《2018 入試対策》

# 北海道大学

## 理系数学

1998―2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

## ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された北海道大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2013 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 北大数学 映像ライブラリー

## 本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

**注**　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

# 目　　次

# 分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

## ■ 図形と式

**1**　座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(3, 1)，C(2, 2) を頂点とする△ABC の内部および境界を $T$ とおく。実数 $a$ に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2 \leqq a$ を満たす座標平面上の点 P の全体を $D$ とする。ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) $D$ が少なくとも 1 つの点 P を含むような $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) $D$ が $T$ を含むような $a$ の値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで，$D$ が $T$ に含まれるような $a$ の値の範囲を求めよ。 [2017]

**2**　実数 $x,\ y,\ s,\ t$ に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，$i$ は虚数単位である。

(1) $w$ を $z$ で表し，$s,\ t$ を $x,\ y$ で表せ。

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 $D$ を座標平面上に図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $D$ を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。 [2013]

**3**　実数 $a,\ b$ に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ とおく。

(1) $a\neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$ を満たす実数 $c$ を求めよ。

(2) (1)で求めた $c$ について，$a,\ b$ が条件 $a<c<b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3) 一般に $a<b$ のとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を $ab$ 平面上に図示せよ。 [2012]

**4**　実数 $x$ に対して $k\leqq x<k+1$ を満たす整数 $k$ を $[x]$ で表す。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 $n$ をすべて求めよ。

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 $x$ の範囲を求めよ。

(3) $x$ は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす $x$ をすべて求めよ。 [2011]

**5**　$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を $l_1$ とする。$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を $C$ とおく。$C$ と $l_1$ の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における $C$ の接線を $l_2$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$l_1$ と $l_2$ のなす角を $\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2)　$l_1$ を $l_2$ に関して対称移動させた直線を $l_3$ とおくとき，$l_3$ の方程式を求めよ。

(3)　$l_3$ は $t$ によらない定点を通ることを示せ。

(4)　$l_3$ と $C$ の 2 つの共有点を P，Q とする。線分 PQ の長さが最小になるような $t$ の値を求めよ。　[2009]

**6**　$\alpha$，$\beta$ を $0<\alpha<\beta<2$ を満たす実数とし，$0\leqq x\leqq 2$ の範囲で定義された関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|(x-\alpha)(x-\beta)\right|$ とする。

(1)　$f(x)$ の最大値を $M$ とする。$f(x)=M$ となる $x$ がちょうど 3 つあるとき，実数 $\alpha$，$\beta$ と $M$ の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた $\alpha$，$\beta$ について，$f(x)-mx=0$ が異なる 3 つの解をもつような実数 $m$ の値の範囲を求めよ。　[2008]

**7**　実数 $x, y, z$ は $x\leqq y\leqq z\leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1)　$x$ の最大値と $y$ の最小値を求めよ。

(2)　$3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。　[2006]

**8**　$xy$ 平面上の放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1-x_2=2$ が成り立つとき，$b$ を $a$ で表せ。

(2)　$x_1-x_2=2$ を満たしながら $a$，$b$ が変化するとき，直線 PQ の通過する領域を求め，図示せよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|=2$ を満たしながら $a$，$b$ が変化するとき，線分 PQ の中点の $y$ 座標の最小値を求めよ。　[2003]

**9**　不等式 $\cos 2x+cx^2\geqq 1$ がすべての $x$ について成り立つような定数 $c$ の値の範囲を求めよ。　[2001]

**10** $xy$ 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A, B とし，線分 AB の中点を Q とする。

(1) 点 Q の座標を $a$, $b$ を用いて表せ。

(2) 点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2001]

**11** (1) 次の不等式の表す領域 $D$ を図示せよ。$|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$

(2) 点 A を $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 $D$ の点とする。点 P が $D$ を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3) 領域 $D$ の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\dfrac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。　[2000]

**12** $xy$ 平面上の 2 直線 $L_1$，$L_2$ を，$L_1: y=0$ （$x$ 軸），$L_2: y=\sqrt{3}x$ で定める。P を $xy$ 平面上の点とする。直線 $L_1$ に関して P と対称な点を Q，直線 $L_2$ に関して P と対称な点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の座標を $(a,\ b)$ とするとき，R の座標を $a$, $b$ を用いて表せ。

(2) 2 点 Q, R の距離が 2 になるような P の軌跡 $C$ を求めよ。

(3) 点 P が $C$ 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ。　[1999]

**13** 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点 $(a,\ b)$ の集合を式で表し，図示せよ。

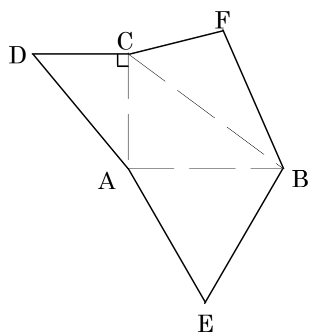
$$x-y<0,\quad x+y<2,\quad ax+by<1$$

[1998]

## ■ 図形と計量

**1** 図はある三角錐 $V$ の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ で，$\triangle\mathrm{ABE}$ は正三角形である。このとき，$V$ の体積を求めよ。

[2009]



**2**　方程式 $x^2+y^2-4y+2=0$ で定義される円 $C$ を考える。

(1)　点 $\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$ と点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，円 $C$ に接する円の中心の座標を求めよ。

(2)　点 P が円 $C$ 上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

**3**　半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。　[2005]

**4**　三角形 ABC において，面積が 1 で $\mathrm{AB}=2$ であるとき，$\mathrm{BC}^2+(2\sqrt{3}-1)\mathrm{AC}^2$ の値を最小にするような $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。　[1999]

## ■ ベクトル

**1**　空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{B}(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線を $l$ とし，2 点 $\mathrm{C}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{D}(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線を $m$ とする。$a$ を定数として，$l$ 上にも $m$ 上にもない点 $\mathrm{P}(s,\ t,\ a)$ を考える。

(1)　P から $l$ に下ろした垂線と $l$ の交点を Q とし，P から $m$ に下ろした垂線と $m$ の交点を R とする。Q, R の座標をそれぞれ $s, t, a$ を用いて表せ。

(2)　P を中心とし，$l$ と $m$ がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ。

(3)　$s,\ t$ と定数 $a$ が(2)の条件を満たすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を $a$ を用いて表せ。　[2016]

**2**　空間の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$ の定める平面を $\alpha$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。$\alpha$ 上の点 C があり，その $x$ 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1)　C の座標を求めよ。

(2)　$\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ を満たす実数 $s, t$ を求めよ。

(3)　$\alpha$ 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から $\alpha$ に垂線を下ろし，$\alpha$ との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ を満たす実数 $k, l$ を $x, y, z$ で表せ。　[2015]

$\boxed{3}$ 四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90^\circ$ を満たす。辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$pq=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。$p+q=t$ とし，△CPQ の面積を $S$ とする。

(1) $t$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $S$ を $t$ で表せ。

(3) $S$ の最小値，およびそのときの $p,\ q$ を求めよ。 [2014]

$\boxed{4}$ 次の問いに答えよ。

(1) $xy$ 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) $t$ が実数全体を動くとき，$xyz$ 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を $l$ とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 $S$ が直線 $l$ と共有点をもつとき，$a,\ b,\ c$ の満たす条件を求めよ。 [2011]

$\boxed{5}$ $xyz$ 空間の原点 O と，O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A, B, C, D を考える。点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2},\ \sin\dfrac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right),\ 0\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ とする。点 C, D は $\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{DOA}=\angle\mathrm{DOB}$ を満たし，点 C の $z$ 座標は正，点 D の $z$ 座標は負とする。

(1) 点 C の座標を $\alpha$ と $\theta=\angle\mathrm{COA}$ $(0<\theta<\pi)$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき，点 C の座標を求めよ。 [2008]

$\boxed{6}$ 空間内に, 3 点 $\mathrm{A}_0(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}_1(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{A}_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 $\alpha$ と, 3 点 $\mathrm{B}_0(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}_1(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 $\beta$ を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O と $\alpha$ 上の点 P を通る直線が $\beta$ 上の点 $\mathrm{P}'$ も通っているとする。

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_0}+a\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_1}+b\overrightarrow{\mathrm{A}_0\mathrm{A}_2},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}'}=\overrightarrow{\mathrm{OB}_0}+p\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_1}+q\overrightarrow{\mathrm{B}_0\mathrm{B}_2}$$

とおくとき, $a,\ b$ を $p,\ q$ で表せ。

(3) 点 P が $\alpha$ 上の点 $\mathrm{A}_0$ を中心とする半径 1 の円 $C$ の円周上を動くとき，点 $\mathrm{P}'$ が動いてできる図形 $C'$ の方程式を(2)の $p,\ q$ で表し，$C'$ が楕円であることを示せ。

[2006]

**7** 2点$(1,\ 0,\ 0)$, $(0,\ 2,\ 0)$を通る直線を$l$とし, 中心が$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が1の球面を$C$とする。点Pが$l$上にあり点Qが$C$上にあるとし, 線分PQは直線$l$と線分RQに垂直であるとする。

(1) 点Pの存在する範囲を求めよ。

(2) 線分PQの長さを最小にする点Pの座標を求めよ。 [2002]

**8** 空間内の4点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 1,\ 1)$をとる。

(1) 直線OA上の点HをとってCHとOAが垂直であるようにする。Hの座標を求めよ。$\angle\mathrm{CHC}'=\theta$として$\cos\theta$の値を求めよ。ただし, $\mathrm{C}'=(0,\ 1,\ 0)$とする。

(2) 直線OA上の点Pと直線BC上の点Qとの距離$\overline{\mathrm{PQ}}$が最小となるP, Qの座標を求めよ。 [2000]

## ■ 整数と数列

**1** 自然数の2乗となる数を平方数という。

(1) 自然数$a$, $n$, $k$に対して, $n(n+1)+a=(n+k)^2$が成り立つとき, $a\geqq k^2+2k-1$が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$が平方数となるような自然数$n$をすべて求めよ。 [2017]

**2** (1) 次の方程式が異なる3つの0でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3+x^2-2x-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2) 方程式①の3つの実数解を$s, t, u$とし, 数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき, $a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3) (2)の$a_n$がすべて整数であることを示せ。 [2016]

**3** $p$, $q$ は正の実数とし，$a_1 = 0$，$a_{n+1} = pa_n + (-q)^{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1) $b_n = \dfrac{a_n}{p^n}$ とする。数列$\{b_n\}$の一般項を $p, q, n$ で表せ。

(2) $q = 1$ とする。すべての自然数 $n$ について $a_{n+1} \geqq a_n$ となるような $p$ の値の範囲を求めよ。 [2015]

**4** 次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1 = 1,\ z_{n+1} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n + 1 \quad (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。ただし，$i$ は虚数単位である。

(1) $z_2$，$z_3$ を求めよ。

(2) 上の漸化式を $z_{n+1} - \alpha = \dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n - \alpha)$ と表したとき，複素数 $\alpha$ を求めよ。

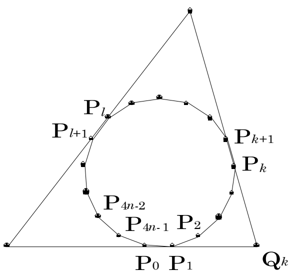
(3) 一般項 $z_n$ を求めよ。

(4) $z_n = -\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$ となるような自然数 $n$ をすべて求めよ。 [2004]

**5** $n$ を自然数とし，正 $4n$ 角形 $\mathrm{P}_0\cdots\mathrm{P}_{4n-1}$ を考える。

(1) 辺 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$ と辺 $\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$ $(1 \leqq k \leqq 2n-1)$ を延長した直線の交点を $\mathrm{Q}_k$ とする。このとき，$\angle \mathrm{P}_0\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_{k+1}$ の大きさを求めよ。

(2) 3 辺 $\mathrm{P}_0\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_k\mathrm{P}_{k+1}$，$\mathrm{P}_l\mathrm{P}_{l+1}$ $(k < l)$ を延長したとき，正 $4n$ 角形 $\mathrm{P}_0\cdots\mathrm{P}_{4n-1}$ を含む鋭角三角形ができるような $k$ と $l$ の組は何通りあるか。 [2000]



## ■ 確率

**1** さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。$n$ 回目の試行でゲームが終了する確率を $p_n$ とする。

(1) $p_{10}=\left(\dfrac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2) $p_9$ の値を求めよ。

(3) $p_3$ の値を求めよ。 [2017]

**2** 机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(2) ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(3) ひきだし A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。 [2016]

**3** 初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i) まず同時に 2 個の玉を取り出す。

(ii) その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える。

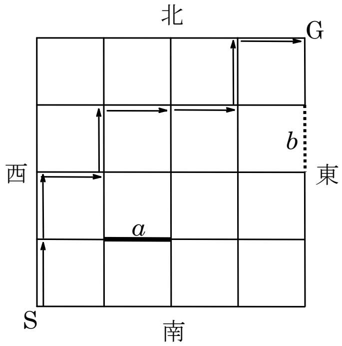
$n$ 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を $X_n$ とする。

(1) $X_1=3$ となる確率を求めよ。

(2) $X_2=3$ となる確率を求めよ。

(3) $X_2=3$ であったとき，$X_1=3$ である条件付き確率を求めよ。 [2015]

**4**　図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 $a$ を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 $b$ を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。




(1)　$a$ を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2)　$a$ を通り抜けずに $b$ を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

**5**　次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を $X$ とする。

(i)　$X$ が 4 の倍数ならば，点 P は $x$ 軸方向に $-1$ 動く。
(ii)　$X$ を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は $y$ 軸方向に $-1$ 動く。
(iii)　$X$ を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は $x$ 軸方向に $+1$ 動く。
(iv)　$X$ を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は $y$ 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は $x$ 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(-1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　2 個のサイコロを 4 回投げて，点 P が $(1,\ 1)$ にある確率を求めよ。　[2013]

**6**　A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に $k$ 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を $p$，B が勝つ確率を $q$ とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に $k$ 勝する確率を $P_k$ とおく。

(1)　$P_2$ を $p$ と $q$ で表せ。

(2)　$P_3$ を $p$ と $q$ で表せ。

(3)　$P_4$ を $p$ と $q$ で表せ。

(4)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_4<P_3$ であることを示せ。　[2012]

**7**　$n$ を 2 以上の自然数, $q$ と $r$ を自然数とする。1 から $nq$ までの番号がついた $nq$ 個の白玉, 1 から $nr$ までの番号がついた $nr$ 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から $n$ 番まで番号づけられた $n$ 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は $q$ 個ずつ, 赤玉は $r$ 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から $q$ の白玉と番号 1 から $r$ の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を $n$ 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に $n$ 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を $s_n$ とし, $n$ 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を $a_n$ とする。

(1)　$a_2$, $a_3$ を求めよ。

(2)　$s_n$ を求めよ。

(3)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(4)　$a_n$ を求めよ。　[2011]

**8**　2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを, 1 回に 1 本ずつ, くじがなくなるまで引き続けることにする。

(1)　$n$ 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ。

(2)　A, B, C の 3 人が, A, B, C, A, B, C, A, …の順に, このくじ引きを行うとする。1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ。B と C についても, 1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ。　[2010]

**9**　4 枚のカードがあって, 1 から 4 までの整数が 1 つずつ書かれている。このカードをよく混ぜて, 1 枚引いては数字を記録し, カードを元に戻す。この試行を $n$ 回繰り返し, 記録した順に数字を並べて得られる数列を, $a_1$, $a_2$, …, $a_n$ とする。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし, $j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする。

　(i)　$A_n(1)$, $A_n(2)$ を求めよ。

　(ii)　$n \geqq 2$ のとき, $A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1)$, $A_{n-1}(2)$, …, $A_{n-1}(j)$ で表し, $A_n(3)$, $A_n(4)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき, 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

[2007]

**10**　1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1)　4 回目以内（4 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(2)　$r$ 回目以内（$r$ 回目も含む）に終了する確率を求めよ。ただし，$r \geqq 2$ とする。

[2006]

**11**　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A，B を移動する。サイコロの目の数が 1，3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 $n$ 試行の結果，部屋 A，B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を $n$ を用いて表せ。

(4)　第 $n$ 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。　[2004]

**12**　点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。$n$ 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

**13**　(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち，1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　$n$ 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。　[2002]

**14**　A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または 100 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\dfrac{1}{2}$ である。

(1)　4 回以内の勝負で A が 2 連勝する確率を求めよ。

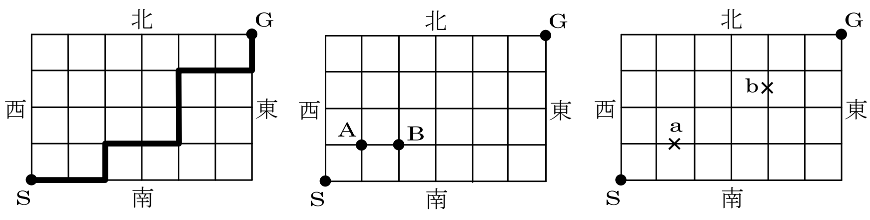
(2)　$n=2,\ 3,\ \cdots,\ 100$ とする。$n$ 回以内の勝負で，A, B, C のうち誰かが 2 連勝する確率を求めよ。　[2001]

**15**　図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

(3)　図 3 の a, b の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



（図1）　（図2）　（図3）

[1999]

**16**　ある駅の待合室に，$n$ 個のいすが横一列に並んでいる。$k$ 人が，どの二人も隣り合わないように，いすにすわる場合の数を，$f(n,\ k)$ とする。$n \geqq 2k-1$ のとき，次を証明せよ。

$$f(n,\ k) = {}_{n-k+1}\mathrm{C}_k \times (k!)$$

[1998]

**17** 無作為に 13 人を選ぶとき，日曜日生まれの人の数を $X$，土曜日生まれの人の数を $Y$ とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，どの曜日に生まれる確率も $\frac{1}{7}$ とする。

(1) $X=k$，$Y=m$ となる確率 $P(X=k,\ Y=m)$ を $k$，$m$ の式として表せ。ただし，$0\leqq k$，$0\leqq m$，$k+m\leqq 13$ とする。

(2) $P(X=k,\ Y=2)$ が最大となる $k$ を求めよ。 [1998]

## ■ 複素数

**1** 複素数平面上に 3 点 O，A，B を頂点とする△OAB がある。ただし，O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A，B，P が表す複素数を，それぞれ $\alpha$，$\beta$，$z$ とするとき，$\alpha\beta=z$ が成り立つとする。

(1) 複素数 $\alpha$ の満たすべき条件を求め，点 $\mathrm{A}(\alpha)$ が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。 [2017]

**2** 複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 $C$ 上に点 $z$ がある。$a$ を実数の定数とし，$w=z^2-2az+1$ とおく。

(1) $|w|^2$ を $z$ の実部 $x$ と $a$ を用いて表せ。

(2) 点 $z$ が $C$ 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を $a$ を用いて表せ。 [2016]

**3** 複素数 $a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$a_1=1+i,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，$i$ は虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 複素数平面上の 3 点 $0$，$a_1$，$a_2$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) すべての $a_n$ は(1)で求めた円上にあることを示せ。 [2005]

**4** $z$ を複素数とし，$i$ を虚数単位とする。

(1) $\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 $z$ 全体の描く図形 $P$ を複素数平面上に図示せよ。

(2) $z$ が上で求めた図形 $P$ 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。 [2003]

**5** $n$ を 3 以上の自然数とするとき，次を示せ。ただし，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とし，$i$ を虚数単位とする。

(1) $\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

ただし，$k$ は自然数とし，$\overline{\alpha}$ は $\alpha$ に共役な複素数とする。

(2) $n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3) $\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$ [2002]

**6** $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z$（$z\neq 0$）を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ。 [1998]

## ■ 曲線

**1** 楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。$C_1$ と $C_2$ の焦点が一致しているならば，$C_1$ と $C_2$ の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。 [2007]

**2** $xy$ 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_2\neq 0)$ に対して，点 $\mathrm{C}(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$，$\mathrm{D}(x_2,\ 0)$ をとり，直線 AC と $y$ 軸の交点を E とする。ただし，原点 O は直線 AB 上にはないとする。

(1) 直角三角形 ODE の面積を $S$ とするとき，$S$ を $x_1$，$y_1$，$x_2$，$y_2$ で表せ。

(2) A, B が楕円 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(a>b>0)$ 上を動くとき，$S$ の最大値を $a$, $b$ で表せ。

(3) A, B が $L$ 上にあって(2)で求めた $S$ の最大値を与えるとき，点 C は楕円 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2=1$ 上にあることを示せ。 [2002]

**3** 中心がそれぞれ $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ である半径 1 の円 $A$, $B$ を考える。円 $C$ が，$A$ を内側に含み，$B$ の外側にあり，しかも，$A$, $B$ の両方に接しながら動くとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 $C$ の中心の軌跡を求めよ。

(2) 円 $C$ が直線 $y=2$ に接するとき，$C$ の半径を求めよ。 [1998]

## ■ 極限

**1** 次の問いに答えよ。

(1) $x \geqq 0$ のとき，$x-\dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ を示せ。

(2) $x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3}-\dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \dfrac{x^3}{3}$ を示せ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ。 [2012]

**2** 正の実数 $r$ と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 $\theta$ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。$a_n$，$b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_n b_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を $\theta$ で表せ。

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}$ を $n$ と $\theta$ で表せ。

(3) $\theta \neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。 [2010]

**3** 直角三角形△ABC において∠B は直角であるとし，辺 AC の長さを $\alpha$ とする。辺 AC を $n$ 等分し，その分点を A に近い方から順に $D_1$，$D_2$，$D_3$，…，$D_{n-1}$ とおく。$1 \leqq k \leqq n-1$ に対し，線分 $BD_k$ の長さを $L_k$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ を $\alpha$ と $n$ で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を $\alpha$ で表せ。 [2009]

**4** 自然数 $n$ に対して，$a_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1$ を求めよ。

(2) $a_{n+1}$ を $a_n$ で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。 [2009]

**5** 関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ とする。

(1) $0<x<1$ ならば, $0<f(x)<1$ となることを示せ。

(2) $f(x)-x=0$ となる $x$ をすべて求めよ。

(3) $0<\alpha<1$ とし, 数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\alpha\ ,\ \ a_{n+1}=f(a_n)\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とする。$\alpha$ の値に応じて, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 [2008]

**6** $f(x)$ は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1) 自然数 $n, m$ に対し, $\displaystyle\int_0^n t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n}k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m dt$ を示せ。

(2) $f(x)$ の次数を $r$ とするとき, 次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{r+1}$$

(3) すべての自然数 $n$ に対して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f(k)=\frac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

[2005]

**7** $-1<a<1$ とする。

(1) 積分 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}dx$ を求めよ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき, 次の等式を示せ。$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3) 次の等式を示せ。$\displaystyle\log\frac{1+a}{1-a}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$ [2001]

## ■ 微分法

**1** $a$ は実数とし, 2 つの曲線 $C_1: y=(x-1)e^x$, $C_2: y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし, $e$ は自然対数の底である。$C_1$ 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における $C_1$ の接線が $C_2$ に接するとする。

(1) $a$ を $t$ で表せ。

(2) $t$ が実数全体を動くとき, $a$ の極小値, およびそのときの $t$ の値を求めよ。[2015]

**2**　$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ とする。

(1)　関数 $f(x)$ の極大値と極小値，およびそのときの $x$ を求めよ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$　$(a<b)$ で接する直線の方程式を求めよ。　[2014]

**3**　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta)=4\cos2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos2\theta-4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x=\sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を $x$ で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ。

(3)　方程式 $f(\theta)=k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 $k$ の値の範囲を求めよ。

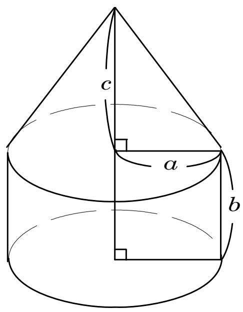
[2012]

**4**　$0<a<1$，$0<\theta<\pi$ とする。4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ が条件 $\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}=\mathrm{PQ}$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q の座標を $a$ と $\theta$ で表せ。

(2)　$a$ を固定する。$0<\theta<\pi$ の範囲で $\theta$ が動くとき，$y$ の最小値を求めよ。　[2009]

**5**　図のような，半径 $a$ の円を底面とする高さ $b$ の円柱の上に，同じ大きさの円を底面とする高さ $c$ の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。




(1)　$V$ をこの建物の体積，$S$ をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。$V$ と $S$ を $a$, $b$, $c$ で表せ。

(2)　$V$ を一定に保ちながら $a$, $b$, $c$ を動かして，$S$ を最小にしたい。

(i)　$b=xa$，$c=ya$ とおき，$V$ と $a$ を一定としたとき，$S$ の最小値 $T$ を $V$ と $a$ で表せ。

(ii)　$T$ が最小になるときの比 $a:b:c$ を求めよ。　[2007]

**6**　$y$ 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ と $x$ 軸上の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を考える。$\theta=\angle\mathrm{APB}$ とおく。

(1)　$\cos\theta$ を $a$ で表せ。

(2)　$\theta$ が最大になる $a$ を求めよ。　[2006]

**7** 次の問いに答えよ。

(1) 方程式$e^{2a}-2e^{a}-1=0$を満たす実数$a$を求めよ。ただし，$e$は自然対数の底とする。

(2) $t\geqq 0$に対して$F(t)=\int_0^t \frac{e^x}{e^x+e^{2t}}dx$を求めよ。

(3) $t\geqq 0$の範囲での$F(t)$の最大値と，最大値を与える$t$の値を求めよ。 [2005]

**8** $a$を1以上の実数, $b$を正の実数とする。

(1) 0以上のすべての実数$x$について，不等式$e^x-a(x+2b)\geqq 0$が成り立つための，$a$, $b$の満たすべき条件を求めよ。ただし, $e$は自然対数の底とする。

(2) $a$, $b$が(1)で求めた範囲を動くとき，定積分$\frac{1}{ae^b}\int_0^1 \frac{1}{x+2b}dx$の値を最小にする$a$, $b$と，その最小値を求めよ。 [2004]

**9** 次の問いに答えよ。

(1) 正の数$t$, 実数$p$, $q$に対して関数$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$は，条件

$$f(0)=1,\ f'(0)=2,\ f(t)=p,\ f'(t)=q\cdots\cdots\cdots(*)$$

を満たすとする。このとき, $c$, $d$を求め, $a$, $b$を$t$, $p$, $q$で表せ。

(2) 上の条件$(*)$を満たす$f(x)$について, 3つの不等式$a\leqq 0$, $b\leqq 0$, $p\geqq 0$を同時に満たすような$p$, $q$によって定まる点$(p,\ q)$のなす領域を座標平面上に図示し，その面積$S$を$t$を用いて表せ。

(3) $t$を$t>0$なる範囲を動くとき，$S$の値が最小となる$t$の値と$S$の最小値を求めよ。

[2000]

**10** 関数$f(x)=\frac{1}{1+e^{-px}}-ax$が極値をもつように，定数$a$の値の範囲を定めよ。ただし, $p$は正の定数で, $e$は自然対数の底である。 [1999]

## ■ 積分法

**1** 関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。

(2) $f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3) 次の定積分の値を求めよ。 $\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$ [2017]

**2** $a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\displaystyle\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1) $f(x)$ を求めよ。

(2) $0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\displaystyle\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの $a$ の値を求めよ。 [2016]

**3** $n$ は自然数，$a$ は $a>\dfrac{3}{2}$ を満たす実数とし，実数 $x$ の関数

$$f(x)=\int_0^x(x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)d\theta$$

を考える。ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$ を示せ。

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ を満たす $n$ と $a$ の値を求めよ。

(3) (2)で求めた $n$ と $a$ に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。 [2015]

**4** $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ とおく。

(1) $f'(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの $x$ を求めよ。

[2014]

**5** 区間 $-\infty < x < \infty$ で定義された連続関数 $f(x)$ に対して

$$F(x)=\int_0^{2x} t f(2x-t)\,dt$$

とおく。

(1) $F\left(\dfrac{x}{2}\right)=\displaystyle\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$ となることを示せ。

(2) 2 次導関数 $F''$ を $f$ で表せ。

(3) $F$ が 3 次多項式で $F(1)=f(1)=1$ となるとき, $f$ と $F$ を求めよ。 [2013]

**6** $0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\displaystyle\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1) $F'(x)$ を求めよ。

(2) $F'(x)\leqq 0$ となる $x$ の範囲を求めよ。

(3) $F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。 [2011]

**7** $0\leqq x\leqq 1$ に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)\,dt$ と定める。ただし，$e=2.718\cdots$ は自然対数の底である。

(1) 不定積分 $I_1=\displaystyle\int te^t\,dt$ ，$I_2=\displaystyle\int t^2e^t\,dt$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を $x$ の指数関数と多項式を用いて表せ。

(3) $f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極大となることを示せ。 [2010]

**8** 関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で定義された連続関数とする。

(1) $f(x)=\displaystyle\int_0^1 e^{x+t}f(t)\,dt$ を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x)=0$ のみであることを示せ。

(2) $g(x)=\displaystyle\int_0^1 e^{x+t}g(t)\,dt+x$ を満たす $g(x)$ を求めよ。 [2008]

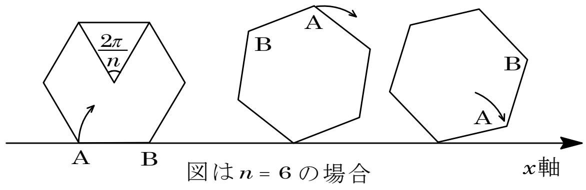
**9** (1) 整数 $m,\,n$ に対して積分 $I_{m,\,n}=\displaystyle\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ。

(2) 自然数 $n$ に対して積分 $J_n=\displaystyle\int_0^{2\pi}\Big(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\Big)^2dx$ を求めよ。 [2006]

**10**　半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形が $xy$ 平面上にある。ひとつの辺 AB が $x$ 軸含まれている状態から始めて，正 $n$ 角形を図のように $x$ 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が $x$ 軸に含まれる状態まで続ける。点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

(1)　$L(6)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ。




[2003]

**11**　$f(x)$ を微分可能な関数とする。

(1)　$n$ を自然数とするとき，等式 $\displaystyle\frac{1}{x-1}\int_1^x f(t)\,dt = x^n$ $(x \neq 1)$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　任意の実数 $x$, $a$ に対して，等式 $\displaystyle\frac{1}{x-a}\int_a^x f(t)\,dt = \frac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}$ $(x \neq a)$ を満たし，かつ条件 $f(0)=1$ および $f'(0)=2$ を満たす関数 $f(x)$ を求めよ。　[2002]

**12**　次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $Ae^x - x = 0$ が $0<x<3$ の範囲で異なる 2 つの解をもつための実数 $A$ の範囲を求めよ。ただし $e=2.71\cdots$ は自然対数の底である。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t\,dt$ の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\log f(x) = x - 3 + 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$，$f(0)<1$ を満たす関数 $f(x)$ が 2 つ存在することを示せ。ただし, log は自然対数とする。　[2000]

**13**　$f(x)$ を周期 1 の周期関数とする。すなわち $f(x+1)=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。$a$ を実数とし，$\displaystyle p=\int_0^1 e^{ax} f(x)\,dx$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$n$ を自然数とするとき，$\displaystyle\int_n^{n+1} e^{ax} f(x)\,dx$ を $p$ を用いて表せ。

(2)　$n$ を自然数とするとき，$\displaystyle\int_0^n e^{ax} f(x)\,dx$ を $p$ を用いて表せ。

(3)　周期 1 の周期関数 $f(x)$ が $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) = -\left|x-\frac{1}{2}\right| + \frac{3}{2}$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x} f(x)\,dx$ を求めよ。　[1999]

## ■ 積分の応用

**1**　$a$ と $b$ を正の実数とする。$y = a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを $C_1$，$y = b\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを $C_2$ とし，$C_1$ と $C_2$ の交点を P とする。

(1)　P の $x$ 座標を $t$ とする。このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を $a$ と $b$ で表せ。

(2)　$C_1$，$C_2$ と $y$ 軸で囲まれた領域の面積 $S$ を $a$ と $b$ で表せ。

(3)　$C_1$，$C_2$ と直線 $x = \dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を $T$ とする。このとき，$T = 2S$ となるための条件を $a$ と $b$ で表せ。　[2013]

**2**　$a$ を正の実数とし，2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1)　$C_1$ と $C_2$ の両方に接する直線 $l$ の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 $C_1$，$C_2$ と直線 $l$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

**3**　$xy$ 平面上の曲線 $y = xe^x$ と $x$ 軸および 2 直線 $x = n$，$x = n+1$ で囲まれる図形を $D_n$ とする。ただし，$n$ を自然数とする。

(1)　図形 $D_n$ の面積を $S_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ。

(2)　図形 $D_n$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ。　[2007]

**4**　$a$, $b$ を正の実数とする。空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ a,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を $l$ とする。直線 $l$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を $M$ とする。

(1)　$x$ 座標の値が $t$ であるような直線 $l$ 上の点 P の座標を求めよ。

(2)　図形 $M$ と $xy$ 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3)　図形 $M$ と 2 つの平面 $x = 0$ と $x = 1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。　[2004]

**5**　曲線 $y=x^2\ (0\leqq x\leqq 1)$ を $y$ 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t=0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 $t$ において容器に残っている水の深さを $h$, 体積を $V$ とする。$V$ の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt}=-\sqrt{h}$ で与えられる。

(1)　水深 $h$ の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を $h$ を用いて表せ。

(2)　容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 $T$ を求めよ。　[2003]

**6**　関数 $y=\sqrt{1-(\log x)^2}\ \left(\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq e\right)$ のグラフを $C$ とする。次の問いに答えよ。ただし, 対数は自然対数とし, $e$ はその底とする。

(1)　$C$ 上の点 A における $C$ の接線が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通るものとする。このとき, 点 A の $x$ 座標を求めよ。

(2)　$C$ と $x$ 軸で囲まれた図形を, $x$ 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。　[1998]

# 分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量

ベクトル／整数と数列／確　率

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

## 問　題

座標平面上の 3 点 A$(1,\ 0)$，B$(3,\ 1)$，C$(2,\ 2)$を頂点とする△ABC の内部および境界を $T$ とおく。実数 $a$ に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\leqq a$ を満たす座標平面上の点 P の全体を $D$ とする。ただし，AP は点 A と点 P の距離を表す。

(1) $D$ が少なくとも 1 つの点 P を含むような $a$ の値の範囲を求めよ。

(2) $D$ が $T$ を含むような $a$ の値の範囲を求めよ。

(3) (1)のもとで，$D$ が $T$ に含まれるような $a$ の値の範囲を求めよ。　　[2017]

## 解答例

(1) 3 点 A$(1,\ 0)$，B$(3,\ 1)$，C$(2,\ 2)$に対して，条件 $\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2\leqq a$ を満たす点 P$(x,\ y)$ 全体を $D$ とすると，

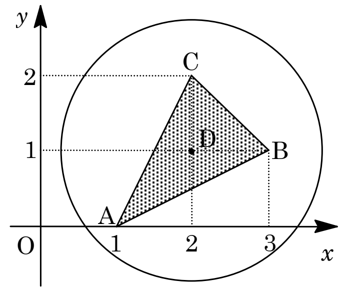
$$(x-1)^2+y^2+(x-3)^2+(y-1)^2+(x-2)^2+(y-2)^2\leqq a$$

$$3x^2+3y^2-12x-6y\leqq a-19,\ x^2+y^2-4x-2y\leqq\frac{a-19}{3}$$

変形すると，$D:(x-2)^2+(y-1)^2\leqq\dfrac{a-4}{3}$ ………①

すると，$D$ が少なくとも 1 つの点 P を含むような $a$ の値の範囲は，$\dfrac{a-4}{3}\geqq 0$ より $a\geqq 4$ である。

(2) △ABC の内部および境界 $T$ を図示すると，右図の網点部となる。また，$a\geqq 4$ のとき，①から $D$ は中心 D$(2,\ 1)$ で半径 $\sqrt{\dfrac{a-4}{3}}$ の内部または周上である。

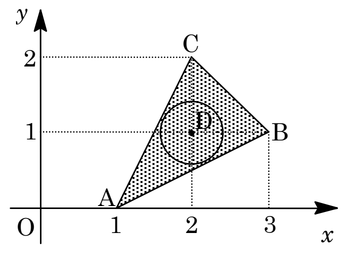



すると，$D$ が $T$ を含む条件は，$\mathrm{AD}=\sqrt{2}$，$\mathrm{BD}=1$，$\mathrm{CD}=1$ より，

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\geqq\sqrt{2},\ a\geqq 10$$

(3) 点 D と直線 AB, BC, CA の距離をそれぞれ $d_1$，$d_2$，$d_3$ とおく。このとき，AB : $x-2y-1=0$ より，

$$d_1=\frac{|2-2-1|}{\sqrt{1+4}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$




また，対称性より，$d_2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$d_3=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ となる。

すると，$a\geqq 4$ のとき $D$ が $T$ に含まれる条件は，

$$\sqrt{\frac{a-4}{3}}\leqq\frac{1}{\sqrt{5}},\ 0\leqq a-4\leqq\frac{3}{5},\ 4\leqq a\leqq\frac{23}{5}$$

## コメント

領域が題材の基本題です。図形に対称性が設定されているので，計算も簡単です。

## 問　題

実数 $x,\ y,\ s,\ t$ に対し，$z=x+yi$，$w=s+ti$ とおいたとき，$z=\dfrac{w-1}{w+1}$ を満たすとする。ただし，$i$ は虚数単位である。

(1) $w$ を $z$ で表し，$s,\ t$ を $x,\ y$ で表せ。

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ となるような $(x,\ y)$ の範囲 $D$ を座標平面上に図示せよ。

(3) 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $D$ を動いたとき，$-5x+y$ の最小値を求めよ。 [2013]

## 解答例

(1) $z=\dfrac{w-1}{w+1}$ より，$z(w+1)=w-1$ から，$(z-1)w=-z-1$ ………①

$z=1$ のとき①は成立しないので，$z\neq 1$ となり，$w=\dfrac{-z-1}{z-1}$ ………②

ここで，$z=x+yi$，$w=s+ti$ より，②から，

$$s+ti=\frac{-(x+1)-yi}{(x-1)+yi}=\frac{\{-(x+1)-yi\}\{(x-1)-yi\}}{(x-1)^2+y^2}=\frac{-(x^2-1)-y^2+2yi}{(x-1)^2+y^2}$$

よって，$s=\dfrac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}$ ……③，$t=\dfrac{2y}{(x-1)^2+y^2}$ ……④

(2) $0\leqq s\leqq 1$ かつ $0\leqq t\leqq 1$ より，③④から，

$$0\leqq\frac{-x^2-y^2+1}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad 0\leqq\frac{2y}{(x-1)^2+y^2}\leqq 1\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$0\leqq -x^2-y^2+1$ となり，$x^2+y^2\leqq 1$ ………⑦

また，$-x^2-y^2+1\leqq (x-1)^2+y^2$ となり，$x^2+y^2-x\geqq 0$

$$\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2\geqq\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑥より，$0\leqq 2y$ となり，$y\geqq 0$ ………⑨

また，$2y\leqq (x-1)^2+y^2$ となり，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 1$ ………⑩

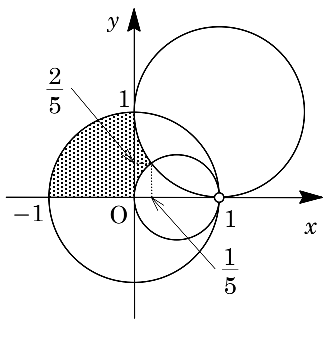
なお，⑧の境界線 $x^2+y^2-x=0$ と，⑩の境界線 $x^2+y^2-2x-2y+1=0$ の点 $(1,\ 0)$ 以外の交点は，両式を連立して，

$$-x-2y+1=0,\ x=-2y+1$$

すると，$(-2y+1)^2+y^2-(-2y+1)=0$ から，

$$5y^2-2y=0$$

よって，$y=\dfrac{2}{5}$，$x=-2\cdot\dfrac{2}{5}+1=\dfrac{1}{5}$




$z\neq 1$ のもとで，⑦～⑩より，求める範囲 $D$ は右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

(3)　$-5x+y=k$ とおくと，$y=5x+k$ から，傾き 5 で $y$ 切片 $k$ の直線を表す。

すると，$k$ が最小となるのは，(2)の図を利用すると，この直線が点$\left(\frac{1}{5},\ \frac{2}{5}\right)$を通るときであり，その最小値は，

$$k=-5\cdot\frac{1}{5}+\frac{2}{5}=-\frac{3}{5}$$

**コメント**

複素数が題材ですが，内容的には $xy$ 平面での不等式と領域の問題です。

## 問　題

実数 $a, b$ に対して，$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ とおく。

(1)　$a\neq b$ のとき，$f(c)=g(c)$ を満たす実数 $c$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた $c$ について，$a$, $b$ が条件 $a<c<b$ を満たすとする。このとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を $a, b$ を用いて表せ。

(3)　一般に $a<b$ のとき，連立不等式 $f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつための必要十分条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を $ab$ 平面上に図示せよ。[2012]

## 解答例

(1)　$f(x)=x^2-2ax+b$，$g(x)=x^2-2bx+a$ に対して，$f(c)=g(c)$ より，

$$c^2-2ac+b=c^2-2bc+a,\quad 2(a-b)c=-a+b$$

$a\neq b$ より，$c=-\dfrac{1}{2}$

(2)　$f(x)=(x-a)^2-a^2+b$ より，$f(x)<0$ が解をもつ条件は，$-a^2+b<0$ ……①であり，このとき，$f(x)=0$ の解を $x=\alpha$，$\beta$ $(\alpha<a<\beta)$ とおくと，$f(x)<0$ の解は，$\alpha<x<\beta$ となる。

$g(x)=(x-b)^2-b^2+a$ より，$g(x)<0$ が解をもつ条件は，$-b^2+a<0$ ……②であり，このとき，$g(x)=0$ の解を $x=\gamma$，$\delta$ $(\gamma<b<\delta)$ とおくと，$g(x)<0$ の解は，$\gamma<x<\delta$ となる。

さて，$a<-\dfrac{1}{2}<b$ のとき，$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=g\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}+a+b$ であり，①②のもとで，

(i)　$\dfrac{1}{4}+a+b>0$ のとき

$\alpha<a<\beta<-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}<\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(ii)　$\dfrac{1}{4}+a+b=0$ のとき

$\alpha<a<\beta=-\dfrac{1}{2}$，$-\dfrac{1}{2}=\gamma<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもたない。

(iii)　$\dfrac{1}{4}+a+b<0$ のとき

$\alpha<a<-\dfrac{1}{2}<\beta$，$\gamma<-\dfrac{1}{2}<b<\delta$ となり，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ は解をもち，その解は $\gamma<x<\beta$ である。

(i)～(iii)より，求める条件は，$\dfrac{1}{4}+a+b<0$ である。

(3)　$a<b$ のとき，$f(x)<0$ かつ $g(x)<0$ が解をもつ条件は，

(i)　$a<-\dfrac{1}{2}<b$ のとき　(2)より，$\dfrac{1}{4}+a+b<0$

(ii)　$-\frac{1}{2} \leqq a < b$ のとき

まず，①より，$b < a^2$ が必要である。逆に，このとき，

$$f(a)-g(a) = -a^2+b-(a^2-2ab+a) = 2a(-a+b)+b-a$$
$$= (b-a)(2a+1) \geqq 0$$

これより，$g(a) \leqq f(a) < 0$ となり，$f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ は，解 $x = a$ をもつ。

よって，求める条件は，$b < a^2$ である。

(iii)　$a < b \leqq -\frac{1}{2}$ のとき

まず，②より，$a < b^2$ が必要である。逆に，このとき，

$$g(b)-f(b) = -b^2+a-(b^2-2ab+b) = 2b(-b+a)+a-b$$
$$= (a-b)(2b+1) \geqq 0$$

これより，$f(b) \leqq g(b) < 0$ となり，$f(x) < 0$ かつ $g(x) < 0$ は，解 $x = b$ をもつ。

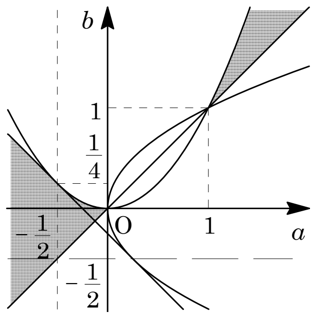
よって，求める条件は，$a < b^2$ である。

(i)(ii)(iii)より，求める条件は，

$$\frac{1}{4}+a+b < 0 \quad \left(a < -\frac{1}{2} < b\right)$$

$$b < a^2 \quad \left(-\frac{1}{2} \leqq a < b\right)$$

$$a < b^2 \quad \left(a < b \leqq -\frac{1}{2}\right)$$




図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

## コメント

$f(x)$ と $g(x)$ のグラフをかき，結論を図から判断して解答例を記述しています。この図は省いていますが，方針を立てるうえでは最も重要なものです。

## 問　題

実数 $x$ に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 $k$ を $[x]$ で表す。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$ である。

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす整数 $n$ をすべて求めよ。

(2) $[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ を満たす実数 $x$ の範囲を求めよ。

(3) $x$ は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ を満たす $x$ をすべて求めよ。　[2011]

## 解答例

(1) $n^2-n-\dfrac{5}{4}<0$ ……①より，$\dfrac{1-\sqrt{6}}{2}<n<\dfrac{1+\sqrt{6}}{2}$ となり，$2<\sqrt{6}<3$ から，

$$-1<\frac{1-\sqrt{6}}{2}<-\frac{1}{2},\ \ \frac{3}{2}<\frac{1+\sqrt{6}}{2}<2$$

よって，①を満たす整数 $n$ は，$n=0,\ 1$

(2) $[x]=n$ とおくと，$[x]^2-[x]-\dfrac{5}{4}<0$ は①と一致するので, (1)より，$[x]=0,\ 1$

よって，$0\leqq x<2$

(3) $0\leqq x<2$ のとき，$x^2-[x]-\dfrac{5}{4}=0$ ……②に対して，

(i) $[x]=0$ $(0\leqq x<1)$ のとき

②より，$x^2-\dfrac{5}{4}=0$ となるが，$0\leqq x<1$ から解なし。

(ii) $[x]=1$ $(1\leqq x<2)$ のとき

②より，$x^2-\dfrac{9}{4}=0$ となり，$1\leqq x<2$ から，$x=\dfrac{3}{2}$

(i)(ii)より，$x=\dfrac{3}{2}$

## コメント

ガウス記号を題材としていますが，内容は与えられた定義の理解を問うものです。

## 問　題

$t>0$ とし，$x=t$ で表される直線を $l_1$ とする。$y=\dfrac{x^2}{4}$ で表される放物線を $C$ とおく。$C$ と $l_1$ の共有点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における $C$ の接線を $l_2$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

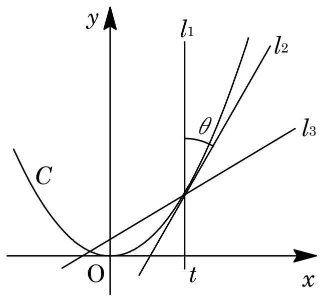
(1) $l_1$ と $l_2$ のなす角を $\theta$ とするとき，$\cos\theta$ を求めよ。ただし，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。

(2) $l_1$ を $l_2$ に関して対称移動させた直線を $l_3$ とおくとき，$l_3$ の方程式を求めよ。

(3) $l_3$ は $t$ によらない定点を通ることを示せ。

(4) $l_3$ と $C$ の 2 つの共有点を P，Q とする。線分 PQ の長さが最小になるような $t$ の値を求めよ。　[2009]

## 解答例




(1) まず，$l_1 : x=t$ の方向ベクトル $\overrightarrow{u_1}$ は，$\overrightarrow{u_1}=(0,\ 1)$ とおくことができる。

また，$C : y=\dfrac{x^2}{4}$ ……①より $y'=\dfrac{x}{2}$ となるので，点 $\left(t,\ \dfrac{t^2}{4}\right)$ における接線 $l_2$ の方向ベクトル $\overrightarrow{u_2}$ は，$\left(1,\ \dfrac{t}{2}\right)=\dfrac{1}{2}(2,\ t)$ から，$\overrightarrow{u_2}=(2,\ t)$ とおける。

すると，$l_1$ と $l_2$ のなす角 $\theta$ は，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u_1}\cdot\overrightarrow{u_2}}{|\overrightarrow{u_1}||\overrightarrow{u_2}|}=\frac{t}{1\times\sqrt{4+t^2}}=\frac{t}{\sqrt{4+t^2}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2) 直線 $l_3$ の方向ベクトル $\overrightarrow{u_3}$ を，$\overrightarrow{u_3}=(1,\ m)$ とおくと，$l_2$ と $l_3$ のなす角が $\theta$ より，

$$\cos\theta=\frac{\overrightarrow{u_2}\cdot\overrightarrow{u_3}}{|\overrightarrow{u_2}||\overrightarrow{u_3}|}=\frac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\dfrac{t}{\sqrt{4+t^2}}=\dfrac{2+tm}{\sqrt{4+t^2}\sqrt{1+m^2}}$，$t^2(1+m^2)=(2+tm)^2$ となり，

$$4tm=t^2-4,\quad m=\frac{t^2-4}{4t}\ \cdots\cdots\cdots④$$

よって，$l_3$ の方程式は，$y-\dfrac{t^2}{4}=\dfrac{t^2-4}{4t}(x-t)$，$y=\dfrac{t^2-4}{4t}x+1\ \cdots\cdots\cdots⑤$

(3) ⑤より，$l_3$ は $t$ の値によらず，点 $(0,\ 1)$ を通る。

(4) ④⑤より，$l_3$ は $y=mx+1$ ……⑥と表せ，①と連立して，

$$\frac{x^2}{4}-mx-1=0,\quad x^2-4mx-4=0\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦は異なる 2 つの実数解をもち，これを$x=\alpha$，$\beta$とおく。すると，$l_3$と $C$ の 2 つの共有点は，$\mathrm{P}(\alpha,\ m\alpha+1)$，$\mathrm{Q}(\beta,\ m\beta+1)$と表され，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(\alpha-\beta)^2+(m\alpha+1-m\beta-1)^2=(1+m^2)(\alpha-\beta)^2\\&=(1+m^2)\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\}=(1+m^2)\{(4m)^2+16\}=16(1+m^2)^2\end{aligned}$$

これより，線分 PQ の長さが最小になるのは$m=0$のとき，すなわち $t>0$ に注意すると，④から$t=2$の場合である。

## コメント

いろいろな解法が考えられる問題です。(4)では，(3)の結果を用いて，$l_3$の式をいったんリセットしています。

## 問　題

$\alpha$，$\beta$を$0<\alpha<\beta<2$を満たす実数とし，$0\leqq x\leqq 2$の範囲で定義された関数$f(x)$を，$f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$とする。

(1)　$f(x)$の最大値を$M$とする。$f(x)=M$となる$x$がちょうど3つあるとき，実数$\alpha$，$\beta$と$M$の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた$\alpha$，$\beta$について，$f(x)-mx=0$が異なる3つの解をもつような実数$m$の値の範囲を求めよ。　[2008]

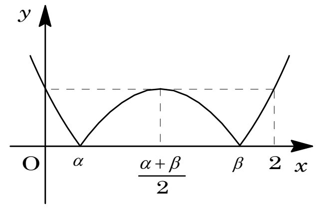
## 解答例

(1)　$f(x)=|(x-\alpha)(x-\beta)|$に対し，次の区間における$f(x)$の最大値$M$を考えると，

$0\leqq x\leqq\alpha$における最大値は，$M=f(0)=\alpha\beta$

$\alpha\leqq x\leqq\beta$における最大値は，

$$M=f\Big(\frac{\alpha+\beta}{2}\Big)=\Big|\frac{\beta-\alpha}{2}\cdot\frac{\alpha-\beta}{2}\Big|=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}$$




$\beta\leqq x\leqq 2$における最大値は，

$$M=f(2)=(2-\alpha)(2-\beta)$$

これより，$0\leqq x\leqq 2$において，$f(x)=M$となる$x$がちょうど3つある条件は，

$$\alpha\beta=\frac{(\beta-\alpha)^2}{4}\cdots\cdots\text{①},\quad \alpha\beta=(2-\alpha)(2-\beta)\cdots\cdots\text{②}$$

①より，$\alpha^2-6\alpha\beta+\beta^2=0$，$(\alpha+\beta)^2-8\alpha\beta=0\cdots\cdots$③

②より，$4-2\alpha-2\beta=0$，$\alpha+\beta=2\cdots\cdots$④

③④から$\alpha\beta=\frac{1}{2}\cdots\cdots$⑤

④⑤より，$\alpha$，$\beta$は2次方程式$t^2-2t+\frac{1}{2}=0$の2つの解より，$t=\frac{2\pm\sqrt{2}}{2}$であり，$0<\alpha<\beta<2$から，

$$\alpha=\frac{2-\sqrt{2}}{2},\quad \beta=\frac{2+\sqrt{2}}{2},\quad M=\alpha\beta=\frac{1}{2}$$

(2)　$f(x)-mx=0$が異なる3つの解をもつ条件は，$y=f(x)$のグラフと直線$y=mx$が異なる3つの共有点をもつことである。

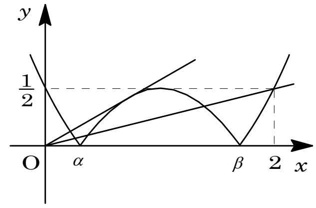
まず，$\alpha\leqq x\leqq\beta$において，④⑤より，

$$f(x)=-(x-\alpha)(x-\beta)=-x^2+(\alpha+\beta)x-\alpha\beta=-x^2+2x-\frac{1}{2}$$

そこで，$y=f(x)$と$y=mx$の共有点の条件は，

$$-x^2+2x-\frac{1}{2}=mx,\quad x^2+(m-2)x+\frac{1}{2}=0$$

重解をもつことより，$D=(m-2)^2-2=0$となり，右図から，$m=2-\sqrt{2}$



また，直線 $y = mx$ が点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ を通るとき，$m = \dfrac{1}{4}$ である。

よって，求める $m$ の範囲は，右図より，$\dfrac{1}{4} < m < 2 - \sqrt{2}$ である。

## コメント

絶対値つきの関数を題材にした文系風の頻出問題です。

## 問　題

実数 $x, y, z$ は $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ かつ $4x+3y+2z=1$ を満たすとする。

(1)　$x$ の最大値と $y$ の最小値を求めよ。

(2)　$3x-y+z$ の値の範囲を求めよ。　[2006]

## 解答例

(1)　条件より, $x \leqq y \leqq z \leqq 1$ ……①, $4x+3y+2z=1$ ……②に対して,

②から $z=-2x-\dfrac{3}{2}y+\dfrac{1}{2}$ となり，①に代入すると，

$$x \leqq y \cdots\cdots③,\quad y \leqq -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \cdots\cdots④,\quad -2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2} \leqq 1 \cdots\cdots⑤$$

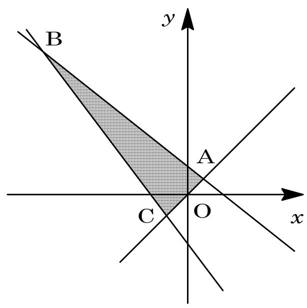
すると，④より $y \leqq -\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}$，⑤より $y \geqq -\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ となる。

③④の境界線の交点を A とすると，$x=-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}$ から，$x=\dfrac{1}{9}$，$y=\dfrac{1}{9}$

④⑤の境界線の交点を B とすると，$-\dfrac{4}{5}x+\dfrac{1}{5}=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ から，$x=-1$，$y=1$

③⑤の境界線の交点を C とすると，$x=-\dfrac{4}{3}x-\dfrac{1}{3}$ から，$x=-\dfrac{1}{7}$，$y=-\dfrac{1}{7}$

よって，③④⑤を満たす領域は右図の網点部となり，$x$ の最大値は点 A の $x$ 座標から $\dfrac{1}{9}$，$y$ の最小値は点 C の $y$ 座標より $-\dfrac{1}{7}$ である。




(2)　$P=3x-y+z$ とおくと，②より，

$$P=3x-y-2x-\frac{3}{2}y+\frac{1}{2}=x-\frac{5}{2}y+\frac{1}{2}$$

これより，$y=\dfrac{2}{5}x+\dfrac{1}{5}-\dfrac{2}{5}P$ となり，傾き $\dfrac{2}{5}$ の直線群を表す。

よって，点 B を通るとき $P$ は最小となり，最小値は,

$$P=-1-\frac{5}{2}+\frac{1}{2}=-3$$

また，点 C を通るとき, $P$ は最大となり，最大値は,

$$P=-\frac{1}{7}+\frac{5}{14}+\frac{1}{2}=\frac{5}{7}$$

以上より，$-3 \leqq 3x-y+z \leqq \dfrac{5}{7}$ である。

## コメント

(1)の問題文で示唆されているように，$z$ を消去すれば，領域と最大・最小の典型題となります。

## 問　題

$xy$ 平面上の放物線 $A: y = x^2$, $B: y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, $b$ を $a$ で表せ。

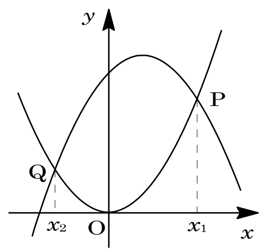
(2)　$x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら $a$, $b$ が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ を満たしながら $a$, $b$ が変化するとき, 線分 PQ の中点の $y$ 座標の最小値を求めよ。　[2003]

## 解答例

(1)　$A: y = x^2$ ……①, $B: y = -(x-a)^2 + b$ ……②の交点は,

$$x^2 = -(x-a)^2 + b,\ 2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0 \text{ ………③}$$




よって, $D/4 = a^2 - 2(a^2 - b) = -a^2 + 2b > 0$ のもとで, ③の解が $x_1$, $x_2$ $(x_1 > x_2)$ より,

$$x_1 + x_2 = a,\ x_1 x_2 = \frac{a^2 - b}{2} \text{ ………④}$$

条件より, $x_1 - x_2 = 2$ なので, $\sqrt{(x_1 + x_2)^2 - 4x_1 x_2} = 2$

④より, $\sqrt{-a^2 + 2b} = 2$, $-a^2 + 2b = 4$, $b = \dfrac{1}{2}a^2 + 2$ ………⑤

(2)　$\mathrm{P}(x_1,\ x_1^2)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ x_2^2)$ から, 直線 PQ は, 傾きが $\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$ なので,

$$y - x_1^2 = (x_1 + x_2)(x - x_1),\ y = (x_1 + x_2)x - x_1 x_2$$

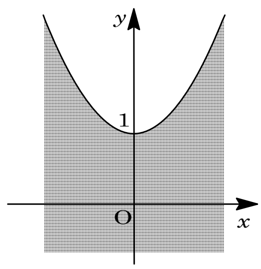
④⑤より, 直線 PQ は, $y = ax - \dfrac{a^2 - b}{2} = ax - \dfrac{a^2 - 4}{4}$ ……⑥となる。

ここで, 直線 PQ が通過する領域は, ⑥を $a$ についての方程式としてみたとき, 実数解をもつ条件として表される。

$$4y = 4ax - a^2 + 4,\ a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$$

よって, $D/4 = 4x^2 - (4y - 4) \geqq 0$ から, $y \leqq x^2 + 1$

この領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。




(3)　④より, $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2 = (x_1 - x_2)^2 + (x_1^2 - x_2^2)^2$

$$= (x_1 - x_2)^2\left\{1 + (x_1 + x_2)^2\right\} = (-a^2 + 2b)(1 + a^2)$$

$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}| = 2$ より, $(-a^2 + 2b)(1 + a^2) = 4$, $b = \dfrac{1}{2}a^2 + \dfrac{2}{a^2 + 1}$ ………⑦

ここで，PQ の中点の $y$ 座標は，$y=\dfrac{x_1^{\ 2}+x_2^{\ 2}}{2}=\dfrac{(x_1+x_2)^2-2x_1x_2}{2}$ であり，④を用いると，$y=\dfrac{a^2}{2}-\dfrac{a^2-b}{2}=\dfrac{b}{2}$ となるので，⑦より，

$$y=\frac{1}{4}a^2+\frac{1}{a^2+1}=\frac{1}{4}(a^2+1)+\frac{1}{a^2+1}-\frac{1}{4}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}}-\frac{1}{4}=\frac{3}{4}$$

等号は $\dfrac{1}{4}(a^2+1)=\dfrac{1}{a^2+1}$ のとき，すなわち $(a^2+1)^2=4$，$a=\pm1$ で成立する。

よって，線分 PQ の中点の $y$ 座標の最小値は $\dfrac{3}{4}$ である。

**コメント**

有名な直線の通過領域の問題です。$a$ の範囲に制限がないため，実数解条件だけで一件落着です。(3)は，相加・相乗平均の関係を利用します。

## 問　題

不等式$\cos 2x + cx^2 \geqq 1$がすべての $x$ について成り立つような定数 $c$ の値の範囲を求めよ。 [2001]

## 解答例

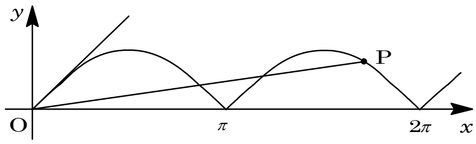
不等式$\cos 2x + cx^2 \geqq 1$……①がすべての$x$について成り立つ条件は,

(i)　$x = 0$ のとき　①は$1 + c \times 0 \geqq 1$となるので, 任意の$c$で成立する。

(ii)　$x \neq 0$ のとき　①より, $c \geqq \dfrac{1-\cos 2x}{x^2}$………②

ここで, $f(x) = \dfrac{1-\cos 2x}{x^2} = \dfrac{2\sin^2 x}{x^2} = 2\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2 = 2\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|^2$ は, $f(-x) = f(x)$ なので, $x > 0$ としても一般性を失わない。

さて, 曲線 $y = |\sin x|$ $(x > 0)$ 上の任意の点を$\mathrm{P}(x,\ |\sin x|)$ とおくとき, $\left|\dfrac{\sin x}{x}\right|$ は直線 OP の傾きとなる。




ここで, $\displaystyle\lim_{x \to +0}\left|\frac{\sin x}{x}\right| = 1$ となるので, $0 \leqq \left|\dfrac{\sin x}{x}\right| < 1$

これより, $0 \leqq f(x) < 2$ となる。

よって, どんな$x$に対しても②が成立するのは, $c \geqq 2$のときである。

(i)(ii)より, 求める$c$の範囲は$c \geqq 2$である。

## コメント

定数を分離したあと, 分数関数のとる値の範囲を直線の傾きで考えるという有名なテクニックを用いました。

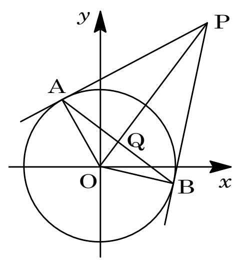
## 問　題

$xy$ 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き，その接点を A, B とし，線分 AB の中点を Q とする。

(1)　点 Q の座標を $a$, $b$ を用いて表せ。

(2)　点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ の上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　[2001]

## 解答例




(1)　$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}$ より，AB の中点 Q は直線 AB と OP の交点となり，しかも $\mathrm{OP}\perp\mathrm{AB}$ である。

すると，$\triangle\mathrm{OAQ}\backsim\triangle\mathrm{OPA}$ より，$\mathrm{OQ}:\mathrm{OA}=\mathrm{OA}:\mathrm{OP}$ となるので，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=\mathrm{OA}^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}\ (k>0)$ より，

$$x=ka,\quad y=kb\cdots\cdots\cdots②$$

①から，$\sqrt{a^2+b^2}\sqrt{x^2+y^2}=1$，$(a^2+b^2)(x^2+y^2)=1\cdots\cdots\cdots③$

②を③に代入して，$k^2(a^2+b^2)=1$，$k>0$ より $k=\dfrac{1}{a^2+b^2}$

②より，$x=\dfrac{a}{a^2+b^2}$，$y=\dfrac{b}{a^2+b^2}\cdots\cdots④$なので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a}{a^2+b^2},\ \dfrac{b}{a^2+b^2}\right)$

(2)　③④より，$a=(a^2+b^2)x=\dfrac{x}{x^2+y^2}\cdots\cdots\cdots⑤$

$$b=(a^2+b^2)y=\frac{y}{x^2+y^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

条件より $\mathrm{P}(a,\ b)$ が $(x-3)^2+y^2=1$ 上を動くので，

$$(a-3)^2+b^2=1\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤⑥を⑦に代入して，$\left(\dfrac{x}{x^2+y^2}-3\right)^2+\left(\dfrac{y}{x^2+y^2}\right)^2=1$

$$\{x-3(x^2+y^2)\}^2+y^2=(x^2+y^2)^2$$

$$x^2-6x(x^2+y^2)+8(x^2+y^2)^2+y^2=0$$

$x^2+y^2\neq0$ より，$1-6x+8(x^2+y^2)=0$

よって，$x^2+y^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$（この式は $x^2+y^2\neq0$ を満たす）

以上より，点 Q は円 $x^2+y^2-\dfrac{3}{4}x+\dfrac{1}{8}=0$ を描く。

## コメント

有名問題です。そして，①の式を導くには，経験が必要となります。

## 問　題

(1)　次の不等式の表す領域 $D$ を図示せよ。$|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$

(2)　点 A を $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 $D$ の点とする。点 P が $D$ を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　領域 $D$ の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。　[2000]

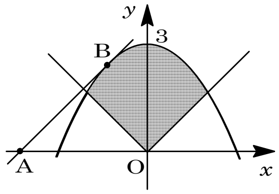
## 解答例

(1)　$y=|x|$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ ……①を連立して，$y=-\dfrac{1}{2}y^2+3$，$y^2+2y-6=0$

$y\geqq 0$ より $y=-1+\sqrt{7}$ となり，このとき $x=\pm(-1+\sqrt{7})$

よって，2 交点 $\left(\pm(-1+\sqrt{7}),\ -1+\sqrt{7}\right)$ となる。

これより，不等式 $|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$ の表す領域 $D$ は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。




(2)　点 $A\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線は，$y=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ………②

①②が接する条件は，$-\dfrac{1}{2}x^2+3=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$，$x^2+2mx+7m-6=0$ ………③

$$D/4=m^2-(7m-6)=0,\ m=1,\ 6$$

ここで，接点の $x$ 座標は③より $x=-m$ となるので，$m=1$ である。

このとき，$B\left(-1,\ \dfrac{5}{2}\right)$ となり，$AB=\sqrt{\left(-1+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

さて，直線 AB と直線 $y=x$ は平行なので，点 P が $y=x$ 上にあるとき，△ABP の面積は最大となる。

直線 AB と直線 $y=x$ との距離は，$\dfrac{7}{2}\cos 45^\circ=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，△ABP の面積の最大値は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{4}=\dfrac{35}{8}$ である。

(3)　$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}=k$ とおくと，$y=k\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ……④となり，点 A を通り傾き $k$ の直線を表す。すると，$k$ のとる範囲は，④と領域 $D$ が共有点をもつ条件より求まるので，(2)から $0\leqq k\leqq 1$ となる。

## コメント

(2)が(3)の誘導となっており，(3)では計算の必要がありません。

## 問　題

$xy$ 平面上の 2 直線 $L_1$，$L_2$ を，$L_1 : y=0$ （$x$ 軸），$L_2 : y=\sqrt{3}x$ で定める。P を $xy$ 平面上の点とする。直線 $L_1$ に関して P と対称な点を Q, 直線 $L_2$ に関して P と対称な点を R とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) P の座標を $(a,\ b)$ とするとき, R の座標を $a, b$ を用いて表せ。

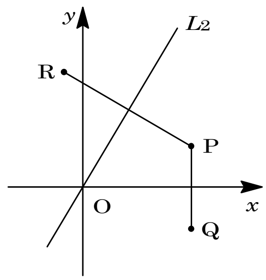
(2) 2 点 Q, R の距離が 2 になるような P の軌跡 $C$ を求めよ。

(3) 点 P が $C$ 上を動くとき，三角形 PQR の面積の最大値とそれを与える P の座標を求めよ。 [1999]

## 解答例

(1) $L_2$ の法線ベクトルを $\vec{n}=(-\sqrt{3},\ 1)$ とすることができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+k\vec{n}=(a-\sqrt{3}k,\ b+k)\cdots\cdots\cdots①$$




PR の中点が直線 $L_2 : y=\sqrt{3}x$ 上にあるので,

$$\frac{b+(b+k)}{2}=\sqrt{3}\cdot\frac{a+(a-\sqrt{3}k)}{2}$$

$$2b+k=2\sqrt{3}a-3k,\quad k=\frac{1}{2}(\sqrt{3}a-b)$$

①に代入し，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\left(-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)$

よって，$\mathrm{R}\left(-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b,\ \frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b\right)$

(2) $\mathrm{Q}(a,\ -b)$ で，条件より $\mathrm{QR}=2$ なので，

$$\left(-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b-a\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a+\frac{1}{2}b+b\right)^2=4$$

$$\frac{3}{4}\left\{(-\sqrt{3}a+b)^2+(a+\sqrt{3}b)^2\right\}=4$$

まとめると，$a^2+b^2=\frac{4}{3}$ より，点 P は円 $x^2+y^2=\frac{4}{3}$ を描く。

(3) △PQR の面積を $S$ として，$S=\frac{1}{2}\cdot|2b|\cdot\left|-\frac{1}{2}a+\frac{\sqrt{3}}{2}b-a\right|=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|b(-\sqrt{3}a+b)\right|$

(2)より，$a=\frac{2}{\sqrt{3}}\cos\theta$，$b=\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta$ とおくことができるので，

$$S=\frac{\sqrt{3}}{2}\left|\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\left(-2\cos\theta+\frac{2}{\sqrt{3}}\sin\theta\right)\right|=\frac{2}{\sqrt{3}}\left|\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|1-(\sqrt{3}\sin 2\theta+\cos 2\theta)\right|=\frac{1}{\sqrt{3}}\left|1-2\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)\right|$$

よって，$\sin\left(2\theta+\frac{\pi}{6}\right)=-1$ のとき, $S$ は最大値 $\frac{3}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}$ をとる。

このとき, $n$ を整数として，$2\theta+\frac{\pi}{6}=2n\pi+\frac{3}{2}\pi$，$\theta=n\pi+\frac{2}{3}\pi$

よって，$(a,\ b)=\dfrac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\dfrac{2}{3}\pi,\ \sin\dfrac{2}{3}\pi\right)=\left(-\dfrac{1}{\sqrt{3}},\ 1\right)$

$$(a,\ b)=\frac{2}{\sqrt{3}}\left(\cos\frac{5}{3}\pi,\ \sin\frac{5}{3}\pi\right)=\left(\frac{1}{\sqrt{3}},\ -1\right)$$

## コメント

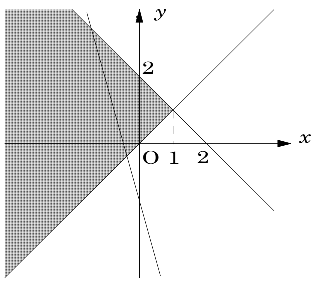
問題の流れに乗っていけば，(3)の結論まで到達できます。特別な技法などは必要ありません。

## 問　題

次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような点$(a,\ b)$の集合を式で表し，図示せよ。

$$x-y<0,\ \ x+y<2,\ \ ax+by<1$$ [1998]

## 解答例




$x-y<0$ ………①

$x+y<2$ ………②

$ax+by<1$ ………③

①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③に$(x,\ y)=(0,\ 0)$を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，直線$ax+by=1$……④を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線$x-y=0$と④との交点は，

$$(a+b)x=1,\ \ x=\frac{1}{a+b}\ \ (a\neq -b)$$

また，直線$x+y=2$と④との交点は，

$$ax+b(2-x)=1,\ \ x=\frac{1-2b}{a-b}\ \ (a\neq b)$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{a+b}<0\text{ ……⑤かつ }\frac{1-2b}{a-b}<1\text{ ……⑥}$$

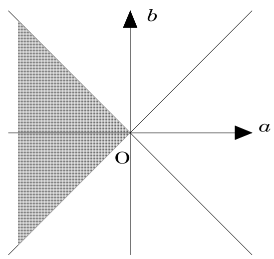
⑤より，$a+b<0$，$b<-a$ ………⑦

⑥より，$(1-2b)(a-b)<(a-b)^2$

$$(a-b)(a-b-1+2b)>0,\ (a-b)(a+b-1)>0$$

⑦から$a+b-1<0$なので，$a-b<0$，$b>a$ ………⑦

⑥⑦より，$a<b<-a$




点$(a,\ b)$の集合を図示すると右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。

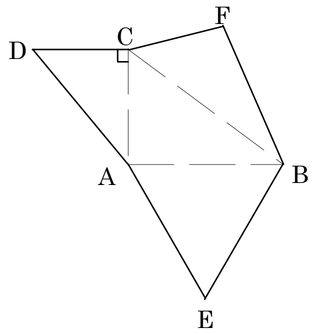
## コメント

③の領域については，直線④を境界とし，原点を含むか否かで決定しました。また，直線④と直線$y=x$および$y=-x+2$との交点の範囲をもとにして三角形の形成条件を導きました。

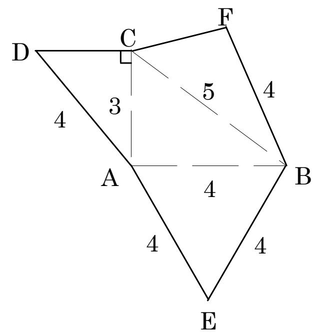
## 問　題

図はある三角錐 $V$ の展開図である。ここで，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$，$\angle ACD=90°$ で，$\triangle ABE$ は正三角形である。このとき，$V$ の体積を求めよ。

[2009]




## 解答例




右図において，$AB=4$，$AC=3$，$BC=5$ より，

$$\angle BAC=90°$$

また，$\angle ACD=90°$ より，

$$CD=CF=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$

さて，三角錐 $V$ の底面$\triangle ABC$ を $xy$ 平面上にとり，$A(0,\ 0,\ 0)$，$B(4,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 3,\ 0)$ とする。さらに，$V$ のもう 1 つの頂点を $P(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ とおく。

すると，$PA=PB=4$，$PC=\sqrt{7}$ から，

$$x^2+y^2+z^2=16 \cdots\cdots\cdots ①,\ (x-4)^2+y^2+z^2=16 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$x^2+(y-3)^2+z^2=7 \cdots\cdots\cdots ③$$

①②より，$8x-16=0$，$x=2 \cdots\cdots\cdots ④$

②③より，$-4x+3y=1$ となり，④を代入すると，$y=3 \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤を①に代入すると，$z^2=3$ となり，$z>0$ から $z=\sqrt{3}$ である。

以上より，三角錐 $V$ の体積は，

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

## コメント

底面が直角三角形であることに着目し，座標系を設定して処理しています。この解法がいちばん確実でしょう。

## 問　題

方程式$x^2+y^2-4y+2=0$で定義される円$C$を考える。

(1) 点$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$と点$\mathrm{O}(0,\ 0)$を通り，円$C$に接する円の中心の座標を求めよ。

(2) 点Pが円$C$上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

## 解答例

(1) $C : x^2+y^2-4y+2=0$より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円$C$の中心は$\mathrm{C}(0,\ 2)$，半径は$r=\sqrt{2}$となる。

さて，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$を通る円の中心は，線分 AO の垂直二等分線上にあるので，その座標を$\mathrm{B}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ t\right)$とおくことができる。

すると，半径は，$\mathrm{BO}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+t^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}$

また，中心間距離は，$\mathrm{BC}=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+(t-2)^2}=\sqrt{\frac{1}{2}+(t-2)^2}$

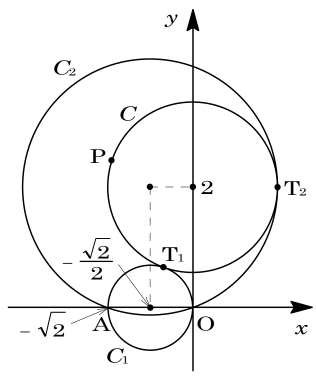
条件より，半径の和または差が中心間距離に等しいので，

$$\left|\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\pm\sqrt{2}\right|=\sqrt{\frac{1}{2}+(t-2)^2},\ \left(\sqrt{\frac{1}{2}+t^2}\pm\sqrt{2}\right)^2=\frac{1}{2}+(t-2)^2$$

$$\pm\sqrt{1+2t^2}=-2t+1,\ 1+2t^2=(-2t+1)^2,\ t^2-2t=0$$

よって，$t=0,\ 2$となり，中心の座標は$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$，$\left(-\frac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$である。

(2) $C$ に外接する円を$C_1$，$C$ を内接する円を$C_2$とし，$C$と$C_1$，$C_2$の接点をそれぞれ$\mathrm{T_1}$，$\mathrm{T_2}$とおく。




この 2 つの接点以外は，$C$ 上の点 P は円$C_1$の外部，円$C_2$の内部にあり，$\angle\mathrm{AT_2O}\leqq\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AT_1O}$

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}\leqq\cos\angle\mathrm{APO}\leqq\cos\angle\mathrm{AT_2O}$$

さて, AO は$C_1$の直径なので$\angle\mathrm{AT_1O}=90^\circ$となり，

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}=0$$

$C_2$の中心を$\mathrm{B_2}$とおくと，$\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{AB_2O}$より，

$$\cos\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{2}{\mathrm{B_2O}}=\frac{2}{\sqrt{\frac{1}{2}+2^2}}=\frac{2}{\frac{3}{\sqrt{2}}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APO}$の最小値は 0，最大値は$\frac{2\sqrt{2}}{3}$である。

## コメント

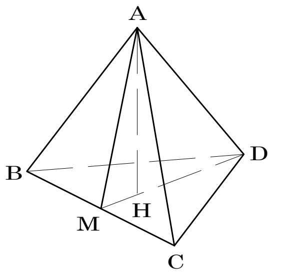
(1)の巧みな誘導により，(2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると，計算の海に溺れてしまいます。

## 問　題

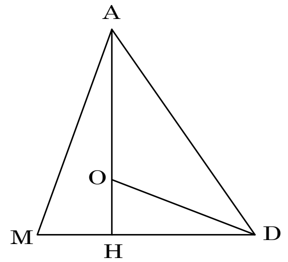
半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。 [2005]

## 解答例

半径 1 の球に内接する正四面体 ABCD において，点 A から面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，対称性から H は△BCD の重心となり，また球の中心 O は線分 AH 上にある。




さて，辺 BC の中点を M とし，3 点 A, M, D を含む平面で，正四面体 ABCD を切断したとき，その切り口は右図のようになる。




ここで，正四面体の 1 辺の長さを $x$ とすると，

$$AD = x\,,\ \ AM = DM = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$MH : HD = 1 : 2$ より，$\cos\angle AMH = \dfrac{1}{3}$ となり，

$$AH = AM\sin\angle AMH = \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

また，$HD = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ なので，△OHD に三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 1\,,\ \ x^2-\frac{2}{3}\sqrt{6}\,x = 0$$

$x>0$ より，$x = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ となる。

## コメント

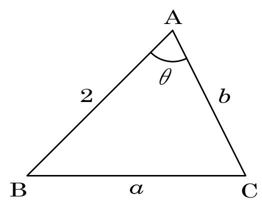
参考書などの例題に，そっくりそのまま載っている有名問題です。

## 問　題

三角形 ABC において，面積が 1 で $AB=2$ であるとき，$BC^2+(2\sqrt{3}-1)AC^2$ の値を最小にするような $\angle BAC$ の大きさを求めよ。 [1999]

## 解答例

$BC=a$，$CA=b$，$\angle BAC=\theta$ とおくと，




条件より，$\frac{1}{2}\cdot 2\cdot b\sin\theta=1$，$b\sin\theta=1$………①

余弦定理より，$a^2=4+b^2-4b\cos\theta$………②

ここで，$l=a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ とおくと，①②より，

$$l=4+b^2-4b\cos\theta+(2\sqrt{3}-1)b^2$$
$$=2\sqrt{3}b^2-4b\cos\theta+4$$
$$=\frac{2\sqrt{3}}{\sin^2\theta}-\frac{4\cos\theta}{\sin\theta}+4$$
$$l'=2\sqrt{3}\cdot\frac{-2\cos\theta}{\sin^3\theta}-4\cdot\frac{-1}{\sin^2\theta}$$
$$=\frac{-4\sqrt{3}\cos\theta+4\sin\theta}{\sin^3\theta}$$
$$=\frac{8}{\sin^3\theta}\cdot\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{3}$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $l'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $l$ | | ↘ | | ↗ | |

増減表より，$l$ が最小になるのは，$\theta=\frac{\pi}{3}$ のときである。

## コメント

文系に誘導つきで同じ問題が出ています。理系では誘導がありませんので，異なった解法となりました。

## 問　題

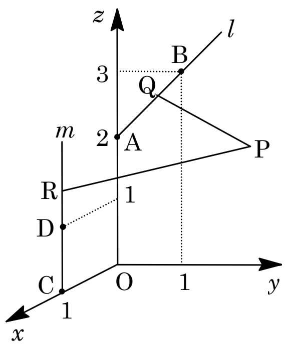
空間の 2 点 $A(0,\ 0,\ 2)$，$B(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線を $l$ とし，2 点 $C(1,\ 0,\ 0)$，$D(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線を $m$ とする。$a$ を定数として，$l$ 上にも $m$ 上にもない点 $P(s,\ t,\ a)$ を考える。

(1) P から $l$ に下ろした垂線と $l$ の交点を Q とし，P から $m$ に下ろした垂線と $m$ の交点を R とする。Q, R の座標をそれぞれ $s, t, a$ を用いて表せ。

(2) P を中心とし，$l$ と $m$ がともに接するような球面が存在するための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式で表せ。

(3) $s,\ t$ と定数 $a$ が(2)の条件を満たすとき，平面上の点 $(s,\ t)$ の軌跡が放物線であることを示し，その焦点と準線を $a$ を用いて表せ。　[2016]

## 解答例




(1) 点 $A(0,\ 0,\ 2)$，$B(0,\ 1,\ 3)$ を通る直線 $l$ は，$q$ を実数として，$\overrightarrow{AB}=(0,\ 1,\ 1)$ から，

$$l:(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 2)+q(0,\ 1,\ 1)$$

点 $C(1,\ 0,\ 0)$，$D(1,\ 0,\ 1)$ を通る直線 $m$ は，$r$ を実数として，$\overrightarrow{CD}=(0,\ 0,\ 1)$ から，

$$m:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+r(0,\ 0,\ 1)$$

ここで，$l$ 上の点 $Q(0,\ q,\ 2+q)$，$m$ 上の点 $R(1,\ 0,\ r)$，$l$ 上にも $m$ 上にもない点 $P(s,\ t,\ a)$ に対して，条件より，$PQ\perp l$ かつ $PR\perp m$ なので，

$$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{AB}=(q-t)+(2+q-a)=0,\ \ \overrightarrow{PR}\cdot\overrightarrow{CD}=r-a=0$$

よって，$q=\dfrac{t+a-2}{2}$，$r=a$ となり，

$$Q\Big(0,\ \frac{t+a-2}{2},\ \frac{t+a+2}{2}\Big),\ \ R(1,\ 0,\ a)$$

(2) (1)より，$\overrightarrow{PQ}=\Big(-s,\ -\dfrac{t-a+2}{2},\ \dfrac{t-a+2}{2}\Big)$，$\overrightarrow{PR}=(-s+1,\ -t,\ 0)$ となり，

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=s^2+\frac{(t-a+2)^2}{4}+\frac{(t-a+2)^2}{4}=s^2+\frac{1}{2}t^2-(a-2)t+\frac{1}{2}a^2-2a+2$$

$$|\overrightarrow{PR}|^2=(-s+1)^2+t^2=s^2-2s+t^2+1$$

そして, P を中心とし, $l$ と $m$ がともに接するような球面が存在するための条件は, $|\overrightarrow{PQ}|=|\overrightarrow{PR}|$ から，$s^2+\dfrac{1}{2}t^2-(a-2)t+\dfrac{1}{2}a^2-2a+2=s^2-2s+t^2+1$ となり，

$$4s=t^2+2(a-2)t-a^2+4a-2\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(＊)より，$4s=(t+a-2)^2-2a^2+8a-6$ となり，

$$(t+a-2)^2=4s+2a^2-8a+6,\ (t+a-2)^2=4\left(s+\frac{a^2-4a+3}{2}\right)$$

すると, $st$ 平面上で点$(s,\ t)$は放物線を描き，焦点は$\left(-\frac{a^2-4a+3}{2}+1,\ -a+2\right)$すなわち$\left(-\frac{a^2}{2}+2a-\frac{1}{2},\ -a+2\right)$，また準線は $s=-\frac{a^2-4a+3}{2}-1$ すなわち $s=-\frac{a^2}{2}+2a-\frac{5}{2}$ である。

## コメント

空間図形と 2 次曲線の融合問題です。基本事項の確認が主ですが，計算はやや面倒です。

## 問　題

空間の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$ の定める平面を $\alpha$ とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおく。$\alpha$ 上の点 C があり，その $x$ 座標が正であるとする。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ が $\vec{a}$ に垂直で，大きさが 1 であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。

(1) C の座標を求めよ。

(2) $\vec{b}=s\vec{a}+t\vec{c}$ を満たす実数 $s,\ t$ を求めよ。

(3) $\alpha$ 上にない点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ から $\alpha$ に垂線を下ろし，$\alpha$ との交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ を満たす実数 $k,\ l$ を $x,\ y,\ z$ で表せ。 [2015]

## 解答例

(1) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b}=(-1,\ 1,\ 1)$ に対し，$|\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2=3$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1+1+1=1$

さて，$p,\ q$ を実数として，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$ とおくと，$\vec{c}\cdot\vec{a}=0$，$|\vec{c}|=1$ から，

$$p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=0,\quad p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=1$$

よって，$3p+q=0\cdots\cdots①$，$3p^2+2pq+3q^2=1\cdots\cdots②$

また，$\vec{c}$ の $x$ 成分が正より，$p-q>0\cdots\cdots\cdots③$

すると，①③より，$p+3p>0$，$p>0$ となり，①②より，

$$3p^2-6p^2+27p^2=1,\quad 24p^2=1,\quad p=\frac{1}{2\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{12}$$

①より，$q=-\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ となり，$\vec{c}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\vec{a}-\dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{b}\cdots\cdots④$から，

$$\vec{c}=\frac{\sqrt{6}}{12}(1,\ 1,\ 1)-\frac{\sqrt{6}}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{6}}{3},\ -\frac{\sqrt{6}}{6},\ -\frac{\sqrt{6}}{6}\right)$$

よって，点 C の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{6}}{3},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6},\ -\dfrac{\sqrt{6}}{6}\right)$である。

(2) ④より，$\dfrac{\sqrt{6}}{4}\vec{b}=\dfrac{\sqrt{6}}{12}\vec{a}-\vec{c}$，$\vec{b}=\dfrac{1}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\sqrt{6}\vec{c}$ となり，$\vec{a}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，

$$s=\frac{1}{3},\quad t=-\frac{2}{3}\sqrt{6}$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\vec{a}+l\vec{c}$ とすると，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}=k\vec{a}+l\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{PH}}\cdot\vec{c}=0$ から，

$$k|\vec{a}|^2+l\vec{a}\cdot\vec{c}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=0,\quad k\vec{a}\cdot\vec{c}+l|\vec{c}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{a}=3k$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\vec{c}=l$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y,\ z)$ から

$$k=\frac{1}{3}(x+y+z),\quad l=\frac{\sqrt{6}}{3}x-\frac{\sqrt{6}}{6}y-\frac{\sqrt{6}}{6}z=\frac{\sqrt{6}}{6}(2x-y-z)$$

## コメント

空間ベクトルの成分表示についての標準的な問題です。(3)は，$\vec{a}$，$\vec{b}$ のセットで表される平面 $\alpha$ を，直交する $\vec{a}$，$\vec{c}$ のセットで表現し直す内容になっています。

## 問　題

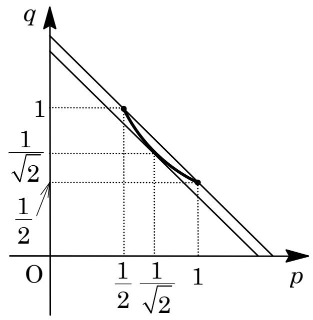
四面体 OABC は，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=90°$ を満たす。辺 OA 上の点 P と辺 OB 上の点 Q を $\mathrm{OP}=p$，$\mathrm{OQ}=q$，$pq=\dfrac{1}{2}$ となるようにとる。$p+q=t$ とし，$\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積を $S$ とする。

(1) $t$ のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $S$ を $t$ で表せ。

(3) $S$ の最小値，およびそのときの $p,\ q$ を求めよ。 [2014]

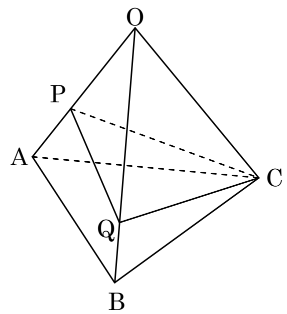
## 解答例




(1) 条件 $0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$，$pq=\dfrac{1}{2}$ を $pq$ 平面上に図示すると，右図の曲線（太線）となる。

ここで，$p+q=t$ ……(＊)とおき，この曲線と直線(＊)が共有点をもつ条件を考えることにより，$t$ のとり得る値の範囲を求めると，

$$\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1+\frac{1}{2},\quad \sqrt{2}\leqq t\leqq\frac{3}{2}$$




(2) 条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ であり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2=p^2|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-2p\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=p^2+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2=q^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2-2q\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=q^2+1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}}=pq\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}-p\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}-q\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=1$$

これより，$\triangle\mathrm{CPQ}$ の面積 $S$ は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{CQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CQ}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{(p^2+1)(q^2+1)-1^2}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+p^2+q^2}=\frac{1}{2}\sqrt{p^2q^2+(p+q)^2-2pq}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{4}+t^2-1}$$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{t^2-\frac{3}{4}}$$

(3) (1)の結果から，$t=\sqrt{2}$ $\left(p=q=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)$ のとき $S$ は最小となり，最小値は，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{2-\frac{3}{4}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$$ である。

## コメント

空間ベクトルに関する基本的な問題です。(2)の結論が明快すぎて……。

## 問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$xy$ 平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通る円の方程式を求めよ。

(2)　$t$ が実数全体を動くとき，$xyz$ 空間内の点 $(t+2,\ t+2,\ t)$ がつくる直線を $l$ とする。3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通り，中心を $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ とする球面 $S$ が直線 $l$ と共有点をもつとき，$a, b, c$ の満たす条件を求めよ。　[2011]

## 解答例

(1)　原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円の方程式を，$x^2+y^2+ax+by=0$ ……①とおく。

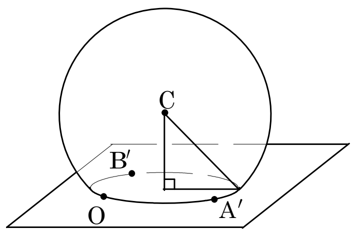
①が $\mathrm{A}(2,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 2)$ を通ることより，

$$5+2a+b=0\ \cdots\cdots②,\quad 5+a+2b=0\ \cdots\cdots③$$

②③より，$a=b=-\dfrac{5}{3}$ となるので，3 点 O, A, B を通る円の方程式は，①より，

$$x^2+y^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y=0,\quad \left(x-\frac{5}{6}\right)^2+\left(y-\frac{5}{6}\right)^2=\frac{25}{18}\ \cdots\cdots④$$

(2)　3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}'(2,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}'(1,\ 2,\ 0)$ を通る球面 $S$ は，(1)から，$xy$ 平面との交線が④で表されることより，その中心を $\mathrm{C}\left(\dfrac{5}{6},\ \dfrac{5}{6},\ c\right)$ とおくことができる。




さて，$S$ の半径を $r$ とすると，三平方の定理から，

$$r^2=c^2+\frac{25}{18}$$

よって，$S$ の方程式は，$\left(x-\dfrac{5}{6}\right)^2+\left(y-\dfrac{5}{6}\right)^2+(z-c)^2=c^2+\dfrac{25}{18}$

$$x^2+y^2+z^2-\frac{5}{3}x-\frac{5}{3}y-2cz=0\ \cdots\cdots⑤$$

そこで，直線 $l: x=t+2,\ y=t+2,\ z=t$ と $S$ の方程式⑤を連立して，

$$(t+2)^2+(t+2)^2+t^2-\frac{5}{3}(t+2)-\frac{5}{3}(t+2)-2ct=0$$

$$3t^2-\left(2c-\frac{14}{3}\right)t+\frac{4}{3}=0\ \cdots\cdots⑥$$

条件より，⑥が実数解をもつので，$D/4=\left(c-\dfrac{7}{3}\right)^2-4\geqq 0$ となり，

$$\left(c-\frac{7}{3}+2\right)\left(c-\frac{7}{3}-2\right)\geqq 0,\quad \left(c-\frac{1}{3}\right)\left(c-\frac{13}{3}\right)\geqq 0$$

以上より，求める $\mathrm{C}(a,\ b,\ c)$ の条件は，$a=b=\dfrac{5}{6}$ で，$c\leqq\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{13}{3}\leqq c$ である。

## コメント

現行課程ではあまり重視されていない部分ですが，球面と平面や直線の交わりについての基本的な問題です。演習しておくことが望まれる一題です。

## 問　題

$xyz$ 空間の原点 O と，O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A, B, C, D を考える。点 $A\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$B\left(\cos\left(-\frac{\alpha}{2}\right),\ \sin\left(-\frac{\alpha}{2}\right),\ 0\right)$ $(0<\alpha<\pi)$ とする。点 C, D は $\angle COA=\angle COB=\angle DOA=\angle DOB$ を満たし，点 C の $z$ 座標は正，点 D の $z$ 座標は負とする。

(1) 点 C の座標を $\alpha$ と $\theta=\angle COA$ $(0<\theta<\pi)$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき，点 C の座標を求めよ。 [2008]

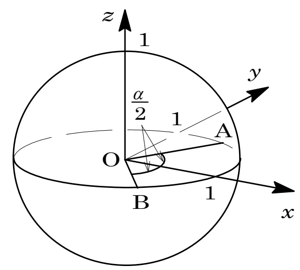
## 解答例

(1) $C(p,\ q,\ r)$ とおくと，条件より $p^2+q^2+r^2=1$ $(r>0)$ ………①

さて，$\angle COA=\angle COB=\theta$，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ であり，$0<\alpha<\pi$ として，$\overrightarrow{OA}=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ \sin\frac{\alpha}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OB}=\left(\cos\frac{\alpha}{2},\ -\sin\frac{\alpha}{2},\ 0\right)$ となる。

そこで，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta$ より，

$$p\cos\frac{\alpha}{2}+q\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\theta\ \text{………②}$$




また，$\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OC}|\cos\theta$ より，

$$p\cos\frac{\alpha}{2}-q\sin\frac{\alpha}{2}=\cos\theta\ \text{………③}$$

②③より，$0<\alpha<\pi$ から，$q=0$，$p=\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}}$

①より，$r=\sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}$ となり，$C\left(\dfrac{\cos\theta}{\cos\frac{\alpha}{2}},\ 0,\ \sqrt{1-\dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}}\right)$ である。

(2) まず，対称性より，$C(p,\ 0,\ r)$ に対し，$D(p,\ 0,\ -r)$ とおくことができる。

さて，$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OC}$，$\overrightarrow{OD}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいという条件は，$\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ のなす角が $\alpha$ から，$\theta=\alpha$ かつ $\angle COD=\alpha$ と同値である。

そこで，(1)より，$p=\dfrac{\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{2}}$ ………④

また，$\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OD}=|\overrightarrow{OC}||\overrightarrow{OD}|\cos\alpha$ より，$p^2-r^2=\cos\alpha$ ………⑤

①より，$q=0$ なので，$p^2+r^2=1$ ………⑥

⑤⑥より，$2p^2=1+\cos\alpha$ となり，④を代入すると，$2\cos^2\alpha=\cos^2\frac{\alpha}{2}\cdot(1+\cos\alpha)$

$$4\cos^2\alpha=(1+\cos\alpha)^2,\ 3\cos^2\alpha-2\cos\alpha-1=0$$

よって，$(3\cos\alpha+1)(\cos\alpha-1)=0$ から，$\cos\alpha=-\frac{1}{3}$ $(0<\alpha<\pi)$ となる。

すると，$\cos^2\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1+\cos\alpha}{2}=\dfrac{1}{3}$ より，$\cos\dfrac{\alpha}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であり，

$$p=\frac{-\frac{1}{3}}{\frac{1}{\sqrt{3}}}=-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \ r=\sqrt{1-\frac{1}{3}}=\frac{\sqrt{6}}{3},$$

以上より，$\mathrm{C}\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{6}}{3}\right)$ である。

## コメント

空間ベクトルを題材にした計算問題です。見かけよりは時間がかかります。

## 問　題

空間内に，3 点 $A_0(1,\ 0,\ 0)$，$A_1(1,\ 1,\ 0)$，$A_2(1,\ 0,\ 1)$ を通る平面 $\alpha$ と，3 点 $B_0(2,\ 0,\ 0)$，$B_1(2,\ 1,\ 0)$，$B_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ を通る平面 $\beta$ を考える。

(1) 空間の基本ベクトルを $\overrightarrow{e_1}=(1,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{e_2}=(0,\ 1,\ 0)$，$\overrightarrow{e_3}=(0,\ 0,\ 1)$ とおくとき，ベクトル $\overrightarrow{OA_0}$，$\overrightarrow{A_0A_1}$，$\overrightarrow{A_0A_2}$，$\overrightarrow{OB_0}$，$\overrightarrow{B_0B_1}$，$\overrightarrow{B_0B_2}$ を $\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ で表せ。ただし, O は空間の原点を表す。

(2) 原点 O と $\alpha$ 上の点 P を通る直線が $\beta$ 上の点 $P'$ も通っているとする。

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2},\quad \overrightarrow{OP'}=\overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}$$

とおくとき, $a$, $b$ を $p$, $q$ で表せ。

(3) 点 P が $\alpha$ 上の点 $A_0$ を中心とする半径 1 の円 $C$ の円周上を動くとき，点 $P'$ が動いてできる図形 $C'$ の方程式を(2)の $p$, $q$ で表し，$C'$ が楕円であることを示せ。

[2006]

## 解答例

(1) $A_0(1,\ 0,\ 0)$，$A_1(1,\ 1,\ 0)$，$A_2(1,\ 0,\ 1)$ より，

$$\overrightarrow{OA_0}=(1,\ 0,\ 0)=\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{A_0A_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2},\quad \overrightarrow{A_0A_2}=(0,\ 1,\ 1)=\overrightarrow{e_3}$$

また，$B_0(2,\ 0,\ 0)$，$B_1(2,\ 1,\ 0)$，$B_2\left(\dfrac{5}{2},\ 0,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ より，

$$\overrightarrow{OB_0}=(2,\ 0,\ 0)=2\overrightarrow{e_1},\quad \overrightarrow{B_0B_1}=(0,\ 1,\ 0)=\overrightarrow{e_2}$$

$$\overrightarrow{B_0B_2}=\left(\frac{1}{2},\ 0,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\frac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}$$

(2) 条件より，O，P，$P'$ が同一直線上にあるので, $t$ を実数として,

$$\overrightarrow{OP'}=t\overrightarrow{OP},\quad \overrightarrow{OB_0}+p\overrightarrow{B_0B_1}+q\overrightarrow{B_0B_2}=t\left(\overrightarrow{OA_0}+a\overrightarrow{A_0A_1}+b\overrightarrow{A_0A_2}\right)$$

(1)より，$2\overrightarrow{e_1}+p\overrightarrow{e_2}+q\left(\dfrac{1}{2}\overrightarrow{e_1}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\overrightarrow{e_3}\right)=t\left(\overrightarrow{e_1}+a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}\right)$

$\overrightarrow{e_1}$，$\overrightarrow{e_2}$，$\overrightarrow{e_3}$ は 1 次独立なので,

$$2+\frac{1}{2}q=t\ \cdots\cdots\text{①},\quad p=ta\ \cdots\cdots\text{②},\quad \frac{\sqrt{3}}{2}q=tb\ \cdots\cdots\text{③}$$

①②より，$p=\left(2+\dfrac{1}{2}q\right)a$，すなわち $2p=(4+q)a$ となる。

ここで，$q=-4$ のときは①から $t=0$ となり，③が成立しないことより,

$$a=\frac{2p}{4+q}\ \cdots\cdots\text{④}$$

①③より，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}q=\left(2+\dfrac{1}{2}q\right)b$ となり，$b=\dfrac{\sqrt{3}q}{4+q}\ \cdots\cdots$⑤

(3)　条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{A_0P}}|=1$ から，$|a\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+b\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}|=1$ となり，$|a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}|=1$

$a\overrightarrow{e_2}+b\overrightarrow{e_3}=(0,\ a,\ b)$ なので，$a^2+b^2=1$

④⑤を代入すると，$\left(\dfrac{2p}{4+q}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}q}{4+q}\right)^2=1$，$2p^2+q^2-4q=8$

$$\frac{p^2}{6}+\frac{(q-2)^2}{12}=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{B_0P}}=p\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}+q\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$ であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}|=|\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}|=1,\ \overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}=0$$

そこで，$\mathrm{B_0}$ を原点とし，$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_1}}$ を $p$ 軸の基本ベクトル，$\overrightarrow{\mathrm{B_0B_2}}$ を $q$ 軸の基本ベクトルとして，平面 $\beta$ 上で直交座標系をつくることができる。このとき，点 $\mathrm{P}'$ の座標は $(p,\ q)$ となるので，⑥より，点 $\mathrm{P}'$ が動いてできる図形 $C'$ は楕円である。

## コメント

大学入試に久々の登場ですが，空間内の楕円を表現する問題です。一度は演習した方がよい問題です。

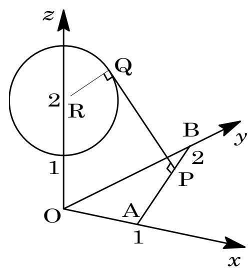
## 問　題

2 点$(1,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 2,\ 0)$を通る直線を $l$ とし，中心が$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が 1 の球面を $C$ とする。点 P が $l$ 上にあり点 Q が $C$ 上にあるとし，線分 PQ は直線 $l$ と線分 RQ に垂直であるとする。

(1) 点 P の存在する範囲を求めよ。

(2) 線分 PQ の長さを最小にする点 P の座標を求めよ。　[2002]

## 解答例




(1) $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$

$$l:(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+t(-1,\ 2,\ 0)$$
$$=(1-t,\ 2t,\ 0)$$

すると，$l$ 上に点 P があるので，$\mathrm{P}(1-t,\ 2t,\ 0)$とおけ，点 P を含んで $l$ に垂直な平面は,

$$-\{x-(1-t)\}+2(y-2t)=0\,,\ x-2y+5t-1=0$$

この平面が，中心$\mathrm{R}(0,\ 0,\ 2)$で半径が 1 の球面と接する条件は,

$$\frac{|5t-1|}{\sqrt{1^2+(-2)^2}}=1\,,\ |5t-1|=\sqrt{5}\,,\ t=\frac{1\pm\sqrt{5}}{5}$$

ここで，$t_1=\dfrac{1-\sqrt{5}}{5}$，$t_2=\dfrac{1+\sqrt{5}}{5}$とし，このときの点 P をそれぞれ$\mathrm{P}_1$，$\mathrm{P}_2$とおくと，$\mathrm{P}_1\left(\dfrac{4+\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2-2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$，$\mathrm{P}_2\left(\dfrac{4-\sqrt{5}}{5},\ \dfrac{2+2\sqrt{5}}{5},\ 0\right)$となる。

以上より，点 P の存在する範囲は，図から線分$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2$である。

(2) $\triangle\mathrm{PQR}$が直角三角形なので，$\mathrm{PQ}^2=\mathrm{PR}^2-\mathrm{RQ}^2=\mathrm{PR}^2-1$となり,

$$\mathrm{PQ}^2=(1-t)^2+(2t)^2+(-2)^2-1=5t^2-2t+4=5\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+\frac{19}{5}$$

よって，$t=\dfrac{1}{5}$のとき PQ は最小値をとり，このとき$\mathrm{P}\left(\dfrac{4}{5},\ \dfrac{2}{5},\ 0\right)$である。

## コメント

(1)は，$l$ に垂直な平面で球をサンドイッチにするという考え方で解をつくりました。その際，平面の方程式や点と平面の距離の公式を利用していますが，これは，図形を $xy$ 平面に正射影したと考えて，直線の方程式や点と直線の距離の公式を用いたとみなしても構いません。

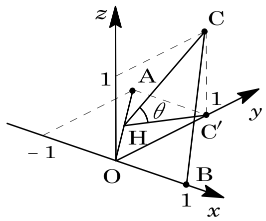
## 問　題

空間内の 4 点$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(-1,\ 1,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 1)$をとる。

(1)　直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする。H の座標を求めよ。$\angle CHC' = \theta$として$\cos\theta$の値を求めよ。ただし，$C' = (0,\ 1,\ 0)$とする。

(2)　直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離$\overline{PQ}$が最小となる P, Q の座標を求めよ。　[2000]

## 解答例




(1)　点 H は，直線 OA 上にあるので，

$$\overrightarrow{OH} = k\overrightarrow{OA} = (-k,\ k,\ 0)$$

$$\overrightarrow{CH} = \overrightarrow{OH} - \overrightarrow{OC} = (-k,\ k-1,\ -1)$$

条件より，$\overrightarrow{CH}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$なので，

$$-k\cdot(-1) + (k-1)\cdot 1 - 1\cdot 0 = 0\,,\ k = \frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{OH} = \left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$から，$H\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 0\right)$

ここで，$CH = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{6}}{2}$，$C'H = \sqrt{\left(\dfrac{1}{2}\right)^2 + \left(\dfrac{1}{2}\right)^2} = \dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\angle CC'H = \dfrac{\pi}{2}$ より，$\cos\theta = \dfrac{C'H}{CH} = \dfrac{\sqrt{2}}{\sqrt{6}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$

(2)　直線 OA 上の点 P に対して，$\overrightarrow{OP} = t\overrightarrow{OA} = (-t,\ t,\ 0)$

直線 BC 上の点 Q に対して，$\overrightarrow{OQ} = (1-s)\overrightarrow{OB} + s\overrightarrow{OC} = (1-s,\ s,\ s)$

そこで，$\overline{PQ}$が最小となるのは，$PQ\perp OA$ かつ$PQ\perp BC$ときなので，

$$\overrightarrow{PQ} = \overrightarrow{OQ} - \overrightarrow{OP} = (1-s+t,\ s-t,\ s)$$

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{OA} = 0$から，$-(1-s+t)+(s-t) = 0$，$2s-2t = 1$………①

$\overrightarrow{PQ}\cdot\overrightarrow{BC} = 0$から，$-(1-s+t)+(s-t)+s = 0$，$3s-2t = 1$………②

①②より，$s = 0,\ t = -\dfrac{1}{2}$

このとき，$\overrightarrow{OP} = \left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$\overrightarrow{OQ} = (1,\ 0,\ 0)$となるので，求める点 P, Q の座標は，$P\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，$Q(1,\ 0,\ 0)$である。

## コメント

(2)では，ねじれの位置にある 2 直線 OA と BC の共通垂線を利用して，PQ の距離が最小になる点 P, Q の座標を求めました。

## 問　題

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 $a$, $n$, $k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+14$ が平方数となるような自然数 $n$ をすべて求めよ。 [2017]

## 解答例

(1) 自然数 $a, n, k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき,

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n \geqq 1$，$2k-1 \geqq 1$ より，$(2k-1)n \geqq 2k-1$ となり,

$$a \geqq k^2+2k-1 \text{ ………②}$$

(2) $n$ が自然数で $n(n+1)+14$ が平方数のとき，$n(n+1)+14>n^2$ より，①から,

$$n(n+1)+14=(n+k)^2 \text{ （}k\text{ は自然数）………③}$$

すると，②から，$14 \geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-15 \leqq 0$

$$(k+5)(k-3) \leqq 0,\ -5 \leqq k \leqq 3$$

$k$ は自然数から，$k=1,\ 2,\ 3$ となる。

(i) $k=1$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+1)^2$ となり，$n=13$

(ii) $k=2$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+2)^2$ となり，$n=\dfrac{10}{3}$ より不適

(iii) $k=3$ のとき　③から，$n(n+1)+14=(n+3)^2$ となり，$n=1$

(i)〜(iii)より，$n=1,\ 13$ である。

## コメント

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

## 問　題

(1)　次の方程式が異なる 3 つの 0 でない実数解をもつことを示せ。

$$x^3+x^2-2x-1=0\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　方程式①の 3 つの実数解を $s,\ t,\ u$ とし，数列$\{a_n\}$を

$$a_n=\frac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。このとき，$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　(2)の $a_n$ がすべて整数であることを示せ。　[2016]

## 解答例

(1)　$x^3+x^2-2x-1=0\cdots\cdots①$に対して，$f(x)=x^3+x^2-2x-1$ とおくと，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty,\ f(-1)=1>0,\ f(0)=-1<0,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

よって，3 次方程式①は，$x<-1$，$-1<x<0$，$0<x$ に 1 つずつ実数解をもつ。

(2)　方程式①の解を $s,\ t,\ u$ とすると，$s^3+s^2-2s-1=0$ から，$n$ を自然数として，

$$s^{n+2}+s^{n+1}-2s^n-s^{n-1}=0,\ \frac{s^{n+2}+s^{n+1}-2s^n-s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}=0\cdots\cdots\cdots②$$

同様に，$\dfrac{t^{n+2}+t^{n+1}-2t^n-t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}=0\cdots\cdots③$，$\dfrac{u^{n+2}+u^{n+1}-2u^n-u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}=0\cdots\cdots④$

ここで，$a_n=\dfrac{s^{n-1}}{(s-t)(s-u)}+\dfrac{t^{n-1}}{(t-u)(t-s)}+\dfrac{u^{n-1}}{(u-s)(u-t)}$なので，②③④より，

$$a_{n+3}+a_{n+2}-2a_{n+1}-a_n=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

(3)　$a_n$ がすべて整数であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$$a_1=\frac{1}{(s-t)(s-u)}+\frac{1}{(t-u)(t-s)}+\frac{1}{(u-s)(u-t)}$$

$$=\frac{-(t-u)-(u-s)-(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0$$

$$a_2=\frac{s}{(s-t)(s-u)}+\frac{t}{(t-u)(t-s)}+\frac{u}{(u-s)(u-t)}$$

$$=\frac{-s(t-u)-t(u-s)-u(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-st+su-tu+ts-us+ut}{(s-t)(t-u)(u-s)}=0$$

$$a_3=\frac{s^2}{(s-t)(s-u)}+\frac{t^2}{(t-u)(t-s)}+\frac{u^2}{(u-s)(u-t)}$$

$$=\frac{-s^2(t-u)-t^2(u-s)-u^2(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-s^2t+s^2u-t^2u+t^2s-u^2s+u^2t}{(s-t)(t-u)(u-s)}$$

$$=\frac{-(s-t)u^2+(s^2-t^2)u-st(s-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=\frac{-(s-t)(u-s)(u-t)}{(s-t)(t-u)(u-s)}=1$$

(ii)　$n=k,\ k+1,\ k+2$ のとき

$a_k$ ，$a_{k+1}$ ，$a_{k+2}$ が整数と仮定すると，⑤から $a_{k+3}=-a_{k+2}+2a_{k+1}+a_k$ となり，$a_{k+3}$ も整数となる。

(i)(ii)より，$a_n$ はすべて整数である。

## コメント

漸化式と整数の融合である(3)がメインですが，(2)の誘導から方針は明快です。ただ，$a_1$ ，$a_2$ ，$a_3$ の計算は，その取りかかりに引くところがありました。

## 問　題

$p$，$q$ は正の実数とし，$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とする。数列$\{b_n\}$の一般項を $p,\,q,\,n$ で表せ。

(2)　$q=1$ とする。すべての自然数 $n$ について $a_{n+1}\geqq a_n$ となるような $p$ の値の範囲を求めよ。　[2015]

## 解答例

(1)　$a_1=0$，$a_{n+1}=pa_n+(-q)^{n+1}$ に対して，両辺$\div p^{n+1}$ とすると，

$$\frac{a_{n+1}}{p^{n+1}}=\frac{a_n}{p^n}+\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{n+1}$$

ここで，$b_n=\dfrac{a_n}{p^n}$ とすると，$b_{n+1}=b_n+\Big(-\dfrac{q}{p}\Big)^{n+1}$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$b_n=b_1+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{k+1}=\frac{0}{p}+\sum_{k=1}^{n-1}\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{k+1}$$

$p,\,q$ は正の実数より，$-\dfrac{q}{p}\neq 1$ となり，

$$b_n=\frac{q^2}{p^2}\cdot\frac{1-\Big(-\dfrac{q}{p}\Big)^{n-1}}{1+\dfrac{q}{p}}=\frac{q^2}{p(p+q)}\Big\{1-\Big(-\frac{q}{p}\Big)^{n-1}\Big\}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(2)　$q=1$ のとき，(1)より，$b_n=\dfrac{1}{p(p+1)}\Big\{1-\Big(-\dfrac{1}{p}\Big)^{n-1}\Big\}$ となり，

$$a_n=p^nb_n=\frac{1}{p+1}\{p^{n-1}-(-1)^{n-1}\}$$

ここで，条件から $a_{n+1}\geqq a_n$ なので，$(p+1)a_{n+1}\geqq(p+1)a_n$

$$p^n-(-1)^n\geqq p^{n-1}-(-1)^{n-1},\quad p^{n-1}(p-1)\geqq 2(-1)^n\cdots\cdots\cdots(*)$$

以下，すべての自然数 $n$ について，$(*)$が成立する条件を求める。

まず，$n=2$ のとき成立することより，$p(p-1)\geqq 2$ から $p^2-p-2\geqq 0$ となり，$p>0$ から $p\geqq 2$ が必要である。

逆に $p\geqq 2$ のとき，$p^{n-1}(p-1)\geqq 2^{n-1}\cdot 1\geqq 2(-1)^n$ となり$(*)$はつねに成立する。

以上より，求める条件は $p\geqq 2$ である。

## コメント

誘導つきの漸化式に加えて，必要十分条件についての取扱い方法が問われています。なお，(2)の後半で $n=1$ の場合について記述していないのは，$p>0$ に関する条件が新たに求まらないということにすぎません。

## 問　題

次の漸化式で定義される複素数の数列

$$z_1=1,\ z_{n+1}=\frac{1+i\sqrt{3}}{2}z_n+1\quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

を考える。ただし，$i$は虚数単位である。

(1)　$z_2$，$z_3$を求めよ。

(2)　上の漸化式を$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+i\sqrt{3}}{2}(z_n-\alpha)$と表したとき，複素数$\alpha$を求めよ。

(3)　一般項$z_n$を求めよ。

(4)　$z_n=-\dfrac{1-i\sqrt{3}}{2}$となるような自然数$n$をすべて求めよ。　[2004]

## 解答例

(1)　条件より，$z_1=1$，$z_{n+1}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n+1$………①

$$z_2=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_1+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot 1+1=\frac{3+\sqrt{3}i}{2}$$

$$z_3=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_2+1=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\cdot\frac{3+\sqrt{3}i}{2}+1=1+\sqrt{3}i$$

(2)　①を変形して，$z_{n+1}-\alpha=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}(z_n-\alpha)$となることより，

$$z_{n+1}=\frac{1+\sqrt{3}i}{2}z_n-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha+\alpha$$

よって，$-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\alpha+\alpha=1$，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\alpha=1$から，$\alpha=\dfrac{2}{1-\sqrt{3}i}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(3)　(2)より，$z_{n+1}-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\left(z_n-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)$

$$z_n-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}=\left(z_1-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$z_n=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$

(4)　$z_n=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$のとき，$\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}+\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$より，

$$\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=-1,\ \left(\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}$，$-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

②より，$\cos\dfrac{n-1}{3}\pi+i\sin\dfrac{n-1}{3}\pi=\cos\dfrac{4\pi}{3}+i\sin\dfrac{4\pi}{3}$

$$\frac{n-1}{3}\pi=2k\pi+\frac{4\pi}{3},\ n-1=6k+4,\ n=6k+5$$

なお, $n \geqq 1$ より $k \geqq 0$ となるので, $n = 6k + 5$ $(k = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ である。

**コメント**

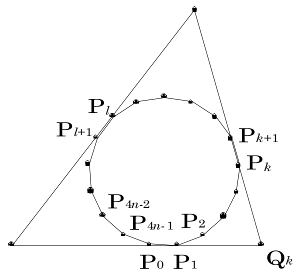
虚数係数の漸化式です。詳しすぎるほどの誘導がついています。

## 問　題

$n$ を自然数とし，正 $4n$ 角形 $P_0 \cdots P_{4n-1}$ を考える。

(1) 辺 $P_0P_1$ と辺 $P_kP_{k+1}$ $(1 \leqq k \leqq 2n-1)$ を延長した直線の交点を $Q_k$ とする。このとき，$\angle P_0Q_kP_{k+1}$ の大きさを求めよ。

(2) 3 辺 $P_0P_1$，$P_kP_{k+1}$，$P_lP_{l+1}$ $(k<l)$ を延長したとき，正 $4n$ 角形 $P_0 \cdots P_{4n-1}$ を含む鋭角三角形ができるような $k$ と $l$ の組は何通りあるか。　[2000]




## 解答例

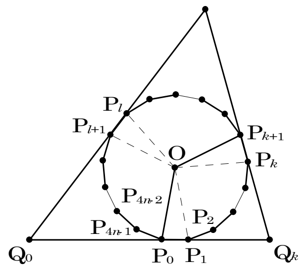
(1) 正 $4n$ 角形の中心を O とし，$\theta = \dfrac{2\pi}{4n} = \dfrac{\pi}{2n}$ とおく。

四角形 $OP_0Q_kP_{k+1}$ について，$\angle P_0OP_{k+1} = (k+1)\theta$，

$\angle OP_0Q_k = \angle OP_{k+1}Q_k = \dfrac{\pi-\theta}{2}$ より，

$$\angle P_0Q_kP_{k+1} = 2\pi - \frac{\pi-\theta}{2}\cdot 2 - (k+1)\theta$$

$$= \pi - k\theta = \left(1 - \frac{k}{2n}\right)\pi$$




(2) (1)と同様に考えて，

$$\angle P_kQ_lP_{l+1} = \pi - (l-k)\theta = \left(1 - \frac{l-k}{2n}\right)\pi$$

$$\angle P_lQ_0P_1 = \pi - (4n-l)\theta = \left(1 - \frac{4n-l}{2n}\right)\pi$$

$\triangle Q_0Q_kQ_l$ が鋭角三角形なので，$0 < \angle P_0Q_kP_{k+1} < \dfrac{\pi}{2}$ より，

$$0 < \left(1 - \frac{k}{2n}\right)\pi < \frac{\pi}{2},\ \frac{1}{2} < \frac{k}{2n} < 1,\ n < k < 2n \cdots\cdots\cdots①$$

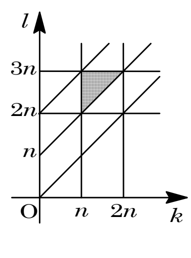
同様にして，$0 < \angle P_kQ_lP_{l+1} < \dfrac{\pi}{2}$ より，$n < l-k < 2n$，$k+n < l < k+2n \cdots\cdots\cdots②$

また，$0 < \angle P_lQ_0P_1 < \dfrac{\pi}{2}$ より，$n < 4n-l < 2n$，$2n < l < 3n \cdots\cdots\cdots③$

①②③を $k<l$ のもとで $kl$ 平面上に図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。

この領域内にある格子点 $(k,\ l)$ の個数が，鋭角三角形ができる $k$ と $l$ の組の数に一致するので，

$$(n-2)+(n-3)+\cdots\cdots+2+1 = \frac{1}{2}(n-1)(n-2)$$




## コメント

条件を満たす $k$ と $l$ の組の個数を，格子点の個数に対応させて数えました。

## 問　題

さいころを続けて投げて，数直線上の点 P を移動させるゲームを行う。初め点 P は原点 0 にいる。さいころを投げるたびに，出た目の数だけ，点 P を現在の位置から正の向きに移動させる。この試行を続けて行い，点 P が 10 に達するか越えた時点でゲームを終了する。$n$ 回目の試行でゲームが終了する確率を $p_n$ とする。

(1)　$p_{10}=\left(\frac{1}{6}\right)^9$ となることを示せ。

(2)　$p_9$ の値を求めよ。

(3)　$p_3$ の値を求めよ。　[2017]

## 解答例

(1)　さいころを投げ，数直線上で初め原点にいた点 P を，出た目の数だけ正の向きに移動させる。そして，点 P が 10 に達するか越えた時点で終了する。このとき，$k$ 回目終了後の点 P の位置を $X_k$ とおく。

さて，$X_9\geqq 9$ より，10 回目で終了する場合は，$X_9=9$ すなわち 9 回目まで 1 の目が出て，10 回目が任意なので，その確率 $p_{10}$ は，

$$p_{10}=\left(\frac{1}{6}\right)^9\times 1=\left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(2)　$X_8\geqq 8$ より，9 回目で終了する場合は，$X_8=8,\ 9$ である。

(i)　$X_8=8$ のとき　このとき，8 回目までは 1 の目が出て，9 回目は 2 以上の目なので，その確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^8\times\frac{5}{6}=5\left(\frac{1}{6}\right)^9$ となる。

(ii)　$X_8=9$ のとき　このとき，8 回目までは 1 の目が 7 回，2 の目が 1 回出て，9 回目は任意なので，その確率は ${}_8\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{6}\right)^7\frac{1}{6}\times 1=8\left(\frac{1}{6}\right)^8$ となる。

(i)(ii)より，9 回目で終了する確率 $p_9$ は，

$$p_9=(5+8\cdot 6)\left(\frac{1}{6}\right)^9=53\left(\frac{1}{6}\right)^9$$

(3)　$2\leqq X_2\leqq 12$ であるが，3 回目で終了する場合は，$4\leqq X_2\leqq 9$ となる。

ここで，1 回目と 2 回目の目の数とその和をまとめると右表のようになる。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 |
| 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 |
| 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 |
| 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 |
| 6 | 7 | 8 | 9 | 10 | 11 | 12 |

(i)　$X_2=4$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 3 通りで，3 回目は 6 なので，その確率は $3\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}=3\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(ii)　$X_2=5$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 4 通りで，3 回目は 5 または 6 なので，その確率は $4\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{2}{6}=8\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(iii)　$X_2=6$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 5 通りで，3 回目は 4 以上なので，その確率は $5\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{3}{6}=15\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(iv)　$X_2=7$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 6 通りで，3 回目は 3 以上なので，その確率は $6\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{4}{6}=24\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(v)　$X_2=8$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 5 通りで，3 回目は 2 以上なので，その確率は $5\left(\frac{1}{6}\right)^2\times\frac{5}{6}=25\left(\frac{1}{6}\right)^3$ となる。

(vi)　$X_2=9$ のとき　1 回目と 2 回目の数の組は 4 通りで，3 回目は任意なので，その確率は $4\left(\frac{1}{6}\right)^2\times 1=4\left(\frac{1}{6}\right)^2$ となる。

(i)～(vi)より，3 回目で終了する確率 $p_3$ は，

$$p_3=(3+8+15+24+25+4\cdot 6)\left(\frac{1}{6}\right)^3=99\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{11}{24}$$

## コメント

確率の基本的な問題ですが，注意力が要求されます。解答例のように，表を作った方が安心です。

## 問　題

机のひきだし A に 3 枚のメダル，ひきだし B に 2 枚のメダルが入っている。ひきだし A の各メダルの色は金，銀，銅のどれかであり，ひきだし B の各メダルの色は金，銀のどちらかである。

(1) ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(2) ひきだし A, B をあわせたメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。

(3) ひきだし A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っていることがわかっているとき，ひきだし A のメダルの色が 2 種類である確率を求めよ。　[2016]

## 解答例

(1) ひきだし A のメダルの色の種類について，その組の総数は$3^3=27$通りである。

そして，色が 2 種類であるのは，金と銀のみ，銀と銅のみ，金と銅のみの場合があり，合わせて$(2^3-2)\times3=18$通りとなるので，その確率は$\dfrac{18}{27}=\dfrac{2}{3}$である。

(2) ひきだし A, B をあわせたとき，メダルの色の種類について，その組の総数は$3^3\times2^2=27\times4$通りである。

そして，A, B をあわせたとき，メダルの色が 2 種類であるのは，

(i) 金と銀のみのとき　(1)と同様に考えると，$2^5-2=30$通りの場合がある。

(ii) 金と銅のみのとき

B はともに金の場合しかなく，また A は金または銅かつ金のみでない場合となり，$(2^3-1)\times1=7$通りの場合がある。

(iii) 銀と銅のみのとき　(ii)と同様に考えると，7 通りの場合がある。

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\dfrac{30+7+7}{27\times4}=\dfrac{11}{27}$である。

(3) ひきだし A のメダルが，金$a$枚，銀$b$枚，銅$c$枚のとき$A=(a,\ b,\ c)$，ひきだし B のメダルが，金$d$枚，銀$e$枚のとき$B=(d,\ e)$と表す。

さて，A, B をあわせてちょうど 3 枚の金メダルが入っているのは，

(i) $A=(1,\ 2,\ 0)$かつ$B=(2,\ 0)$のとき　$3\times1=3$通り

(ii) $A=(1,\ 0,\ 2)$かつ$B=(2,\ 0)$のとき　$3\times1=3$通り

(iii) $A=(1,\ 1,\ 1)$かつ$B=(2,\ 0)$のとき　$3!\times1=6$通り

(iv) $A=(2,\ 1,\ 0)$かつ$B=(1,\ 1)$のとき　$3\times2!=6$通り

(v) $A=(2,\ 0,\ 1)$かつ$B=(1,\ 1)$のとき　$3\times2!=6$通り

(vi) $A=(3,\ 0,\ 0)$かつ$B=(0,\ 2)$のとき　$1\times1=1$通り

(i)～(vi)より，金メダルが 3 枚の確率は，$\dfrac{3+3+6+6+6+1}{27\times4}=\dfrac{25}{108}$

その中で A のメダルの色が 2 種類であるのは，(i)(ii)(iv)(v)のときより，その確率は$\dfrac{3+3+6+6}{27\times 4}=\dfrac{18}{108}$である。

したがって，求める確率は，$\dfrac{18}{108}\div\dfrac{25}{108}=\dfrac{18}{25}$となる。

## コメント

注意深さの問われる確率問題です。(3)は，現行課程で出題範囲に，再度，仲間入りした「条件付き確率」の設問です。

## 問　題

初めに赤玉 2 個と白玉 2 個が入った袋がある。その袋に対して以下の試行を繰り返す。

(i)　まず同時に 2 個の玉を取り出す。

(ii)　その 2 個の玉が同色であればそのまま袋に戻し，色違いであれば赤玉 2 個を袋に入れる。

(iii) 最後に白玉 1 個を袋に追加してかき混ぜ，1 回の試行を終える。

$n$ 回目の試行が終わった時点での袋の中の赤玉の個数を $X_n$ とする。

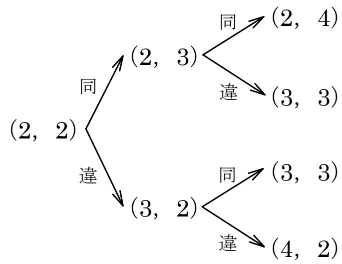
(1)　$X_1=3$ となる確率を求めよ。

(2)　$X_2=3$ となる確率を求めよ。

(3)　$X_2=3$ であったとき，$X_1=3$ である条件付き確率を求めよ。　[2015]

## 解答例

(1)　与えられた試行により，取り出した 2 個の玉の色が同じときは白玉が 1 個増え，違うときは赤玉が 1 個増える。この試行を 2 回繰り返すとき，袋の中の(赤玉，白玉)の個数は，右図のように変化する。




さて，$X_1=3$ となるのは，$(2,\ 2)\to(3,\ 2)$ の場合より，取り出した玉は色違いで，その確率は，

$$\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{2}{3}$$

(2)　$X_2=3$ となるのは，$(2,\ 2)\to(2,\ 3)\to(3,\ 3)$ または $(2,\ 2)\to(3,\ 2)\to(3,\ 3)$ のいずれかより，その確率は，

$$\frac{{}_2C_2+{}_2C_2}{{}_4C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_3C_1}{{}_5C_2}+\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}\times\frac{{}_3C_2+{}_2C_2}{{}_5C_2}=\frac{1}{3}\times\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{7}{15}$$

(3)　$X_1=3$ かつ $X_2=3$ であるのは，$(2,\ 2)\to(3,\ 2)\to(3,\ 3)$ の場合で，その確率は $\frac{2}{3}\times\frac{2}{5}=\frac{4}{15}$ である。

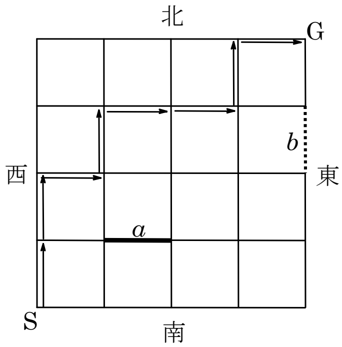
すると，(2)より $X_2=3$ となる確率は $\frac{7}{15}$ なので，$X_2=3$ であったとき $X_1=3$ である条件付き確率は，$\frac{4}{15}\div\frac{7}{15}=\frac{4}{7}$ である。

## コメント

確率の基本問題ですが，どういう訳か，(3)で条件付き確率が必答です。

## 問　題

図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 $a$ を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 $b$ を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。




(1)　$a$ を通り抜ける経路は何通りあるか。

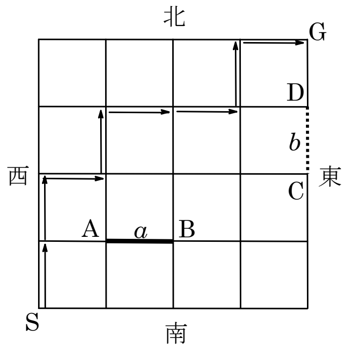
(2)　$a$ を通り抜けずに $b$ を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

## 解答例

(1)　まず，右図のように区間 $a$ の両端を A と B，区間 $b$ の両端を C と D とする。

すると，区間 $a$ を通り抜ける経路は，S→A→B→G となり，その数は，$2\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=20$ である。




(2)　区間 $a, b$ を通り抜ける経路 S→A→B→C→D→G は，$2\times1\times\dfrac{3!}{2!}\times1\times1=6$ 通りあり，区間 $b$ を通り抜ける経路 S→C→D→G は，$\dfrac{6!}{4!2!}\times1\times1=15$ 通りある。

よって，区間 $a$ を通り抜けずに $b$ を通り抜ける経路数は，$15-6=9$ である。

(3)　まず，S→G の全経路数は，$\dfrac{8!}{4!4!}=70$ である。以下，区間 $a, b$ を通り抜けるかどうかで場合分けをする。

(i)　区間 $a, b$ をともに通り抜けるとき

かかる時間は $1+8+2\times6=21$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{6}{70}$ である。

(ii)　区間 $a$ を通り抜けずに，$b$ を通り抜けるとき

かかる時間は $8+2\times7=22$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{9}{70}$ である。

(iii)　区間 $a$ を通り抜け，$b$ を通り抜けないとき

かかる時間は $1+2\times7=15$ 分で，その確率は，(1)(2)より $\dfrac{20-6}{70}=\dfrac{14}{70}$ である。

(iv) 区間 $a, b$ をともに通り抜けないとき

かかる時間は $2\times 8=16$ 分で，その確率は，$1-\left(\dfrac{6}{70}+\dfrac{9}{70}+\dfrac{14}{70}\right)=\dfrac{41}{70}$ である。

(i)～(iv)より，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値 $E$ は,

$$E=21\times\frac{6}{70}+22\times\frac{9}{70}+15\times\frac{14}{70}+16\times\frac{41}{70}=17\ （分）$$

コメント

センターレベルの確率の問題です。ベン図を描いてミスを防ぐのも一案です。

## 問　題

次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を $X$ とする。

(i)　$X$ が 4 の倍数ならば，点 P は $x$ 軸方向に $-1$ 動く。

(ii)　$X$ を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は $y$ 軸方向に $-1$ 動く。

(iii) $X$ を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は $x$ 軸方向に $+1$ 動く。

(iv) $X$ を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は $y$ 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は $x$ 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(-1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　2 個のサイコロを 4 回投げて，点 P が $(1,\ 1)$ にある確率を求めよ。　[2013]

## 解答例

(1)　2 個のサイコロの目と，出た目の積 $X$ を 4 で割った余りの対応は，右表のようになる。

| | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| 2 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |
| 3 | 3 | 2 | 1 | 0 | 3 | 2 |
| 4 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 5 | 1 | 2 | 3 | 0 | 1 | 2 |
| 6 | 2 | 0 | 2 | 0 | 2 | 0 |

すると，1 回投げて点 P が $(-1,\ 0)$ にあるのは，右表で 0 の場合より，その確率は，$\dfrac{15}{36}=\dfrac{5}{12}$

(2)　3 回投げて点 P が $(2,\ 1)$ にあるのは，右表で 2 が 2 回，3 が 1 回起こる場合である。

2，3 となる確率は，それぞれ $\dfrac{12}{36}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{4}{36}=\dfrac{1}{9}$ であるので，求める確率は，${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{1}{9}=\dfrac{1}{27}$

(3)　4 回投げて点 P が $(1,\ 1)$ にあるのは，右上の表で，0 が $a$ 回，1 が $b$ 回，2 が $c$ 回，3 が $d$ 回起こる場合であるとすると，

$$a+b+c+d=4\cdots\cdots\cdots①,\ \ -a+c=1\cdots\cdots\cdots②,\ \ -b+d=1\cdots\cdots\cdots③$$

②③を①に代入すると，$a+b=1$ となり，$(a,\ b)=(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$ から，

$$(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 1,\ 1,\ 2),\ (1,\ 0,\ 2,\ 1)$$

0, 1, 2, 3 となる確率は，それぞれ $\dfrac{5}{12}$，$\dfrac{5}{36}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{9}$ であるので，求める確率は，

$$\frac{4!}{2!}\cdot\frac{5}{36}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{9}\right)^2+\frac{4!}{2!}\cdot\frac{5}{12}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{9}=\frac{5}{9^3}+\frac{5}{9^2}=\frac{50}{729}$$

## コメント

センター試験を解くときのように表を作りました。これが一番確実でしょう。

## 問　題

AとBの2チームが試合を行い，どちらかが先に$k$勝するまで試合をくり返す。各試合でAが勝つ確率を$p$，Bが勝つ確率を$q$とし，$p+q=1$とする。AがBより先に$k$勝する確率を$P_k$とおく。

(1)　$P_2$を$p$と$q$で表せ。

(2)　$P_3$を$p$と$q$で表せ。

(3)　$P_4$を$p$と$q$で表せ。

(4)　$\dfrac{1}{2}<q<1$のとき，$P_4<P_3$であることを示せ。　[2012]

## 解答例

(1)　AがBより先に2勝する場合は，Aが2連勝のとき，またはAが1勝1敗で3試合目にAが勝つときより，その確率$P_2$は，

$$P_2=p^2+{}_2\mathrm{C}_1pq\cdot p=p^2+2p^2q=p^2(1+2q)$$

(2)　AがBより先に3勝する場合は，Aが3連勝のとき，またはAが2勝1敗で4試合目にAが勝つとき，またはAが2勝2敗で5試合目にAが勝つときである。

すると，その確率$P_3$は，

$$P_3=p^3+{}_3\mathrm{C}_2p^2q\cdot p+{}_4\mathrm{C}_2p^2q^2\cdot p=p^3+3p^3q+6p^3q^2=p^3(1+3q+6q^2)$$

(3)　AがBより先に4勝する場合は，Aが4連勝のとき，またはAが3勝1敗で5試合目にAが勝つとき，またはAが3勝2敗で6試合目にAが勝つとき，またはAが3勝3敗で7試合目にAが勝つときである。

すると，その確率$P_4$は，

$$\begin{aligned}P_4&=p^4+{}_4\mathrm{C}_3p^3q\cdot p+{}_5\mathrm{C}_3p^3q^2\cdot p+{}_6\mathrm{C}_3p^3q^3\cdot p\\&=p^4+4p^4q+10p^4q^2+20p^4q^3=p^4(1+4q+10q^2+20q^3)\end{aligned}$$

(4)　$p+q=1$から，$p=1-q$となり，

$$\begin{aligned}P_3-P_4&=p^3(1+3q+6q^2)-p^4(1+4q+10q^2+20q^3)\\&=p^3\{1+3q+6q^2-(1-q)(1+4q+10q^2+20q^3)\}\\&=p^3(-10q^3+20q^4)=10p^3q^3(2q-1)\end{aligned}$$

すると，$\dfrac{1}{2}<q<1$から$P_3-P_4>0$となり，$P_4<P_3$である。

## コメント

確率の基本問題です。問題文の設定は文系とほとんど同じものです。

## 問　題

$n$ を 2 以上の自然数, $q$ と $r$ を自然数とする。1 から $nq$ までの番号がついた $nq$ 個の白玉, 1 から $nr$ までの番号がついた $nr$ 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から $n$ 番まで番号づけられた $n$ 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は $q$ 個ずつ, 赤玉は $r$ 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から $q$ の白玉と番号 1 から $r$ の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を $n$ 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に $n$ 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を $s_n$ とし, $n$ 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を $a_n$ とする。

(1)　$a_2$, $a_3$ を求めよ。

(2)　$s_n$ を求めよ。

(3)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(4)　$a_n$ を求めよ。　[2011]

## 解答例

(1)　$q$ 個の白玉と $r$ 個の赤玉が入っている 1 番の箱から 2 番に白玉を移すと, 2 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分になり, その総数 $a_2$ は $a_2=q$ である。

また, 3 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分には, 1 番の箱から 2 番に赤玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合と, 1 番の箱から 2 番に白玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合がある。その総数 $a_3$ は,

$$a_3=r\times q+q(q+1)=q(q+r+1)$$

(2)　1 番の箱から 2 番の箱には $q+r$ 通りの移動方法, 次に 2 番の箱から 3 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法, さらに 3 番の箱から 4 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法, …, $n-1$ 番の箱から $n$ 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法がある。これより, 再配分の総数 $s_n$ は, $s_n=(q+r)(q+r+1)^{n-2}$ である。

なお, この式は, $n=2$ のときも成立する。

(3)　$n$ 番の箱には, $q+1$ 個の白玉と $r$ 個の赤玉が入っている場合が $a_n$ 通り, $q$ 個の白玉と $r+1$ 個の赤玉が入っている場合が $s_n-a_n$ 通りあることより, $n$ 回目の操作を行った後, $n+1$ 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数 $a_{n+1}$ は,

$$a_{n+1}=(q+1)a_n+q(s_n-a_n)=a_n+qs_n=a_n+q(q+r)(q+r+1)^{n-2}$$

よって, $a_{n+1}-a_n=q(q+r)(q+r+1)^{n-2}$ ………(＊)

(4)　$a_2 = q$ であるので, (＊)から, $n \geqq 3$ において,

$$a_n = a_2 + \sum_{k=2}^{n-1}(a_{k+1} - a_k) = q + q(q+r)\sum_{k=2}^{n-1}(q+r+1)^{k-2}$$

$$= q + q(q+r)\cdot\frac{(q+r+1)^{n-2}-1}{(q+r+1)-1} = q(q+r+1)^{n-2}$$

なお, この式は, $n = 2$ のときも成立する。

## コメント

場合の数の問題というよりは, 読解力を試すものです。我慢強く, 問題文をていねいに読まなくてはいけません。

## 問　題

2 本の当たりくじを含む 102 本のくじを，1 回に 1 本ずつ，くじがなくなるまで引き続けることにする。

(1) $n$ 回目に 1 本目の当たりくじが出る確率を求めよ。

(2) A, B, C の 3 人が, A, B, C, A, B, C, A, …の順に，このくじ引きを行うとする。1 本目の当たりくじを A が引く確率を求めよ。B と C についても，1 本目の当たりくじを引く確率を求めよ。 [2010]

## 解答例

(1) $n$ 回目に 1 本目の当たりくじが出るのは，1 回目から $n-1$ 回目までは，はずれくじ, $n$ 回目に当たりくじを引く場合より，その確率は,

$$\frac{{}_{100}\mathrm{P}_{n-1}\times 2}{{}_{102}\mathrm{P}_n}=\frac{\dfrac{100!}{(101-n)!}\times 2}{\dfrac{102!}{(102-n)!}}=\frac{2(102-n)}{101\cdot 102}=\frac{102-n}{5151}$$

なお，この式は $n=1$ ，$n=102$ のときも成立する。

(2) A が $n$ 回目に 1 本目の当たりくじを引くのは，$n=3k+1\ (0\leqq k\leqq 33)$ のときより，その確率は,

$$\sum_{k=0}^{33}\frac{102-(3k+1)}{5151}=\frac{1}{5151}\sum_{k=0}^{33}(101-3k)=\frac{1}{5151}\left(101\times 34-3\cdot\frac{1}{2}\times 33\times 34\right)$$
$$=\frac{17}{5151}(101\times 2-3\times 33)=\frac{103}{303}$$

同様に, B が $n$ 回目に 1 本目の当たりくじを引くのは，$n=3k+2\ (0\leqq k\leqq 33)$ のときより，その確率は,

$$\sum_{k=0}^{33}\frac{102-(3k+2)}{5151}=\frac{1}{5151}\sum_{k=0}^{33}(100-3k)=\frac{1}{5151}\left(100\times 34-3\cdot\frac{1}{2}\times 33\times 34\right)$$
$$=\frac{17}{5151}(100\times 2-3\times 33)=\frac{1}{3}$$

また, C が $n$ 回目に 1 本目の当たりくじを引く確率は,

$$1-\frac{103}{303}-\frac{1}{3}=\frac{33}{101}$$

## コメント

確率の基本問題です。計算も予想よりは簡単でした。

## 問　題

4 枚のカードがあって，1 から 4 までの整数が 1 つずつ書かれている。このカードをよく混ぜて，1 枚引いては数字を記録し，カードを元に戻す。この試行を $n$ 回繰り返し，記録した順に数字を並べて得られる数列を，$a_1$，$a_2$，…，$a_n$ とする。

(1) 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし，$j=1,\ 2,\ 3,\ 4$ とする。

(i) $A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ。

(ii) $n \geqq 2$ のとき，$A_n(j)$ $(j=3,\ 4)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，…，$A_{n-1}(j)$ で表し，$A_n(3)$，$A_n(4)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率を求めよ。

[2007]

## 解答例

(1) (i) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合だけより，

$$A_n(1) = 1$$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるのは，$a_1 = 1$ のとき ${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1$ 通り，$a_1 = 2$ のとき 1 通りより，

$$A_n(2) = (n-1)+1 = n$$

(ii) $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$ のとき，$a_{n-1}$ は，$a_{n-1}=1$，$a_{n-1}=2$，$a_{n-1}=3$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ より，

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より，$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3) = A_1(3) + \sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 4$ のとき，$a_{n-1}$ は，$a_{n-1}=1$，$a_{n-1}=2$，$a_{n-1}=3$，$a_{n-1}=4$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$，$A_{n-1}(4)$ より，

$$A_n(4) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3) + A_{n-1}(4)$$

すると，$A_n(4) = 1 + (n-1) + \frac{1}{2}(n-1)n + A_{n-1}(4) = A_{n-1}(4) + \frac{1}{2}(n^2+n)$

よって，$n \geqq 2$ のとき，

$$A_n(4) = A_1(4) + \sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2}(k^2+k) = 1 + \frac{1}{2}\sum_{k=2}^{n}(k^2+k) = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)$$

$$= \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) + \frac{1}{2}n(n+1)\right\} = \frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

(2)　1 から 4 までの整数を重複して $n$ 個並べる $4^n$ 通りの場合が同様に確からしい。
　さて，$a_{n-1} > a_n$ より，$a_{n-1} = 2,\ 3,\ 4$ である。

(i)　$a_{n-1} = 2$ のとき
　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(2)$ 通り，また $a_n = 1$ より，この場合は，$A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$ 通りある。

(ii)　$a_{n-1} = 3$ のとき
　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(3)$ 通り，また $a_n = 1,\ 2$ より，この場合は，$A_{n-1}(3) \times 2 = \frac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$ 通りある。

(iii)　$a_{n-1} = 4$ のとき
　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(4)$ 通り，また $a_n = 1,\ 2,\ 3$ より，この場合は，$A_{n-1}(4) \times 3 = \frac{1}{6}(n-1)n(n+1) \times 3 = \frac{1}{2}(n-1)n(n+1)$ 通りある。

(i)(ii)(iii)より，条件を満たす数列の数は，

$$(n-1) + (n-1)n + \frac{1}{2}(n-1)n(n+1) = \frac{1}{2}(n-1)(n+1)(n+2)$$

　以上より，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ となる確率は，

$$\frac{(n-1)(n+1)(n+2)}{2 \cdot 4^n}$$

**コメント**

漸化式を立てるという誘導がついていますが，場合の数の有名問題です。

## 問　題

1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1) 4 回目以内（4 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(2) $r$ 回目以内（$r$ 回目も含む）に終了する確率を求めよ。ただし，$r\geqq 2$ とする。

[2006]

## 解答例

(1) 2 回目に終了する場合は，2 回同じ目が出る場合で，その確率は，

$$\frac{6\times 1}{6^2}=\frac{1}{6}$$

また，3 回目に終了する場合は，1 回目は任意の目，2 回目は 1 回目と異なる目，3 回目は 2 回目と同じ目が出るときである。その確率は，

$$\frac{6\times 5\times 1}{6^3}=\frac{5}{36}$$

さらに，4 回目に終了する場合は，1 回目は任意の目，2 回目，3 回目はその前の回の目と異なる目，4 回目は 3 回目と同じ目が出るときである。その確率は，

$$\frac{6\times 5^2\times 1}{6^4}=\frac{25}{216}$$

以上より，4 回目以内に終了する確率は，

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}+\frac{25}{216}=\frac{91}{216}$$

(2) ちょうど $k$ 回目に終了する場合は，$k\geqq 3$ のとき，1 回目が任意の目，2 回目から $k-1$ 回目までは，その前の回の目と異なる目が出て，$k$ 回目に $k-1$ 回目と同じ目が出るときである。その確率は，

$$\frac{6\times 5^{k-2}\times 1}{6^k}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}$$

この式に $k=2$ をあてはめると $\frac{1}{6}$ となり，成立している。

よって，$r$ 回目以内に終了する確率は，

$$\sum_{k=2}^{r}\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{k-2}=\frac{1}{6}\cdot\frac{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}}{1-\frac{5}{6}}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{r-1}$$

## コメント

センターレベルの基本的な確率計算と等比数列の和の融合問題です。

## 問　題

ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 $n$ 試行の結果，部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1) $P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2) $P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3) $P_A(n)$，$P_B(n)$ を $n$ を用いて表せ。

(4) 第 $n$ 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(n)$ を求めよ。　[2004]

## 解答例

(1) 部屋を移動する確率は $\frac{1}{3}$，移動しない確率は $\frac{2}{3}$ である。

まず，条件より，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ なので，

$$P_A(1)=\frac{2}{3}P_A(0)+\frac{1}{3}P_B(0)=\frac{2}{3},\ \ P_B(1)=\frac{1}{3}P_A(0)+\frac{2}{3}P_B(0)=\frac{1}{3}$$

$$P_A(2)=\frac{2}{3}P_A(1)+\frac{1}{3}P_B(1)=\frac{5}{9},\ \ P_B(2)=\frac{1}{3}P_A(1)+\frac{2}{3}P_B(1)=\frac{4}{9}$$

$$P_A(3)=\frac{2}{3}P_A(2)+\frac{1}{3}P_B(2)=\frac{14}{27},\ \ P_B(3)=\frac{1}{3}P_A(2)+\frac{2}{3}P_B(2)=\frac{13}{27}$$

すると，第 3 試行の結果，持ち点の期待値 $E(3)$ は，

$$E(3)=1+\left(1\times\frac{2}{3}-1\times\frac{1}{3}\right)+\left(1\times\frac{5}{9}-1\times\frac{4}{9}\right)+\left(1\times\frac{14}{27}-1\times\frac{13}{27}\right)=\frac{40}{27}$$

(2) (1)と同様にして，

$$P_A(n+1)=\frac{2}{3}P_A(n)+\frac{1}{3}P_B(n),\ \ P_B(n+1)=\frac{1}{3}P_A(n)+\frac{2}{3}P_B(n)$$

(3) (2)より，$P_A(n+1)+P_B(n+1)=P_A(n)+P_B(n)$ となり，

$$P_A(n)+P_B(n)=P_A(0)+P_B(0)=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$P_A(n+1)-P_B(n+1)=\frac{1}{3}\{P_A(n)-P_B(n)\}$ より，

$$P_A(n)-P_B(n)=\{P_A(0)-P_B(0)\}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$P_A(n)=\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$，$P_B(n)=\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

(4) $k$ 回目の試行の後，持ち点の期待値は，

$$1\times\frac{1}{2}\left\{1+\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}-1\times\frac{1}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^k\right\}=\left(\frac{1}{3}\right)^k$$

よって，第 $n$ 試行の結果，持ち点の期待値 $E(n)$ は，

$$E(n)=1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3}\right)^k=\frac{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}}{1-\frac{1}{3}}=\frac{3}{2}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}$$

**コメント**

定義だけで $E(n)$ を求めるのは困難で，そのため「和の期待値は期待値の和」という考え方を利用しました。その結果，(1)の $E(3)$ も解き直しています。しかし，これは数学 B の範囲外の領域にあるのですが。

## 問　題

点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。$n$ 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

## 解答例

(1)　$X(8)=2$ となるのは，8 回の移動のうち，正の向きに 5 回，負の向きに 3 回進んだときなので，その確率は ${}_8C_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{7}{32}$ である。

(2)　正の向きに $a$ 回，負の向きに $b$ 回進んだとき，$X(7)=k$ となったとすると，$a+b=7$，$a-b=k$ より，$k$ は奇数となる。

また，正の向きに進む確率と負の向きに進む確率は同じなので，$X(7)=k$ となる確率と $X(7)=-k$ となる確率は等しい。

(i)　$|X(7)|=1$ のとき　正の向きに 4 回，負の向きに 3 回進むと $X(7)=1$ となることより，$|X(7)|=1$ の確率は ${}_7C_4\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\left(\dfrac{1}{2}\right)^3\times 2=\dfrac{35}{64}$ となる。

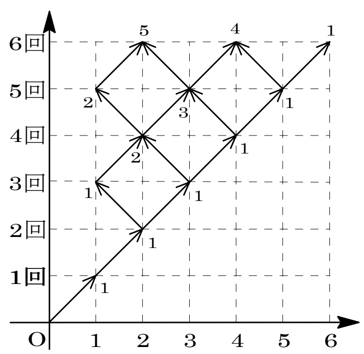
(ii)　$|X(7)|=3$ のとき　正の向きに 5 回，負の向きに 2 回進むと $X(7)=3$ となることより，$|X(7)|=3$ の確率は ${}_7C_5\left(\dfrac{1}{2}\right)^5\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\times 2=\dfrac{21}{64}$ となる。

(iii)　$|X(7)|=5$ のとき　正の向きに 6 回，負の向きに 1 回進むと $X(7)=5$ となることより，$|X(7)|=5$ の確率は ${}_7C_6\left(\dfrac{1}{2}\right)^6\left(\dfrac{1}{2}\right)\times 2=\dfrac{7}{64}$ となる。

(iv)　$|X(7)|=7$ のとき　正の向きに 7 回進むと $X(7)=7$ となることより，$|X(7)|=7$ の確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^7\times 2=\dfrac{1}{64}$ となる。

(i)～(iv)より，$|X(7)|$ の期待値は，$1\times\dfrac{35}{64}+3\times\dfrac{21}{64}+5\times\dfrac{7}{64}+7\times\dfrac{1}{64}=\dfrac{35}{16}$ である。

(3)　1 回目が正の向きに進んだとき，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合について，横軸に P の座標，縦軸に移動回数，グラフの中の数字をその点に到達したときの条件を満たす場合の数とすると，右図のようになる。




すると，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合は，$5+4+1=10$ 通りある。

また，1 回目に負の向きに進んだときも同様となるので，求める確率は，$10\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 2=\frac{5}{16}$ である。

## コメント

(3)は，上のようなグラフを書いて場合の数を数えると，もれや重複が防げます。

## 問　題

(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち, 1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　$n$ 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。 [2002]

## 解答例

(1)　4 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9C_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^4 - 2 = 14$ 通りである。これより, 4 桁の自然数は $36\times 14 = 504$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9C_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は, 千の位が 0 でないことに注意すると，$1\times 2^3 - 1 = 7$ 通りである。これより, 4 桁の自然数は $9\times 7 = 63$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は，$504 + 63 = 567$ である。

(2)　(1)と同様に, $n$ 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9C_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^n - 2$ 通りである。これより, 4 桁の自然数は $36(2^n - 2)$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9C_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は, 最高位が 0 でないことに注意すると，$1\times 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$ 通りである。これより, 4 桁の自然数は $9(2^{n-1} - 1)$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は,

$$36(2^n - 2) + 9(2^{n-1} - 1) = 81(2^{n-1} - 1)$$

## コメント

(1)の一般化が(2)ですが，全く同じ考え方で解をつくることができます。

## 問　題

A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には, 直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で, やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し, 誰かが 2 連勝するか, または 100 回目の勝負を終えたとき, 終了する。ただし, 硬貨投げで勝つ確率は各々 $\frac{1}{2}$ である。

(1)　4 回以内の勝負で A が 2 連勝する確率を求めよ。

(2)　$n = 2,\ 3,\ \cdots,\ 100$ とする。$n$ 回以内の勝負で, A, B, C のうち誰かが 2 連勝する確率を求めよ。　[2001]

## 解答例

(1)　4 回以内の勝負で A が 2 連勝するのは, 勝者が順に, AA または BCAA の場合なので, その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{16}$$

(2)　A, B, C の誰も 2 連勝せずに $n$ 回目が終了するのは, ACBACBACB……または BCABCABCA……の場合なので, その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって, $n$ 回以内の勝負で, A, B, C のうち誰かが 2 連勝する確率は,

$$1 - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

## コメント

有名な巴戦の問題です。

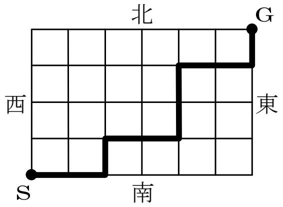
## 問　題

図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

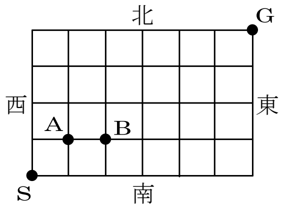
(1) S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2) S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

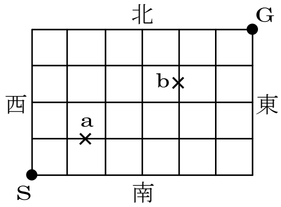
(3) 図 3 の a, b の 2 か所が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



（図1）



（図2）



（図3）

[1999]

## 解答例

(1) 東方向に 1 区画進むのを→，北方向に 1 区画進むのを↑で表すと，S 地点から G 地点に至る 1 つの経路は，→を 6 個，↑を 4 個を 1 列に並べる順列に対応するので，求める経路の数は，

$$\frac{10!}{6!4!} = 210 \text{ 通り}$$

(2) (1)と同様に考えて，S 地点から A 地点へは 2 通り，A 地点から B 地点へは 1 通り，B 地点から G 地点へは $\frac{7!}{4!3!} = 35$ 通りより，求める経路の数は，

$$2 \times 1 \times 35 = 70 \text{ 通り}$$

(3) (2)より a 点を通る経路の数は，70 通りとなる。

また，b 点を通る経路の数は，$\frac{6!}{4!2!} \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} = 45$ 通り，a 点と b 点をともに通る経路の数は，$2 \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} \times 1 \times \frac{3!}{2!1!} = 18$ 通りとなる。

よって a 点，b 点を少なくとも 1 回通る経路の数は，$70 + 45 - 18 = 97$ 通りである。

(1)より，a 点と b 点をともに通らない経路の数は，$210 - 97 = 113$ 通りとなる。

## コメント

有名な経路問題です。複雑な仕掛けはまったくありませんでした。

## 問　題

ある駅の待合室に，$n$ 個のいすが横一列に並んでいる。$k$ 人が，どの二人も隣り合わないように，いすにすわる場合の数を，$f(n,\ k)$ とする。$n \geqq 2k-1$ のとき，次を証明せよ。

$$f(n,\ k)={}_{n-k+1}\mathrm{C}_k \times (k!)$$ [1998]

## 解答例

$n-k$ 個の空席のいすが横一列に並べてあるとすると，そのいすの間または両端は $n-k+1$ 箇所ある。

条件より，$n \geqq 2k-1$ なので $n-k+1 \geqq k$ となり，この $n-k+1$ 箇所の中から $k$ 箇所選び（${}_{n-k+1}\mathrm{C}_k$ 通り）その場所にいすにすわった $k$ 人が割り込む（$k!$ 通り）と考えると，題意に適するすわり方となる。

よって，$f(n,\ k)={}_{n-k+1}\mathrm{C}_k \times (k!)$

## コメント

結論が与えられているので，その根拠の説明だけです。上で述べた考え方は，隣り合わないという条件のついた並べ方の数を求めるときの常套手段です。

## 問　題

無作為に 13 人を選ぶとき，日曜日生まれの人の数を $X$，土曜日生まれの人の数を $Y$ とする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，どの曜日に生まれる確率も $\dfrac{1}{7}$ とする。

(1)　$X=k,\ Y=m$ となる確率 $P(X=k,\ Y=m)$ を $k,\ m$ の式として表せ。ただし，$0\leqq k,\ 0\leqq m,\ k+m\leqq 13$ とする。

(2)　$P(X=k,\ Y=2)$ が最大となる $k$ を求めよ。　[1998]

## 解答例

(1)　日曜日生まれが $k$ 人，土曜日生まれが $m$ 人，その他の曜日生まれが $13-k-m$ 人より，

$$P(X=k,\ Y=m)={}_{13}\mathrm{C}_k\,{}_{13-k}\mathrm{C}_m\left(\frac{1}{7}\right)^k\left(\frac{1}{7}\right)^m\left(\frac{5}{7}\right)^{13-k-m}$$

$$=\frac{13!}{k!(13-k)!}\cdot\frac{(13-k)!}{m!(13-k-m)!}\cdot\frac{5^{13-k-m}}{7^{13}}$$

$$=\frac{13!}{k!m!(13-k-m)!}\cdot\frac{5^{13-k-m}}{7^{13}}$$

(2)　$P(X=k,\ Y=2)=\dfrac{13!}{k!2!(13-k-2)!}\cdot\dfrac{5^{13-k-2}}{7^{13}}=\dfrac{13!}{2\cdot 7^{13}}\cdot\dfrac{5^{11-k}}{k!(11-k)!}$

$P(X=k,\ Y=2)=P_k$ とおくとき，$\dfrac{P_{k+1}}{P_k}=\dfrac{\dfrac{5^{10-k}}{(k+1)!(10-k)!}}{\dfrac{5^{11-k}}{k!(11-k)!}}=\dfrac{11-k}{5(k+1)}$

$$P_{k+1}>P_k\iff\frac{P_{k+1}}{P_k}>1\iff\frac{11-k}{5(k+1)}>1\iff k<1\iff k=0$$

$$P_{k+1}=P_k\iff\frac{P_{k+1}}{P_k}=1\iff\frac{11-k}{5(k+1)}=1\iff k=1$$

$$P_{k+1}<P_k\iff\frac{P_{k+1}}{P_k}<1\iff\frac{11-k}{5(k+1)}<1\iff k>1\iff k\geqq 2$$

以上より，$P_0<P_1=P_2>P_3>\cdots\cdots>P_{11}$

よって，$k=1$ または $2$ のとき，$P(X=k,\ Y=2)$ は最大となる。

## コメント

(2)まで含めて，超頻出の問題です。

## 問　題

複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする△OAB がある。ただし, O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を, それぞれ$\alpha$, $\beta$, $z$とするとき, $\alpha\beta=z$が成り立つとする。

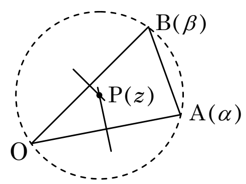
(1) 複素数$\alpha$の満たすべき条件を求め, 点$\mathrm{A}(\alpha)$が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点$\mathrm{P}(z)$の存在範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。 [2017]

## 解答例

(1) 原点 O, 点$\mathrm{A}(\alpha)$, 点$\mathrm{B}(\beta)$を頂点とする△OAB について,

$$\alpha\neq 0,\ \beta\neq 0,\ \alpha\neq\beta\cdots\cdots\cdots①$$




このとき, 点$\mathrm{P}(z)$は△OAB の外心なので, 辺 OA および辺 OB の垂直二等分線の交点となり,

$$|z|=|z-\alpha|\cdots\cdots\cdots②,\ |z|=|z-\beta|\cdots\cdots\cdots③$$

ここで, $z=\alpha\beta$を②に代入すると, $|\alpha\beta|=|\alpha\beta-\alpha|$となり, ①から$|\alpha|\neq 0$より,

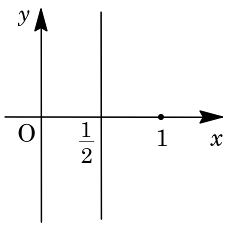
$$|\alpha||\beta|=|\alpha||\beta-1|,\ |\beta|=|\beta-1|\cdots\cdots\cdots④$$

同様に, $z=\alpha\beta$を③に代入すると, $|\alpha\beta|=|\alpha\beta-\beta|$となり, ①から$|\beta|\neq 0$より,

$$|\alpha||\beta|=|\alpha-1||\beta|,\ |\alpha|=|\alpha-1|\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より, 点$\mathrm{A}(\alpha)$, 点$\mathrm{B}(\beta)$は, ともに原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし, ①から$\alpha\neq\beta$である。

以上より, $\alpha$の満たすべき条件は$|\alpha|=|\alpha-1|$であり, 点$\mathrm{A}(\alpha)$の描く図形は右図の直線である。




(2) (1)より, $\alpha=\dfrac{1}{2}+ai$, $\beta=\dfrac{1}{2}+bi$ $(a\neq b)$とおくことができ,

$$z=\alpha\beta=\left(\frac{1}{2}+ai\right)\left(\frac{1}{2}+bi\right)=\left(\frac{1}{4}-ab\right)+\frac{1}{2}(a+b)i$$

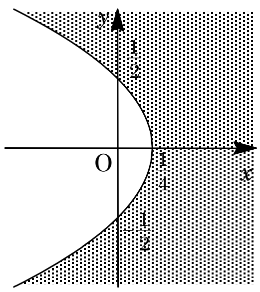
ここで, $z=x+yi$とおくと, $x=\dfrac{1}{4}-ab$, $y=\dfrac{1}{2}(a+b)$となり,

$$a+b=2y\cdots\cdots\cdots⑥,\ ab=\frac{1}{4}-x\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より, $a$, $b$ $(a\neq b)$は, $t$ についての 2 次方程式$t^2-2yt+\left(\dfrac{1}{4}-x\right)=0$の異なる実数解となり, その条件は,

$$D/4=y^2-\left(\frac{1}{4}-x\right)>0,\ y^2>-\left(x-\frac{1}{4}\right)$$

よって, 点$\mathrm{P}(z)$の存在範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。



## コメント

複素数と図形に領域が絡んだ問題です。(1)は共役複素数を用いた形で，$\alpha+\overline{\alpha}=1$ を結論としてもよいでしょう。なお，O，A，B が一直線上にないということについては，(1)の結果から満たしていることがわかります。

## 問　題

複素数平面上の点 0 を中心とする半径 2 の円 $C$ 上に点 $z$ がある。$a$ を実数の定数とし，$w=z^2-2az+1$ とおく。

(1) $|w|^2$ を $z$ の実部 $x$ と $a$ を用いて表せ。

(2) 点 $z$ が $C$ 上を一周するとき，$|w|$ の最小値を $a$ を用いて表せ。 [2016]

## 解答例

(1) 点 $z$ は，点 0 を中心とする半径 2 の円 $C$ 上にあるので，$|z|=2$ から，

$$|z|^2=4,\ z\overline{z}=4 \cdots\cdots\cdots ①$$

$z$ の実部が $x$ より，$x=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ となり，$z+\overline{z}=2x \cdots\cdots\cdots ②$

さて，条件より，$a$ を実数の定数として，$w=z^2-2az+1$ なので，

$$\begin{aligned}|w|^2&=w\overline{w}=(z^2-2az+1)\{(\overline{z})^2-2a\overline{z}+1\}\\&=(z\overline{z})^2-2az^2\overline{z}+z^2-2az(\overline{z})^2+4a^2z\overline{z}-2az+(\overline{z})^2-2a\overline{z}+1\\&=(z\overline{z})^2-2az\overline{z}(z+\overline{z})+z^2+(\overline{z})^2+4a^2z\overline{z}-2a(z+\overline{z})+1\\&=(z\overline{z})^2-2az\overline{z}(z+\overline{z})+(z+\overline{z})^2-2z\overline{z}+4a^2z\overline{z}-2a(z+\overline{z})+1\end{aligned}$$

①②を代入すると，

$$\begin{aligned}|w|^2&=4^2-2a\cdot4\cdot2x+(2x)^2-2\cdot4+4a^2\cdot4-2a\cdot2x+1\\&=4x^2-20ax+16a^2+9 \cdots\cdots\cdots ③\end{aligned}$$

(2) 点 $z$ が $C$ 上を一周するとき，$-2\leqq x\leqq 2$ であり，③から，

$$|w|^2=4\left(x-\frac{5}{2}a\right)^2-9a^2+9$$

(i) $\dfrac{5}{2}a<-2\ \left(a<-\dfrac{4}{5}\right)$のとき

$|w|^2$ は，$x=-2$ のとき最小値 $16+40a+16a^2+9=(4a+5)^2$ をとる。

すると，$|w|$ の最小値は，$\sqrt{(4a+5)^2}=|4a+5|$ である。

(ii) $-2\leqq\dfrac{5}{2}a\leqq 2\ \left(-\dfrac{4}{5}\leqq a\leqq\dfrac{4}{5}\right)$のとき

$|w|^2$ は，$x=\dfrac{5}{2}a$ のとき最小値 $-9a^2+9$ をとる。

すると，$|w|$ の最小値は，$\sqrt{-9a^2+9}=3\sqrt{-a^2+1}$ である。

(iii) $\dfrac{5}{2}a>2\ \left(a>\dfrac{4}{5}\right)$のとき

$|w|^2$ は，$x=2$ のとき最小値 $16-40a+16a^2+9=(4a-5)^2$ をとる。

すると，$|w|$ の最小値は，$\sqrt{(4a-5)^2}=|4a-5|$ である。

## コメント

複素数平面を題材にした問題です。(1)では，$z$ と $\overline{z}$ の和と積に注目した解法を採用しています。また，(2)の結論は，絶対値をはずし 5 つの場合に分けて記述しても構いません。

## 問　題

複素数 $a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$a_1=1+i,\quad a_{n+1}=\frac{a_n}{2a_n-3}$$

ただし，$i$ は虚数単位である。このとき以下の問いに答えよ。

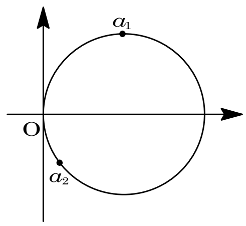
(1) 複素数平面上の 3 点 $0$，$a_1$，$a_2$ を通る円の方程式を求めよ。

(2) すべての $a_n$ は(1)で求めた円上にあることを示せ。 [2005]

## 解答例

(1) $a_1=1+i$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2a_n-3}$ ……①より，

$$a_2=\frac{a_1}{2a_1-3}=\frac{1+i}{2(1+i)-3}=\frac{1+i}{-1+2i}=\frac{1-3i}{5}$$




3 点 $0$，$a_1$，$a_2$ を通る円の中心を $p+qi$ とおくと，

$$p^2+q^2=(p-1)^2+(q-1)^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$p^2+q^2=\left(p-\frac{1}{5}\right)^2+\left(q+\frac{3}{5}\right)^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より $p+q-1=0$，③より $-p+3q+1=0$

よって，$p=1$，$q=0$ から，円の中心は点 $1$ となるので，円周上の任意の点を $z$ とすると，3 点 $0$，$a_1$，$a_2$ を通る円の方程式は，

$$|z-1|=1$$

(2) $a_1\neq 0$ なので，①から帰納的に $a_n\neq 0$ となり，

$$\frac{1}{a_{n+1}}=\frac{2a_n-3}{a_n}=-\frac{3}{a_n}+2$$

変形すると，$\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{2}=-3\left(\dfrac{1}{a_n}-\dfrac{1}{2}\right)$

$$\frac{1}{a_n}-\frac{1}{2}=\left(\frac{1}{a_1}-\frac{1}{2}\right)(-3)^{n-1}=\left(\frac{1}{1+i}-\frac{1}{2}\right)(-3)^{n-1}=-\frac{i}{2}(-3)^{n-1}$$

よって，$\dfrac{1}{a_n}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{i}{2}(-3)^{n-1}$ から，$a_n=\dfrac{2}{1-(-3)^{n-1}i}$ となり，

$$|a_n-1|=\left|\frac{2}{1-(-3)^{n-1}i}-1\right|=\left|\frac{2-1+(-3)^{n-1}i}{1-(-3)^{n-1}i}\right|=\left|\frac{1+(-3)^{n-1}i}{1-(-3)^{n-1}i}\right|$$

$$=\frac{|1+(-3)^{n-1}i|}{|1-(-3)^{n-1}i|}=\frac{\sqrt{1+9^{n-1}}}{\sqrt{1+9^{n-1}}}=1$$

したがって，すべての $a_n$ は円 $|z-1|=1$ 上にある。

## コメント

有名なタイプの漸化式で，$a_n$ を求めることは容易です。そのため，数学的帰納法の出番はありませんでした。

## 問　題

$z$ を複素数とし，$i$ を虚数単位とする。

(1)　$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}$ が実数となる点 $z$ 全体の描く図形 $P$ を複素数平面上に図示せよ。

(2)　$z$ が上で求めた図形 $P$ 上を動くときに $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ の描く図形を複素数平面上に図示せよ。　[2003]

## 解答例

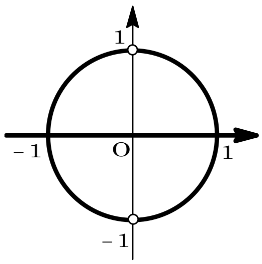
(1)　$\dfrac{1}{z+i}+\dfrac{1}{z-i}=\dfrac{2z}{(z+i)(z-i)}=\dfrac{2z}{z^2+1}$ が実数より，$\dfrac{2z}{z^2+1}=\dfrac{2\overline{z}}{\overline{z}^2+1}$

そこで，$z\neq\pm i$ のもとで，

$$z(\overline{z}^2+1)=\overline{z}(z^2+1)，\ |z|^2\overline{z}-|z|^2z+z-\overline{z}=0，\ (|z|^2-1)(z-\overline{z})=0$$

$|z|^2-1=0$ のとき，点 $z$ は $|z|=1$ から原点中心で半径 1 の円を描く。$z-\overline{z}=0$ のとき，点 $z$ は $z=\overline{z}$ から実軸を描く。

これを図示すると，点 $z$ の描く図形 $P$ は右図の太線部となる。ただし，白丸の点は除く。




(2)　(1)より $z\neq\pm i$ なので，$w=\dfrac{z+i}{z-i}$ から $w\neq 0$ となり，

$$w(z-i)=z+i，\ (w-1)z=(w+1)i$$

$w=1$ では成立しないので，$w\neq1$ のもとで，$z=\dfrac{(w+1)i}{w-1}$ となる。

(i)　$z=\overline{z}$ のとき

$$\frac{(w+1)i}{w-1}=\frac{(\overline{w}+1)(-i)}{\overline{w}-1}，\ (w+1)(\overline{w}-1)=-(w-1)(\overline{w}+1)，\ w\overline{w}=1$$

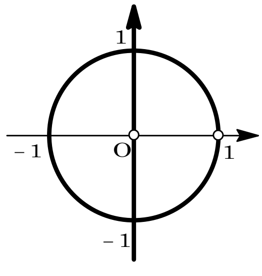
よって，$|w|=1$ より，点 $w$ は原点中心で半径 1 の円を描く。

(ii)　$|z|=1$ のとき

$$\left|\frac{(w+1)i}{w-1}\right|=1，\ \frac{|w+1|\cdot|i|}{|w-1|}=1，\ |w+1|=|w-1|$$

よって，点 $w$ は 2 点1，$-1$ を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸を描く。

(i)(ii)より，点 $w$ の描く図形は右図の太線部である。ただし，白丸の点は除く。




## コメント

複素数平面上の図形についての基本的な問題です。$z=x+yi$ と設定しなくても，結論が導けます。

## 問　題

$n$ を 3 以上の自然数とするとき，次を示せ。ただし，$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とし，$i$ を虚数単位とする。

(1)　$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

ただし，$k$ は自然数とし，$\overline{\alpha}$ は $\alpha$ に共役な複素数とする。

(2)　$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$

(3)　$\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$　[2002]

## 解答例

(1)　$\alpha=\cos\dfrac{2\pi}{n}+i\sin\dfrac{2\pi}{n}$ とすると，$\overline{\alpha}=\cos\dfrac{2\pi}{n}-i\sin\dfrac{2\pi}{n}$

$$\alpha^k=\cos\frac{2\pi k}{n}+i\sin\frac{2\pi k}{n},\quad \overline{\alpha}^k=\cos\frac{2\pi k}{n}-i\sin\frac{2\pi k}{n}$$

よって，$\alpha^k+\overline{\alpha}^k=2\cos\dfrac{2\pi k}{n}$

(2)　$\alpha^n=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ より，方程式 $x^n=1$ の解は，$x=1$，$\alpha$，$\alpha^2$，…，$\alpha^{n-1}$

$$x^n-1=(x-1)(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})$$

また，$x^n-1=(x-1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)$ より，

$$(x-\alpha)(x-\alpha^2)\cdots(x-\alpha^{n-1})=x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1$$

$x=1$ を代入すると，$n=(1-\alpha)(1-\alpha^2)\cdots(1-\alpha^{n-1})$ となる。

(3)　$k$ を $1\leqq k\leqq n-1$ を満たす自然数とするとき，

$$1-\alpha^k=1-\cos\frac{2\pi k}{n}-i\sin\frac{2\pi k}{n}=2\sin^2\frac{\pi k}{n}-2i\sin\frac{\pi k}{n}\cos\frac{\pi k}{n}$$

$$=2\sin\frac{\pi k}{n}\left(\sin\frac{\pi k}{n}-i\cos\frac{\pi k}{n}\right)$$

$$|1-\alpha^k|=\left|2\sin\frac{\pi k}{n}\right|\left|\sin\frac{\pi k}{n}-i\cos\frac{\pi k}{n}\right|$$

$\dfrac{\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi k}{n}\leqq\dfrac{n-1}{n}\pi$ より，$\sin\dfrac{\pi k}{n}>0$ なので，

$$|1-\alpha^k|=2\sin\frac{\pi k}{n}\sqrt{\sin^2\frac{\pi k}{n}+\cos^2\frac{\pi k}{n}}=2\sin\frac{\pi k}{n}$$

ここで，(2)より，$n=|1-\alpha||1-\alpha^2|\cdots|1-\alpha^{n-1}|$ なので，

$$n=2\sin\frac{\pi}{n}2\sin\frac{2\pi}{n}\cdots2\sin\frac{n-1}{n}\pi$$

以上より，$\dfrac{n}{2^{n-1}}=\sin\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{2\pi}{n}\cdots\sin\dfrac{n-1}{n}\pi$

## コメント

(2)は誘導がまったくないので，経験がないと上のような解は難しいでしょう。

## 問　題

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が 0 以上 2 以下の実数であるような複素数 $z$（$z\neq 0$）を表す複素数平面上の点の集合を，式で表し，図示せよ。 [1998]

## 解答例

$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ が実数なので，$\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{\overline{z}}{2}+\dfrac{1}{\overline{z}}$

$$\frac{z-\overline{z}}{2}+\frac{\overline{z}-z}{z\overline{z}}=0,\ \ z\overline{z}(z-\overline{z})+2(\overline{z}-z)=0$$

$(z-\overline{z})(z\overline{z}-2)=0$ より，$z=\overline{z}$，$z\overline{z}=2$

(i)　$z=\overline{z}$ のとき　$z$ は実数なので点 $z$ は実軸上にある。

$0\leqq\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}\leqq 2$ より，$0\leqq\dfrac{z^2+2}{2z}\leqq 2$

まず，$z^2+2>0$ なので左側の不等式は，$z>0$

すると，右側の不等式は，$z^2+2\leqq 4z$，$z^2-4z+2\leqq 0$

$2-\sqrt{2}\leqq z\leqq 2+\sqrt{2}$

(ii)　$z\overline{z}=2$ のとき

$|z|^2=2$ なので点 $z$ は原点中心で半径 $\sqrt{2}$ の円周上にある。

$z=\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)$　$(-\pi\leqq\theta<\pi)$ とおくと，

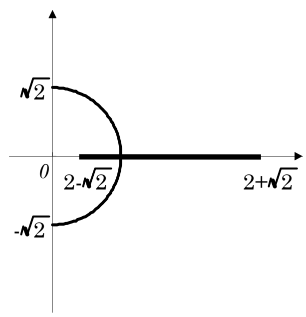
$$\frac{z}{2}+\frac{1}{z}=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{1}{\sqrt{2}(\cos\theta+i\sin\theta)}$$

$$=\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta+i\sin\theta)+\frac{\sqrt{2}}{2}(\cos\theta-i\sin\theta)$$

$$=\sqrt{2}\cos\theta$$

$0\leqq\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}\leqq 2$ より，$0\leqq\sqrt{2}\cos\theta\leqq 2$

よって，$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$




(i)(ii)をまとめて図示すると，右図のようになる。

ただし，端点は含む。

## コメント

複素数の頻出タイプの問題です。なお，(ii)の場合に $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}$ の値がこの複素数の実部と等しくなっていますが，これは $\overline{z}=\dfrac{2}{z}$ を代入すると $\dfrac{z}{2}+\dfrac{1}{z}=\dfrac{z+\overline{z}}{2}$ となることからわかります。しかし，この変形はなかなか思いつくものではありません。

## 問　題

楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。$C_1$ と $C_2$ の焦点が一致しているならば，$C_1$ と $C_2$ の交点でそれぞれの接線は直交することを示せ。　[2007]

## 解答例

楕円 $C_1:\dfrac{x^2}{\alpha^2}+\dfrac{y^2}{\beta^2}=1$ と双曲線 $C_2:\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の焦点が一致することより，

$$\alpha^2-\beta^2=a^2+b^2\quad(\alpha^2>\beta^2)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$C_1$ と $C_2$ の交点の座標を $(p,\ q)$ とおくと，

$$\frac{p^2}{\alpha^2}+\frac{q^2}{\beta^2}=1,\ \beta^2p^2+\alpha^2q^2=\alpha^2\beta^2\cdots\cdots\cdots②$$

$$\frac{p^2}{a^2}-\frac{q^2}{b^2}=1,\ b^2p^2-a^2q^2=a^2b^2\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，交点 $(p,\ q)$ における $C_1$ と $C_2$ の接線をそれぞれ $l_1$，$l_2$ とおくと，

$$l_1:\frac{px}{\alpha^2}+\frac{qy}{\beta^2}=1,\ l_2:\frac{px}{a^2}-\frac{qy}{b^2}=1$$

これより，$l_1$，$l_2$ の法線ベクトル $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$ は，$\overrightarrow{n_1}=\left(\dfrac{p}{\alpha^2},\ \dfrac{q}{\beta^2}\right)$，$\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{p}{a^2},\ -\dfrac{q}{b^2}\right)$

ここで，②③をまとめると，$\begin{pmatrix}\beta^2 & \alpha^2\\ b^2 & -a^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix}p^2\\ q^2\end{pmatrix}=\frac{1}{-a^2\beta^2-\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}-a^2 & -\alpha^2\\ -b^2 & \beta^2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha^2\beta^2\\ a^2b^2\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}\begin{pmatrix}a^2\alpha^2\beta^2+a^2\alpha^2b^2\\ \alpha^2b^2\beta^2-a^2b^2\beta^2\end{pmatrix}$$

すると，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=\dfrac{p^2}{\alpha^2a^2}-\dfrac{q^2}{\beta^2b^2}=\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\beta^2+b^2)-\dfrac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(\alpha^2-a^2)$

$$=\frac{1}{a^2\beta^2+\alpha^2b^2}(-\alpha^2+\beta^2+a^2+b^2)$$

①より，$\overrightarrow{n_1}\cdot\overrightarrow{n_2}=0$ となるので，2 接線 $l_1$，$l_2$ は直交する。

## コメント

文字が多くて計算は簡単ではありませんが，楕円と双曲線についての有名問題です。

## 問　題

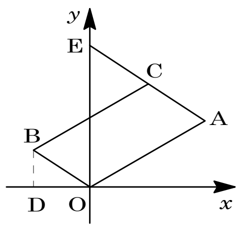
$xy$ 平面上の異なる 2 点 $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ $(x_2 \neq 0)$ に対して，点 $\mathrm{C}(x_1+x_2,\ y_1+y_2)$, $\mathrm{D}(x_2,\ 0)$をとり，直線 AC と $y$ 軸の交点を E とする。ただし，原点 O は直線 AB 上にはないとする。

(1)　直角三角形 ODE の面積を $S$ とするとき，$S$ を $x_1$, $y_1$, $x_2$, $y_2$ で表せ。

(2)　A，B が楕円 $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\ (a>b>0)$ 上を動くとき，$S$ の最大値を $a$，$b$ で表せ。

(3)　A，B が $L$ 上にあって(2)で求めた $S$ の最大値を与えるとき，点 C は楕円 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2=1$ 上にあることを示せ。　[2002]

## 解答例




(1)　直線 AC の傾きは $\dfrac{y_2}{x_2}$ より，その方程式は，

$$y-y_1=\frac{y_2}{x_2}(x-x_1)$$

$x=0$ とすると，$y=y_1-\dfrac{x_1y_2}{x_2}=\dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2}$

よって，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2}\right)$となる。

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}=\frac{1}{2}\left|x_2\cdot\frac{x_2y_1-x_1y_2}{x_2}\right|=\frac{1}{2}|x_2y_1-x_1y_2|$$

(2)　A，B が $L:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあるので，$\mathrm{A}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$，$\mathrm{B}(a\cos\varphi,\ b\sin\varphi)$ とおくことができ，

$$S=\frac{1}{2}|ab\sin\theta\cos\varphi-ab\cos\theta\sin\varphi|=\frac{1}{2}ab|\sin(\theta-\varphi)|$$

$\theta$，$\varphi$ は任意の実数より，$|\sin(\theta-\varphi)|=1$ のとき，$S$ は最大値 $\dfrac{1}{2}ab$ をとる。

(3)　(2)と同様にして，$\mathrm{C}(a\cos\theta+a\cos\varphi,\ b\sin\theta+b\sin\varphi)$ とおくと，

$$\frac{(a\cos\theta+a\cos\varphi)^2}{2a^2}+\frac{(b\sin\theta+b\sin\varphi)^2}{2b^2}=\frac{2+2(\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi)}{2}$$
$$=\frac{2+2\cos(\theta-\varphi)}{2}$$

さて，$S$ が最大となるのは $|\sin(\theta-\varphi)|=1$ すなわち $\sin(\theta-\varphi)=\pm1$ のときなので，このとき $\cos(\theta-\varphi)=0$ となり，

$$\frac{(a\cos\theta+a\cos\varphi)^2}{2a^2}+\frac{(b\sin\theta+b\sin\varphi)^2}{2b^2}=1$$

$$\left(\frac{a\cos\theta+a\cos\varphi}{\sqrt{2}a}\right)^2+\left(\frac{b\sin\theta+b\sin\varphi}{\sqrt{2}b}\right)^2=1$$

以上より，点 C は楕円 $\left(\dfrac{x}{\sqrt{2}a}\right)^2+\left(\dfrac{y}{\sqrt{2}b}\right)^2=1$ 上にある。

**コメント**

楕円をパラメータ表示すると，自然に結論が導けます。

## 問　題

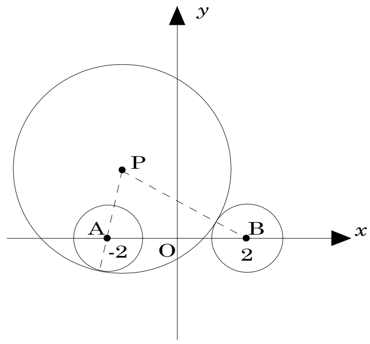
中心がそれぞれ$(-2,\ 0)$, $(2,\ 0)$である半径 1 の円 $A$, $B$ を考える。円 $C$ が, $A$ を内側に含み, $B$ の外側にあり，しかも, $A$, $B$ の両方に接しながら動くとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 $C$ の中心の軌跡を求めよ。

(2) 円 $C$ が直線 $y=2$ に接するとき, $C$ の半径を求めよ。 [1998]

## 解答例

(1) $\mathrm{A}(-2,\ 0)$, $\mathrm{B}(2,\ 0)$とおき，円 $C$ の中心を P とすると,




$$\mathrm{PA}+1=\mathrm{PB}-1,\ \ \mathrm{PB}-\mathrm{PA}=2$$

よって, P は 2 点 A, B を焦点とする双曲線の $x<0$ の枝である。

その方程式を $\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ $(c^2=a^2+b^2)$

とおくと,

$2a=2$ かつ $c=2$ より，$a=1$, $b=\sqrt{3}$

すなわち, P の軌跡は双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{3}=1$ $(x<0)$………①

(2) 求める円 $C$ の半径を $r$ とし，①上の点を$(s,\ t)$とおくと,

$$s^2-\frac{t^2}{3}=1\ \ (s<0)\text{………②}$$

また，$t<2$ から条件より,

$$2-t=\sqrt{(s+2)^2+t^2}+1,\ \ 1-t=\sqrt{(s+2)^2+t^2}$$

$t\leqq 1$ で，$(1-t)^2=(s+2)^2+t^2$, $t=-\dfrac{1}{2}(s^2+4s+3)$………③

③を②に代入して,

$$3s^2-\frac{1}{4}(s^2+4s+3)^2=3,\ \ 12(s+1)(s-1)-(s+1)^2(s+3)^2=0$$

$$(s+1)\left\{12(s-1)-(s+1)(s+3)^2\right\}=0,\ \ (s+1)(s^3+7s^2+3s+21)=0$$

$$(s+1)\left\{s^2(s+7)+3(s+7)\right\}=0,\ \ (s+1)(s+7)(s^2+3)=0$$

$s<0$ より，$s=-1$, $s=-7$

③より，$t=0$, $t=-12$

このとき $C$ の半径は, 2 または 14 となる。

**コメント**

(1)は双曲線の定義を用いると，直接的に計算するより簡単です。(2)も同様に放物線の定義を用いてもよいのですが，計算量はあまり変わりません。なお，$s$ についての方程式を解くときに，途中の計算を闇雲に行うとたいへんなことになります。

## 問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のとき，$x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x \leqq x$ を示せ。

(2)　$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \dfrac{x^3}{3}$ を示せ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x - x\cos x}{x^3}$ を求めよ。　[2012]

## 解答例

(1)　$f(x) = x - \sin x$ とおくと，$f'(x) = 1 - \cos x \geqq 0$ から，$x \geqq 0$ のとき，

$$f(x) \geqq f(0) = 0,\ \sin x \leqq x$$

$g(x) = \sin x - x + \dfrac{x^3}{6}$ とおくと，$g'(x) = \cos x - 1 + \dfrac{x^2}{2}$，$g''(x) = -\sin x + x$

$x \geqq 0$ のとき，$\sin x \leqq x$ から，$g''(x) \geqq 0$ となり，$x \geqq 0$ のとき，

$$g'(x) \geqq g'(0) = 0$$

これより，$x \geqq 0$ のとき，$g(x) \geqq g(0) = 0$ となり，$x - \dfrac{x^3}{6} \leqq \sin x$

(2)　(1)より，$t \geqq 0$ において，$t - \dfrac{t^3}{6} \leqq \sin t \leqq t$ から，$t^2 - \dfrac{t^4}{6} \leqq t\sin t \leqq t^2$ ………①

$x \geqq 0$ として，①の各辺を 0 から $x$ まで積分すると，

$$\int_0^x \left(t^2 - \frac{t^4}{6}\right)dt \leqq \int_0^x t\sin t\,dt \leqq \int_0^x t^2\,dt$$

よって，$\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \leqq \displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt \leqq \dfrac{x^3}{3}$ ………②

(3)　$\displaystyle\int_0^x t\sin t\,dt = -\Big[t\cos t\Big]_0^x + \int_0^x \cos t\,dt = -x\cos x + \Big[\sin t\Big]_0^x = \sin x - x\cos x$

②より，$x \geqq 0$ のとき，$\dfrac{x^3}{3} - \dfrac{x^5}{30} \leqq \sin x - x\cos x \leqq \dfrac{x^3}{3}$ となり，$x > 0$ において，

$$\frac{1}{3} - \frac{x^2}{30} \leqq \frac{\sin x - x\cos x}{x^3} \leqq \frac{1}{3}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to +0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$ となる。

また，$x < 0$ のとき，$t = -x > 0$ とおくと，

$$\lim_{x\to -0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \lim_{t\to +0}\frac{\sin(-t) - (-t)\cos(-t)}{(-t)^3} = \lim_{t\to +0}\frac{\sin t - t\cos t}{t^3} = \frac{1}{3}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x - x\cos x}{x^3} = \frac{1}{3}$

## コメント

(2)と(3)は，一ひねりがあると思ったのですが，その予想に反し……。

## 問　題

正の実数 $r$ と $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲の実数 $\theta$ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ とおく。$a_n$，$b_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を漸化式

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{a_1}{b_1}$，$\dfrac{a_2}{b_2}$ を $\theta$ で表せ。

(2) $\dfrac{a_n}{b_n}$ を $n$ と $\theta$ で表せ。

(3) $\theta\neq 0$ のとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r\sin\theta}{\theta}$ を示せ。　[2010]

## 解答例

(1) 条件より, $r>0$, $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ に対して，$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ であり,

$$a_n=\frac{a_{n-1}+b_{n-1}}{2},\quad b_n=\sqrt{a_nb_{n-1}}$$

すると, 帰納的に，$a_n>0$，$b_n>0$ である。

さて，$a_1=\dfrac{a_0+b_0}{2}=\dfrac{r\cos\theta+r}{2}=r\cdot\dfrac{\cos\theta+1}{2}=r\cos^2\dfrac{\theta}{2}$

$$b_1=\sqrt{a_1b_0}=\sqrt{r\cos^2\frac{\theta}{2}\cdot r}=r\cos\frac{\theta}{2}$$

$$a_2=\frac{a_1+b_1}{2}=\frac{r\cos^2\frac{\theta}{2}+r\cos\frac{\theta}{2}}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2}+1}{2}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}$$

$$b_2=\sqrt{a_2b_1}=\sqrt{r\cos\frac{\theta}{2}\cos^2\frac{\theta}{4}\cdot r\cos\frac{\theta}{2}}=r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{4}$$

よって，$\dfrac{a_1}{b_1}=\cos\dfrac{\theta}{2}$，$\dfrac{a_2}{b_2}=\cos\dfrac{\theta}{4}$

(2) 0 以上の整数 $n$ に対して，$\dfrac{a_n}{b_n}=\cos\dfrac{\theta}{2^n}$ であることを，数学的帰納法で証明する。

(i) $n=0$ のとき　$a_0=r\cos\theta$，$b_0=r$ より，$\dfrac{a_0}{b_0}=\cos\dfrac{\theta}{2^0}$ となり成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$\dfrac{a_k}{b_k}=\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ すなわち $a_k=b_k\cos\dfrac{\theta}{2^k}$ が成り立つと仮定すると,

$$a_{k+1}=\frac{a_k+b_k}{2}=\frac{b_k\cos\frac{\theta}{2^k}+b_k}{2}=b_k\cdot\frac{\cos\frac{\theta}{2^k}+1}{2}=b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

$$b_{k+1}=\sqrt{a_{k+1}b_k}=\sqrt{b_k\cos^2\frac{\theta}{2^{k+1}}\cdot b_k}=b_k\cos\frac{\theta}{2^{k+1}}$$

よって，$\dfrac{a_{k+1}}{b_{k+1}}=\cos\dfrac{\theta}{2^{k+1}}$ となり，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, $n \geqq 0$ において, $\dfrac{a_n}{b_n} = \cos\dfrac{\theta}{2^n}$ である。

(3)　(2)より, $b_{n+1} = b_n \cos\dfrac{\theta}{2^{n+1}}$ なので, $n \geqq 1$ で,

$$b_n = b_0 \cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}$$
$$= r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cos\frac{\theta}{2^n}$$

すると, $b_n \sin\dfrac{\theta}{2^n} = r\cos\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\dfrac{\theta}{2^{n-2}}\cos\dfrac{\theta}{2^{n-1}}\cos\dfrac{\theta}{2^n}\sin\dfrac{\theta}{2^n}$

$$= r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cos\frac{\theta}{2^{n-1}}\cdot\frac{1}{2}\sin\frac{\theta}{2^{n-1}}$$
$$= r\cos\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2^2}\cdots\cdots\cos\frac{\theta}{2^{n-2}}\cdot\frac{1}{2^2}\sin\frac{\theta}{2^{n-2}}$$
$$= r\cos\frac{\theta}{2}\cdot\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{\theta}{2} = \frac{1}{2^n}r\sin\theta$$

よって, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n = \frac{\frac{1}{2^n}r\sin\theta}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}\cdot\frac{\frac{\theta}{2^n}}{\sin\frac{\theta}{2^n}} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

(2)より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n \cos\frac{\theta}{2^n} = \frac{r\sin\theta}{\theta}$

**コメント**

漸化式と極限についての問題です。解法の流れを読み取ることは難しくありません。ただ, (3)で, 数列$\{b_n\}$の一般項を, 2 倍角の公式を用いてまとめる部分は, 経験がものをいいます。

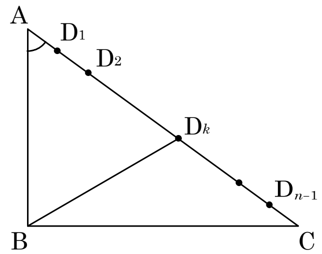
## 問　題

直角三角形△ABC において∠B は直角であるとし，辺 AC の長さを$\alpha$とする。辺 AC を $n$ 等分し，その分点を A に近い方から順に$D_1$，$D_2$，$D_3$，…，$D_{n-1}$とおく。$1\leqq k\leqq n-1$に対し，線分$BD_k$の長さを$L_k$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2$ を$\alpha$と $n$ で表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}$ を$\alpha$で表せ。 [2009]

## 解答例




(1) 条件より，$AD_k=\dfrac{k}{n}\alpha$ となり，$AB=l$ とおくと，

$$\cos A=\frac{l}{\alpha}$$

ここで，$\triangle ABD_k$に余弦定理を適用して，

$$(L_k)^2=l^2+\left(\frac{k}{n}\alpha\right)^2-2l\cdot\frac{k}{n}\alpha\cdot\frac{l}{\alpha}$$
$$=l^2+\frac{\alpha^2}{n^2}k^2-\frac{2l^2}{n}k$$

よって，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(L_k)^2=\sum_{k=1}^{n-1}\left(l^2+\frac{\alpha^2}{n^2}k^2-\frac{2l^2}{n}k\right)$

$$=l^2(n-1)+\frac{\alpha^2}{n^2}\cdot\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)-\frac{2l^2}{n}\cdot\frac{1}{2}(n-1)n$$
$$=\frac{(n-1)(2n-1)}{6n}\alpha^2$$

(2) (1)の結果より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{(n-1)(2n-1)}{6n^2}\alpha^2=\frac{\alpha^2}{6}\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)\left(2-\frac{1}{n}\right)=\frac{\alpha^2}{3}$$

## コメント

辺 AB の長さを設定するときは不安がよぎりますが，大切なのは，楽天的に計算を進めることです。

## 問　題

自然数 $n$ に対して，$a_n=\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\tan x)^{2n}dx$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_1$ を求めよ。

(2)　$a_{n+1}$ を $a_n$ で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$ を求めよ。　[2009]

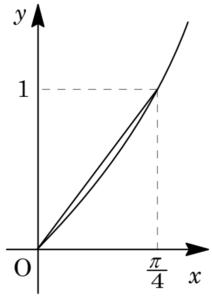
## 解答例

(1)　$a_1=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^2x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx=\Big[\tan x-x\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}=1-\frac{\pi}{4}$

(2)　$a_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n+2}x\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\left(\frac{1}{\cos^2x}-1\right)dx$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\cdot\frac{1}{\cos^2x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{4}}\tan^{2n}x\,dx$$

$$=\left[\frac{1}{2n+1}\tan^{2n+1}x\right]_0^{\frac{\pi}{4}}-a_n=\frac{1}{2n+1}-a_n\cdots\cdots\cdots①$$




(3)　$0\leqq x\leqq\frac{\pi}{4}$ において，曲線 $y=\tan x$ は下に凸なので，

$$0\leqq\tan x\leqq\frac{4}{\pi}x,\ \ 0\leqq\tan^{2n}x\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}x^{2n}\cdots\cdots\cdots②$$

②を 0 から $\frac{\pi}{4}$ まで積分すると，$0\leqq a_n\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\int_0^{\frac{\pi}{4}}x^{2n}dx$

$$0\leqq a_n\leqq\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left[\frac{1}{2n+1}x^{2n+1}\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{1}{2n+1}\left(\frac{4}{\pi}\right)^{2n}\left(\frac{\pi}{4}\right)^{2n+1}=\frac{\pi}{4(2n+1)}$$

すると, $n\to\infty$ のとき $\frac{\pi}{4(2n+1)}\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=0$

(4)　①の両辺に $(-1)^{n+2}$ をかけると，

$$(-1)^{n+2}a_{n+1}=-(-1)^{n+2}a_n+\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}=(-1)^{n+1}a_n+\frac{(-1)^{n+2}}{2n+1}$$

$n\geqq 2$ において，$(-1)^{n+1}a_n=(-1)^2a_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(-1)^{k+2}}{2k+1}=1-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=2}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$

$$(-1)^{n+1}a_n=1-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}-\frac{(-1)^2}{1}=-\frac{\pi}{4}+\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}$$

以上より, (3)から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{2k-1}=\lim_{n\to\infty}\left\{(-1)^{n+1}a_n+\frac{\pi}{4}\right\}=\frac{\pi}{4}$

**コメント**

細かい詰めがやや面倒ですが，(4)の設問にある有名な級数の値を求める問題です。なお，(2)と(3)の設問は並列で，両者の結果が(4)に繋がるという解法をとっています。

## 問　題

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ とする。

(1)　$0<x<1$ ならば, $0<f(x)<1$ となることを示せ。

(2)　$f(x)-x=0$ となる $x$ をすべて求めよ。

(3)　$0<\alpha<1$ とし，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=\alpha\,,\ \ a_{n+1}=f(a_n)\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

とする。$\alpha$ の値に応じて，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2008]

## 解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{3x^2}{2x^2+1}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{6x(2x^2+1)-3x^2\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\dfrac{6x}{(2x^2+1)^2}$

$0<x<1$ のとき，$f'(x)>0$ から，$f(x)$ は単調に増加する。

すると，$f(0)=0$，$f(1)=1$ から, $0<f(x)<1$ である。

(2)　$f(x)-x=0$ から，$\dfrac{3x^2}{2x^2+1}=x$ となり，

$$2x^3-3x^2+x=0\,,\ \ x(x-1)(2x-1)=0$$

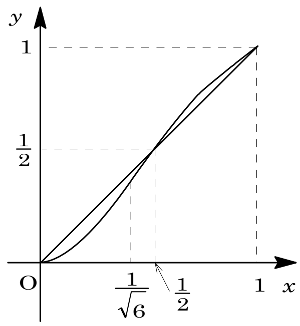
よって，$x=0,\ 1,\ \dfrac{1}{2}$

(3)　$f''(x)=\dfrac{6(2x^2+1)^2-6x\cdot 2(2x^2+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^4}$

$$=\frac{-6(6x^2-1)}{(2x^2+1)^3}$$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{\sqrt{6}}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | | $+$ | |
| $f''(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $f(x)$ | | ↗ | $\frac{3}{8}$ | ↗ | |

これより, $0<x<1$ における $y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。




(i)　$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ のとき

まず，$a_1=\alpha$ であり，また $0<a_k\leqq\alpha$ とすると，$a_{k+1}=f(a_k)$ なので，グラフから $0<a_{k+1}<\alpha$ となる。

これより, 帰納的に $0<a_n\leqq\alpha$ である。

さて，$0\leqq x\leqq\dfrac{1}{2}$ において，$g(x)=\dfrac{3x}{2x^2+1}$ とおく。

$$g'(x)=\frac{3(2x^2+1)-3x\cdot 4x}{(2x^2+1)^2}=\frac{-3(2x^2-1)}{(2x^2+1)^2}$$

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\frac{1}{2}$ |
|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $+$ | |
| $g(x)$ | $0$ | ↗ | $1$ |

すると，$f(x)=g(x)\cdot x$ であり，$0<\alpha<\dfrac{1}{2}$ より，

$$a_{n+1}=g(a_n)\cdot a_n\leqq g(\alpha)\cdot a_n$$

よって，$0<a_n \leqq \alpha\{g(\alpha)\}^{n-1}$

$0<g(\alpha)<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\{g(\alpha)\}^{n-1}\to 0$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ である。

(ii)　$\alpha = \dfrac{1}{2}$ のとき

$a_1 = \dfrac{1}{2}$ であり，(2)より，$a_2 = a_3 = \cdots = a_n = \dfrac{1}{2}$ となる。

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{1}{2}$ である。

(iii) $\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ のとき

まず，$a_1=\alpha$ であり，また $\alpha \leqq a_k <1$ とすると，$a_{k+1}=f(a_k)$ なので，グラフから $\alpha<a_{k+1}<1$ となる。

これより，帰納的に $\alpha \leqq a_n <1$ である。

さて，$a_{n+1}=\dfrac{3a_n^{\,2}}{2a_n^{\,2}+1}$ より，

$$1-a_{n+1} = 1-\frac{3a_n^{\,2}}{2a_n^{\,2}+1} = \frac{1-a_n^{\,2}}{2a_n^{\,2}+1} = \frac{a_n+1}{2a_n^{\,2}+1}(1-a_n)$$

ここで，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ において，$h(x)=\dfrac{x+1}{2x^2+1}$ とおくと，

$$h'(x) = \frac{2x^2+1-(x+1)\cdot 4x}{(2x^2+1)^2} = \frac{-(2x^2+4x-1)}{(2x^2+1)^2}$$

| $x$ | $\frac{1}{2}$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|
| $h'(x)$ | | $-$ | |
| $h(x)$ | $1$ | $\searrow$ | $\frac{2}{3}$ |

$h'(x)=0$ の解は $x=\dfrac{-2\pm\sqrt{6}}{4}$ より，$\dfrac{1}{2} \leqq x \leqq 1$ における $h(x)$ の増減は右表のようになる。

すると，$\dfrac{1}{2}<\alpha<1$ より，$\alpha \leqq a_n <1$ において，

$$1-a_{n+1} = h(a_n)(1-a_n) \leqq h(\alpha)(1-a_n)$$

よって，$0<1-a_n \leqq (1-\alpha)\{h(\alpha)\}^{n-1}$

$0<h(\alpha)<1$ より，$n\to\infty$ のとき $\{h(\alpha)\}^{n-1}\to 0$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1-a_n)=0$ すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = 1$ である。

## コメント

記憶は定かではありませんが，漸化式で与えられた数列の極限値だけをグラフで予測せよという乱暴な問題が 20 年以上も前にありました。その流れを汲むのが(3)の設問で，漸化式をグラフで解くという知識が必須です。

## 問　題

$f(x)$は最高次の係数が 1 の整式とする。

(1)　自然数 $n, m$ に対し，$\displaystyle\int_0^n t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m dt$ を示せ。

(2)　$f(x)$の次数を $r$ とするとき，次が成り立つことを示せ。

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{r+1}$$

(3)　すべての自然数 $n$ に対して $\displaystyle\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{2}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。

[2005]

## 解答例

(1)　実数 $t$ に対して $t \leqq k \leqq t+1$ となる自然数 $k$ をとると，$t^m \leqq k^m \leqq (t+1)^m$ から，

$$\int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq \int_{k-1}^{k} k^m dt \leqq \int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt\,,\quad \int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq k^m \leqq \int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt$$

$k$ を 1 から $n$ まで変化させて和をとると，

$$\sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \sum_{k=1}^{n}\int_{k-1}^{k} (t+1)^m dt$$

よって，$\displaystyle\int_0^n t^m dt \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \int_0^n (t+1)^m dt$

(2)　(1)より，$\displaystyle\frac{n^{m+1}}{m+1} \leqq \sum_{k=1}^{n} k^m \leqq \frac{(n+1)^{m+1}-1}{m+1} < \frac{(n+1)^{m+1}}{m+1}$ ………①

ここで，$f(x)$を $r$ 次の整式とすると，$f(x) = x^r + a_{r-1}x^{r-1} + \cdots + a_1x + a_0$

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) = \sum_{k=1}^{n} k^r + a_{r-1}\sum_{k=1}^{n} k^{r-1} + \cdots + a_1\sum_{k=1}^{n} k + a_0 n$$

①より，$\displaystyle\frac{n^{r+1}}{r+1} + a_{r-1}\frac{n^r}{r} + \cdots + a_1\frac{n^2}{2} + a_0 n \leqq \sum_{k=1}^{n} f(k)$

$$\frac{1}{r+1} + a_{r-1}\frac{1}{rn} + \cdots + a_1\frac{1}{2n^{r-1}} + a_0\frac{1}{n^r} \leqq \frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k)$$

①より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} f(k) < \frac{(n+1)^{r+1}}{r+1} + a_{r-1}\frac{(n+1)^r}{r} + \cdots + a_1\frac{(n+1)^2}{2} + a_0 n$

$$\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) < \frac{1}{r+1}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r+1} + \frac{a_{r-1}}{rn}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{r} + \cdots + \frac{a_1}{2n^{r-1}}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{2} + \frac{a_0}{n^r}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^{r+1}}\sum_{k=1}^{n} f(k) = \frac{1}{r+1}$ ………②

(3)　条件より，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{2}f(n)$……③なので，$\dfrac{1}{n^{r+1}}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{f(n)}{n^{r}}$

$n\to\infty$とすると，$f(n)$の$r$次の係数は1なので，②より，$\dfrac{1}{r+1}=\dfrac{1}{2}\times1$

すると，$r=1$から$f(x)=x+a$とおくことができ，③より，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k+a)=\frac{1}{2}(n+a),\ \ \frac{1}{2}(n+1)+a=\frac{1}{2}(n+a)$$

よって，$a=-1$となるので，$f(x)=x-1$

**コメント**

(3)では, (2)の結論の利用方法がポイントです。この誘導を明確に示す記述力が問われています。

## 問　題

$-1<a<1$ とする。

(1)　積分 $\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}\,dx$ を求めよ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，次の等式を示せ。$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3)　次の等式を示せ。$\displaystyle\log\frac{1+a}{1-a}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$　[2001]

## 解答例

(1)　$\displaystyle\int_0^a \frac{1}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^a\Big(\frac{1}{1-x}+\frac{1}{1+x}\Big)dx=\frac{1}{2}\Big[-\log|1-x|+\log|1+x|\Big]_0^a$

$\displaystyle=\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+x}{1-x}\Big|\Big]_0^a=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$　（$-1<a<1$ より）

(2)　$\displaystyle\int_0^a \frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx=\int_0^a\frac{1-1+x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx=\int_0^a\frac{1}{1-x^2}\,dx-\int_0^a\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}\,dx$

ここで，(1)より，$\displaystyle\int_0^a\frac{1}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}$

また，$\displaystyle\int_0^a\frac{1-(x^2)^{n+1}}{1-x^2}\,dx=\int_0^a(1+x^2+x^4+\cdots+x^{2n})\,dx$

$\displaystyle=\Big[x+\frac{x^3}{3}+\frac{x^5}{5}+\cdots+\frac{x^{2n+1}}{2n+1}\Big]_0^a$

$\displaystyle=a+\frac{a^3}{3}+\frac{a^5}{5}+\cdots+\frac{a^{2n+1}}{2n+1}$

よって，$\displaystyle\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\log\frac{1+a}{1-a}-\sum_{k=0}^{n}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$

(3)　(i)　$0\leqq a<1$ のとき　$0\leqq x\leqq a$ において，$\displaystyle 0\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx\leqq\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-a^2}\,dx=\frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big]_0^a=\frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx\to 0$

(ii)　$-1<a<0$ のとき　$a\leqq x\leqq 0$ において，$\displaystyle 0\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\leqq\frac{x^{2n+2}}{1-a^2}$

$\displaystyle 0\leqq\int_a^0\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx\leqq\int_a^0\frac{x^{2n+2}}{1-a^2}\,dx=\frac{1}{1-a^2}\Big[\frac{x^{2n+3}}{2n+3}\Big]_a^0=-\frac{a^{2n+3}}{(1-a^2)(2n+3)}$

よって，$n\to\infty$ のとき，$\displaystyle\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx=-\int_a^0\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx\to 0$

(i)(ii)より，$-1<a<1$ のとき，$n\to\infty$ とすると，$\displaystyle\int_0^a\frac{x^{2n+2}}{1-x^2}\,dx\to 0$

すると, (2)より, $\log\dfrac{1+a}{1-a}-2\displaystyle\int_0^a \dfrac{x^{2n+2}}{1-x^2}dx=2\sum_{k=0}^{n}\dfrac{a^{2k+1}}{2k+1}$ なので,

$$\log\frac{1+a}{1-a}=2\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{2k+1}}{2k+1}$$

**コメント**

無限級数の値を積分を用いて求めるという頻出題です。パズルのような誘導がついているおもしろい問題です。

## 問　題

$a$ は実数とし，2 つの曲線 $C_1 : y=(x-1)e^x$，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ がある。ただし，$e$ は自然対数の底である。$C_1$ 上の点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における $C_1$ の接線が $C_2$ に接するとする。

(1) $a$ を $t$ で表せ。

(2) $t$ が実数全体を動くとき，$a$ の極小値，およびそのときの $t$ の値を求めよ。[2015]

## 解答例

(1) $C_1 : y=(x-1)e^x$ ……①，$C_2 : y=\dfrac{1}{2e}x^2+a$ ……②に対して，

①より，$y'=e^x+(x-1)e^x=xe^x$ となり，点 $(t,\ (t-1)e^t)$ における接線 $l$ は，

$$y-(t-1)e^t=te^t(x-t),\quad y=te^tx-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，②③を連立すると，$\dfrac{1}{2e}x^2+a=te^tx-(t^2-t+1)e^t$

$$\frac{1}{2e}x^2-te^tx+a+(t^2-t+1)e^t=0$$

$C_2$ と $l$ が接することより，$D=t^2e^{2t}-4\cdot\dfrac{1}{2e}\{a+(t^2-t+1)e^t\}=0$ となり，

$$t^2e^{2t+1}-2a-2(t^2-t+1)e^t=0,\quad a=\frac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t \cdots\cdots\cdots ④$$

(2) $f(t)=\dfrac{1}{2}t^2e^{2t+1}-(t^2-t+1)e^t$ とおくと，④より，$a=f(t)$ となり，

$$\begin{aligned} f'(t)&=te^{2t+1}+t^2e^{2t+1}-(2t-1)e^t-(t^2-t+1)e^t \\ &=(t+t^2)e^{2t+1}-(t^2+t)e^t \\ &=t(t+1)e^t(e^{t+1}-1) \end{aligned}$$

ここで，$f'(t)=0$ の解は $t=-1,\ 0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

| $t$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | $-$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(t)$ | ↘ | | ↘ | | ↗ |

すると，$t=0$ のとき $f(t)$ すなわち $a$ は，極小値 $f(0)=-1$ をとる。

## コメント

微分法の基本問題です。(1)の結論がややこしい形をしており，微分するには心が重かったのですが，杞憂に終わりました。

## 問　題

$f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ とする。

(1) 関数 $f(x)$ の極大値と極小値，およびそのときの $x$ を求めよ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$　$(a<b)$ で接する直線の方程式を求めよ。　[2014]

## 解答例

(1) $f(x)=x^4-4x^3-8x^2$ に対し，$f'(x)=4x^3-12x^2-16x=4x(x+1)(x-4)$

$f(x)$ の増減は右表のようになり，極大値は $x=0$ のとき 0，極小値は $x=-1$ のとき $-3$ および $x=4$ のとき $-128$ である。

| $x$ | $\cdots$ | $-1$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $4$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | $-3$ | $\nearrow$ | $0$ | $\searrow$ | $-128$ | $\nearrow$ |

(2) 曲線 $y=f(x)$ に 2 点 $(a,\ f(a))$ と $(b,\ f(b))$　$(a<b)$ で接する直線の方程式を，$y=mx+n$ とおくと，$f(x)-(mx+n)=0$ は重解 $x=a,\ b$ をもつので，

$$f(x)-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)^2g(x)\quad(g(x)\text{は整式})$$

ここで，$f(x)-(mx+n)$ は $x^4$ の係数が 1 の 4 次式なので，$g(x)=1$ となり，

$$x^4-4x^3-8x^2-mx-n=(x-a)^2(x-b)^2\cdots\cdots\cdots①$$

すると，①の $x^3$，$x^2$，$x$ の係数および定数項を比較すると，

$$-4=-2a-2b\cdots\cdots\cdots②,\quad -8=a^2+4ab+b^2\cdots\cdots\cdots③$$

$$-m=-2a^2b-2ab^2\cdots\cdots\cdots④,\quad -n=a^2b^2\cdots\cdots\cdots⑤$$

②より $a+b=2\cdots\cdots⑥$ となり，③を $(a+b)^2+2ab=-8$ として代入すると，

$$4+2ab=-8,\ ab=-6\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$a,\ b$ は 2 次方程式 $t^2-2t-6=0$ の 2 つの解 $t=1\pm\sqrt{7}$ となり，

$$a=1-\sqrt{7},\ b=1+\sqrt{7}$$

このとき，④より $m=2ab(a+b)=-24$，⑤より $n=-a^2b^2=-36$

よって，求める接線の方程式は，$y=-24x-36$ である。

## コメント

4 次曲線の複接線を求める定番ともいえるものです。なお，$f(x)-(mx+n)=0$ が重解をもつことは証明なしで利用したため，単に恒等式の処理だけになっています。

## 問　題

$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta)=4\cos2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos2\theta-4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x=\sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を $x$ で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの $\theta$ の値を求めよ。

(3)　方程式 $f(\theta)=k$ が相異なる 3 つの解をもつような実数 $k$ の値の範囲を求めよ。

[2012]

## 解答例

(1)　条件より，$f(\theta)=4\cos2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos2\theta-4\sin\theta$ なので，

$$f(\theta)=4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta+3\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta)-4\sin\theta$$
$$=-8\sin^3\theta-6\sqrt{2}\sin^2\theta+3\sqrt{2}$$

ここで，$x=\sin\theta$ とおくと，$f(\theta)=-8x^3-6\sqrt{2}x^2+3\sqrt{2}$

(2)　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ より $-1\leqq x\leqq1$ となり，$f(\theta)=g(x)$ とおくと，

$$g'(x)=-24x^2-12\sqrt{2}x$$
$$=-12x(2x+\sqrt{2})$$

すると，$g(x)$ の値の増減は右表のようになる。

| $x$ | $-1$ | $\cdots$ | $-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ | $\cdots$ | $0$ | $\cdots$ | $1$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | |
| $g(x)$ | | $\searrow$ | $2\sqrt{2}$ | $\nearrow$ | $3\sqrt{2}$ | $\searrow$ | |

ここで，$g(-1)=8-3\sqrt{2}$ であり，$8-3\sqrt{2}<3\sqrt{2}$ から $f(\theta)=g(x)$ の最大値は $3\sqrt{2}$ である。このとき，$x=\sin\theta=0$ から $\theta=0$ となる。

また，$g(1)=-8-3\sqrt{2}$ であり，$f(\theta)=g(x)$ の最小値は $-8-3\sqrt{2}$ である。このとき，$x=\sin\theta=1$ から $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(3)　$x=\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ より，$-1\leqq x\leqq1$ を満たす $x$ と $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす $\theta$ は，1 対 1 の対応をする。

これより，方程式 $f(\theta)=k$ が $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ に相異なる 3 つの解をもつ条件は，$g(x)=k$ が $-1\leqq x\leqq1$ に相異なる 3 つの解をもつ条件に等しい。

すなわち，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=k$ が 3 つの共有点をもつ条件より，(2)の増減表から，$2\sqrt{2}<k\leqq8-3\sqrt{2}$ である。

## コメント

微分の応用の基本問題です。計算ミスをすると致命傷になります。(3)も 1 対 1 の対応なので，ややこしくありません。

## 問　題

$0<a<1$，$0<\theta<\pi$ とする。4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ が条件 $\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}=\mathrm{PQ}$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

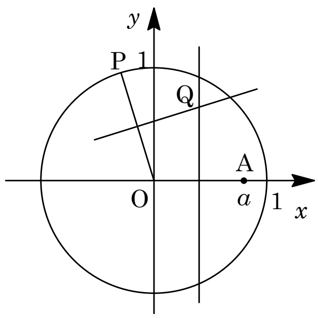
(1)　点 Q の座標を $a$ と $\theta$ で表せ。

(2)　$a$ を固定する。$0<\theta<\pi$ の範囲で $\theta$ が動くとき，$y$ の最小値を求めよ。　[2009]

## 解答例

(1)　まず，$\mathrm{OQ}=\mathrm{AQ}$ より，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ は線分 OA の垂直二等分線上にあるので，

$$x=\frac{a}{2}\cdots\cdots\cdots①$$




また，$\mathrm{OQ}=\mathrm{PQ}$ より，Q は線分 OP の垂直二等分線上にある。そこで，OP の中点の座標 $\left(\frac{\cos\theta}{2},\ \frac{\sin\theta}{2}\right)$ と，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ より，

$$\cos\theta\left(x-\frac{\cos\theta}{2}\right)+\sin\theta\left(y-\frac{\sin\theta}{2}\right)=0$$

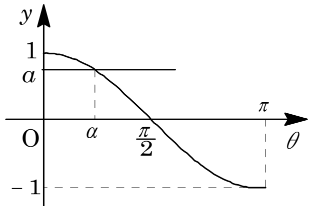
$$x\cos\theta+y\sin\theta=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$y\sin\theta=\frac{1}{2}-\frac{a}{2}\cos\theta$ となり，$0<\theta<\pi$ から $\sin\theta\neq0$ なので，

$$y=\frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\frac{a}{2},\ \frac{1-a\cos\theta}{2\sin\theta}\right)$ である。

(2)　③より，$y'=\frac{a\sin^2\theta-(1-a\cos\theta)\cos\theta}{2\sin^2\theta}=\frac{a-\cos\theta}{2\sin^2\theta}$




$0<a<1$ から，右図のように，$a=\cos\alpha$ とおくと，$y$ の増減は右下表のようになる。

よって，$\theta=\alpha$ において $y$ は最小となり，このとき $\sin\alpha=\sqrt{1-a^2}$ から，最小値は，

$$y=\frac{1-a\cos\alpha}{2\sin\alpha}=\frac{1-a^2}{2\sqrt{1-a^2}}=\frac{\sqrt{1-a^2}}{2}$$

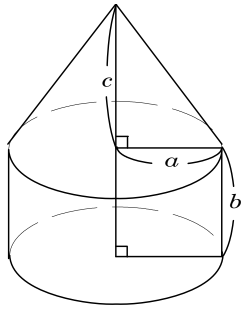
| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\alpha$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | $-$ | 0 | $+$ | |
| $y$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

## コメント

微分の応用についての頻出タイプの問題です。基本手法の確認のために適切な内容です。

## 問　題

図のような, 半径 $a$ の円を底面とする高さ $b$ の円柱の上に, 同じ大きさの円を底面とする高さ $c$ の直円錐の屋根をのせてできる建物を考える。




(1)　$V$ をこの建物の体積, $S$ をこの建物の外側の表面積（底面は除く）とする。$V$ と $S$ を $a, b, c$ で表せ。

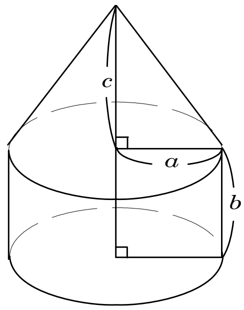
(2)　$V$ を一定に保ちながら $a, b, c$ を動かして, $S$ を最小にしたい。

(i)　$b = xa$, $c = ya$ とおき, $V$ と $a$ を一定としたとき, $S$ の最小値 $T$ を $V$ と $a$ で表せ。

(ii)　$T$ が最小になるときの比 $a : b : c$ を求めよ。　[2007]

## 解答例

(1)　右の建物の体積 $V$, 底面を除く表面積 $S$ は,




$$V = \pi a^2 b + \frac{1}{3}\pi a^2 c = \frac{1}{3}\pi a^2 (3b + c)$$

$$S = 2\pi ab + \frac{1}{2}\sqrt{a^2 + c^2}\cdot 2\pi a = \pi a\left(2b + \sqrt{a^2 + c^2}\right)$$

(2)　(i)　$b = xa$, $c = ya$ より,

$$V = \frac{1}{3}\pi a^2 (3xa + ya) = \frac{1}{3}\pi a^3 (3x + y) \cdots\cdots\cdots①$$

$$S = \pi a\left(2xa + \sqrt{a^2 + y^2 a^2}\right) = \pi a^2\left(2x + \sqrt{1 + y^2}\right)$$

①より, $x = \dfrac{V}{\pi a^3} - \dfrac{y}{3} \cdots\cdots②$となるので,

$$S = \pi a^2\left(\frac{2V}{\pi a^3} - \frac{2y}{3} + \sqrt{1 + y^2}\right) = \frac{2V}{a} + \frac{\pi a^2}{3}\left(-2y + 3\sqrt{1 + y^2}\right)$$

ここで, $y > 0$ において, $f(y) = -2y + 3\sqrt{1 + y^2}$ とおくと,

$$f'(y) = -2 + \frac{3\cdot 2y}{2\sqrt{1 + y^2}} = \frac{-2\sqrt{1 + y^2} + 3y}{\sqrt{1 + y^2}}$$

| $y$ | 0 | $\cdots$ | $\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(y)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(y)$ | | ↘ | $\sqrt{5}$ | ↗ |

$f'(y) = 0$ とすると, $2\sqrt{1 + y^2} = 3y$

$$y^2 = \frac{4}{5},\quad y = \frac{2}{\sqrt{5}}$$

右表より, $y = \dfrac{2}{\sqrt{5}}$ のとき $f(y)$ は最小となり, $S$ の最小値 $T$ は,

$$T = \frac{2V}{a} + \frac{\sqrt{5}\pi a^2}{3}$$

(ii)　$\dfrac{dT}{da}=-\dfrac{2V}{a^2}+\dfrac{2\sqrt{5}\pi a}{3}=\dfrac{2\sqrt{5}\pi a^3-6V}{3a^2}$

| $a$ | 0 | $\cdots$ | $\left(\dfrac{3V}{\sqrt{5}\pi}\right)^{\frac{1}{3}}$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $\dfrac{dT}{da}$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $T$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

右表より，$a^3=\dfrac{3V}{\sqrt{5}\pi}$ のとき $T$ は最小となる。

このとき，$y=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ なので，②より，

$$x=\frac{V}{\pi}\cdot\frac{\sqrt{5}\pi}{3V}-\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

以上より，$T$ が最小になるとき，

$$a:b:c=1:x:y=1:\frac{1}{\sqrt{5}}:\frac{2}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}:1:2$$

コメント

②から，$0<y<\dfrac{3V}{\pi a^3}$ となりますが，$\dfrac{2}{\sqrt{5}}<\dfrac{3V}{\pi a^3}$ は満たされているという条件のもとで解いています。

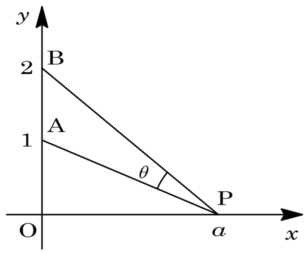
## 問　題

$y$ 軸上の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ と $x$ 軸上の正の部分を動く点 $\mathrm{P}(a,\ 0)$ を考える。$\theta = \angle\mathrm{APB}$ とおく。

(1)　$\cos\theta$ を $a$ で表せ。

(2)　$\theta$ が最大になる $a$ を求めよ。　[2006]

## 解答例




(1)　$\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{AP}=\sqrt{a^2+1}$，$\mathrm{BP}=\sqrt{a^2+4}$ より，

$$\cos\theta = \frac{(a^2+1)+(a^2+4)-1}{2\sqrt{a^2+1}\sqrt{a^2+4}} = \frac{a^2+2}{\sqrt{(a^2+1)(a^2+4)}}$$

(2)　(1)から，$\cos\theta = \sqrt{\dfrac{(a^2+2)^2}{(a^2+1)(a^2+4)}}$

ここで，$a^2 = t > 0$ とおくと，

$$\cos\theta = \sqrt{f(t)},\ f(t) = \frac{(t+2)^2}{(t+1)(t+4)}$$

すると，$f'(t) = \dfrac{2(t+2)(t+1)(t+4)-(t+2)^2(2t+5)}{(t+1)^2(t+4)^2} = \dfrac{(t+2)(t-2)}{(t+1)^2(t+4)^2}$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=2$ のとき $f(t)$ は最小となり，$\cos\theta$ も最小になる。

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 2 | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | $-$ | 0 | $+$ |
| $f(t)$ | | ↘ | | ↗ |

よって，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\cos\theta$ は単調に減少することから，$t=2$ すなわち $a=\sqrt{2}$ のとき，$\theta$ は最大となる。

## コメント

余弦定理と微分法を組合せた問題です。なお，余弦定理のかわりに内積を利用することもできますし，微分法のかわりに相加平均と相乗平均の関係を利用することもできます。

## 問　題

次の問いに答えよ。

(1)　方程式$e^{2a}-2e^{a}-1=0$を満たす実数$a$を求めよ。ただし，$e$は自然対数の底とする。

(2)　$t\geqq 0$に対して$F(t)=\displaystyle\int_0^t \frac{e^x}{e^x+e^{2t}}\,dx$を求めよ。

(3)　$t\geqq 0$の範囲での$F(t)$の最大値と，最大値を与える$t$の値を求めよ。　[2005]

## 解答例

(1)　$e^{2a}-2e^{a}-1=0$から，$e^a>0$なので，$e^a=1+\sqrt{2}$

よって，$a=\log(1+\sqrt{2})$

(2)　$F(t)=\displaystyle\int_0^t \frac{e^x}{e^x+e^{2t}}\,dx=\Big[\log(e^x+e^{2t})\Big]_0^t=\log(e^t+e^{2t})-\log(1+e^{2t})=\log\frac{e^t+e^{2t}}{1+e^{2t}}$

(3)　$f(t)=\dfrac{e^t+e^{2t}}{1+e^{2t}}$とおくと，$F(t)=\log f(t)$となり，

$$f'(t)=\frac{(e^t+2e^{2t})(1+e^{2t})-(e^t+e^{2t})\cdot 2e^{2t}}{(1+e^{2t})^2}$$

$$=\frac{-e^{3t}+2e^{2t}+e^t}{(1+e^{2t})^2}$$

$$=-\frac{e^t(e^{2t}-2e^t+1)}{(1+e^{2t})^2}$$

| $t$ | 0 | … | $\log(1+\sqrt{2})$ | … |
|---|---|---|---|---|
| $f'(t)$ | | ＋ | 0 | － |
| $f(t)$ | | ↗ | | ↘ |

(1)より，$f'(t)=0$となるのは$t=\log(1+\sqrt{2})$から，$f(t)$の最大値は，

$$f(\log(1+\sqrt{2}))=\frac{(1+\sqrt{2})+(1+\sqrt{2})^2}{1+(1+\sqrt{2})^2}=\frac{4+3\sqrt{2}}{4+2\sqrt{2}}=\frac{1+\sqrt{2}}{2}$$

したがって，$F(t)$の最大値は$\log\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}$　$\left(t=\log(1+\sqrt{2})\right)$である。

## コメント

(3)において，$f'(t)=0$の解を求める際に，(1)の結果が役立ちます。

## 問　題

$a$ を 1 以上の実数, $b$ を正の実数とする。

(1) 0 以上のすべての実数 $x$ について，不等式 $e^x - a(x+2b) \geqq 0$ が成り立つための, $a$, $b$ の満たすべき条件を求めよ。ただし, $e$ は自然対数の底とする。

(2) $a$, $b$ が(1)で求めた範囲を動くとき，定積分 $\dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+2b}\,dx$ の値を最小にする $a$, $b$ と，その最小値を求めよ。 [2004]

## 解答例

(1) $f(x) = e^x - a(x+2b)$ とおくと，$f'(x) = e^x - a$

$a \geqq 1$ より，$x \geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\log a$ | $\cdots$ |
|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ |

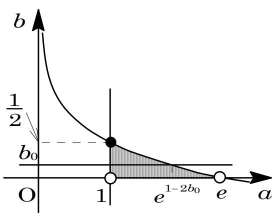
よって，$f(x) \geqq 0$ の条件は，$f(\log a) \geqq 0$

$$e^{\log a} - a(\log a + 2b) \geqq 0,\ \ a - a(\log a + 2b) \geqq 0$$

$a > 0$ なので，$\log a + 2b \leqq 1$

(2) (1)より, $a$, $b$ の条件は, $a \geqq 1$, $b > 0$, $\log a + 2b \leqq 1$ から,

$$a \geqq 1,\ \ 0 < b \leqq \frac{1}{2}(1 - \log a)$$




さて，$I = \dfrac{1}{ae^b}\displaystyle\int_0^1 \dfrac{1}{x+2b}\,dx = \dfrac{1}{ae^b}\Big[\log|x+2b|\Big]_0^1$

$$= \frac{1}{ae^b}\{\log(1+2b) - \log 2b\} = \frac{1}{ae^b}\log\frac{1+2b}{2b}$$

まず, $b$ の値を固定して，$b = b_0 \left(0 < b_0 \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とする。

$$I = \frac{1}{ae^{b_0}}\log\frac{1+2b_0}{2b_0}$$

$b = b_0$ と $b = \dfrac{1}{2}(1 - \log a)$ のグラフの交点は,

$$b_0 = \frac{1}{2}(1 - \log a),\ \ \log a = 1 - 2b_0,\ \ a = e^{1-2b_0}$$

これより, $a$ の値を $1 \leqq a \leqq e^{1-2b_0}$ で変化させて, $I$ の最小値を求める。

すると，$\dfrac{1}{e^{b_0}}\log\dfrac{1+2b_0}{2b_0} > 0$ から，$a$ の値が増加すると，$I$ の値は単調減少することにより，$a = e^{1-2b_0}$ で $I$ の値は最小となる。

このとき，$I = \dfrac{1}{e^{1-2b_0}e^{b_0}}\log\dfrac{1+2b_0}{2b_0} = e^{b_0-1}\log\dfrac{1+2b_0}{2b_0}$ ………(∗)

次に，$b_0$ を $0 < b_0 \leqq \dfrac{1}{2}$ で変化させて, $I$ の最小値を求める。

ここで, (∗)より，$g(x) = e^{x-1}\log\dfrac{1+2x}{2x}$ $\left(0 < x \leqq \dfrac{1}{2}\right)$ とおくと,

$$g'(x)=e^{x-1}\log\frac{1+2x}{2x}+e^{x-1}\left(\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{2x}\right)=e^{x-1}\left\{\log\frac{1+2x}{2x}-\frac{1}{x(1+2x)}\right\}$$

さらに，$h(x)=\log\dfrac{1+2x}{2x}-\dfrac{1}{x(1+2x)}$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{2}{1+2x}-\frac{2}{2x}+\frac{1+4x}{x^2(1+2x)^2}=\frac{-2x^2+3x+1}{x^2(1+2x)^2}$$

$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ において，$-2x^2+3x+1=-2\left(x-\dfrac{3}{4}\right)^2+\dfrac{17}{8}>0$ から，$h'(x)>0$ となり，$h(x)$ は単調に増加する。

ここで，$h\left(\dfrac{1}{2}\right)=\log 2-1=\log 2-\log e<0$ より，$0<x\leqq\dfrac{1}{2}$ において，

$$h(x)<0,\ g'(x)=e^{x-1}h(x)<0$$

よって，$g(x)$ は単調に減少し，$x=\dfrac{1}{2}$ で最小値をとる。

以上より，$I$ は $b=\dfrac{1}{2}$，$a=e^0=1$ のとき最小となり，最小値は，

$$I=\frac{1}{1\times e^{\frac{1}{2}}}\log\frac{1+1}{2}=\frac{1}{\sqrt{e}}\log 2$$

## コメント

不等式で条件づけられた 2 変数関数の最大・最小問題です。グラフでの処理がストレートに行えないので，まず 1 文字の値を固定して最小値を求め，次にこの状態を保ったまま，いったん固定した文字の値を変化させるという 2 ステップで最小値を求めます。なお，(1)の不等式を，$\dfrac{1}{ae^b(x+2b)}\geqq e^{-x-b}$ と変形し，この両辺を 0 から 1 まで積分しても，題意とは無関係なことに注意してください。

## 問　題

次の問いに答えよ。

(1)　正の数 $t$, 実数 $p, q$ に対して関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ は，条件

$$f(0)=1,\ f'(0)=2,\ f(t)=p,\ f'(t)=q\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

を満たすとする。このとき, $c, d$ を求め, $a, b$ を $t, p, q$ で表せ。

(2)　上の条件$(*)$を満たす $f(x)$ について, 3 つの不等式 $a\leqq 0$, $b\leqq 0$, $p\geqq 0$ を同時に満たすような $p$, $q$ によって定まる点$(p,\ q)$のなす領域を座標平面上に図示し，その面積 $S$ を $t$ を用いて表せ。

(3)　$t$ を $t>0$ なる範囲を動くとき，$S$ の値が最小となる $t$ の値と $S$ の最小値を求めよ。

[2000]

## 解答例

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$

$f(0)=1$ より $d=1\cdots\cdots$①，$f'(0)=2$ より $c=2\cdots\cdots$②

$f(t)=p$，$f'(t)=q$ よりそれぞれ，$at^3+bt^2+ct+d=p$，$3at^2+2bt+c=q$

①②を代入すると，

$$at^3+bt^2=p-2t-1\cdots\cdots③,\ 3at^2+2bt=q-2\cdots\cdots④$$

④$\times t-$③$\times 2$ より，$at^3=-2p+tq+2t+2$，$a=\dfrac{-2p+tq+2t+2}{t^3}$

③に代入して，$bt^2=3p-tq-4t-3$，$b=\dfrac{3p-tq-4t-3}{t^2}$

(2)　$a\leqq 0$, $t>0$ より, (1)から $-2p+tq+2t+2\leqq 0$，$q\leqq\dfrac{2}{t}p-\dfrac{2t+2}{t}\cdots\cdots\cdots$⑤

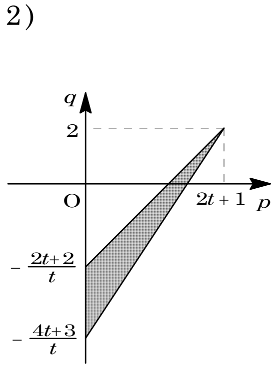
$b\leqq 0$, $t>0$ より, (1)から $3p-tq-4t-3\leqq 0$，$q\geqq\dfrac{3}{t}p-\dfrac{4t+3}{t}\cdots\cdots\cdots$⑥

ここで，⑤と⑥の境界線どうしの交点は，

$$\frac{2}{t}p-\frac{2t+2}{t}=\frac{3}{t}p-\frac{4t+3}{t},\ 2p-2t-2=3p-4t-3,\ p=2t+1$$

また，$q=\dfrac{2}{t}(2t+1)-\dfrac{2t+2}{t}=\dfrac{2t}{t}=2$ より，交点$(2t+1,\ 2)$

⑤⑥と $p\geqq 0$ とを合わせて，点$(p,\ q)$の存在領域を図示すると，右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。




また，この領域の面積 $S$ は，

$$S=\frac{1}{2}\left(-\frac{2t+2}{t}+\frac{4t+3}{t}\right)(2t+1)=\frac{(2t+1)^2}{2t}$$

(3)　相加平均と相乗平均の関係を用いると, (2)より,

$$S=\frac{(2t+1)^2}{2t}=\frac{4t^2+4t+1}{2t}=2t+\frac{1}{2t}+2\ \geqq 2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}+2=4$$

なお, 等号は $2t=\dfrac{1}{2t}$, すなわち $t=\dfrac{1}{2}$ のとき成立する。

したがって, $t=\dfrac{1}{2}$ のとき $S$ は最小値 4 をとる。

コメント

正確な計算がすべてという問題です。(3)は微分するまでもありませんでした。

## 問　題

関数 $f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-px}}-ax$ が極値をもつように，定数 $a$ の値の範囲を定めよ。ただし, $p$ は正の定数で, $e$ は自然対数の底である。 [1999]

## 解答例

$f(x)=\dfrac{1}{1+e^{-px}}-ax$ より，

$$f'(x)=-\frac{-pe^{-px}}{(1+e^{-px})^2}-a=\frac{pe^{-px}}{(1+e^{-px})^2}-a$$

ここで，$e^{-x}=t$ とおき, $t>0$ で $g(t)=\dfrac{pt^p}{(1+t^p)^2}$ とすると，

$$g'(t)=\frac{p^2t^{p-1}(1+t^p)^2-pt^p\cdot 2(1+t^p)\cdot pt^{p-1}}{(1+t^p)^4}$$

$$=-\frac{p^2t^{p-1}(t^p-1)}{(1+t^p)^3}$$

| $t$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | $\infty$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(t)$ | | $+$ | 0 | $-$ | |
| $g(t)$ | 0 | $\nearrow$ | $\dfrac{p}{4}$ | $\searrow$ | 0 |

増減表より，$0<g(t)\leqq\dfrac{p}{4}$

すると，$f(x)$ が極値をもつ条件，すなわち $f'(x)$ が符号変化する条件は，$f'(x)=g(e^{-x})-a$ より $0<a<\dfrac{p}{4}$ となる。

## コメント

意外なくらいあっさりと結論が導けました。$p$ の値での場合分けが必要だろうと予測しながら解いたのですが。

## 問　題

関数 $f(x)=1+\sin x-x\cos x$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の $0\leqq x\leqq 2\pi$ における増減を調べ，最大値と最小値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の不定積分を求めよ。

(3)　次の定積分の値を求めよ。　$\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$　[2017]

## 解答例

(1)　$f(x)=1+\sin x-x\cos x$ に対して，$f'(x)=\cos x-\cos x+x\sin x=x\sin x$

すると，$0\leqq x\leqq 2\pi$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。これより，$f(x)$ は $x=\pi$ のとき最大値 $1+\pi$，$x=2\pi$ のとき最小値 $1-2\pi$ をとる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ |
| $f(x)$ | $1$ | $\nearrow$ | $1+\pi$ | $\searrow$ | $1-2\pi$ |

(2)　$F(x)=\displaystyle\int f(x)dx$ とおき，$C$ を積分定数とすると，

$$F(x)=\int(1+\sin x-x\cos x)dx=x-\cos x-x\sin x+\int\sin x\,dx$$
$$=x-\cos x-x\sin x-\cos x+C=x-x\sin x-2\cos x+C$$

(3)　$f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=0$ より，$0\leqq x<\dfrac{3}{2}\pi$ で $f(x)>0$，$\dfrac{3}{2}\pi<x\leqq 2\pi$ で $f(x)<0$ なので，

$I=\displaystyle\int_0^{2\pi}|f(x)|dx$ とおくと，

$$I=\int_0^{\frac{3}{2}\pi}f(x)dx+\int_{\frac{3}{2}\pi}^{2\pi}-f(x)dx=F\left(\frac{3}{2}\pi\right)-F(0)-F(2\pi)+F\left(\frac{3}{2}\pi\right)$$
$$=2F\left(\frac{3}{2}\pi\right)-F(0)-F(2\pi)=2\left(\frac{3}{2}\pi+\frac{3}{2}\pi\right)-(-2)-(2\pi-2)=4\pi+4$$

## コメント

定積分の計算問題です。(3)は $f\left(\dfrac{3}{2}\pi\right)=0$ を見つけるのがポイントですが，これは(1)の増減表と $f(x)$ の形から判断します。

## 問　題

$a>0$ に対し，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　$0<a\leqq 2\pi$ において，$g(a)=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ の最小値とそのときの $a$ の値を求めよ。 [2016]

## 解答例

(1)　$f(x)=\int_{-a}^{a}\left\{\frac{e^{-x}}{2a}+f(t)\sin t\right\}dt=\frac{e^{-x}}{2a}\int_{-a}^{a}dt+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$

$$=\frac{e^{-x}}{2a}(a+a)+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt=e^{-x}+\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$$

ここで，$C=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ とおくと，$f(x)=e^{-x}+C$ ……①となり，

$$C=\int_{-a}^{a}(e^{-t}+C)\sin t\,dt=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt+C\int_{-a}^{a}\sin t\,dt$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\big[\cos t\big]_{-a}^{a}=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt-C\{\cos a-\cos(-a)\}$$

$$=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt\ \cdots\cdots\text{②}$$

さて，$(e^{-t}\sin t)'=e^{-t}(-\sin t+\cos t)$，$(e^{-t}\cos t)'=e^{-t}(-\cos t-\sin t)$ より，

$$(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'=-2e^{-t}\sin t,\quad e^{-t}\sin t=-\frac{1}{2}(e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t)'$$

すると，②から，$C=-\frac{1}{2}\Big[e^{-t}\sin t+e^{-t}\cos t\Big]_{-a}^{a}$ となり，

$$C=-\frac{1}{2}\{e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\}-\frac{1}{2}\{e^{-a}\cos a-e^{a}\cos(-a)\}$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{-a}\sin a+e^{a}\sin a)-\frac{1}{2}(e^{-a}\cos a-e^{a}\cos a)$$

$$=-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$$

よって，①から，$f(x)=e^{-x}-\frac{1}{2}(e^{a}+e^{-a})\sin a+\frac{1}{2}(e^{a}-e^{-a})\cos a$

(2)　$g(a)=\int_{-a}^{a}f(t)\sin t\,dt$ なので，(1)から，$g(a)=C=\int_{-a}^{a}e^{-t}\sin t\,dt$

$$g'(a)=e^{-a}\sin a-e^{a}\sin(-a)\cdot(-1)$$

$$=(e^{-a}-e^{a})\sin a$$

$0<a\leqq 2\pi$ のとき，$g(a)$ の増減は右表のようになる。

| $a$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(a)$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | $0$ |
| $g(a)$ | | ↘ | | ↗ | |

そして，$g(a)$はa$=\pi$のとき最小となり，最小値は,

$$g(\pi)=-\frac{1}{2}(e^{\pi}+e^{-\pi})\sin\pi+\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})\cos\pi=-\frac{1}{2}(e^{\pi}-e^{-\pi})$$

## コメント

積分方程式の中で，(1)がいわゆる置換型，(2)がいわゆる微分型という設問内容になっています。ただ，計算は有名な部分積分ですが，面倒ですので工夫をしています。

## 問　題

$n$ は自然数，$a$ は $a>\dfrac{3}{2}$ を満たす実数とし，実数 $x$ の関数

$$f(x)=\int_0^x (x-\theta)(a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta)\,d\theta$$

を考える。ただし，$n=1$ のときは $\sin^{n-1}\theta=1$ とする。

(1) $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$ を示せ。

(2) $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ を満たす $n$ と $a$ の値を求めよ。

(3) (2)で求めた $n$ と $a$ に対して，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right)$ を求めよ。　[2015]

## 解答例

(1) $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n\theta\,d\theta$ とおくと，

$$I_{n+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\sin^n\theta\,d\theta=-\left[\cos\theta\sin^n\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}n\cos\theta\sin^{n-1}\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta(1-\sin^2\theta)\,d\theta=nI_{n-1}-nI_{n+1}$$

よって，$I_{n+1}=\dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$ となり，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta=\frac{n}{n+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta$

(2) $g(\theta)=a\sin^{n+1}\theta-\sin^{n-1}\theta$ とおくと，$f(x)=x\displaystyle\int_0^x g(\theta)\,d\theta-\int_0^x \theta g(\theta)\,d\theta$ から，

$$f'(x)=\int_0^x g(\theta)\,d\theta+xg(x)-xg(x)=\int_0^x g(\theta)\,d\theta$$

$$=a\int_0^x\sin^{n+1}\theta\,d\theta-\int_0^x\sin^{n-1}\theta\,d\theta$$

すると，$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=a\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n+1}\theta\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^{n-1}\theta\,d\theta=aI_{n+1}-I_{n-1}$ となり，

$$f'\left(\frac{\pi}{2}\right)=\left(\frac{an}{n+1}-1\right)I_{n-1}$$

ここで，条件より $f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=0$ であり，しかも $I_{n-1}>0$ なので，

$$\frac{an}{n+1}-1=0,\ a=\frac{n+1}{n}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さらに，$a>\dfrac{3}{2}$ から $\dfrac{n+1}{n}>\dfrac{3}{2}$ となり，$2n+2>3n$，$n<2$ である。すると，$n$ は自然数から $n=1$ となり，$(*)$から $a=2$ である。

(3)　$n=1$，$a=2$ のとき，

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)(2\sin^2\theta-1)\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cos 2\theta\,d\theta$$

$$=\left[\left(\theta-\frac{\pi}{2}\right)\cdot\frac{1}{2}\sin 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=\left[\frac{1}{4}\cos 2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{4}(-1-1)=-\frac{1}{2}$$

**コメント**

定積分の計算についての有名問題です。問題文を読んだとき，$a>\dfrac{3}{2}$ という微妙な式には訳があるだろうと思いつつ，計算を進めました。

## 問　題

$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta$ とおく。

(1)　$f'(x)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの $x$ を求めよ。

[2014]

## 解答例

(1)　$F'(\theta)=|\sin\theta|$ とおくと，$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}|\sin\theta|d\theta=F\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-F(x)$ となり，

$$f'(x)=F'\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-F'(x)=\left|\sin\left(x+\frac{\pi}{3}\right)\right|-|\sin x|$$

(2)　(i)　$x+\frac{\pi}{3}\leqq\pi\ \left(0\leqq x\leqq\frac{2}{3}\pi\right)$ のとき

$$f(x)=\int_x^{x+\frac{\pi}{3}}\sin\theta d\theta=-\Big[\cos\theta\Big]_x^{x+\frac{\pi}{3}}=-\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)+\cos x$$

$$=-2\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)=\sin\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

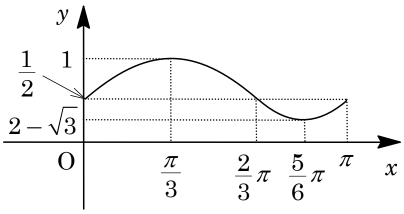
(ii)　$x+\frac{\pi}{3}\geqq\pi\ \left(\frac{2}{3}\pi\leqq x\leqq\pi\right)$ のとき

$$f(x)=\int_x^{\pi}\sin\theta d\theta+\int_{\pi}^{x+\frac{\pi}{3}}(-\sin\theta)d\theta=-\Big[\cos\theta\Big]_x^{\pi}+\Big[\cos\theta\Big]_{\pi}^{x+\frac{\pi}{3}}$$

$$=-\cos\pi+\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)-\cos\pi=2+\cos x+\cos\left(x+\frac{\pi}{3}\right)$$

$$=2+2\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)=2+\sqrt{3}\cos\left(x+\frac{\pi}{6}\right)$$

(i)(ii)より，$0\leqq x\leqq\pi$ において，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。




よって，$f(x)$ は $x=\frac{\pi}{3}$ のとき最大値 1 をとり，$x=\frac{5}{6}\pi$ のとき最小値 $2-\sqrt{3}$ をとる。

## コメント

(2)では，最大値，最小値も要求されているし，計算も簡単そうでしたので，まず $f(x)$ を求めています。そのため，流れを無視したような形になっています。

## 問　題

区間$-\infty < x < \infty$で定義された連続関数$f(x)$に対して

$$F(x) = \int_0^{2x} t f(2x-t)\,dt$$

とおく。

(1) $F\left(\dfrac{x}{2}\right) = \displaystyle\int_0^x (x-s)f(s)\,ds$となることを示せ。

(2) 2 次導関数$F''$を$f$で表せ。

(3) $F$が 3 次多項式で$F(1) = f(1) = 1$となるとき, $f$と$F$を求めよ。　[2013]

## 解答例

(1) $F(x) = \displaystyle\int_0^{2x} t f(2x-t)\,dt$より，$F\left(\dfrac{x}{2}\right) = \displaystyle\int_0^{x} t f(x-t)\,dt$

ここで，$s = x-t$とおくと，$ds = -dt$となり，

$$F\left(\frac{x}{2}\right) = \int_x^0 (x-s)f(s)(-ds) = \int_0^x (x-s)f(s)\,ds$$

(2) $F\left(\dfrac{x}{2}\right) = x\displaystyle\int_0^x f(s)\,ds - \int_0^x sf(s)\,ds$……①の両辺を$x$で微分すると,

$$\frac{1}{2}F'\left(\frac{x}{2}\right) = \int_0^x f(s)\,ds + xf(x) - xf(x) = \int_0^x f(s)\,ds \cdots\cdots\text{②}$$

さらに，②の両辺を$x$で微分すると，$\dfrac{1}{4}F''\left(\dfrac{x}{2}\right) = f(x)$となり，

$$F''\left(\frac{x}{2}\right) = 4f(x),\quad F''(x) = 4f(2x) \cdots\cdots\text{③}$$

(3) 条件より，$F(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d\quad (a \neq 0)$とおくと，

$$F'(x) = 3ax^2 + 2bx + c\,,\quad F''(x) = 6ax + 2b$$

ここで，$F(1) = 1$より，$a + b + c + d = 1$………④

また，$f(1) = 1$から，③を用いると，$F''\left(\dfrac{1}{2}\right) = 4f(1) = 4$となり，

$$3a + 2b = 4 \cdots\cdots\text{⑤}$$

さらに，①②から，$F(0) = F'(0) = 0$なので，$c = d = 0$………⑥

④⑤⑥から，$a = 2$，$b = -1$となり，$F(x) = 2x^3 - x^2$

$$f(x) = \frac{1}{4}F''\left(\frac{x}{2}\right) = \frac{1}{4}(3ax + 2b) = \frac{3}{2}x - \frac{1}{2}$$

## コメント

典型的な微分型の積分方程式です。誘導も細かくついています。

## 問　題

$0<a<2\pi$ とする。$0<x<2\pi$ に対して，$F(x)=\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta$ と定める。

(1)　$F'(x)$ を求めよ。

(2)　$F'(x)\leqq 0$ となる $x$ の範囲を求めよ。

(3)　$F(x)$ の極大値および極小値を求めよ。　[2011]

## 解答例

(1)　$f(\theta)=\sqrt{1-\cos\theta}$ とおくと，$F(x)=\int_x^{x+a}f(\theta)d\theta$ となり，

$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=\sqrt{1-\cos(x+a)}-\sqrt{1-\cos x}$$

(2)　$F'(x)\leqq 0$ より，$\sqrt{1-\cos(x+a)}\leqq\sqrt{1-\cos x}$ となり，両辺を 2 乗して，

$$1-\cos(x+a)\leqq 1-\cos x\,,\ \cos(x+a)-\cos x\geqq 0\,,\ -2\sin\frac{2x+a}{2}\sin\frac{a}{2}\geqq 0$$

ここで，$0<a<2\pi$ より，$\sin\frac{a}{2}>0$ であるので，$\sin\frac{2x+a}{2}\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，$0<x<2\pi$ から $\frac{a}{2}<\frac{2x+a}{2}<2\pi+\frac{a}{2}$ となり，$0<\frac{a}{2}<\pi$ に留意して，$(*)$を満たす $x$ の範囲を求めると，

$$\pi\leqq\frac{2x+a}{2}\leqq 2\pi\,,\ \pi-\frac{a}{2}\leqq x\leqq 2\pi-\frac{a}{2}$$

(3)　$F(x)=\int_x^{x+a}\sqrt{1-\cos\theta}\,d\theta=\int_x^{x+a}\sqrt{2\sin^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=\sqrt{2}\int_x^{x+a}\left|\sin\frac{\theta}{2}\right|d\theta$

ここで，$\frac{\theta}{2}=\varphi$ とおくと，$d\theta=2d\varphi$ となり，$F(x)=2\sqrt{2}\int_{\frac{x}{2}}^{\frac{x+a}{2}}|\sin\varphi|d\varphi$

さて，(2)より $F(x)$ の増減は右表のようになり，$F(x)$ は $x=\pi-\frac{a}{2}$ のとき極大，$x=2\pi-\frac{a}{2}$ のとき極小となる。

| $x$ | $0$ | $\cdots$ | $\pi-\frac{a}{2}$ | $\cdots$ | $2\pi-\frac{a}{2}$ | $\cdots$ | $2\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $F'(x)$ | | $+$ | $0$ | $-$ | $0$ | $+$ | |
| $F(x)$ | | $\nearrow$ | | $\searrow$ | | $\nearrow$ | |

極大値は，$F\left(\pi-\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}-\frac{a}{4}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}}=-4\sqrt{2}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{a}{4}\right)=4\sqrt{2}\sin\frac{a}{4}$$

極小値は，$F\left(2\pi-\frac{a}{2}\right)=2\sqrt{2}\int_{\pi-\frac{a}{4}}^{\pi+\frac{a}{4}}|\sin\varphi|d\varphi=4\sqrt{2}\int_0^{\frac{a}{4}}\sin\varphi d\varphi$

$$=-4\sqrt{2}\Big[\cos\varphi\Big]_0^{\frac{a}{4}}=4\sqrt{2}\left(1-\cos\frac{a}{4}\right)$$

**コメント**

定積分の計算問題です。(1)と(2)の誘導に従えば，方針に迷うことはありません。なお，極大値と極小値の計算では，三角関数の周期性を利用しています。

## 問　題

$0\leqq x\leqq 1$ に対して，$f(x)=\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)\,dt$ と定める。ただし，$e=2.718\cdots$ は自然対数の底である。

(1) 不定積分 $I_1=\int te^t dt$，$I_2=\int t^2e^t dt$ を求めよ。

(2) $f(x)$ を $x$ の指数関数と多項式を用いて表せ。

(3) $f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極大となることを示せ。 [2010]

## 解答例

(1) $C_1$，$C_2$ を定数として，$I_1=\int te^t dt=te^t-\int e^t dt=(t-1)e^t+C_1$

$$I_2=\int t^2e^t dt=t^2e^t-2I_1=t^2e^t-2(t-1)e^t+C_2=(t^2-2t+2)e^t+C_2$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ に対して，

$$f(x)=\int_0^1 e^{-|t-x|}t(1-t)\,dt=\int_0^x e^{t-x}t(1-t)\,dt+\int_x^1 e^{-t+x}t(1-t)\,dt$$

さて，$\int_0^x e^{t-x}t(1-t)\,dt=e^{-x}\int_0^x(te^t-t^2e^t)\,dt=e^{-x}\Big[\,I_1-I_2\,\Big]_0^x$

$$=e^{-x}\Big[(-t^2+3t-3)e^t\Big]_0^x=e^{-x}\left\{(-x^2+3x-3)e^x+3\right\}$$

$$=-x^2+3x-3+3e^{-x}$$

また，$-t=u$ とおくと，

$$\int_x^1 e^{-t+x}t(1-t)\,dt=e^x\int_x^1(te^{-t}-t^2e^{-t})\,dt=e^x\int_{-x}^{-1}(-ue^u-u^2e^u)(-du)$$

$$=e^x\Big[\,I_1+I_2\,\Big]_{-x}^{-1}=e^x\Big[(u^2-u+1)e^u\Big]_{-x}^{-1}$$

$$=e^x\left\{3e^{-1}-(x^2+x+1)e^{-x}\right\}=3e^{x-1}-(x^2+x+1)$$

したがって，$f(x)=3e^{-x}+3e^{x-1}-2x^2+2x-4$

(3) (2)より，$f'(x)=-3e^{-x}+3e^{x-1}-4x+2$，$f''(x)=3e^{-x}+3e^{x-1}-4$ となり，

$$f'\Big(\frac{1}{2}\Big)=-3e^{-\frac{1}{2}}+3e^{-\frac{1}{2}}-2+2=0$$

$$f''\Big(\frac{1}{2}\Big)=3e^{-\frac{1}{2}}+3e^{-\frac{1}{2}}-4=\frac{6}{\sqrt{e}}-4=\frac{2}{\sqrt{e}}(3-2\sqrt{e})=\frac{2}{\sqrt{e}}\cdot\frac{9-4e}{3+2\sqrt{e}}$$

ここで，$4e>4\times 2.7=10.8$ から，$f''\Big(\dfrac{1}{2}\Big)<0$ である。

よって，$f(x)$ は $x=\dfrac{1}{2}$ で極大となる。

## コメント

(2)の積分を計算するうえで，(1)の誘導がかなり役に立ちます。また，(3)では，増減表は作成しにくいので，第 2 次導関数の値を利用しています。

## 問　題

関数 $f(x)$ と $g(x)$ を $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で定義された連続関数とする。

(1)　$f(x) = \int_0^1 e^{x+t} f(t)\,dt$ を満たす $f(x)$ は定数関数 $f(x) = 0$ のみであることを示せ。

(2)　$g(x) = \int_0^1 e^{x+t} g(t)\,dt + x$ を満たす $g(x)$ を求めよ。　[2008]

## 解答例

(1)　$f(x) = e^x \int_0^1 e^t f(t)\,dt$ に対し，$A = \int_0^1 e^t f(t)\,dt$ ……①とおくと，

$$f(x) = Ae^x \text{ ………②}$$

①②より，$A = \int_0^1 Ae^{2t} dt = A\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 = \frac{1}{2}A(e^2 - 1)$

よって，$(3 - e^2)A = 0$ から $A = 0$ となり，$f(x) = 0$ である。

(2)　$g(x) = e^x \int_0^1 e^t g(t)\,dt + x$ に対し，$B = \int_0^1 e^t g(t)\,dt$ ……③とおくと，

$$g(x) = Be^x + x \text{ ………④}$$

③④より，$B = \int_0^1 e^t (Be^t + t)\,dt = \int_0^1 (Be^{2t} + te^t)\,dt$

$$= B\left[\frac{1}{2}e^{2t}\right]_0^1 + \left[te^t\right]_0^1 - \int_0^1 e^t dt = \frac{1}{2}B(e^2 - 1) + e - (e - 1)$$

$$= \frac{1}{2}B(e^2 - 1) + 1$$

よって，$(3 - e^2)B = 2$ から，$B = \dfrac{2}{3 - e^2}$ となり，

$$g(x) = \frac{2}{3 - e^2}e^x + x$$

## コメント

参考書の例題として採用されそうな定型的な問題です。

## 問　題

(1)　整数 $m,\ n$ に対して積分 $I_{m,\,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx$ を求めよ。

(2)　自然数 $n$ に対して積分 $J_n=\int_0^{2\pi}\Bigl(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\Bigr)^2dx$ を求めよ。　[2006]

## 解答例

(1)　$I_{m,\,n}=\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\{\cos(m+n)x+\cos(m-n)x\}dx$ より，

(i)　$m\neq\pm n$ のとき

$$I_{m,\,n}=\frac{1}{2}\Bigl[\frac{\sin(m+n)x}{m+n}+\frac{\sin(m-n)x}{m-n}\Bigr]_0^{2\pi}=0$$

(ii)　$m=n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\,m}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(\cos 2mx+1)\,dx=\frac{1}{2}\Bigl[\frac{\sin 2mx}{2m}+x\Bigr]_0^{2\pi}=\pi$$

(iii)　$m=-n\neq 0$ のとき

$$I_{m,\,-m}=\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1+\cos 2mx)\,dx=\pi$$

(iv)　$m=n=0$ のとき

$$I_{0,\,0}=\int_0^{2\pi}dx=2\pi$$

(2)　$J_n=\int_0^{2\pi}\Bigl(\sum_{k=1}^{n}\sqrt{k}\cos kx\Bigr)^2dx=\int_0^{2\pi}(\cos x+\sqrt{2}\cos 2x+\cdots+\sqrt{n}\cos nx)^2dx$

(1)より，$m\neq n$ のとき，$\int_0^{2\pi}\cos mx\cos nx\,dx=0$ なので，

$$J_n=\int_0^{2\pi}(\cos^2x+2\cos^2 2x+\cdots+n\cos^2 nx)\,dx=I_{1,\,1}+2I_{2,\,2}+\cdots+nI_{n,\,n}$$

$$=(1+2+\cdots+n)\pi=\frac{1}{2}n(n+1)\pi$$

## コメント

定積分の有名問題です。(1)では，$m,\ n$ が自然数だけではないので，場合分けが増えてしまいます。

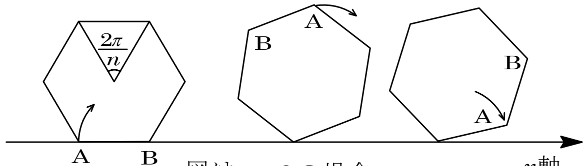
## 問　題

半径 1 の円に内接する正 $n$ 角形が $xy$ 平面上にある。ひとつの辺 AB が $x$ 軸含まれている状態から始めて，正 $n$ 角形を図のように $x$ 軸上をすべらないようにころがし，再び点 A が $x$ 軸に含まれる状態まで続ける。点 A の描く軌跡の長さを $L(n)$ とする。

(1) $L(6)$ を求めよ。

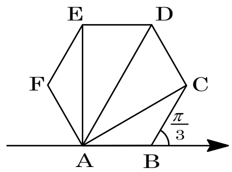
(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} L(n)$ を求めよ。

[2003]



図は $n=6$ の場合

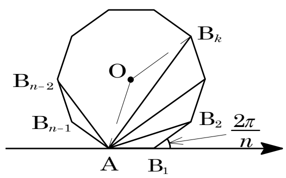
## 解答例




(1) まず，B を中心に A を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転すると，$\mathrm{AB}=1$ より，点 A の軌跡の長さは $1\times\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{3}$ となる。次に，C を中心に A を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転すると，$\mathrm{AC}=1\cdot\sin\frac{\pi}{3}\times 2=\sqrt{3}$ より，点 A の軌跡の長さは $\sqrt{3}\times\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$ となる。さらに，D を中心に A を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転すると，$\mathrm{AD}=2$ より，点 A の軌跡の長さは $2\times\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}\pi$ となる。

同様にして，E を中心に A を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転すると点 A の軌跡の長さは $\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$，F を中心に A を $\frac{\pi}{3}$ だけ回転すると点 A の軌跡の長さは $\frac{\pi}{3}$ となるので，

$$L(6)=\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{2}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{3}\pi+\frac{\pi}{3}=\frac{2}{3}(2+\sqrt{3})\pi$$




(2) $\mathrm{B}=\mathrm{B}_1$ として，右図のように頂点を設定すると，求める軌跡の長さは，$\mathrm{B}_1$，$\mathrm{B}_2$，…，$\mathrm{B}_{n-1}$ を中心として，A を $\frac{2\pi}{n}$ だけ回転したときできる弧の長さの和となる。

ここで，$1\leqq k\leqq n-1$ のとき $\angle\mathrm{AOB}_k=\frac{2k\pi}{n}$ となるので，

$\angle\mathrm{AOB}_k\leqq\pi$ のときは $\mathrm{AB}_k=2\times 1\cdot\sin\frac{2k\pi}{2n}=2\sin\frac{k\pi}{n}$，$\angle\mathrm{AOB}_k>\pi$ のときは $\mathrm{AB}_k=2\times 1\cdot\sin\frac{1}{2}\left(2\pi-\frac{2k\pi}{n}\right)=2\sin\frac{k\pi}{n}$ となり，両者は一致するので，

$$L(n)=\sum_{k=1}^{n-1}2\sin\frac{k\pi}{n}\cdot\frac{2\pi}{n}=4\pi\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n-1}\sin\frac{k\pi}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}L(n)=4\pi\int_0^1\sin\pi x\,dx=4\pi\left[-\frac{1}{\pi}\cos\pi x\right]_0^1=8$

## コメント

大学入試の有名問題ですが，中学入試の有名問題でもあります。おうぎ形や長方形を転がしたとき，頂点の軌跡の長さを求める問題をよく見ます。

## 問　題

$f(x)$を微分可能な関数とする。

(1) $n$ を自然数とするとき，等式$\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x^n\ (x \neq 1)$を満たす関数$f(x)$を求めよ。

(2) 任意の実数 $x$，$a$ に対して，等式$\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}\ (x \neq a)$を満たし，かつ条件$f(0)=1$および$f'(0)=2$を満たす関数$f(x)$を求めよ。　　[2002]

## 解答例

(1) $\dfrac{1}{x-1}\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x^n$ より，$\displaystyle\int_1^x f(t)\,dt = x^{n+1}-x^n$

両辺を $x$ で微分して，$f(x)=(n+1)x^n - nx^{n-1}$

(2) $\dfrac{1}{x-a}\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}$より，$\displaystyle\int_a^x f(t)\,dt = \dfrac{1}{2}(x-a)\{f(x)+f(a)\}$

両辺を $x$ で微分して，$f(x)=\dfrac{1}{2}\{f(x)+f(a)\}+\dfrac{1}{2}(x-a)f'(x)$

$$\frac{1}{2}f(x)=\frac{1}{2}f(a)+\frac{1}{2}(x-a)f'(x),\quad f(x)=f(a)+(x-a)f'(x)$$

ここで，$x=0$ を代入すると，$f(0)=f(a)-af'(0)$

さらに，$f(0)=1$，$f'(0)=2$ より，$1=f(a)-2a$，$f(a)=2a+1$

すると, $a$ は任意の実数なので，$f(x)=2x+1$ となる。

## コメント

(2)では，2 回微分を実行すると，$f''(x)=0$ となり，これから同じ結論が導けます。ただ問題文には，$f(x)$は微分可能としか書かれていないので，いきなり$f''(x)$を利用するのはまずいでしょう。

## 問　題

次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $Ae^x - x = 0$ が $0 < x < 3$ の範囲で異なる 2 つの解をもつための実数 $A$ の範囲を求めよ。ただし $e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t \cos t\,dt$ の値を求めよ。

(3)　$\log f(x) = x - 3 + 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt$，$f(0) < 1$ を満たす関数 $f(x)$ が 2 つ存在することを示せ。ただし, log は自然対数とする。　[2000]

## 解答例

(1)　$Ae^x - x = 0$ より，$A = \dfrac{x}{e^x} = xe^{-x}$

ここで，$g(x) = xe^{-x}$ とおくと，

$$g'(x) = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

| $x$ | 0 | $\cdots$ | 1 | $\cdots$ | 3 |
|---|---|---|---|---|---|
| $g'(x)$ | | ＋ | 0 | － | |
| $g(x)$ | 0 | ↗ | $\frac{1}{e}$ | ↘ | $\frac{3}{e^3}$ |

$A = g(x)$ が，$0 < x < 3$ の範囲で異なる 2 つの解をもつ条件は，右表より，$\dfrac{3}{e^3} < A < \dfrac{1}{e}$ となる。

(2)　まず，$(e^t\cos t)' = e^t\cos t - e^t\sin t$ ………①

$(e^t\sin t)' = e^t\sin t + e^t\cos t$ ………②

①＋②より，$2e^t\cos t = (e^t\cos t + e^t\sin t)'$，$e^t\cos t = \dfrac{1}{2}\left\{e^t(\cos t + \sin t)\right\}'$

すると，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^t\cos t\,dt = \frac{1}{2}\Big[e^t(\cos t + \sin t)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

(3)　$2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt = c$ とおくと，条件より，$\log f(x) = x - 3 + c$

$$f(x) = e^{x-3+c} = e^{c-3}\cdot e^x$$

すると(2)より，$c = 2\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{c-3}\cdot e^t\cos t\,dt = 2e^{c-3}\cdot\frac{1}{2}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right) = e^c\cdot\frac{1}{e^3}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$

ここで，$A = \dfrac{1}{e^3}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 1\right)$ とおくと，$c = Ae^c$，$Ae^c - c = 0$ ………③

さて，$A - \dfrac{3}{e^3} = \dfrac{1}{e^3}\left(e^{\frac{\pi}{2}} - 4\right) > \dfrac{1}{e^3}\left(e^{\frac{3}{2}} - 4\right) = \dfrac{1}{e^3}\cdot\dfrac{e^3 - 16}{e^{\frac{3}{2}} + 4} > 0$

また，$\dfrac{1}{e} - A = \dfrac{1}{e^3}\left(e^2 - e^{\frac{\pi}{2}} + 4\right) > 0$

よって，$\dfrac{3}{e^3} < A < \dfrac{1}{e}$ となり，(1)より③は $0 < c < 3$ に異なる 2 つの解をもつので，$f(x)$ は 2 つ存在し，ともに条件 $f(0) = e^{c-3} < e^0 = 1$ を満たしている。

以上より，与えられた条件を満たす $f(x)$ は 2 つ存在する。

## コメント

(1)と(2)は無関係で，その両方が(3)の誘導となっている形式の問題です。なお，(3)で，$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(t)\cos t\,dt = c$ と最初は置きましたが，(1)との関連を考え，置き換えを上のように変更しました。

## 問　題

$f(x)$ を周期 1 の周期関数とする。すなわち $f(x+1)=f(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。$a$ を実数とし，$p=\int_0^1 e^{ax}f(x)dx$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $n$ を自然数とするとき，$\int_n^{n+1} e^{ax}f(x)dx$ を $p$ を用いて表せ。

(2) $n$ を自然数とするとき，$\int_0^n e^{ax}f(x)dx$ を $p$ を用いて表せ。

(3) 周期 1 の周期関数 $f(x)$ が $0\leqq x\leqq 1$ の範囲で $f(x)=-\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{3}{2}$ であるとき，$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}f(x)dx$ を求めよ。 [1999]

## 解答例

(1) $f(x+1)=f(x)$ より，帰納的に $f(x+n)=f(x)$ となる。

$x-n=t$ とおくと $dx=dt$ で，$x=n\to x=n+1$ のとき $t=0\to t=1$ である。

$$\int_n^{n+1} e^{ax}f(x)dx=\int_0^1 e^{a(t+n)}f(t+n)dt=e^{an}\int_0^1 e^{at}f(t)dt=pe^{an}$$

(2) $\int_0^n e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1} e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}pe^{ak}$ となるので，

(i) $a\neq 0$ のとき

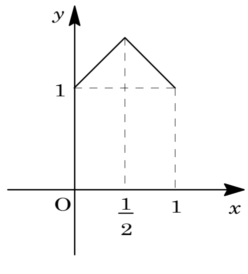
$$\int_0^n e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}pe^{ak}=p\cdot\frac{1-e^{an}}{1-e^a}$$

(ii) $a=0$ のとき

$$\int_0^n e^{ax}f(x)dx=\sum_{k=0}^{n-1}pe^{0}=pn$$

(3) $0\leqq x<\frac{1}{2}$ のとき $f(x)=\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}=x+1$

また，$\frac{1}{2}\leqq x\leqq 1$ のとき $f(x)=-\left(x-\frac{1}{2}\right)+\frac{3}{2}=-x+2$




$$\begin{aligned}
p&=\int_0^1 e^{-x}f(x)dx\\
&=\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)e^{-x}dx+\int_{\frac{1}{2}}^1(-x+2)e^{-x}dx\\
&=-\Big[(x+1)e^{-x}\Big]_0^{\frac{1}{2}}+\int_0^{\frac{1}{2}}e^{-x}dx-\Big[(-x+2)e^{-x}\Big]_{\frac{1}{2}}^1-\int_{\frac{1}{2}}^1 e^{-x}dx\\
&=-\left(\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}-1\right)-\left(e^{-\frac{1}{2}}-1\right)-\left(e^{-1}-\frac{3}{2}e^{-\frac{1}{2}}\right)+\left(e^{-1}-e^{-\frac{1}{2}}\right)\\
&=2-2e^{-\frac{1}{2}}
\end{aligned}$$

(2)より，$\displaystyle\int_0^n e^{-x}f(x)\,dx=\left(2-2e^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^n e^{-x}f(x)\,dx=\left(2-2e^{-\frac{1}{2}}\right)\cdot\frac{1}{1-e^{-1}}=2\left(1-\frac{1}{\sqrt{e}}\right)\frac{e}{e-1}=\frac{2\sqrt{e}}{\sqrt{e}+1}$$

**コメント**

正確な計算力と問題文の読解力があれば完答できます。ただ，(2)では場合分けをするという注意力も必要です。

## 問　題

$a$ と $b$ を正の実数とする。$y=a\cos x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを $C_1$，$y=b\sin x$ $\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のグラフを $C_2$ とし，$C_1$ と $C_2$ の交点を P とする。

(1) P の $x$ 座標を $t$ とする。このとき，$\sin t$ および $\cos t$ を $a$ と $b$ で表せ。

(2) $C_1$，$C_2$ と $y$ 軸で囲まれた領域の面積 $S$ を $a$ と $b$ で表せ。

(3) $C_1$，$C_2$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を $T$ とする。このとき，$T=2S$ となるための条件を $a$ と $b$ で表せ。　[2013]

## 解答例

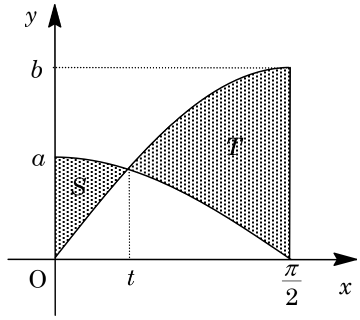
(1) $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$C_1: y=a\cos x$，$C_2: y=b\sin x$ の交点が $x=t$ より，

$$a\cos t=b\sin t,\ \cos t=\frac{b}{a}\sin t$$

そこで，$\cos^2 t+\sin^2 t=1$ に代入すると，

$$\frac{a^2+b^2}{a^2}\sin^2 t=1,\ \sin t=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

すると，$\cos t=\dfrac{b}{a}\cdot\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$




(2) $C_1$，$C_2$ と $y$ 軸で囲まれた領域の面積 $S$ は，

$$S=\int_0^t(a\cos x-b\sin x)\,dx=\left[a\sin x+b\cos x\right]_0^t=a\sin t+b(\cos t-1)$$

$$=a\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+b\left(\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}-1\right)=\frac{a^2+b^2}{\sqrt{a^2+b^2}}-b=\sqrt{a^2+b^2}-b$$

(3) $C_1$，$C_2$ と直線 $x=\dfrac{\pi}{2}$ で囲まれた領域の面積を $T$ とするとき，

$$S-T=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(a\cos x-b\sin x)\,dx=\left[a\sin x+b\cos x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=a-b$$

ここで，条件より，$T=2S$ なので，$-S=a-b$ となり，(2)より，

$$b-\sqrt{a^2+b^2}=a-b,\ 2b-a=\sqrt{a^2+b^2}$$

$2b>a$ のもとで，$4b^2-4ab+a^2=a^2+b^2$，$3b^2-4ab=0$

よって，$3b=4a$ から，$a=\dfrac{3}{4}b$ である。

なお，この式は，$a>0$，$b>0$ より，$2b>a$ を満たしている。

## コメント

定積分と面積の頻出題です。なお，(3)では，$S-T$ を考え，計算量を減少させようと試みましたが，さほど効果はありませんでした。

## 問　題

$a$ を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1) $C_1$ と $C_2$ の両方に接する直線 $l$ の方程式を求めよ。

(2) 2 つの放物線 $C_1$, $C_2$ と直線 $l$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2010]

## 解答例

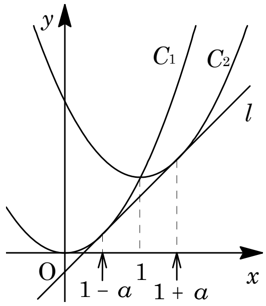
(1) 放物線 $C_1 : y = x^2$ ……①, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ ……②に対して,

①より, $y' = 2x$ となり, 接点 $(t,\ t^2)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③を連立して, $x^2 - 4ax + 4a = 2tx - t^2$

$$x^2 - 2(2a + t)x + 4a + t^2 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$




放物線②と接線③が接することより, ④は重解をもち,

$$D/4 = (2a + t)^2 - (4a + t^2) = 0,\quad a^2 + at - a = 0$$

$a > 0$ から, $a + t - 1 = 0$, $t = 1 - a$ ………⑤

③に代入すると, 接線 $l$ の方程式は,

$$y = 2(1 - a)x - (1 - a)^2$$

(2) ④の重解は, ⑤より, $x = 2a + t = 2a + 1 - a = 1 + a$

また, ①と②の交点は, $x^2 = x^2 - 4ax + 4a$ より, $x = 1$

よって, $C_1$, $C_2$ と $l$ で囲まれた図形の面積 $S$ は,

$$S = \int_{1-a}^{1} \{x - (1 - a)\}^2 dx + \int_{1}^{1+a} \{x - (1 + a)\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 - a)\}^3\Big]_{1-a}^{1} + \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 + a)\}^3\Big]_{1}^{1+a}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$$

## コメント

よく見かける構図で, 過去に多数の大学で出題されてきた頻出問題です。

## 問　題

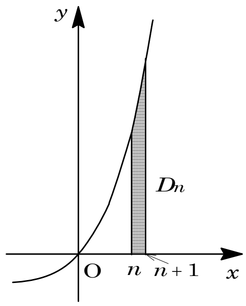
$xy$ 平面上の曲線 $y=xe^x$ と $x$ 軸および 2 直線 $x=n$，$x=n+1$ で囲まれる図形を $D_n$ とする。ただし, $n$ を自然数とする。

(1)　図形 $D_n$ の面積を $S_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}$ を求めよ。

(2)　図形 $D_n$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V_n$ として，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}$ を求めよ。　[2007]

## 解答例

(1)　$D_n$ の面積 $S_n$ は,




$$S_n=\int_n^{n+1}xe^x dx=\Big[xe^x\Big]_n^{n+1}-\int_n^{n+1}e^x dx$$
$$=(n+1)e^{n+1}-ne^n-\Big[e^x\Big]_n^{n+1}$$
$$=ne^{n+1}-(n-1)e^n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_n}{ne^n}=\lim_{n\to\infty}\Big(e-\frac{n-1}{n}\Big)=e-1$

(2)　$D_n$ を $x$ 軸のまわりに回転してできる立体の体積 $V_n$ は,

$$V_n=\pi\int_n^{n+1}x^2e^{2x}dx=\pi\Big\{\Big[\frac{1}{2}x^2e^{2x}\Big]_n^{n+1}-\int_n^{n+1}xe^{2x}dx\Big\}$$
$$=\pi\Big\{\frac{1}{2}(n+1)^2e^{2(n+1)}-\frac{1}{2}n^2e^{2n}-\Big[\frac{1}{2}xe^{2x}\Big]_n^{n+1}+\int_n^{n+1}\frac{1}{2}e^{2x}dx\Big\}$$
$$=\frac{\pi}{2}\Big\{(n+1)^2e^{2(n+1)}-n^2e^{2n}-(n+1)e^{2(n+1)}+ne^{2n}+\Big[\frac{1}{2}e^{2x}\Big]_n^{n+1}\Big\}$$
$$=\frac{\pi}{4}\Big\{(2n^2+2n+1)e^{2(n+1)}-(2n^2-2n+1)e^{2n}\Big\}$$

よって，
$$\lim_{n\to\infty}\frac{V_n}{(S_n)^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{4}\cdot\frac{(2n^2+2n+1)e^{2(n+1)}-(2n^2-2n+1)e^{2n}}{n^2e^{2(n+1)}-2n(n-1)e^{2n+1}+(n-1)^2e^{2n}}$$
$$=\frac{\pi}{4}\lim_{n\to\infty}\frac{\Big(2+\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)e^2-\Big(2-\frac{2}{n}+\frac{1}{n^2}\Big)}{e^2-2\Big(1-\frac{1}{n}\Big)e+\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^2}=\frac{\pi}{4}\cdot\frac{2e^2-2}{e^2-2e+1}$$
$$=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{(e+1)(e-1)}{(e-1)^2}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{e+1}{e-1}$$

## コメント

慎重さが要求される積分の計算問題です。とりたてて工夫もせずに, 計算を進めました。

## 問　題

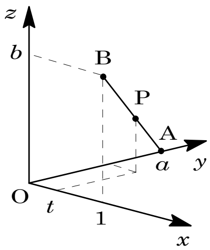
$a$, $b$ を正の実数とする。空間内の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ a,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ b)$ を通る直線を $l$ とする。直線 $l$ を $x$ 軸のまわりに 1 回転して得られる図形を $M$ とする。

(1) $x$ 座標の値が $t$ であるような直線 $l$ 上の点 P の座標を求めよ。

(2) 図形 $M$ と $xy$ 平面が交わって得られる図形の方程式を求めよ。

(3) 図形 $M$ と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積を求めよ。　[2004]

## 解答例



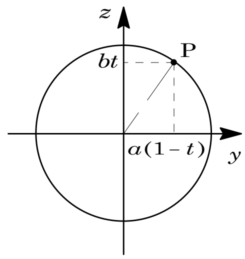

(1) $\mathrm{A}(0,\ a,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0,\ b)$ を通る直線 $l$ 上で, $x=t$ である点 P は, 線分 AB を $t:1-t$ に内分する点であるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=(1-t)(0,\ a,\ 0)+t(1,\ 0,\ b)$$

よって, $\mathrm{P}\left(t,\ a(1-t),\ bt\right)$となる。

(2) 図形 $M$ を平面 $x=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で切断した切り口は, 点 P を $x$ 軸のまわりに 1 回転して得られる円なので,




$$y^2+z^2=a^2(1-t)^2+b^2t^2,\ \ x=t$$

よって, 図形 $M$ の方程式は,

$$y^2+z^2=a^2(1-x)^2+b^2x^2$$

$xy$ 平面との交線は, $z=0$ を代入して,

$$y^2=a^2(1-x)^2+b^2x^2,\ \ z=0$$

(3) 平面 $x=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ で $M$ を切断した断面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=\pi\{a^2(1-t)^2+b^2t^2\}$$

すると, 図形 $M$ と 2 つの平面 $x=0$ と $x=1$ で囲まれた立体の体積 $V$ は,

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^1\pi\{a^2(1-t)^2+b^2t^2\}dt=\pi\Big[-\frac{a^2}{3}(1-t)^3+\frac{b^2}{3}t^3\Big]_0^1$$

$$=\pi\left(\frac{a^2}{3}+\frac{b^2}{3}\right)=\frac{\pi}{3}(a^2+b^2)$$

## コメント

昨年の微分方程式に続き, 今年も, 普通に解くと範囲外としか思えない問題が出ました。北大も京大と同じように, 範囲外も出題すると宣言した方がスッキリすると思いますが。

## 問　題

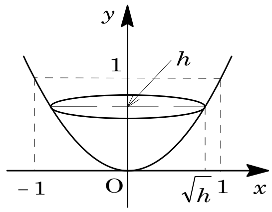
曲線 $y = x^2\ (0 \leqq x \leqq 1)$ を $y$ 軸のまわりに回転してできる形の容器に水を満たす。この容器の底に排水口がある。時刻 $t = 0$ に排水口を開けて排水を開始する。時刻 $t$ において容器に残っている水の深さを $h$, 体積を $V$ とする。$V$ の変化率 $\dfrac{dV}{dt}$ は $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h}$ で与えられる。

(1) 水深 $h$ の変化率 $\dfrac{dh}{dt}$ を $h$ を用いて表せ。

(2) 容器内の水を完全に排水するのにかかる時間 $T$ を求めよ。 [2003]

## 解答例

(1) 水の深さが $h$ のときの水面の面積を $S(h)$ とすると,




$$S(h) = \pi(\sqrt{h})^2 = \pi h$$

さて, $\dfrac{dV}{dt} = \dfrac{dV}{dh} \cdot \dfrac{dh}{dt} = S(h)\dfrac{dh}{dt}$ より,

$$\frac{dV}{dt} = \pi h \frac{dh}{dt} \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より, $\dfrac{dV}{dt} = -\sqrt{h} \cdots\cdots\cdots ②$

①②より, $\pi h \dfrac{dh}{dt} = -\sqrt{h}$, $\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{1}{\pi\sqrt{h}}$

(2) (1)より, $\sqrt{h}\dfrac{dh}{dt} = -\dfrac{1}{\pi}$ となるので, 両辺を $t$ で積分して,

$$\int \sqrt{h}\frac{dh}{dt}dt = -\frac{1}{\pi}\int dt,\ \int \sqrt{h}\,dh = -\frac{1}{\pi}\int dt,\ \frac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} = -\frac{1}{\pi}t + C$$

ここで, $t = 0$ のとき $h = 1$ なので, $C = \dfrac{2}{3}$ となり, $\dfrac{2}{3}h^{\frac{3}{2}} = -\dfrac{1}{\pi}t + \dfrac{2}{3}$

すると, $t = T$ のとき $h = 0$ から, $-\dfrac{1}{\pi}T + \dfrac{2}{3} = 0$ となり, $T = \dfrac{2\pi}{3}$ である。

## コメント

久々に水の問題です。しかし, (2)については, 上のような解法が普通ですが, 現行の数Ⅲでは, ちょっと無理でしょう。

## 問　題

関数 $y=\sqrt{1-(\log x)^2}$ $\left(\dfrac{1}{e}\leqq x\leqq e\right)$ のグラフを $C$ とする。次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とし, $e$ はその底とする。

(1) $C$ 上の点 A における $C$ の接線が原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通るものとする。このとき，点 A の $x$ 座標を求めよ。

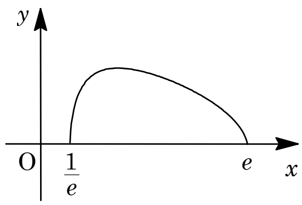
(2) $C$ と $x$ 軸で囲まれた図形を，$x$ 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。 [1998]

## 解答例

(1) $y=\sqrt{1-(\log x)^2}$， $y'=\dfrac{1}{2\sqrt{1-(\log x)^2}}\cdot(-2\log x)\cdot\dfrac{1}{x}=-\dfrac{\log x}{x\sqrt{1-(\log x)^2}}$

$x=t$ における接線は,

$$y=-\frac{\log t}{t\sqrt{1-(\log t)^2}}(x-t)+\sqrt{1-(\log t)^2}$$




原点 $(0,\ 0)$ を通ることより,

$$0=-\frac{\log t}{t\sqrt{1-(\log t)^2}}(-t)+\sqrt{1-(\log t)^2}$$

まとめて，$(\log t)^2-\log t-1=0$，$\log t=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$

ここで，$\dfrac{1}{e}\leqq t\leqq e$ から $-1\leqq\log t\leqq 1$ なので，$\log t=\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}$

よって，$t=e^{\frac{1-\sqrt{5}}{2}}$

(2) 求める体積を $V$ とすると，$V=\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}\pi\left\{1-(\log x)^2\right\}dx$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{1}{e}}^{e}(\log x)^2dx=\left[x(\log x)^2\right]_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}x\cdot 2\log x\cdot\frac{1}{x}dx$

$$=e-\frac{1}{e}-2\left\{[x\log x]_{\frac{1}{e}}^{e}-\int_{\frac{1}{e}}^{e}dx\right\}$$

$$=e-\frac{1}{e}-2\left(e+\frac{1}{e}-e+\frac{1}{e}\right)=e-\frac{5}{e}$$

よって，$V=\pi\left(e-\dfrac{1}{e}-e+\dfrac{5}{e}\right)=\dfrac{4}{e}\pi$

## コメント

基本題です。計算ミスだけが完答を阻む原因となる問題です。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆