17　　［一橋大］

連立方程式 $x^2=yz+7$, $y^2=zx+7$, $z^2=xy+7$ を満たす整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で $x \leqq y \leqq z$ となるものを求めよ。

$\boxed{18}$ ［北海道大・理］

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。

$\boxed{19}$　　　　［九州大・文］

以下の問いに答えよ。

(1)　2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2)　225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3)　225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。

20　　［筑波大・理］

数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を満たすとする。また，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$b_n \geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$を示せ。

(2)　b_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　a_{2017}の一の位の数を求めよ。

$\boxed{21}$　　［東京大］

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。

$\boxed{22}$ ［九州大・理］

初項$a_1=1$，公差 4 の等差数列$\{a_n\}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7 の倍数である項の個数を求めよ。

(2) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち，7^2の倍数である項の個数を求めよ。

(3) 初項から第 n 項までの積$a_1a_2\cdots a_n$が7^{45}の倍数となる最小の自然数 n を求めよ。

$\boxed{23}$ ［名古屋大・文］

次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(＊)を満たす 3 つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。

(＊)　$a<b<c$ かつ $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$ である。

(2) 偶数 $2n$ $(n\geqq 1)$ の 3 つの正の約数 $p,\ q,\ r$ で，$p>q>r$ と $p+q+r=n$ を満たす組$(p,\ q,\ r)$の個数を $f(n)$ とする。ただし，条件を満たす組が存在しない場合は，$f(n)=0$ とする。n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また，$f(n)=M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。

17　　［一橋大］

連立方程式 $x^2=yz+7$ ……①，$y^2=zx+7$ ……②，$z^2=xy+7$ ……③に対して，

①－②より，$x^2-y^2=z(y-x)$，$(x-y)(x+y+z)=0$ ………④

②－③より，$y^2-z^2=x(z-y)$，$(y-z)(x+y+z)=0$ ………⑤

(i)　$x+y+z\neq 0$ のとき

④⑤より $x=y=z$ となり，①に代入すると $x^2=x^2+7$ となり，成立しない。

(ii)　$x+y+z=0$ のとき

④⑤は満たされ，$y=-(x+z)$ として①に代入すると，$x^2=-(x+z)z+7$ となり，

$$x^2+zx+z^2-7=0 \text{ ………⑥}$$

ここで，x は実数より，$D=z^2-4(z^2-7)\geqq 0$ となり，

$$3z^2-28\geqq 0,\quad z^2\leqq\frac{28}{3} \text{ ………⑦}$$

さて，整数 x, y, z は，$x+y+z=0$ かつ $x\leqq y\leqq z$ より，$x\leqq 0$，$0\leqq z$ ………⑧

⑦⑧より，$z=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となる。

(ii-i)　$z=0$ のとき　⑥より $x^2=7$ となり，x が整数というのに反する。

(ii-ii)　$z=1$ のとき　⑥より $x^2+x-6=0$ となり，$(x+3)(x-2)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+1)=2$ となるが，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(ii-iii)　$z=2$ のとき　⑥より $x^2+2x-3=0$ となり，$(x+3)(x-1)=0$

⑧から $x=-3$，$y=-(-3+2)=1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

(ii-iv)　$z=3$ のとき　⑥より $x^2+3x+2=0$ となり，$(x+2)(x+1)=0$

⑧から $x=-2,\ -1$ となる。

$x=-2$ のとき，$y=-(-2+3)=-1$ となり，$x\leqq y\leqq z$ を満たす。

$x=-1$ のとき，$y=-(-1+3)=-2$ となり，$x\leqq y\leqq z$ に反する。

(i)(ii)より，$(x,\ y,\ z)=(-3,\ 1,\ 2)$，$(-2,\ -1,\ 3)$

［解　説］

連立方程式をまとめる問題です。上の解答例では，⑧の条件に着目して，まず y を消去し，0 以上である z の値から求めています。

$\boxed{18}$ ［北海道大・理］

(1)　自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき,

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n\geqq 1$，$2k-1\geqq 1$ より，$(2k-1)n\geqq 2k-1$ となり,

$$a\geqq k^2+2k-1 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　n が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき，$n(n+1)+14>n^2$ より，①から,

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \quad (k\text{ は自然数}) \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，②から，$14\geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-15\leqq 0$

$$(k+5)(k-3)\leqq 0,\ -5\leqq k\leqq 3$$

k は自然数から，$k=1,\ 2,\ 3$ となる。

(i)　$k=1$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり，$n=13$

(ii)　$k=2$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり，$n=\dfrac{10}{3}$ より不適

(iii)　$k=3$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり，$n=1$

(i)～(iii)より，$n=1,\ 13$ である。

［解　説］

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

19　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［九州大・文］

(1)　自然数 a と b の最大公約数を $G(a,\ b)$ と表すと，ユークリッドの互除法より，

$$G(2017,\ 225)=G(225,\ 217)=G(217,\ 8)$$
$$=G(8,\ 1)=1$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 8\overline{)217} \\ 16 \\ \hline 57 \\ 56 \\ \hline 1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1 \\ 217\overline{)225} \\ 217 \\ \hline 8 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 8 \\ 225\overline{)2017} \\ 1800 \\ \hline 217 \end{array}$$

(2)　$15=3\times5$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$15\times1,\ 15\times2,\ 15\times3,\ \cdots,\ 15\times134$$

すると，$225=3^2\times5^2$ から，225 との最大公約数が 15 である自然数の個数は，134 以下の自然数で 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数となる。

ここで，134 以下の自然数で 3 の倍数となるものが 44 個，5 の倍数となるものが 26 個，15 の倍数となるものが 8 個である。

よって，求める自然数の個数は，$134-(44+26-8)=72$ である。

(3)　$111=3\times37$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$111\times1,\ 111\times2,\ 111\times3,\ \cdots,\ 111\times18$$

すると，$1998=111\times2\times3^2$ から，1998 との最大公約数が 111 の自然数は，18 以下の自然数で 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数と 111 との積になり，

$$111\times1,\ 111\times5,\ 111\times7,\ 111\times11,\ 111\times13,\ 111\times17$$

さらに，225 との最大公約数が 15 から，求める自然数は $111\times5=555$ である。

［解　説］

約数と倍数の問題です。(1)は年度の数が題材になっているため，2017 が素数という知識をもっていたとしても不思議ではありません。ただ，これをストレートに利用して，いきなり結論とするのは避けた方がよいでしょう。「ふるい」にかけて示せば別ですが。

$\boxed{20}$ ［筑波大・理］

(1)　$a_1=1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=3{a_{n+1}}^2-6a_{n+1}a_n+3{a_n}^2+a_{n+1}$ に対して，

$$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)^2$$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，$b_1=2\geqq 0$，$b_{n+1}=3{b_n}^2$ ………①

よって，帰納的に，$b_n\geqq 0$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ である。

(2)　以下，b_n の一の位の数が 2 であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$b_1=2$ より成立している。

(ii)　$n=k$ のとき　b_k の一の位の数が 2 であると仮定する。

これより，l_k を 0 以上の整数として，$b_k=10l_k+2$ とおくと，①から，

$$b_{k+1}=3{b_k}^2=3(10l_k+2)^2=300{l_k}^2+120l_k+12=10(30{l_k}^2+12l_k+1)+2$$

よって，b_{k+1} の一の位の数は 2 である。

(i)(ii)より，b_n の一の位の数は 2 である。

(3)　(2)より，l_n を 0 以上の整数として，$b_n=10l_n+2$ とおくことができ，

$$a_{n+1}-a_n=10l_n+2\ \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，$n\geqq 2$ において，②から，$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}(10l_k+2)$ となり，

$$a_{2017}=1+10\sum_{k=1}^{2016}l_k+2\cdot 2016=10\sum_{k=1}^{2016}l_k+4033=10\Big(\sum_{k=1}^{2016}l_k+403\Big)+3$$

したがって，a_{2017} の一の位の数は 3 である。

［解　説］

整数と漸化式の融合問題です。(1)は簡単に記しましたが，丁寧に書くなら数学的帰納法です。また，(2)(3)は合同式を用いると，少し簡略になります。

21　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\ \ (b_{n+1}',\ b_n' \text{は自然数})$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

［解 説］

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば, 昨年は神戸大・理で類題が出ています。

$\boxed{22}$ ［九州大・理］

(1) 初項 1, 公差 4 の等差数列$\{a_n\}$の一般項は, $a_n=1+4(n-1)=4n-3$

さて, a_n が 7 の倍数となるのは, k を自然数として, $4n-3=7k$ ………①

ここで, $4\times(-1)-3=7\times(-1)$ から, ①を変形すると,

$4(n+1)=7(k+1)$ ………②

すると, 4 と 7 は互いに素より, l を整数として $n+1=7l$, $k+1=4l$ となり,

$n=7l-1$, $k=4l-1$

そこで, $1\leqq n\leqq 600$, $k\geqq 1$ から, $1\leqq 7l-1\leqq 600$, $4l-1\geqq 1$ となり,

$\dfrac{1}{2}\leqq l\leqq\dfrac{601}{7}=85+\dfrac{6}{7}$

これより, $l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85$ となり, 7 の倍数である項の個数は 85 である。

(2) $\{a_n\}$の初項から第 600 項のうち, 7 の倍数の項を取り出して b_l とおくと,

$b_l=a_{7l-1}=4(7l-1)-3=28l-7=7(4l-1)\ \ (l=1,\ 2,\ \cdots,\ 85)$

さて, a_n が 7^2 の倍数, すなわち b_l が 7 の倍数となるのは, m を自然数として,

$4l-1=7m$ ………③

ここで, $4\times2-1=7\times1$ から, ③を変形すると,

$4(l-2)=7(m-1)$

すると, 4 と 7 は互いに素より, p を整数として $l-2=7p$, $m-1=4p$ となり,

$l=7p+2$, $m=4p+1$

そこで, $1\leqq l\leqq 85$, $m\geqq 1$ から, $1\leqq 7p+2\leqq 85$, $4p+1\geqq 1$ となり,

$0\leqq p\leqq\dfrac{83}{7}=11+\dfrac{6}{7}$

これより, $p=0,\ 1,\ \cdots,\ 11$ となり, 7^2 の倍数である項の個数は 12 である。

(3) a_n が 7 の倍数のとき, $n=7l-1\ (l\geqq 1)$ となり, この n を書き並べると,

$6,\ \underline{13},\ 20,\ 27,\ 34,\ 41,\ 48\ |\ 55,\ \underline{62},\ 69,\ 76,\ 83,\ 90,\ 97\ |\ 104,\ \underline{111},\ 118,\ \cdots\cdots$

そして, この数列を 7 個ずつの区画に分け, 左から第 1 群, 第 2 群, …と呼ぶ。

また, a_n が 7^2 の倍数の項を取り出して c_p とおくと, $l=7p+2$ から,

$n=7(7p+2)-1=49p+13\ \ (p\geqq 0)$

すると, 上記の数列の下線をつけた数が対応して,

$c_p=a_{49p+13}=4(49p+13)-3=196p+49=7^2(4p+1)\ \ (p\geqq 0)$

さらに, a_n が 7^3 の倍数, すなわち c_p が 7 の倍数になるのは, 同様にすると, q を 0 以上の整数として,

$4p+1=7q$ ………④

そして, ④を満たす最小の p, q の値は $(p,\ q)=(5,\ 3)$ であり, このときの n は, $n=49\cdot5+13=258$ となり, $a_{258}=4\cdot258-3=1029=7^3\cdot3$ である。

このn $=258$ は，$7l-1=258$ から $l=37$ となり，上記の数列の第 6 群に属することがわかる。

さて，積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n については，素因数 7 の個数に注目し，これが合計 45 個以上となる最小の n を考えればよい。

まず，第 5 群までは a_n に 7^3 の倍数がないので，1 つの群内に素因数 7 が $7+1=8$ 個ずつとなり，その総数は $8\times5=40$ 個である。

すると，素因数 7 の残り 5 個について調べるために，第 6 群を書き並べると，

$| \ 251,\ \underline{258},\ 265,\ 272,\ \cdots\cdots$

これより，a_{251} は 7 の倍数，a_{258} は 7^3 の倍数，a_{265} は 7 の倍数，…となるので，積 $a_{251}a_{258}a_{265}$ に素因数 7 が 5 個あることがわかる。

以上より，積 $a_1a_2\cdots a_n$ が 7^{45} の倍数となる最小の自然数 n は，$n=265$ である。

［解 説］

整数と数列の融合問題です。解答例では，頻出の(1)の結果を利用して，(2)につなげています。なお，(3)は群数列の考え方をもとにしていますが，45 という数値が意味深長で，詰めがかなり面倒でした。

23　　［名古屋大・文］

(1)　条件(＊)から，自然数a，b，cに対し，$a<b<c$かつ$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$………①

すると，$\dfrac{1}{a}>\dfrac{1}{b}>\dfrac{1}{c}>0$となるので，①から$\dfrac{3}{a}>\dfrac{1}{2}$，すなわち$a<6$………②

また，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}>0$なので，①から$\dfrac{1}{a}<\dfrac{1}{2}$，すなわち$a>2$………③

②③より$2<a<6$となり，$a=3,\ 4,\ 5$である。

(i)　$a=3$のとき　①より$\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$となり，

$bc-6b-6c=0$，$(b-6)(c-6)=36$

ここで，$3<b<c$から$-3<b-6<c-6$となり，

$(b-6,\ c-6)=(1,\ 36)$，$(2,\ 18)$，$(3,\ 12)$，$(4,\ 9)$

よって，$(b,\ c)=(7,\ 42)$，$(8,\ 24)$，$(9,\ 18)$，$(10,\ 15)$

(ii)　$a=4$のとき　①より$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$となり，

$bc-4b-4c=0$，$(b-4)(c-4)=16$

ここで，$4<b<c$から$0<b-4<c-4$となり，

$(b-4,\ c-4)=(1,\ 16)$，$(2,\ 8)$

よって，$(b,\ c)=(5,\ 20)$，$(6,\ 12)$

(iii)　$a=5$のとき　①より$\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$から，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{3}{10}$となり，

$3bc-10b-10c=0$，$9bc-30b-30c=0$，$(3b-10)(3c-10)=100$

$5<b<c$から$5<3b-10<3c-10$となり，適する$(3b-10,\ 3c-10)$はない。

(i)～(iii)より，自然数の組$(a,\ b,\ c)$は，

$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$，$(3,\ 8,\ 24)$，$(3,\ 9,\ 18)$，$(3,\ 10,\ 15)$，
$(4,\ 5,\ 20)$，$(4,\ 6,\ 12)$

(2)　$2n$の正の約数 p，q，r に対し，$p>q>r$かつ$p+q+r=n$……④を満たす$(p,\ q,\ r)$の個数を$f(n)$とすると，④から，

$\dfrac{p}{2n}+\dfrac{q}{2n}+\dfrac{r}{2n}=\dfrac{1}{2}$………⑤

ここで，$\dfrac{2n}{p}=a$，$\dfrac{2n}{q}=b$，$\dfrac{2n}{r}=c$とおくと，a，b，cは自然数となり，さらに，$p>q>r$から，$\dfrac{2n}{p}<\dfrac{2n}{q}<\dfrac{2n}{r}$すなわち$a<b<c$である。

さらに，⑤をa，b，cで表すと，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$である。

すなわち，自然数の組$(p,\ q,\ r)$は，条件(＊)を満たす自然数の組$(a,\ b,\ c)$に対応し，その個数$f(n)$の最大値Mは，(1)の結果から$M\leqq 6$である。

以下，この 6 つの場合について，n の条件を求める。

(i)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 7,\ 42)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=7$，$\dfrac{2n}{r}=42$ より，

$$3p=2n\,,\ 7q=2n\,,\ 21r=n$$

よって，このとき n は 21 の倍数である。

(ii)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 8,\ 24)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=8$，$\dfrac{2n}{r}=24$ より，

$$3p=2n\,,\ 4q=n\,,\ 12r=n$$

よって，このとき n は 12 の倍数である。

(iii)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 9,\ 18)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=9$，$\dfrac{2n}{r}=18$ より，

$$3p=2n\,,\ 9q=2n\,,\ 9r=n$$

よって，このとき n は 9 の倍数である。

(iv)　$(a,\ b,\ c)=(3,\ 10,\ 15)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=3$，$\dfrac{2n}{q}=10$，$\dfrac{2n}{r}=15$ より，

$$3p=2n\,,\ 5q=n\,,\ 15r=2n$$

よって，このとき n は 15 の倍数である。

(v)　$(a,\ b,\ c)=(4,\ 5,\ 20)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=5$，$\dfrac{2n}{r}=20$ より，

$$2p=n\,,\ 5q=2n\,,\ 10r=n$$

よって，このとき n は 10 の倍数である。

(vi)　$(a,\ b,\ c)=(4,\ 6,\ 12)$ のとき　$\dfrac{2n}{p}=4$，$\dfrac{2n}{q}=6$，$\dfrac{2n}{r}=12$ より，

$$2p=n\,,\ 3q=n\,,\ 6r=n$$

よって，このとき n は 6 の倍数である。

(i)～(vi)より，自然数 n が上記の条件をすべて満たすとき $M=6$ となる。

ここで，$21=3\times7$，$12=2^2\times3$，$9=3^2$，$15=3\times5$，$10=2\times5$，$6=2\times3$ から，n が $2^2\times3^2\times5\times7=1260$ の倍数のとき，条件をすべて満たす。

以上より，$M=6$ で，$f(n)=6$ となる最小の n は $n=1260$ である。

［解 説］

質，量ともにかなりハードな整数問題です。ただ，(1)が(2)への秀逸な誘導となっており，入試までに演習したい 1 題です。なお，(1)は，場合分けしたあと分母を払って因数分解をしていますが，不等式を用いて評価しても構いません。