4}$ なので，$\sin\alpha_0=\frac{\sqrt{2}}{4}$ とすると，$0<\alpha_0<\frac{\pi}{4}$ となる。

a	0	$\cdots$	a_0	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}+1$	$\searrow$		$\nearrow$	$\sqrt{2}-1$

$$\cos\alpha_0=\sqrt{1-\frac{2}{16}}=\frac{\sqrt{14}}{4}\,,\ \ a_0=\tan\alpha_0=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{14}}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

$$f(a_0)=2\cdot\frac{\sqrt{14}}{4}+2\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{7}}{7}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1=\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$$

(iii)　$a\geqq 1$ のとき　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，$\sin x-a\cos x\leqq 0$ なので，

$$f(a)=\int_0^{\frac{\pi}{4}}-(\sin x-a\cos x)\,dx=\frac{\sqrt{2}}{2}a-1+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i)(ii)(iii)より，$f(a)$ は連続関数なので，その最小値は $\frac{\sqrt{14}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}-1$ である。

コメント

$f'(a)$ を計算したところ, $(*)$のおかげで, 予想以上に簡単な式となりました。

問　題

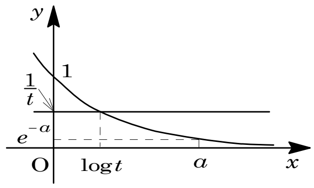
$a>0,\ t>0$ に対して定積分 $S(a,\ t)=\displaystyle\int_0^a\left|e^{-x}-\frac{1}{t}\right|dx$ を考える。

(1)　a を固定したとき, t の関数 $S(a,\ t)$ の最小値 $m(a)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}$ を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　(i)　$\dfrac{1}{t}\geqq 1\ (0<t\leqq 1)$ のとき



$$S(a,\ t)=\int_0^a -\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx=\left[e^{-x}+\frac{1}{t}x\right]_0^a$$
$$=e^{-a}-1+\frac{a}{t}$$

(ii)　$e^{-a}\leqq\dfrac{1}{t}<1\ (1<t\leqq e^a)$ のとき

$e^{-x}=\dfrac{1}{t}$ の解は，$x=\log t$ より，

$$S(a,\ t)=\int_0^{\log t}\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx+\int_{\log t}^a -\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx$$
$$=\left[-e^{-x}-\frac{1}{t}x\right]_0^{\log t}+\left[e^{-x}+\frac{1}{t}x\right]_{\log t}^a=-\frac{2}{t}\log t+\frac{a-2}{t}+e^{-a}+1$$

(iii)　$\dfrac{1}{t}<e^{-a}\ (t>e^a)$ のとき

$$S(a,\ t)=\int_0^a\left(e^{-x}-\frac{1}{t}\right)dx=-e^{-a}+1-\frac{a}{t}$$

すると，$0<t\leqq 1$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}=-\dfrac{a}{t^2}<0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に減少し，$t>e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}=\dfrac{a}{t^2}>0$ となり，$S(a,\ t)$ は単調に増加する。

また，$1<t\leqq e^a$ のとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}=\dfrac{2}{t^2}\log t-\dfrac{2}{t^2}-\dfrac{a-2}{t^2}=\dfrac{2\log t-a}{t^2}$ となる。このとき $\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}=0$ の解は，$t=e^{\frac{a}{2}}$ であり，$S(a,\ t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{a}{2}}$	$\cdots$	e^a
$\dfrac{dS(a,\ t)}{dt}$		－	0	＋	
$S(a,\ t)$		↘		↗	

さらに，$S(a,\ t)$ は $t=1,\ t=e^a$ において連続なので，$t=e^{\frac{a}{2}}$ で最小値をとり，

$$m(a)=S\left(a,\ e^{\frac{a}{2}}\right)=-2e^{-\frac{a}{2}}+e^{-a}+1$$

(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}=\lim_{a\to 0}\frac{-2e^{-\frac{a}{2}}+e^{-a}+1}{a^2}=\lim_{a\to 0}\left(\frac{e^{-\frac{a}{2}}-1}{a}\right)^2$

ここで，$-\dfrac{a}{2}=b$ とおくと，$a\to 0$ のとき $b\to 0$ となり，

$$\lim_{a\to 0}\frac{m(a)}{a^2}=\frac{1}{4}\lim_{b\to 0}\left(\frac{e^b-1}{b}\right)^2=\frac{1}{4}$$

コメント

積分計算についての理解を問う問題です。(2)の極限は, e の定義を適用します。

問　題

2 以上の自然数 n に対して

$$\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e = (2n-1)!$$

を示せ。ここで e は自然対数の底である。 [1999]

解答例

$I_n = \int_0^1 t^n e^t dt$ とおくと，$I_n = \left[t^n e^t\right]_0^1 - n\int_0^1 t^{n-1}e^t dt = e - nI_{n-1}$ ………①

また，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1} = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2n-1)!}{(2k+1)(2k-1)!} = (2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\frac{2k}{(2k+1)!}$

$$= (2n-1)!\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}\right) \cdots\cdots\cdots ②$$

証明すべき式 $\displaystyle\int_0^1 t^{2n-1}e^t dt + \left(\sum_{k=1}^{n-1}\frac{{}_{2n-1}\mathrm{P}_{2n-2k}}{2k+1}\right)e = (2n-1)!$ ……(＊)は，②より，

$$(*) \Leftrightarrow \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} + e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k)!} - \frac{1}{(2k+1)!}\right) = 1 \cdots\cdots\cdots ③$$

さらに，$\dfrac{I_{2n-1}}{(2n-1)!} = J_n$ とおくと，

$$③ \Leftrightarrow J_n = 1 + e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!}\right) \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，①から，

$$J_{n+1} = \frac{I_{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{e-(2n+1)I_{2n}}{(2n+1)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{I_{2n}}{(2n)!}$$

$$= \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e-2nI_{2n-1}}{(2n)!} = \frac{e}{(2n+1)!} - \frac{e}{(2n)!} + \frac{I_{2n-1}}{(2n-1)!}$$

$$= J_n + e\left(\frac{1}{(2n+1)!} - \frac{1}{(2n)!}\right)$$

$n \geqq 2$ で，$\displaystyle J_n = J_1 + e\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{1}{(2k+1)!} - \frac{1}{(2k)!}\right)$

ここで，$J_1 = I_1 = \int_0^1 te^t dt = \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = e - (e-1) = 1$

よって，$n \geqq 2$ で④は成立するので，(＊)は成立する。

コメント

最初は③式を数学的帰納法で証明しました。しかし②式を眺めていると，直接的な証明が可能ではないかと思えてきました。それで考え直して書いたのが上の解です。

問　題

次のように媒介変数表示された xy 平面上の曲線を C とする。

$$x = 3\cos t - \cos 3t,\quad y = 3\sin t - \sin 3t$$

ただし，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ である。

(1) $\dfrac{dx}{dt}$ および $\dfrac{dy}{dt}$ を計算し，C の概形を図示せよ。

(2) C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

解答例

(1) $C : x = 3\cos t - \cos 3t,\ y = 3\sin t - \sin 3t\ \left(0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ に対して，

$$\frac{dx}{dt} = -3\sin t + 3\sin 3t = 6\cos 2t\sin t$$

$$\frac{dy}{dt} = 3\cos t - 3\cos 3t = 6\sin 2t\sin t$$

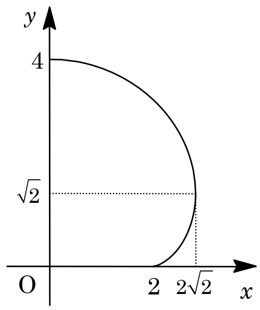
すると，$0 \leqq t \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき，x と y の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
x	2	$\nearrow$	$2\sqrt{2}$	$\searrow$	0
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$		$+$	0
y	0	$\nearrow$	$\sqrt{2}$	$\nearrow$	4

また，$\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{6\sin 2t\sin t}{6\cos 2t\sin t} = \tan 2t$ から，

$$\lim_{t\to+0}\frac{dy}{dx} = 0,\quad \lim_{t\to\frac{\pi}{2}-0}\frac{dy}{dx} = 0$$

以上より，曲線 C の概形は右図のようになる。



(2) 曲線 C の $0 \leqq y \leqq \sqrt{2}$ の部分を $y = y_1$，$\sqrt{2} \leqq y \leqq 4$ の部分を $y = y_2$ とおき，$x = f(t)$，$y = g(t)$ とする。

C と x 軸と y 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_0^{2\sqrt{2}} y_2\,dx - \int_2^{2\sqrt{2}} y_1\,dx$$

$$= \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}} g(t)f'(t)dt - \int_0^{\frac{\pi}{4}} g(t)f'(t)dt = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} g(t)f'(t)dt$$

$$= -\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin t - \sin 3t)(-3\sin t + 3\sin 3t)dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} (3\sin^2 t - 4\sin 3t\sin t + \sin^2 3t)dt$$

$$= 3\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left\{\frac{3(1-\cos 2t)}{2} + 2(\cos 4t - \cos 2t) + \frac{1-\cos 6t}{2}\right\}dt$$

$$= 3\left(\frac{3}{2}\cdot\frac{\pi}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\right) = 3\pi$$

コメント

パラメータ曲線についての頻出問題です。なお，(2)は y 軸方向に積分しても構いません。

問　題

$a>0$ とする。曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を A とする。

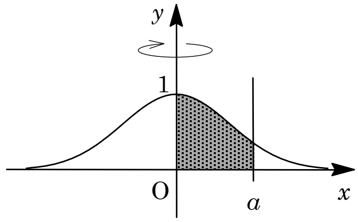
(1) A の体積 V を求めよ。

(2) 点 $(t,\ 0)\ (-a\leqq t\leqq a)$ を通り x 軸と垂直な平面による A の切り口の面積を $S(t)$ とするとき，不等式 $S(t)\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-(s^2+t^2)}\,ds$ を示せ。

(3) 不等式 $\sqrt{\pi(1-e^{-a^2})}\leqq\displaystyle\int_{-a}^{a}e^{-x^2}\,dx$ を示せ。　[2015]

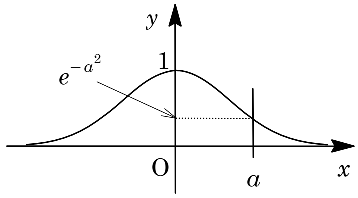
解答例

(1) 曲線 $y=e^{-x^2}$ と x 軸，y 軸，および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 A の体積 V は，



$$V=\int_0^a 2\pi x\cdot e^{-x^2}\,dx=2\pi\Big[-\frac{1}{2}e^{-x^2}\Big]_0^a$$
$$=-\pi(e^{-a^2}-1)=\pi(1-e^{-a^2})$$

(2) xy 平面に垂直に z 軸をとり，A について平面 $y=k$ で切断したときの切り口を考えると，



(i) $0\leqq k\leqq e^{-a^2}$ のとき

切り口は，$x^2+(y-k)^2+z^2=a^2$ かつ $y=k$ より，

$$x^2+z^2=a^2\quad(0\leqq y\leqq e^{-a^2})\cdots\cdots\cdots①$$

(ii) $e^{-a^2}\leqq k\leqq 1$ のとき

$y=e^{-x^2}$ を変形すると $x^2=-\log y$，$x\geqq 0$ において $x=\sqrt{-\log y}$ となる。

すると，切り口は，$x^2+(y-k)^2+z^2=-\log k$ かつ $y=k$ より，

$$x^2+z^2=-\log y\quad(e^{-a^2}\leqq y\leqq 1)\cdots\cdots\cdots②$$

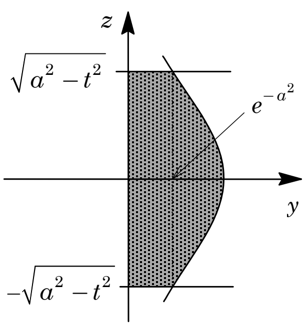
さて，A を平面 $x=t\ (-a\leqq t\leqq a)$ で切断すると，

①より，$0\leqq y\leqq e^{-a^2}$ において，$t^2+z^2=a^2$ から，

$$z=\pm\sqrt{a^2-t^2}$$

②より，$e^{-a^2}\leqq y\leqq 1$ において，$t^2+z^2=-\log y$ から，

$$y=e^{-(z^2+t^2)}$$



よって，切り口は右図の網点部となる。この面積を $S(t)$ とすると，$-a\leqq-\sqrt{a^2-t^2}\leqq\sqrt{a^2-t^2}\leqq a$ から，

$$S(t)=\int_{-\sqrt{a^2-t^2}}^{\sqrt{a^2-t^2}} e^{-(z^2+t^2)}\,dz \leqq \int_{-a}^{a} e^{-(z^2+t^2)}\,dz=\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds$$

(3)　(2)より，$V=\int_{-a}^{a} S(t)dt \leqq \int_{-a}^{a}\left(\int_{-a}^{a} e^{-(s^2+t^2)}\,ds\right)dt=\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\left(\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds\right)dt$

ここで，$I=\int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$ とおくと，$\int_{-a}^{a} e^{-t^2}\left(\int_{-a}^{a} e^{-s^2}\,ds\right)dt=I\int_{-a}^{a} e^{-t^2}dt=I^2$

よって，$V \leqq I^2$ すなわち $\sqrt{V} \leqq I$ となり，(1)から $\sqrt{\pi\left(1-e^{-a^2}\right)} \leqq \int_{-a}^{a} e^{-x^2}\,dx$

コメント

回転体 A をいったん立式した後，平面 $x=t$ によって切断し，その切り口を図示するというやや迂遠な解法で記しています。

問　題

点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ が $s=\sqrt{2}t^2-2t$ を満たしながら xy 平面上を動くときに，点 P を原点を中心として 45° 回転した点 Q の軌跡として得られる曲線を C とする。さらに，曲線 C と x 軸で囲まれた図形を D とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ の座標を，t を用いて表せ。

(2) 直線 $y=a$ と曲線 C がただ 1 つの共有点をもつような定数 a の値を求めよ。

(3) 図形 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2014]

解答例

(1) 点 $\mathrm{P}(t,\ s)$ を原点を中心として 45° 回転した点 $\mathrm{Q}(x,\ y)$ に対して，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ \sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} t \\ s \end{pmatrix}=\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} t-s \\ t+s \end{pmatrix}$$

ここで，$s=\sqrt{2}t^2-2t$ より，$x=\dfrac{1}{\sqrt{2}}(t-\sqrt{2}t^2+2t)=-t^2+\dfrac{3}{\sqrt{2}}t$ ………①

$$y=\frac{1}{\sqrt{2}}(t+\sqrt{2}t^2-2t)=t^2-\frac{1}{\sqrt{2}}t \text{ ………②}$$

(2) ②と $y=a$ を連立すると，$a=t^2-\dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ となり，$a=\left(t-\dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right)^2-\dfrac{1}{8}$

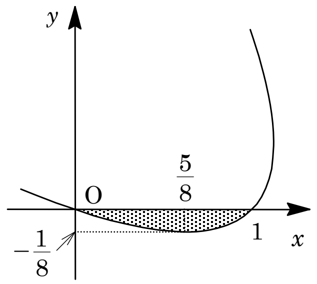
よって，直線 $y=a$ と点 Q の軌跡である曲線 C がただ 1 つの共有点をもつのは，実数 t の値がただ 1 つ存在するときより，$a=-\dfrac{1}{8}$ である。

(3) x 軸の下側のある曲線 C の $0\leqq x\leqq\dfrac{5}{8}$ の部分を $x=x_1$，$\dfrac{5}{8}\leqq x\leqq 1$ の部分を $x=x_2$ とする。①②から，$x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくと，

$$(f(0),\ g(0))=(0,\ 0)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{2\sqrt{2}}\right)\right)=\left(\frac{5}{8},\ -\frac{1}{8}\right)$$

$$\left(f\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ g\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right)=(1,\ 0)$$



そこで，右図の網点部 D を y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0} {x_2}^2 dy-\pi\int_{-\frac{1}{8}}^{0} {x_1}^2 dy$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{f(t)\}^2 g'(t)dt-\pi\int_{\frac{1}{2\sqrt{2}}}^{0}\{f(t)\}^2 g'(t)dt$$

$$=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\{f(t)\}^2 g'(t)dt=\pi\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(-t^2+\frac{3}{\sqrt{2}}t\right)^2\left(2t-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)dt$$

ここで，$\sqrt{2}t=u$ とおくと，$\sqrt{2}\,dt=du$ となり，

$$V=\pi\int_0^1\left(-\frac{1}{2}u^2+\frac{3}{2}u\right)^2\left(\sqrt{2}u-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\frac{1}{\sqrt{2}}du$$
$$=\frac{1}{8}\pi\int_0^1(-u^2+3u)^2(2u-1)du=\frac{1}{8}\pi\int_0^1(2u^5-13u^4+24u^3-9u^2)du$$
$$=\frac{1}{8}\pi\left(\frac{2}{6}-\frac{13}{5}+\frac{24}{4}-\frac{9}{3}\right)=\frac{11}{120}\pi$$

コメント

パラメータ積分によって体積を求める頻出問題です。

問　題

xy 平面上の曲線 $C: y = x^3 + x^2 + 1$ を考え，C 上の点 $(1,\ 3)$ を P_0 とする。$k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線と C の交点のうちで P_{k-1} と異なる点を $\mathrm{P}_k(x_k,\ y_k)$ とする。このとき，P_{k-1} と P_k を結ぶ線分と C によって囲まれた部分の面積を S_k とする。

(1)　S_1 を求めよ。

(2)　x_k を k を用いて表せ。

(3)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$C: y = x^3 + x^2 + 1$ ……①上の点 $\mathrm{P}_0(1,\ 3)$ における接線を $l_0: y = m_0x + n_0$ ……②とおき，①②を連立すると，

$$x^3 + x^2 + 1 - (m_0x + n_0) = 0 \text{………③}$$

ここで，③は重解 $x = 1$ をもち，もう 1 つの解を $x = x_1$ とおく。すると，③の左辺は因数 $(x-1)^2(x - x_1)$ をもち，さらに x^3 の係数を比較して恒等式を作ると，

$$x^3 + x^2 + 1 - (m_0x + n_0) = (x-1)^2(x - x_1) \text{………④}$$

④の x^2 の係数を比べると，$1 = -x_1 - 2$ から，$x_1 = -3$ となる。

さて，C と l_0 によって囲まれた部分において，C と l_0 の上下関係は変わらないので，その面積 S_1 は，④より，

$$S_1 = \left|\int_{-3}^{1}\{x^3 + x^2 + 1 - (m_0x + n_0)\}dx\right| = \left|\int_{-3}^{1}(x-1)^2(x+3)\,dx\right|$$

$$= \left|\frac{1}{12}\{1 - (-3)\}^4\right| = \frac{64}{3}$$

(2)　点 $\mathrm{P}_{k-1}(x_{k-1},\ y_{k-1})$ における C の接線を $l_{k-1}: y = m_{k-1}x + n_{k-1}$ とする。

(1)と同様にすると，方程式 $x^3 + x^2 + 1 - (m_{k-1}x + n_{k-1}) = 0$ は，重解 $x = x_{k-1}$ ともう 1 つの解 $x = x_k$ をもつことより，

$$x^3 + x^2 + 1 - (m_{k-1}x + n_{k-1}) = (x - x_{k-1})^2(x - x_k) \text{………⑤}$$

⑤の x^2 の係数を比べると，$1 = -x_k - 2x_{k-1}$ から，$x_k = -2x_{k-1} - 1$ ………⑥

⑥より，$x_k + \dfrac{1}{3} = -2\left(x_{k-1} + \dfrac{1}{3}\right)$ となり，$x_0 = 1$ から，

$$x_k + \frac{1}{3} = \left(x_0 + \frac{1}{3}\right)(-2)^k = \frac{1}{3}(-2)^{k+2},\quad x_k = \frac{1}{3}\{(-2)^{k+2} - 1\}$$

(3)　$$S_k = \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}\{x^3 + x^2 + 1 - (m_{k-1}x + n_{k-1})\}dx\right| = \left|\int_{x_{k-1}}^{x_k}(x - x_{k-1})^2(x - x_k)\,dx\right|$$

$$= \left|-\frac{1}{12}(x_k - x_{k-1})^4\right| = \frac{1}{12}\left[\frac{1}{3}\{(-2)^{k+2} - 1\} - \frac{1}{3}\{(-2)^{k+1} - 1\}\right]^4$$

$$=\frac{1}{12}\left\{\frac{1}{3}(-2-1)(-2)^{k+1}\right\}^4=\frac{1}{12}\left\{-(-2)^{k+1}\right\}^4=\frac{16^{k+1}}{12}$$

すると，$\dfrac{1}{S_k}=12\left(\dfrac{1}{16}\right)^{k+1}$ となり，$0<\dfrac{1}{16}<1$ より $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}$ は収束し，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{S_k}=\frac{12\left(\frac{1}{16}\right)^2}{1-\frac{1}{16}}=\frac{1}{20}$$

コメント

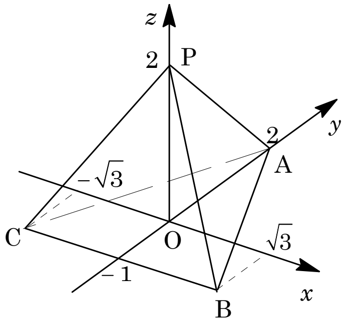
3 次曲線とその接線で囲まれる図形の面積を題材にした超有名問題です。そのため，やや雑な解答例となっています。

問　題

xyz 空間に 4 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{A}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{B}(\sqrt{3},\ -1,\ 0)$，$\mathrm{C}(-\sqrt{3},\ -1,\ 0)$をとる。四面体 PABC の $x^2+y^2\geqq 1$ を満たす部分の体積を求めよ。 [2012]

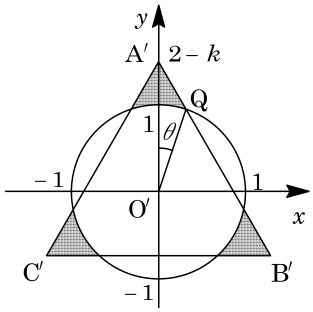
解答例

まず，四面体 PABC を平面 $z=k\ (0\leqq k\leqq 2)$ で切断したとき，切り口は△ABC と相似な正三角形となる。そして，辺 PA との交点は，PA を $2-k:k$ に内分することより，その座標は $(0,\ 2-k,\ k)$ である。



さて，不等式 $x^2+y^2\geqq 1$ で表される円柱側面の外部領域と，切り口の正三角形が共通部分をもつ条件は，$2-k\geqq 1$ すなわち $0\leqq k\leqq 1$ である。

そこで，$0\leqq k\leqq 1$ において，平面 $z=k$ での切り口を図示すると右図のようになる。



$\angle \mathrm{A'O'Q}=\theta$，網点部の面積を $S(k)$ とおき，対称性を考えると，

$$S(k)=6\left\{\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(2-k)\sin\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\theta\right\}$$
$$=3(2-k)\sin\theta-3\theta$$

さらに，△O′QA′ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{1}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{2-k}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)},\ \ 2-k=2\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$S(k)=6\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta-3\theta$

以上より，求める部分の体積を V とおくと，$V=\int_0^1 S(k)dk$ である。

すると，(*)から，$dk=2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$，$k=0\to 1$ のとき $\theta=\frac{\pi}{3}\to 0$ となり，

$$V=\int_{\frac{\pi}{3}}^0\left\{6\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\sin\theta-3\theta\right\}\cdot 2\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)d\theta$$
$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^0\left\{6\sin\left(\frac{5}{3}\pi-2\theta\right)\sin\theta-6\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{3\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)-3\cos\left(\frac{5}{3}\pi-3\theta\right)+6\theta\cos\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)\right\}d\theta$$

ここで，$I_1=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)d\theta=-\Big[\sin\left(\frac{5}{3}\pi-\theta\right)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=0$

$$I_2=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\cos\Big(\frac{5}{3}\pi-3\theta\Big)d\theta=-\frac{1}{3}\Big[\sin\Big(\frac{5}{3}\pi-3\theta\Big)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{1}{3}\Big(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$I_3=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\theta\cos\Big(\frac{5}{6}\pi-\theta\Big)d\theta=-\Big[\theta\sin\Big(\frac{5}{6}\pi-\theta\Big)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin\Big(\frac{5}{6}\pi-\theta\Big)d\theta$$

$$=-\frac{\pi}{3}+\Big[\cos\Big(\frac{5}{6}\pi-\theta\Big)\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

したがって，$V=3I_1-3I_2+6I_3=-3\Big(-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big)+6\Big(-\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=4\sqrt{3}-2\pi$

コメント

座標軸に垂直な平面での断面積をもとに計算を進める求積問題です。z 軸に垂直な平面で考えるか，y 軸に垂直な平面で考えるか，と迷います。計算量が少ないと予測した前者を選択しましたが，それでも相当な計算量が必要でした。なお，1998 年の東大で類題が出ていますが，そのときも z 軸に垂直な平面で四角錐を切断していました。

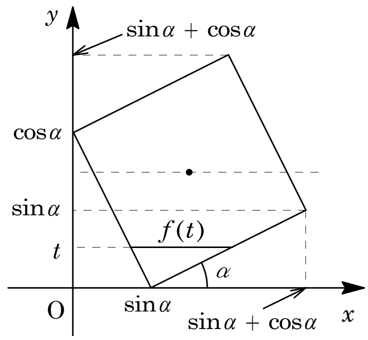
問　題

平面上に 1 辺の長さが 1 の正方形 D および D と交わる直線があるとする。この直線を軸に D を回転して得られる回転体について以下の問いに答えよ。

(1) D と同じ平面上の直線 l は D のどの辺にも平行でないものとする。軸とする直線は l と平行なものの中で考えるとき，回転体の体積を最大にする直線は D と唯 1 点で交わることを示せ。

(2) D と交わる直線を軸としてできるすべての回転体の体積の中で最大となる値を求めよ。 [2011]

解答例



(1) 1 辺の長さが 1 である正方形 D を，右図のように配置し，D を直線 $y=k$ のまわりに回転させて得られる回転体を考える。ここで，D の対角線の交点が $\left(\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2},\ \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}\right)$ であるので，対称性から $0\leqq k\leqq\dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$ とし，さらに $0<\alpha\leqq\dfrac{\pi}{4}$ としても一般性を失わない。

さて，直線 $y=t$ $(0\leqq t\leqq\sin\alpha+\cos\alpha)$ が，D によって切り取られる線分の長さを $f(t)$ とすると，

(a) $0\leqq t\leqq\sin\alpha$ のとき　$f(t):\dfrac{1}{\cos\alpha}=t:\sin\alpha$ より，$f(t)=\dfrac{t}{\sin\alpha\cos\alpha}$

(b) $\sin\alpha\leqq t\leqq\cos\alpha$ のとき　$f(t)$ は定数であり，$f(t)=\dfrac{1}{\cos\alpha}$

(c) $\cos\alpha\leqq t\leqq\sin\alpha+\cos\alpha$ のとき

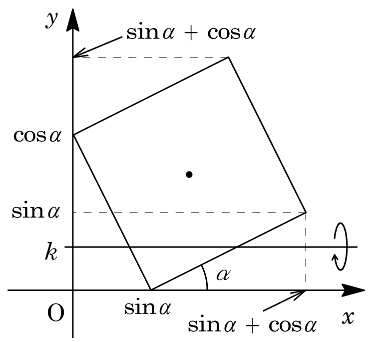
$$f(t):\frac{1}{\cos\alpha}=(\sin\alpha+\cos\alpha-t):\sin\alpha \text{ より，} f(t)=\frac{\sin\alpha+\cos\alpha-t}{\sin\alpha\cos\alpha}$$

以下，正方形 D の直線 $y=k$ まわりの回転体の体積を考える。

(i) $k=0$ のとき

このときの回転体の体積を V_0 とすると，

$$V_0=\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)dt$$



(ii) $0<k\leqq\sin\alpha$ のとき

このときの回転体の体積を V_1 とすると，

$$V_1=\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi(t-k)f(t)dt$$
$$<\int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha}2\pi tf(t)dt$$

$$<\int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha} 2\pi t f(t)\,dt$$

よって，$V_1 < V_0$ である。

(iii) $\sin\alpha \leqq k \leqq \dfrac{\sin\alpha+\cos\alpha}{2}$ のとき

このときの回転体の体積を V_2 とすると，

$$V_2 \leqq \int_0^k 2\pi(k-t)f(t)\,dt + \int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha} 2\pi(t-k)f(t)\,dt$$

$$<\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)\,dt + \int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha} 2\pi t f(t)\,dt \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$I = \int_0^k tf(t)\,dt - \int_0^k (k-t)f(t)\,dt$ とおくと，

$$I = \int_0^k (2t-k)f(t)\,dt = \int_0^{\sin\alpha} \frac{(2t-k)t}{\sin\alpha\cos\alpha}dt + \int_{\sin\alpha}^k \frac{2t-k}{\cos\alpha}dt$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\Big[\frac{2}{3}t^3 - \frac{1}{2}kt^2\Big]_0^{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}\Big[t^2 - kt\Big]_{\sin\alpha}^k$$

$$= \frac{1}{\cos\alpha}\Big(\frac{2}{3}\sin^2\alpha - \frac{1}{2}k\sin\alpha\Big) - \frac{1}{\cos\alpha}(\sin^2\alpha - k\sin\alpha)$$

$$= \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}\Big(-\frac{1}{3}\sin\alpha + \frac{1}{2}k\Big) = \frac{\sin\alpha}{2\cos\alpha}\Big(-\frac{2}{3}\sin\alpha + k\Big) > 0$$

よって，$I>0$ から，$\int_0^k (k-t)f(t)\,dt < \int_0^k tf(t)\,dt$ となり，

$$\int_0^k 2\pi(k-t)f(t)\,dt < \int_0^k 2\pi t f(t)\,dt \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$V_2 < \int_0^k 2\pi t f(t)\,dt + \int_k^{\sin\alpha+\cos\alpha} 2\pi t f(t)\,dt = \int_0^{\sin\alpha+\cos\alpha} 2\pi t f(t)\,dt$

よって，$V_2 < V_0$ である。

(i)～(iii)より，回転体の体積は，軸が D と唯 1 点で交わるときに最大となる。

(2) (1)より，$V_0 = 2\pi\int_0^{\sin\alpha} tf(t)\,dt + 2\pi\int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} tf(t)\,dt + 2\pi\int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha} tf(t)\,dt$

ここで，$I_1 = \int_0^{\sin\alpha} tf(t)\,dt = \int_0^{\sin\alpha} \dfrac{t^2}{\sin\alpha\cos\alpha}dt = \dfrac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}$

$$I_2 = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} tf(t)\,dt = \int_{\sin\alpha}^{\cos\alpha} \frac{t}{\cos\alpha}dt = \frac{1}{2}\cos\alpha - \frac{\sin^2\alpha}{2\cos\alpha}$$

さらに，$s = t - \cos\alpha$ とおくと，

$$I_3 = \int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha} tf(t)\,dt = \int_{\cos\alpha}^{\sin\alpha+\cos\alpha} \frac{t(\sin\alpha+\cos\alpha-t)}{\sin\alpha\cos\alpha}dt$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\sin\alpha} (s+\cos\alpha)(\sin\alpha - s)\,ds$$

$$= \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha}\int_0^{\sin\alpha} \{-s^2 + (\sin\alpha-\cos\alpha)s + \sin\alpha\cos\alpha\}\,ds$$

$$=-\frac{\sin^2\alpha}{3\cos\alpha}+\frac{(\sin\alpha-\cos\alpha)\sin\alpha}{2\cos\alpha}+\sin\alpha=\frac{\sin^2\alpha}{6\cos\alpha}+\frac{1}{2}\sin\alpha$$

よって，$V_0=2\pi(I_1+I_2+I_3)=\pi(\sin\alpha+\cos\alpha)=\sqrt{2}\pi\sin\left(\alpha+\frac{\pi}{4}\right)$

すると，$0<\alpha\leqq\frac{\pi}{4}$ より，V_0 は $\alpha=\frac{\pi}{4}$ のとき最大値 $\sqrt{2}\pi$ をとる。

また，$\alpha=0$ のとき，回転体の体積の最大値は，$\pi\cdot1^2\cdot1=\pi$ となる。

以上より，求める回転体の体積の最大値は，$\sqrt{2}\pi$ である。

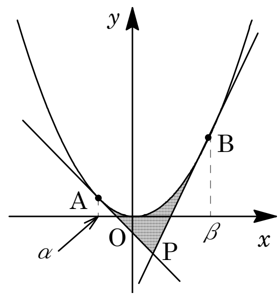
コメント

一瞥した瞬間，難問というのがわかります。いわゆる円筒分割を利用した解答例ですが，評価の甘い箇所と辛い箇所が混在しています。

問　題

点 P から放物線 $y=\frac{1}{2}x^2$ へ 2 本の接線が引けるとき，2 つの接点を A，B とし，線分 PA，PB およびこの放物線で囲まれる図形の面積を S とする。PA，PB が直交するときの S の最小値を求めよ。　[2009]

解答例



$y=\frac{1}{2}x^2$ より $y'=x$ となるので，接点を $\mathrm{A}\left(\alpha,\ \frac{1}{2}\alpha^2\right)$，$\mathrm{B}\left(\beta,\ \frac{1}{2}\beta^2\right)$ $(\alpha<\beta)$ とおくと, A における接線は,

$$y-\frac{1}{2}\alpha^2=\alpha(x-\alpha),\quad y=\alpha x-\frac{1}{2}\alpha^2\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして, B における接線は,

$$y=\beta x-\frac{1}{2}\beta^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\alpha-\beta)x-\frac{1}{2}(\alpha^2-\beta^2)=0$

$\alpha<\beta$ より，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$

さて, 2 本の接線と放物線で囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2-\alpha x+\frac{1}{2}\alpha^2\right)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}\left(\frac{1}{2}x^2-\beta x+\frac{1}{2}\beta^2\right)dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\frac{1}{2}\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{6}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{6}\Big[(x-\beta)^3\Big]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{6}\left(\frac{-\alpha+\beta}{2}\right)^3-\frac{1}{6}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{24}(\beta-\alpha)^3$$

ここで, 2 本の接線が直交することより，$\alpha\beta=-1$ となり，$\alpha=-\dfrac{1}{\beta}$ から,

$$S=\frac{1}{24}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3$$

$\alpha<0<\beta$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いて,

$$S=\frac{1}{24}\left(\beta+\frac{1}{\beta}\right)^3\geqq\frac{1}{24}\cdot2^3=\frac{1}{3}$$

等号は $\beta=\dfrac{1}{\beta}$ すなわち $\beta=1$ のとき成立することより, S の最小値は $\dfrac{1}{3}$ である。

コメント

センターレベルの微積分の頻出基本問題です。

問　題

xyz 空間の原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線を l とする。

(1) l 上の点$\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$を通り l と垂直な平面が，xy 平面と交わってできる直線の方程式を求めよ。

(2) 不等式$0 \leqq y \leqq x(1-x)$の表す xy 平面内の領域を D とする。l を軸として D を回転させて得られる回転体の体積を求めよ。 [2009]

解答例

(1) 原点と点$(1,\ 1,\ 1)$を通る直線 l の方程式は，

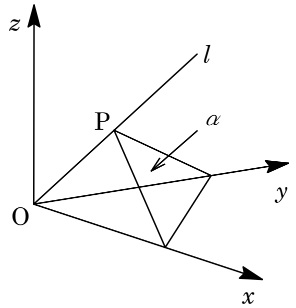
$x=y=z$ ………①

これより，点$\mathrm{P}\left(\frac{t}{3},\ \frac{t}{3},\ \frac{t}{3}\right)$を通り l と垂直な平面αは，

$\left(x-\frac{t}{3}\right)+\left(y-\frac{t}{3}\right)+\left(z-\frac{t}{3}\right)=0$，$x+y+z=t$

この平面と xy 平面との交線は，$z=0$を代入して，

$x+y=t$，$z=0$



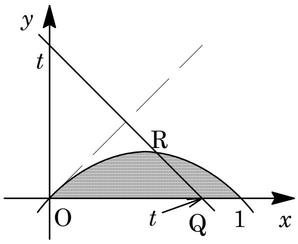
(2) xy 平面上で，$x+y=t$ ……②と$y=x(1-x)$ ……③を連立すると，

$t-x=x-x^2$，$x^2-2x+t=0$ ………④

②と③が共有点をもつ条件は，

$D/4=1-t \geqq 0$，$t \leqq 1$

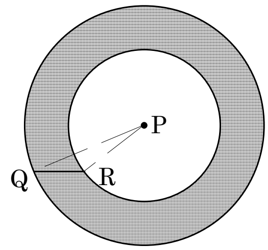
よって，直線②と領域$D:0 \leqq y \leqq x(1-x)$が共有点をもつ条件は，$0 \leqq t \leqq 1$である。



このとき，右図のように共有点を Q, R とおくと，④から，$\mathrm{Q}(t,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{R}(1-\sqrt{1-t},\ t-1+\sqrt{1-t},\ 0)$となる。

また，直線 l を xy 平面へ正射影すると，直線$x=y$，$z=0$となり，この直線は放物線③の原点における接線と一致する。

これより，平面α上で点 P を中心として線分 QR を回転してできるドーナツ状の図形の外径は PQ, 内径は PR となり，その面積$S(t)$は，



$$\mathrm{PQ}^2=\left(-\frac{2}{3}t\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2=\frac{2}{3}t^2$$

$$\mathrm{PR}^2=\left(\frac{t}{3}-1+\sqrt{1-t}\right)^2+\left(-\frac{2}{3}t+1-\sqrt{1-t}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2$$

$$=\frac{2}{3}t^2-4(t-1)-2(2-t)\sqrt{1-t}$$

$$S(t)=\pi(\mathrm{PQ}^2-\mathrm{PR}^2)=\pi\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}$$

さて，直線 l の $x\geqq 0,\ y\geqq 0,\ z\geqq 0$ の部分を正とする l 軸を設定し，$l=\mathrm{OP}$ とおくと，$t\geqq 0$ において，

$$l=\sqrt{\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2+\left(\frac{t}{3}\right)^2}=\frac{1}{\sqrt{3}}t$$

よって，$\dfrac{dl}{dt}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，求める回転体の体積 V は，

$$V=\int_0^1 S(t)\frac{dl}{dt}dt=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1\{4(t-1)+2(2-t)\sqrt{1-t}\}dt$$

ここで，$1-t=u$ とおくと，

$$V=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_1^0\{-4u+2(u+1)\sqrt{u}\}(-du)=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\int_0^1(-4u+2u\sqrt{u}+2\sqrt{u})du$$

$$=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left[-2u^2+\frac{4}{5}u^{\frac{5}{2}}+\frac{4}{3}u^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{\pi}{\sqrt{3}}\left(-2+\frac{4}{5}+\frac{4}{3}\right)=\frac{2\sqrt{3}}{45}\pi$$

コメント

20 年以上も前には，よく見かけた問題です。ドーナツ状の断面の外径がいつも PQ，内径がいつも PR で，場合分けが必要ないのにはホッとします。なお，空間における直線や平面の方程式については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

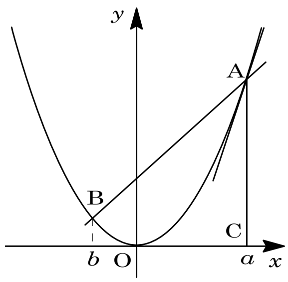
問　題

正数 a に対して，放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を，A を中心に $-30°$ 回転した直線を l とする。l と $y=x^2$ との交点で A でない方を B とする。さらに点 $(a,\ 0)$ を C，原点を O とする。

(1) l の式を求めよ。

(2) 線分 OC，CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $S(a)$，線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を $T(a)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}$ を求めよ。　[2007]

解答例



(1) $y=x^2$ より，$y'=2x$ なので，$\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線の傾きは $2a$ である。

さて，この接線および接線を A を中心として $-30°$ だけ回転した直線 l と，x 軸の正の部分とのなす角を，それぞれ α，β とすると，$\tan\alpha=2a$ から，l の傾きは，

$$\tan\beta=\tan(\alpha-30°)=\frac{\tan\alpha-\tan 30°}{1+\tan\alpha\cdot\tan 30°}$$

$$=\frac{2a-\frac{1}{\sqrt{3}}}{1+2a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}}=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$$

よって，l の方程式は，

$$y-a^2=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a),\quad y=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}x+\frac{2a^3-\sqrt{3}a^2+a}{2a+\sqrt{3}}$$

(2) 放物線 $y=x^2$ と l との交点は，

$$x^2-a^2=\frac{2\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}(x-a),\quad (x-a)\Big(x-\frac{-2a^2+\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}\Big)=0$$

よって，$x=a$，$\dfrac{-2a^2+\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}$ となり，そこで $\dfrac{-2a^2+\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}=b$ とおく。

さて，線分 OC，CA と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^a x^2dx=\frac{a^3}{3}$$

また，線分 AB と $y=x^2$ で囲まれる部分の面積 $T(a)$ は，

$$T(a)=\int_b^a -(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(a-b)^3=\frac{1}{6}\Big(a-\frac{-2a^2+\sqrt{3}a-1}{2a+\sqrt{3}}\Big)^3$$

$$=\frac{1}{6}\Big(\frac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\Big)^3$$

以上より，$\dfrac{T(a)}{S(a)}=\dfrac{3}{a^3}\cdot\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{4a^2+1}{2a+\sqrt{3}}\right)^3=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4a+a^{-1}}{2a+\sqrt{3}}\right)^3$となり，

$$\lim_{a\to\infty}\frac{T(a)}{S(a)}=\frac{1}{2}\cdot 2^3=4$$

コメント

微積分の標準的な問題です。計算の質や量も適当です。

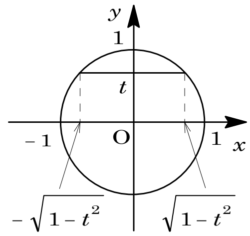
問　題

D を半径 1 の円盤，C を xy 平面の原点を中心とする半径 1 の円周とする。D が次の条件(a)，(b)を共に満たしながら xyz 空間内を動くとき，D が通過する部分の体積を求めよ。

(a)　D の中心は C 上にある。

(b)　D が乗っている平面は常にベクトル $(0,\ 1,\ 0)$ と直交する。　[2005]

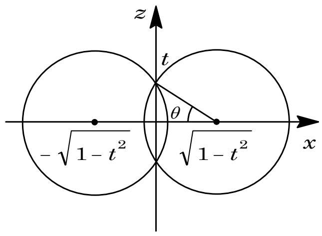
解答例



円 C の対称性から，条件を満たす円盤 D が通過する領域は，xz 平面に関して対称である。

そこで，$y\geqq 0$ の部分に対し，この部分を平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で切った切り口を考える。

この切り口は，中心 $(\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円と，中心 $(-\sqrt{1-t^2},\ t,\ 0)$，半径 1 の円の和集合となっている。



右図のように角 θ をとると，

$$\cos\theta=\sqrt{1-t^2}\ ,\ \sin\theta=t\cdots\cdots\cdots(*)$$

そこで，切り口の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=4\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2(\pi-\theta)+\frac{1}{2}t\sqrt{1-t^2}\ \right\}$$
$$=2\pi-2\theta+2t\sqrt{1-t^2}$$

求める D の通過領域の体積 V は，

$$V=2\int_0^1 S(t)\,dt=4\int_0^1(\pi-\theta+t\sqrt{1-t^2}\,)\,dt=4\pi-4\int_0^1\theta\,dt+4\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt$$

$(*)$より，$dt=\cos\theta\,d\theta$ となり，

$$\int_0^1\theta\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\cos\theta\,d\theta=\Big[\,\theta\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=\frac{\pi}{2}-1$$

また，$\sqrt{1-t^2}=u$ とおくと，$1-t^2=u^2$，$-2tdt=2udu$ から，

$$\int_0^1 t\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_1^0 u(-u)\,du=\int_0^1 u^2du=\frac{1}{3}$$

以上より，$V=4\pi-4\left(\dfrac{\pi}{2}-1\right)+4\cdot\dfrac{1}{3}=2\pi+\dfrac{16}{3}$

コメント

初めは，z 軸に垂直な切り口を考えましたが，複雑そうなので，考えを改め，y 軸に垂直な切り口に変更しました。断面積を求めるときに，中心角を設定する必要がありますが，今年は，東大でもこの技法を用いる問題が出ています。

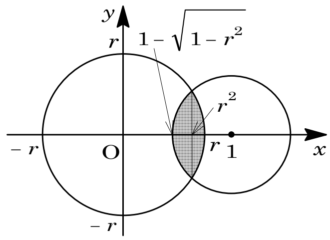
問　題

$0<r<1$ とする。空間において，点 $(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 r の球と点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-r^2}$ の球との共通部分の体積を $V(r)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $V(r)$ を求めよ。

(2) r が $0<r<1$ の範囲を動くとき，$V(r)$ を最大にする r の値および $V(r)$ の最大値を求めよ。 [2004]

解答例



(1) 2 つの円 $x^2+y^2=r^2$ と $(x-1)^2+y^2=1-r^2$ の共通部分を x 軸のまわりに回転したときにできる立体の体積が $V(r)$ である。

まず, 2 つの円の共有点の x 座標は,

$$(x-1)^2+(r^2-x^2)=1-r^2$$

これより，$x=r^2$ となり，

$$V(r)=\pi\int_{r^2}^{r}(r^2-x^2)dx+\pi\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\{1-r^2-(x-1)^2\}dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{r^2}^{r}(r^2-x^2)dx=\Big[r^2x-\frac{1}{3}x^3\Big]_{r^2}^{r}=r^2(r-r^2)-\frac{1}{3}(r^3-r^6)$

$$=\frac{1}{3}r^6-r^4+\frac{2}{3}r^3$$

$$\int_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}\{1-r^2-(x-1)^2\}dx=\Big[(1-r^2)x-\frac{1}{3}(x-1)^3\Big]_{1-\sqrt{1-r^2}}^{r^2}$$

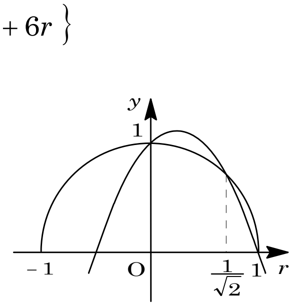
$$=(1-r^2)\left(r^2-1+\sqrt{1-r^2}\right)-\frac{1}{3}\left\{(r^2-1)^3+(1-r^2)\sqrt{1-r^2}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}+\frac{1}{3}(1-r^2)^3-(1-r^2)^2=\frac{2}{3}(1-r^2)\sqrt{1-r^2}-\frac{1}{3}r^6+r^2-\frac{2}{3}$$

以上より，$V(r)=\dfrac{\pi}{3}\left\{2(1-r^2)\sqrt{1-r^2}-3r^4+2r^3+3r^2-2\right\}$

(2) (1)より，$V'(r)=\dfrac{\pi}{3}\left\{2\cdot\dfrac{3}{2}(1-r^2)^{\frac{1}{2}}\cdot(-2r)-12r^3+6r^2+6r\right\}$

$$=2\pi r\left(-\sqrt{1-r^2}-2r^2++r+1\right)$$



ここで，$y=\sqrt{1-r^2}$ と $y=-2r^2+r+1$ のグラフをかくと，右図のようになり，交点の r 座標は,

$$\sqrt{1-r^2}=-2r^2+r+1,\ \ 1-r^2=(-2r^2+r+1)^2$$

$$4r^4-4r^3-2r^2+2r=0,\ \ r(r-1)(2r^2-1)=0$$

図から，$r=0,\ 1,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

すると，$0<r<1$ のとき，$V(r)$ の増減は右表のようになり，$r=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大となる。

r	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$V'(r)$	0	$+$	0	$-$	0
$V(r)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$V\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=\frac{\pi}{3}\left\{2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{3}{4}+\frac{2}{2\sqrt{2}}+\frac{3}{2}-2\right\}=\frac{\pi}{3}\left(\sqrt{2}-\frac{5}{4}\right)$$

コメント

計算量は多いですが，方針に迷いは生じません。今年は，東大で 2 球の和集合，東工大では 2 球の共通部分の体積が題材となりました。

問　題

(1)　3 次関数 $y=-x^3+ax^2+bx\ (a>0)$ のグラフを C とする。原点を通る直線で，C とちょうど 2 点を共有するものを 2 本求めよ。

(2)　(1)で求めた直線のうち，傾きの大きい方を l_1，小さい方を l_2 とする。C と l_1 が囲む部分の面積を S_1，C と l_2 が囲む部分の面積を S_2 とおく。この 2 つの面積比 $S_1:S_2$ を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$C: y=-x^3+ax^2+bx$ ……①，原点を通る直線 $y=kx$ ……②とおく。

①②より，$x^3-ax^2+(k-b)x=0$，$x=0$ または $x^2-ax+(k-b)=0$ ………③

①と②が 2 点を共有する条件は，次の 2 つの場合がある。

(i)　③が 0 以外の重解をもつとき

$D=a^2-4(k-b)=0$ より，$k=b+\dfrac{a^2}{4}$

このとき③の解は $x=\dfrac{a}{2}>0$ となり，条件に適する。

(ii)　③が異なる 2 つの実数解をもち，その 1 つが 0 のとき

③に $x=0$ を代入して，$k-b=0$，$k=b$

このとき③の解は $x=0$，$x=a>0$ となり，条件に適する。

(i)(ii)より，$y=\left(b+\dfrac{a^2}{4}\right)x$，$y=bx$

(2)　$l_1: y=\left(b+\dfrac{a^2}{4}\right)x$ ……④，$l_2: y=bx$ ……⑤より，①と④の共有点は，

$$-x^3+ax^2+bx=\left(b+\frac{a^2}{4}\right)x,\ x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x=0,\ x\left(x-\frac{a}{2}\right)^2=0$$

これより，共有点の x 座標は $x=0,\ \dfrac{a}{2}$ となり，$a>0$ から，

$$S_1=\int_0^{\frac{a}{2}}\left(x^3-ax^2+\frac{a^2}{4}x\right)dx=\left[\frac{x^4}{4}-a\cdot\frac{x^3}{3}+\frac{a^2}{4}\cdot\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{a}{2}}=\frac{1}{192}a^4$$

また，①と⑤の共有点は，$-x^3+ax^2+bx=bx$，$x^2(x-a)=0$，$x=0,\ a$

$$S_2=\int_0^a-(x^3-ax^2)\,dx=-\left[\frac{x^4}{4}-a\cdot\frac{x^3}{3}\right]_0^a=\frac{1}{12}a^4$$

したがって，$S_1:S_2=\dfrac{1}{192}a^4:\dfrac{1}{12}a^4=1:16$

コメント

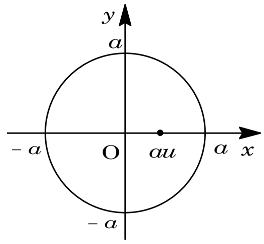
同じ題材で，センター試験に出題されても不思議はないような問題です。ただし，10 年ほど前の話としてですが。

問　題

xyz 空間内の動点 P を考える。P は $z \leqq 0$ の部分では最大秒速 a メートルで，$z>0$ の部分では最大秒速 1 メートルで動けるものとする。P がはじめに原点$(0,\ 0,\ 0)$にあるとき，その 1 秒後までに P が到達し得る範囲の体積を求めよ。ただし，$a>1$ とする。　[2001]

解答例

まず，$0 \leqq u \leqq 1$ として，点 P は $0 \leqq t \leqq u$ のとき x 軸上を動き，$u \leqq t \leqq 1$ のとき $z>0$ の部分を直線的に動くものとする。すなわち点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は 1 秒後に点$(au,\ 0,\ 0)$を中心として，半径 $1-u$ の球面上に存在することになるので，



$$(x-au)^2+y^2+z^2=(1-u)^2$$

xz 平面での断面を考えると，$y=0$ を代入して，

$$(x-au)^2+z^2=(1-u)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，円①の通過する xz 平面上の領域は，①を u に関する方程式とみたとき，$0 \leqq u \leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件としてとらえられる。

①より，$(a^2-1)u^2-2(ax-1)u+(x^2+z^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，$f(u)=(a^2-1)u^2-2(ax-1)u+(x^2+z^2-1)$ とおくと，

まず $a>1$ より，$a^2-1>0$ となり，

$$f(1)=(a^2-1)-2(ax-1)+(x^2+z^2-1)=(x-a)^2+z^2>0$$

(i)　$\dfrac{ax-1}{a^2-1}<0\ \left(0<x<\dfrac{1}{a}\right)$のとき

$f(1)>0$ なので $f(0)=x^2+z^2-1 \leqq 0$ より，$x^2+z^2 \leqq 1$

(ii)　$0 \leqq \dfrac{ax-1}{a^2-1} \leqq 1\ \left(\dfrac{1}{a} \leqq x \leqq a\right)$のとき

$f(1)>0$ なので，②の判別式 $D=(ax-1)^2-(a^2-1)(x^2+z^2-1) \geqq 0$ より，

$$x^2-2ax-(a^2-1)z^2+a^2 \geqq 0,\ (x-a)^2-(a^2-1)z^2 \geqq 0$$

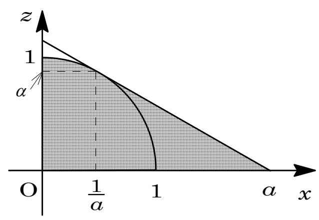
$$\left(x-a-\sqrt{a^2-1}\,z\right)\left(x-a+\sqrt{a^2-1}\,z\right) \geqq 0$$

$x-a-\sqrt{a^2-1}\,z<0$ より，$x-a+\sqrt{a^2-1}\,z \leqq 0$，$z \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{a^2-1}}(x-a)$

(iii)　$\dfrac{ax-1}{a^2-1}>1\ (x>a)$のとき

$f(1)>0$ なので，②は $0 \leqq u \leqq 1$ に実数解をもたない。

以上より，$z>0$ の部分で，円①の通過する領域は右図の網点部である。



ただし，$\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ とする。

そこで，この領域を z 軸まわりに回転した立体が，点 P が $z>0$ の部分で到達し得る範囲となり，この体積を V_1 とすると，

$$V_1=\int_0^{\alpha}\pi\left(a-\sqrt{a^2-1}\,z\right)^2dz+\int_{\alpha}^{1}\pi(1-z^2)\,dz$$
$$=\pi\left[a^2z-a\sqrt{a^2-1}\,z^2+\frac{a^2-1}{3}z^3\right]_0^{\alpha}+\pi\left[z-\frac{1}{3}z^3\right]_{\alpha}^{1}$$
$$V_1=\pi\left\{\frac{2}{3}+(a^2-1)\alpha-a\sqrt{a^2-1}\,\alpha^2+\frac{1}{3}a^2\alpha^3\right\}$$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{a^2-1}}{a}$ を代入すると，$V_1=\pi\left\{\dfrac{2}{3}+\dfrac{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}{3a}\right\}$

また，$z\leqq 0$ の部分については，点 P は原点中心で半径 a の半球の内部または表面上に到達し得るので，その体積を V_2 とすると，

$$V_2=\frac{4}{3}\pi a^3\cdot\frac{1}{2}=\frac{2}{3}\pi a^3$$

よって，求める P が到達し得る範囲の体積は，

$$V_1+V_2=\pi\left\{\frac{2}{3}+\frac{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}{3a}\right\}+\frac{2}{3}\pi a^3=\frac{\pi}{3}\left\{2+2a^3+\frac{(a^2-1)\sqrt{a^2-1}}{a}\right\}$$

コメント

一瞬，半球を 2 つ合わせたものというイメージが湧きましたが，xy 平面上で図形が不連続になるわけもなく，考え直して数式処理をした解答です。おもしろい内容ですが，時間内にできるかどうかは別の問題です。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆