$\boxed{7}$ ［東北大］

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。

8　　［千葉大］

n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。

9　　［東京大・文］

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。

$\boxed{10}$ ［京都大・文］

座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P，Q と，m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P，Q，R の座標を求めよ。

11　　［東京医歯大］

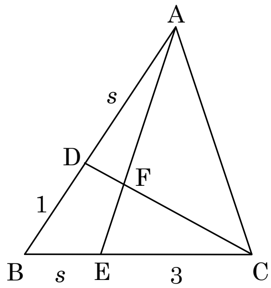
xyz 空間において，点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ と点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を結ぶ線分 OA を直径にもつ球面を σ とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　球面 σ の方程式を求めよ。

(2)　xy 平面上にあって O と異なる点 P に対して，線分 AP と球面 σ との交点を Q とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を示せ。

(3)　点 $\mathrm{S}(p,\ q,\ r)$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OS}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AS}} = -\left|\overrightarrow{\mathrm{OS}}\right|^2$ を満たす，xy 平面上にない定点とする。σ 上の点 Q が $\overrightarrow{\mathrm{OS}} \perp \overrightarrow{\mathrm{SQ}}$ を満たしながら動くとき，直線 AQ と xy 平面との交点 P はどのような図形を描くか。$p,\ q,\ r$ を用いて答えよ。

$\boxed{7}$ ［東北大］



(1)　△ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\ \ \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$

条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので，

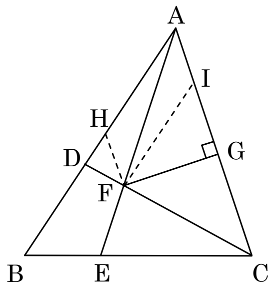
$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}\left(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\ \ \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$



(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは α が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より，

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより，

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

よって，FG の長さが最大となるときの s の値は $s=\sqrt{3}$ である。

［解　説］

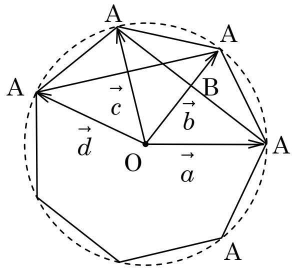
平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが，(1)では分点ベクトル，(2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

$\boxed{8}$ ［千葉大］

(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

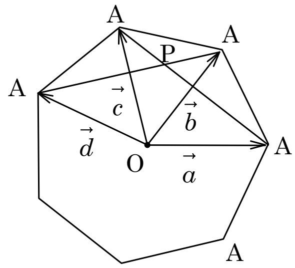


同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。

(2) まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$



また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1\,,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0\,,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3) 条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2\cdots\cdots\cdots③$

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

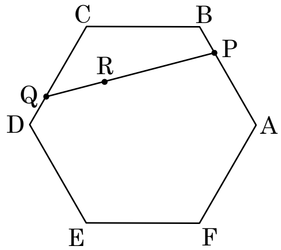
$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

［解　説］

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

9　　　　［東京大・文］



1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の辺 AB 上を点 P，辺 CD 上を点 Q が独立に動くとき，$0 \leqq p \leqq 1$，$0 \leqq q \leqq 1$ として，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB} = p : 1-p$，$\mathrm{DQ}:\mathrm{QC} = q : 1-q$ とおく。

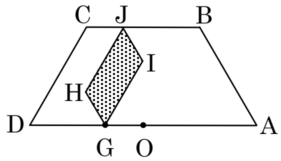
さて，AD の中点を O とし，$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ} = 2:1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$
$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + p\overrightarrow{\mathrm{AB}}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OD}} + q\overrightarrow{\mathrm{DC}})$$
$$= \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}} + \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで，AD を $2:1$ に内分する点を G とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}} + \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OG}} + \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{GR}} = \frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

そこで，$0 \leqq \frac{1}{3}p \leqq \frac{1}{3}$，$0 \leqq \frac{2}{3}q \leqq \frac{2}{3}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{GH}} = \frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}} = \frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおくと，点 R は右図の平行四辺形 GIJH の内部または辺上を動く。



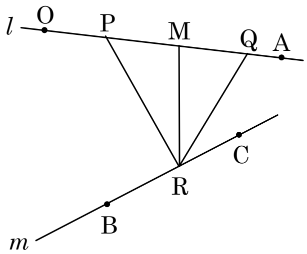
$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}| = \frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GI}}| = \frac{2}{3}$，$\angle\mathrm{HGI} = \frac{\pi}{3}$ より，その面積は，

$$2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{9}$$

［解　説］

平面ベクトルと領域の問題です。成分表示を利用するかどうかで，2 つの解法があります。この問題ではどちらでも可能ですが，前者は後者に比べ，記述量がかなり増えます。

10　　　　［京都大・文］



原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線 l 上に 2 点 P, Q, 点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線 m 上に点 R がある。ここで, 線分 PQ の中点を M とするとき, △PQR が正三角形より, その面積は,

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{MR}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}^2$$

すると, △PQR の面積が最小となるのは, MR が最小の場合である。すなわち, $\mathrm{MR}\perp l$ かつ $\mathrm{MR}\perp m$ である。

そこで, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,\ -4)=-2(1,\ 0,\ 2)$ なので, $t,\ s$ を実数とすると, 直線 l, m は,

$$l:(x,\ y,\ z)=t(0,\ -1,\ 1),\ m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+s(1,\ 0,\ 2)$$

これより, M$(0,\ -t,\ t)$, R$(s,\ 2,\ 1+2s)$ とおけ, $\overrightarrow{\mathrm{MR}}=(s,\ 2+t,\ 1+2s-t)$

さて, $\mathrm{MR}\perp l$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ となり,

$$-2-t+1+2s-t=0,\ -2t+2s=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

また, $\mathrm{MR}\perp m$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり,

$$s+2(1+2s-t)=0,\ -2t+5s=-2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $s=-1$, $t=-\frac{3}{2}$ となり, M$\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$, R$(-1,\ 2,\ -1)$ である。

これより, $\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ から, $|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

すると, $\mathrm{PQ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}$ となり, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ から, 点 P, Q の座標は,

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}&=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)\\&=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\end{aligned}$$

よって, P$(0,\ 1,\ -1)$, Q$(0,\ 2,\ -2)$, または P$(0,\ 2,\ -2)$, Q$(0,\ 1,\ -1)$ である。

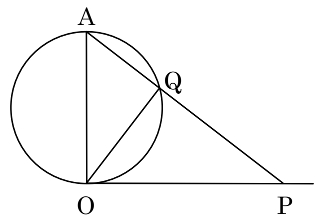
［解　説］

高校数学に「代数・幾何」という科目があったころの頻出題の 1 つです。ポイントは, 正三角形の中線がねじれの位置にある l と m の共通垂線ということです。なお, 最後の点 P, Q の座標を求める計算は, 単位ベクトルを利用しています。

11　　［東京医歯大］

(1)　$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(0,\ 0,\ 1)$に対し，線分 OA が直径の球面σは，中心$\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{2}$より，その方程式は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$



(2)　xy 平面上の点 $P(P\neq O)$ に対して, 3 点 O, A, P を含む平面を考えると，この平面による球面σの切り口は OA が直径の円となるので，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AP}$ である。

(3)　$P(x,\ y,\ 0)$とおき，$AQ:QP=t:1-t\ (0<t<1)$とすると，

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OP}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x,\ y,\ 0)$$
$$=(tx,\ ty,\ 1-t)\cdots\cdots\cdots①$$

(2)より，$\overrightarrow{OQ}\perp\overrightarrow{AP}$ なので，$\overrightarrow{AP}=(x,\ y,\ -1)$ から，

$$tx^2+ty^2-(1-t)=0,\quad t=\frac{1}{x^2+y^2+1}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$S(p,\ q,\ r)\ (r\neq0)$から$\overrightarrow{AS}=(p,\ q,\ r-1)$となり，$\overrightarrow{OS}\cdot\overrightarrow{AS}=-\left|\overrightarrow{OS}\right|^2$より，

$$p^2+q^2+r(r-1)=-(p^2+q^2+r^2),\quad 2(p^2+q^2+r^2)=r\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，$\overrightarrow{OS}\perp\overrightarrow{SQ}$なので，①から$\overrightarrow{SQ}=(tx-p,\ ty-q,\ 1-t-r)$となり，

$$p(tx-p)+q(ty-q)+r(1-t-r)=0$$
$$ptx+qty+r(1-t)=p^2+q^2+r^2\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$2ptx+2qty+2r(1-t)=r$，$2ptx+2qty-2tr+r=0$

②を代入すると，$\dfrac{2px}{x^2+y^2+1}+\dfrac{2qy}{x^2+y^2+1}-\dfrac{2r}{x^2+y^2+1}+r=0$となり，

$$2px+2qy-2r+r(x^2+y^2+1)=0,\quad x^2+y^2-1+\frac{2p}{r}x+\frac{2q}{r}y=0$$

$$\left(x+\frac{p}{r}\right)^2+\left(y+\frac{q}{r}\right)^2=\frac{p^2+q^2+r^2}{r^2}$$

ここで，③から$r>0$となり，$\left(x+\dfrac{p}{r}\right)^2+\left(y+\dfrac{q}{r}\right)^2=\dfrac{1}{2r}$

したがって，点 P は xy 平面上で，中心$\left(-\dfrac{p}{r},\ -\dfrac{q}{r},\ 0\right)$，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2r}}$の円を描く。

［解　説］

空間ベクトルの図形への応用問題です。上の解答例は，成分計算を主体として記述しています。