《2018 入試対策》

名古屋大学

理系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された名古屋大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。
過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2013 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 名大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。
(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

　条件：$y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)$ $(-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

2　実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。[2014]

3　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ がある。

(1)　$a>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2)　$a>0$，$b>0$ とする。$\mathrm{OP}:\mathrm{AP}:\mathrm{BP}=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための a，b に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。[2011]

4　原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円に，円外の点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0)$ から 2 本の接線を引く。

(1)　2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標 $(x_1,\ y_1)$ を点 P の座標 $(x_0,\ y_0)$ を用いて表せ。また $\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OQ}=1$ であることを示せ。

(2)　点 P が直線 $x+y=2$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。[2007]

5　座標平面上に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 2)$，$\mathrm{B}(6,\ 0)$ を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を $\mathrm{A}'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 6)$ とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　ピッタリ直線が 2 本通る点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ の存在範囲を求め，それを図示せよ。[2006]

6　O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 $A : x^2+y^2=1$ と直線 $l : y=d$ $(0<d<1)$ との交点を P, Q とする。円周 A 上の点 R$(x,\ y)$ は $y>d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S, 点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。 [2003]

■ 図形と計量

1　C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a, a, $2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき, a の値を求めよ。

[2004]

2　(1)　平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=b$，$\mathrm{BD}=c$，$\mathrm{AC}=d$ とする。このとき，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　3 つの正数 a, b, $c\,(0<a\leqq b\leqq c)$ が $a^2+b^2>c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。 [2003]

■ ベクトル

1　xyz 空間の 2 点 A$(0,\ 0,\ 2)$，P$(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し, S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を a, b, t を使って表せ。

(2)　l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。

(3)　l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 a, b に関する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。 [2017]

2　座標空間に 8 点 $O(0,\ 0,\ 0)$, $P(1,\ 0,\ 0)$, $Q(1,\ 1,\ 0)$, $R(0,\ 1,\ 0)$, $A(0,\ 0,\ 1)$, $B(1,\ 0,\ 1)$, $C(1,\ 1,\ 1)$, $D(0,\ 1,\ 1)$ をとり, 線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を $N(0,\ 1,\ t)$ とし, 3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1)　K の座標を t で表せ。

(2)　四面体 OKLP の体積を $V(t)$ とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき, $V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。　[2010]

3　三角形 ABC で辺 AC を $s:1-s$ に内分する点を P, 辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q, 線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき,

$$\triangle\text{APR の面積} = 2\times(\triangle\text{BQR の面積})$$

が成り立っているとする。

(1)　s を t を用いて表せ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし, t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき, $t\to+0$ と表す。　[2008]

4　1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え, $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$, $\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で, 動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で, 動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で, 動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で, 同時に動き出す。

(1)　動き出してから t 秒後 $(0\leqq t\leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{OP}$, $\overrightarrow{OQ}$, $\overrightarrow{OR}$, $\overrightarrow{OS}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2)　線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\ (0\leqq t\leqq 1)$ の値を求め, ベクトル $\overrightarrow{OM}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。　[2005]

5　△ABC の外心（外接円の中心）O が三角形の内部にあるとし, α, β, γ は $\alpha\overrightarrow{OA}+\beta\overrightarrow{OB}+\gamma\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たす正数であるとする。また, 直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A′, B′, C′ とする。

(1)　$\overrightarrow{OA}$, α, β, γ を用いて $\overrightarrow{OA'}$ を表せ。

(2)　$\triangle A'B'C'$ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ。　[2001]

6　座標空間内の 6 つの平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ で囲まれた立方体を C とする。$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ を $a_1>0$, $a_2>0$, $a_2>0$ を満たし, 大きさが 1 のベクトルとする。H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする。このとき, ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を, a_1, a_2, a_3 を用いて表せ。ここに, C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である。　[2000]

7　(1)　ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ が次の条件(＊)を満たすとき, 点 $(a_1,\ a_2)$ の存在範囲を図示せよ。

(＊)　あるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ が存在して, $(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$ が任意のベクトル $\vec{p}$ に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ に対して, 条件(＊)にあるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　次の問いに答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(*)\quad\begin{cases} 2\text{ 次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である。} \\ 2\text{ 次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である。} \end{cases}$$

(2)　2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ は, 次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について, a_n, b_n は整数であり, 2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}, b_{n+1} である。

このとき,

(i)　正の整数 m で, $|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii)　条件(＊＊)を満たす数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の組をすべて求めよ。　[2016]

2 負でない整数 N が与えられたとき，$a_1=N$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ として数列$\{a_n\}$を定める。ただし$[a]$は，実数 a の整数部分（$k\leqq a<k+1$となる整数 k）を表す。

(1) $a_3=1$となるようなNをすべて求めよ。

(2) $0\leqq N<2^{10}$を満たす整数 N のうちで，N から定まる数列$\{a_n\}$のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3) 0 から$2^{100}-1$までの2^{100}個の整数から等しい確率で N を選び，数列$\{a_n\}$を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数 m を求めよ。

(＊) 数列$\{a_n\}$のある項が m となる確率が$\dfrac{1}{100}$以下となる。 [2014]

3 $x>0$とし，$f(x)=\log x^{100}$とおく。

(1) 次の不等式を証明せよ。 $\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2) 実数 a の整数部分($k\leqq a<k+1$となる整数 k)を$[a]$で表す。整数$[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，$\cdots$，$[f(1000)]$のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば，$\log 10=2.3026$として計算せよ。 [2013]

4 $k,\ m,\ n$は整数とし，$n\geqq 1$とする。${}_m\mathrm{C}_k$を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$を以下のように定める。

$$S_k(n)=1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k,\ S_k(1)=1\ (k\geqq 0)$$

$$\begin{aligned}T_m(n)&={}_m\mathrm{C}_1S_1(n)+{}_m\mathrm{C}_2S_2(n)+{}_m\mathrm{C}_3S_3(n)+\cdots+{}_m\mathrm{C}_{m-1}S_{m-1}(n)\\&=\sum_{k=1}^{m-1}{}_m\mathrm{C}_kS_k(n)\quad(m\geqq 2)\end{aligned}$$

(1) $T_m(1)$と$T_m(2)$を求めよ。

(2) 一般の n に対して$T_m(n)$を求めよ。

(3) p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$ $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$は p の倍数であることを示せ。 [2013]

5 $m,\ p$を 3 以上の奇数とし，m は p で割り切れないとする。

(1) $(x-1)^{101}$の展開式におけるx^2の項の係数を求めよ。

(2) $(p-1)^m+1$はpで割り切れることを示せ。

(3) $(p-1)^m+1$はp^2で割り切れないことを示せ。

(4) rを正の整数とし，$s=3^{r-1}m$とする。2^s+1は3^rで割り切れることを示せ。

[2012]

6　a, b は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0\,,\ \ y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2011]

7　x, y を正の整数とする。

(1)　$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2)　p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x} + \dfrac{1}{y} = \dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x + 3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。　[2009]

8　次の問いに答えよ。

(1)　$3x + 2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2} + \dfrac{y}{3} + \dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　[2008]

9　正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列 $\{x_n\}$ を $x_1 = x_2 = 1$，$x_{n+1} = ax_n + bx_{n-1}$ $(n \geqq 2)$ で定める。このときすべての正の整数 n に対して x_{n+1} と x_n が互いに素であることを示せ。　[2004]

10　関係式 $x^a = y^b = z^c = xyz$ を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする。　[2002]

11　n を 2 以上の自然数とする。条件 $k_1 \geqq 1,\ \cdots\cdots,\ k_{n-1} \geqq 1,\ k_n \geqq 0$ を満たす n 個の整数の組 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ に対して，自然数 $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ を次のように定める。

$$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = 2^{k_1 + k_2 + \cdots + k_n} - 2^{k_2 + \cdots + k_n} - 2^{k_3 + \cdots + k_n} - \cdots - 2^{k_n}$$

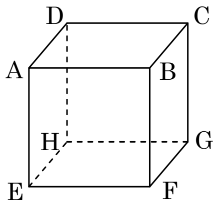
(1)　$1999 = m(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ となる $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ を求めよ。

(2)　$m(k_1,\ k_2) = m(l_1,\ l_2)$ であれば，$k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$ が成り立つことを示せ。

(3)　$n \geqq 3$ のとき，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n)$ であれば，$k_j = l_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が成り立つことを示せ。　[1999]

■ 確率

1 右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3) 自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4) 自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。 [2017]

2 玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A，B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2) $k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。 [2016]

3　数直線上にある 1，2，3，4，5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき，

$$\begin{cases} \text{石が点 } 1 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で点 } 2 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{ にあるならば，確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に，確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 } 5 \text{ にあるならば，確率 } 1 \text{ で点 } 4 \text{ に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め，この試行を繰り返す。また，石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　試行を 6 回繰り返した後に，石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ。

(2)　試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3)　試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に，ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。　[2015]

4　3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1)　p_1，q_1 を求めよ。

(2)　p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。　[2013]

5 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1) $X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。

(3) $Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4) n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。 [2012]

6 はじめに，A が赤玉を 1 個，B が白玉を 1 個，C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の硬貨を投げ，表が出れば A と B の玉を交換し，裏が出れば B と C の玉を交換する，という操作を考える。この操作を n 回($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とおく。

(1) a_1，b_1，c_1，a_2，b_2，c_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。

(3) a_n，b_n，c_n を求めよ。 [2010]

7 さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) 投げるとき，出る目の積の一の位が j ($j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4) $p_n(5)$ を求めよ。 [2009]

8 袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1) 連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ。

(2) 一般の N に対し $p_N(m)$ $(1 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。 [2007]

9　正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字が a_1，a_2，a_3，a_4 のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。

(1)　$n \geqq 1$ のとき，$q_n = p_n(1) + p_n(6)$，$r_n = p_n(2) + p_n(5)$，$s_n = p_n(3) + p_n(4)$ を求めよ。

(2)　$p_n(m)$ $(n \geqq 1,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$ を求めよ。　[2006]

10　整数に値をとる変数 x の値が，次の規則で変化する。

(i)　ある時刻で $x = m$ $(m \neq 0)$ のとき，1 秒後に $x = m+1$，$x = m-1$ である確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　ある時刻で $x = 0$ のとき，1 秒後に $x = 1$ である確率は q，$x = -1$ である確率は $1-q$ である $(0 \leqq q \leqq 1)$。$x = 0$ から始めて，n 秒後 $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x = m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1)　$p_3(1) + p_3(-1)$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ。
どんな整数 m についても $p_n(m) + p_n(-m)$ は q によらない。

(3)　$p_n(0)$ を求めよ。　[2005]

11　サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし，8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し，8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば，7 の位置で 3 が出た場合，8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお，サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて，サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

(3)　4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。　[2004]

12　サイコロを n 回投げて，3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について，$P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし，このような k が複数あるときは，最も大きいものを $N(n)$ とする。

(1)　$\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{N(n)}{n}$ を最小にする n と，そのときの $\dfrac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}$ を求めよ。　[2003]

13　数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える。毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$，裏が出れば -1，それぞれ駒を進めるとする。ただし，点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする。

(1)　k 回目に硬貨を投げた後，駒が点 1 にある確率を求めよ。

(2)　k 回目に硬貨を投げた後，駒がある点 X_k の期待値 $E[\,X_k\,]$ を求めよ。　[2001]

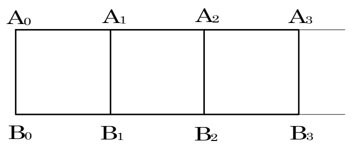
14　図のように，平面上に点 A_0，A_1，A_2，……および B_0，B_1，B_2，……が並んでいる。点 P は A_0 から出発し，次の規則に従いこれらの点の上を移動する。

P が A_n にいるときには 1 秒後に A_{n+1} または B_n に，一方 B_n にいるときには B_{n+1} または A_n に移動する。ただし，前にいた点には戻らない。また，P が移動しうる点が複数あるときには，それぞれの点へ等確率で移動する。

P が A_n へ到る行き方が a_n 通り，B_n へ到る行き方が b_n 通りあるとする。

(1)　a_3，b_3 を求めよ。

(2)　a_n，b_n を求めよ。



(3)　一方，点 Q は A_8 から P と同時に出発し，1 秒ごとに順次 $\mathrm{A}_8 \to \mathrm{A}_7 \to \mathrm{A}_6 \to \cdots\cdots \to \mathrm{A}_0$ と移動し，その後は A_0 にとどまる。P と Q が出会う確率を求めよ。　[2000]

15　座標平面上に 4 点 A(0, 1)，B(0, 0)，C(1, 0)，D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに，点 Q は，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A，C にいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする。a_n，c_n を求めよ。　[1998]

■ 論証

1 n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件(I), (II), (III)を満たしている。

(I)　集合 M は n 個の要素からなる。

(II) 集合 M の要素 z に対して, $\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(III) 集合 M の要素 z, w に対して, その積 zw は集合 M の要素である。ただし, $z=w$ の場合も含める。

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2)　n は偶数であることを示せ。

(3)　$n=4$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

(4)　$n=6$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

[2017]

2 xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$y=\dfrac{1}{3}x^2+\dfrac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2)　a, b は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に, 点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば, 無限個存在することを示せ。　[2010]

3 a, b, c を実数とし, 実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に関する方程式

(i)　$x+y-2z=3a$, $2x-y-z=3b$, $x-5y+4z=3c$

および

(ii)　$x^2+y^2+z^2=1$

を考える。

(1)　方程式(i)が解をもつための a, b, c に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ。

(2)　方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき, その共通解 $(x,\ y,\ z)$ は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ。　[2004]

4　$f(x)$を実数全体で定義された連続関数で，$x>0$ で$0<f(x)<1$を満たすものとする。$a_1=1$とし，順に，$a_m=\int_0^{a_{m-1}} f(x)dx$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$により数列$\{a_m\}$を定める。

(1)　$m\geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ$a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$となることを示せ。

(2)　$\dfrac{1}{2002}>a_m$となる m が存在することを背理法を用いて示せ。　[2002]

■ 複素数

1　次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式$f(x)$で$f(\alpha)=0$となるもののうち，x^4の係数が 1 であるものを求めよ。

(2)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号±はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた$f(x)$に対して方程式$f(x)=0$の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3)　(2)で求めた$f(x)=0$の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

[2015]

2　(1)　複素数 z を未知数とする方程式$z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解$z=p+qi$ （p，q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式$x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$が，整数の解を少なくとも 1 つもつ。　[2005]

3　次の問いに答えよ。ただし，偏角θは，$0°\leqq\theta<360°$の範囲で考えるものとする。

(1)　$|z+i|=|z-i|$を満たす複素数zは，実数に限ることを示せ。

(2)　複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3)　z を未知数とする方程式$(z+i)^9=(z-i)^9$のすべての解 z について$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。　[2002]

4 n を 3 以上の自然数とする。有限複素数列 z_1，z_2，…，z_n の各項はいずれも方程式 $z^6=1$ の解の 1 つであり，かつ関係式 $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ を満たしているとする。

(1) z_1，z_2，…，z_n の中に 1 が含まれ，-1 が含まれていないとすれば，$-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも z_1，z_2，…，z_n の中に含まれることを示せ。

(2) $n=6$ のとき, (1)のような複素数列 z_1，z_2，…，z_6 のとり方の個数を求めよ。

[2001]

5 実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，相異なる虚数解 α，β と実数解 γ をもつとする。

(1) $\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ。ここで，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

(2) α，β，γ が等式 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たし，さらに複素数平面上で α，β，γ を表す 3 点は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする。このとき，実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。 [2000]

6 N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ をみたすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ。ただし，ここで i は虚数単位（$i^2=-1$）である。

(1) $S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$

(2) $S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3) $S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2(N-1)\theta$ [1998]

■ 曲線

1 $a>0$, $b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\frac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし, $s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) $r,\ s,\ t$ を, a と b を用いて表せ。

(2) $\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形となる a と r が存在するような b の値を求めよ。 [2009]

2 a, b を正数とし, xy 平面で不等式$\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$の表す領域 D と, 不等式$x^2+y^2\leqq 1$の表す領域Eを考える。

(1) $a=2$, $b=1$の場合に, 領域Dを図示せよ。

(2) D が E に含まれるための a, b の条件を求め, ab 平面上でその条件の表す領域を図示せよ。 [2002]

3 座標平面上に, 双曲線$C: x^2-y^2=1$と点$\mathrm{A}(2,\ 0)$がある。

(1) 点 A を通り双曲線 C と 1 点のみで交わる直線を求めよ。

(2) 直線 l が点 A を通り双曲線 C と相異なる 2 点で交わるように動くとき, この 2 点の中点は, あるひとつの双曲線上にあることを示せ。 [2000]

4 平面上に楕円$\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$と直線$l: y=x+k$を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) この楕円と直線lが 2 つの共有点をもつためにkがみたすべき条件を求めよ。

(2) kは(1)の条件をみたすとし, さらに$k\neq 0$とする。(1)における 2 つの共有点を P, Q とし, O を原点とするとき, 三角形 OPQ の面積を最大にする k の値, およびそのときの面積を求めよ。 [1998]

■ 極限

1 eを自然対数の底とし, tを$t>e$となる実数とする。このとき, 曲線$C: y=e^x$と直線$y=tx$は相異なる 2 点で交わるので, 交点のうち x 座標が小さいものを P, 大きいものを Q とし, P, Q の x 座標をそれぞれα, β $(\alpha<\beta)$とする。また, P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし, 曲線 C, x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$, $x=\beta$で囲まれる部分の面積をS_1, 曲線 C および 2 つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積をS_2とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{S_2}{S_1}$をαとβを用いて表せ。

(2) $\alpha<\dfrac{e}{t}$, $\beta<2\log t$となることを示し, $\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$を求めよ。必要ならば, $x>0$のとき$e^x>x^2$であることを証明なしに用いてよい。 [2015]

2 xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。

・正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。 [2014]

3 xy 平面上に曲線 $C : y = \log x\ (x > 0)$ を考える。

(1) 曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) 平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$，$\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき，A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし，B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき，2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3) 無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで，$|r| < 1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty} nr^n = 0$ であることを用いてよい。 [2006]

■ 微分法

1　2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2)　(1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3)　点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2)，(3)においては，3 点 O，P，Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。　[2016]

2　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x\quad(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。　[2015]

3　関数 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，任意の自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}x^ne^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2)　$a>0$ とする。点 $(0,\ a)$ を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ。また，a がその値をとるとき，$y=f(x)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

4　曲線 $C:y=\log x$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点 $\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$ をとる。点 P，Q から x 軸に下ろした 2 本の垂線と x 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を S とする。点 P，Q から y 軸に下ろした 2 本の垂線と y 軸および曲線 C で囲まれた部分の面積を T とする。このとき，$S=T$ となるように b がとれる a の値の範囲を求めよ。

[2008]

5　(1)　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $f(x)=a$ （a は実数）が相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)　a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。　[2007]

6　放物線 $R: y=-x^2+3$ と直線 $l: y=2x$ との交点を A, B とする。直線 $y=2x+t$ $(t>0)$ は放物線 R と相異なる 2 点 $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$ で交わるものとする。

(1)　放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2)　4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$，$\mathrm{D}(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$ とおく。$f(t)$ の最大値を求めよ。　[2005]

7　(1)　x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。　[2002]

8　e を自然対数の底とする。$e\leqq p<q$ のとき，不等式 $\log(\log q)-\log(\log p)<\dfrac{q-p}{e}$ が成り立つことを証明せよ。　[2001]

9　曲線 $C: y=x^3$ 上を動く点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$（ただし，$t\neq 0$）がある。点 P における C の接線と C とのもう一つの交点を Q とし，点 Q における C の接線と C とのもう一つの交点を R とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

10　平面上に放物線 $y=x^2$ と直線 $l: y=k$ を考える。

(1)　放物線上の点 $(a,\ a^2)$ での法線と直線 l との交点を P とし，その x 座標を b とする。b を a と k で表せ。

(2)　直線 l 上の点 $\mathrm{P}(b,\ k)$ を放物線の異なる 3 法線が通るような b の範囲を求めよ。

[1998]

■ 積分法

1 $f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，$f_n(x)=\int_{-x}^{x}f_{n-1}(t)dt+f_{n-1}{}'(x)$ により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1) $f_1(x)$ を求めよ。

(2) $g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t dt$ とするとき，定積分 $\int_{-c}^{c}g(x)dx$ を求めよ。ただし，a, b, c は定数とする。

(3) 正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。 [2012]

2 関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt\quad(-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)\quad(0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1) 導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2) $g(\theta)$ を求めよ。

(3) $y=g(\theta)$ のグラフをかけ。 [2009]

3 (1) 連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi-x)=f(x)$ を満たすとき，$\int_0^{\pi}\left(x-\frac{\pi}{2}\right)f(x)dx=0$ が成り立つことを証明せよ。

(2) $\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4-\cos^2 x}dx$ を求めよ。 [2005]

4 多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x),\quad n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

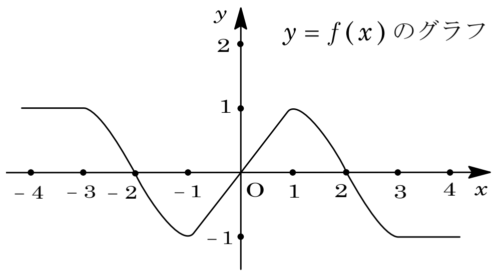
を満たすとする。

(1) $f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2) $n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\int_{x_n}^{2}f_n(x)dx$ の値を求めよ。

(3) $\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)dx$ の値を求めよ。 [2004]

5　各点で微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフが右の図で与えられている。このとき，$y=f'(x)$ と $y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフの概形を描け。また，そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。



[2003]

6　閉区間 $[0,\ 2\pi]$ 上で定義された x の関数 $f(x)=\int_0^{\pi}\sin\left(|t-x|+\dfrac{\pi}{4}\right)dt$ の最大値および最小値とそのときの x の値をそれぞれ求めよ。　[2001]

7　N 個（$N\geqq 2$）の箱の中に 1 回に 1 つずつ無作為に玉を入れてゆく。玉が 2 つ入った箱ができたら，そこでその手続きを中止する。ちょうど k 回目で玉が 2 つ入った箱ができる確率を $P(N,\ k)$ とする。

(1)　$2\leqq k\leqq N+1$ のとき，$P(N,\ k)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)$ を区分求積法を用いて求めよ。　[1999]

■ 積分の応用

1　不等式 $0<a<1$ を満たす定数 a に対して，曲線 $C: y=a-1-\log x\ (x>0)$ を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$ における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ $(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$ とする。このとき，次の問いに答えよ。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ を証明なしで使ってよい。

(1)　関数 $u(s)$，$v(s)$ を s の式で表せ。

(2)　関数 $t=u(s)$，$t=v(s)$ の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

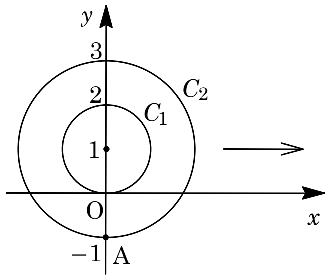
(3)　関数 $t=u(s)$，$t=v(s)$ の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2017]

2 空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

(1) B の中心と l との距離を求めよ。

(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2014]

3 半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する。図のように，時刻 $t=0$ において C_1 は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で x 軸に接し，A は座標 $(0,\ -1)$ の位置にある。2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t,\ 1)$ にあるように転がるとき，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。



(1) 時刻 t における A の座標を $(x(t),\ y(t))$ で表す。$(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2) $x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標をすべて求めよ。

(3) C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2013]

4 a を正の定数とし，xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし，t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え，それらの接線を l_1，l_2 とする。ただし，l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし，l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1 \geqq S_2$ として，$\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 [2012]

5　$-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\}$$

がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。　[2011]

6　数列 $\{a_n\}$ $(a_n>0)$ を次の規則によって定める。

$$a_1=1,\ \int_{a_n}^{a_{n+1}}\frac{dx}{\sqrt[3]{x}}=1\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

曲線 $y=\frac{1}{\sqrt[3]{x}}$ と，x 軸および 2 直線 $x=a_n$，$x=a_{n+1}$ で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積を V_n とする。このとき $\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n$ を求めよ。　[2007]

7　この問題では, e は自然対数の底, log は自然対数を表す。

実数 $a,\ b$ に対して，直線 $l:y=ax+b$ は曲線 $C:y=\log(x+1)$ と，x 座標が $0\leqq x\leqq e-1$ を満たす点で接しているとする。

(1)　このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め, ab 平面上に図示せよ。

(2)　曲線 C および 3 つの直線 $l,\ x=0,\ x=e-1$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と，このときの面積を求めよ。　[2000]

8　曲線 $y=\log x$　$(x>0)$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ \log a)$　$(a>1)$ での接線を l とし，P から x 軸へおろした垂線の足を H とする。さらに，接線 l と x 軸，および曲線 $y=\log x$ で囲まれた図形の面積を S_1，曲線と x 軸，および線分 PH で囲まれた図形の面積を S_2 とする。

(1)　S_1，S_2 を求めよ。

(2)　$a\to\infty$ のときの $\frac{S_1}{S_2\cdot\mathrm{PH}}$ の極限を求めよ。　[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

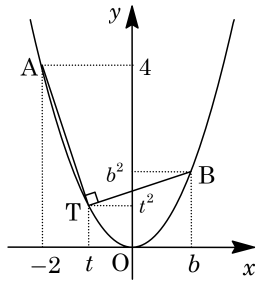
問　題

曲線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ をとる。ただし $b>-2$ とする。このとき，次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-2<t<b)$ で，$\angle\mathrm{ATB}$ が直角になるものが存在する。

[2016]

解答例



$\mathrm{A}(-2,\ 4)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{T}(t,\ t^2)\ (-2<t<b)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}=(t+2,\ t^2-4)=(t+2)(1,\ t-2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BT}}=(t-b,\ t^2-b^2)=(t-b)(1,\ t+b)$$

さて，条件から，ある t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BT}}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AT}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BT}}=0,\ 1+(t-2)(t+b)=0$$

$$t^2+(b-2)t-2b+1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，(＊)を満たす t が $-2<t<b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで，$f(t)=t^2+(b-2)t-2b+1=\left(t+\dfrac{b-2}{2}\right)^2-\dfrac{b^2+4b}{4}$ とおくと，

$$f(-2)=-4b+9,\ f(b)=2b^2-4b+1=2(b-1)^2-1$$

これより，$b>\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき $f(-2)\geqq 0$ となり，また $\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき $f(b)<0$，$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b$ のとき $f(b)\geqq 0$

(i)　$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)\geqq 0$ より，求める条件は，

$$-2<-\frac{b-2}{2}<b\cdots\cdots\cdots①,\ -\frac{b^2+4b}{4}\leqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-2b<b-2<4$ となり，$\dfrac{2}{3}<b<6$

②より，$b(b+4)\geqq 0$ となり，$b\leqq -4,\ 0\leqq b$

$-2<b\leqq\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ と合わせると，適する b は存在しない。

(ii)　$\dfrac{2-\sqrt{2}}{2}<b<\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}$ のとき　$f(-2)>0$ かつ $f(b)<0$ より適する。

(iii)　$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2)\geqq 0$ かつ $f(b)\geqq 0$ から，(i)と同様である。

求める条件は，①②より $\dfrac{2}{3}<b<6$ かつ $(b\leqq -4,\ 0\leqq b)$ となり，$\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ と合わせると，適する b は $\dfrac{2+\sqrt{2}}{2}\leqq b\leqq\dfrac{9}{4}$ である。

(iv)　$b > \dfrac{9}{4}$ のとき　$f(-2) < 0$ かつ $f(b) > 0$ より適する。

(i)～(iv)より，求める条件は，$b > \dfrac{2-\sqrt{2}}{2}$ となる。

コメント

図形的な条件を数式化した後は, 2 次方程式の解の配置の問題になります。$f(-2)$，$f(b)$ の符号をもとに場合分けをしています。

問　題

実数 t に対して 2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を考える。t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，線分 PQ が通過してできる図形を図示し，その面積を求めよ。　[2014]

解答例

2 点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$，$\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は，

$$y-t^2=\frac{(t+1)^2-t^2}{(t+1)-t}(x-t),\ \ y=(2t+1)x-t^2-t\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず，$(*)$の x の値を $x=a$ と固定し，y のとり得る値の範囲を求める。

ここで，$y=f(t)$ とおくと，

$$f(t)=(2t+1)a-t^2-t=-t^2+(2a-1)t+a=-\left(t-\frac{2a-1}{2}\right)^2+a^2+\frac{1}{4}$$

さて，t が $-1\leqq t\leqq 0$ の範囲を動くとき，

(i) $a\leqq-\dfrac{1}{2}$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f(-1)=-a$

(ii) $-\dfrac{1}{2}\leqq a\leqq 0$ のとき　$a=f(0)\leqq f(t)\leqq f\left(\dfrac{2a-1}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{4}$

(iii) $0\leqq a\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f\left(\dfrac{2a-1}{2}\right)=a^2+\dfrac{1}{4}$

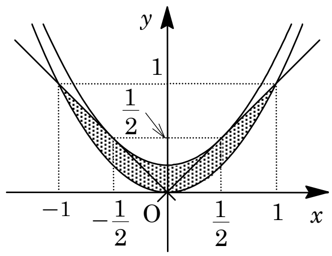
(iv) $a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　$-a=f(-1)\leqq f(t)\leqq f(0)=a$

(i)〜(iv)より，直線 l が通過してできる領域は，

$$x\leqq y\leqq -x\ \left(x\leqq-\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq 0\text{のとき}\right)$$

$$-x\leqq y\leqq x^2+\frac{1}{4}\ \left(0\leqq x\leqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right),\ -x\leqq y\leqq x\ \left(x\geqq\frac{1}{2}\text{のとき}\right)$$

これを利用すると，線分 PQ が通過してできる図形は，直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分なので，図示すると右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。この図形の面積 S は，y 軸に関する対称性より，



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\left(x^2+\frac{1}{4}-x^2\right)dx+2\int_{\frac{1}{2}}^{1}(x-x^2)dx$$

$$=2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+2\left[\frac{x^2}{2}-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{3}{4}-\frac{7}{12}=\frac{5}{12}$$

コメント

線分の通過領域についての頻出問題です。文系と異なり，誘導は付いていません。

問　題

xy 平面上に 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ がある。

(1) $a>0$ とする。OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2) $a>0,\ b>0$ とする。OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための $a,\ b$ に対する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。 [2011]

解答例

(1) O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$ に対し，OP : AP $=1:a$ を満たす点 P$(x,\ y)$ は，AP $=a$OP，

AP$^2=a^2$OP^2 より，

$$(x-1)^2+y^2=a^2(x^2+y^2),\ (a^2-1)(x^2+y^2)+2x-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

(i) $a=1$ のとき

①より，$2x-1=0$ となり，点 P の軌跡は，直線 $x=\dfrac{1}{2}$ である。

(ii) $a\neq1$ のとき

①より，$x^2+y^2+\dfrac{2}{a^2-1}x-\dfrac{1}{a^2-1}=0$ となり，点 P の軌跡は円であり，

$$\left(x+\frac{1}{a^2-1}\right)^2+y^2=\frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

(2) OP : AP $=1:a$ を満たす点 P の軌跡は，(1)より，$a=1$ のとき直線 $x=\dfrac{1}{2}$，$a\neq1$ のとき中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円である。

また，O$(0,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ に対し，OP : BP $=1:b$ を満たす点 P の軌跡は，$b=1$ のとき直線 $y=\dfrac{1}{2}$，$b\neq1$ のとき中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$，半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円である。

よって，OP : AP : BP $=1:a:b$ を満たす点 P が存在するための条件は，

(i) $a=1$ かつ $b=1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と直線 $y=\dfrac{1}{2}$ を満たす点 P$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ が存在する。

(ii) $a=1$ かつ $b\neq1$ のとき

直線 $x=\dfrac{1}{2}$ と中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$ で半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円を満たす点 P が存在するには，

$$\frac{b}{|b^2-1|}\geqq\frac{1}{2},\ |b^2-1|\leqq2b$$

$b>0$ から，$-2b\leqq b^2-1\leqq2b$ となり，$b^2+2b-1\geqq0$ かつ $b^2-2b-1\leqq0$ より，

$$-1+\sqrt{2}\leqq b\leqq1+\sqrt{2}\quad(b\neq1)$$

(iii) $a\neq1$ かつ $b=1$ のとき

(ii)と同様にして，$-1+\sqrt{2}\leqq a\leqq1+\sqrt{2}\quad(a\neq1)$

(iv)　$a\neq 1$ かつ $b\neq 1$ のとき

中心 $\left(-\dfrac{1}{a^2-1},\ 0\right)$ で半径 $\dfrac{a}{|a^2-1|}$ の円と，中心 $\left(0,\ -\dfrac{1}{b^2-1}\right)$ で半径 $\dfrac{b}{|b^2-1|}$ の円

を満たす点 P が存在するには,

$$\left|\frac{a}{|a^2-1|}-\frac{b}{|b^2-1|}\right|\leqq\sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2+\left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2}\leqq\frac{a}{|a^2-1|}+\frac{b}{|b^2-1|}$$

$$\left|a|b^2-1|-b|a^2-1|\right|\leqq\sqrt{(a^2-1)^2+(b^2-1)^2}\leqq a|b^2-1|+b|a^2-1|$$

この不等式の各辺を 2 乗すると，次の連立不等式に等しく,

$$\left\{a|b^2-1|-b|a^2-1|\right\}^2\leqq(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\cdots\cdots\cdots②$$

$$(a^2-1)^2+(b^2-1)^2\leqq\left\{a|b^2-1|+b|a^2-1|\right\}^2\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2-2ab|a^2-1||b^2-1|\leqq 0\cdots\cdots\cdots④$

③より，$(a^2-1)(b^2-1)^2+(b^2-1)(a^2-1)^2+2ab|a^2-1||b^2-1|\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑤$

(iv-i)　($a>1$ かつ $b>1$)または($0<a<1$ かつ $0<b<1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab\leqq 0$ となり，$(a-b)^2\leqq 2$，$|a-b|\leqq\sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab\geqq 0$ となり，$(a+b)^2\geqq 2$，$a+b\geqq\sqrt{2}$

(iv-ii)　($a>1$ かつ $0<b<1$)または($0<a<1$ かつ $b>1$)のとき

④より，$(b^2-1)+(a^2-1)+2ab\geqq 0$ となり，$(a+b)^2\geqq 2$，$a+b\geqq\sqrt{2}$

⑤より，$(b^2-1)+(a^2-1)-2ab\leqq 0$ となり，$(a-b)^2\leqq 2$，$|a-b|\leqq\sqrt{2}$

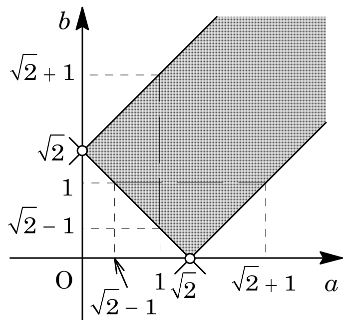
(iv-i) (iv-ii)より，$a\neq 1$ かつ $b\neq 1$ のとき,

$$|a-b|\leqq\sqrt{2},\ a+b\geqq\sqrt{2}$$

(i)～(iv)をまとめると，求める条件は,

$$a>0,\ b>0,\ |a-b|\leqq\sqrt{2},\ a+b\geqq\sqrt{2}$$

これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含むが，白丸は領域に含まない。



コメント

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に並々ならぬ注意力が必要です。

問　題

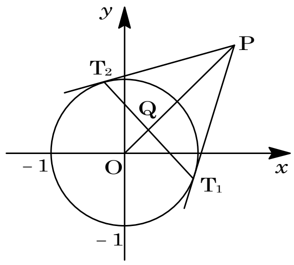
原点$O(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円に，円外の点$P(x_0,\ y_0)$から 2 本の接線を引く。

(1) 2 つの接点の中点を Q とするとき，点 Q の座標$(x_1,\ y_1)$を点 P の座標$(x_0,\ y_0)$を用いて表せ。また$OP\cdot OQ=1$であることを示せ。

(2) 点 P が直線$x+y=2$上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。　　[2007]

解答例

(1) 2 つの接点を$T_1(s_1,\ t_1)$，$T_2(s_2,\ t_2)$とおくと，接線の方程式はそれぞれ,



$$s_1x+t_1y=1,\ s_2x+t_2y=1$$

点$P(x_0,\ y_0)$を通ることより,

$$s_1x_0+t_1y_0=1\cdots\cdots①,\ \ s_2x_0+t_2y_0=1\cdots\cdots②$$

ここで，方程式$x_0x+y_0y=1\cdots\cdots③$は直線を表し，①から$T_1(s_1,\ t_1)$，②から$T_2(s_2,\ t_2)$を通過することがわかる。すなわち，③は直線T_1T_2を表す。

さて，直線T_1T_2の法線ベクトルは，$\overrightarrow{OP}=(x_0,\ y_0)$となり，2 直線 OP，$T_1T_2$は直交する。言い換えると，2 点$T_1$，$T_2$の中点 Q は 2 直線 OP，$T_1T_2$の交点である。

ここで，直線 OP は，kを実数として，

$$(x,\ y)=k(x_0,\ y_0),\ \ y_0x-x_0y=0\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$となるので，$Q\left(\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2},\ \dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\right)$

$$OP\cdot OQ=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{{x_0}^2}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2}+\frac{{y_0}^2}{({x_0}^2+{y_0}^2)^2}}$$

$$=\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{{x_0}^2+{y_0}^2}}=1$$

(2) $Q(x_1,\ y_1)$より，$x_1=\dfrac{x_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}$，$y_1=\dfrac{y_0}{{x_0}^2+{y_0}^2}\cdots\cdots\cdots⑤$

(1)から$OP\cdot OQ=1$なので，$({x_0}^2+{y_0}^2)({x_1}^2+{y_1}^2)=1$となり，⑤より，

$$x_0=x_1({x_0}^2+{y_0}^2)=\frac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2},\ \ y_0=y_1({x_0}^2+{y_0}^2)=\frac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，条件より，$x_0+y_0=2$なので，⑥より$\dfrac{x_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}+\dfrac{y_1}{{x_1}^2+{y_1}^2}=2$

$$2{x_1}^2+2{y_1}^2-x_1-y_1=0,\ \ (x_1,\ y_1)\neq(0,\ 0)$$

すると，$\left(x_1-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y_1-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ から，点 Q の軌跡は円 $\left(x-\frac{1}{4}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{8}$ である。ただし，原点は除く。

コメント

有名な頻出問題です。なお，点 Q が 2 直線 OP，T_1T_2 の交点であることは対称性から明らかですが，ここでは二等辺三角形の頂点から底辺に引いた垂線の足が，底辺の中点であることを用いています。

問　題

座標平面上に 3 点O$(0,\ 0)$，A$(4,\ 2)$，B$(6,\ 0)$を考える。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が線分 OB 上にあるとき，直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

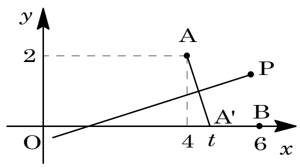
(1) 点P$(p,\ q)$を通るピッタリ直線 l があるとし，l に関して A と対称な点を A$'(t,\ 0)$ $(0\leqq t\leqq 6)$とするとき，p，q，t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。図には三角形 OAB も書いておくこと。

(3) 点P$(p,\ q)$を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点P$(p,\ q)$の存在範囲を求め，それを図示せよ。 [2006]

解答例

(1) ピッタリ直線 l は，線分 AA$'$ の垂直二等分線より，PA = PA$'$ となり，



$$(p-4)^2+(q-2)^2=(p-t)^2+q^2$$
$$-8p+16-4q+4=-2pt+t^2$$

まとめると，$t^2-2pt+8p+4q-20=0$ ………①

(2) ピッタリ直線が 2 本存在するのは，点A$'(t,\ 0)$が 2 つ存在するときで，このとき①は $0\leqq t\leqq 6$ に異なる 2 つの実数解をもつ。

ここで，$f(t)=t^2-2pt+8p+4q-20=(t-p)^2-p^2+8p+4q-20$ とおくと，

$0<p<6$ ………②，$-p^2+8p+4q-20<0$ ………③

$f(0)=8p+4q-20\geqq 0$ ………④，$f(6)=-4p+4q+16\geqq 0$ ………⑤

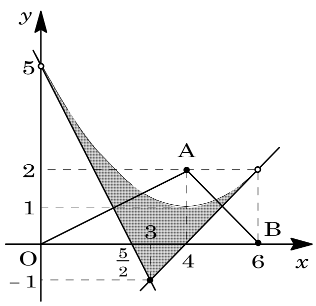
③より，$4q<(p-4)^2+4$，$q<\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ ………③$'$

④より $q\geqq -2p+5$ ………④$'$，⑤より $q\geqq p-4$ ………⑤$'$

さて，領域③$'$の境界線 $q=\dfrac{1}{4}(p-4)^2+1$ に対して，$q'=\dfrac{1}{2}(p-4)$ となる。

すると，$p=0$ のとき $q'=-2$，$p=6$ のとき $q'=1$ から，領域③$'$と領域④$'$の境界線，領域③$'$と領域⑤$'$の境界線はそれぞれ接する。

したがって，②③$'$④$'$⑤$'$より，点P$(p,\ q)$の存在範囲は，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線は含み，破線の放物線上の境界線は含まない。



(3) ①の異なる 2 つの実数解を $t=t_1$，t_2 とおき，A$_1'(t_1,\ 0)$，A$_2'(t_2,\ 0)$とする。

$$\overrightarrow{\mathrm{AA}_1'}=(t_1-4,\ -2),\ \overrightarrow{\mathrm{AA}_2'}=(t_2-4,\ -2)$$

2 本のピッタリ直線が直交することより，$\overrightarrow{AA'_1}\cdot\overrightarrow{AA'_2}=0$ となり，

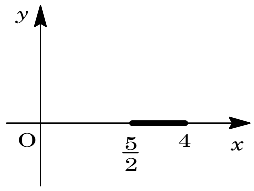
$$(t_1-4)(t_2-4)+4=0,\ t_1t_2-4(t_1+t_2)+20=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，①に対して，解と係数の関係を用いると，

$$t_1+t_2=2p,\ t_1t_2=8p+4q-20$$

⑥に代入して，$8p+4q-20-8p+20=0$

よって，$q=0$ となり，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は x 軸上に存在し，(2)の結論と合わせて図示すると，右図の太線部となる。



コメント

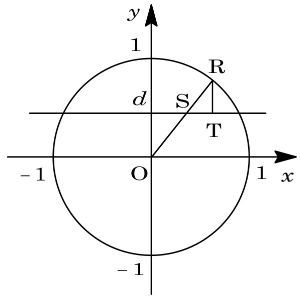
線対称を題材にした問題で，ひとひねりが加えられています。

問　題

O を原点とする座標平面上の，半径 1 の円周 $A: x^2+y^2=1$ と直線 $l: y=d$ $(0<d<1)$ との交点を P，Q とする。円周 A 上の点 R$(x,\ y)$ は $y>d$ の範囲を動く。線分 OR と線分 PQ の交点を S，点 R から線分 PQ へ下ろした垂線の足を T とするとき，線分 ST の長さの最大値を d を用いて表せ。 [2003]

解答例

点 R が $(0,\ 1)$ のとき，ST $=0$ であり，y 軸に関する対称性から，点 R が第 1 象限にあると考えても一般性を失わない。



さて，$t>0$ として，R$(t,\ \sqrt{1-t^2})$ とおくと，T$(t,\ d)$ となり，

$$\sqrt{1-t^2}>d,\ 1-t^2>d^2,\ 0<t<\sqrt{1-d^2}$$

直線 OR : $y=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t}x$ と直線 $l: y=d$ の交点は,

$$\frac{\sqrt{1-t^2}}{t}x=d,\ x=\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$$

よって，S$\left(\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}},\ d\right)$となり，ST $=t-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ である。

ここで，$f(t)=t-\dfrac{dt}{\sqrt{1-t^2}}$ とおくと，

$$f'(t)=1-d\cdot\frac{1-t^2+t^2}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}=\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}-d}{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}$$

$f'(t)=0$ とすると，$(1-t^2)\sqrt{1-t^2}=d$，$(1-t^2)^3=d^2$ より，

$$1-t^2=d^{\frac{2}{3}},\ t=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

$0<d<1$ なので，右の増減表より，$t=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$ のとき $f(t)=$ ST は最大となり，その最大値は,

t	0	$\cdots$	$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$	$\cdots$	$\sqrt{1-d^2}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}-\frac{d\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}}{d^{\frac{1}{3}}}=\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}-d^{\frac{2}{3}}\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}=(1-d^{\frac{2}{3}})\sqrt{1-d^{\frac{2}{3}}}$$

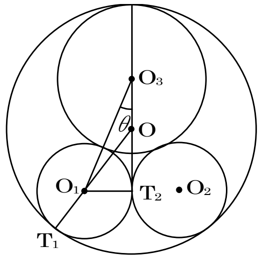
コメント

点 R の x 座標を普通に設定しましたが，微分の計算は繁雑ではありませんでした。最初は, R を媒介変数表示した方がよいのかどうかと迷っていたのですが。

問　題

C_1，C_2，C_3 は，半径がそれぞれ a，a，$2a$ の円とする。いま，半径 1 の円 C にこれらが内接していて，C_1，C_2，C_3 は互いに外接しているとき，a の値を求めよ。[2004]

解答例



円 C_1，C_2，C_3，C の中心を，それぞれ O_1，O_2，O_3，O とおく。また，C_1 と C，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ T_1，T_2 とおき，$\angle\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3\mathrm{T}_2=\theta$ とすると，

$$\mathrm{OO}_3=1-2a\,,\ \mathrm{O}_3\mathrm{O}_1=2a+a=3a\,,\ \mathrm{OO}_1=1-a$$

また，$\angle\mathrm{O}_1\mathrm{T}_2\mathrm{O}_3=90^\circ$ より $\sin\theta=\dfrac{\mathrm{O}_1\mathrm{T}_2}{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_3}=\dfrac{a}{3a}=\dfrac{1}{3}$ となり，

$$\cos\theta=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

そこで，$\triangle\mathrm{O}_3\mathrm{O}_1\mathrm{O}$ に余弦定理を適用すると，

$$(1-a)^2=(3a)^2+(1-2a)^2-2\cdot 3a(1-2a)\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

$$(6+4\sqrt{2})a^2-(1+2\sqrt{2})=0$$

$a>0$ から，$a=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{6+4\sqrt{2}}}=\sqrt{\dfrac{1+2\sqrt{2}}{2(3+2\sqrt{2})}}=\sqrt{\dfrac{4\sqrt{2}-5}{2}}$

コメント

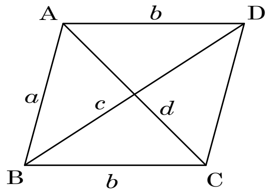
いろいろな解法が考えられますが，いずれにせよ，2 円が接するとき，中心間距離が半径の和や差に等しいことを利用します。

問　題

(1)　平行四辺形 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=a$，$\mathrm{BC}=\mathrm{AD}=b$，$\mathrm{BD}=c$，$\mathrm{AC}=d$ とする。このとき，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　3 つの正数 $a,\ b,\ c\,(0<a\leqq b\leqq c)$ が $a^2+b^2>c^2$ を満たすとき，各面の三角形の辺の長さを a, b, c とする四面体が作れることを証明せよ。　[2003]

解答例



(1)　$\angle\mathrm{BAD}=\theta$ とおくと，$\angle\mathrm{ABC}=180°-\theta$ となり，$\triangle\mathrm{ABD}$，$\triangle\mathrm{ABC}$ にそれぞれ余弦定理を適用すると，

$$c^2=a^2+b^2-2ab\cos\theta\cdots\cdots\cdots①$$
$$d^2=a^2+b^2-2ab\cos(180°-\theta)$$
$$=a^2+b^2+2ab\cos\theta\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$c^2+d^2=2a^2+2b^2$，$a^2+b^2=\dfrac{1}{2}(c^2+d^2)$

(2)　$0<a\leqq b\leqq c$ かつ $a^2+b^2>c^2$ より，3 辺の長さが $a,\ b,\ c$ の三角形は鋭角三角形であるので,

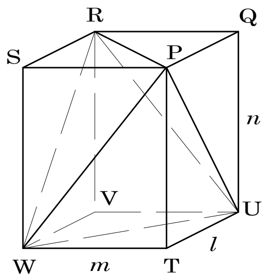
$$a^2+b^2>c^2,\ b^2+c^2>a^2,\ c^2+a^2>b^2\cdots\cdots\cdots③$$

③より, $l>0$, $m>0$, $n>0$ として，l^2，m^2，n^2 を次式で定義することができる。

$$l^2=\frac{1}{2}(a^2+b^2-c^2),\ m^2=\frac{1}{2}(a^2-b^2+c^2),\ n^2=\frac{1}{2}(-a^2+b^2+c^2)$$

a^2，b^2，c^2 について解くと，$a^2=l^2+m^2$，$b^2=l^2+n^2$，$c^2=m^2+n^2$

$$a=\sqrt{l^2+m^2},\ b=\sqrt{l^2+n^2},\ c=\sqrt{m^2+n^2}$$



さて，直方体 PQRS-TUVW において，$\mathrm{PQ}=l$，$\mathrm{PS}=m$，$\mathrm{PT}=n$ とすると,

$$\mathrm{PR}=\mathrm{WU}=a,\ \mathrm{PU}=\mathrm{RW}=b,\ \mathrm{PW}=\mathrm{RU}=c$$

よって，各面の三角形の辺の長さを $a,\ b,\ c$ とする四面体を作ることができる。

コメント

(2)の問題を見て「直方体に埋め込まれた等面四面体」ということに気持ちが集約してしまい, (1)の利用という考えは吹っ飛んでしまいました。。

問　題

xyz 空間の 2 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{P}(a,\ b,\ 0)$ を通る直線を l とする。また，点 $(2,\ 0,\ 0)$ を中心とし，半径が $\sqrt{2}$ である球面を S で表し，S のうち z 座標が $z>0$ を満たす部分を T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) l 上に点 Q がある。実数 t を $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ で定めるとき，点 Q の座標を $a,\ b,\ t$ を使って表せ。

(2) l が S と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。

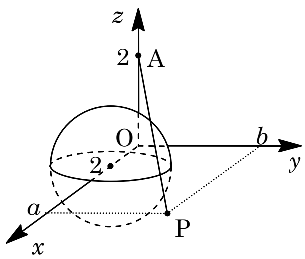
(3) l が T と相異なる 2 点で交わるような実数 $a,\ b$ に関する条件を求め，ab 平面上に図示せよ。 [2017]

解答例

(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(0,\ 0,\ 2)+t(a,\ b,\ -2)$$

よって，$\mathrm{Q}(at,\ bt,\ 2-2t)$ となる。



(2) (1)から，$l:(x,\ y,\ z)=(at,\ bt,\ 2-2t)$ ………①

$$S:(x-2)^2+y^2+z^2=2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$(at-2)^2+b^2t^2+(2-2t)^2=2$

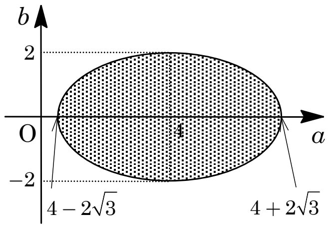
$$(a^2+b^2+4)t^2-4(a+2)t+6=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

l が S と相異なる 2 点で交わるので，③から，

$$D/4=4(a+2)^2-6(a^2+b^2+4)>0,\ a^2-8a+3b^2+4<0$$

すると，$(a-4)^2+3b^2<12$ となり，

$$\frac{(a-4)^2}{12}+\frac{b^2}{4}<1 \cdots\cdots\cdots ④$$



④を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

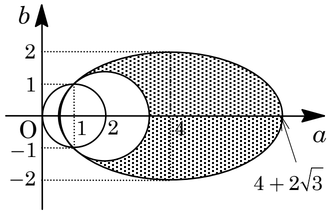
(3) $T:(x-2)^2+y^2+z^2=2$ かつ $z>0$ なので，l が T と相異なる 2 点で交わる条件は，①から $2-2t>0$ すなわち $t<1$ となるので，③が $t<1$ である相異なる 2 解をもつことに対応する。すると，④に加えて，

$$\frac{2(a+2)}{a^2+b^2+4}<1 \cdots\cdots\cdots ⑤,\ (a^2+b^2+4)-4(a+2)+6>0 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤より，$a^2+b^2+4>2(a+2)$ となり，$(a-1)^2+b^2>1$ ………⑦

⑥より，$a^2+b^2-4a+2>0$ となり，$(a-2)^2+b^2>2$ ………⑧

④⑦⑧を ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



コメント

空間図形を題材とし，2 次方程式の解の配置を関連させた基本的な問題です。ただ，領域の図示については，時間をかなり費やしてしまいます。

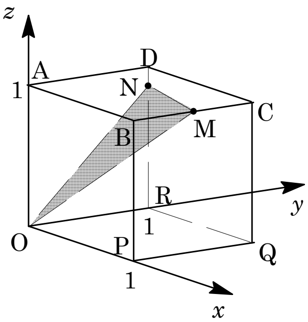
問　題

座標空間に 8 点 O(0, 0, 0), P(1, 0, 0), Q(1, 1, 0), R(0, 1, 0), A(0, 0, 1), B(1, 0, 1), C(1, 1, 1), D(0, 1, 1) をとり, 線分 BC の中点を M とする。線分 RD 上の点を N(0, 1, t) とし, 3 点 O, M, N を通る平面と線分 PD および線分 PB との交点をそれぞれ K, L とする。

(1) K の座標を t で表せ。

(2) 四面体 OKLP の体積を $V(t)$ とする。N が線分 RD 上を R から D まで動くとき, $V(t)$ の最大値と最小値およびそれらを与える t の値をそれぞれ求めよ。　[2010]

解答例



(1) まず, $\overrightarrow{ON}=(0,\ 1,\ t)$ で, M は線分 BC の中点より,

$$\overrightarrow{OM}=\left(1,\ \frac{1}{2},\ 1\right)=\frac{1}{2}(2,\ 1,\ 2)$$

さて, 平面 OMN の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと, $\vec{n}$ は $\overrightarrow{ON}$, $\overrightarrow{OM}$ に垂直なので,

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{ON}=b+tc=0 \cdots\cdots\cdots①$$

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{OM}=2a+b+2c=0 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $b=-tc$, $a=\dfrac{t-2}{2}c$

よって, $\vec{n}=\dfrac{c}{2}(t-2,\ -2t,\ 2)$ であることより, 平面 OMN の方程式は,

$$(t-2)x-2ty+2z=0 \cdots\cdots\cdots③$$

また, 直線 PD は, u をパラメータとして,

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{OP}+u\overrightarrow{PD}=(1,\ 0,\ 0)+u(-1,\ 1,\ 1)=(1-u,\ u,\ u) \cdots\cdots\cdots④$$

③④より, $(t-2)(1-u)-2tu+2u=0$, $(t-2)+(4-3t)u=0$

$0\leqq t\leqq 1$ から $u=\dfrac{2-t}{4-3t}$ となり, ④より, $(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$

よって, 平面 OMN と直線 PD の交点 K は, $\mathrm{K}\left(\dfrac{2-2t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t},\ \dfrac{2-t}{4-3t}\right)$ となる。

(2) 平面 OMN と直線 PB : $x=1$, $y=0$ の交点 L の z 座標は, ③より,

$$(t-2)+2z=0,\quad z=\frac{2-t}{2}$$

これより, 四面体 OKLP の体積 $V(t)$ は, △OPL を底面と考えて,

$$V(t)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{2-t}{2}\right)\frac{2-t}{4-3t}=\frac{(2-t)^2}{12(4-3t)}$$

$$V'(t)=\frac{-2(2-t)(4-3t)+3(2-t)^2}{12(4-3t)^2}=\frac{(2-t)(3t-2)}{12(4-3t)^2}$$

これより，$V(t)$ は $t=0$ または $t=1$ のとき最大値 $\dfrac{1}{12}$ をとり，$t=\dfrac{2}{3}$ のとき最小値 $\dfrac{2}{27}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$	$\dfrac{1}{12}$	$\searrow$	$\dfrac{2}{27}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{12}$

コメント

交点 K, L の座標を求めるとき，計算を単純にするため，平面の方程式を利用しています。配布された公式集にも載っていることですし。

問　題

三角形 ABC で辺 AC を $s:1-s$ に内分する点を P, 辺 BC を $t:1-t$ に内分する点を Q, 線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。このとき,

$$\triangle\text{APR の面積} = 2\times(\triangle\text{BQR の面積})$$

が成り立っているとする。

(1) s を t を用いて表せ。

(2) 極限 $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t}$ を求めよ。ただし, t が正の範囲で 0 に限りなく近づくとき, $t\to+0$ と表す。 [2008]

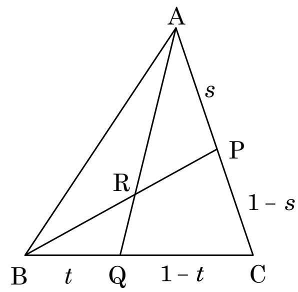
解答例

(1) まず, AR : RQ $= k:1-k$ とおくと,

$$\overrightarrow{AR} = k\overrightarrow{AQ} = k(1-t)\overrightarrow{AB} + kt\overrightarrow{AC} \cdots\cdots\cdots①$$

また, BR : RP $= l:1-l$ とおくと,

$$\overrightarrow{AR} = (1-l)\overrightarrow{AB} + l\overrightarrow{AP} = (1-l)\overrightarrow{AB} + ls\overrightarrow{AC} \cdots\cdots\cdots②$$



$\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$ は 1 次独立なので, ①②より,

$$k(1-t) = 1-l \cdots\cdots\cdots③,\quad kt = ls \cdots\cdots\cdots④$$

さらに, $\triangle\text{APR} = 2\times\triangle\text{BQR}$ より,

$$k(1-l) = 2l(1-k),\quad kl + k - 2l = 0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

③より $l = 1-k+kt$ となり, ④に代入すると,

$$kt = (1-k+kt)s,\quad k(s+t-st) = s$$

よって, $k = \dfrac{s}{s+t-st}$ ……⑥となり, ③から,

$$l = 1 - \frac{s}{s+t-st} + \frac{st}{s+t-st} = \frac{t}{s+t-st} \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦を⑤に代入すると,

$$\frac{st}{(s+t-st)^2} + \frac{s}{s+t-st} - \frac{2t}{s+t-st} = 0,\quad st + (s-2t)(s+t-st) = 0$$

s についてまとめると, $(1-t)s^2 + 2t^2s - 2t^2 = 0$ となるので, $s>0$ から,

$$s = \frac{-t^2 + \sqrt{t^4 + 2(1-t)t^2}}{1-t} = \frac{-t^2 + t\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t}$$

(2) (1)より, $\displaystyle\lim_{t\to+0}\frac{s}{t} = \lim_{t\to+0}\frac{-t+\sqrt{t^2-2t+2}}{1-t} = \sqrt{2}$

コメント

対頂角は等しいことから, 三角形の面積比を, 隣り合う 2 辺の長さの比の積として表しています。なお, (2)の計算には, 唖然としてしまいます。

問　題

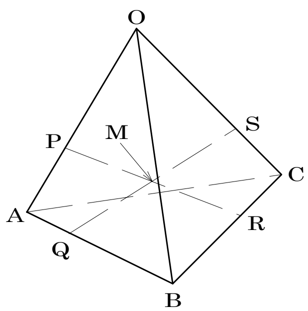
1 辺の長さが 1 の正四面体 OABC を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。動点 P は O から A へ辺 OA 上を秒速 1 で，動点 Q は A から B へ辺 AB 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，動点 R は B から C へ辺 BC 上を秒速 1 で，動点 S は C から O へ辺 CO 上を秒速 $\frac{1}{2}$ で，同時に動き出す。

(1) 動き出してから t 秒後 $(0 \leqq t \leqq 1)$ のベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ および t を用いて表せ。

(2) 線分 PR と線分 QS が交点 M をもつときの $t\,(0 \leqq t \leqq 1)$ の値を求め，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。　[2005]

解答例

(1) t 秒後には，$\mathrm{OP}=\mathrm{BR}=t$，$\mathrm{AQ}=\mathrm{CS}=\frac{1}{2}t$ より，



$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}t\vec{b}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-t)\vec{b}+t\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{OS}}=\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

(2) QS と PR の交点が M なので，まず M は QS 上にあることより, k を定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OS}}$$
$$=k\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{a}+\frac{1}{2}kt\vec{b}+(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)\vec{c}$$

また, M は PR 上にあることより, l を定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=l\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-l)\overrightarrow{\mathrm{OR}}=lt\vec{a}+(1-l)(1-t)\vec{b}+(1-l)t\vec{c}$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので,

$$k\left(1-\frac{1}{2}t\right)=lt \cdots\cdots\cdots ①,\quad \frac{1}{2}kt=(1-l)(1-t) \cdots\cdots\cdots ②$$

$$(1-k)\left(1-\frac{1}{2}t\right)=(1-l)t \cdots\cdots\cdots ③$$

①＋③から，$1-\frac{1}{2}t=t$ より，$t=\frac{2}{3}$

①に代入して $k=l$，②に代入して $k+l=1$ となるので，$k=l=\frac{1}{2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{3}\vec{a}+\frac{1}{6}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}$$

コメント

よく見かける空間ベクトルの基本問題です。

問　題

△ABC の外心（外接円の中心）O が三角形の内部にあるとし，α，β，γ は $\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たす正数であるとする。また，直線 OA, OB, OC がそれぞれ辺 BC, CA, AB と交わる点を A′，B′，C′ とする。

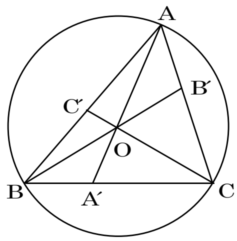
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\alpha$，$\beta$，$\gamma$ を用いて $\overrightarrow{\mathrm{OA'}}$ を表せ。

(2)　△A′B′C′ の外心が O に一致すれば $\alpha=\beta=\gamma$ であることを示せ。　[2001]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，$\alpha\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=k\cdot\frac{-\beta\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\gamma\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{\alpha}=-k\left(\frac{\beta}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{\gamma}{\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OC}}\right)$$



点 A′ は線分 BC 上にあるので，

$$-k\left(\frac{\beta}{\alpha}+\frac{\gamma}{\alpha}\right)=1,\quad k=-\frac{-\alpha}{\beta+\gamma}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=-\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ ………①

(2)　(1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{OB'}}=-\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ ………②，$\overrightarrow{\mathrm{OC'}}=-\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ ………③

△A′B′C′ の外心が O に一致するとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OA'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB'}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC'}}|$

①②③より，$\alpha>0$，$\beta>0$，$\gamma>0$ なので，

$$\frac{\alpha}{\beta+\gamma}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\frac{\beta}{\gamma+\alpha}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\frac{\gamma}{\alpha+\beta}|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|\neq 0$ なので，$\dfrac{\alpha}{\beta+\gamma}=\dfrac{\beta}{\gamma+\alpha}=\dfrac{\gamma}{\alpha+\beta}$

よって，正の数 l が存在して，$\alpha=l(\beta+\gamma)$，$\beta=l(\gamma+\alpha)$，$\gamma=l(\alpha+\beta)$

$$\alpha+\beta+\gamma=2l(\alpha+\beta+\gamma)$$

$\alpha+\beta+\gamma>0$ より $l=\dfrac{1}{2}$ となるので，

$$2\alpha=\beta+\gamma\ \cdots\cdots\cdots④,\quad 2\beta=\gamma+\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad 2\gamma=\alpha+\beta\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤より $\alpha=\beta$，⑤⑥より $\beta=\gamma$，よって $\alpha=\beta=\gamma$ となる。

コメント

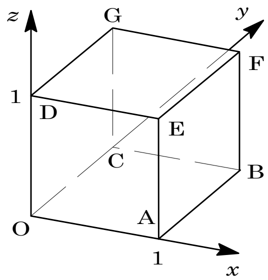
ベクトルの基本問題です。(1)の誘導を利用すると, (2)の結論も簡単に導けます。

問　題

座標空間内の 6 つの平面 $x=0$, $x=1$, $y=0$, $y=1$, $z=0$, $z=1$ で囲まれた立方体を C とする。$\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ を $a_1>0$, $a_2>0$, $a_2>0$ を満たし, 大きさが 1 のベクトルとする。H を原点 O を通りベクトル $\vec{l}$ に垂直な平面とする。このとき, ベクトル $\vec{l}$ を進行方向にもつ光線により平面 H に生じる立方体 C の影の面積を, a_1, a_2, a_3 を用いて表せ。ここに, C の影とは C 内の点から平面 H へひいた垂線の足全体のなす図形である。　[2000]

解答例

立方体 C を平面 H へ正射影した図形は, 面 OABC, 面 OAED, 面 OCGD を H へ正射影した図形となる。



まず, 面 OABC の法線ベクトルを $\overrightarrow{n_1}=(0,\ 0,\ 1)$, また, 平面 H の法線ベクトルが $\vec{l}=(-a_1,\ -a_2,\ -a_3)$ なので, 面 OABC と平面 H のなす角を θ_1 $(0°\leqq\theta_1\leqq 90°)$ とすると,

$$\cos\theta_1=\frac{|\overrightarrow{n_1}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_1}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_3|}{1\times 1}=a_3$$

すると, 面 OABC の面積が 1 より, H へ正射影した図形の面積は,

$$1\times\cos\theta_1=a_3$$

同様にして, 面 OAED, 面 OCGD は, 法線ベクトルがそれぞれ $\overrightarrow{n_2}=(0,\ 1,\ 0)$, $\overrightarrow{n_2}=(1,\ 0,\ 0)$ となり, 平面 H とのなす角を θ_2, θ_3 $(0°\leqq\theta_2\leqq 90°,\ 0°\leqq\theta_3\leqq 90°)$ とすると,

$$\cos\theta_2=\frac{|\overrightarrow{n_2}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_2}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_2|}{1\times 1}=a_2,\quad \cos\theta_3=\frac{|\overrightarrow{n_3}\cdot\vec{l}\,|}{|\overrightarrow{n_3}|\cdot|\,\vec{l}\,|}=\frac{|-a_1|}{1\times 1}=a_1$$

すると, 面 OAED, 面 OCGD の面積が 1 より, H へ正射影した図形の面積は, それぞれ,

$$1\times\cos\theta_2=a_2,\ 1\times\cos\theta_3=a_1$$

以上より, 求める立方体 C の影の面積は, $a_1+a_2+a_3$ となる。

コメント

この問題を読んだ瞬間, 名大の過去問を思い出しました。凸多面体を平面へ正射影する典型題として, よく採用されていたのですが, 出題年度を調べたところ 1987 年でした。もう時効でしょうか。

問　題

(1)　ベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ が次の条件(＊)を満たすとき，点 $(a_1,\ a_2)$ の存在範囲を図示せよ。

　(＊)　あるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ が存在して，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$ が任意のベクトル $\vec{p}$ に対して成り立つ。

(2)　(1)で求めた $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$ に対して，条件(＊)にあるベクトル $\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　x, y を任意の実数として，$\vec{p}=(x,\ y)$ とおく。

条件より，$(\vec{a}\cdot\vec{p})^2+(\vec{b}\cdot\vec{p})^2=|\vec{p}|^2$ なので，

$$(a_1x+a_2y)^2+(b_1x+b_2y)^2=x^2+y^2\cdots\cdots\cdots①$$

$(x,\ y)=(1,\ 0)$ に対して①が成立することより，$a_1{}^2+b_1{}^2=1\cdots\cdots\cdots②$

$(x,\ y)=(0,\ 1)$ に対して①が成立することより，$a_2{}^2+b_2{}^2=1\cdots\cdots\cdots③$

$(x,\ y)=(1,\ 1)$ に対して①が成立することより，$(a_1+a_2)^2+(b_1+b_2)^2=2$

②③を代入して，$a_1a_2+b_1b_2=0\cdots\cdots\cdots④$

逆に②③④が成立するとき，任意の実数 x, y に対して，①は明らかに成立する。

よって，求める条件は，ある $(b_1,\ b_2)$ に対して，②③④が成立する条件となる。

まず，②より $a_1=\cos\theta,\ b_1=\sin\theta$，③より $a_2=\cos\varphi,\ b_2=\sin\varphi$ とおくことができる。

④に代入して，$\cos\theta\cos\varphi+\sin\theta\sin\varphi=0$，$\cos(\theta-\varphi)=0$

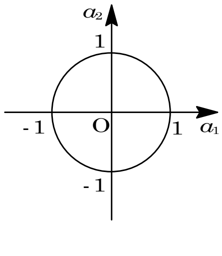
すると $\theta-\varphi=\pm90°$ より，$\varphi=\theta\mp90°$ となる。

以下，複号同順で，

$$a_1=\cos\theta,\ a_2=\cos(\theta\mp90°)=\pm\sin\theta\cdots\cdots\cdots⑤$$

θ は任意より，$a_1{}^2+a_2{}^2=1$

以上より，点 $(a_1,\ a_2)$ は原点中心の単位円周上に存在し，図示すると右図のようになる。



(2)　(1)より，$b_1=\sin\theta,\ b_2=\sin(\theta\mp90°)=\mp\cos\theta$

⑤より，$b_1=\pm a_2,\ b_2=\mp a_1$

よって，$\vec{b}=(a_2,\ -a_1)$ または $\vec{b}=(-a_2,\ a_1)$

コメント

かなり丁寧に解を書きました。任意の $x,\ y$ に対し，①が成立する必要十分条件については，もっとあっさり書いても構わないと思います。

問　題

次の問いに答えよ。ただし 2 次方程式の重解は 2 つと数える。

(1)　次の条件(＊)を満たす整数 a, b, c, d, e, f の組をすべて求めよ。

$$(*)\ \begin{cases} 2\text{次方程式 } x^2+ax+b=0 \text{ の 2 つの解が } c,\ d \text{ である。} \\ 2\text{次方程式 } x^2+cx+d=0 \text{ の 2 つの解が } e,\ f \text{ である。} \\ 2\text{次方程式 } x^2+ex+f=0 \text{ の 2 つの解が } a,\ b \text{ である。} \end{cases}$$

(2)　2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，次の条件(＊＊)を満たすとする。

(＊＊) すべての正の整数 n について，a_n，b_n は整数であり，2 次方程式 $x^2+a_nx+b_n=0$ の 2 つの解が a_{n+1}，b_{n+1} である。

このとき，

(i)　正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$ となるものが存在することを示せ。

(ii)　条件(＊＊)を満たす数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の組をすべて求めよ。　[2016]

解答例

(1)　整数 a, b, c, d, e, f に対し，2 次方程式 $x^2+ax+b=0$ の 2 つの解が c，d より，

$c+d=-a$ ………①，$cd=b$ ………②

また，2 次方程式 $x^2+cx+d=0$ の 2 つの解が e，f より，

$e+f=-c$ ………③，$ef=d$ ………④

さらに，2 次方程式 $x^2+ex+f=0$ の 2 つの解が a，b より，

$a+b=-e$ ………⑤，$ab=f$ ………⑥

②④⑥より，$abcdef=bdf$，$bdf(ace-1)=0$ ………⑦

(i)　$bdf=0$ のとき

$b=0$ とすると，⑥より $f=0$ となり，④より $d=0$

$d=0$ とすると，②より $b=0$ となり，⑥より $f=0$

$f=0$ とすると，④より $d=0$ となり，②より $b=0$

よって，いずれの場合も $b=d=f=0$ である。

すると，①より $c=-a$，③より $e=-c$，⑤より $a=-e$ から，$a=-e=c=-a$

$a=c=e=0$

(ii)　$bdf\neq 0$ のとき　⑦より $ace=1$ となり，a, c, e は整数より，

(ii-i)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ 1,\ 1)$ のとき

①より $1+d=-1$，③より $1+f=-1$，⑤より $1+b=-1$ から，$b=d=f=-2$

なお，この値は②④⑥を満たす。

(ii-ii)　$(a,\ c,\ e)=(1,\ -1,\ -1)$ のとき　①より $-1+d=-1$ から $d=0$ で不適

(ii-iii)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ 1,\ -1)$ のとき　③より $-1+f=-1$ から $f=0$ で不適

(ii-iv)　$(a,\ c,\ e)=(-1,\ -1,\ 1)$のとき　⑤より$-1+b=-1$から$b=0$で不適

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c,\ d,\ e,\ f)=(0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ -2,\ 1,\ -2,\ 1,\ -2)$

(2)　整数a_n，b_n，a_{n+1}，b_{n+1}に対し，$x^2+a_nx+b_n=0$の 2 つの解がa_{n+1}，b_{n+1}より，

$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}$………①，$b_n=a_{n+1}b_{n+1}$………②

(i)　正の整数mで，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$となるものが存在することを示す。

(a)　すべてのnに対して$b_n\neq 0$のとき

②より，$a_{n+1}\neq 0$から$|a_{n+1}|\geqq 1$となり，$|b_n|=|a_{n+1}||b_{n+1}|\geqq|b_{n+1}|$から，

$|b_1|\geqq|b_2|\geqq\cdots\geqq|b_n|\geqq|b_{n+1}|\geqq\cdots$　………③

不等式③で等号が成立しない場合は，ある正の整数lに対し$|b_l|<0$となり不適。

これより，ある正の整数 m で，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$となるものが存在する。

(b)　ある正の整数kに対して$b_k=0$のとき

①②において，$n=k$とおくと，

$a_k=-a_{k+1}-b_{k+1}$………④，$0=a_{k+1}b_{k+1}$………⑤

ここで，$b_{k+1}\neq 0$と仮定すると，⑤より$a_{k+1}=0$，④に代入して$b_{k+1}=-a_k$

すると，$x^2+a_{k+1}x+b_{k+1}=0$すなわち$x^2-a_k=0$の解が整数a_{k+2}，b_{k+2}であることよりa_kは平方数となり，$a_k\neq 0$からαを正の整数として$a_k=\alpha^2$とおくと，

$(a_{k+2},\ b_{k+2})=(\pm\alpha,\ \mp\alpha)$（以下，複号同順）

さらに，$x^2+a_{k+2}x+b_{k+2}=0$すなわち$x^2\pm\alpha x\mp\alpha=0$の解が整数$a_{k+3}$，$b_{k+3}$であることより，

$\pm\alpha=-a_{k+3}-b_{k+3}$………⑥，$\mp\alpha=a_{k+3}b_{k+3}$………⑦

⑥⑦から，$a_{k+3}b_{k+3}-a_{k+3}-b_{k+3}=0$となり，$(a_{k+3}-1)(b_{k+3}-1)=1$

(b-1)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(1,\ 1)$のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(2,\ 2)$となり，$x^2+2x+2=0$の解は整数$a_{k+4}$，$b_{k+4}$であるが，$D/4=-1<0$から虚数解となり不適である。

(b-2)　$(a_{k+3}-1,\ b_{k+3}-1)=(-1,\ -1)$のとき

$(a_{k+3},\ b_{k+3})=(0,\ 0)$となり，$\alpha>0$から⑥⑦は成立しない。

したがって，ある k で$b_k=0$のとき$b_{k+1}=0$となる。そして同様に，$b_{k+2}=0$，$b_{k+3}=0$，…となり，kをmに置き換えると，

$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$

以上より，(a)(b)のいずれの場合も，$|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$となる。

(ii)　(i)の場合分けに従って，①②を満たす数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$の組を求める。

(a)　すべてのnに対して$b_n\neq 0$のとき

βを正の整数として，(i)から，$\beta=|b_m|=|b_{m+1}|=|b_{m+2}|=\cdots$　………⑧

さて，②で$n=m$とすると，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}$となり，$|b_m|=|a_{m+1}||b_{m+1}|$より，

$\beta=|a_{m+1}|\beta$，$|a_{m+1}|=1$

同様にして，$b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ から $|a_{m+2}|=1$ なので，同様に繰り返すと，

$1=|a_{m+1}|=|a_{m+2}|=|a_{m+3}|=\cdots$ ………⑨

さて，⑧より $b_{m+1}=\pm\beta$ であるが，まず $b_{m+1}=\beta$ のときについて調べる。

すると，$x^2+a_{m+1}x+b_{m+1}=0$ すなわち $x^2+a_{m+1}x+\beta=0$ の解は整数 a_{m+2}，b_{m+2} であるが，⑨に注意すると，$D={a_{m+1}}^2-4\beta=|a_{m+1}|^2-4\beta=1-4\beta<0$ より虚数解となり不適である。

よって，$b_{m+1}\neq\beta$ から $b_{m+1}=-\beta$ となる。同様に，$b_{m+2}=-\beta$ となり繰り返すと，

$-\beta=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑩

②から $b_{m+1}=a_{m+2}b_{m+2}$ に⑩を代入すると，$a_{m+2}=1$ となる。同様にすると，$a_{m+3}=1$ となり，繰り返すと，

$1=a_{m+2}=a_{m+3}=a_{m+4}=\cdots$ ………⑪

ここで，①から $a_{m+2}=-a_{m+3}-b_{m+3}$ に代入すると，$1=-1+\beta$，$\beta=2$ となり，

$-2=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑫

さらに，①より，$a_{m+1}=-a_{m+2}-b_{m+2}=-1-(-2)=1$

$a_m=-a_{m+1}-b_{m+1}=-1-(-2)=1$

また，②より，$b_m=a_{m+1}b_{m+1}=1\times(-2)=-2$ となり，同様に繰り返すと，

$a_1=a_2=\cdots=a_m=a_{m+1}=1$，$b_1=b_2=\cdots=b_m=-2$ ………⑬

以上より，⑪⑫⑬をまとめると，$n\geqq1$ で，$a_n=1$，$b_n=-2$

(b)　ある正の整数 m に対して $b_m=0$ のとき

(i)より，$0=b_m=b_{m+1}=b_{m+2}=b_{m+3}=\cdots$ ………⑭

ここで，②より，$b_{m-1}=a_mb_m=0$，$b_{m-2}=a_{m-1}b_{m-1}=0$ となり，繰り返すと，

$b_1=b_2=b_3=\cdots=b_{m-2}=b_{m-1}=0$ ………⑮

⑭⑮をまとめると，$n\geqq1$ で，$b_n=0$

すると，①より，$a_1=-a_2-b_2=-a_2$，$a_2=-a_3-b_3=-a_3$ となり，

$a_n=-a_{n+1}-b_{n+1}=-a_{n+1}$

これより，$a_2=-a_1$，$a_3=-a_2$，…，$a_{n+1}=-a_n$ となり，$n\geqq1$ で，

$a_n=a_1(-1)^{n-1}$

(a)(b)より，$(a_n,\ b_n)=(1,\ -2)$ または $(a_n,\ b_n)=\left(a_1(-1)^{n-1},\ 0\right)$（$a_1$ は整数）

コメント

(1)は整数が絡んだ連立方程式の問題ですが，(2)は整数と漸化式についての時間無制限の難問です。2 次方程式から生成される整数解の数列という，非常にきつい条件が与えられているので，初めのうちはなんとかうまくいっても，そのうち破綻し，そこが付け目という気持ちで考えています。

問　題

負でない整数 N が与えられたとき，$a_1=N$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$として数列$\{a_n\}$を定める。ただし$[a]$は，実数 a の整数部分（$k\leqq a<k+1$となる整数 k）を表す。

(1)　$a_3=1$となるようなNをすべて求めよ。

(2)　$0\leqq N<2^{10}$を満たす整数 N のうちで，N から定まる数列$\{a_n\}$のある項が 2 となるようなものはいくつあるか。

(3)　0 から$2^{100}-1$までの2^{100}個の整数から等しい確率で N を選び，数列$\{a_n\}$を定める。次の条件(＊)を満たす最小の正の整数 m を求めよ。

　(＊)　数列$\{a_n\}$のある項が m となる確率が$\dfrac{1}{100}$以下となる。　[2014]

解答例

(1)　$a_1=N\geqq 0$，$a_{n+1}=\left[\dfrac{a_n}{2}\right]$に対して，$a_3=1$とすると，$\left[\dfrac{a_2}{2}\right]=1$から$a_2=2,\ 3$

すると，$a_2=2$ のとき$\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=2$ から $a_1=4,\ 5$，$a_2=3$ のとき$\left[\dfrac{a_1}{2}\right]=3$ から$a_1=6,\ 7$となり，まとめると，$a_1=N=4,\ 5,\ 6,\ 7$である。

(2)　一般的に，負でない整数$i,\ j\ (i<j)$に対して，$i\leqq\left[\dfrac{x}{2}\right]<j$を満たす整数 x は,

$$x=2i,\ 2i+1,\ 2i+2,\ \cdots,\ 2j-1$$

すなわち，$2i\leqq x<2j$ となり，$2j-2i$ 個の x が存在する。

さて，ある正の整数 l に対して，$a_l=2$ とすると，$a_{l-1}=4,\ 5$ となり，

$$4\leqq a_{l-1}<6,\ 8\leqq a_{l-2}<12,\ 16\leqq a_{l-3}<24,\ \cdots,\ 2^l\leqq a_1<3\cdot 2^{l-1}$$

ここで，条件から$0\leqq N<2^{10}$すなわち$0\leqq a_1<2^{10}$より，$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 9$

よって，$a_l=2$ となる整数 N の個数は,

$$\sum_{l=1}^{9}(3\cdot 2^{l-1}-2^l)=\sum_{l=1}^{9}2^{l-1}=\frac{2^9-1}{2-1}=511$$

(3)　ある正の整数 l に対して，$a_l=m$ とすると，$a_{l-1}=2m,\ 2m+1$ となり，

$$2m\leqq a_{l-1}<2(m+1),\ 4m\leqq a_{l-2}<4(m+1),\ \cdots,\ 2^{l-1}m\leqq a_1<2^{l-1}(m+1)$$

さて，$0\leqq N\leqq 2^{100}-1$において，$2^{l-1}m\leqq 2^{100}-1<2^{l-1}(m+1)-1$ と仮定すると，

$$m\leqq 2^{101-l}-\frac{1}{2^{l-1}}<m+1-\frac{1}{2^{l-1}}$$

まとめると，$m\leqq 2^{101-l}-\dfrac{1}{2^{l-1}}$ かつ $m>2^{101-l}-1$ となり，これを満たす整数 m は存在しない。

これより，$a_l=m$ となる確率は，整数 N の個数に注目して，

$$\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}\{2^{k-1}(m+1)-2^{k-1}m\}=\frac{1}{2^{100}}\sum_{k=1}^{l}2^{k-1}=\frac{1}{2^{100}}\cdot\frac{2^l-1}{2-1}=\frac{2^l-1}{2^{100}}$$

条件から，$\dfrac{2^l-1}{2^{100}}\leqq\dfrac{1}{100}$ より，$2^l\leqq\dfrac{2^{100}}{100}+1=\dfrac{128}{100}\cdot 2^{93}+1=\dfrac{32}{25}\cdot 2^{93}+1$ となり，

$$l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 93$$

よって，$1\leqq l\leqq 93$ のとき $0\leqq N\leqq 2^{100}-1$ に含まれ，$l\geqq 94$ のとき $N>2^{100}-1$ となることから，求める正の整数 m の条件は，

$$2^{100}-1<2^{93}m$$

すると，m の最小値は $m>2^7-\dfrac{1}{2^{93}}$ より，$m=2^7=128$ である。

コメント

(1)(2)は実験で具体的に計算すればよいだけですが，それをベースにした(3)の設問はかなり難度が高く，記述も容易とはいえないものになっています。

問　題

$x>0$ とし，$f(x)=\log x^{100}$ とおく。

(1)　次の不等式を証明せよ。　$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2)　実数 a の整数部分($k\leqq a<k+1$ となる整数 k)を $[a]$ で表す。整数 $[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(1000)]$ のうちで異なるものの個数を求めよ。必要ならば，$\log 10=2.3026$ として計算せよ。　[2013]

解答例

(1)　$f(x)=\log x^{100}=100\log x$ より，$f'(x)=\dfrac{100}{x}$ となるので，$0<x<c<x+1$ を満たすある c に対して，平均値の定理から，

$$\frac{f(x+1)-f(x)}{(x+1)-x}=\frac{100}{c},\quad f(x+1)-f(x)=\frac{100}{c}$$

すると，$\dfrac{100}{x+1}<\dfrac{100}{c}<\dfrac{100}{x}$ より，$\dfrac{100}{x+1}<f(x+1)-f(x)<\dfrac{100}{x}$

(2)　n を整数とすると，(1)より，$\dfrac{100}{n+1}<f(n+1)-f(n)<\dfrac{100}{n}$

ここで，$\dfrac{100}{n+1}\geqq 1$ とすると $n\leqq 99$ となり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より大となるので，整数 $[f(1)]$，$[f(2)]$，$[f(3)]$，…，$[f(100)]$ はすべて異なる。

また，$\dfrac{100}{n}\leqq 1$ とすると $n\geqq 100$ であり，このとき $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が 1 より小となり，$[f(100)]$，$[f(101)]$，$[f(102)]$，…，$[f(1000)]$ は，$[f(100)]$ 以上 $[f(1000)]$ 以下のいずれかの整数をもれなくとり，

$$[f(100)]=[100\log 100]=[200\log 10]=[460.52]=460$$

$$[f(1000)]=[100\log 1000]=[300\log 10]=[690.78]=690$$

以上より，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(1000)]$ のうちで異なるものの個数は，

$$100+(690-460+1)-1=330$$

コメント

(2)では，隣接する $f(n+1)$ と $f(n)$ の差が，$n=100$ を境に，1 より大から 1 より小に変化するという感覚が，個数を数えるポイントとなっています。

問　題

k, m, n は整数とし，$n \geqq 1$ とする。${}_m\mathrm{C}_k$ を二項係数として，$S_k(n)$，$T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k,\quad S_k(1) = 1\ (k \geqq 0)$$

$$T_m(n) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(n) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(n) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(n) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(n)$$
$$= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m\mathrm{C}_k S_k(n)\quad (m \geqq 2)$$

(1)　$T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。

(2)　一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。

(3)　p が 3 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを示せ。　[2013]

解答例

(1)　二項定理を利用すると，$S_k(1) = 1$，$S_k(2) = 1^k + 2^k$ より，

$$T_m(1) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(1) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(1) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(1) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(1)$$
$$= {}_m\mathrm{C}_1 + {}_m\mathrm{C}_2 + {}_m\mathrm{C}_3 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} = (1+1)^m - {}_m\mathrm{C}_0 - {}_m\mathrm{C}_m = 2^m - 2$$

$$T_m(2) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(2) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(2) + {}_m\mathrm{C}_3 S_3(2) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(2)$$
$$= {}_m\mathrm{C}_1 (1+2^1) + {}_m\mathrm{C}_2 (1+2^2) + {}_m\mathrm{C}_3 (1+2^3) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} (1+2^{m-1})$$
$$= T_m(1) + \{(1+2)^m - {}_m\mathrm{C}_0 2^0 - {}_m\mathrm{C}_m 2^m\}$$
$$= 2^m - 2 + 3^m - 1 - 2^m = 3^m - 3$$

(2)　$T_m(n) = (n+1)^m - (n+1)$ であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 1$ のとき　(1)より成立する。

(ii)　$n = l$ のとき　$T_m(l) = (l+1)^m - (l+1)$ であると仮定すると，条件より，

$$T_m(l+1) = {}_m\mathrm{C}_1 S_1(l+1) + {}_m\mathrm{C}_2 S_2(l+1) + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} S_{m-1}(l+1)$$
$$= {}_m\mathrm{C}_1 \{1 + 2 + \cdots + l + (l+1)\} + {}_m\mathrm{C}_2 \{1^2 + 2^2 + \cdots + l^2 + (l+1)^2\}$$
$$+ \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} \{1^{m-1} + 2^{m-1} + \cdots + l^{m-1} + (l+1)^{m-1}\}$$
$$= T_m(l) + {}_m\mathrm{C}_1 (l+1) + {}_m\mathrm{C}_2 (l+1)^2 + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-1} (l+1)^{m-1}$$
$$= (l+1)^m - (l+1) + \{(1+l+1)^m - {}_m\mathrm{C}_0 (l+1)^0 - {}_m\mathrm{C}_m (l+1)^m\}$$
$$= (l+1)^m - (l+1) + (l+2)^m - 1 - (l+1)^m = (l+2)^m - (l+2)$$

(i)(ii)より，$T_m(n) = (n+1)^m - (n+1)$ ………(＊)

(3)　まず，$p = 3$ のときは，$S_1(2) = 1+2$ は 3 の倍数となり題意を満たし，$S_k(p-1)$ $(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

次に，p が 5 以上の素数のとき，$S_k(p-1)$　$(k = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数であることを，以下，数学的帰納法で証明する。

(i)　$k=1$ のとき

$m=2$，$n=p-1$ とすると，条件より，$T_2(p-1)={}_2\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)$

すると，(＊)から，$(p-1+1)^2-(p-1+1)=2S_1(p-1)$

$$2S_1(p-1)=p(p-1)$$

p は 5 以上の素数より，$S_1(p-1)$ は p の倍数である。

(ii)　$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ l$　$(l\leqq p-3)$ のとき

$S_k(p-1)$ が p の倍数であると仮定すると，条件より，

$$T_{l+2}(p-1)={}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)$$
$$+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}\,S_{l+1}(p-1)$$

(＊)から，$T_{l+2}(p-1)=p^{l+2}-p=p(p^{l+1}-1)$ となり，

$$(l+2)S_{l+1}(p-1)=p(p^{l+1}-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_1\,S_1(p-1)-{}_{l+2}\mathrm{C}_2\,S_2(p-1)$$
$$-{}_{l+2}\mathrm{C}_3\,S_3(p-1)-\cdots-{}_{l+2}\mathrm{C}_l\,S_l(p-1)$$

これより，$(l+2)S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数となる。

すると，p は 5 以上の素数で，$l+2\leqq p-1$ から，$l+2$ と p は互いに素となるので，$S_{l+1}(p-1)$ は p の倍数である。

(i)(ii)より，$S_k(p-1)$　$(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ p-2)$ は p の倍数である。

コメント

二項定理と整数の融合問題です。(3)の証明に対して，巧妙な誘導がつけられています。また，帰納法における $l\leqq p-3$ という条件から，$p=3$ は特別に扱っています。

問　題

m, p を 3 以上の奇数とし, m は p で割り切れないとする。

(1)　$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。

(2)　$(p-1)^m+1$ は p で割り切れることを示せ。

(3)　$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れないことを示せ。

(4)　r を正の整数とし，$s=3^{r-1}m$ とする。2^s+1 は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

解答例

(1)　二項定理より，$(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の係数は,

$$ {}_{101}\mathrm{C}_2\cdot(-1)^{99}=-\frac{101\times100}{2}=-5050 $$

(2)　m, p は 3 以上の奇数から，二項定理を用いると，

$$ (p-1)^m+1=\sum_{k=0}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+(-1)^m+1 $$
$$ =\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=p\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-1} $$

よって，$(p-1)^m+1$ は p で割り切れる。

(3)　(2)より，$(p-1)^m+1=\sum_{k=1}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k=\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^k+{}_m\mathrm{C}_1(-1)^{m-1}p$

$$ =p^2\sum_{k=2}^{m}{}_m\mathrm{C}_k(-1)^{m-k}p^{k-2}+mp $$

m は p で割り切れないので，mp は p^2 で割り切れない。すなわち，$(p-1)^m+1$ は p^2 で割り切れない。

(4)　r を正の整数，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れることを，r に関する数学的帰納法で示す。

(i)　$r=1$ のとき

$s=3^0m=m$ となり, (2)の結論に $p=3$ を適用すると，$2^m+1=(3-1)^m+1$ は 3 すなわち 3^1 で割り切れる。よって，$r=1$ のとき成立する。

(ii)　$r=l$ のとき

$2^{3^{l-1}m}+1$ が 3^l で割り切れると仮定し, n を整数として，$2^{3^{l-1}m}+1=3^ln$ とおく。

$$ 2^{3^lm}+1=2^{3^{l-1}\cdot3m}+1=\left(2^{3^{l-1}m}\right)^3+1=\left(3^ln-1\right)^3+1 $$
$$ =(3^ln)^3-3(3^ln)^2+3(3^ln)-1+1=3^{l+1}(3^{2l-1}n^3-3^ln^2+n) $$

よって，$2^{3^lm}+1$ は 3^{l+1} で割り切れる。

(i)(ii)より，$s=3^{r-1}m$ のとき，2^s+1 は 3^r で割り切れる。

コメント

二項定理の応用問題です。(4)は数学的帰納法という手段を決めれば，スムーズに論理が展開できます。

問　題

$a,\ b$ は $a \geqq b > 0$ を満たす整数とし，x と y の 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0,\quad y^2 + by + a = 0$$

がそれぞれ整数解をもつとする。

(1)　$a = b$ とするとき，条件を満たす整数 a をすべて求めよ。

(2)　$a > b$ とするとき，条件を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2011]

解答例

(1)　まず，2 次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ ……①，$y^2 + by + a = 0$ ……②が，それぞれ整数解をもつとき，$a,\ b$ が整数より，①と②の 2 つの解はともに整数である。

さて，$a = b > 0$ とするとき，②は①に一致し，整数 $k,\ l$ $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$$(x+k)(x+l) = 0,\quad x^2 + (k+l)x + kl = 0 \text{ ………③}$$

①③の係数を比べると，$k + l = a$ ……④，$kl = a$ ……⑤となり，④⑤より，

$$kl = k + l,\quad (k-1)(l-1) = 1 \text{ ………⑥}$$

ここで，④⑤から $a > 0$ に注意すると，$k,\ l$ は自然数となり，$1 \leqq k \leqq l$ である。
すると，⑥より，$(k-1,\ l-1) = (1,\ 1)$，$(k,\ l) = (2,\ 2)$

よって，$a = 4$ である。

(2)　$a > b > 0$ とするとき，(1)と同様に，整数 $k,\ l$ $(k \leqq l)$ を用いて，①は，

$$(x+k)(x+l) = 0,\quad x^2 + (k+l)x + kl = 0$$

よって，$k + l = a$ ……⑦，$kl = b$ ……⑧となり，$a > b$ と⑦⑧から，

$$kl < k + l,\quad (k-1)(l-1) < 1 \text{ ………⑨}$$

一方，$a > 0$，$b > 0$ から $k,\ l$ は自然数となり，$1 \leqq k \leqq l$ であることから，

$$(k-1)(l-1) \geqq 0 \text{ ………⑩}$$

⑨⑩より，$(k-1)(l-1) = 0$ となり，$k = 1$ である。

すると，⑦から $a = l + 1$，⑧から $b = l$ となり，2 次方程式②は，

$$y^2 + ly + (l+1) = 0 \text{ ………⑪}$$

ここで，(1)と同様にして，整数 $m,\ n$ $(m \leqq n)$ を用いて，⑪は，

$$(y+m)(y+n) = 0,\quad y^2 + (m+n)x + mn = 0 \text{ ………⑫}$$

⑪⑫の係数を比べると，$m + n = l$ ……⑬，$mn = l + 1$ ……⑭となり，⑬⑭より，

$$mn = m + n + 1,\quad (m-1)(n-1) = 2 \text{ ………⑮}$$

ここで，⑬⑭から $l > 0$ に注意すると，$m,\ n$ は自然数となり，$1 \leqq m \leqq n$ である。
すると，⑮より，$(m-1,\ n-1) = (1,\ 2)$，$(m,\ n) = (2,\ 3)$

よって，$l = 5$ から，$a = 6$，$b = 5$ である。

コメント

2 つの自然数の和と積の大小関係を，和と積が等しいのは$2+2=2\times2$，和が積より大きいのは$1+*>1\times*$というイメージを用いて解いています。他の解法もいろいろ考えられそうな，演習に価値ある整数問題です。

問　題

x, y を正の整数とする。

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ を満たす組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。

(2) p を 3 以上の素数とする。$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ を満たす組 $(x,\ y)$ のうち，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ を求めよ。 [2009]

解答例

(1) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{4}$ より，$xy-4x-8y=0$ となり，

$$(x-8)(y-4)=32$$

ここで, x, y は整数であり，$x-8>-8$，$y-4>-4$ から, 32 の約数をとり，

$$(x-8,\ y-4)=(1,\ 32),\ (2,\ 16),\ (4,\ 8),\ (8,\ 4),\ (16,\ 2),\ (32,\ 1)$$

$$(x,\ y)=(9,\ 36),\ (10,\ 20),\ (12,\ 12),\ (16,\ 8),\ (24,\ 6),\ (40,\ 5)$$

(2) $\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{p}$ より，$xy-px-2py=0$ となり，

$$(x-2p)(y-p)=2p^2$$

ここで，$x-2p>-2p$，$y-p>-p$ であり, p が 3 以上の素数から，

$$(x-2p,\ y-p)=(1,\ 2p^2),\ (2,\ p^2),\ (p,\ 2p),\ (2p,\ p),\ (p^2,\ 2),\ (2p^2,\ 1)$$

さて，$A=2x+3y-7p=2(x-2p)+3(y-p)$ とおくと, A の値は順に，

$$A=2+6p^2,\ 4+3p^2,\ 8p,\ 7p,\ 2p^2+6,\ 4p^2+3$$

ここで, $p\geqq3$ を用いると，

$$(2+6p^2)-(4+3p^2)=-2+3p^2>0,\ 2+6p^2>4+3p^2$$

$$8p-7p=p>0,\ 8p>7p$$

$$(2p^2+6)-(4p^2+3)=-2p^2+3<0,\ 4p^2+3>2p^2+6$$

さらに，$(4+3p^2)-(2p^2+6)=p^2-2>0$，$4+3p^2>2p^2+6$ ………①

$$(2p^2+6)-7p=(2p-3)(p-2)>0,\ 2p^2+6>7p \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より, A の最小値は $7p$ であり，このとき，$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p)$ となる。すると，$2x+3y=A+7p$ から，$2x+3y$ を最小にする $(x,\ y)$ は，

$$(x-2p,\ y-p)=(2p,\ p),\ (x,\ y)=(4p,\ 2p)$$

コメント

有名な型の不定方程式です。なお，(2)の大小関係については，初めはグラフということも考えましたが，煩雑になりそうなので止めました。そこで，まず似た式どうしの大小を比べ，この予選を通過した式の大小を比べるという方法を採っています。

問　題

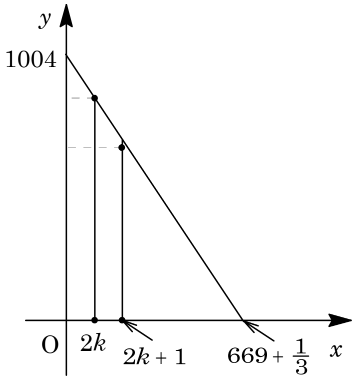
次の問いに答えよ。

(1)　$3x+2y \leqq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y)$ の個数を求めよ。

(2)　$\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ を満たす 0 以上の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ で，不等式 $3x+2y \leqq 2008$ を満たす格子点の個数を, x を固定して数える。



(i)　$x=2k\ (0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}(2008-3\cdot 2k)=1004-3k$$

よって，直線 $x=2k$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k$ より，格子点は $1005-3k$ 個ある。

(ii)　$x=2k+1\ (0 \leqq k \leqq 334)$ のとき

境界線 $3x+2y=2008$ との交点は,

$$y=\frac{1}{2}\{2008-3(2k+1)\}=1004-3k-\frac{3}{2}$$

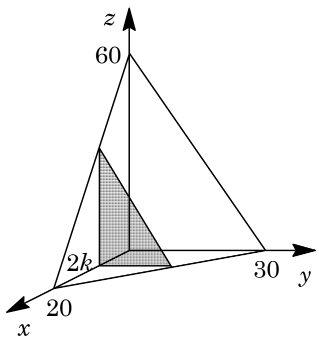
よって，直線 $x=2k+1$ 上で，$0 \leqq y \leqq 1004-3k-2=1002-3k$ より，格子点は $1003-3k$ 個ある。

(i)(ii)より，求める格子点の個数 N は,

$$N=\sum_{k=0}^{334}(1005-3k)+\sum_{k=0}^{334}(1003-3k)=\sum_{k=0}^{334}(2008-6k)$$

$$=2008\times 335-6\times\frac{1}{2}\cdot 334\cdot 335=337010$$

(2)　$x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$ で，不等式 $\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{3}+\dfrac{z}{6} \leqq 10$ すなわち $3x+2y+z \leqq 60$ を満たす格子点の個数 N を，まず x を固定して数える。

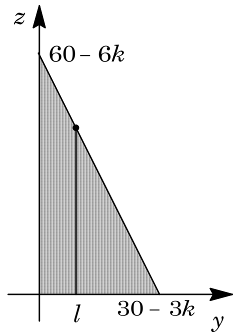


(i)　$x=2k\ (0 \leqq k \leqq 10)$ のとき

平面 $x=2k$ 上の格子点の個数を N_{2k} とおくと，この平面上では,

$$0 \leqq z \leqq -2y+60-6k$$

(1)と同様に考えて，直線 $y=l\ (0 \leqq l \leqq 30-3k)$ 上で, $0 \leqq z \leqq -2l+60-6k$ より，格子点は $-2l+61-6k$ 個あるので,



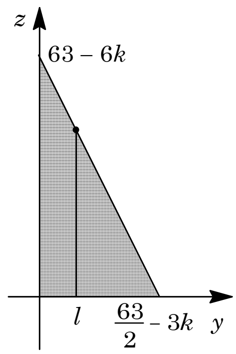
$$N_{2k}=\sum_{k=0}^{30-3k}(-2l+61-6k)$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}(30-3k)(31-3k)+(61-6k)(31-3k)$$
$$=(31-3k)^2$$

(ii)　$x=2k-1\ (1\leqq k\leqq 10)$のとき

平面$x=2k-1$上の格子点の個数をN_{2k-1}とおくと，この平面上では，

$$0\leqq z\leqq -2y+60-3(2k-1)=-2y+63-6k$$

(1)と同様に考えて，直線$y=l\ (0\leqq l\leqq 31-3k)$上では，$0\leqq z\leqq -2l+63-6k$より，格子点は$-2l+64-6k$個あるので，



$$N_{2k-1}=\sum_{k=0}^{31-3k}(-2l+64-6k)$$
$$=-2\cdot\frac{1}{2}(31-3k)(32-3k)+(64-6k)(32-3k)$$
$$=(33-3k)(32-3k)$$

(i)(ii)より，求める格子点の個数Nは，

$$N=\sum_{k=0}^{10}N_{2k}+\sum_{k=1}^{10}N_{2k-1}=N_0+\sum_{k=1}^{10}(N_{2k}+N_{2k-1})$$
$$=31^2+\sum_{k=1}^{10}\left\{(31-3k)^2+(33-3k)(32-3k)\right\}$$
$$=31^2+\sum_{k=1}^{10}(2017-381k+18k^2)$$
$$=31\times31+2017\times10-381\times\frac{1}{2}\times10\times11+18\times\frac{1}{6}\times10\times11\times21$$
$$=7106$$

コメント

格子点の個数を数える有名問題です。平面と空間の 2 題が出されましたが，どちらも，かなりの量の計算が要求されます。

問　題

正の整数 a と b が互いに素であるとき，正の整数からなる数列$\{x_n\}$を$x_1=x_2=1$，$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}\ (n\geqq 2)$で定める。このときすべての正の整数 n に対してx_{n+1}とx_nが互いに素であることを示せ。 [2004]

解答例

まず，x_nとbが互いに素であることを，数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$のとき　$x_1=x_2=1$より，x_1とb，x_2とbは互いに素である。

(ii)　$n=k,\ k+1$のとき　x_kとb，x_{k+1}とbは互いに素であるとする。

ここで，x_{k+2}とbに2以上の公約数gの存在を仮定すると，

$$x_{k+2}=gx'_{k+2},\ b=gb'\quad (x'_{k+2}\text{と}b'\text{は整数})$$

すると，$x_{k+2}=ax_{k+1}+bx_k$から，$ax_{k+1}=g(x'_{k+2}-b'x_k)$………①

これより，ax_{k+1}はgの倍数となるが，条件よりaとbは互いに素，またx_{k+1}とbも互いに素なので，①の成立はありえない。

よって，x_{k+2}とbには2以上の公約数gが存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_nとbは互いに素である。

次に，x_nと b が互いに素であることを利用して，x_{n+1}とx_nが互いに素であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$のとき　$x_1=x_2=1$より，x_2とx_1は互いに素である。

(ii)　$n=l$のとき　x_{l+1}とx_lが互いに素であるとする。

ここで，x_{l+2}とx_{l+1}に2以上の公約数Gの存在を仮定すると，

$$x_{l+2}=Gx''_{l+2},\ x_{l+1}=Gx''_{l+1}\quad (x''_{l+2}\text{と}x''_{l+1}\text{は整数})$$

すると，$x_{l+2}=ax_{l+1}+bx_l$から，$bx_l=G(x''_{l+2}-ax''_{l+1})$………②

これより，bx_lはGの倍数となるが，bとx_{l+1}は互いに素，またx_lとx_{l+1}も互いに素なので，②の成立はありえない。

よって，x_{l+2}とx_{l+1}には2以上の公約数Gが存在せず，互いに素である。

(i)(ii)より，x_{n+1}とx_nは互いに素である。

コメント

漸化式$x_{n+1}=ax_n+bx_{n-1}$において，aとbが互いに素，しかもx_nとx_{n-1}も互いに素であるとき，x_{n+1}とx_nが互いに素でない例はすぐに見つけられます。たとえば，$33=7\times3+6\times2$です。ということは，このような例を出現させないためには何を示せばよいのか……，と考えていきました。

問　題

関係式$x^a=y^b=z^c=xyz$を満たす 1 とは異なる 3 つの正の実数の組$(x,\ y,\ z)$が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組$(a,\ b,\ c)$をすべて求めよ。ただし，$a\leqq b\leqq c$とする。 [2002]

解答例

$x^a=y^b=z^c=xyz$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$より，$\log x^a=\log y^b=\log z^c=\log xyz$

$$a\log x=b\log y=c\log z=\log x+\log y+\log z$$

ここで，$\log x=X$，$\log y=Y$，$\log z=Z$とおくと，$x\neq 1$，$y\neq 1$，$z\neq 1$から，

$$aX=bY=cZ=X+Y+Z\ (X\neq 0,\ Y\neq 0,\ Z\neq 0)$$

$$aX=bY\cdots\cdots①,\ aX=cZ\cdots\cdots②,\ aX=X+Y+Z\cdots\cdots③$$

①より$Y=\dfrac{a}{b}X$，②より$Z=\dfrac{a}{c}X$，③に代入して，$aX=X+\dfrac{a}{b}X+\dfrac{a}{c}X$

$X\neq 0$より，$a=1+\dfrac{a}{b}+\dfrac{a}{c}$，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1\cdots\cdots\cdots④$

さて，$1\leqq a\leqq b\leqq c$ より，$\dfrac{1}{a}\geqq\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$となり，④から$\dfrac{3}{a}\geqq 1$，$a\leqq 3$ である。また，$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1-\dfrac{1}{a}>0$より$a>1$となる。よって，$a=2,\ 3$である。

(i)　$a=2$のとき　④より$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}$

$\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$より$\dfrac{2}{b}\geqq\dfrac{1}{2}$から$b\leqq 4$で，$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{b}>0$から$b>2$となる。

$b=3$のとき$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{6}$より$c=6$，また$b=4$のとき$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{4}$より$c=4$である。

(ii)　$a=3$のとき　④より$\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{2}{3}$

$\dfrac{1}{b}\geqq\dfrac{1}{c}>0$より$\dfrac{2}{b}\geqq\dfrac{2}{3}$から$b\leqq 3$で，$3=a\leqq b$より$b=3$となる。

このとき，$\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{3}$より$c=3$

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(2,\ 3,\ 6),\ (2,\ 4,\ 4),\ (3,\ 3,\ 3)$

コメント

対数をとって変形をしていけば，④というよく見かける不定方程式が現れてきます。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。条件 $k_1 \geqq 1,\ \cdots\cdots,\ k_{n-1} \geqq 1,\ k_n \geqq 0$ を満たす n 個の整数の組 $(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ に対して，自然数 $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n)$ を次のように定める。

$$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = 2^{k_1+k_2+\cdots+k_n} - 2^{k_2+\cdots+k_n} - 2^{k_3+\cdots+k_n} - \cdots - 2^{k_n}$$

(1) $1999 = m(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ となる $(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4)$ を求めよ。

(2) $m(k_1,\ k_2) = m(l_1,\ l_2)$ であれば，$k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$ が成り立つことを示せ。

(3) $n \geqq 3$ のとき，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_n) = m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_n)$ であれば，$k_j = l_j$ $(j = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が成り立つことを示せ。　[1999]

解答例

(1) $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_4) = 2^{k_1+k_2+k_3+k_4} - 2^{k_2+k_3+k_4} - 2^{k_3+k_4} - 2^{k_4}$

$$= 2^{k_4}(2^{k_1+k_2+k_3} - 2^{k_2+k_3} - 2^{k_3} - 1)$$

$k_1 \geqq 1,\ k_2 \geqq 1,\ k_3 \geqq 1$ より，$2^{k_1+k_2+k_3} - 2^{k_2+k_3} - 2^{k_3} - 1$ は奇数であり，また $k_4 = 0$ のとき 2^{k_4} は奇数，$k_4 \geqq 1$ のとき 2^{k_4} は偶数となる。

1999 は奇数より $k_4 = 0$ となり，このとき $2^{k_1+k_2+k_3} - 2^{k_2+k_3} - 2^{k_3} - 1 = 1999$

$$2^{k_3}(2^{k_1+k_2} - 2^{k_2} - 1) = 2000 = 2^4 \times 125$$

$2^{k_1+k_2} - 2^{k_2} - 1$ は奇数より $k_3 = 4$ となり，このとき $2^{k_1+k_2} - 2^{k_2} - 1 = 125$

$$2^{k_2}(2^{k_1} - 1) = 126 = 2 \times 63$$

$2^{k_1} - 1$ は奇数より $k_2 = 1$ となり，このとき $2^{k_1} - 1 = 63$

$2^{k_1} = 64 = 2^6$ より，$k_1 = 6$ となるので，$(k_1,\ k_2,\ k_3,\ k_4) = (6,\ 1,\ 4,\ 0)$

(2) $m(k_1,\ k_2) = m(l_1,\ l_2) = N$ とおくと，$2^{k_2}(2^{k_1} - 1) = 2^{l_2}(2^{l_1} - 1) = N$

ただし，$k_1 \geqq 1,\ k_2 \geqq 0,\ l_1 \geqq 1,\ l_2 \geqq 0$ である。

N が奇数のとき，$k_2 = l_2 = 0$ となり，$2^{k_1} - 1 = 2^{l_1} - 1$ より $k_1 = l_1$

N が偶数のとき，$N = 2^i M$（i は自然数, M は奇数）とおくと，

$$2^{k_2}(2^{k_1} - 1) = 2^{l_2}(2^{l_1} - 1) = 2^i M$$

よって，$k_2 = l_2 = i$ となり，$2^{k_1} - 1 = 2^{l_1} - 1$ より $k_1 = l_1$

したがって, N の偶奇にかかわらず, $k_1 = l_1$，$k_2 = l_2$ が成り立つ。

(3) (2)との結果と合わせて, $n \geqq 2$ において，題意成立を数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n = 2$ のとき　(2)より成立する。

(ii) $n = p$ のとき　題意の成立を仮定する。

ここで，$m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p,\ k_{p+1}) = m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p,\ l_{p+1}) = N$ とすると，

$$2^{k_{p+1}}(2^{k_1+\cdots+k_p} - 2^{k_2+\cdots+k_p} - \cdots - 2^{k_p} - 1) = 2^{l_{p+1}}(2^{l_1+\cdots+l_p} - 2^{l_2+\cdots+l_p} - \cdots - 2^{l_p} - 1)$$

$$2^{k_{p+1}}\{m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p) - 1\} = 2^{l_{p+1}}\{m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p) - 1\} = N$$

$k_1 \geqq 1$, ……, $k_p \geqq 1$, $l_1 \geqq 1$, ……, $l_p \geqq 1$ より, $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)-1$, $m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)-1$ はともに奇数となる。

すると, N が奇数では $k_{p+1}=l_{p+1}=0$ となり, N が偶数では $k_{p+1}=l_{p+1} \geqq 1$ となることより, N の偶奇にかかわらず, $m(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_p)=m(l_1,\ l_2,\ \cdots,\ l_p)$

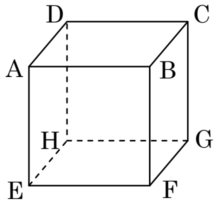
仮定より $k_j=l_j\ (j=1,\ 2,\ \cdots,\ p)$ なので, $n=p+1$ のときも題意が成立する。

(i)(ii)より, $n \geqq 2$ において, 題意が成立する。

コメント

(1)によって(2)(3)の方針が決まります。おもしろい問題です。

問　題



右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は，今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると，時刻 $n+1$ では，それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D，E，G のいずれかにいる。自然数 $n \geqq 1$ に対して，(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 B，D，E のいずれかにいる確率を p_n，(ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 C，F，H のいずれかにいる確率を q_n，(iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず，かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n，とする。このとき，次の問いに答えよ。

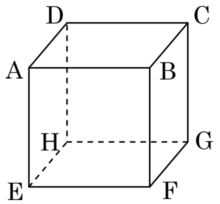
(1)　p_2，q_2，r_2 と p_3，q_3，r_3 を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，p_n，q_n，r_n を求めよ。

(3)　自然数 $m \geqq 1$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

(4)　自然数 $m \geqq 2$ に対して，点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に戻るのがちょうど 2 回目となる確率を t_m とする。このとき，$t_m < s_m$ となる m をすべて求めよ。　[2017]

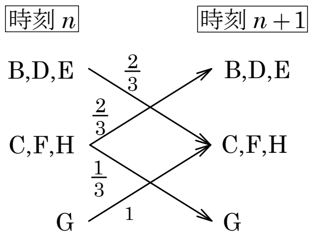
解答例



(1)　時刻 0 で A にいた点 P が，時刻 n において，A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n，A に戻らず C，F，H のいずれかにいる確率 q_n，A に戻らず G にいる確率 r_n について，

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \cdots\cdots\cdots ①,\quad q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + r_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \cdots\cdots\cdots ③$$



ここで，$p_1 = 1$，$q_1 = r_1 = 0$ なので，①②③より，

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = 0,\quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \frac{2}{3},\quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = 0$$

$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \frac{4}{9},\quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = 0,\quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \frac{2}{9}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，①より $p_n = \frac{2}{3}q_{n-1}$，③より $r_n = \frac{1}{3}q_{n-1}$

②に代入すると，$q_{n+1} = \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}q_{n-1} + \frac{1}{3}q_{n-1}$，$q_{n+1} = \frac{7}{9}q_{n-1} \cdots\cdots\cdots ④$

さて，④に $n = 2k$ を代入すると $q_{2k+1} = \frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり，$q_{2k-1} = q_1\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1} = 0$

$$p_{2k} = \frac{2}{3}q_{2k-1} = 0,\quad r_{2k} = \frac{1}{3}q_{2k-1} = 0$$

④に $n=2k+1$ を代入すると $q_{2k+2}=\dfrac{7}{9}q_{2k}$ となり，$q_{2k}=q_2\left(\dfrac{7}{9}\right)^{k-1}=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1}=\frac{2}{3}q_{2k}=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1},\quad r_{2k+1}=\frac{1}{3}q_{2k}=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より，$q_n=0\,(n$ が奇数$)$，$q_n=\dfrac{2}{3}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}(n$ が偶数$)$

また，$n=2k+1$ のとき，$k-1=\dfrac{n-3}{2}$ から，

$$p_n=\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\quad p_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

$$r_n=\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}}\ (n\text{ が 3 以上の奇数}),\quad r_n=0\ (n\text{ が偶数})$$

(3)　時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は，$m\geqq 2$ のとき，

$$s_m=\frac{1}{3}p_{2m-1}=\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}=\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお，$m=1$ のときは，$s_1=\dfrac{1}{3}p_1=\dfrac{1}{3}$ である。

(4)　(3)より，m の値を $m=2$，$m=3$，$m\geqq 4$ と場合分けをする。

(i)　$m=2$ のとき　$s_2=\dfrac{4}{27}$，$t_2={s_1}^2=\dfrac{1}{9}$ となり，$t_2<s_2$ である。

(ii)　$m=3$ のとき　$s_3=\dfrac{4}{27}\cdot\dfrac{7}{9}=\dfrac{28}{243}$，$t_3=s_1s_2+s_2s_1=2\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{4}{27}=\dfrac{8}{81}$

これより，$t_3<s_3$ である。

(iii)　$m\geqq 4$ のとき　$s_m=\dfrac{4}{27}\left(\dfrac{7}{9}\right)^{m-2}$，$t_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1}s_ks_{m-k}=s_1s_{m-1}+s_{m-1}s_1+\sum_{k=2}^{m-2}s_ks_{m-k}$

$$t_m=2\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\sum_{k=2}^{m-2}\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{k-2}\cdot\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-k-2}$$

$$=\frac{4}{27}\left\{\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-3}+\frac{4}{27}\sum_{k=2}^{m-2}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}\right\}=\frac{4}{27}\left\{\frac{2}{3}\cdot\frac{7}{9}+\frac{4}{27}(m-3)\right\}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$$=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$$t_m-s_m=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}-\frac{4}{27}\left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

$$=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m+\frac{2}{27}-\frac{49}{81}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}=\frac{4}{27}\left(\frac{4}{27}m-\frac{43}{81}\right)\left(\frac{7}{9}\right)^{m-4}$$

$m\geqq 4$ のとき，$\dfrac{4}{27}m-\dfrac{43}{81}\geqq\dfrac{16}{27}-\dfrac{43}{81}>0$ となり，$t_m>s_m$ である。

(i)～(iii)より，$t_m<s_m$ となる m は，$m=2,\ 3$ である。

コメント

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが，特別な形でしたので，n を偶奇に分けて記しています。なお，理系単独の(4)については，詰めの数値計算が面倒です。

問　題

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　袋 A に赤玉 2 個，袋 B に白玉 2 個の状態から始めて，与えられた操作を 1 回行った後，袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について，その確率 $P_1(k)$ は，

(i)　$k=0$ のとき　B→A に白，次に A→B に白の場合より，$P_1(0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii)　$k=1$ のとき　B→A に白，次に A→B に赤の場合より，$P_1(1)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(iii) $k=2$ のとき　この場合は起こりえないので，$P_1(2)=0$

(2)　袋 B の赤玉の個数が k 個である場合について，

(i)　与えられた操作を n 回行った後，$k=0$ のときに操作をもう 1 回行うとき

(1)から，$k=0$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(ii)　与えられた操作を n 回行った後，$k=1$ のときに操作をもう 1 回行うとき

$k=0$ となるのは, B→A に赤，次に A→B に白の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$k=1$ となるのは, B→A に赤，次に A→B に赤の場合，もしくは B→A に白，次に A→B に白の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$k=2$ となるのは, B→A に白，次に A→B に赤の場合より，その確率は $\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(iii) 与えられた操作を n 回行った後，$k=2$ のときに操作をもう 1 回行うとき

(i)と同様に考えて，$k=2$ となる確率は $\frac{1}{3}$，$k=1$ となる確率は $\frac{2}{3}$

(i)～(iii)より，$P_n(k)$ と $P_{n+1}(k)$ の関係は，$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$ に留意すると，

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\ \cdots\cdots\cdots ①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$P_n(1)=\frac{2}{3}$ $(n\geqq 2)$ となり，(1)から $P_1(1)=\frac{2}{3}$ なので，$P_n(1)=\frac{2}{3}$ $(n\geqq 1)$

①に代入すると，$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$となり，$P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{P_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$P_n(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$となり，

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

コメント

確率と漸化式について，よく見かける頻出問題です。

問　題

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

$$\begin{cases} \text{石が点 1 にあるならば, 確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点} k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{にあるならば, 確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k-1 \text{に, 確率} \dfrac{1}{2} \text{で点} k+1 \text{に移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば, 確率 1 で点 4 に移動する} \end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め, この試行を繰り返す。また, 石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき, 次の問いに答えよ。

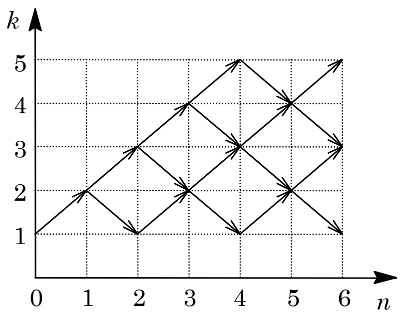
(1) 試行を 6 回繰り返した後に, 石が点 k ($k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$)にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回($n \geqq 1$)繰り返した後に, ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。 [2015]

解答例

(1) 与えられた試行により, 石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とすると, 初めは点 1 にあることより, 右図より計算すると,



$P_1(1)=0$, $P_1(2)=1$, $P_1(3)=0$,
$P_1(4)=0$, $P_1(5)=0$
$P_2(1)=\dfrac{1}{2}$, $P_2(2)=0$, $P_2(3)=\dfrac{1}{2}$,
$P_2(4)=0$, $P_2(5)=0$
$P_3(1)=0$, $P_3(2)=\dfrac{3}{4}$, $P_3(3)=0$, $P_3(4)=\dfrac{1}{4}$, $P_3(5)=0$
$P_4(1)=\dfrac{3}{8}$, $P_4(2)=0$, $P_4(3)=\dfrac{1}{2}$, $P_4(4)=0$, $P_4(5)=\dfrac{1}{8}$
$P_5(1)=0$, $P_5(2)=\dfrac{5}{8}$, $P_5(3)=0$, $P_5(4)=\dfrac{3}{8}$, $P_5(5)=0$
$P_6(1)=\dfrac{5}{16}$, $P_6(2)=0$, $P_6(3)=\dfrac{1}{2}$, $P_6(4)=0$, $P_6(5)=\dfrac{3}{16}$

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点にすべてに印がついているのは,

(i) 4 回目に 5 のとき 5 回目以降は任意なので, その確率は $P_4(5)\cdot 1=\dfrac{1}{8}$ となる。

(ii)　4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 のときだけなので，その確率は $P_4(3)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　まず，試行を n 回繰り返した後に，印が 3 つの点についているとき，点 1 と 2 は必ず印がつくことより，印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると，点 3 に少なくとも 1 回印がつき，点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて，点 2→点 3→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，点 2→点 1→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$ である。これより，点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は，l を自然数として，

(i)　n が奇数 $(n=2l+1)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^l-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

なお，$n=1$ のときも成立している。

(ii)　n が偶数 $(n=2l)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^{l-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

コメント

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。

問　題

3 人でジャンケンをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ$\dfrac{1}{3}$の確率で出すものとする。負けた人は脱落し，残った人で次回のジャンケンを行い(アイコのときは誰も脱落しない)，勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め，ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n，3 人が残っている確率を q_n とおく。

(1)　p_1，q_1 を求めよ。

(2)　p_n，q_n が満たす漸化式を導き，p_n，q_n の一般項を求めよ。

(3)　ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　3 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は$3^3=27$通りあり，これらの場合が同様に確からしい。

さて，2 人勝ち残るのは，勝った人の選び方が${}_3\mathrm{C}_2=3$通りで，その手の出方が 3 通りであるので，確率 p_1 は，$p_1=\dfrac{3\times 3}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。

また，3 人残るのは，3 人とも同じ手を出す 3 通りか，3 人とも異なる手を出す$3!=6$通りのいずれかより，その確率 q_1 は，$q_1=\dfrac{3+6}{27}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　まず，2 人で 1 回ジャンケンをすると，手の出方は$3^2=9$通りあり，これらの場合が同様に確からしい。そこで，2 人残るのは，2 人とも同じ手を出すアイコの 3 通りの場合だけであり，その確率は，$\dfrac{3}{9}=\dfrac{1}{3}$ である。

さて，$n+1$ 回目終了時に 2 人が残っているのは，n 回目終了時に 2 人が残ってアイコのときか，n 回目終了時に 3 人が残って 2 人が勝ち残るときのいずれかより，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$n+1$ 回目終了時に 3 人が残っているのは，n 回目終了時に 3 人が残ってアイコのときより，

$$q_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q_n=q_1\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

①に代入して，$p_{n+1}=\dfrac{1}{3}p_n+\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}$ となり，$3^{n+1}p_{n+1}=3^np_n+1$ と変形すると，

$$3^np_n=3^1p_1+(n-1)=1+n-1=n,\quad p_n=n\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　$n \geqq 2$ のとき，ちょうど n 回目で 1 人勝ち残りが決まるのは，次の場合である。

(i)　$n-1$ 回目終了時に 2 人が残って n 回目にアイコでないとき

$$p_{n-1}\times\left(1-\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(ii)　$n-1$ 回目終了時に 3 人が残って n 回目に 1 人勝ち残るとき

$$q_{n-1}\times(1-p_1-q_1)=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(i)(ii)より，求める確率は，$2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}+\left(\frac{1}{3}\right)^{n}=(2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$

なお，この式は $n=1$ のときも成立する。

コメント

有名問題ですが，漸化式を立てるメリットがほとんど感じられないものです。

問　題

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし，異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから，1 枚のカードを無作為に取り出して，書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し，取り出したカードに書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，j と k は正の整数で，$j+k \leqq n$ を満たすとする。また，s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

(1)　$X \geqq j$ かつ $Y \leqq j+k$ となる確率を求めよ。

(2)　$X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。

(3)　$Y-X=s$ となる確率を $P(s)$ とする。$P(s)$ を求めよ。

(4)　n が偶数のとき，$P(s)$ を最大にする s を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　n 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき，n^3 通りの場合が同様に確からしい。

さて，書かれた整数の最小値を X，最大値を Y とするとき，$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$ であるのは，j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより，その確率 $P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

(2)　「$X=j$ かつ $Y=j+k$」となるのは，「$j \leqq X$ かつ $Y \leqq j+k$」の場合から「$j+1 \leqq X$ または $Y \leqq j+k-1$」の場合を除いたものになる。

ここで，(1)と同様に考えると，$P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) = \dfrac{k^3}{n^3}$

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{k^3}{n^3},\quad P(j+1 \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k-1) = \frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると，求める確率 $P(j=X \text{かつ} Y=j+k)$ は，

$$P(j \leqq X \text{かつ} Y \leqq j+k) - P(j+1 \leqq X \text{または} Y \leqq j+k-1)$$

$$= \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{(k+1)^3}{n^3} - \frac{2k^3}{n^3} + \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{6k}{n^3}$$

(3)　(2)より，$X=j$ かつ $Y=j+s$　$(1 \leqq j \leqq n-s)$ となる確率は，それぞれ $\dfrac{6s}{n^3}$ であり，

$Y-X=s$ となる確率 $P(s)$ は，

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = -\frac{6}{n^3}(s^2-ns)$$

(4)　(3)より，$P(s)=-\dfrac{6}{n^3}\left(s-\dfrac{n}{2}\right)^2+\dfrac{3}{2n}$

すると，n は偶数より，$s=\dfrac{n}{2}$ のとき $P(s)$ は最大となる。

コメント

最大，最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

問　題

はじめに, A が赤玉を 1 個, B が白玉を 1 個, C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$の硬貨を投げ, 表が出れば A と B の玉を交換し, 裏が出れば B と C の玉を交換する, という操作を考える。この操作を n 回($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$)くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれa_n, b_n, c_nとおく。

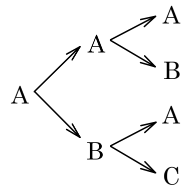
(1)　a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2を求めよ。

(2)　a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}をa_n, b_n, c_nで表せ。

(3)　a_n, b_n, c_nを求めよ。　[2010]

解答例

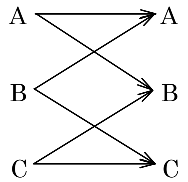
(1)　はじめに, A が赤玉を持っていて, 題意の操作をしたところ, 赤玉は右図のように移動する。その確率は, いずれも$\frac{1}{2}$なので,



$$a_1=b_1=\frac{1}{2},\ c_1=0$$

$$a_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2},\ b_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4},\ c_2=\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$$

(2)　n 回目の操作後から, $n+1$回目の操作後への赤玉の移動は右図のようになり, 移動の確率は, いずれも$\frac{1}{2}$から,



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n\cdots\cdots\cdots③$$

(3)　$a_n+b_n+c_n=1$なので, ②から, $b_{n+1}=\frac{1}{2}(1-b_n)$となり,

$$b_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(b_n-\frac{1}{3}\right)$$

よって, $b_n-\frac{1}{3}=\left(b_0-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$より, $b_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots④$

また, ①③より, $a_{n+1}-c_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n-c_n)$となり,

$$a_n-c_n=(a_0-c_0)\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より, $a_n+c_n=1-b_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤⑥より, $a_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$, $c_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$

コメント

確率と連立漸化式についての有名問題で, ポイントは$a_n+b_n+c_n=1$です。

問　題

さいころを投げると，1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ 投げるとき，出る目の積の一の位が j $(j=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ 9)$ となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1)　$p_2(0)$，$p_2(1)$，$p_2(2)$ を求めよ。

(2)　$p_{n+1}(1)$ を，$p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3)　$p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

(4)　$p_n(5)$ を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　さいころを 2 回投げるとき，出る目と出る目の積の一の位の対応をまとめると，右表のようになる。これより，$p_2(0)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$，$p_2(1)=\dfrac{1}{36}$，$p_2(2)=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$ である。

2回＼1回	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

(2)　さいころを $n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 1 となるのは，次の場合である。

(i)　n 回までの積の一の位が 1 で，$n+1$ 回目が 1 のとき

(ii)　n 回までの積の一の位が 7 で，$n+1$ 回目が 3 のとき

(i)(ii)より，$p_{n+1}(1)=\dfrac{1}{6}p_n(1)+\dfrac{1}{6}p_n(7)$ ………①

(3)　$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 3 となるのは，n 回までの積の一の位が 1 で $n+1$ 回目が 3，n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(3)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 7 となるのは，n 回までの積の一の位が 7 で $n+1$ 回目が 1，n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 3 のときであり，

$$p_{n+1}(7)=\frac{1}{6}p_n(7)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots ③$$

$n+1$ 回投げるとき，出る目の積の一の位が 9 となるのは，n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 3，n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 1 のときであり，

$$p_{n+1}(9)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(9)\ \cdots\cdots\cdots ④$$

①＋②＋③＋④より，

$$p_{n+1}(1)+p_{n+1}(3)+p_{n+1}(7)+p_{n+1}(9)=\frac{1}{3}\left\{p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)\right\}$$

ここで，$p_1(1) = p_1(3) = \dfrac{1}{6}$，$p_1(7) = p_1(9) = 0$ より，

$$p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(4)　n 回投げるとき，出る目がすべて奇数となる確率は$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ より, (3)から,

$$p_n(5) = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \{\, p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9)\,\} = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

コメント

(3)は(2)と同様に考えた解法です。

問　題

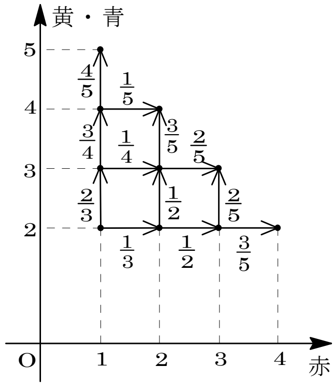
袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1)　連比 $p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)$ を求めよ。

(2)　一般の N に対し $p_N(m)$ $(1\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　赤玉，黄玉または青玉の個数を，(赤，黄・青)の順に記し，座標平面上の格子点を対応させると，右図のようになり，



$$p_3(1)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{4}{5}=\frac{2}{5}$$

$$p_3(2)=\frac{2}{3}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{5}+\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{3}{5}=\frac{3}{10}$$

$$p_3(3)=\left(\frac{2}{3}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\right)\times\frac{2}{5}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{2}{5}=\frac{1}{5}$$

$$p_3(4)=\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times\frac{3}{5}=\frac{1}{10}$$

したがって，

$$p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)=4:3:2:1$$

(2)　$p_N(1):p_N(2):\cdots:p_N(m):\cdots:p_N(N+1)=N+1:N:\cdots:N-m+2:\cdots:1$

と，(1)より推測できるので，$1\leqq m\leqq N+1$ のとき，

$$p_N(m)=\frac{N-m+2}{1+2+\cdots+(N+1)}=\frac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$$

以下，この推測の正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$N=1$ のとき　$p_1(1)=\frac{2}{3}$，$p_1(2)=\frac{1}{3}$ より，成立している。

(ii)　$N=k$ のとき　$p_k(m)=\dfrac{2(k-m+2)}{(k+1)(k+2)}$　$(1\leqq m\leqq k+1)$ と仮定する。

$N=k+1$ のとき $m=1$ となるのは，(赤，黄・青)$=(1,\ k+2)$ で黄または青を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(1)=\frac{k+2}{k+3}p_k(1)=\frac{k+2}{k+3}\cdot\frac{2(k+1)}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k+2)}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{2\{(k+1)-1+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$ のとき $m=l$ $(2\leqq l\leqq k+1)$ となるのは，(赤，黄・青)$=(l,\ k+3-l)$ で黄または青を取り出すか，(赤，黄・青)$=(l-1,\ k+4-l)$ で赤を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(l)=\frac{k+3-l}{k+3}p_k(l)+\frac{l-1}{k+3}p_k(l-1)$$
$$=\frac{k+3-l}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+2)}{(k+1)(k+2)}+\frac{l-1}{k+3}\cdot\frac{2(k-l+3)}{(k+1)(k+2)}$$
$$=\frac{2(k-l+3)}{k+3}\cdot\frac{k+1}{(k+1)(k+2)}=\frac{2(k-l+3)}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{2\{(k+1)-l+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

$N=k+1$ のとき $m=k+2$ となるのは，(赤，黄・青)$=(k+1,\ 2)$ で赤を取り出す場合より，

$$p_{k+1}(k+2)=\frac{k+1}{k+3}p_k(k+1)=\frac{k+1}{k+3}\cdot\frac{2}{(k+1)(k+2)}=\frac{2}{(k+2)(k+3)}$$
$$=\frac{2\{(k+1)-(k+2)+2\}}{(k+2)(k+3)}$$

以上より，$p_{k+1}(m)=\dfrac{2\{(k+1)-m+2\}}{(k+2)(k+3)}$　$(1\leqq m\leqq k+2)$ である。

(i)(ii)より，$p_N(m)=\dfrac{2(N-m+2)}{(N+1)(N+2)}$　$(1\leqq m\leqq N+1)$

コメント

状態の推移を座標平面上の点を対応させて考え，(2)の証明も図を見ながら行いました。しかし，それでも注意力がかなり要求される難問です。

問　題

正六面体の各面に 1 つずつ，サイコロのように，1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて，向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて，次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし，これらの 4 面の数字がa_1，a_2，a_3，a_4のとき，それぞれの面が新しい底面となる確率の比は$a_1 : a_2 : a_3 : a_4$とする。この試行を n 回繰り返した後，底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ $(n \geqq 1)$ で表す。

(1)　$n \geqq 1$のとき，$q_n = p_n(1) + p_n(6)$，$r_n = p_n(2) + p_n(5)$，$s_n = p_n(3) + p_n(4)$を求めよ。

(2)　$p_n(m)$ $(n \geqq 1,\ m = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6)$を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　まず，試行後の新しい底面の数字と，その数値になる確率を表にまとめる。

(i)　底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確　率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii)　底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii)　底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確　率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて，底面の数字が 1 であるとき，試行を 1 回行うと，新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので，$q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$ となり，また上表より，

$$r_1 = p_1(2) + p_1(5) = \frac{2}{14} + \frac{5}{14} = \frac{1}{2},\quad s_1 = p_1(3) + p_1(4) = \frac{3}{14} + \frac{4}{14} = \frac{1}{2}$$

ここで，n 回の試行の後，底面の数字が 1 または 6 となるのは，$n-1$回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときであり，さらに底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも，n 回の試行後，底面の数字が 1 または 6 となる確率は，$\frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$なので，

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - q_{n-1}),\quad q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_{n-1} - \frac{1}{3}\right)\quad (n \geqq 2)$$

$q_1 = 0$ より，$q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$となり，

$$q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{1}{3}\Big\{1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big\}\cdots\cdots\cdots①$$

①に$n=1$をあてはめると$q_1=0$となり，$n=1$のときも満たしている。

次に，n 回の試行後，底面の数字が 2 または 5 となる確率は，$n-1$回の試行後，底面の数字が 1 または 6 のときも，3 または 4 のときも，ともに$\frac{2}{14}+\frac{5}{14}=\frac{1}{2}$なので，

$$r_n=\frac{1}{2}(1-r_{n-1}),\ \ r_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\Big(r_{n-1}-\frac{1}{3}\Big)\ \ (n\geqq 2)$$

$r_1=\frac{1}{2}$より，$r_n-\frac{1}{3}=\Big(r_1-\frac{1}{3}\Big)\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}$となり，

$$r_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{1}{3}\Big\{1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n}\Big\}\cdots\cdots\cdots②$$

②に$n=1$をあてはめると$r_1=\frac{1}{2}$となり，$n=1$のときも満たしている。

さらに，n 回の試行後，底面の数字が 3 または 4 となる確率は，$n-1$回の試行後，底面の数字が 1 または 6 のときも, 2 または 5 のときも，$\frac{3}{14}+\frac{5}{14}=\frac{1}{2}$なので，

$$s_n=\frac{1}{2}(1-s_{n-1}),\ \ s_n-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\Big(s_{n-1}-\frac{1}{3}\Big)\ \ (n\geqq 2)$$

$s_1=\frac{1}{2}$より，$s_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}=\frac{1}{3}\Big\{1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n}\Big\}\cdots\cdots\cdots③$

③に$n=1$をあてはめると$s_1=\frac{1}{2}$となり，$n=1$のときも満たしている。

(2) n 回の試行の後，底面の数字が 1 となるのは，$n-1$回の試行後，底面の数字が 1 または 6 でないときであり，さらに底面の数字が 2 または 5 のときも，3 または 4 のときも, n 回の試行後，底面の数字が 1 になる確率は$\frac{1}{14}$なので，

$$p_n(1)=\frac{1}{14}(1-q_{n-1})\ \ (n\geqq 2)$$

すると, (1)より，$p_n(1)=\frac{1}{14}\cdot 2q_n=\frac{1}{21}\Big\{1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big\}\cdots\cdots\cdots④$

④に$n=1$をあてはめると$p_1(1)=0$となり，$n=1$のときも満たしている。

$$p_n(6)=q_n-p_n(1)=\frac{2}{7}\Big\{1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n-1}\Big\}$$

次に，n 回の試行後，底面の数字が 2 となる確率は，底面の数字が 1 または 6 のときも, 3 または 4 のときも，$\frac{2}{14}=\frac{1}{7}$なので，

$$p_n(2)=\frac{1}{7}(1-r_{n-1})\ \ (n\geqq 2)$$

すると, (1)より，$p_n(2)=\frac{1}{7}\cdot 2r_n=\frac{2}{21}\Big\{1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n}\Big\}\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤に$n=1$をあてはめると$p_1(2)=\frac{1}{7}$となり，$n=1$のときも満たしている。

$$p_n(5)=r_n-p_n(2)=\frac{5}{21}\Big\{1-\Big(-\frac{1}{2}\Big)^{n}\Big\}$$

さらに, n 回の試行後, 底面の数字が 3 となる確率は, 底面の数字が 1 または 6 のときも, 2 または 5 のときも, $\dfrac{3}{14}$ なので,

$$p_n(3)=\frac{3}{14}(1-s_{n-1})\quad (n\geqq 2)$$

すると, (1)より, $p_n(3)=\dfrac{3}{14}\cdot 2r_n=\dfrac{1}{7}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n\right\}$………⑥

⑥に $n=1$ をあてはめると $p_1(3)=\dfrac{3}{14}$ となり, $n=1$ のときも満たしている。

$$p_n(4)=s_n-p_n(3)=\frac{4}{21}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}$$

コメント

漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出で, 名大では 1995 年に類題が出ています。

問　題

整数に値をとる変数 x の値が，次の規則で変化する。

(i)　ある時刻で $x=m$ $(m\neq 0)$ のとき，1 秒後に $x=m+1$，$x=m-1$ である確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である。

(ii)　ある時刻で $x=0$ のとき，1 秒後に $x=1$ である確率は q，$x=-1$ である確率は $1-q$ である $(0\leqq q\leqq 1)$。$x=0$ から始めて，n 秒後 $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x=m$ である確率を $p_n(m)$ とする。

(1)　$p_3(1)+p_3(-1)$ を求めよ。

(2)　すべての自然数 n に対して次が成り立つことを示せ。
　どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q によらない。

(3)　$p_n(0)$ を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　3 秒後に，$x=1$ であるのは，$0\to1\to2\to1$，$0\to1\to0\to1$，$0\to-1\to0\to1$ のいずれかの場合より，

$$p_3(1)=q\left(\frac{1}{2}\right)^2+q\cdot\frac{1}{2}q+(1-q)\cdot\frac{1}{2}q=\frac{3}{4}q$$

$x=-1$ であるのは，$0\to1\to0\to-1$，$0\to-1\to0\to-1$，$0\to-1\to-2\to-1$ のいずれかの場合より，

$$p_3(-1)=q\cdot\frac{1}{2}(1-q)+(1-q)\cdot\frac{1}{2}(1-q)+(1-q)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}(1-q)$$

よって，$p_3(1)+p_3(-1)=\dfrac{3}{4}$

(2)　すべての自然数 n に対して，$p_n(m)+p_n(-m)$ は q にはよらないことを数学的帰納法を用いて示す。なお，$m\geqq 0$ としても一般性を失うことはない。

(i)　$n=1$ のとき

$m\neq 1$ のとき $p_1(m)+p_1(-m)=0$，$m=1$ のとき $p_1(1)+p_1(-1)=1$ となり，ともに q にはよらない。

(ii)　$n=k$ のとき

$p_k(m)+p_k(-m)$ は q にはよらないと仮定する。

$m\neq 1$ のとき，$p_{k+1}(m)=\dfrac{1}{2}p_k(m-1)+\dfrac{1}{2}p_k(m+1)$

$$p_{k+1}(-m)=\frac{1}{2}p_k(-m-1)+\frac{1}{2}p_k(-m+1)$$

よって，$p_{k+1}(m)+p_{k+1}(-m)$ は，

$$\frac{1}{2}\{p_k(m-1)+p_k(-m+1)\}+\frac{1}{2}\{p_k(m+1)+p_k(-m-1)\}$$

すなわち，この値は q にはよらない。

$m=1$ のとき，$p_{k+1}(1)=q\cdot p_k(0)+\frac{1}{2}p_k(2)$

$$p_{k+1}(-1)=\frac{1}{2}p_k(-2)+(1-q)p_k(0)$$

すると，$p_{k+1}(1)+p_{k+1}(-1)=p_k(0)+\frac{1}{2}\{p_k(2)+p_k(-2)\}$

$$=\frac{1}{2}\{p_k(0)+p_k(0)\}+\frac{1}{2}\{p_k(2)+p_k(-2)\}$$

よって，この値は q にはよらない。

(i)(ii)より，$p_n(m)+p_n(-m)$ は q にはよらない。

(3)　条件から，$p_n(0)=\frac{1}{2}\{p_{n-1}(1)+p_{n-1}(-1)\}$

すると，(2)より $p_n(0)$ は q にはよらないので，$q=\frac{1}{2}$ として計算しても構わない。

以下, n を偶奇に場合分けをして，$p_n(0)$ を求める。

(i)　n が偶数のとき

$x=0$ となるのは, 1 だけ増加するのが $\frac{n}{2}$ 回, 1 だけ減少するのが $\frac{n}{2}$ 回より,

$$p_n(0)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}\left(1-\frac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii)　n が奇数のとき

$x=0$ となる場合はないので，$p_n(0)=0$

コメント

(2)から(3)への連結がポイントです。(2)の結論から q は任意の値を設定してよいので，当然，$q=\frac{1}{2}$ とするわけです。

問　題

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし, 8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し, 8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば, 7 の位置で 3 が出た場合, 8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお, サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて, サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

(1)　p_2 を求めよ。

(2)　p_3 を求めよ。

(3)　4 以上のすべての n に対して p_n を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　サイコロを 2 回投げて 8 に進むとき, 1 回目と 2 回目に出る数の組合せは,

$(2,\ 6)$, $(3,\ 5)$, $(4,\ 4)$, $(5,\ 3)$, $(6,\ 2)$

よって, $p_2=\dfrac{5}{6^2}=\dfrac{5}{36}$

(2)　サイコロを 1 回投げて 8 に進む場合はないので, $p_1=0$ である。

また, サイコロを 2 回投げてゴールに移動していないとき, その位置を k とすると $2\leqq k\leqq 7$ なので, 3 回目に $8-k$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-k$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_3=(1-p_2)\times\frac{1}{6}=\frac{31}{36}\times\frac{1}{6}=\frac{31}{216}$$

(3)　(2)と同様に考えて, サイコロを n 回 $(n\geqq 2)$ 投げてゴールに移動していないとき, その位置を l とすると $2\leqq l\leqq 7$ なので, $n+1$ 回目に $8-l$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-l$ の出る確率が $\dfrac{1}{6}$ より,

$$p_{n+1}=(1-p_2-\cdots-p_{n-1}-p_n)\times\frac{1}{6}$$

これより, $1-6p_{n+1}=p_2+\cdots+p_{n-1}+p_n\quad(n\geqq 2)$ ………①

$1-6p_n=p_2+\cdots+p_{n-1}\quad(n\geqq 3)$ ………②

①－②から, $p_n=-6p_{n+1}+6p_n$, $p_{n+1}=\dfrac{5}{6}p_n\quad(n\geqq 3)$

よって, $p_n=p_3\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}=\dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$

コメント

サイコロを 2 回以上投げたとき, 0 や 1 に移動している可能性はありません。つまり, あと 1 回投げてゴールに進むことができるわけで, この状況の把握がポイント。

問　題

サイコロを n 回投げて，3 の倍数が k 回出る確率を $P_n(k)$ とする。各 n について，$P_n(k)$ を最大にする k を $N(n)$ とする。ただし，このような k が複数あるときは，最も大きいものを $N(n)$ とする。

(1) $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)}$ を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ のとき，$\dfrac{N(n)}{n}$ を最小にする n と，そのときの $\dfrac{N(n)}{n}$ の値を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}$ を求めよ。　[2003]

解答例

(1) サイコロを 1 回投げて 3 の倍数が出る確率は $\dfrac{1}{3}$ なので，n 回投げて 3 の倍数が k 回出る確率 $P_n(k)$ は，

$$P_n(k) = {}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{3}\right)^k\left(\frac{2}{3}\right)^{n-k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{2^{n-k}}{3^n}$$

よって，$\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot\dfrac{2^{n-k-1}}{3^n}\cdot\dfrac{k!(n-k)!}{n!}\cdot\dfrac{3^n}{2^{n-k}} = \dfrac{n-k}{2(k+1)}$

(2) $\dfrac{P_n(k+1)}{P_n(k)} = \dfrac{n-k}{2(k+1)} > 1$ とすると，$n-k > 2k+2$ より，$k < \dfrac{n-2}{3}$

これより，$\dfrac{n-k}{2(k+1)} = 1$ とすると $k = \dfrac{n-2}{3}$，$\dfrac{n-k}{2(k+1)} < 1$ とすると $k > \dfrac{n-2}{3}$

(i)　$n-2$ が 3 の倍数のとき

m を 0 以上の整数として，$n-2 = 3m$ とすると，$k < m$ のとき $P_n(k) < P_n(k+1)$，$k = m$ のとき $P_n(k) = P_n(k+1)$，$k > m$ のとき $P_n(k) > P_n(k+1)$ となる。

よって，$k = m$，$m+1$ のとき $P_n(k)$ は最大となるので，

$$N(n) = m+1 = \frac{n-2}{3}+1 = \frac{n+1}{3},\quad \frac{N(n)}{n} = \frac{1}{3}+\frac{1}{3n} > \frac{1}{3}$$

(ii)　$n-2$ が 3 の倍数でないとき

m を 0 以上の整数として，$n-2 = 3m+1$ または $n-2 = 3m+2$ とすると，$k \leqq m$ のとき $P_n(k) < P_n(k+1)$，$k > m$ のとき $P_n(k) > P_n(k+1)$ となる。

よって，いずれの場合も，$k = m+1$ のとき $P_n(k)$ は最大となるので，

$n-2 = 3m+1$ のとき，$N(n) = m+1 = \dfrac{n-3}{3}+1 = \dfrac{n}{3}$，$\dfrac{N(n)}{n} = \dfrac{1}{3}$

$n-2 = 3m+2$ のとき，$N(n) = m+1 = \dfrac{n-4}{3}+1 = \dfrac{n-1}{3}$，$\dfrac{N(n)}{n} = \dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3n} < \dfrac{1}{3}$

(i)(ii)より，$\dfrac{N(n)}{n}$ が最小になる場合は，$n-2=3m+2$ の場合で n が最小のとき，すなわち $n=4$ のときである。このとき，$\dfrac{N(n)}{n}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{12}=\dfrac{1}{4}$ となる。

(3)　(2)より，$n-2=3m$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{3n}\right)=\frac{1}{3}$，$n-2=3m+1$ のとき $\dfrac{N(n)}{n}=\dfrac{1}{3}$，$n-2=3m+2$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{3n}\right)=\frac{1}{3}$ である。

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{N(n)}{n}=\frac{1}{3}$ である。

コメント

確率の最大値についての頻出問題ですが, (2)の場合分けがちょっと面倒です。

問　題

数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える。毎回硬貨を投げて表が出れば$+1$，裏が出れば-1，それぞれ駒を進めるとする。ただし，点-1または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする。

(1) k 回目に硬貨を投げた後，駒が点 1 にある確率を求めよ。

(2) k 回目に硬貨を投げた後，駒がある点 X_k の期待値 $E[\,X_k\,]$ を求めよ。　[2001]

解答例

(1) k 回目に硬貨を投げた後，駒が点-1，0，1，2，3にある確率を，それぞれ a_k，b_k，c_k，d_k，e_k とおく。

$$a_{k+1}=a_k+\frac{1}{2}b_k\ \cdots\cdots\cdots①,\ \ b_{k+1}=\frac{1}{2}c_k\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ c_{k+1}=\frac{1}{2}b_k+\frac{1}{2}d_k\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$d_{k+1}=\frac{1}{2}c_k\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ e_{k+1}=\frac{1}{2}d_k+e_k\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

②③④より，$c_{k+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}c_{k-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}c_{k-1}=\frac{1}{2}c_{k-1}$

k が偶数のとき，$c_0=0$ なので $c_k=0$

k が奇数のとき，$k=2n-1$ とおくと，$c_1=\frac{1}{2}$，$c_{2n+1}=\frac{1}{2}c_{2n-1}$ より，

$$c_{2n-1}=c_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n,\ \ c_k=\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}}$$

(2) k が偶数$(k=2n)$のとき，(1)より $c_{2n}=0$，②④より $b_{2n+1}=d_{2n+1}=0$ となる。

k が奇数$(k=2n-1)$のとき，(1)より $c_{2n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n$，②④より $b_{2n}=d_{2n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$ となる。

すると，①より $a_{2n+1}=a_{2n}+\frac{1}{2}b_{2n}=a_{2n}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\ \cdots\cdots\cdots⑥$

$$a_{2n}=a_{2n-1}+\frac{1}{2}b_{2n-1}=a_{2n-1}\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥⑦より，$a_{2n+1}=a_{2n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$

$a_1=\frac{1}{2}$ なので，$n\geqq2$ において，

$$a_{2n-1}=\frac{1}{2}+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}=\frac{1}{2}+\frac{\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}}{1-\frac{1}{2}}=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

$n=1$をあてはめると，$a_1=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$ となり成立する。

また⑦より，$a_{2n}=\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

同様にして，⑤より，$e_{2n+1}=e_{2n-1}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}$，$e_1=0$ なので，

$n\geqq 2$ において，$e_{2n-1}=0+\sum_{i=1}^{n-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{i+2}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$　（$n=1$ のときも成立）

さらに，$e_{2n}=e_{2n-1}=\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

すると，k が偶数$(k=2n)$のとき，右表のようになり，

X_{2n}	-1	0	1	2	3
$P(X_{2n})$	$\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	$\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$E[X_{2n}]=-\left\{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}+2\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}+3\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=0$$

また，k が奇数$(k=2n-1)$のとき，右表のようになり，

X_{2n-1}	-1	0	1	2	3
$P(X_{2n-1})$	$\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$	0	$\left(\frac{1}{2}\right)^{n}$	0	$\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$

$$E[X_{2n-1}]=-\left\{\frac{3}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n}+3\left\{\frac{1}{4}-\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\right\}=0$$

以上より，k の偶奇にかかわらず，$E[X_k]=0$ となる。

コメント

ランダムウォークを題材にした頻出問題です。漸化式を立てて，ていねいに解いてみました。

問　題

図のように，平面上に点A_0，A_1，A_2，……およびB_0，B_1，B_2，……が並んでいる。点PはA$_0$から出発し，次の規則に従いこれらの点の上を移動する。

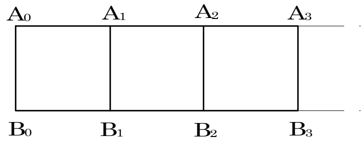
PがA$_n$にいるときには1秒後にA$_{n+1}$またはB$_n$に，一方B$_n$にいるときにはB$_{n+1}$またはA$_n$に移動する。ただし，前にいた点には戻らない。また, Pが移動しうる点が複数あるときには, それぞれの点へ等確率で移動する。

PがA$_n$へ到る行き方がa_n通り，B$_n$へ到る行き方がb_n通りあるとする。

(1)　a_3，b_3を求めよ。

(2)　a_n，b_nを求めよ。

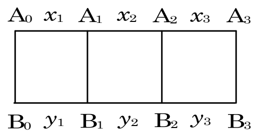
(3)　一方, 点QはA$_8$からPと同時に出発し，1秒ごとに順次$A_8 \to A_7 \to A_6 \to \cdots\cdots \to A_0$と移動し，その後はA$_0$にとどまる。PとQが出会う確率を求めよ。



[2000]

解答例

(1)　$1 \leqq i \leqq 3$として，右に移動する$A_{i-1}A_i$のルートをx_i，$B_{i-1}B_i$のルートをy_iとする。また，A_0B_0，A_1B_1，A_2B_2，A_3B_3のルートは, 右に移動するルートに対応して1通りずつ決まる。



すると，A$_0$からA$_3$に到るルートの組合せは,

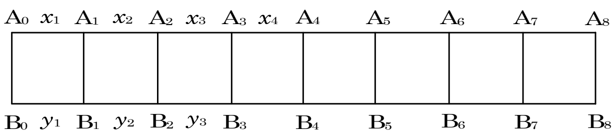
$(x_1,\ x_2,\ x_3)$，$(x_1,\ x_2,\ y_3)$，$(x_1,\ y_2,\ x_3)$，$(x_1,\ y_2,\ y_3)$，
$(y_1,\ x_2,\ x_3)$，$(y_1,\ x_2,\ y_3)$，$(y_1,\ y_2,\ x_3)$，$(y_1,\ y_2,\ y_3)$

したがって，$a_3 = 8$

A$_0$からB$_3$に到るルートの組合せも上記の8通りなので，$b_3 = 8$となる。

(2)　(1)と同様に考えて，右に移動するルートは, $1 \leqq i \leqq n$として，x_iまたはy_iを選べばよいので，$a_n = b_n = 2^n$となる。

(3) PとQは，A$_4$で4秒後に，またはA$_3$で5秒後に出会う場合しかない。



4秒後に出会うとき，Pの右に移動するルートは，$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)$より，その確率は$\left(\dfrac{1}{2}\right)^4 = \dfrac{1}{16}$となる。

また, 5 秒後に出会うとき, P の右に移動するルートは,

$(x_1,\ x_2,\ y_3)$, $(x_1,\ y_2,\ x_3)$, $(y_1,\ x_2,\ x_3)$, $(x_1,\ y_2,\ y_3)$,

$(y_1,\ y_2,\ x_3)$, $(y_1,\ y_2,\ y_3)$

その確率は順に, $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4$, $\left(\frac{1}{2}\right)^3$, $\left(\frac{1}{2}\right)^4$ となるので, 合わせて, $\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 3+\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 3=\frac{9}{16}$ となる。

以上より, P と Q が出会う確率は, $\frac{1}{16}+\frac{9}{16}=\frac{5}{8}$

コメント

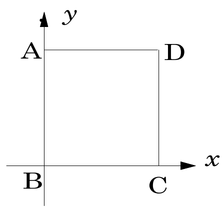
(1)や(3)は具体的に考え, その過程を解として書く問題です。しかし, 考えたことをわかりやすく表現しようとすると, ずいぶん時間がかかってしまいます。

問　題

座標平面上に 4 点 A(0, 1), B(0, 0), C(1, 0), D(1, 1) を頂点とする正方形を考え，この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに，点 Q は，x 軸と平行な方向の移動について確率 p，y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとするとき，n 秒後に頂点 A，C にいる確率をそれぞれ a_n，c_n とする。a_n，c_n を求めよ。 [1998]

解答例

n 秒後に B，D にいる確率をそれぞれ b_n，d_n とすると，$a_0=1$，$b_0=c_0=d_0=0$ で，また $a_1=c_1=0$，$b_1=1-p$，$d_1=p$ となる。



$a_{n+1}=(1-p)b_n+pd_n$ ………①

$b_{n+1}=(1-p)a_n+pc_n$ ………②

$c_{n+1}=pb_n+(1-p)d_n$ ………③

$d_{n+1}=pa_n+(1-p)c_n$ ………④

①＋③より，$a_{n+1}+c_{n+1}=b_n+d_n$ ………⑤

①－③より，$a_{n+1}-c_{n+1}=(1-2p)(b_n-d_n)$ ……… ⑤′

②＋④より，$b_{n+1}+d_{n+1}=a_n+c_n$ ………⑥

②－④より，$b_{n+1}-d_{n+1}=(1-2p)(a_n-c_n)$ ……… ⑥′

⑤と⑥より，$a_{n+2}+c_{n+2}=a_n+c_n$ ………⑦

⑤′ と ⑥′ より，$a_{n+2}-c_{n+2}=(1-2p)^2(a_n-c_n)$ ………⑧

(i)　n が偶数のとき

⑦より，$a_n+c_n=a_0+c_0=1$

⑧より，$a_n-c_n=(a_0-c_0)(1-2p)^{2\cdot\frac{n}{2}}=(1-2p)^n$

よって，$a_n=\frac{1}{2}\left\{1+(1-2p)^n\right\}$，$c_n=\frac{1}{2}\left\{1-(1-2p)^n\right\}$

(ii)　n が奇数のとき

⑦より，$a_n+c_n=a_1+c_1=0$

⑧より，$a_n-c_n=(a_1-c_1)(1-2p)^{2\cdot\frac{n-1}{2}}=0$

よって，$a_n=c_n=0$

コメント

ていねいに漸化式を立てて解いてみましたが，n が奇数のときは $a_n=c_n=0$ であることは題意から明らかです。そのため n が偶数のときだけを考えればよいということになり，そのような解でも構いません。

問　題

n を自然数とする。0 でない複素数からなる集合 M が次の条件(I), (II), (III)を満たしている。

(I)　集合 M は n 個の要素からなる。

(II)　集合 M の要素 z に対して, $\dfrac{1}{z}$ と $-z$ はともに集合 M の要素である。

(III) 集合 M の要素 z, w に対して, その積 zw は集合 M の要素である。ただし, $z=w$ の場合も含める。

このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　1 および -1 は集合 M の要素であることを示せ。

(2)　n は偶数であることを示せ。

(3)　$n=4$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

(4)　$n=6$ のとき, 集合 M は一通りに定まることを示し, その要素をすべて求めよ。

[2017]

解答例

(1)　n 個の要素からなる 0 でない複素数の集合 M に対して, $z\in M$ とすると, 条件(II)から, $\dfrac{1}{z}\in M$, $-z\in M$ である。

すると, 条件(III)から, $z\cdot\dfrac{1}{z}\in M$ すなわち $1\in M$ である。さらに, $-z\cdot\dfrac{1}{z}\in M$ すなわち $-1\in M$ である。

(2)　$z\in M$ とすると, 条件(III)から, $z^n\in M$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$ である。

ここで, $|z|=r$ とおくと, $|z^n|=|z|^n=r^n$ となり,

(i)　$r>1$ のとき

$r<r^2<r^3<\cdots<r^n<\cdots$ となり, M の要素は有限個ではない。

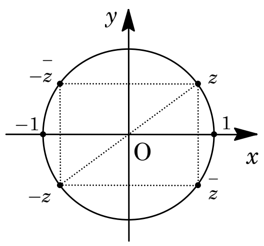
(ii)　$0<r<1$ のとき

$r>r^2>r^3>\cdots>r^n>\cdots$ となり, M の要素は有限個ではない。

(i)(ii)より, $r=1$ となり, このとき $|z|^2=1$ すなわち $z\overline{z}=1$ である。

まず, M の要素が実数だけのときは, (1)から, $M=\{1,\ -1\}$ である。

次に, 純虚数でない虚数 z に対し $z\in M$ とすると, 条件(II)から $-z\in M$ である。また, $\overline{z}=\dfrac{1}{z}$ から, 共役複素数も M の要素となるので, $\overline{z}\in M$, $-\overline{z}\in M$ である。



これより, M の要素に純虚数でない虚数 z があれば,

$$M=\{1,\ -1,\ z,\ -z,\ \overline{z},\ -\overline{z}\}$$

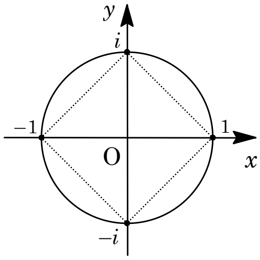
また, Mの要素の虚数が純虚数のみであれば, $\overline{i}=-i$, $-\overline{i}=i$から,

$$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$$

さらに, Mの要素に純虚数および純虚数でない虚数zがあれば,

$$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i,\ z,\ -z,\ \overline{z},\ -\overline{z}\}$$

そして, 純虚数でない虚数が複数個あるときも同様に考えていくと, M の要素の個数 n は, k を自然数として $n=4k$, $4k-2$の形で表せ, いずれの場合も偶数である。



(3)　$n=4$のとき, Mの要素は 1 と-1以外に 2 つ存在し, その要素は, (2)よりiと$-i$なので,

$$M=\{1,\ -1,\ i,\ -i\}$$

なお, Mの要素は 1 の 4 乗根となり, Mは積について閉じている。

(4)　$n=6$のとき, Mの要素は 1 と-1以外に 4 つ存在し, その要素は, (2)より純虚数でない虚数zをとり,

$$M=\{1,\ -1,\ z,\ -z,\ \overline{z},\ -\overline{z}\}$$

ここで, $z\neq 0$, $z\neq\pm 1$, $z\neq\pm i$から, $z^2=1$, $z^2=-1$, $z^2=z$, $z^2=-z$の場合はない。

(a)　$z^2=\overline{z}$のとき

$\arg z=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと, $\arg z^2$は第 1 象限または第 2 象限の角, $\arg\overline{z}$は第 4 象限の角となり, $\arg z^2\neq\arg\overline{z}$である。

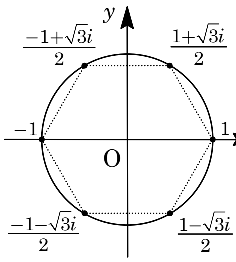
(b)　$z^2=-\overline{z}$のとき

$\arg z=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと, $\arg z^2=2\theta$, $\arg(-\overline{z})=\pi-\theta$より,

$$2\theta=\pi-\theta,\ \theta=\frac{\pi}{3}$$

よって, $z=\cos\dfrac{\pi}{3}+i\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$となり,

$$-z=\frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \overline{z}=\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ -\overline{z}=\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}$$



以上より, 集合Mは,

$$M=\left\{1,\ -1,\ \frac{1+\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{1-\sqrt{3}i}{2},\ \frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right\}$$

なお, Mの要素は 1 の 6 乗根となり, Mは積について閉じている。

コメント

複素数の絡んだ論証問題です。結論は予測できるものの, それに至る記述がかなり難航し, いくら記述しても不足する気分になってしまいます。そのため, 上の解答例ではプロセスを簡略化して緻密さに欠ける部分も残しています。

問　題

xy 平面上で x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x$ のグラフ上に無限個の格子点が存在することを示せ。

(2)　$a,\ b$ は実数で $a\neq 0$ とする。$y=ax^2+bx$ のグラフ上に，点 $(0,\ 0)$ 以外に格子点が 2 つ存在すれば，無限個存在することを示せ。　[2010]

解答例

(1)　$y=\frac{1}{3}x^2+\frac{1}{2}x$ ……①に対し, k を整数として，$x=6k$ とおくと，

$$y=\frac{1}{3}\cdot 36k^2+\frac{1}{2}\cdot 6k=12k^2+3k$$

すると，点 $(6k,\ 12k^2+3k)$ は，①のグラフ上の格子点となるので，格子点は無限個存在する。

(2)　$y=ax^2+bx$ ……②のグラフ上の原点と異なる 2 つの格子点を，$(p,\ q)$，$(r,\ s)$ とおく。ただし，$p\neq 0$，$r\neq 0$，$p\neq r$ である。

$$ap^2+bp=q\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad ar^2+br=s\ \cdots\cdots\cdots ④$$

③④より，$\begin{pmatrix} p^2 & p \\ r^2 & r \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}$ となり，$p^2r-pr^2=pr(p-r)\neq 0$ より，

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}=\frac{1}{pr(p-r)}\begin{pmatrix} r & -p \\ -r^2 & p^2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} q \\ s \end{pmatrix}=\frac{1}{pr(p-r)}\begin{pmatrix} qr-ps \\ -qr^2+p^2s \end{pmatrix}$$

これより, $a,\ b$ とも有理数となり, $l,\ m,\ n$ を整数として，$a=\frac{m}{l}$，$b=\frac{n}{l}$ と置き換えると，②は，$y=\frac{m}{l}x^2+\frac{n}{l}x$ となる。

ここで, k を整数として，$x=lk$ とおくと，

$$y=\frac{m}{l}l^2k^2+\frac{n}{l}lk=mlk^2+nk$$

すると，点 $(lk,\ mlk^2+nk)$ は，②のグラフ上の格子点となるので，格子点は無限個存在する。

コメント

格子点に関する証明問題ですが，見かけとは異なり，特別な技法は必要ありません。なお，行列を用いて連立方程式を解いていますが，普通に加減法でも構いません。

問　題

a, b, c を実数とし，実数の組$(x,\ y,\ z)$に関する方程式

(i)　$x+y-2z=3a$，$2x-y-z=3b$，$x-5y+4z=3c$

および

(ii)　$x^2+y^2+z^2=1$

を考える。

(1)　方程式(i)が解をもつための $a,\ b,\ c$ に対する条件を求めよ。またそのときの方程式(i)の解$(x,\ y,\ z)$を求めよ。

(2)　方程式(i)と(ii)がただ 1 つの共通解をもつとき，その共通解$(x,\ y,\ z)$は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ を満たすことを示せ。　[2004]

解答例

(1)　$x+y-2z=3a$ ……①，$2x-y-z=3b$ ……②，$x-5y+4z=3c$ ……③に対して，

②より，$z=2x-y-3b$ ………④

④を①に代入して，$x+y-2(2x-y-3b)=3a$，$x-y=-a+2b$ ………⑤

④を③に代入して，$x-5y+4(2x-y-3b)=3c$，$x-y=\dfrac{4}{3}b+\dfrac{1}{3}c$ ………⑥

⑤⑥が解をもつ条件は,

$-a+2b=\dfrac{4}{3}b+\dfrac{1}{3}c$，$3a-2b+c=0$ ………⑦

⑦が成り立つとき，⑤と⑥は一致し, t を実数として,

$x=t$，$y=t+a-2b$

④より，$z=2t-(t+a-2b)-3b=t-a-b$

よって，$(x,\ y,\ z)=(t,\ t+a-2b,\ t-a-b)$ ………⑧

(2)　⑧を $x^2+y^2+z^2=1$ に代入すると，$t^2+(t+a-2b)^2+(t-a-b)^2-1=0$

$3t^2-6bt+(2a^2-2ab+5b^2-1)=0$ ………⑨

t がただ 1 つ存在する条件は，$D/4=9b^2-3(2a^2-2ab+5b^2-1)=0$

$2a^2-2ab+2b^2-1=0$ ………⑩

このとき，⑨の解は $t=b$ となるので，$(x,\ y,\ z)=(b,\ a-b,\ -a)$

すると，⑩より，$2x^2+2xy+2y^2=2b^2+2b(a-b)+2(a-b)^2$

$=2a^2-2ab+2b^2=1$

コメント

①，②，③を平面の方程式とみなし，その法線ベクトルをそれぞれ $\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ とおくと，$\overrightarrow{n_3}=-3\overrightarrow{n_1}+2\overrightarrow{n_2}$ から，$\overrightarrow{n_1}$，$\overrightarrow{n_2}$，$\overrightarrow{n_3}$ が 1 次独立ではありません。この点が本問の背景となっています。

問　題

$f(x)$を実数全体で定義された連続関数で, $x>0$ で$0<f(x)<1$を満たすものとする。$a_1=1$とし，順に，$a_m=\int_0^{a_{m-1}}f(x)\,dx$ $(m=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$により数列$\{a_m\}$を定める。

(1) $m\geqq 2$ に対し，$a_m>0$ であり，かつ$a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$となることを示せ。

(2) $\dfrac{1}{2002}>a_m$となる m が存在することを背理法を用いて示せ。　[2002]

解答例

(1) $m\geqq 2$のとき，$a_m>0$であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $m=2$のとき

$a_1=1$より，$a_2=\int_0^1 f(x)\,dx$となり，$f(x)>0$より$a_2>0$である。

(ii) $m=k$のとき

$a_k>0$と仮定すると，$f(x)>0$より$a_{k+1}=\int_0^{a_k}f(x)\,dx>0$である。

(i)(ii)より, $m\geqq 2$のとき，$a_m>0$である。

次に，$a_{m-1}-a_m=\int_0^{a_{m-1}}dx-\int_0^{a_{m-1}}f(x)\,dx=\int_0^{a_{m-1}}\{1-f(x)\}dx$

$f(x)<1$より，$1-f(x)>0$なので，$a_{m-1}>a_m$である。すると，m は任意の整数より，$a_1>a_2>\cdots>a_{m-1}>a_m>\cdots$となる。

(2) (1)より，$0<\cdots<a_m<a_{m-1}<\cdots<a_2<a_1=1$となるが，ここで，どんな m に対しても$a_m\geqq\dfrac{1}{2002}$と仮定する。

さて，条件より，$f(x)$は連続関数で，$x>0$ において$0<f(x)<1$を満たすので，$0\leqq f(0)\leqq 1$となる。

(i) $0\leqq f(0)<1$のとき

$0\leqq x\leqq 1$ における$f(x)$の最大値をM_1とすると，$0<M_1<1$である。

$$a_m=\int_0^{a_{m-1}}f(x)\,dx\leqq\int_0^{a_{m-1}}M_1dx=M_1a_{m-1},\ \ 0<a_m\leqq a_1{M_1}^{m-1}={M_1}^{m-1}$$

これより$\lim\limits_{m\to\infty}a_m=0$となり，どんな m に対しても$a_m\geqq\dfrac{1}{2002}$とはならない。

(ii) $f(0)=1$のとき

$0<\alpha<\dfrac{1}{2002}$を満たす実数αをとるとき，$0\leqq x\leqq\alpha$における$f(x)$の最大値は 1 である。また$\alpha\leqq x\leqq 1$ における$f(x)$の最大値をM_2とすると，$0<M_2<1$である。

$$a_m=\int_0^{\alpha}f(x)\,dx+\int_{\alpha}^{a_{m-1}}f(x)\,dx\leqq\int_0^{\alpha}dx+\int_{\alpha}^{a_{m-1}}M_2dx=\alpha+M_2(a_{m-1}-\alpha)$$

$$a_m-\alpha \leqq M_2(a_{m-1}-\alpha),\ \ 0<a_m-\alpha \leqq (a_1-\alpha)M_2{}^{m-1}=(1-\alpha)M_2{}^{m-1}$$

これより $\lim\limits_{m\to\infty} a_m=\alpha$ となり，どんな m に対しても $a_m \geqq \dfrac{1}{2002}$ とはならない。

(i)(ii)より，$\dfrac{1}{2002}>a_m$ となる m が存在する。

コメント

最初はうっかり $f(0)=1$ の場合を見逃していました。これが最重点課題だったのですが……。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき，整数係数の 4 次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha)=0$ となるもののうち，x^4 の係数が 1 であるものを求めよ。

(2)　8 つの実数 $\pm\sqrt{13}\pm\sqrt{9+2\sqrt{17}}\pm\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ （ただし，複号$\pm$はすべての可能性にわたる）の中で，(1)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x)=0$ の解となるものをすべて求め，それ以外のものが解でないことを示せ。

(3)　(2)で求めた $f(x)=0$ の解の大小関係を調べ，それらを大きい順に並べよ。

[2015]

解答例

(1)　$\alpha-\sqrt{13}=\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ より，両辺を 2 乗すると，

$$(\alpha-\sqrt{13})^2=\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)^2,\ \ \alpha^2-2\sqrt{13}\alpha+13=18+2\sqrt{13}$$

まとめると，$\alpha^2-5=2\sqrt{13}(\alpha+1)$ となり，さらに両辺を 2 乗すると，

$$\alpha^4-10\alpha^2+25=52(\alpha^2+2\alpha+1),\ \ \alpha^4-62\alpha^2-104\alpha-27=0$$

よって，α は 4 次方程式 $x^4-62x^2-104x-27=0$ の解である。

(2)　(1)より，$f(x)=x^4-62x^2-104x-27$ であり，

$$f(x)=(x^2-5)^2-\{2\sqrt{13}(x+1)\}^2$$
$$=\{x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)\}\{x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)\}$$

ここで，$f(x)=0$ とすると，

$$x^2-5-2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots①,\ \ x^2-5+2\sqrt{13}(x+1)=0\cdots\cdots②$$

①より，$x^2-2\sqrt{13}x-2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=\sqrt{13}\pm\sqrt{18+2\sqrt{13}}=\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

②より，$x^2+2\sqrt{13}x+2\sqrt{13}-5=0$ となり，

$$x=-\sqrt{13}\pm\sqrt{18-2\sqrt{13}}=-\sqrt{13}\pm\left(\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}\right)$$

以上より，4 次方程式 $f(x)=0$ の 4 個の解は，

$$\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ \ \sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$
$$-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}},\ \ -\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$$

そして，$f(x)=0$ の解の個数は 4 なので，上記以外の数は解ではない。

(3)　(2)より $\alpha=\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\beta=\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\gamma=-\sqrt{13}+\sqrt{9+2\sqrt{17}}-\sqrt{9-2\sqrt{17}}$，$\delta=-\sqrt{13}-\sqrt{9+2\sqrt{17}}+\sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とおく。

すると，$8<2\sqrt{17}<9$ より，$\sqrt{17}<\sqrt{9+2\sqrt{17}}<\sqrt{18}$，$0<\sqrt{9-2\sqrt{17}}<1$ となり，

$$\alpha-\gamma=2\sqrt{13}+2\sqrt{9-2\sqrt{17}}>0,\ \gamma-\beta=-2\sqrt{13}+2\sqrt{9+2\sqrt{17}}>0$$

$$\beta-\delta=2\sqrt{13}-2\sqrt{9-2\sqrt{17}}>0$$

よって，α，β，γ，δ の大小関係は，$\alpha>\gamma>\beta>\delta$ である。

コメント

高次方程式の問題です。(1)はよくみかけるものですが，そのプロセスを誘導として(2)に適用させるところが，問題のねらいになっています。なお，(3)の大小関係については，予め図を書いて予測しています。

問　題

(1)　複素数 z を未知数とする方程式 $z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ の解をすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた解 $z=p+qi$ （p, q は実数）のうち，次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件：x を未知数とする 3 次方程式 $x^3+\sqrt{3}qx+q^2-p=0$ が，整数の解を少なくとも 1 つもつ。　[2005]

解答例

(1)　$z^5+2z^4+4z^3+8z^2+16z+32=0$ より，$(z+2)(z^4+4z^2+16)=0$ から，

$$(z+2)(z^4+8z^2+16-4z^2)=0,\ (z+2)(z^2+4+2z)(z^2+4-2z)=0$$

よって，$z=-2$, $-1\pm\sqrt{3}i$, $1\pm\sqrt{3}i$

(2)　(i)　$z=-2$ のとき　このとき，$x^3+2=0$ となり，整数解は存在しない。

(ii)　$z=-1+\sqrt{3}i$ のとき　$x^3+3x+4=0$, $(x+1)(x^2-x+4)=0$

よって，整数解 $x=-1$ をもつ。

(iii)　$z=-1-\sqrt{3}i$ のとき　$x^3-3x+4=0$, $x(3-x^2)=4$ ………①

これより，①が整数解をもつならば 4 の約数となり，整数解として $x=\pm1$, ±2, ±4 の場合を調べればよい。ここで，$f(x)=x^3-3x+4$ とおくと，

$$f(1)=2,\ f(-1)=6,\ f(2)=6,\ f(-2)=2,\ f(4)=56,\ f(-4)=-48$$

よって，$f(x)=0$ は整数解をもたない。

(iv)　$z=1+\sqrt{3}i$ のとき　$x^3+3x+2=0$, $x(-3-x^2)=2$ ………②

これより，②が整数解をもつならば 2 の約数となり，整数解として $x=\pm1$, ±2 の場合を調べればよい。ここで，$g(x)=x^3+3x+2$ とおくと，

$$g(1)=6,\ g(-1)=-2,\ g(2)=16,\ g(-2)=-12$$

よって，$g(x)=0$ は整数解をもたない。

(v)　$z=1-\sqrt{3}i$ のとき　$x^3-3x+2=0$, $(x-1)^2(x+2)=0$

よって，整数解 $x=1$, -2 をもつ。

(i)～(v)より，求める z は，$z=-1+\sqrt{3}i$, $1-\sqrt{3}i$

コメント

すべての場合をチェックするのは面倒ですが，しかし，それは時間の問題にすぎません。

問　題

次の問いに答えよ。ただし，偏角θは，$0^\circ \leqq \theta < 360^\circ$の範囲で考えるものとする。

(1)　$|z+i| = |z-i|$を満たす複素数zは，実数に限ることを示せ。

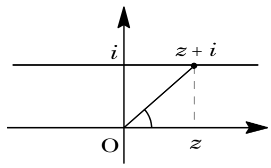
(2)　複素数平面上で z が実軸上を動くとき，複素数$z+i$の偏角$\arg(z+i)$の動く範囲を求めよ。

(3)　z を未知数とする方程式$(z+i)^9 = (z-i)^9$のすべての解 z について$z+i$の偏角$\arg(z+i)$を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$|z+i| = |z-i|$より，複素数平面上で，点zは 2 点i，$-i$を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち実軸上にある。よって，zは実数である。

(2)　z が実数のとき，点$z+i$は点iを通り，実軸に平行な直線上にあるので，



$$0^\circ < \arg(z+i) < 180^\circ$$

(3)　$(z+i)^9 = (z-i)^9$より，$|z+i|^9 = |z-i|^9$

$$|z+i| = |z-i|$$

よって，(1)より，zは実数となる。

また，nを整数として，$\arg(z+i)^9 = 360^\circ \times n + \arg(z-i)^9$

$$9\arg(z+i) = 360^\circ \times n + 9\arg(z-i),\ \ \arg(z+i) = 40^\circ \times n + \arg(z-i)$$

ここで，zが実数より，$z-i = \overline{z+i}$となり，$\arg(z-i) = -\arg(z+i)$から，

$$2\arg(z+i) = 40^\circ \times n,\ \ \arg(z+i) = 20^\circ \times n$$

(2)より，$0^\circ < \arg(z+i) < 180^\circ$なので，

$$\arg(z+i) = 20^\circ,\ 40^\circ,\ 60^\circ,\ 80^\circ,\ 100^\circ,\ 120^\circ,\ 140^\circ,\ 160^\circ$$

コメント

(1)と(2)が，(3)のための親切な誘導となっています。そのため，方針について迷う必要は全くありません。

問　題

n を 3 以上の自然数とする。有限複素数列 z_1，z_2，…，z_n の各項はいずれも方程式 $z^6=1$ の解の 1 つであり，かつ関係式 $z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ を満たしているとする。

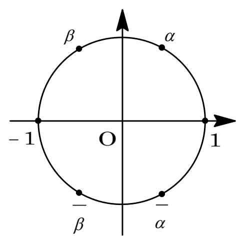
(1)　z_1，z_2，…，z_n の中に 1 が含まれ，-1 が含まれていないとすれば，$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$-\dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ はいずれも z_1，z_2，…，z_n の中に含まれることを示せ。

(2)　$n=6$ のとき，(1)のような複素数列 z_1，z_2，…，z_6 のとり方の個数を求めよ。

[2001]

解答例

(1)　$\alpha=\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$\beta=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくと，1，α，β，-1，$\overline{\beta}$，$\overline{\alpha}$ が $z^6=1$ の解となる。



さて，有限数列 $\{z_n\}$ の中に，1，α，β，-1，$\overline{\beta}$，$\overline{\alpha}$ が，それぞれ $a, b, c, 0, d, e$ 個ずつ含まれているとすると，

$$a+b+c+d+e=n\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$z_1+z_2+\cdots+z_n=0$ なので，

$$a+\frac{1}{2}(b+e)-\frac{1}{2}(c+d)=0,\ 2a+b-c-d+e=0\cdots\cdots\cdots②$$

$$\frac{\sqrt{3}}{2}b+\frac{\sqrt{3}}{2}c-\frac{\sqrt{3}}{2}d-\frac{\sqrt{3}}{2}e=0,\ b+c-d-e=0\cdots\cdots\cdots③$$

②＋③より，$2a+2b-2d=0$，$d=a+b\cdots\cdots\cdots④$

②－③より，$2a-2c+2e=0$，$c=a+e\cdots\cdots\cdots⑤$

条件より，$a\geqq 1$，$b\geqq 0$，$c\geqq 0$，$d\geqq 0$，$e\geqq 0$ なので，④⑤から $c\geqq 1$，$d\geqq 1$ となり，β も $\overline{\beta}$ も少なくとも 1 個含まれる。

(2)　$n=6$ のとき，①より $a+b+c+d+e=6$

④⑤を代入して，$3a+2b+2e=6$

$a=1$ のとき $2b+2e=3$ となり，この式を満たす $(b,\ e)$ は存在しない。

$a=2$ のとき $b+e=0$ となり，この式を満たすのは $(b,\ e)=(0,\ 0)$ である。このとき，④⑤より $c=d=2$ となる。

すなわち，z_1，z_2，…，z_6 の中には，1，β，$\overline{\beta}$ が 2 個ずつ含まれているので，そのとり方は，$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ 個である。

コメント

いかにも難問のような感じですが，$z^6=1$ の解を設定し，その個数について方程式を立てていくと，うまく解けます。

問　題

実数を係数とする 3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，相異なる虚数解 α，β と実数解 γ をもつとする。

(1) $\beta=\overline{\alpha}$ が成り立つことを証明せよ。ここで，$\overline{\alpha}$ は α と共役な複素数を表す。

(2) α，β，γ が等式 $\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=3$ を満たし，さらに複素数平面上で α，β，γ を表す 3 点は 1 辺の長さが $\sqrt{3}$ の正三角形をなすものとする。このとき，実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。　[2000]

解答例

(1) $x^3+px^2+qx+r=0$ ……①が虚数解 $x=\alpha$ をもつとき，

$$\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r=0$$

両辺の共役をとると，p,q,r が実数より，

$$\overline{\alpha^3+p\alpha^2+q\alpha+r}=\overline{0},\quad \overline{\alpha}^3+p\overline{\alpha}^2+q\overline{\alpha}+r=0$$

これは，$x=\overline{\alpha}$ が①の解であることを示すので，$\beta=\overline{\alpha}$ となる。

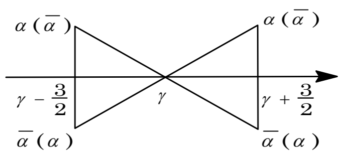
(2) (1)より①の解が α，$\overline{\alpha}$，γ となるので，条件より，$\alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\gamma+\gamma\alpha=3$ ………②

ここで，方程式①に対して，解と係数の関係より，

$$\alpha+\overline{\alpha}+\gamma=-p,\quad \alpha\overline{\alpha}+\overline{\alpha}\gamma+\gamma\alpha=q,\quad \alpha\overline{\alpha}\gamma=-r$$

②より，$p=-(\alpha+\overline{\alpha})-\gamma$，$q=3$，$r=-\alpha\overline{\alpha}\gamma$ ………③

さて，複素数平面上において，2 点 α，$\overline{\alpha}$ は実軸対称であり，条件から 3 点 α，$\overline{\alpha}$，γ が 1 辺 $\sqrt{3}$ の正三角形の頂点となるので，右図より，



$$\alpha=\gamma+\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i,\quad \alpha=\gamma-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

すると，②を $\alpha\overline{\alpha}+\gamma(\alpha+\overline{\alpha})=3$ ……④と変形して，

(i) $\alpha=\gamma+\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

④より，$\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\gamma\cdot2\left(\gamma+\frac{3}{2}\right)=3$，$3\gamma^2+6\gamma=0$

$\gamma=0$ のとき $\alpha=\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r)=(-3,\ 3,\ 0)$

$\gamma=-2$ のとき $\alpha=-\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r)=(3,\ 3,\ 2)$

(ii) $\alpha=\gamma-\frac{3}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}i$ のとき

④より，$\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2+\gamma\cdot2\left(\gamma-\frac{3}{2}\right)=3$，$3\gamma^2-6\gamma=0$

$\gamma = 0$ のとき $\alpha = -\dfrac{3}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r) = (3,\ 3,\ 0)$

$\gamma = 2$ のとき $\alpha = \dfrac{1}{2} \pm \dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $(p,\ q,\ r) = (-3,\ 3,\ -2)$

コメント

昨年度のセンター試験に類題が出るような易しめの問題です。

問　題

N を自然数とし，複素数 $z=\cos\theta+i\sin\theta$ は $z^N=1$ をみたすとして，以下の級数和 S_1，S_2，S_3 の値を求めよ。ただし，ここで i は虚数単位（$i^2=-1$）である。

(1)　$S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}$

(2)　$S_2=1+\cos\theta+\cos 2\theta+\cdots\cdots+\cos(N-1)\theta$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2(N-1)\theta$　[1998]

解答例

(1)　n を整数として，

(i)　$z\neq 1$（$\theta\neq 360°\times n$）のとき

$$S_1=1+z+z^2+\cdots\cdots+z^{N-1}=\frac{1-z^N}{1-z}=\frac{1-1}{1-z}=0$$

(ii)　$z=1$（$\theta=360°\times n$）のとき

$$S_1=1+1+1+\cdots\cdots+1=N$$

(2)　ド・モアブルの定理から，$z^k=\cos k\theta+i\sin k\theta$ となり，S_1 の実部が S_2 となる。

(i)　$z\neq 1$（$\theta\neq 360°\times n$）のとき

$$S_2=0$$

(ii)　$z=1$（$\theta=360°\times n$）のとき

$$S_2=N$$

(3)　$S_3=1+\cos^2\theta+\cos^2 2\theta+\cdots\cdots+\cos^2(N-1)\theta$

$$=1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\frac{1+\cos 4\theta}{2}+\cdots\cdots+\frac{1+\cos 2(N-1)\theta}{2}$$

$$=\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\{1+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots\cdots+\cos 2(N-1)\theta\}$$

ここで，$S_3{}'=1+\cos 2\theta+\cos 4\theta+\cdots\cdots+\cos 2(N-1)\theta$ とすると，

$S_4=1+z^2+z^4+\cdots\cdots+z^{2(N-1)}$ の実部が $S_3{}'$ となる。

(i)　$z\neq\pm 1$（$\theta\neq 180°\times n$）のとき

$S_4=\dfrac{1-z^{2N}}{1-z^2}=0$ より，$S_3=\dfrac{N}{2}$

(ii)　$z=\pm 1$（$\theta=180°\times n$）のとき

$S_4=N$ より，$S_3=\dfrac{N}{2}+\dfrac{N}{2}=N$

コメント

(3)の解法も，(1)(2)の流れから考えると，自然に上の解のようになると思われます。(1)の誘導がなくても，S_2，S_3 はこの解法で求めるというのが常識となるでしょう。

問　題

$a>0$, $b>0$ とする。点 $\mathrm{A}(0,\ a)$ を中心とする半径 r の円が，双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ と 2 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$，$\mathrm{C}(-s,\ t)$ で接しているとする。ただし，$s>0$ とする。ここで，双曲線と円が点 P で接するとは，P が双曲線と円の共有点であり，かつ点 P における双曲線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) r, s, t を, a と b を用いて表せ。

(2) △ABC が正三角形となる a と r が存在するような b の値を求めよ。　[2009]

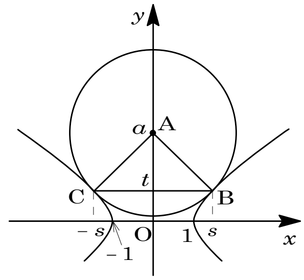
解答例

(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(s,\ t-a)$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=r$ なので，

$$s^2+(t-a)^2=r^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{B}(s,\ t)$ は双曲線 $x^2-\dfrac{y^2}{b^2}=1$ 上にあり，

$$s^2-\frac{t^2}{b^2}=1\cdots\cdots\cdots②$$



さらに, B における接線の方程式は,

$$sx-\frac{ty}{b^2}=1,\ sb^2x-ty=b^2$$

すると，接線の法線ベクトル $\vec{n}$ は，$\vec{n}=(sb^2,\ -t)$ となり，$\vec{n}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より，

$$sb^2(t-a)+ts=0,\ (b^2+1)t=ab^2\cdots\cdots\cdots③$$

③より，$t=\dfrac{ab^2}{b^2+1}$ となり，②に代入すると, $s>0$ から,

$$s^2=1+\frac{1}{b^2}\Big(\frac{ab^2}{b^2+1}\Big)^2=\frac{b^4+(a^2+2)b^2+1}{(b^2+1)^2},\ \ s=\frac{\sqrt{b^4+(a^2+2)b^2+1}}{b^2+1}$$

さらに，①に代入すると，

$$r^2=\frac{b^4+(a^2+2)b^2+1}{(b^2+1)^2}+\Big(\frac{ab^2}{b^2+1}-a\Big)^2=\frac{(b^2+1)(a^2+b^2+1)}{(b^2+1)^2}=\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}$$

$r>0$ より，$r=\sqrt{\dfrac{a^2+b^2+1}{b^2+1}}\cdots\cdots\cdots④$

(2) △ABC が正三角形となる条件は，$r=2s$ から $r^2=4s^2$ となり，

$$\frac{a^2+b^2+1}{b^2+1}=4\cdot\frac{b^4+(a^2+2)b^2+1}{(b^2+1)^2}$$

変形すると，$(b^2+1)\{a^2+(b^2+1)\}=4\{(b^2+1)^2+a^2b^2\}$ から，

$$3(b^2+1)^2+3a^2b^2-a^2=0,\ (3b^2-1)a^2=-3(b^2+1)^2\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤を満たす $a^2>0$ が存在する b の条件は, $b>0$ から,

$$3b^2-1<0\,,\ \ 0<b<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

このとき, ⑤を満たす a が存在し, ④から r も存在する。

コメント

双曲線と円の位置関係に関する問題ですが, 計算量が半端ではありません。もっとも, これは 2 次曲線の問題の特徴でしょうが。

問　題

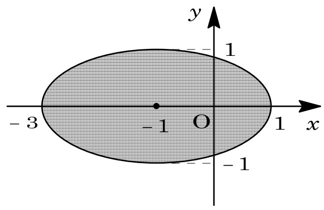
a, b を正数とし, xy 平面で不等式$\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$の表す領域$D$と, 不等式$x^2+y^2\leqq 1$の表す領域$E$を考える。

(1)　$a=2$, $b=1$の場合に, 領域Dを図示せよ。

(2)　DがEに含まれるためのa, bの条件を求め, ab平面上でその条件の表す領域を図示せよ。　[2002]

解答例

(1)　不等式$\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2\leqq 1$の表す領域は, 楕円$\dfrac{(x+1)^2}{4}+y^2=1$の内部または周上となり, 右図の網点部となる。ただし, 境界は含む。



(2)　$D:\dfrac{\{x-(1-a)\}^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}\leqq 1$が$E:x^2+y^2\leqq 1$に含まれるための条件は, Dの境界線上の任意の点$(1-a+a\cos\theta,\ b\sin\theta)$が$E$に含まれることより,

$$(1-a+a\cos\theta)^2+b^2\sin^2\theta\leqq 1,\ (1-a+a\cos\theta)^2+b^2(1-\cos^2\theta)\leqq 1$$

$$(b^2-a^2)\cos^2\theta-2a(1-a)\cos\theta-a^2+2a-b^2\geqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, $\cos\theta=t$, $f(t)=(b^2-a^2)t^2-2a(1-a)t-a^2+2a-b^2$とおくと, $(*)$は$-1\leqq t\leqq 1$において$f(t)\geqq 0$である条件と同値である。

さて, $f(1)=0$に注目すると, $f(t)=(t-1)\{(b^2-a^2)t+a^2-2a+b^2\}$

(i)　$b^2-a^2>0\ (b>a)$のとき　求める条件は, $t=-\dfrac{a^2-2a+b^2}{b^2-a^2}\geqq 1$より,

$$a^2-2a+b^2\leqq -b^2+a^2,\ b\leqq\sqrt{a}$$

(ii)　$b^2-a^2=0\ (b=a)$のとき

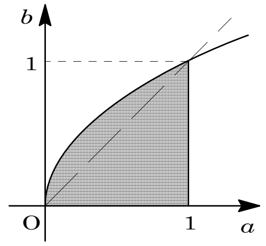
$f(t)=(t-1)(2a^2-2a)$となり, 求める条件は$2a^2-2a\leqq 0$より, $0\leqq a\leqq 1$

(iii)　$b^2-a^2<0\ (b<a)$のとき

求める条件は, $t=-\dfrac{a^2-2a+b^2}{b^2-a^2}\leqq -1$より,

$$a^2-2a+b^2\leqq b^2-a^2,\ 0\leqq a\leqq 1$$

(i)(ii)(iii)より, 求めるa, bの条件は, ab平面上で右図の網点部のようになる。ただし, a軸上以外の境界は含む。



コメント

(2)では$f(1)=0$に注目することが最大の鍵です。これは, 図を書けばわかります。

問　題

座標平面上に，双曲線$C: x^2-y^2=1$と点$\mathrm{A}(2,\ 0)$がある。

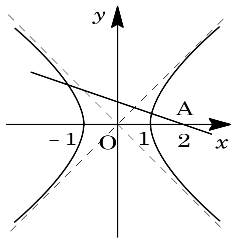
(1)　点 A を通り双曲線 C と 1 点のみで交わる直線を求めよ。

(2)　直線 l が点 A を通り双曲線 C と相異なる 2 点で交わるように動くとき，この 2 点の中点は，あるひとつの双曲線上にあることを示せ。　[2000]

解答例

(1)　点$\mathrm{A}(2,\ 0)$を通る直線$x=2$は，双曲線$C: x^2-y^2=1$……①と明らかに 2 点で交わる。また，点 A を通り，傾き m の直線は，

$y=m(x-2)$………②



①②より，$x^2-m^2(x-2)^2=1$

$(1-m^2)x^2+4m^2x-4m^2-1=0$………③

(i)　$1-m^2=0\ (m=\pm1)$のとき

③より $4x-5=0$，$x=\dfrac{5}{4}$ となり，$m=1$ のとき $y=-\dfrac{3}{4}$，

$m=-1$のとき$y=\dfrac{3}{4}$なので，いずれの場合も，①と②は 1 点でのみ交わる。

(ii)　$1-m^2\neq0\ (m\neq\pm1)$のとき

③の判別式$D/4=4m^4+(1-m^2)(4m^2+1)=3m^2+1>0$

よって，①と②はつねに 2 点で交わる。

(i)(ii)より, A を通り C と 1 点のみで交わる直線は，$y=x-2$，$y=-x+2$

(2)　まず，$l: x=2$のとき, 2 交点の中点は点$(2,\ 0)$である。

また，$l: y=m(x-2)\ (m\neq\pm1)$のとき, 2 交点の中点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とする。

ここで，③の 2 つの解を$x=\alpha,\ \beta$とすると，

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{-4m^2}{2(1-m^2)}=\frac{2m^2}{m^2-1}\text{………④}$$

②より，$y=m(x-2)$……⑤となり，④と⑤の交点が$\mathrm{P}(x,\ y)$なので，

$x\neq2$から，⑤より$m=\dfrac{y}{x-2}$

④に代入して，$x\left\{\left(\dfrac{y}{x-2}\right)^2-1\right\}=2\left(\dfrac{y}{x-2}\right)^2$

$x\left\{y^2-(x-2)^2\right\}=2y^2$，$(x-2)y^2-x(x-2)^2=0$

$x\neq2$より，$y^2-x(x-2)=0$，$x^2-2x-y^2=0$，$(x-1)^2-y^2=1$

点$(2,\ 0)$もこの式を満たすので，点 P は双曲線$(x-1)^2-y^2=1$上にある。

コメント

(1)の解はていねいに書きましたが，漸近線に平行な直線だけが，双曲線と 1 点のみで交わるのは明らかです。

問　題

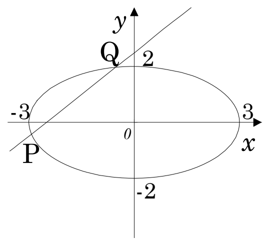
平面上に楕円 $\dfrac{x^2}{3^2}+\dfrac{y^2}{2^2}=1$ と直線 $l: y=x+k$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　この楕円と直線 l が 2 つの共有点をもつために k がみたすべき条件を求めよ。

(2)　k は(1)の条件をみたすとし，さらに $k\neq 0$ とする。(1)における 2 つの共有点を P, Q とし，O を原点とするとき，三角形 OPQ の面積を最大にする k の値，およびそのときの面積を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$\dfrac{x^2}{9}+\dfrac{y^2}{4}=1$ ………①，$y=x+k$ ………②



②を①に代入して，$4x^2+9(x+k)^2=36$

$$13x^2+18kx+9k^2-36=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②が 2 つの共有点をもつ条件は，③が異なる 2 実数解をもつことより，

$$D/4=9^2k^2-13\cdot 9(k^2-4)>0$$

$k^2-13<0$ より，$-\sqrt{13}<k<\sqrt{13}$

(2)　P, Q の x 座標をそれぞれ $x=p$，q とおくと, p, q は③の実数解より，

$$p+q=-\frac{18}{13}k,\quad pq=\frac{9k^2-36}{13} \cdots\cdots\cdots ④$$

$\mathrm{PQ}=\sqrt{2}\,|p-q|=\sqrt{2}\cdot\sqrt{(p+q)^2-4pq}$ から，④を代入して，

$$\mathrm{PQ}=\frac{\sqrt{2}}{13}\sqrt{18^2k^2-4\cdot 13(9k^2-36)}=\frac{12\sqrt{2}}{13}\sqrt{-k^2+13}$$

また, O から PQ に下ろした垂線の足を H とおくと，$\mathrm{OH}=\dfrac{|k|}{\sqrt{2}}$ となる。

△OPQ の面積を S とすると，$S=\dfrac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\mathrm{OH}$ から，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{|k|}{\sqrt{2}}\cdot\frac{12\sqrt{2}}{13}\sqrt{-k^2+13}=\frac{6}{13}\sqrt{-k^4+13k^2}$$

$$=\frac{6}{13}\sqrt{-\left(k^2-\frac{13}{2}\right)^2+\frac{13^2}{2^2}}$$

以上より，$k^2=\dfrac{13}{2}$ すなわち $k=\pm\sqrt{\dfrac{13}{2}}$ のとき, S は最大値 $\dfrac{6}{13}\cdot\dfrac{13}{2}=3$ をとる。

コメント

普通に計算をしていっても上記程度の量で，さほど複雑でもありません。

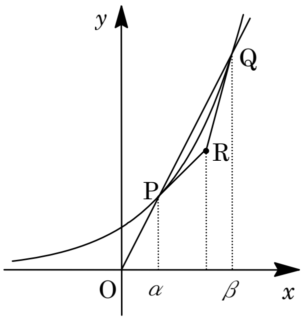
問　題

e を自然対数の底とし，t を $t>e$ となる実数とする。このとき，曲線 $C: y=e^x$ と直線 $y=tx$ は相異なる 2 点で交わるので，交点のうち x 座標が小さいものを P，大きいものを Q とし，P，Q の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。また，P における C の接線と Q における C の接線との交点を R とし，曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積を S_1，曲線 C および 2 つの直線 PR，QR で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を α と β を用いて表せ。

(2) $\alpha<\dfrac{e}{t}$，$\beta<2\log t$ となることを示し，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。必要ならば，$x>0$ のとき $e^x>x^2$ であることを証明なしに用いてよい。　[2015]

解答例



(1) $C: y=e^x$ と直線 $y=tx\ (t>e)$ の交点 P，Q の x 座標が α，β より，$e^\alpha=t\alpha$，$e^\beta=t\beta$ ………①

すると，曲線 C，x 軸および 2 つの直線 $x=\alpha$，$x=\beta$ で囲まれる部分の面積 S_1 は，①を利用すると，

$$S_1=\int_\alpha^\beta e^x dx=\left[e^x\right]_\alpha^\beta=e^\beta-e^\alpha=t(\beta-\alpha)$$

さて，点 $\mathrm{P}(\alpha,\ e^\alpha)$ における接線は，$y'=e^x$ より，

$$y-e^\alpha=e^\alpha(x-\alpha),\quad y=e^\alpha x+(1-\alpha)e^\alpha$$

よって，①より，$y=t\alpha x+t\alpha(1-\alpha)$ ………②

同様にして，点 $\mathrm{Q}(\beta,\ e^\beta)$ における接線は，$y=t\beta x+t\beta(1-\beta)$ ………③

③－②より，$t(\beta-\alpha)x+t\beta(1-\beta)-t\alpha(1-\alpha)=0$ となり，

$$x=-\frac{\beta(1-\beta)-\alpha(1-\alpha)}{\beta-\alpha}=-\frac{\beta-\alpha-(\beta^2-\alpha^2)}{\beta-\alpha}=-1+\alpha+\beta$$

②より，$y=t\alpha(-1+\alpha+\beta)+t\alpha(1-\alpha)=t\alpha\beta$

すると，②と③の交点 R の座標は，$\mathrm{R}(-1+\alpha+\beta,\ t\alpha\beta)$ となり，これより曲線 C および 2 つの直線 PR, QR で囲まれる部分の面積 S_2 は，

$$\begin{aligned}S_2&=S_1-\frac{1}{2}(t\alpha+t\alpha\beta)(-1+\alpha+\beta-\alpha)-\frac{1}{2}(t\alpha\beta+t\beta)(\beta+1-\alpha-\beta)\\&=t(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}\alpha(-1+\beta^2)-\frac{t}{2}\beta(1-\alpha^2)\\&=t(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}\alpha\beta(\beta-\alpha)=\frac{t}{2}(\beta-\alpha)-\frac{t}{2}\alpha\beta(\beta-\alpha)\end{aligned}$$

以上より，$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{t(\beta-\alpha)-t\alpha\beta(\beta-\alpha)}{t(\beta-\alpha)}=\dfrac{1}{2}(1-\alpha\beta)$ となる。

(2)　$f(x)=e^x-tx$ とおくと，$f'(x)=e^x-t$ となり，$x>0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\log t$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$	1	$\searrow$		$\nearrow$

すると，$t>e$ から，

$$f(\log t)=t-t\log t=t(1-\log t)<0$$

これより，$0<\alpha<\log t$，$\log t<\beta$ となる。

さて，$f\left(\dfrac{e}{t}\right)=e^{\frac{e}{t}}-e=e^{\frac{e}{t}}-e^1<0$ より，$0<\alpha<\dfrac{e}{t}$ ……④となる。

また，$t>0$ のとき $e^t>t^2$ より，$f(2\log t)=t^2-2t\log t=t(\log e^t-\log t^2)>0$ となり，$\log t<\beta<2\log t$ ……⑤である。

④⑤より，$0<\alpha\beta<2e\cdot\dfrac{\log t}{t}$ ………⑥

ここで，$u>0$ のとき $e^u>u^2$ から $\dfrac{e^u}{u}>u$ となり，$0<\dfrac{u}{e^u}<\dfrac{1}{u}$ から $\displaystyle\lim_{u\to\infty}\dfrac{u}{e^u}=0$

さらに，$t=e^u$ とおくと，$u\to\infty$ のとき $t\to\infty$ となり，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\dfrac{\log t}{t}=0$

よって，⑥から，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\alpha\beta=0$ となり，

$$\lim_{t\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}\lim_{t\to\infty}(1-\alpha\beta)=\frac{1}{2}\cdot 1=\frac{1}{2}$$

コメント

微積分の総合問題です。計算量はかなりのもので，①の関係式を積極的に利用することがポイントになっています。なお，(2)の後半で，極限に関して丁寧に記述していますが，これは問題文を意識した結果です。

問　題

xy 平面の $y \geqq 0$ の部分にあり，x 軸に接する円の列 C_1，C_2，C_3，…を次のように定める。

・C_1 と C_2 は半径 1 の円で，互いに外接する。

・正の整数 n に対し，C_{n+2} は C_n と C_{n+1} に外接し，C_n と C_{n+1} の弧および x 軸で囲まれる部分にある。

円 C_n の半径を r_n とする。

(1) 等式 $\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ を示せ。

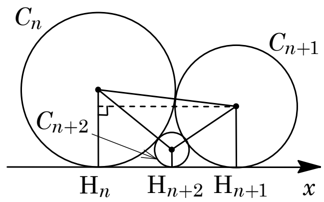
(2) すべての正の整数 n に対して $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = s\alpha^n + t\beta^n$ が成り立つように，n によらない定数 α，β，s，t の値を一組与えよ。

(3) $n \to \infty$ のとき数列 $\left\{ \dfrac{r_n}{k^n} \right\}$ が正の値に収束するように実数 k の値を定め，そのときの極限値を求めよ。 [2014]

解答例

(1) 円 C_n，C_{n+1}，C_{n+2} の中心から x 軸に垂線を下ろし，その足をそれぞれ H_n，H_{n+1}，H_{n+2} とおくと，

$$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1} = \sqrt{(r_n + r_{n+1})^2 - (r_n - r_{n+1})^2} = 2\sqrt{r_n r_{n+1}}$$



同様にして，$\mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2} = 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}}$

$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2} = 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$

すると，$\mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+1} = \mathrm{H}_{n+1}\mathrm{H}_{n+2} + \mathrm{H}_n\mathrm{H}_{n+2}$ より，

$$2\sqrt{r_n r_{n+1}} = 2\sqrt{r_{n+1} r_{n+2}} + 2\sqrt{r_n r_{n+2}}$$

両辺を $2\sqrt{r_n r_{n+1} r_{n+2}}$ で割って，$\dfrac{1}{\sqrt{r_{n+2}}} = \dfrac{1}{\sqrt{r_n}} + \dfrac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}$ ………①

(2) $\dfrac{1}{\sqrt{r_n}} = a_n$ とおくと，$r_1 = r_2 = 1$ から $a_1 = a_2 = 1$ となり，①より，

$$a_{n+2} = a_n + a_{n+1}，\ a_{n+2} - a_{n+1} - a_n = 0 \text{ ………②}$$

ここで，2 次方程式 $x^2 - x - 1 = 0$ の 2 つの解を $x = p$，q $(p < q)$ とおくと，$p = \dfrac{1 - \sqrt{5}}{2}$，$q = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$ となる。

すると，②を変形して，$a_{n+2} - pa_{n+1} = q(a_{n+1} - pa_n)$ から，

$$a_{n+1} - pa_n = (a_2 - pa_1)q^{n-1} = (1 - p)q^{n-1} = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}q^{n-1} = q^n \text{ ………③}$$

同様に，②より，$a_{n+2}-qa_{n+1}=p(a_{n+1}-qa_n)$ となり，

$$a_{n+1}-qa_n=(a_2-qa_1)p^{n-1}=(1-q)p^{n-1}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}p^{n-1}=p^n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$(-p+q)a_n=-p^n+q^n$ から，$a_n=-\dfrac{1}{\sqrt{5}}p^n+\dfrac{1}{\sqrt{5}}q^n$

すると，条件から $a_n=s\alpha^n+t\beta^n$ なので，定数 α，β，s，t の値の 1 つとして，

$$\alpha=p=\frac{1-\sqrt{5}}{2},\ \beta=q=\frac{1+\sqrt{5}}{2},\ s=-\frac{1}{\sqrt{5}},\ t=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3)　(2)より，$r_n=\dfrac{1}{(s\alpha^n+t\beta^n)^2}$ より，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{k^n(s\alpha^n+t\beta^n)^2}$

まず，$k\leqq 0$ のとき，明らかに $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{k^n}$ が正の値に収束する場合はない。

そこで，$k>0$ として，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{\left\{s(\sqrt{k}\alpha)^n+t(\sqrt{k}\beta)^n\right\}^2}$

さて，$|\alpha|<1<|\beta|$ より，$|\sqrt{k}\alpha|<\sqrt{k}<|\sqrt{k}\beta|=\sqrt{k}\beta$ となり，

(i)　$\sqrt{k}\beta>1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{k^n}=0$ となり，正の値に収束しない。

(ii)　$0<\sqrt{k}\beta<1$ のとき　$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{k^n}=\infty$ となり，正の値に収束しない。

(iii)　$\sqrt{k}\beta=1\left(\sqrt{k}=\dfrac{1}{\beta}\right)$ のとき

このとき，$\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{\left\{s\left(\dfrac{\alpha}{\beta}\right)^n+t\right\}^2}$ となり，$\left|\dfrac{\alpha}{\beta}\right|<1$ から，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{k^n}=\dfrac{1}{t^2}=5$

(i)～(iii)より，数列 $\left\{\dfrac{r_n}{k^n}\right\}$ が正の値に収束するのは，$k=\dfrac{1}{\beta^2}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のときであり，このとき $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{r_n}{k^n}=5$ である。

コメント

ときどき見かける有名な構図の問題で，(2)までは定番といってもよいものです。

問　題

xy 平面上に曲線 $C: y=\log x\ (x>0)$ を考える。

(1)　曲線 C の接線で点 $(0,\ b)$ を通るものの方程式を求めよ。

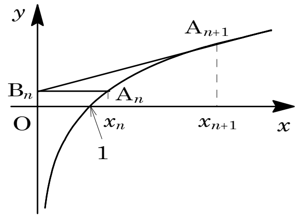
(2)　平面上に 2 組の点列 $\{\mathrm{A}_n\}$，$\{\mathrm{B}_n\}$ を次のように定める。A_1 を $(1,\ 0)$ とする。A_n が定まったとき，A_n を通り x 軸に平行な直線と y 軸との交点を B_n とし，B_n を通る曲線 C の接線の接点を A_{n+1} とする。このとき，2 つの線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{B}_n$ と $\mathrm{B}_n\mathrm{A}_{n+1}$ および曲線 C とで囲まれる部分の面積 S_n を求めよ。

(3)　無限級数 $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}$ の和を求めよ。ここで，$|r|<1$ のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nr^n=0$ であることを用いてよい。　[2006]

解答例

(1)　$C: y=\log x$ より，$y'=\dfrac{1}{x}$ となり，接点を $(t,\ \log t)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t),\quad y=\frac{1}{t}x-1+\log t$$



点 $(0,\ b)$ を通ることより，

$$-1+\log t=b,\quad t=e^{b+1}$$

よって，接線の方程式は，$y=e^{-b-1}x+b$

(2)　点 $\mathrm{A}_n(x_n,\ \log x_n)$，$\mathrm{A}_{n+1}(x_{n+1},\ \log x_{n+1})$ とおくと，$\mathrm{B}_n(0,\ \log x_n)$ となり，(1)より，

$$x_{n+1}=e^{\log x_n+1},\quad x_{n+1}=ex_n$$

$\mathrm{A}_1(1,\ 0)$ から $x_1=1$ なので，$x_n=1\cdot e^{n-1}=e^{n-1}$

よって，$\mathrm{A}_n(e^{n-1},\ n-1)$，$\mathrm{A}_{n+1}(e^n,\ n)$ となり，求める面積 S_n は，

$$S_n=\frac{1}{2}e^n\{n-(n-1)\}-\left\{\int_{e^{n-1}}^{e^n}\log x\,dx-(e^n-e^{n-1})(n-1)\right\}$$

$$=\frac{1}{2}e^n+(n-1)e^n-(n-1)e^{n-1}-\Big[x\log x-x\Big]_{e^{n-1}}^{e^n}$$

$$=\frac{1}{2}e^n+(n-1)e^n-(n-1)e^{n-1}-ne^n+(n-1)e^{n-1}+e^n-e^{n-1}$$

$$=\frac{1}{2}e^n-e^{n-1}=\frac{1}{2}(e-2)e^{n-1}$$

(3)　(2)より，$\dfrac{n}{S_n}=\dfrac{2n}{(e-2)e^{n-1}}=\dfrac{2}{e-2}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^{n-1}$ となり，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k\left(\frac{1}{e}\right)^{k-1}$ とおくと，

$$\left(1-\frac{1}{e}\right)T_n=1+\frac{1}{e}+\left(\frac{1}{e}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{e}\right)^{n-1}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

$$=\frac{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n}{1-\frac{1}{e}}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n=\frac{e}{e-1}\left\{1-\left(\frac{1}{e}\right)^n\right\}-n\left(\frac{1}{e}\right)^n$$

よって，$T_n=\dfrac{e^2}{(e-1)^2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{e}\right)^n\right\}-\dfrac{e}{e-1}\cdot n\left(\dfrac{1}{e}\right)^n$となり，条件より，

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n}{S_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{e-2}T_n=\frac{2}{e-2}\cdot\frac{e^2}{(e-1)^2}=\frac{2e^2}{(e-2)(e-1)^2}$$

コメント

似た構図をよく見かける微積分の総合問題です。とにかく計算力がポイントです。

問　題

2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

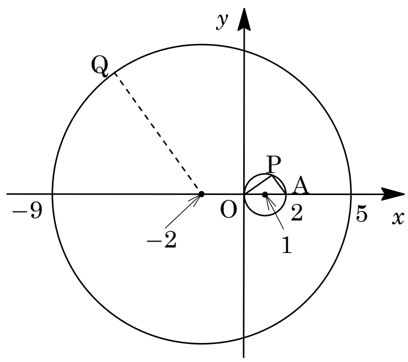
(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2) (1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2), (3)においては，3 点 O, P, Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。　[2016]

解答例



(1) $\mathrm{A}(2,\ 0)$ とおくと，線分 OA が円 C の直径となるので，$\angle\mathrm{APO}=\dfrac{\pi}{2}$ となる。

条件から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として $\angle\mathrm{AOP}=\theta$ より，

$$\mathrm{OP}=\mathrm{OA}\cos\theta=2\cos\theta$$

また，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\mathrm{OP}\cos\theta,\quad y=\mathrm{OP}\sin\theta$$

よって，$\mathrm{P}(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$ である。

(2) 中心$(-2,\ 0)$で半径 7 の円 D 上の点 Q を，$\mathrm{Q}(-2+7\cos\varphi,\ 7\sin\varphi)$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ とおくと，△OPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta\cdot7\sin\varphi-2\sin\theta\cos\theta(-2+7\cos\varphi)\right|$$
$$=\left|7\cos^2\theta\sin\varphi-7\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin\theta\cos\theta\right|$$
$$=\cos\theta\left|7(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)+2\sin\theta\right|=\cos\theta\left|7\sin(\varphi-\theta)+2\sin\theta\right|$$

ここで，θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，$\sin\theta>0$ で $-\theta\leqq\varphi-\theta<2\pi-\theta$ より，$\varphi-\theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき S は最大になる。

このとき，$\cos\varphi=-\sin\theta$，$\sin\varphi=\cos\theta$ より，$\mathrm{Q}(-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$ である。

(3) (2)より，S の最大値は，$S=\cos\theta\left|7+2\sin\theta\right|=\cos\theta(7+2\sin\theta)$

そこで，この φ と θ の関係を保ったまま，x 軸に関する対称性から点 P の y 座標が正，すなわち θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で動かすと，

$$S' = -\sin\theta(7+2\sin\theta) + \cos\theta\cdot 2\cos\theta = -7\sin\theta - 2\sin^2\theta + 2(1-\sin^2\theta)$$
$$= -4\sin^2\theta - 7\sin\theta + 2$$
$$= -(4\sin\theta - 1)(\sin\theta + 2)$$

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

そこで，$\sin\alpha = \frac{1}{4}\left(0 < \alpha < \frac{\pi}{2}\right)$とおくと，$S$は増減が右表のようになり，$\theta = \alpha$で最大となる。

そして，点 P が O, A に一致する場合も考え合わせて，Sの最大値は,

$$\cos\alpha(7+2\sin\alpha) = \sqrt{1-\frac{1}{16}}\left(7+2\cdot\frac{1}{4}\right) = \frac{15}{8}\sqrt{15}$$

コメント

2 変数関数の最大・最小問題ですが，まず 1 文字を固定して考えるという丁寧な誘導がついています。なお，(2)は図形的な処理も可能です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=x^{-2}2^x\quad(x\neq 0)$ について，$f'(x)>0$ となるための x に関する条件を求めよ。

(2)　方程式 $2^x=x^2$ は相異なる 3 個の実数解をもつことを示せ。

(3)　方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものをすべて求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$f(x)=x^{-2}2^x=\dfrac{2^x}{x^2}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{2^x\log 2\cdot x^2-2^x\cdot 2x}{x^4}=\frac{2^x(x\log 2-2)}{x^3}=\frac{2^x}{x^2}\cdot\frac{x\log 2-2}{x}$$

これより，$f'(x)>0$ となる条件は，$\dfrac{x\log 2-2}{x}>0$ すなわち $x(x\log 2-2)>0$ から，$x<0$，$\dfrac{2}{\log 2}<x$ である。

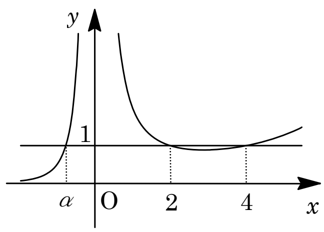
(2)　$x=0$ は方程式 $2^x=x^2$ を満たさないので，この方程式は，$x^{-2}2^x=1$ すなわち $f(x)=1$ と同値である。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{\log 2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\times$	$\searrow$		$\nearrow$

さて，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$\lim_{x\to-\infty}f(x)=0,\ \lim_{x\to 0}f(x)=\infty,\ \lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$$

さらに，$f(2)=f(4)=1$ に注意して，$y=f(x)$ と $y=1$ のグラフをかくと右図のようになる。



したがって，$f(x)=1$ すなわち $2^x=x^2$ は，相異なる 3 個の実数解 $x=\alpha$，2，4 をもつ。

(3)　まず，方程式 $2^x=x^2$ の解 $x=2$，4 は有理数なので，もう 1 つの負の解 $x=\alpha$ について有理数かどうかを調べる。

そこで，α が有理数と仮定し，$\alpha=-\dfrac{n}{m}$ (m, n は互いに素な自然数)とおくと，

$$2^{-\frac{n}{m}}=\left(-\frac{n}{m}\right)^2,\ 2^{-n}=\left(\frac{n^2}{m^2}\right)^m,\ \frac{1}{2^n}=\frac{n^{2m}}{m^{2m}}$$

m, n は互いに素より，$n^{2m}=1$ ……①，$m^{2m}=2^n$ ……②

①より $n=1$ となり，②に代入すると $m^{2m}=2$ であるが，この式を満たす自然数 m は存在しない。これより，α は有理数でない。

以上より，方程式 $2^x=x^2$ の解で有理数であるものは $x=2$，4 である。

コメント

微分の応用に関する問題です。(2)は(1)を誘導とした解法ですが，これを無視して直接的に $y=2^x$ と $y=x^2$ のグラフを描くことによって示しても構いません。実際，$x=2,\ 4$ という解はこちらの方法で見つけていますので。

問　題

関数 $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ について，次の問いに答えよ。必要ならば，任意の自然数 n に対して，$\lim\limits_{x\to+\infty} x^n e^{-x}=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1) $y=f(x)$ のグラフの変曲点を求め，グラフの概形をかけ。

(2) $a>0$ とする。点 $(0,\ a)$ を通る $y=f(x)$ のグラフの接線が 1 本だけ存在するような a の値を求めよ。また，a がその値をとるとき，$y=f(x)$ のグラフ，その接線および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2010]

解答例

(1) $f(x)=(x^2-x)e^{-x}$ に対して，

$$f'(x)=(2x-1)e^{-x}-(x^2-x)e^{-x}=-(x^2-3x+1)e^{-x}$$

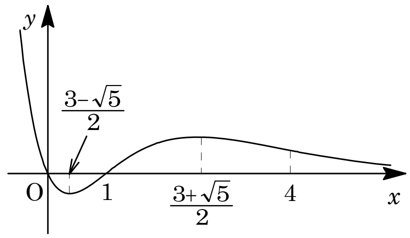
$$f''(x)=-(2x-3)e^{-x}+(x^2-3x+1)e^{-x}$$

$$=(x^2-5x+4)e^{-x}=(x-1)(x-4)e^{-x}$$

すると，$f(x)$ の増減，および $y=f(x)$ のグラフの凹凸は右表のようになる。

x	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$	4	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↘		↗	0	↗		↘	$\frac{12}{e^4}$	↘

これより，変曲点は 2 つ存在し，その座標は $(1,\ 0)$ と $\left(4,\ \frac{12}{e^4}\right)$ である。さらに，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ から，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2) 接点を $(t,\ (t^2-t)e^{-t})$ とおくと，接線は，

$$y-(t^2-t)e^{-t}=-(t^2-3t+1)e^{-t}(x-t),\quad y=-(t^2-3t+1)e^{-t}x+(t^3-2t^2)e^{-t}$$

点 $(0,\ a)$ を通るので，$a=(t^3-2t^2)e^{-t}$ ………(＊)

ここで，(＊)の右辺を $g(t)=(t^3-2t^2)e^{-t}$ とおくと，

$$g'(t)=(3t^2-4t)e^{-t}-(t^3-2t^2)e^{-t}$$

$$=(-t^3+5t^2-4t)e^{-t}$$

$$=-t(t-1)(t-4)e^{-t}$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになる。

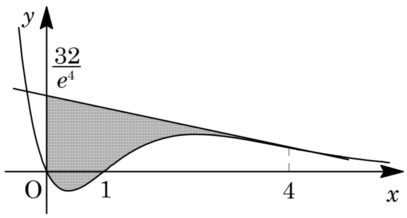
t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$	4	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	↗	0	↘	$-\frac{1}{e}$	↗	$\frac{32}{e^4}$	↘

さて，$y=f(x)$のグラフの概形から，異なる 2 点で接する接線は存在しないので，点$(0,\ a)$を通る$y=f(x)$のグラフの接線が 1 本である条件は, (*)がただ 1 つの実数解をもつ条件，すなわち$a>0$から$a=\dfrac{32}{e^4}$である。

このとき，$t=4$であり，接線の方程式は,

$$y=-\frac{5}{e^4}x+\frac{32}{e^4}$$

これより，$y=f(x)$のグラフ，その接線およびy軸で囲まれた$x\geqq 0$の部分の図形は，右図の網点部のようになり，その面積Sは,



$$S=\int_0^4\left\{-\frac{5}{e^4}x+\frac{32}{e^4}-(x^2-x)e^{-x}\right\}dx$$
$$=\Big[-\frac{5}{2e^4}x^2+\frac{32}{e^4}x\Big]_0^4+\Big[(x^2-x)e^{-x}\Big]_0^4-\int_0^4(2x-1)e^{-x}dx$$
$$=\frac{88}{e^4}+\frac{12}{e^4}+\Big[(2x-1)e^{-x}\Big]_0^4-\int_0^4 2e^{-x}dx$$
$$=\frac{100}{e^4}+\frac{7}{e^4}+1+2\Big[e^{-x}\Big]_0^4=\frac{109}{e^4}-1$$

コメント

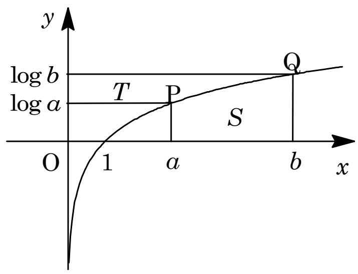
かなりの計算量ですが，内容は接線の本数に関する頻出問題です。ただ，複接線が存在しないことに関しては，図から明らかとして，感覚的に記述しています。

問　題

曲線$C: y=\log x$上の点$\mathrm{P}(a,\ \log a)$，点$\mathrm{Q}(b,\ \log b)$ $(1<a<b)$をとる。点 P, Q からx軸に下ろした 2 本の垂線とx軸および曲線Cで囲まれた部分の面積をSとする。点 P, Q からy軸に下ろした 2 本の垂線とy軸および曲線Cで囲まれた部分の面積をTとする。このとき，$S=T$となるようにbがとれるaの値の範囲を求めよ。

[2008]

解答例



$a\leqq x\leqq b$において，曲線$C: y=\log x$とx軸にはさまれた部分の面積Sは，

$$S=\int_a^b \log x\,dx=\left[\,x\log x-x\,\right]_a^b$$

$$=b\log b-a\log a-b+a$$

$\log a\leqq y\leqq \log b$において，曲線$C$と$y$軸にはさまれた部分の面積$T$は，

$$T=b\log b-a\log a-S=b-a$$

条件より，$S=T$のとき，$b\log b-a\log a=2(b-a)$となり，

$$\frac{b\log b-a\log a}{b-a}=2\ \cdots\cdots\cdots ①$$

以下，①を満たす$b(>a)$が存在する$a(>1)$の範囲を求める。

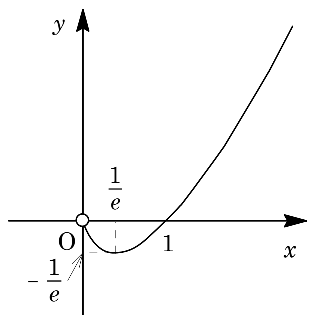
ここで，$f(x)=x\log x$とおくと，

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{e}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	$-\frac{1}{e}$	↗

$$f'(x)=\log x+x\cdot\frac{1}{x}=\log x+1$$

$$f''(x)=\frac{1}{x}>0$$

$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$より，$y=f(x)$のグラフは下に凸で，右図のようになる。



さて，①から，$\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}=2\ \cdots\cdots\cdots ②$

すると，②を満たす$b(>a)$が存在する$a(>1)$の条件は，

$f'(a)<\dfrac{f(b)-f(a)}{b-a}$より，

$$\log a+1<2$$

よって，$1<a<e$である。

コメント

②式を，曲線の割線の傾きとしてとらえ，接線の傾きとの関係を図形的に処理しています。

問　題

(1)　関数 $f(x)=2x^3-3x^2+1$ のグラフをかけ。

(2)　方程式 $f(x)=a$（a は実数）が相異なる 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもつとする。$l=\gamma-\alpha$ を β のみを用いて表せ。

(3)　a が(2)の条件のもとで変化するとき l の動く範囲を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=2x^3-3x^2+1$ より，

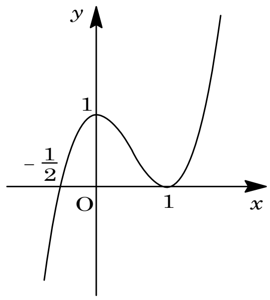
$$f'(x)=6x^2-6x=6x(x-1)$$

すると，$f(x)$ の値の変化は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	0	$\nearrow$

また，$f(x)=(2x+1)(x-1)^2$ から，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との共有点は，$x=-\dfrac{1}{2}$，1 である。

よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　(1)より，方程式 $f(x)=a$ は，$0<a<1$ のとき 3 つの実数解 $\alpha<\beta<\gamma$ をもち，

$$\alpha+\beta+\gamma=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots①,\quad \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$\alpha+\gamma=\dfrac{3}{2}-\beta$

②に代入して，$\alpha\gamma=-\beta(\alpha+\gamma)=-\beta\left(\dfrac{3}{2}-\beta\right)$

さて，$l=\gamma-\alpha$ より，

$$l^2=(\gamma-\alpha)^2=(\alpha+\gamma)^2-4\alpha\gamma=\left(\frac{3}{2}-\beta\right)^2+4\beta\left(\frac{3}{2}-\beta\right)=-3\beta^2+3\beta+\frac{9}{4}$$

よって，$l=\sqrt{-3\beta^2+3\beta+\dfrac{9}{4}}$

(3)　(2)より，$l=\sqrt{-3\left(\beta-\dfrac{1}{2}\right)^2+3}$ となり，$0<\beta<1$ から，

$$\frac{3}{2}<l\leqq\sqrt{3}$$

コメント

解 α，γ と β の関係をとらえるために，解と係数の関係に着目することがポイントとなっています。見かけよりスパイスの効いている 1 題です。

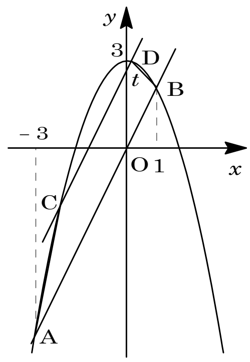
問　題

放物線$R: y=-x^2+3$と直線$l: y=2x$との交点を A, B とする。直線$y=2x+t$ $(t>0)$は放物線Rと相異なる 2 点$\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$で交わるものとする。

(1) 放物線Rと直線lとで囲まれた図形の面積Tを求めよ。

(2) 4 つの点 A, B, $\mathrm{C}(t)$, $\mathrm{D}(t)$を頂点とする台形の面積を$S(t)$とし，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}$とおく。$f(t)$の最大値を求めよ。 [2005]

解答例



(1) $R: y=-x^2+3$……①，$l: y=2x$……②の交点は,

$$-x^2+3=2x,\ x^2+2x-3=0$$

よって，$x=-3$, 1となり，

$$T=\int_{-3}^{1}(-x^2+3-2x)\,dx=\int_{-3}^{1}-(x+3)(x-1)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+3)^3=\frac{32}{3}$$

(2) 直線$y=2x+t$……③と①が異なる 2 点で交わる条件は,

$$-x^2+3=2x+t,\ x^2+2x+t-3=0\text{……④}$$

④の判別式$D/4=1-(t-3)>0$から，$0<t<4$となる。

このとき④の解は，$x=-1\pm\sqrt{4-t}$であり，これを$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とすると，$\mathrm{C}(\alpha,\ 2\alpha+t)$，$\mathrm{D}(\beta,\ 2\beta+t)$となることより，

$$\mathrm{CD}=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(2\beta+t-2\alpha-t)^2}=\sqrt{5}(\beta-\alpha)=2\sqrt{5}\cdot\sqrt{4-t}$$

また，$\mathrm{AB}=4\sqrt{5}$，原点と直線③の距離は，$\dfrac{|t|}{\sqrt{4+1}}=\dfrac{t}{\sqrt{5}}$となるので,

$$S=\frac{1}{2}(2\sqrt{5}\cdot\sqrt{4-t}+4\sqrt{5})\cdot\frac{t}{\sqrt{5}}=t(\sqrt{4-t}+2)$$

すると，$f(t)=\dfrac{S(t)}{T}=\dfrac{3}{32}t(\sqrt{4-t}+2)$

ここで，$s=\sqrt{4-t}$とおくと，$0<t<4$から$0<s<2$であり，

$$s^2=4-t,\ t=4-s^2$$

さらに，$f(t)=g(s)$とおくと，

$$g(s)=\frac{3}{32}(4-s^2)(s+2)=\frac{3}{32}(-s^3-2s^2+4s+8)$$

$$g'(s)=\frac{3}{32}(-3s^2-4s+4)$$

$$=-\frac{3}{32}(3s-2)(s+2)$$

s	0	…	$\frac{2}{3}$	…	2
$g'(s)$		+	0	−	
$g(s)$		↗	$\frac{8}{9}$	↘	

よって，$s=\dfrac{2}{3}$ のとき，$g(s)=f(t)$ は最大となり，最大値 $\dfrac{8}{9}$ をとる。

コメント

そのまま $f'(t)$ の計算をして $f(t)$ の増減を調べることも可能ですが，計算量を考え，置きかえをしました。

問　題

(1)　x を正数とするとき，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)$ と $\dfrac{1}{x+1}$ の大小を比較せよ。

(2)　$\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}$ の大小を比較せよ。　[2002]

解答例

(1)　$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)-\dfrac{1}{x+1}=\log(x+1)-\log x-\dfrac{1}{x+1}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=\frac{-1}{x(x+1)^2}<0$$

$f(x)$ は $x>0$ において単調減少で，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ より，$f(x)>0$

よって，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)>\dfrac{1}{x+1}$

(2)　$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x=x\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)=x\{\log(x+1)-\log x\}$ とおくと, (1)より，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}>0$$

よって，$g(x)$ は $x>0$ において単調増加である。

すると，$\dfrac{2001}{2002}<\dfrac{2002}{2001}$ より，$g\left(\dfrac{2001}{2002}\right)<g\left(\dfrac{2002}{2001}\right)$ となるので,

$$\log\left(1+\frac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\log\left(1+\frac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$$

したがって，$\left(1+\dfrac{2002}{2001}\right)^{\frac{2001}{2002}}<\left(1+\dfrac{2001}{2002}\right)^{\frac{2002}{2001}}$

コメント

(2)において $g(x)$ を設定するところがポイントです。$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x$ または $g(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$ でしょうが，前者の方が(1)と相性がよさそうです。

問　題

e を自然対数の底とする。$e \leqq p < q$ のとき，不等式 $\log(\log q) - \log(\log p) < \dfrac{q-p}{e}$ が成り立つことを証明せよ。 [2001]

解答例

$f(x) = \log(\log x)$ とおくと，$f'(x) = \dfrac{1}{x\log x}$ となり，$p \leqq x \leqq q$ において平均値の定理を適用すると，

$$\frac{f(q)-f(p)}{q-p} = f'(c) \ (p < c < q)$$

ここで, $e \leqq p < c$ より，$c\log c > e\log e = e$ なので,

$$f'(c) = \frac{1}{c\log c} < \frac{1}{e}$$

よって，$\dfrac{f(q)-f(p)}{q-p} < \dfrac{1}{e}$，$f(q)-f(p) < \dfrac{q-p}{e}$ より,

$$\log(\log q) - \log(\log p) < \frac{q-p}{e}$$

コメント

証明する不等式をみて，平均値の定理に気付けば，一瞬にして解決します。

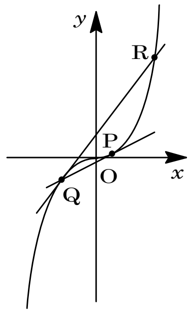
問　題

曲線$C: y = x^3$上を動く点$\mathrm{P}(t,\ t^3)$（ただし，$t \neq 0$）がある。点 P における C の接線と C とのもう一つの交点を Q とし，点 Q における C の接線と C とのもう一つの交点を R とする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PQR}$のとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

点$\mathrm{P}(t,\ t^3)$，$\mathrm{Q}(s,\ s^3)$，$\angle\mathrm{PQR} = \theta$とおく。

曲線$y = x^3$……①は原点対称なので，$t>0$ としても一般性を失わない。



①より，$y' = 3x^2$なので, P における接線は,

$$y = 3t^2(x - t) + t^3 = 3t^2x - 2t^3 \cdots\cdots②$$

①②より，$x^3 = 3t^2x - 2t^3$，$x^3 - 3t^2x + 2t^3 = 0$

$$(x - t)^2(x + 2t) = 0$$

$x = t,\ -2t$ より，$s = -2t$ ………③

ここで，直線 PQ の傾きは$3t^2$，直線 RQ の傾きは③を用いると$3s^2 = 12t^2$となる。

$$\tan\theta = \frac{12t^2 - 3t^2}{1 + 12t^2\cdot 3t^2} = \frac{9t^2}{1 + 36t^4}$$

さて，$3t^2 = u>0$ とし，$f(u) = \dfrac{3u}{1 + 4u^2}$ とおくと,

$$f'(u) = \frac{3(1 + 4u^2) - 3u\cdot 8u}{(1 + 4u^2)^2} = \frac{3(1 - 4u^2)}{(1 + 4u^2)^2}$$

u	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	∞
$f'(u)$		$+$	0	$-$	
$f(u)$	0	↗	$\frac{3}{4}$	↘	0

右表より，$u>0$ で$0<f(u)\leqq \dfrac{3}{4}$

すなわち，$0< \tan\theta\leqq \dfrac{3}{4}$

$1< \dfrac{1}{\cos^2\theta} \leqq 1 + \left(\dfrac{3}{4}\right)^2 = \dfrac{25}{16}$ より，$\dfrac{16}{25} \leqq \cos^2\theta <1$

$\tan\theta>0$ より θは鋭角なので，$\dfrac{4}{5} \leqq \cos\theta <1$

コメント

平面上の 2 直線のなす角の扱い方には，ベクトルの内積利用と tan の加法定理の利用という 2 種類があります。本問では cos を求めるので，前者で計算をしていきましたが，微分したところでスゴイ式が出てしまい沈没しました。そこで，それまでの計算を御破算にして作ったのが上の解です。

問　題

平面上に放物線$y=x^2$と直線$l: y=k$を考える。

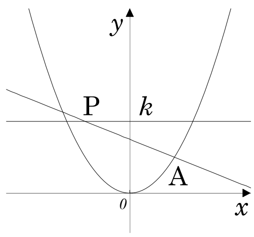
(1)　放物線上の点$(a,\ a^2)$での法線と直線lとの交点をPとし，そのx座標をbとする。bをaとkで表せ。

(2)　直線l上の点$\mathrm{P}(b,\ k)$を放物線の異なる3法線が通るようなbの範囲を求めよ。

[1998]

解答例

(1)　$y=x^2$，$y'=2x$から，点$\mathrm{A}(a,\ a^2)$における接線の方向ベクトルの成分は$(1,\ 2a)$とおくことができ，これが法線の法線ベクトルとなることより，法線の方程式は，



$$x-a+2a(y-a^2)=0$$

$$x+2ay-a-2a^3=0\cdots\cdots\cdots ①$$

①が点$\mathrm{P}(b,\ k)$を通ることより，

$$b+2ak-a-2a^3=0,\ \ b=2a^3-(2k-1)a\cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　放物線においては，1本の法線に対して1個の接点が対応するので，異なる3本の法線が存在する条件は，②をaに関する方程式とみたとき，②が異なる3実数解をもつことと同値である。

②の右辺を$f(a)$とおくと，$f'(a)=6a^2-(2k-1)$

(i)　$2k-1\leqq 0$ $\left(k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$のとき

$f'(a)\geqq 0$より$f(a)$は単調増加するので，②が3実数解をもつことはない。

(ii)　$2k-1>0$ $\left(k>\dfrac{1}{2}\right)$のとき

$$f'(a)=6\left(a+\sqrt{\frac{2k-1}{6}}\right)\left(a-\sqrt{\frac{2k-1}{6}}\right)$$

となり，ここで$\alpha=\sqrt{\dfrac{2k-1}{6}}$とおくと，

a	$\cdots$	$-\alpha$	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(a)$	↗		↘		↗

②が異なる3実数解をもつ条件は，$f(\alpha)<b<f(-\alpha)$

$$f(\alpha)=\alpha(2\alpha^2-2k+1)=\sqrt{\frac{2k-1}{6}}\cdot\frac{2-4k}{3}=-\frac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$$

$$f(-\alpha)=-\alpha(2\alpha^2-2k+1)=-\sqrt{\frac{2k-1}{6}}\cdot\frac{2-4k}{3}=\frac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$$

よって，$-\dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}<b<\dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$

(i)(ii)より，$k>\dfrac{1}{2}$のもとで$-\dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}<b<\dfrac{2k-1}{9}\sqrt{6(2k-1)}$

コメント

(2)の冒頭のコメントは，一般的には「法線の本数≦接点の個数」という関係があるからです。本問では，法線の法線ベクトルの成分が$(1,\ 2a)$となることから，「法線の本数＝接点の個数」であることがわかります。

問　題

$f_0(x)=xe^x$ として，正の整数 n に対して，$f_n(x)=\int_{-x}^{x} f_{n-1}(t)dt+f_{n-1}{}'(x)$ により実数 x の関数 $f_n(x)$ を定める。

(1)　$f_1(x)$ を求めよ。

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t dt$ とするとき，定積分 $\int_{-c}^{c} g(x)dx$ を求めよ。ただし，a，b，c は定数とする。

(3)　正の整数 n に対して，$f_{2n}(x)$ を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$f_0(x)=xe^x$ より，$f_0{}'(x)=e^x+xe^x=(1+x)e^x$ となり，

$$f_1(x)=\int_{-x}^{x} te^t\,dt+(1+x)e^x=\Big[\,te^t-e^t\,\Big]_{-x}^{x}+(1+x)e^x$$
$$=(x-1)e^x-(-x-1)e^{-x}+(1+x)e^x=2xe^x+(x+1)e^{-x}$$

(2)　$g(x)=\int_{-x}^{x}(at+b)e^t dt=\Big[\,(at+b)e^t\,\Big]_{-x}^{x}-a\int_{-x}^{x}e^t\,dt$

$$=(ax+b)e^x-(-ax+b)e^{-x}-ae^x+ae^{-x}$$
$$=(ax-a+b)e^x+(ax+a-b)e^{-x}$$

すると，$g(-x)=(-ax-a+b)e^{-x}+(-ax+a-b)e^x=-g(x)$ となり，$u=-x$ とおくと，

$$\int_{-c}^{c} g(x)dx=\int_{-c}^{c}-g(-x)dx=\int_{c}^{-c}-g(u)(-du)=-\int_{-c}^{c} g(u)du$$

よって，$\int_{-c}^{c} g(x)dx=0$ である。

(3)　$f_1(x)=\int_{-x}^{x} f_0(t)dt+f_0{}'(x)$ なので，(2)より，

$$\int_{-x}^{x} f_1(t)dt=\int_{-x}^{x} f_0{}'(t)dt=\Big[\,f_0(t)\,\Big]_{-x}^{x}=f_0(x)-f_0(-x)=xe^x+xe^{-x}$$

すると，$f_2(x)=\int_{-x}^{x} f_1(t)dt+f_1{}'(x)=xe^x+xe^{-x}+(2x+2)e^x+(1-x-1)e^{-x}$

$$=(3x+2)e^x$$

これより，a_n，b_n を定数として，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ と推測できるので，以下，0 以上の整数 n で，この式を数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=0$ のとき　$a_0=1$，$b_0=0$ である。

(ii)　$n=k$ のとき　$f_{2k}(x)=(a_kx+b_k)e^x$ であると仮定すると，

$$f_{2k+1}(x)=\int_{-x}^{x}f_{2k}(t)\,dt+f_{2k}{}'(x)$$

すると，$f_{2k+2}(x)=\int_{-x}^{x}f_{2k+1}(t)\,dt+f_{2k+1}{}'(x)$ ……①なので，(2)より，

$$\int_{-x}^{x}f_{2k+1}(t)\,dt=\int_{-x}^{x}f_{2k}{}'(t)\,dt=\Big[f_{2k}(t)\Big]_{-x}^{x}=f_{2k}(x)-f_{2k}(-x)$$
$$=(a_kx+b_k)e^x-(-a_kx+b_k)e^{-x}$$

$$f_{2k+1}{}'(x)=f_{2k}(x)-\{-f_{2k}(-x)\}+f_{2k}{}''(x)$$
$$=(a_kx+b_k)e^x+(-a_kx+b_k)e^{-x}+(a_kx+2a_k+b_k)e^x$$
$$=(2a_kx+2a_k+2b_k)e^x+(-a_kx+b_k)e^{-x}$$

よって，①より，$f_{2k+2}(x)=(3a_kx+2a_k+3b_k)e^x$ となる。

ここで，$a_{k+1}=3a_k$ ……②，$b_{k+1}=2a_k+3b_k$ ……③とおくと，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_{2n}(x)=(a_nx+b_n)e^x$ である。

さて，②より，$a_{n+1}=3a_n$ なので，$a_n=a_0\cdot 3^n=3^n$

また，③より，$b_{n+1}=2a_n+3b_n=3b_n+2\cdot 3^n$ なので，$\dfrac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\dfrac{b_n}{3^n}+\dfrac{2}{3}$ から，

$$\frac{b_n}{3^n}=\frac{b_0}{3^0}+\frac{2}{3}n=\frac{2}{3}n\,,\ \ b_n=\frac{2}{3}n\cdot 3^n=2n\cdot 3^{n-1}$$

以上より，$f_{2n}(x)=(3^nx+2n\cdot 3^{n-1})e^x$ である。

コメント

定積分の計算問題です。(2)の誘導を用いると計算量は減少しますが，それでもかなりの量があります。なお，(2)では $g(x)$ が奇関数であることを見つけたような記述をしていますが，これは文脈から「におい」を感じとった結果にすぎません。

問　題

関数 $f(x)$ と $g(\theta)$ を

$$f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt \quad (-1\leqq x\leqq 1)$$

$$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta) \quad (0\leqq\theta\leqq 2\pi)$$

で定める。

(1) 導関数 $g'(\theta)$ を求めよ。

(2) $g(\theta)$ を求めよ。

(3) $y=g(\theta)$ のグラフをかけ。 [2009]

解答例

(1) $f(x)=\int_{-1}^{x}\sqrt{1-t^2}\,dt$ ……①より，$f'(x)=\sqrt{1-x^2}$

また，$g(\theta)=f(\cos\theta)-f(\sin\theta)$ ……②より，

$$g'(\theta)=-f'(\cos\theta)\sin\theta-f'(\sin\theta)\cos\theta$$

$$=-\sqrt{1-\cos^2\theta}\,\sin\theta-\sqrt{1-\sin^2\theta}\,\cos\theta=-\sin\theta|\sin\theta|-\cos\theta|\cos\theta|$$

(2) ①より，$f(-1)=0$，$f(0)=\frac{\pi}{4}$，$f(1)=\frac{\pi}{2}$ となり，②から，

$$g(0)=f(1)-f(0)=\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{\pi}{2}\right)=f(0)-f(1)=-\frac{\pi}{4}$$

$$g(\pi)=f(-1)-f(0)=-\frac{\pi}{4},\ g\left(\frac{3\pi}{2}\right)=f(0)-f(-1)=\frac{\pi}{4}$$

(i) $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta-\cos^2\theta=-1,\ g(\theta)=-\theta+C_1$$

ここで，$g(0)=\frac{\pi}{4}$ から $C_1=\frac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\theta+\frac{\pi}{4}$

(ii) $\frac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ のとき

$$g'(\theta)=-\sin^2\theta+\cos^2\theta=\cos 2\theta,\ g(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta+C_2$$

ここで，$g\left(\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{\pi}{4}$ から $C_2=-\frac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\frac{1}{2}\sin 2\theta-\frac{\pi}{4}$

(iii) $\pi\leqq\theta\leqq\frac{3\pi}{2}$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta+\cos^2\theta=1,\ g(\theta)=\theta+C_3$$

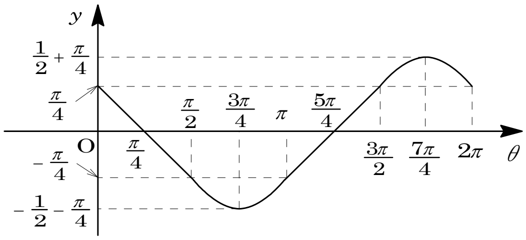
ここで，$g(\pi)=-\frac{\pi}{4}$ から $C_3=-\frac{5\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=\theta-\frac{5\pi}{4}$

(iv) $\frac{3\pi}{2}\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき

$$g'(\theta)=\sin^2\theta-\cos^2\theta=-\cos 2\theta,\ g(\theta)=-\frac{1}{2}\sin 2\theta+C_4$$

ここで，$g\left(\dfrac{3\pi}{2}\right)=\dfrac{\pi}{4}$ から $C_4=\dfrac{\pi}{4}$ となり，$g(\theta)=-\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\dfrac{\pi}{4}$

(3)　(2)より，(i)～(iv)の場合をまとめると，$y=g(\theta)$ のグラフは右図のようになる。



コメント

合成関数の微分についての興味深い問題です。なお，(2)の $f(0)$，$f(1)$ の値は，四分円，半円の面積をもとに導いています。

問　題

(1)　連続関数 $f(x)$ が，すべての実数 x について $f(\pi - x) = f(x)$ を満たすとき，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx = 0$ が成り立つことを証明せよ。

(2)　$\displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}\,dx$ を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$I = \displaystyle\int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx$ とし，$t = \pi - x$ とおくと，$dt = -dx$ から，

$$I = \int_{\pi}^{0}\left(\pi - t - \frac{\pi}{2}\right)f(\pi - t)(-dt) = -\int_0^{\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)f(\pi - t)\,dt$$

ここで，$f(\pi - x) = f(x)$ から，$I = -\displaystyle\int_0^{\pi}\left(t - \frac{\pi}{2}\right)f(t)\,dt = -I$ となり，

$$I = \int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx = 0$$

(2)　$f(x) = \dfrac{\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}$ とおくと，

$$f(\pi - x) = \frac{\sin^3(\pi - x)}{4 - \cos^2(\pi - x)} = \frac{\sin^3 x}{4 - \cos^2 x} = f(x)$$

すると，(1)より，$\displaystyle\int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx = 0$ となり，$J = \displaystyle\int_0^{\pi}\frac{x\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}\,dx$ とおくと，

$$J = \int_0^{\pi} xf(x)\,dx = \int_0^{\pi}\left(x - \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2}\right)f(x)\,dx = \int_0^{\pi}\frac{\pi}{2}f(x)\,dx$$

$$= \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{\sin^3 x}{4 - \cos^2 x}\,dx = \frac{\pi}{2}\int_0^{\pi}\frac{1 - \cos^2 x}{4 - \cos^2 x}\cdot\sin x\,dx$$

さらに，$\cos x = u$ とおくと，$-\sin x\,dx = du$ から，

$$J = \frac{\pi}{2}\int_1^{-1}\frac{1 - u^2}{4 - u^2}(-du) = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\frac{1 - u^2}{4 - u^2}\,du = \frac{\pi}{2}\int_{-1}^{1}\left(1 - \frac{3}{4 - u^2}\right)du$$

$$= \frac{\pi}{2}\left\{\Big[\,u\,\Big]_{-1}^{1} + \int_{-1}^{1}\frac{3}{(u+2)(u-2)}\,du\right\} = \frac{\pi}{2}\left\{2 + \frac{3}{4}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{u-2} - \frac{1}{u+2}\right)du\right\}$$

$$= \pi\left\{1 + \frac{3}{8}\Big[\log\left|\frac{u-2}{u+2}\right|\Big]_{-1}^{1}\right\} = \pi\left\{1 + \frac{3}{8}\left(\log\frac{1}{3} - \log 3\right)\right\} = \pi\left(1 - \frac{3}{4}\log 3\right)$$

コメント

置換積分の計算問題です。(1)のわかりやすい誘導があるために，方針に混乱は生じません。

問　題

多項式の列 $f_n(x)$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ が，$f_0(x)=2$，$f_1(x)=x$，

$$f_n(x)=xf_{n-1}(x)-f_{n-2}(x)\ ,\ n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$$

を満たすとする。

(1)　$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$，$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ であることを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，方程式 $f_n(x)=0$ の $|x|\leqq 2$ における最大の実数解を x_n とおく。このとき，$\displaystyle\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$n\geqq 0$ のとき，$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=0,\ 1$ のとき

$f_0(2\cos\theta)=2=2\cos(0\cdot\theta)$，$f_1(2\cos\theta)=2\cos(1\cdot\theta)$ より成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき

$f_k(2\cos\theta)=2\cos k\theta$，$f_{k+1}(2\cos\theta)=2\cos(k+1)\theta$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}f_{k+2}(2\cos\theta)&=2\cos\theta\, f_{k+1}(2\cos\theta)-f_k(2\cos\theta)\\&=2\cos\theta\cdot 2\cos(k+1)\theta-2\cos k\theta\\&=2\{\cos(k+2)\theta+\cos k\theta\}-2\cos k\theta=2\cos(k+2)\theta\end{aligned}$$

よって，$n=k+2$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f_n(2\cos\theta)=2\cos n\theta\quad(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$

(2)　$|x|\leqq 2$ より，$x=2\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，$f_n(x)=0$ から，

$$2\cos n\theta=0\ ,\ n\theta=k\pi+\frac{\pi}{2}\quad(k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1)$$

よって，$\theta=\dfrac{1}{n}\Bigl(k+\dfrac{1}{2}\Bigr)\pi$ から，$x=2\cos\dfrac{1}{n}\Bigl(k+\dfrac{1}{2}\Bigr)\pi$

x が最大になるのは，$k=0$ のときで，最大値 x_n は $x_n=2\cos\dfrac{\pi}{2n}$ となる。

このとき，$I_n=\displaystyle\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx=\int_{2\cos\frac{\pi}{2n}}^{2}f_n(x)\,dx$ に対して，$x=2\cos\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned}I_n&=\int_{\frac{\pi}{2n}}^{0}f_n(2\cos\theta)(-2\sin\theta)\,d\theta=4\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\cos n\theta\sin\theta\,d\theta\\&=2\int_0^{\frac{\pi}{2n}}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}d\theta=2\Bigl[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\Bigr]_0^{\frac{\pi}{2n}}\\&=-\frac{2}{n+1}\cos\frac{n+1}{2n}\pi+\frac{2}{n-1}\cos\frac{n-1}{2n}\pi+\frac{2}{n+1}-\frac{2}{n-1}\end{aligned}$$

まとめると,

$$I_n=-\frac{2}{n+1}\cos\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2n}\right)+\frac{2}{n-1}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2n}\right)-\frac{4}{(n+1)(n-1)}$$
$$=\frac{2}{n+1}\sin\frac{\pi}{2n}+\frac{2}{n-1}\sin\frac{\pi}{2n}-\frac{4}{(n+1)(n-1)}$$
$$=\frac{4n}{(n+1)(n-1)}\sin\frac{\pi}{2n}-\frac{4}{(n+1)(n-1)}$$

(3)　(2)より, $n^2I_n=\dfrac{4n^3}{(n+1)(n-1)}\sin\dfrac{\pi}{2n}-\dfrac{4n^2}{(n+1)(n-1)}$

$$=\frac{2\pi}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}-\frac{4}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\frac{1}{n}\right)}$$

$n\to\infty$のとき, $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\to 1$, $\dfrac{\sin\frac{\pi}{2n}}{\frac{\pi}{2n}}\to 1$より,

$$\lim_{n\to\infty}n^2\int_{x_n}^{2}f_n(x)\,dx=\lim_{n\to\infty}n^2I_n=2\pi-4$$

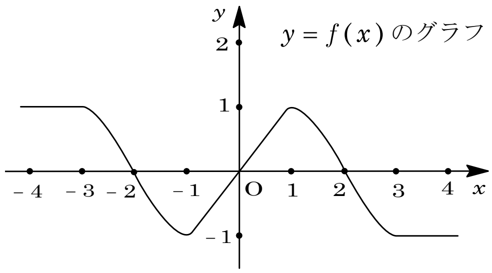
コメント

(2)において, θの範囲を$0\leqq\theta\leqq\pi$としても, 一般性は失われません。ちょっとしたことですが, この後の論理がスムーズに進められます。

問　題

各点で微分可能な関数 $y=f(x)$ のグラフが右の図で与えられている。このとき，$y=f'(x)$ と $y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフの概形を描け。また，そのようなグラフを描いたポイントを列挙して説明せよ。

[2003]



解答例

(1)　グラフより，$f(-x)=-f(x)$ なので，$-f'(-x)=-f'(x)$，$f'(-x)=f'(x)$

よって，$y=f'(x)$ のグラフは y 軸に関して対称となり，以下，$x\geqq 0$ で考える。

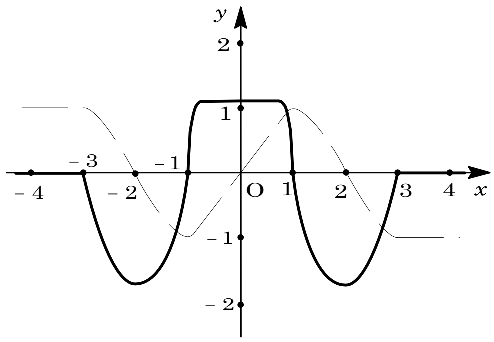
さて，$f'(x)$ は点 $(x,\ f(x))$ における $y=f(x)$ の接線の傾きを表すので，k を 1 より少し大きい値として，$0\leqq x<1$ のとき，$f'(x)=k$ となる。

$x=1$ のとき，$f'(1)=0$

$1<x\leqq 2$ のとき $f'(x)$ の値は単調に減少し，$2\leqq x<3$ のとき $f'(x)$ の値は単調に増加する。

$x\geqq 3$ のとき，$f'(x)=0$

したがって，$y=f'(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$f(-x)=-f(x)$ より，$\int_0^x f(-t)\,dt=-\int_0^x f(t)\,dt$ となり，$-t=u$ とおくと，

$$\int_0^x f(-t)\,dt=\int_0^{-x} f(u)(-du)=-\int_0^{-x} f(u)\,du=-\int_0^{-x} f(t)\,dt$$

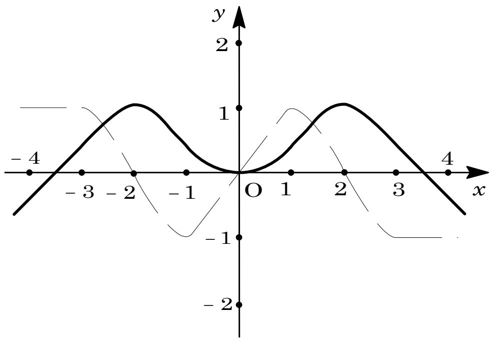
よって，$\int_0^{-x} f(t)\,dt=\int_0^x f(t)\,dt$ となるので，$y=\int_0^x f(t)\,dt$ のグラフは y 軸に関して対称となり，以下，$x\geqq 0$ で考える。

さて，$F(x)=\int_0^x f(t)\,dt$ は，区間 $[0,\ x]$ において $y=f(x)$ と x 軸にはさまれた領域の符号つき面積を表すので，k を 1 より少し大きい値として，$0\leqq x<1$ のとき，$F(x)=\dfrac{k}{2}x^2$ となる。

$1\leqq x\leqq 2$ のとき $F(x)$ の値は単調に増加し，$2\leqq x\leqq 3$ のとき $F(x)$ の値は単調に減少し，$F(3)=F(1)$ となる。

$x \geqq 3$ のとき，$F(x)$ は傾き -1 の直線となる。

したがって，$y = \int_0^x f(t)\,dt$ のグラフの概形は右図のようになる。



コメント

定性的にグラフを書く問題です。ところで，そのポイント説明は，この程度で十分なのでしょうか。

問　題

閉区間$[0,\ 2\pi]$上で定義された x の関数$f(x)=\int_0^\pi \sin\left(|t-x|+\frac{\pi}{4}\right)dt$の最大値および最小値とそのときの$x$の値をそれぞれ求めよ。 [2001]

解答例

$0\leqq x\leqq\pi$のときと，$\pi\leqq x\leqq 2\pi$のときに場合分けをする。

(i)　$0\leqq x\leqq\pi$のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^x \sin\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)dt+\int_x^\pi \sin\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right)dt\\&=\left[\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^x+\left[-\cos\left(t-x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_x^\pi\\&=\cos\frac{\pi}{4}-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)-\cos\left(\frac{5}{4}\pi-x\right)+\cos\frac{\pi}{4}\\&=\sqrt{2}-2\cos\frac{3}{4}\pi\cos\left(x-\frac{\pi}{2}\right)=\sqrt{2}+\sqrt{2}\sin x\end{aligned}$$

(ii)　$\pi\leqq x\leqq 2\pi$のとき

$$\begin{aligned}f(x)&=\int_0^\pi \sin\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)dt=\left[\cos\left(-t+x+\frac{\pi}{4}\right)\right]_0^\pi\\&=\cos\left(x-\frac{3}{4}\pi\right)-\cos\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right)\\&=2\sin\left(x-\frac{\pi}{4}\right)\end{aligned}$$

(i)(ii)より，$0\leqq x\leqq\pi$では最大値$2\sqrt{2}$ $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$，最小値$\sqrt{2}$ $(x=0,\ \pi)$であり，また$\pi\leqq x\leqq 2\pi$では最大値$\sqrt{2}$ $(x=\pi)$，最小値-2 $\left(x=\frac{7}{4}\pi\right)$である。

以上より，$f(x)$の最大値は$2\sqrt{2}$ $\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$，最小値は$-2$ $\left(x=\frac{7}{4}\pi\right)$である。

コメント

絶対値の付いた関数を積分するという頻出問題です。

問　題

N個（$N \geqq 2$）の箱の中に1回に1つずつ無作為に玉を入れてゆく。玉が2つ入った箱ができたら，そこでその手続きを中止する。ちょうどk回目で玉が2つ入った箱ができる確率を$P(N,\ k)$とする。

(1) $2 \leqq k \leqq N+1$のとき，$P(N,\ k)$を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)$を区分求積法を用いて求めよ。　[1999]

解答例

(1) まず, N個の箱に玉を1つずつk回入れるとき，N^k通りの場合がある。

また，ちょうどk回目で玉が2つ入った箱ができるのは，N個の箱から$k-1$個の箱を選んで玉を1つずつ入れ，k回目にその選んだ箱の1つに玉を入れる場合である。その場合の数は${}_N\mathrm{P}_{k-1}\times(k-1)$となる。

よって，$P(N,\ k)=\dfrac{{}_N\mathrm{P}_{k-1}\times(k-1)}{N^k}$

(2) $\log P(2N,\ N+1)=F$とおくと, (1)より,

$$
\begin{aligned}
F&=\log\frac{{}_{2N}\mathrm{P}_N\times N}{(2N)^{N+1}}=\log\frac{{}_{2N}\mathrm{P}_N}{2^{N+1}N^N}\\
&=\log\frac{1}{2^{N+1}}\cdot\frac{(N+1)(N+2)\cdots\cdots(N+N)}{N^N}\\
&=\log\frac{1}{2^{N+1}}\left(1+\frac{1}{N}\right)\left(1+\frac{2}{N}\right)\cdots\cdots\left(1+\frac{N}{N}\right)\\
&=-(N+1)\log 2+\log\left(1+\frac{1}{N}\right)+\log\left(1+\frac{2}{N}\right)+\cdots\cdots+\log\left(1+\frac{N}{N}\right)\\
&=-(N+1)\log 2+\sum_{k=1}^{N}\log\left(1+\frac{k}{N}\right)
\end{aligned}
$$

すると，
$$
\begin{aligned}
\frac{1}{N}F&=-\frac{N+1}{N}\log 2+\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\log\left(1+\frac{k}{N}\right)\\
&\to-\log 2+\int_0^1\log(1+x)\,dx\quad(n\to\infty)\\
&=-\log 2+\Big[\,(1+x)\log(1+x)\,\Big]_0^1-\int_0^1 dx=\log 2-1
\end{aligned}
$$

よって，$\displaystyle\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N}\log P(2N,\ N+1)=\log 2-1$

コメント

確率の極限と区分求積法の融合という2, 3年に一度，どこかの大学で出題されてきた問題です。確率の極限値を求めるときに区分求積法を用いるということに気付くのがポイントですが，誘導があるため，さほど難しくはありません。

問　題

不等式$0<a<1$を満たす定数 a に対して，曲線$C: y=a-1-\log x\ (x>0)$を考える。s を正の実数とし，曲線 C 上の点$\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$における接線が x 軸，y 軸と交わる点をそれぞれ$(u(s),\ 0)$，$(0,\ v(s))$とする。このとき，次の問いに答えよ。必要があれば，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x\log x=0$を証明なしで使ってよい。

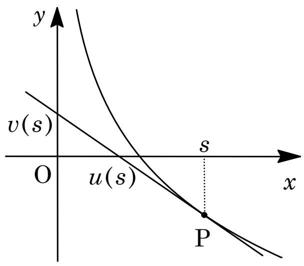
(1)　関数$u(s)$，$v(s)$を s の式で表せ。

(2)　関数$t=u(s)$，$t=v(s)$の 2 つのグラフを，増減・凹凸および交点の座標に注意して，同じ st 平面上に図示せよ。

(3)　関数$t=u(s)$，$t=v(s)$の 2 つのグラフで囲まれた図形を t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　曲線$C: y=a-1-\log x\ (0<a<1)$に対し，$y'=-\dfrac{1}{x}$ より，C 上の点$\mathrm{P}(s,\ a-1-\log s)$における接線の式は，



$$y-(a-1-\log s)=-\frac{1}{s}(x-s)$$

$$y=-\frac{1}{s}x+a-\log s\cdots\cdots\cdots①$$

①が$(u(s),\ 0)$を通ることより，

$$0=-\frac{1}{s}u(s)+a-\log s,\ u(s)=s(a-\log s)\cdots\cdots\cdots②$$

また，①が$(0,\ v(s))$を通ることより，$v(s)=a-\log s\cdots\cdots\cdots③$

(2)　②より，$u'(s)=(a-\log s)-1=a-\log s-1$

そこで，$u'(s)=0$とすると，$\log s=a-1$から$s=e^{a-1}$となり，

$$u(e^{a-1})=e^{a-1}(a-a+1)=e^{a-1}$$

また，$\displaystyle\lim_{s\to+0}u(s)=\lim_{s\to+0}s(a-\log s)=0$

$$\lim_{s\to\infty}u(s)=\lim_{s\to\infty}s(a-\log s)=-\infty$$

s	0	$\cdots$	e^{a-1}	$\cdots$
$u'(s)$		$+$	0	$-$
$u(s)$	0	$\nearrow$	e^{a-1}	$\searrow$

すると，$u(s)$の増減は右表のようになる。

さらに，$u''(s)=-\dfrac{1}{s}<0$から，$t=u(s)$のグラフはつねに上に凸である。

次に，③より，$v'(s)=-\dfrac{1}{s}<0$，$v''(s)=\dfrac{1}{s^2}>0$ より，$v(s)$ は単調に減少し，$t=v(s)$のグラフはつねに下に凸となり，

$$\lim_{s\to+0}v(s)=\lim_{s\to+0}(a-\log s)=\infty,\ \lim_{s\to\infty}v(s)=\lim_{s\to\infty}(a-\log s)=-\infty$$

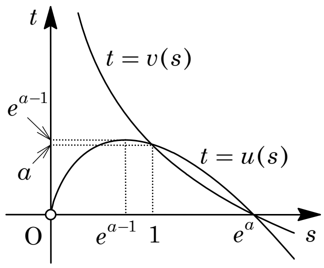
ここで，$t=u(s)$ と $t=v(s)$ のグラフの共有点は，

$$s(a-\log s)=a-\log s\,,\ (s-1)(a-\log s)=0$$

すると，$s=1$，e^a となり，その座標は，

$$(1,\ a)\,,\ (e^a,\ 0)$$

さらに，$a-1<0<a$ から，$e^{a-1}<1<e^a$ となり，これをもとに $t=u(s)$，$t=v(s)$ のグラフを描くと，右図のようになる。



(3)　$t=u(s)$，$t=v(s)$ のグラフで囲まれた図形を，t 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\int_1^{e^a}2\pi s\{u(s)-v(s)\}ds=2\pi\int_1^{e^a}s(s-1)(a-\log s)ds$$

ここで，$\log s=u\ (s=e^u)$ とおくと，$ds=e^u du$ となり，

$$V=2\pi\int_0^a e^u(e^u-1)(a-u)e^u du=2\pi\int_0^a(a-u)(e^{3u}-e^{2u})du$$

$$=2\pi\Big\{\Big[(a-u)\Big(\frac{1}{3}e^{3u}-\frac{1}{2}e^{2u}\Big)\Big]_0^a+\int_0^a\Big(\frac{1}{3}e^{3u}-\frac{1}{2}e^{2u}\Big)du\Big\}$$

$$=2\pi\Big\{-a\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{2}\Big)+\Big[\frac{1}{9}e^{3u}-\frac{1}{4}e^{2u}\Big]_0^a\Big\}=2\pi\Big\{\frac{a}{6}+\frac{1}{9}(e^{3a}-1)-\frac{1}{4}(e^{2a}-1)\Big\}$$

$$=\pi\Big(\frac{2}{9}e^{3a}-\frac{1}{2}e^{2a}+\frac{a}{3}+\frac{5}{18}\Big)$$

コメント

微積分の総合問題です。標準的な内容ですが，計算量や記述量はかなりあります。なお，(3)の求積は円筒分割を利用しています。

問　題

空間内にある半径 1 の球（内部を含む）を B とする。直線 l と B が交わっており，その交わりは長さ $\sqrt{3}$ の線分である。

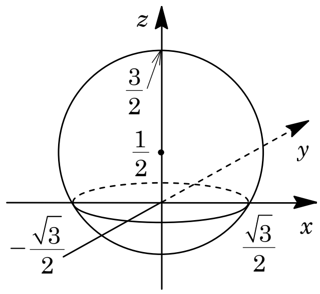
(1) B の中心と l との距離を求めよ。

(2) l のまわりに B を 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2014]

解答例

(1) 半径 1 の球 B の中心から直線 l に垂線を下ろすと，その足は長さ $\sqrt{3}$ の線分の中点となり，B の中心と l との距離 d は，

$$d=\sqrt{1^2-\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2}=\frac{1}{2}$$



(2) 直線 l を x 軸とすると，(1)から B の球面は，

$$x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，B を x 軸に垂直な平面 $x=k$ ……②で切断したときの断面は，①②を連立して，

$$y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2=1-k^2$$

これより，断面は平面 $x=k$ 上で，点 $\left(k,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\sqrt{1-k^2}$ の円であることがわかる。なお，yz 平面に関する対称性より，以下，$0 \leqq k \leqq 1$ で考える。

(i) $0 \leqq k \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，半径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ の円板となり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2=\pi\left(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\right)$$

(ii) $\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

断面を平面 $x=k$ 上で，x 軸のまわりに 1 回転すると，外径 $\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}$ で内径 $\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}$ のドーナツ形となり，その面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi\left(\frac{1}{2}+\sqrt{1-k^2}\right)^2-\pi\left(\frac{1}{2}-\sqrt{1-k^2}\right)^2=2\pi\sqrt{1-k^2}$$

(i)(ii)より，求める立体の体積を V とすると，対称性を考えて，

$$V=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\Big(\frac{5}{4}-k^2+\sqrt{1-k^2}\Big)dk+2\pi\int_{\frac{\sqrt{3}}{2}}^{1}2\sqrt{1-k^2}\,dk$$

$$=2\pi\Big[\frac{5}{4}k-\frac{k^3}{3}\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+2\pi\Big(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big)+4\pi\Big(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{1}{2}\Big)$$

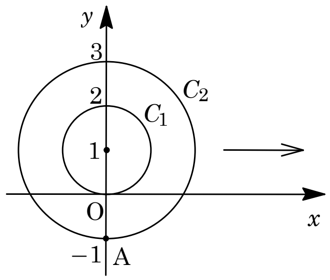
$$=\sqrt{3}\pi+\pi\Big(\frac{\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{4}\Big)+\pi\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}\Big)=\pi\Big(\frac{2\pi}{3}+\frac{3\sqrt{3}}{4}\Big)$$

コメント

立体の回転体の求積についての頻出問題です。要演習の１題です。

問　題

半径 1 の円盤 C_1 が半径 2 の円盤 C_2 に貼り付けられており，2 つの円盤の中心は一致する。図のように，時刻 $t=0$ において C_1 は $\mathrm{O}(0,\ 0)$ で x 軸に接し，A は座標 $(0,\ -1)$ の位置にある。2 つの円盤は一体となり，C_1 は x 軸上をすべることなく転がっていく。時刻 t で C_1 の中心が点 $(t,\ 1)$ にあるように転がるとき，$0\leqq t\leqq 2\pi$ において A が描く曲線を C とする。

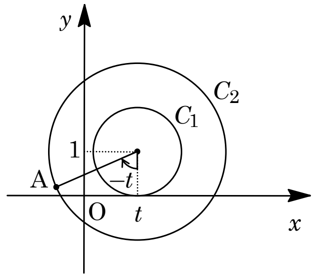


(1)　時刻 t における A の座標を $(x(t),\ y(t))$ で表す。$(x(t),\ y(t))$ を求めよ。

(2)　$x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減を調べ，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの A の座標をすべて求めよ。

(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　時刻 t において，回転角が t なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(t,\ 1)+2\left(\cos\left(\frac{3}{2}\pi-t\right),\ \sin\left(\frac{3}{2}\pi-t\right)\right)$$
$$=(t,\ 1)+2(-\sin t,\ -\cos t)$$
$$=(t-2\sin t,\ 1-2\cos t)$$

よって，$(x(t),\ y(t))=(t-2\sin t,\ 1-2\cos t)$

(2)　(1)より，$x'(t)=1-2\cos t$，$y'(t)=2\sin t$

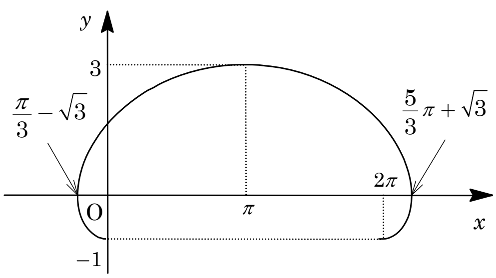
さて，$0\leqq t\leqq 2\pi$ において，$x(t)$ と $y(t)$ の t に関する増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{5}{3}\pi$	$\cdots$	2π
$x'(t)$		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	
$x(t)$	0	↘		↗	π	↗		↘	2π
$y'(t)$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0
$y(t)$	-1	↗	0	↗	3	↘	0	↘	-1

$t=\frac{\pi}{3}$，$\frac{5}{3}\pi$ での $x(t)$ の値は，それぞれ $\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}$，$\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}$ である。

よって，$x(t)$ あるいは $y(t)$ が最大値または最小値をとるときの点 A の座標は，

$$(0,\ -1),\ \left(\frac{\pi}{3}-\sqrt{3},\ 0\right),\ (\pi,\ 3),$$
$$\left(\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3},\ 0\right),\ (2\pi,\ -1)$$



(3)　C と x 軸で囲まれた図形の面積を S とすると,

$$S=\int_{\frac{\pi}{3}-\sqrt{3}}^{\frac{5}{3}\pi+\sqrt{3}} y\,dx=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(1-2\cos t)(1-2\cos t)\,dt$$

$$=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(1-4\cos t+4\cos^2 t)\,dt=\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}(3-4\cos t+2\cos 2t)\,dt$$

$$=\Big[\,3t-4\sin t+\sin 2t\,\Big]_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{5}{3}\pi}=4\pi+4\sqrt{3}-\sqrt{3}=4\pi+3\sqrt{3}$$

コメント

有名なサイクロイドと同じように考えれば，違和感もないでしょう。計算量も少なめです。

問　題

a を正の定数とし, xy 平面上の曲線 C の方程式を $y=x^3-a^2x$ とする。

(1) C 上の点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線を l とする。l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。ただし, t は 0 でないとする。

(2) b を実数とする。C の接線のうち xy 平面上の点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものの本数を求めよ。

(3) C の接線のうち点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通るものが 2 本のみの場合を考え, それらの接線を l_1, l_2 とする。ただし, l_1 と l_2 はどちらも原点 $(0,\ 0)$ を通らないとする。l_1 と C で囲まれた図形の面積を S_1 とし, l_2 と C で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1\geqq S_2$ として, $\dfrac{S_1}{S_2}$ の値を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $C: y=x^3-a^2x$ ……①に対して, $y'=3x^2-a^2$ となり, 点 $\mathrm{A}(t,\ t^3-a^2t)$ における C の接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-a^2t)=(3t^2-a^2)(x-t),\ \ y=(3t^2-a^2)x-2t^3 \cdots\cdots\text{③}$$

①②を連立して, $x^3-a^2x=(3t^2-a^2)x-2t^3$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0,\ \ (x-t)^2(x+2t)=0$$

よって, $x=t,\ -2t$ となり, $t\neq 0$ から, l と C で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は,

$$S(t)=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x+2t)\,dt\right|=\left|\int_{-2t}^{t}(x-t)^2(x-t+3t)\,dt\right|$$

$$=\left|\int_{-2t}^{t}\left\{(x-t)^3+3t(x-t)^2\right\}dt\right|=\left|\left[\frac{1}{4}(x-t)^4+t(x-t)^3\right]_{-2t}^{t}\right|$$

$$=\left|-\frac{81}{4}t^4+27t^4\right|=\frac{27}{4}t^4$$

(2) 接線 l が点 $\mathrm{B}(2a,\ b)$ を通る条件は,

$$b=(3t^2-a^2)\cdot 2a-2t^3,\ \ -2t^3+6at^2-2a^3=b\cdots\cdots\text{④}$$

ここで, $f(t)=-2t^3+6at^2-2a^3$ とおくと,

$$f'(t)=-6t^2+12at=-6t(t-2a)$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	$2a$	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-2a^3$	$\nearrow$	$6a^3$	$\searrow$

さて, 曲線 C には異なる 2 点で接する接線が存在しないので, ④の実数解の個数は接線の本数と等しい。

よって, 接線の本数は, $-2a^3<b<6a^3$ のとき 3 本, $b=-2a^3$, $6a^3$ のとき 2 本, $b<-2a^3$, $6a^3<b$ のとき 1 本である。

(3) (i) $b=-2a^3$ のとき

④より, $-2t^3+6at^2=0$ となり, $t=0,\ 3a$

すると，$t=0$ のとき接線 l は原点を通るので不適である。

(ii)　$b=6a^3$ のとき

④より，$-2t^3+6at^2-8a^3=0$ となり，$(t-2a)^2(t+a)=0$

(1)より，l と C で囲まれた図形の面積は，$t=2a$ のとき $\dfrac{27}{4}\cdot(2a)^4=16\cdot\dfrac{27}{4}a^4$ であり，$t=-a$ のとき $\dfrac{27}{4}\cdot(-a)^4=\dfrac{27}{4}a^4$ となる。

すると，$S_1 \geqq S_2$ から，$S_1=16\cdot\dfrac{27}{4}a^4$，$S_2=\dfrac{27}{4}a^4$ となり，$\dfrac{S_1}{S_2}=16$ である。

コメント

3 次曲線を題材とした微積分の典型題の集まりです。

問　題

$-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ とする。xyz 空間内の平面 $z=0$ の上に長方形

$$R_s=\{(x,\ y,\ 0)\mid 1\leqq x\leqq 2+4s,\ 1\leqq y\leqq 2-3s\}$$

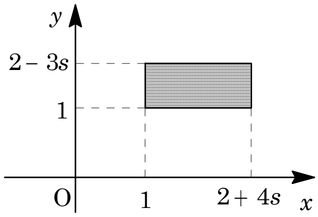
がある。長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体を K_s とする。

(1)　立体 K_s の体積 $V(s)$ が最大となるときの s の値，およびそのときの $V(s)$ の値を求めよ。

(2)　s を(1)で求めた値とする。このときの立体 K_s を y 軸のまわりに 1 回転してできる立体 L の体積を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　右図の長方形 R_s を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体 K_s の体積 $V(s)$ は，



$$V(s)=\pi\{(2-3s)^2-1^2\}(2+4s-1)$$
$$=3\pi(3s^2-4s+1)(4s+1)$$
$$V'(s)=3\pi\{(6s-4)(4s+1)+4(3s^2-4s+1)\}$$
$$=6\pi s(18s-13)$$

すると，$-\frac{1}{4}<s<\frac{1}{3}$ における $V(s)$ の増減は右表のようになる。

s	$-\frac{1}{4}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$V'(s)$		$+$	0	$-$	
$V(s)$		$\nearrow$	3π	$\searrow$	

よって，$V(s)$ は，$s=0$ のとき最大値 3π をとる。

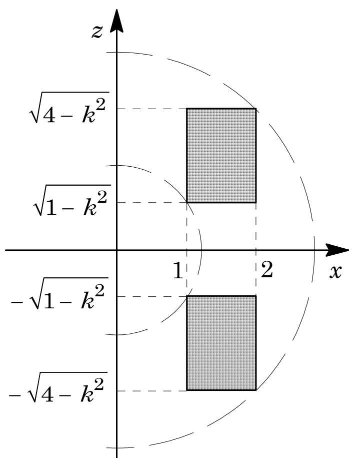
(2)　$s=0$ のとき，長方形 $R_s:1\leqq x\leqq 2,\ 1\leqq y\leqq 2$ となり，立体 K_s を表す式は，

$$1\leqq y^2+z^2\leqq 4,\ 1\leqq x\leqq 2$$

さて，立体 K_s を，平面 $y=k$ で切断したときの断面は，

$$1-k^2\leqq z^2\leqq 4-k^2\ \cdots\cdots\cdots①,\ 1\leqq x\leqq 2\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，断面の存在する k の範囲は，$-2\leqq k\leqq 2$ であるが，xz 平面に関する対称性から，以下，$0\leqq k\leqq 2$ で考える。



(i)　$0\leqq k\leqq 1$ のとき

①より，$\sqrt{1-k^2}\leqq|z|\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。

この断面を y 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ形の図形の外径を R，内径を r とすると，

$$R^2=2^2+(\sqrt{4-k^2}\,)^2=8-k^2,\quad r^2=1^2+(\sqrt{1-k^2}\,)^2=2-k^2$$

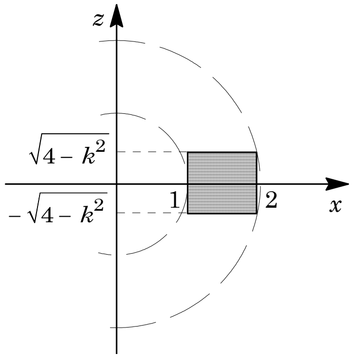
よって，このドーナツ形の面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=6\pi$$

(ii)　$1\leqq k\leqq 2$のとき

$1-k^2\leqq 0$より，①から，$-\sqrt{4-k^2}\leqq z\leqq\sqrt{4-k^2}$

②と合わせると，断面は右図のようになる。



この断面を y 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ形の図形の外径を R, 内径を r とすると，

$$R^2=2^2+(\sqrt{4-k^2}\,)^2=8-k^2,\quad r^2=1^2$$

よって，この図形の面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(7-k^2)$$

(i)(ii)より，立体 L の体積 Vは，

$$V=2\int_0^2 S(k)\,dk=2\int_0^1 6\pi\,dk+2\int_1^2\pi(7-k^2)\,dk=12\pi+2\pi\Big[\,7k-\frac{k^3}{3}\,\Big]_1^2$$

$$=12\pi+\frac{28}{3}\pi=\frac{64}{3}\pi$$

コメント

立体の回転体の体積を求める問題で，20 年ほど前にはよく見かけました。回転軸に垂直に切った断面の形状を考えることがポイントです。なお，上の解答例で用いた円柱面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

数列$\{a_n\}$ $(a_n > 0)$を次の規則によって定める。

$$a_1 = 1,\ \int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = 1\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

曲線$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$と，$x$ 軸および 2 直線$x = a_n$，$x = a_{n+1}$で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積をV_nとする。このとき$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n$を求めよ。　　[2007]

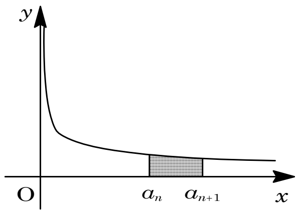
解答例

まず，$\displaystyle\int_{a_n}^{a_{n+1}} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} = \int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-\frac{1}{3}}dx = \frac{3}{2}\Big[x^{\frac{2}{3}}\Big]_{a_n}^{a_{n+1}} = \frac{3}{2}\Big({a_{n+1}}^{\frac{2}{3}} - {a_n}^{\frac{2}{3}}\Big)$なので，条件より，

$$\frac{3}{2}\Big({a_{n+1}}^{\frac{2}{3}} - {a_n}^{\frac{2}{3}}\Big) = 1,\ {a_{n+1}}^{\frac{2}{3}} - {a_n}^{\frac{2}{3}} = \frac{2}{3}$$

すると，$a_1 = 1$から，${a_n}^{\frac{2}{3}} = {a_1}^{\frac{2}{3}} + \dfrac{2}{3}(n-1) = \dfrac{1}{3}(2n+1)$

よって，$a_n = \Big\{\dfrac{1}{3}(2n+1)\Big\}^{\frac{3}{2}}$



さて，曲線$y = \dfrac{1}{\sqrt[3]{x}}$と，$x$ 軸，2 直線$x = a_n$，$x = a_{n+1}$で囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させた回転体の体積V_nは，

$$V_n = \pi\int_{a_n}^{a_{n+1}}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{x}}\Big)^2 dx = \pi\int_{a_n}^{a_{n+1}} x^{-\frac{2}{3}}dx$$

$$= 3\pi\Big[x^{\frac{1}{3}}\Big]_{a_n}^{a_{n+1}} = 3\pi\Big({a_{n+1}}^{\frac{1}{3}} - {a_n}^{\frac{1}{3}}\Big)$$

ここで，${a_n}^{\frac{1}{3}} = \Big[\Big\{\dfrac{1}{3}(2n+1)\Big\}^{\frac{3}{2}}\Big]^{\frac{1}{3}} = \Big\{\dfrac{1}{3}(2n+1)\Big\}^{\frac{1}{2}} = \sqrt{\dfrac{1}{3}(2n+1)}$より，

$$V_n = 3\pi\Big\{\sqrt{\frac{1}{3}(2n+3)} - \sqrt{\frac{1}{3}(2n+1)}\Big\} = \sqrt{3}\pi(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1})$$

すると，$\sqrt{n}\,V_n = \sqrt{3}\pi\sqrt{n}(\sqrt{2n+3} - \sqrt{2n+1}) = \sqrt{3}\pi\cdot\dfrac{2\sqrt{n}}{\sqrt{2n+3} + \sqrt{2n+1}}$から，

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt{n}\,V_n = \sqrt{3}\pi\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2+\frac{3}{n}} + \sqrt{2+\frac{1}{n}}} = \frac{2\sqrt{3}}{2\sqrt{2}}\pi = \frac{\sqrt{6}}{2}\pi$$

コメント

積分を計算して，数列$\Big\{{a_n}^{\frac{2}{3}}\Big\}$が等差数列であることを見抜けば，後半は計算練習にすぎません。

問　題

この問題では, e は自然対数の底, $\log$ は自然対数を表す。

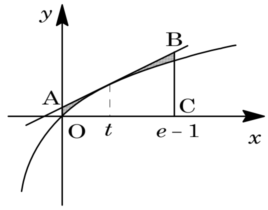
実数 a, b に対して，直線 $l : y = ax + b$ は曲線 $C : y = \log(x+1)$ と，x 座標が $0 \leqq x \leqq e-1$ を満たす点で接しているとする。

(1) このときの点 $(a,\ b)$ の存在範囲を求め, ab 平面上に図示せよ。

(2) 曲線 C および 3 つの直線 l, $x = 0$, $x = e-1$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と，このときの面積を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $y = \log(x+1)$ より，$y' = \dfrac{1}{x+1}$



$0 \leqq t \leqq e-1$ として，接点を $(t,\ \log(t+1))$ とすると，接線の方程式は,

$$y = \frac{1}{t+1}(x-t) + \log(t+1)$$
$$= \frac{1}{t+1}x - \frac{t}{t+1} + \log(t+1)$$

この方程式が $y = ax + b$ と一致するので,

$$a = \frac{1}{t+1} \cdots\cdots\cdots ①,\quad b = -\frac{t}{t+1} + \log(t+1) \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$t+1 = \dfrac{1}{a}$，$t = \dfrac{1}{a} - 1$

②に代入して，$b = -1 + a - \log a \cdots\cdots\cdots ③$

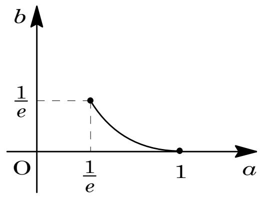
ここで，$0 \leqq t \leqq e-1$ より，$\dfrac{1}{e} \leqq a \leqq 1$

③より，$b' = 1 - \dfrac{1}{a} = \dfrac{a-1}{a}$

$$b'' = \frac{1}{a^2} > 0$$

a	$\frac{1}{e}$	$\cdots$	1
b'		$-$	0
b	$\frac{1}{e}$	↘	0

よって，点 $(a,\ b)$ の存在範囲は右図のようになる。



(2) 台形 AOCB の面積を S_0 とすると,

$$\mathrm{OA} = b,\quad \mathrm{CB} = a(e-1) + b$$
$$S_0 = \frac{b + a(e-1) + b}{2} \cdot (e-1) = \frac{e-1}{2}\left\{(e-1)a + 2b\right\}$$

ここで，$f(t) = (e-1)a + 2b$ とおくと，①②より,

$$f(t) = \frac{e-1}{t+1} - \frac{2t}{t+1} + 2\log(t+1) = \frac{e+1}{t+1} + 2\log(t+1) - 2$$

$$f'(t)=-\frac{e+1}{(t+1)^2}+\frac{2}{t+1}=\frac{2t-e+1}{(t+1)^2}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{e-1}{2}$	$\cdots$	$e-1$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

右表より，$t=\dfrac{e-1}{2}$ のとき $f(t)$ は最小値をとる。

$$f\left(\frac{e-1}{2}\right)=\frac{2(e+1)}{(e-1)+2}+2\log\left(\frac{e-1}{2}+1\right)-2=2\log\frac{e+1}{2}$$

さて，求める網点部の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=S_0-\int_0^{e-1}\log(x+1)\,dx\\&=\frac{e-1}{2}f(t)-\left\{\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^{e-1}-\int_0^{e-1}dx\right\}\\&=\frac{e-1}{2}f(t)-e+(e-1)=\frac{e-1}{2}f(t)-1\end{aligned}$$

以上より，S は $t=\dfrac{e-1}{2}$ のとき，最小値 $\dfrac{e-1}{2}f\left(\dfrac{e-1}{2}\right)-1=(e-1)\log\dfrac{e+1}{2}-1$ をとる。

このとき，①より $a=\dfrac{2}{e+1}$，②より $b=-\dfrac{e-1}{e+1}+\log\dfrac{e+1}{2}$

コメント

微積分総合と称される分野の典型問題です。(2)は図形的に考えてもよいのですが，ここではオーソドックスに解きました。

問　題

曲線$y=\log x$　$(x>0)$上の点$\mathrm{P}(a,\ \log a)$　$(a>1)$での接線を l とし，P から x 軸へおろした垂線の足を H とする。さらに，接線 l と x 軸，および曲線$y=\log x$で囲まれた図形の面積をS_1，曲線と x 軸，および線分 PH で囲まれた図形の面積をS_2とする。

(1)　S_1，S_2を求めよ。

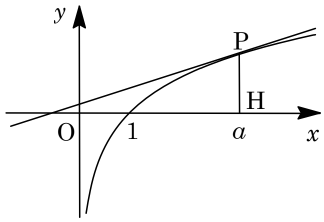
(2)　$a\to\infty$のときの$\dfrac{S_1}{S_2\cdot\mathrm{PH}}$の極限を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$y=\log x$，$y'=\dfrac{1}{x}$より，$l: y=\dfrac{1}{a}(x-a)+\log a=\dfrac{1}{a}x-1+\log a$ ………①

l と x 軸との交点は①より，

$$0=\frac{1}{a}x-1+\log a,\ \ x=a(1-\log a)$$



すると，右図より，

$$S_1+S_2=\frac{1}{2}\{a-a(1-\log a)\}\log a$$
$$=\frac{1}{2}a(\log a)^2$$

$$S_2=\int_1^a \log x\,dx=\Big[\,x\log x-x\,\Big]_1^a=a\log a-a+1$$

よって，$S_1=\dfrac{1}{2}a(\log a)^2-S_2=\dfrac{1}{2}a(\log a)^2-a\log a+a-1$

(2)

$$\frac{S_1}{S_2\cdot\mathrm{PH}}=\frac{\frac{1}{2}a(\log a)^2-a\log a+a-1}{(a\log a-a+1)\log a}$$
$$=\frac{\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{\log a}+\dfrac{1}{(\log a)^2}-\dfrac{1}{a(\log a)^2}}{1-\dfrac{1}{\log a}+\dfrac{1}{a\log a}}$$
$$\to\frac{1}{2}\ (a\to\infty)$$

コメント

(1)は基本的な積分計算，(2)は特別な工夫も要求されない極限計算です。