$\boxed{4}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

$a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

$\boxed{5}$ ［信州大］

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

4　　　　［北海道大］

(1) $f(x)=\int_{-a}^{a}\left\{\dfrac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt=\dfrac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$

$$=\frac{e^{-x}}{2a}(a+a)+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt=e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$C=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+C$ ……①となり，

$$C=\int_{-a}^{a}(e^{-t}+C)\sin t\,dt=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+C\int_{-a}^{a}\sin t\,dt$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\Big[\cos t\Big]_{-a}^{a}=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\{\cos a-\cos(-a)\}$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$(e^{-t}\sin t)'=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$，$(e^{-t}\cos t)'=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$ より，

$$(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'=-2e^{-t}\sin t,\ \ e^{-t}\sin t=-\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'$$

すると，②から，$C=-\dfrac{1}{2}\Big[e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\Big]_{-a}^{a}$ となり，

$$C=-\frac{1}{2}\{e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\}-\frac{1}{2}\{e^{-a}\cos a-e^{a}\cos(-a)\}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-a}\sin a+e^{a}\sin a)-\frac{1}{2}(e^{-a}\cos a-e^{a}\cos a)$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$$

よって，①から，$f(x)=e^{-x}-\dfrac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\dfrac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$

(2) $g(a)=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ なので，(1)から，$g(a)=C=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt$

$$g'(a)=e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\cdot(-1)$$

$$=(e^{-a}-e^{a})\sin a$$

a	0	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$g'(a)$	0	$-$	0	$+$	0
$g(a)$		↘		↗	

$0<a\leqq 2\pi$ のとき，$g(a)$ の増減は右表のようになる。そして，$g(a)$ は $a=\pi$ のとき最小となり，最小値は，

$$g(\pi)=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})\sin\pi+\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cos\pi=-\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

［解　説］

積分方程式の中で，(1)がいわゆる置換型，(2)がいわゆる微分型という設問内容になっています。ただ，計算は有名な部分積分ですが，面倒ですので工夫をしています。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大］

(1)　$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$ とおくと，$I_{n+1}=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx$ となり，

$$I_{n+1}=\Big[\,x(1-x^2)^{n+1}\,\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n(-2x)dx$$

$$=-2(n+1)\int_0^1 -x^2(1-x^2)^n dx$$

$$=(-2n-2)\int_0^1\{(1-x^2)-1\}(1-x^2)^n dx=(-2n-2)(I_{n+1}-I_n)$$

よって，$(2n+3)I_{n+1}=(2n+2)I_n$ より，$I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$I_n=I_1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

ここで，$I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ から，

$$I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=2^n n!\cdot\frac{2^n n!}{(2n+1)!}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$n=1$ をあてはめると，$I_1=\dfrac{4\cdot(1!)^2}{3!}=\dfrac{2}{3}$ となり成立するので，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　二項定理より，$(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-x^2)^k=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}$ となり，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}\Big)dx=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\int_0^1 x^{2k}dx$$

$$=\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

よって，$(*)$から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

［解　説］

定積分がらみで誘導なしの証明問題ですが，(1)の右辺の形には，部分積分から漸化式という流れが暗示されています。上の解答例以外に，まず $x=\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換する方法もあり，そうすると参考書などには必ず載っている有名な定積分が対応します。また，(2)では左辺の階乗の部分が ${}_n\mathrm{C}_k$ であることがわかりますので，二項展開という方針は明快です。なお，漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。