1

解答解説のページへ

n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2) 1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3) $n=5$のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

半直線$l : y = x\ (x \geqq 0)$，放物線$C : y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　放物線Cと半直線lが接する点の座標を求めよ。

(2)　$t \geqq 0$とする。原点からの距離がtであるl上の点を$\mathrm{A}(t)$とするとき，$\mathrm{A}(t)$を通りlに直交する直線と，放物線Cの共有点の座標をtを用いて表せ。

(3)　放物線Cと半直線lおよびy軸とで囲まれた図形を，半直線lのまわりに1回転してできる回転体の体積を求めよ。

3

解答解説のページへ

n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^1 (1-x^2)^n\,dx = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

(2) $\displaystyle\sum_{k=0}^{n} \frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$ を示せ。

4　解答解説のページへ

群に分けられた数列

$$1 \mid 2,\ 4,\ 2 \mid 3,\ 6,\ 9,\ 6,\ 3 \mid 4,\ 8,\ 12,\ 16,\ 12,\ 8,\ 4 \mid \cdots\cdots$$

を，第 n 群が $(2n-1)$ 個の項

$$n,\ 2n,\ \cdots\cdots,\ (n-2)n,\ (n-1)n,\ n^2,\ (n-1)n,\ (n-2)n,\ \cdots\cdots,\ 2n,\ n$$

からなるものとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　与えられた数列の初項から第 n 群の末項までの項数を求めよ。

(2)　第 n 群に含まれる項の総和を求めよ。

(3)　最初に現れる 2016 は，この数列の第何項か。

5

解答解説のページへ

P_0，Q_0 を複素数平面上の異なる点とする。自然数 k に対して，平面上の点 P_k，Q_k を以下の条件(i), (ii)を満たすものとして定める。

(i)　線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_{k-1}$ を P_{k-1} を中心として角 θ だけ回転させた線分が $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k$ となる。

(ii)　線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{Q}_k$ を Q_k を中心として角 θ' だけ回転させた線分が $\mathrm{Q}_k\mathrm{P}_k$ となる。

以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{Q}_{k+2}=\mathrm{Q}_k$ となるための，θ と θ' に関する条件を求めよ。

(2)　$0\leqq\theta<2\pi$，$\theta=-\theta'$，$\left|\mathrm{Q}_0\mathrm{P}_0\right|=1$ とする。Q_0 を中心とし，半径が r の円を C とする。P_{n-1} は C の内部，Q_n は C の外部にあるという。このとき，r^2 がとり得る値の範囲を n と θ を用いて表せ。

1

問題のページへ

(1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，勝者がただ 1 人に決まるのは，勝者の選び方が ${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通りで，手の出方が 3 通りである。

これより，この場合の確率は，$\dfrac{n\cdot 3}{3^n} = \dfrac{n}{3^{n-1}}$ である。

(2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，あいこにならないのは，2 種類の手が出た場合である。このとき，種類の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，出方が $2^n - 2$ 通りとなり，その確率は，$\dfrac{3(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$ である。

よって，あいこになる確率は，$1 - \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} = \dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$ である。

(3) 5 人でじゃんけんをし，2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは，

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\dfrac{3^4-2^5+2}{3^4} = \dfrac{17}{3^3}$，5 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{5}{3^4}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{17}{3^3}\cdot\dfrac{5}{3^4} = \dfrac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え，その確率は(1)から $\dfrac{5}{3^4}$，4 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{4}{3^3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{5}{3^4}\cdot\dfrac{4}{3^3} = \dfrac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り，手の出方が 3 通りより，その確率は $\dfrac{10\cdot 3}{3^5} = \dfrac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{3}{3^2}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{3}{3^2} = \dfrac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5 人→2 人→1 人のとき

5 人→2 人は敗者が 3 人決まると考え，その確率は(iii)から $\dfrac{10}{3^4}$，2 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{2}{3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{20}{3^5}$ である。

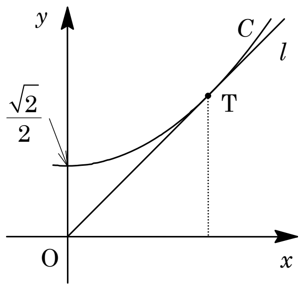
(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{85}{3^7} + \dfrac{20}{3^7} + \dfrac{30}{3^6} + \dfrac{20}{3^5} = \dfrac{375}{3^7} = \dfrac{125}{729}$

［解　説］

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが，意外なほど手こずります。

$\boxed{2}$

問題のページへ



(1)　$l : y = x\ (x \geqq 0)$ ……①，$C : y = \dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ ……②に対して，①と②を連立すると，

$$\frac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \frac{\sqrt{2}}{2} = x\,,\ \sqrt{2}x^2 - 4x + 2\sqrt{2} = 0$$

すると，$\sqrt{2}(x-\sqrt{2})^2 = 0$ から $x = \sqrt{2}$ となり，接点 T の座標は $(\sqrt{2},\ \sqrt{2})$ である。

(2)　l 上の点 $\mathrm{A}(t)$ の座標は，$\mathrm{OA}(t) = t$ から $\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}t\right)$

これより，$\mathrm{A}(t)$ を通り l に直交する直線は，

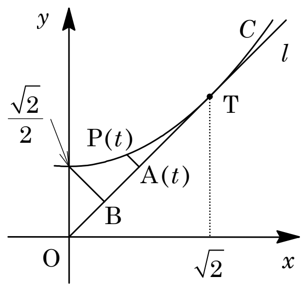
$$y - \frac{\sqrt{2}}{2}t = -\left(x - \frac{\sqrt{2}}{2}t\right),\ y = -x + \sqrt{2}t \cdots\cdots\cdots ③$$

②③を連立すると，$\dfrac{\sqrt{2}}{4}x^2 + \dfrac{\sqrt{2}}{2} = -x + \sqrt{2}t$，$\sqrt{2}x^2 + 4x + 2\sqrt{2} - 4\sqrt{2}t = 0$ となり，

$$x^2 + 2\sqrt{2}x + 2 - 4t = 0,\ x = -\sqrt{2} \pm 2\sqrt{t}$$

③から $y = \sqrt{2} \mp 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t$ なので，求める共有点の座標は，

$$(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t),\ (-\sqrt{2} - 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} + 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$$



(3)　$\mathrm{P}(t)$ の座標を $(-\sqrt{2} + 2\sqrt{t},\ \sqrt{2} - 2\sqrt{t} + \sqrt{2}t)$ とし，2 点 $\mathrm{A}(t)$，$\mathrm{P}(t)$ の距離を $d(t)$ とおくと，

$$d(t) = \sqrt{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}t + \sqrt{2} - 2\sqrt{t}\right) = t - 2\sqrt{2t} + 2$$
$$= (\sqrt{t} - \sqrt{2})^2$$

さて，点 $\left(0,\ \dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$ から l の下ろした垂線の足を B とすると $\mathrm{OB} = \dfrac{1}{2}$ であり，また(1)より，$\mathrm{OT} = 2$ である。

そこで，C と l および y 軸とで囲まれた図形を，l のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V = \frac{1}{3}\pi\left(\frac{1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{2} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} \{d(t)\}^2 dt = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{\frac{1}{2}}^{2} (\sqrt{t} - \sqrt{2})^4 dt$$

ここで，$u = \sqrt{t} - \sqrt{2}$ とおくと，$du = \dfrac{1}{2\sqrt{t}}dt = \dfrac{1}{2(u+\sqrt{2})}dt$ となり，

$$V = \frac{\pi}{24} + \pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} u^4 \cdot 2(u + \sqrt{2})du = \frac{\pi}{24} + 2\pi\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} (u^5 + \sqrt{2}u^4)du$$
$$= \frac{\pi}{24} + 2\pi\left[\frac{u^6}{6} + \frac{\sqrt{2}}{5}u^5\right]_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{0} = \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{3}\left(-\frac{1}{8}\right) + \frac{2\sqrt{2}}{5}\pi \cdot \frac{1}{4\sqrt{2}}$$
$$= \frac{\pi}{24} - \frac{\pi}{24} + \frac{\pi}{10} = \frac{\pi}{10}$$

［解 説］

斜回転体の体積を求める問題で，(2)が(3)の誘導です。ただ，$\mathrm{OA}(t)$ の長さを t としたとき，$\mathrm{P}(t)$ の座標がややこしくないように問題が設定されています。その結果，$d(t)$ が簡単な式として表せ，積分計算も標準的というわけです。

3

問題のページへ

(1)　$I_n=\int_0^1(1-x^2)^n dx$ とおくと，$I_{n+1}=\int_0^1(1-x^2)^{n+1}dx$ となり，

$$I_{n+1}=\Big[\,x(1-x^2)^{n+1}\,\Big]_0^1-(n+1)\int_0^1 x(1-x^2)^n(-2x)dx$$

$$=-2(n+1)\int_0^1 -x^2(1-x^2)^n dx$$

$$=(-2n-2)\int_0^1\{(1-x^2)-1\}(1-x^2)^n dx=(-2n-2)(I_{n+1}-I_n)$$

よって，$(2n+3)I_{n+1}=(2n+2)I_n$ より，$I_{n+1}=\dfrac{2n+2}{2n+3}I_n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$I_n=I_1\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}$$

ここで，$I_1=\int_0^1(1-x^2)dx=1-\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{3}$ から，

$$I_n=\frac{2}{3}\cdot\frac{4}{5}\cdot\frac{6}{7}\cdot\frac{8}{9}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-2}{2n-1}\cdot\frac{2n}{2n+1}=2^n n!\cdot\frac{2^n n!}{(2n+1)!}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$$

$n=1$ をあてはめると，$I_1=\dfrac{4\cdot(1!)^2}{3!}=\dfrac{2}{3}$ となり成立するので，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　二項定理より，$(1-x^2)^n=\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k(-x^2)^k=\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}$ となり，

$$\int_0^1(1-x^2)^n dx=\int_0^1\Big(\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k(-1)^k x^{2k}\Big)dx=\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\int_0^1 x^{2k}dx$$

$$=\sum_{k=0}^n {}_n\mathrm{C}_k(-1)^k\frac{1}{2k+1}=\sum_{k=0}^n\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}$$

よって，$(*)$から，$\displaystyle\sum_{k=0}^n\frac{n!}{k!\,(n-k)!}\frac{(-1)^k}{2k+1}=\frac{4^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

［解　説］

定積分がらみで誘導なしの証明問題ですが，(1)の右辺の形には，部分積分から漸化式という流れが暗示されています。上の解答例以外に，まず $x=\sin\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ と置換する方法もあり，そうすると参考書などには必ず載っている有名な定積分が対応します。また，(2)では左辺の階乗の部分が ${}_n\mathrm{C}_k$ であることがわかりますので，二項展開という方針は明快です。なお，漸化式の解法については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

4

問題のページへ

(1)　第 n 群が $(2n-1)$ 個の項からなる数列の第 n 群の末項までの項数は,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=\frac{1+(2n-1)}{2}\cdot n=n^2$$

(2)　第 n 群に含まれる項の総和は,

$$n+2n+\cdots+(n-1)n+n^2+(n-1)n+\cdots+2n+n$$
$$=2\{1+2+\cdots+(n-1)+n\}n-n^2=n^2(n+1)-n^2=n^3$$

(3)　2016 が第 n 群の前半部にあり，その k 項目であるとすると，

$kn=2016$ ………①，$k\leqq n$ ………②

①より $k=\dfrac{2016}{n}$ となり，②に代入すると $\dfrac{2016}{n}\leqq n$ から，$n^2\geqq 2016$ となり，

$n\geqq\sqrt{2016}=\sqrt{2^5\cdot 3^2\cdot 7}=12\sqrt{14}$ ………③

したがって，n は③を満たす $2016=2^5\cdot 3^2\cdot 7$ の約数である。

ここで，$3.7<\sqrt{14}<3.8$ から，$44.4<12\sqrt{14}<45.6$ となるので，③を満たす 2016 の最小の約数 n は 48 である。

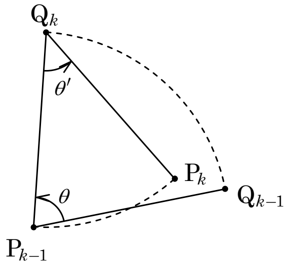
よって，①から $k=42$ となり，最初に現れる 2016 は第 48 群の 42 項目となる。すると，(1)から，与えられた数列の第 (47^2+42) 項，つまり第 2251 項である。

［解　説］

典型的な群数列の問題ですが, (3)の設問は一癖ありました。

5　　　問題のページへ

(1)　$\mathrm{P}_k(z_k)$，$\mathrm{Q}_k(w_k)$とおく。このとき，$\alpha=\cos\theta+i\sin\theta$，$\beta=\cos\theta'+i\sin\theta'$とすると，条件(i)(ii)から，



$$w_k-z_{k-1}=\alpha(w_{k-1}-z_{k-1})\cdots\cdots\cdots①$$

$$z_k-w_k=\beta(z_{k-1}-w_k)\cdots\cdots\cdots②$$

①を②に代入すると，$z_k-w_k=\beta\alpha(z_{k-1}-w_{k-1})$から，

$$z_k-w_k=(\beta\alpha)^k(z_0-w_0)=(\alpha\beta)^k(z_0-w_0)\cdots\cdots③$$

③を①に代入すると，$w_k-z_{k-1}=-\alpha(\alpha\beta)^{k-1}(z_0-w_0)$から，

$$w_{k+1}-z_k=-\alpha(\alpha\beta)^k(z_0-w_0)\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$w_{k+1}-w_k=(1-\alpha)(\alpha\beta)^k(z_0-w_0)\cdots\cdots⑤$となり，

$$w_{k+2}-w_{k+1}=(1-\alpha)(\alpha\beta)^{k+1}(z_0-w_0)\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥から，$w_{k+2}-w_k=(1-\alpha)(1+\alpha\beta)(\alpha\beta)^k(z_0-w_0)$

すると，条件から$w_{k+2}=w_k$で，$\alpha\beta\neq0$，$z_0\neq w_0$なので，$(1-\alpha)(1+\alpha\beta)=0$

(i)　$\alpha=1$のとき　$\cos\theta+i\sin\theta=1$から，$\theta=2l\pi$ (lは整数)

(ii)　$\alpha\beta=-1$のとき　$\cos(\theta+\theta')+i\sin(\theta+\theta')=-1$から，

$$\theta+\theta'=(2m+1)\pi\ (m\text{は整数})$$

(2)　$\theta=-\theta'$のとき，$\alpha\beta=\cos0+i\sin0=1$となり，⑤から，

$$w_{k+1}-w_k=(1-\alpha)(z_0-w_0)$$

よって，$w_n=w_0+n(1-\alpha)(z_0-w_0)$，$w_n-w_0=n(1-\alpha)(z_0-w_0)\cdots\cdots\cdots⑦$

また，③から，$z_k-w_k=z_0-w_0$となり，$z_{n-1}-w_{n-1}=z_0-w_0\cdots\cdots\cdots⑧$

⑦から，$w_{n-1}-w_0=(n-1)(1-\alpha)(z_0-w_0)$となり，⑧に代入すると，

$$\begin{aligned}z_{n-1}-w_0&=z_0-w_0+(n-1)(1-\alpha)(z_0-w_0)=\{1+(n-1)(1-\alpha)\}(z_0-w_0)\\&=\{n+(1-n)\alpha\}(z_0-w_0)\cdots\cdots\cdots⑨\end{aligned}$$

ここで，$|z_0-w_0|=1$なので，⑦⑨より，

$$|w_n-w_0|=n|1-\alpha|\cdots\cdots\cdots⑩,\ |z_{n-1}-w_0|=|n+(1-n)\alpha|\cdots\cdots\cdots⑪$$

さて，条件より，Q_0が中心で半径がrの円Cとすると，P_{n-1}はCの内部，Q_nはCの外部にあることより，$|z_{n-1}-w_0|<r$，$|w_n-w_0|>r$である。

⑩から，$n|1-\alpha|>r$，すなわち$r^2<n^2|1-\alpha|^2$となり，

$$r^2<n^2\{(1-\cos\theta)^2+\sin^2\theta\}=2n^2(1-\cos\theta)$$

⑪から，$|n+(1-n)\alpha|<r$，すなわち$r^2>|n+(1-n)\alpha|^2$となり，

$$r^2>\{n+(1-n)\cos\theta\}^2+(1-n)^2\sin^2\theta=(1-2n+2n^2)+2n(1-n)\cos\theta$$

ここで，$D=2n^2(1-\cos\theta)-\{(1-2n+2n^2)+2n(1-n)\cos\theta\}$とおくと，

$$D=-2n\cos\theta+2n-1=2n(1-\cos\theta)-1$$

以上より，r^2 がとり得る値の範囲は,

$$(1-2n+2n^2)+2n(1-n)\cos\theta < r^2 < 2n^2(1-\cos\theta)$$

ただし，$D>0$ すなわち $2n(1-\cos\theta)>1$ とする。

［解 説］

複素数平面上の点列について，漸化式を立て，それを解く問題です。(1)では，①②の漸化式を，条件 $w_{k+2}=w_k$ が利用できる方向に変形をしています。また(2)では，条件 $|z_{n-1}-w_0|<r$ かつ $|w_n-w_0|>r$ が利用できるように，$z_{n-1}-w_0$，w_n-w_0 を n と α で表しています。