《2018 入試対策》

九州大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された九州大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 九大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」や「コンピュータ」は範囲外ですので除外しました。

「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2) $a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3) $a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。 [2008]

2 $f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2) 不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3) 不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。 [2007]

3 関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ について，次の問いに答えよ。ただし，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ とする。

(1) $f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3) 実数 k に対し，$f(x)=k$ を満たす x の個数を求めよ。 [2006]

4 実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0°<\theta<180°$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0°<\alpha<90°)$ を用いてよい。

(1) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) 不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3) 不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。 [2005]

5　実数 a, c を係数とする関数 $f(x)=ax^2+c$ について，次の条件を考える。

(＊)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成立する。

(1)　$a \geqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2)　$a \leqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が条件(＊)を満たしているとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a, c と，そのときの定積分の値を求めよ。　[2003]

6　a, b, c を実数とし，$a>0$ とする。$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px-f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1)　2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2)　実数 x に対し, p の関数 $xp-g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3)　直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ であることを示せ。　[2003]

7　実数 p, q, r を係数とする関数 $f(x)=px^2+qx+r$ をここでは高々2 次の関数とよぶことにする。また, a, b, c は異なる 3 つの実数とする。

(1)　$f(a)=1$，$f(b)=0$，$f(c)=0$ を満たす高々2 次の関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　高々2 次の関数 $f(x)$，$g(x)$ が $f(a)=g(a)$，$f(b)=g(b)$，$f(c)=g(c)$ を満たすならば，$f(x)$ と $g(x)$ は同じ関数であることを示せ。

(3)　$h(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ とすると，

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

であることを示せ。　[2000]

8　k を実数として，$f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が実数解 $\alpha,\ \beta\ (\alpha \leqq \beta)$ をもつとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha,\ \beta$ が $\alpha \leqq 1 \leqq \beta$ を満たすように k の値の範囲を定めよ。

(2)　(1)の場合に $f(x)$ の最小値がとりうる値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 微分と積分

1 定数$a<1$に対し，放物線$C_1: y=2x^2+1$，$C_2: y=-x^2+a$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線C_1，C_2の両方に接する2つの直線の方程式をそれぞれaを用いて表せ。

(2) C_1と(1)で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積をS_1，C_2と(1)で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積をS_2とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$を求めよ。 [2017]

2 座標平面において，x軸上に3点$(0,\ 0)$，$(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$があり，曲線$C: y=x^3+ax^2+bx$がx軸とこの3点で交わっているものとする。ただし，$a,\ b$は実数である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 曲線Cとx軸で囲まれた2つの部分の面積の和をSとする。Sをαとβの式で表せ。

(2) βの値を固定して，$0<\alpha<\beta$の範囲でαを動かすとき，Sを最小とするαをβの式で表せ。 [2016]

3 座標平面上の2つの放物線$C_1: y=x^2$，$C_2: y=-x^2+ax+b$を考える。ただし，$a,\ b$は実数とする。

(1) C_1とC_2が異なる2点で交わるための$a,\ b$に関する条件を求めよ。

以下，$a,\ b$が(1)の条件を満たすとし，C_1とC_2で囲まれる部分の面積が9であるとする。

(2) bをaを用いて表せ。

(3) aがすべての実数値をとって変化するとき，放物線C_2の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。 [2015]

4 関数$f(x)=x^3+3x^2+x-1$を考える。曲線$C: y=f(x)$について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$のとき，曲線Cは傾きがtである接線を2本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きがtである2本の接線と曲線Cとの接点を，それぞれ$\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$とする（ただし$p<q$）。このとき，点Pと点Qは点$\mathrm{A}(-1,\ 0)$に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$のとき，2点P，Qの距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときのP，Qのx座標$p,\ q$もそれぞれ求めよ。 [2012]

$\boxed{5}$ 放物線 $y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ から直線 $y=x$ へ垂線を引き，交点を H とする。ただし，$t>1$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) H の座標を t を用いて表せ。

(2) P を通り y 軸に平行な直線と直線 $y=x$ との交点を R とするとき，三角形 PRH の面積を t を用いて表せ。

(3) $x \geqq 1$ の範囲において，放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ および線分 PH とで囲まれた図形の面積を S_1 とするとき，S_1 を t を用いて表せ。

(4) 放物線 $y=x^2$ と直線 $y=x$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。$S_1=S_2$ であるとき，t の値を求めよ。 [2011]

$\boxed{6}$ xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。C 上の 2 点 M，N を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるようにとる。ただし，$\mathrm{N} \neq \mathrm{B}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\angle\mathrm{MAB}=\theta$ とおくとき，弦の長さ MB および点 M の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 N から x 軸におろした垂線を NP としたとき，PB を θ を用いて表せ。

(3) $t=\sin\theta$ とおく。条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を t を用いて表せ。

(4) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M がただ一つあることを示せ。 [2010]

$\boxed{7}$ 曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし，$a<0<b$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90^\circ$ を満たしながら P と Q が動くとき，(2)で求めた面積の最小値を求めよ。 [2009]

$\boxed{8}$ 放物線 $C : y=x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2) y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。 [2008]

9　曲線$C: y=x^2$上に点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$をとり，点Pにおける曲線Cの接線をl，点Pを通りlに垂直な直線をmとする。ただし，$t>0$とする。接線lとx軸との交点をQとし，直線mとx軸，y軸との交点をそれぞれR_1，R_2とする。また，$\triangle\mathrm{PQR}_1$の面積をS_1とし，曲線Cとy軸および線分PR_2で囲まれる図形の面積をS_2とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点Qと点R_1のx座標をtを用いて表せ。

(2)　面積S_2をtを用いて表せ。

(3)　$S_1>S_2$が成り立つtの範囲を求めよ。　[2006]

10　2つの関数$f(x)=-px^2+2\ (p>0)$，$g(x)=|x|-2$が与えられていて，放物線$y=f(x)$が2点$(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$を通るとする。

(1)　pの値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$と$y=g(x)$の交点をすべて求めよ。

(3)　(2)で求めた交点のうち，x座標が最小になる点を$\mathrm{A}(a,\ f(a))$とする。このとき，点Aにおける$y=f(x)$の接線$y=h(x)$を求めよ。また，この接線$y=h(x)$と$y=g(x)$の，点Aとは異なる，交点$\mathrm{B}(b,\ g(b))$を求めよ。

(4)　次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a\leqq x\leqq b,\ \ y\leqq h(x),\ \ y\geqq f(x),\ \ y\geqq g(x)$$

[2004]

11　関数$f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$を考える。

(1)　関数$f(x)$がつねに増加するためのa，bの条件を求め，その範囲をab平面上に図示せよ。

(2)　$a=0$のとき，関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するためのbの条件を求めよ。

(3)　関数$f(x)$が$x>-1$においてつねに増加するためのa，bの条件を求め，その範囲をab平面上に図示せよ。　[2001]

12 放物線 $y = x^2 - 2px$ 上の点 $(t,\ t^2 - 2pt)$ における接線を y 軸方向に b だけ平行移動した直線を $l(t,\ b)$ とする。

(1) 直線 $l(t,\ b)$ の方程式を求めよ。

(2) この放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが, x 座標が正の 2 点で交わるための $t,\ b$ の範囲を求めよ。

(3) 放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが 2 点で交わるとき, これらが囲む図形の面積 S を求めよ。

(4) (3)の図形の面積 S を直線 $x = u$ で 2 等分したい。u を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1 座標平面上に原点 O, 点 $\mathrm{A}(1,\ a)$, 点 $\mathrm{B}(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

(1) $a=1$ のとき, $\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2) $\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ が正三角形であり, a が有理数であるとき, s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。　[2017]

2 座標平面上の直線 $y=-1$ を l_1, 直線 $y=1$ を l_2 とし, x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について, 次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ l_1) \geqq \mathrm{PO}\ \text{かつ}\ d(\mathrm{P},\ l_2) \geqq \mathrm{PA} \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし, $d(\mathrm{P},\ l)$ は点 P と直線 l の距離である。

(1) 条件①を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) 条件①を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし, a の値は(1)で求めた範囲にあるとする。　[2014]

3　座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする。

$$x+2y \leqq 5,\ 3x+y \leqq 8,\ -2x-y \leqq 4,\ -x-4y \leqq 7$$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　点 Q および点 R の座標を求めよ。

(2)　$a>0$ かつ $b>0$ とする。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。　[2013]

4　座標平面上の円 $(x-1)^2+(y-1)^2=2$ を C とする。以下の問いに答えよ。

(1)　直線 $y=x-2$ は円 C に接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2)　円 C と放物線 $y=\dfrac{1}{4}x^2-1$ の共有点の座標をすべて求めよ。

(3)　不等式 $y \geqq \dfrac{1}{4}x^2-1$ の表す領域を D とする。また，不等式 $|x|+|y| \leqq 2$ の表す領域を A とし，不等式 $(|x|-1)^2+(y-1)^2 \leqq 2$ の表す領域を B とする。そして，和集合 $A \cup B$，すなわち領域 A と領域 B を合わせた領域を E とする。このとき，領域 D と領域 E の共通部分 $D \cap E$ を図示し，さらに，その面積を求めよ。　[2013]

5　$\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし，線分 AM を $1:3$ に内分する点を P とする。また，点 P を通り辺 BC に平行な直線と，辺 AB, AC との交点をそれぞれ Q, R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ。

(2)　$\angle$QMR の 2 倍と $\angle$QMB の大小を判定せよ。　[2009]

6　a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C: y=ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2)　曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3)　$a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

[2005]

7 次の問いに答えよ。

(1) 原点を中心とする半径 $r\,(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は，$ax+by=r^2$ で与えられることを示せ。

(2) 円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $C:\ y=x^2+1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これらの接線の方程式を求めよ。

(3) 問(2)における 3 本の接線のうち, x 軸の正の部分と交わる接線を l_1, x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

[2002]

8 3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x=p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。 [2001]

■ 図形と計量

1 t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において, 辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また, AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

以下, t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

(2) $\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 $k,\ l$ をそれぞれ求めよ。

(3) 三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4) 三角形 PQR の面積を求めよ。 [2016]

2　鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1)　A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2)　G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3)　△ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。　[2014]

3　三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき，A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき，t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，∠A と∠B に関する条件を求めよ。　[2010]

4　3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$，$4-x$，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2)　この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3)　x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。　[2007]

5　長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが $\sqrt{3}$ の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1)　直円錐の展開図を用いて，l の長さを求めよ。

(2)　l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ として CP^2 を $\sin\theta$ で表せ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ とする。

(3)　P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0^\circ<\theta\leqq 90^\circ$ の範囲で $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値を求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1　1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を $2:1$ に内分する点を Q, 辺 OC を $1:3$ に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(3)　三角形 PQR の面積を求めよ。　[2015]

2　1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ を満たす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。辺 AP を $1:3$ に内分する点を D, 辺 CP の中点を E, 辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて表せ。

(3)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ。

(4)　直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ。

[2013]

3　原点を O とする座標空間に，3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 0,\ 2)$，$\mathrm{C}(-2,\ 1,\ 3)$ がある。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\angle\mathrm{B}$ は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。

(2)　点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OAH}$ の面積を求めよ。　[2012]

4　平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=10$ となることを示せ。

(3)　$4|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|^2=-4$ を満たす点を P とするとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ の値を求めよ。

[2011]

5　座標平面に 3 点 O(0, 0)，A(2, 6)，B(3, 4) をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = s\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2)　$s = \dfrac{1}{2}$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。

(3)　$s = 1$ とし，t を $t \geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|^2$ の最小値を求めよ。　[2009]

6　t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす数とし，空間内の 4 点 A$(t,\ 0,\ 1)$，B$(1,\ t,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ t)$，P$\left(\dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t,\ \dfrac{4}{9}t\right)$を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　△ABC は正三角形であることを示し，その面積 $S(t)$ を求めよ。

(2)　△ABC の重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{PG}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の両方に垂直であることを示せ。

(3)　四面体 PABC の体積 $V(t)$ を求めよ。また $V(t)$ の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ。　[2007]

7　空間ベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ について次の問いに答えよ。ただし，h と k は実数とする。

(1)　$h\vec{a} + \vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき，すべての実数 x に対して，$|x\vec{a} + \vec{b}| \geqq |h\vec{a} + \vec{b}|$ が成り立つことを示せ。ただし，$\vec{0}$ はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2)　$h\vec{a} + k\vec{b} + \overline{c}$ が $\vec{a}$，$\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき，すべての実数 x, y に対して，$|x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}| \geqq |h\vec{a} + k\vec{b} + \vec{c}|$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\vec{a} = (1,\ 1,\ 1)$，$\vec{b} = (1,\ 4,\ -2)$，$\vec{c} = (-3,\ -6,\ 6)$ とするとき，$|x\vec{a} + y\vec{b} + \vec{c}|$ の最小値を与える実数 x, y と，そのときの最小値を求めよ。　[2006]

8　$0 < \alpha < 1$，$0 < \beta < 1$ とする。平行四辺形 ABCD の辺 BC を $\alpha : 1-\alpha$ に内分する点を P とし，辺 CD を $1-\beta : \beta$ に内分する点を Q とする。また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{b}$ として次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　長さの比 $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$ および $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$ を求めよ。

(3)　$\mathrm{AB} = 2$，$\mathrm{AD} = 1$，$\angle\mathrm{DAB} = 60°$ とするとき，△AQR の面積を求めよ。　[2004]

9　空間内に四面体 OABC があり∠AOB, ∠BOC, ∠COA はすべて 90° であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1)　∠OGA, ∠OGB, ∠OGC がすべて 90° であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

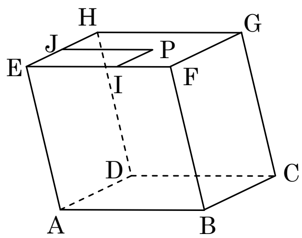
(2)　線分 BC を $1:2$ に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。　[2003]

10　空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1)　△ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2)　a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，△ACP の面積を a, x, y を用いて表せ。

(3)　問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，△ACP の面積の最小値を求めよ。　[2002]



（平行六面体ABCD-EFGH）

11　空間内に 3 点 A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(0,\ 2,\ 0)$，C$(0,\ 0,\ 3)$ をとる。

(1)　空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2)　(1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3)　(1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。　[2000]

12　大きさ 1 の空間ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$が$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\frac{1}{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{c}=0$を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル$\vec{d}$, $\vec{e}$, $\vec{f}$が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき，点$\mathrm{D}(\vec{d})$, $\mathrm{E}(\vec{e})$, $\mathrm{F}(\vec{f})$および原点 O について次の問いに答えよ。

(1)　$\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$となるような実数$x$, y, zを求めよ。同様に$\vec{f}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

(2)　ベクトル$\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{d}-\vec{f}$の大きさを求めよ。

(3)　三角形 ODF の面積を求めよ。

(4)　四面体 ODEF の体積を求めよ。　[1999]

13　辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおき，線分 OA を$m:n$に内分する点を P, 線分 BC を$m:n$に内分する点を Q, 線分 CO を$m:n$に内分する点を R, 線分 AB を$m:n$に内分する点を S とする。（ただし，$m, n>0$とする）

(1)　①　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

②　$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を求めよ。

③　$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$が垂直かどうか調べよ。

(2)　①　$m=n$のとき，点 P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ。

②　このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$で表せ。

③　G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1　以下の問いに答えよ。

(1)　2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2)　225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3)　225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。　[2017]

2 自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1) a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2) a_1，a_2，…，a_6 を求めよ。

(3) 以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

　(i) N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

　(ii) N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

　(iii) N は 13 で割り切れる。　[2016]

3 以下の問いに答えよ。

(1) n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2) p を素数とし，k を 0 以上の整数とする。$2^{p-1}-1=p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。　[2015]

4 次の問いに答えよ。

(1) 任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2) 自然数 a, b, c が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，a, b, c はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3) $a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 a, b, c は存在しないことを証明せよ。　[2014]

5 100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした。以下の問いに答えよ。

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ。

　　$\dfrac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない。

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする。このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。

(3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A，B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。　[2012]

6 数列a_1，a_2，…，a_n，… は，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-a_n^{\,2}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とするとき，a_{10}およびa_{11}を求めよ。

(2) $\tan\dfrac{\pi}{12}$の値を求めよ。

(3) $a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$とする。$a_k=a_1$を満たす 2 以上の自然数kで最小のものを求めよ。

[2011]

7 以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1) 和$1+2+\cdots+n$をnの多項式で表せ。

(2) 和$1^2+2^2+\cdots+n^2$をnの多項式で表せ。

(3) 和$1^3+2^3+\cdots+n^3$をnの多項式で表せ。 [2010]

8 放物線$C: y=x^2-1$と$a_1>1$を満たす実数a_1を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点$(a_1,\ a_1^{\,2}-1)$における接線と x 軸との交点の x 座標をa_2とするとき，a_2をa_1を用いて表せ。

(2) (1)で求めたa_2に対して，C 上の点$(a_2,\ a_2^{\,2}-1)$おける接線と x 軸との交点の x 座標をa_3とする。この操作を繰り返してできる数列をa_1，a_2，…，a_n，…とする。このとき，すべてのnに対して，$a_n>1$を示せ。

(3) $b_n=\dfrac{1}{2}(a_n-1)$とおくとき，すべてのnに対して，$b_{n+1}<b_n^{\,2}$を示せ。

(4) $a_1=2$のとき，$b_n<10^{-12}$となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10}2$を 0.301 として計算してよい。 [2008]

9 2 つの数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は，$a_1=b_1=1$および，関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n,\quad b_{n+1}=2a_n^{\,2}+b_n^{\,2}$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$のとき，a_nは 3 で割り切れるが，b_nは 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$のとき，a_nとb_nは互いに素であることを示せ。 [2006]

10 座標平面上で，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$，$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$ が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。 [2003]

11 $\{m_k\}$ を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点 P_1 をとる。各自然数 k に対し，点 P_k から点 P_{k+1} を順次つぎのように定める。点 P_k を通り傾き m_k の直線を l_k とし，この直線と C とのもう 1 つの交点を P_{k+1} とする。ただし，C と l_k が接する場合は $\mathrm{P}_{k+1}=\mathrm{P}_k$ とする。点 P_k の x 座標を a_k とする。

(1) a_{k+1} を a_k と m_k で表せ。

(2) 数列 $\{a_k\}$ の一般項を a_1，m_1，r，k で表せ。

(3) $a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$ とする。このとき，ある 2 次関数 $y=bx^2$ があって，すべての自然数 k に対し直線 l_k がその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1,\ 0$ とする。 [2003]

12 正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば，$f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1，3，5，15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

必要ならば，$1+r+\cdots+r^m=\dfrac{r^{m+1}-1}{r-1}\ (r\neq 1)$ を用いてよい。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) $a=2^2r$，$b=2^4s$（r, s は正の奇数）の形をした偶数 a, b を考える。$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたす a, b を求めよ。 [2002]

13 次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても，

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2) $p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3) 整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

[2002]

14 数列 $\{a_n\}$ を $a_1 = 2$，$a_{n+1} = a_n{}^2 - a_n + 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で与える。a_1，…，a_n の積を P_n とおく。

(1) 各 n について $a_n > 0$ であることを示せ。

(2) 各 n について $a_{n+1} = P_n + 1$ であることを示せ。

(3) $S_n = \dfrac{1}{a_1} + \cdots + \dfrac{1}{a_n}$ とおく。S_1，S_2，S_3，S_4 を求めよ。

(4) 各 n について S_n を P_n で表せ。 [2001]

15 (1) 自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか。

(2) 自然数 a, b が互いに素であるなら a^2，b^2 は互いに素であることを示せ。

(3) n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば，$\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし，有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4) n が自然数のとき，$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。 [2001]

16 原点を O，直線 $x = 1$ 上の動点を P，中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C とする。線分 OP と C との交点で原点でないものを Q とし，OP 上に $\overline{\mathrm{OR}} = \overline{\mathrm{PQ}}$ を満たす点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ をとる。

(1) 点 P を動かしたとき，点 R の軌跡を表す方程式を x と y とで表せ。

(2) m, n を 100 以下の自然数として，点 $\left(\dfrac{1}{m},\ \dfrac{1}{n}\right)$ が(1)で求めた曲線上にあるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。 [2000]

17　実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n-p,\ b_1=q,\ b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$$

と定める。

(1)　$\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする。m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ。

[1999]

18　(1)　自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

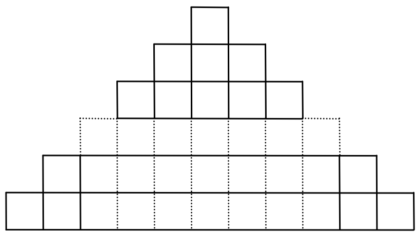
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

①　$m=2,\ 3,\ 4$ のとき，どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

②　一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。　[1998]



■ 確率

1　A と B の 2 人が A, B, A, B, …の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2)　さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3)　自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。　[2017]

2　袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

（操作）コインが点 $(x,\ y)$ にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点 $(x+1,\ y)$ に移動，青玉を取り出したときには点 $(x,\ y+1)$ に移動，白玉を取り出したときには点 $(x-1,\ y-1)$ に移動し，取り出した玉は袋に戻す。

最初に原点 $(0,\ 0)$ にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　操作を n 回繰り返したとき，白玉を一度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2)　操作を n 回繰り返したとき，到達点となりうる点の個数を求めよ。

(3)　座標平面上の 4 点 $(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$ を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4)　自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。　[2016]

$\boxed{3}$ 袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。　[2015]

$\boxed{4}$ A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1)　A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2)　ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

[2014]

$\boxed{5}$ 横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。

以下，「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1)　最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2)　最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3)　最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。　[2013]

6　いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2)　試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。　[2012]

7　1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1，2，3，4 と並べ，上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1)　カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

(2)　カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3)　左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

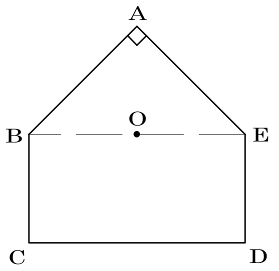
(4)　左端のカードの数字の期待値を求めよ。　[2011]

8　1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a, b, c, d, e, f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ となる確率を求めよ。

(2)　$a+b=c+d$ となる確率を求めよ。　[2009]

9　図のような五角形 ABCDE（角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形）において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点 O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$\mathrm{P}_i=\mathrm{B}$ である。このとき，次の問いに答えよ。

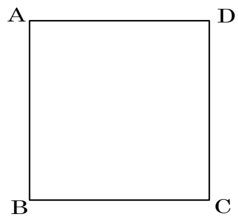


(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の内積を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP_1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP_2}}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1q_2\cdots q_n=0$ となる確率を求めよ。　[2008]

10　図のような 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある。この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える。点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　表の出る確率が $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A，B，C，D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。

(2)　表の出る確率 p が $\dfrac{1}{2}$ より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A，B，C，D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ。同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ。　[2007]

11　1 つのさいころを 4 回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$x_1<x_2$ となる確率を求めよ。

(2)　$x_1<x_2<x_3$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_1<x_2$ かつ $x_2\geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_k\geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1<x_2<x_3<x_4$ のときは $k=4$ と定める。　[2005]

12 スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に 6 個並んでいる。これらの 6 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

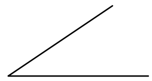
(1) 赤青青青青青，赤赤青青青青，…… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2) 色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3) 色の変化がちょうど n 回 $(0 \leqq n \leqq 5)$ 起きる確率を求めよ。

(4) 色の変化の回数の期待値を求めよ。 [2004]

13 n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，1 回折れ線とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。


（1回折れ線）

(1) 平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

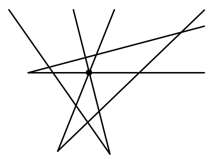
分割される平面の領域の数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，L_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。

(2) 平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i) n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

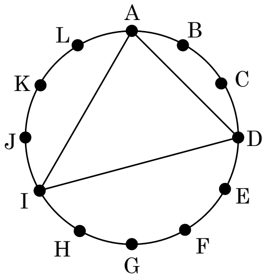
(ii) n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない(右図を参照せよ)。

分割される平面の領域の数を H_n で表す。H_3 を求めよ。


（同一点で交わる 3本の1回折れ線）

(3) H_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。 [2002]

14　右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形が得られる。このとき, 次の問いに答えよ。



(1)　正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
(2)　二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
(3)　直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。
(4)　3 点を選んで得られる三角形のうち, 互いに合同でないものは全部でいくつあるか。　[1998]

■ 論証

1　係数が 0 か 1 である x の整式を, ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は, 偶数の係数を 0 でおきかえ, 奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は, このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば, $5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので, 合同である。

M 多項式は, 2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい, 可約でないとき既約であるという。たとえば, x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから, 可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。
(2)　1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。
(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。　[2000]

2　下記の各命題についてその真偽を記し, 理由を述べよ。

(1)　$\sqrt{7}$ は無理数である。
(2)　和も積も共に 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a, b は, 共に有理数である。
(3)　無理数は何乗かすると有理数になる。ただし, ここで何乗かするというのは, n を 1 以上のある整数として n 乗することである。
(4)　和も積も共に有理数であるような 2 つの実数 a, b に対して, a^5+b^5 は有理数である。　[2000]

3　実数 $a,\ b$ は $0<a<b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\ \sqrt{ab},\ \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$

[1999]

4　(1)　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2)　①　不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

②　①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。　[1998]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

自然数 n に対して，$a_n=(\cos 2^n)(\cos 2^{n-1})\cdots(\cos 2)(\cos 1)$ とおく。ただし，角の大きさを表すのに弧度法を用いる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ を示せ。

(2) $a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ を示せ。

(3) $a_n<\dfrac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$ を示せ。 [2008]

解答例

(1) $a_1=(\cos 2)(\cos 1)$ なので，

$$4a_1\sin 1=4(\cos 2)(\cos 1)\sin 1=2(\cos 2)\sin 2=\sin 4$$

よって，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$

(2) $a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ であることを，数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき

(1)から，$a_1=\dfrac{\sin 4}{4\sin 1}$ となるので成立している。

(ii) $n=k$ のとき

$a_k=\dfrac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}$ と仮定すると，

$$a_{k+1}=(\cos 2^{k+1})a_k=(\cos 2^{k+1})\frac{\sin 2^{k+1}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+1}\sin 1}=\frac{\sin 2^{k+2}}{2^{k+2}\sin 1}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，自然数 n に対して，$a_n=\dfrac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}$ である。

(3) $\dfrac{\pi}{4}<1<\dfrac{\pi}{2}$ より，$\dfrac{1}{\sqrt{2}}<\sin 1<1$ となるので，(2)より，

$$a_n=\frac{\sin 2^{n+1}}{2^{n+1}\sin 1}\leqq\frac{1}{2^{n+1}\sin 1}<\frac{\sqrt{2}}{2^{n+1}}$$

コメント

サインの 2 倍角公式の適用に気付くことがポイントです。なお，(3)は，結論を変形して方針を立てましたが，大雑把な評価で証明可能でした。

問　題

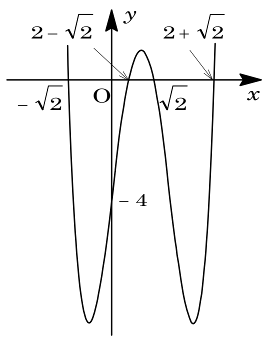
$f(x)=(x^2-2)(x^2-4x+2)$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=0$ の実数解 x をすべて求め，小さい順に並べよ。

(2)　不等式 $f(n)\leqq 0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(3)　不等式 $f(n)\leqq 1$ を満たす整数 n をすべて求めよ。　[2007]

解答例



(1)　$f(x)=0$ より，$(x^2-2)(x^2-4x+2)=0$ となり，

$$x=\pm\sqrt{2}\,,\quad x=2\pm\sqrt{2}$$

小さい順に並べると，$-\sqrt{2}$，$2-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}$，$2+\sqrt{2}$

(2)　$y=f(x)$ のグラフは右図のようになり，$f(n)\leqq 0$ の解は, (1)から，

$$-\sqrt{2}\leqq n\leqq 2-\sqrt{2}\,,\quad \sqrt{2}\leqq n\leqq 2+\sqrt{2}$$

n は整数なので，$n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$

(3)　$f(n)\leqq 0$ を満たす整数 $n=-1,\ 0,\ 2,\ 3$ は，$f(n)\leqq 1$ を満たす。

次に，$f(-2)=28>1$，$f(4)=28>1$ より，$n\leqq -2$ または $n\geqq 4$ において，$f(n)\leqq 1$ を満たす n は存在しない。

さらに，$f(1)=1$ から，$n=1$ は $f(n)\leqq 1$ を満たす。

以上より，$f(n)\leqq 1$ を満たす整数は，$n=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ である。

コメント

数学Ⅱの範囲は超えていますが，4 次関数 $y=f(x)$ のグラフを対応させて考えています。(3)も視覚的に解いています。

問　題

関数 $f(x)=\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|$ について，次の問いに答えよ。ただし，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ とする。

(1)　$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(3)　実数 k に対し，$f(x)=k$ を満たす x の個数を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$ より，$\left|\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}\right|=0$，$\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|=\dfrac{1}{2}$，$\sin x-\dfrac{1}{2}=\pm\dfrac{1}{2}$

すると，$\sin x=1$，$\sin x=0$ から，$-\pi \leqq x \leqq \pi$ において，$x=\dfrac{\pi}{2}$，0，$\pm\pi$

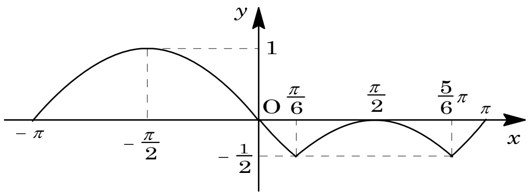
(2)　$g(x)=\left|\sin x-\dfrac{1}{2}\right|-\dfrac{1}{2}$ とおくと，

(i)　$-\pi \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi \leqq x \leqq \pi$ のとき　$g(x)=-\sin x+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}=-\sin x$

(ii)　$\dfrac{\pi}{6} \leqq x \leqq \dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$g(x)=\sin x-\frac{1}{2}-\frac{1}{2}$$
$$=\sin x-1$$

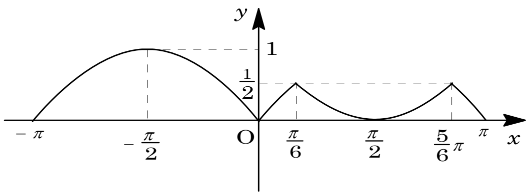
よって，$y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



すると，$f(x)=|g(x)|$ から，

$$f(x)=g(x)\quad (g(x)\geqq 0)$$
$$f(x)=-g(x)\quad (g(x)\leqq 0)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(3)　$f(x)=k$ を満たす異なる x の個数は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=k$ との共有点の個数に一致する。

したがって，$k<0$，$1<k$ のとき 0 個，$k=1$ のとき 1 個，$\dfrac{1}{2}<k<1$ のとき 2 個，$k=0$，$\dfrac{1}{2}$ のとき 4 個，$0<k<\dfrac{1}{2}$ のとき 6 個である。

コメント

絶対値が二重についている関数のグラフを描く問題です。丁寧に場合分けをすると，完答できます。

問　題

実数 x に対して，$[x]$ は x を超えない最大の整数を表す。たとえば，$\left[\dfrac{3}{2}\right]=1$，$[2]=2$ である。このとき，$0°<\theta<180°$ として次の問いに答えよ。ただし，必要なら $\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ となる角 α $(0°<\alpha<90°)$ を用いてよい。

(1)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(2)　不等式 $\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ を満たす θ の範囲を求めよ。

(3)　不等式 $\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0\leqq\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]$ を満たす θ の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

(1)　$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1$ より，$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\dfrac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$ のもとで，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 2,\ \ 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<3$$

すると，$-\dfrac{3}{2}\leqq\cos\theta<\dfrac{1}{2}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では，$60°<\theta<180°$

(2)　$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 1$ より，$\sin\theta>0$ のもとで，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 1,\ \ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{1}{2}$$

すると，$\sin\theta\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では，$45°\leqq\theta\leqq 135°$

(3)　条件より，$\log_2\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 0$ ……①，$\left[\dfrac{3}{2}+\log_2\sin\theta\right]\geqq 0$ ……②

①より，$\left[\dfrac{5}{2}+\cos\theta\right]>0$ $\left(\dfrac{5}{2}+\cos\theta\geqq 1\right)$ のもとで，

$$\left[\frac{5}{2}+\cos\theta\right]\leqq 1,\ \ 1\leqq\frac{5}{2}+\cos\theta<2$$

すると，$-\dfrac{3}{2}\leqq\cos\theta<-\dfrac{1}{2}$ となり，$0°<\theta<180°$ の範囲では，

$$120°<\theta<180°\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$\sin\theta>0$ のもとで，

$$\frac{3}{2}+\log_2\sin\theta\geqq 0,\ \ \log_2\sin\theta\geqq-\frac{3}{2},\ \ \sin\theta\geqq\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

条件から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2\sqrt{2}}$ $(0°<\alpha<90°)$ なので，$0°<\theta<180°$ の範囲では，

$$\alpha\leqq\theta\leqq 180°-\alpha\ \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\sin 120°>\sin(180°-\alpha)=\sin\alpha$ から，$\alpha<120°<180°-\alpha$ となるので，③④より，求める θ の範囲は，$120°<\theta\leqq 180°-\alpha$ である。

コメント

ガウス記号に，三角関数，対数関数が混在し，盛りだくさんです。

問　題

実数 a, c を係数とする関数 $f(x) = ax^2 + c$ について，次の条件を考える。

(＊)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で $f(x) \geqq (x+1)^2$ が成立する。

(1)　$a \geqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ であることを示せ。

(2)　$a \leqq 2$ のとき，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ であることを示せ。

(3)　関数 $f(x)$ が条件(＊)を満たしているとき，定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を最小にする a，c と，そのときの定積分の値を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ で，$f(x) \geqq (x+1)^2$ より，$(a-1)x^2 - 2x + (c-1) \geqq 0$

$g(x) = (a-1)x^2 - 2x + (c-1)$ とおくと，$a \geqq 2$ から $a-1 \geqq 1$ であり，

$$g(x) = (a-1)\left(x - \frac{1}{a-1}\right)^2 - \frac{1}{a-1} + c - 1$$

ここで，$a \geqq 2$ から $0 < \dfrac{1}{a-1} \leqq 1$ なので，条件(＊)は，

$$g\left(\frac{1}{a-1}\right) = -\frac{1}{a-1} + c - 1 \geqq 0,\quad c \geqq \frac{1}{a-1} + 1 = \frac{a}{a-1}$$

よって，条件(＊)を満たす最小の c の値は $\dfrac{a}{a-1}$ である。

(2)　(i)　$1 < a \leqq 2$ のとき　$a-1 > 0$，$\dfrac{1}{a-1} \geqq 1$ より，条件(＊)は，

$$g(1) = a - 1 - 2 + c - 1 \geqq 0,\quad c \geqq 4 - a$$

(ii)　$a = 1$ のとき　$g(x) = -2x + (c-1)$ より，条件(＊)は，

$$g(1) = -2 + c - 1 \geqq 0,\quad c \geqq 3$$

(iii)　$a < 1$ のとき　$a-1 < 0$，$\dfrac{1}{a-1} < 0$ より，条件(＊)は，

$$g(1) = a - 1 - 2 + c - 1 \geqq 0,\quad c \geqq 4 - a$$

(i)(ii)(iii)より，いずれの場合も，条件(＊)を満たす最小の c の値は $4-a$ である。

(3)　$I = \displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx = \int_0^1 (ax^2 + c)\,dx = \frac{a}{3} + c$ なので，

(i)　$a \geqq 2$ のとき　(1)より，$c \geqq \dfrac{a}{a-1}$ なので，

$$I \geqq \frac{a}{3} + \frac{a}{a-1} = \frac{a^2 + 2a}{3(a-1)} = \frac{1}{3}\left(a + 3 + \frac{3}{a-1}\right) = \frac{1}{3}\left(a - 1 + \frac{3}{a-1} + 4\right)$$

ここで，相加・相乗平均の関係から，$a - 1 + \dfrac{3}{a-1} \geqq 2\sqrt{(a-1)\cdot\dfrac{3}{a-1}} = 2\sqrt{3}$

等号は $a - 1 = \dfrac{3}{a-1}$，すなわち $(a-1)^2 = 3$，$a = 1 + \sqrt{3}$ のときに成立する。

よって，$I \geqq \dfrac{1}{3}(2\sqrt{3} + 4)$ となる。

(ii)　$a \leqq 2$ のとき　(2)より，$c \geqq 4-a$ なので，

$$I \geqq \frac{a}{3}+4-a=-\frac{2}{3}a+4 \geqq -\frac{2}{3}\cdot 2+4=\frac{8}{3}$$

(i)(ii)より，$\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)<\frac{8}{3}$ から，I の最小値は $\frac{1}{3}(2\sqrt{3}+4)$ である。

このとき，$a=1+\sqrt{3}$，$c=\frac{1+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=1+\frac{1}{\sqrt{3}}$ である。

コメント

計算量は多いのですが，内容は基本事項の組合せです。

問　題

a，b，c を実数とし，$a>0$ とする。$f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。実数 p に対し，x の関数 $px-f(x)$ の最大値を $g(p)$ とおく。

(1)　2 つの関数 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が一致するとき，$f(x)$ を求めよ。

(2)　実数 x に対し, p の関数 $xp-g(p)$ の最大値を $h(x)$ とおく。$h(x)$ を求めよ。

(3)　直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接するための必要十分条件は $g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ であることを示せ。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ で，$F(x)=px-f(x)$ とおくと，

$$F(x)=-ax^2+(p-b)x-c=-a\left(x-\frac{p-b}{2a}\right)^2+\frac{(p-b)^2}{4a}-c$$

$a>0$ より，$F(x)$ の最大値 $g(p)$ は，$g(p)=\dfrac{(p-b)^2}{4a}-c$ である。

$$g(x)=\frac{(x-b)^2}{4a}-c=\frac{1}{4a}x^2-\frac{b}{2a}x+\frac{b^2}{4a}-c$$

条件 $f(x)=g(x)$ より，$a=\dfrac{1}{4a}$ ……①，$b=-\dfrac{b}{2a}$ ……②，$c=\dfrac{b^2}{4a}-c$ ……③

①より，$4a^2=1$，$a>0$ から $a=\dfrac{1}{2}$ となり，②に代入して $b=-b$ から $b=0$，さらに③に代入して，$c=-c$ から $c=0$ である。よって，$f(x)=\dfrac{1}{2}x^2$

(2)　$G(p)=xp-g(p)$ とおくと，

$$G(p)=-\frac{1}{4a}p^2+\left(\frac{b}{2a}+x\right)p-\frac{b^2}{4a}+c=-\frac{1}{4a}\{p-(b+2ax)\}^2+ax^2+bx+c$$

よって，$G(p)$ の最大値 $h(x)$ は，$h(x)=ax^2+bx+c$ である。

(3)　直線 $y=px+q$ が点 $(t,\ f(t))$ で $y=f(x)$ のグラフに接する条件は,

$$pt+q=f(t)\ \cdots\cdots\cdots④,\quad p=f'(t)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$p=2at+b$，$t=\dfrac{p-b}{2a}$ ………⑥

⑥を④に代入して，$p\cdot\dfrac{p-b}{2a}+q=a\cdot\dfrac{(p-b)^2}{4a^2}+b\cdot\dfrac{p-b}{2a}+c$

$$q=\frac{(p-b)^2}{4a}+(b-p)\frac{p-b}{2a}+c=-\frac{(p-b)^2}{4a}+c=-g(p)\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑦を④に代入すると，$pt-g(p)=f(t)$ ………⑧

よって，④かつ⑤は，⑦かつ⑧と同値なので，求める条件は，$g(p)=pt-f(t)$ かつ $q=-g(p)$ となる。

コメント

(3)の解は(1)と(2)を無視しています。何らかの関係があるとは思ったものの……。

問　題

実数 p, q, r を係数とする関数 $f(x)=px^2+qx+r$ をここでは高々2 次の関数とよぶことにする。また, a, b, c は異なる 3 つの実数とする。

(1)　$f(a)=1$, $f(b)=0$, $f(c)=0$ を満たす高々2 次の関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　高々2 次の関数 $f(x)$, $g(x)$ が $f(a)=g(a)$, $f(b)=g(b)$, $f(c)=g(c)$ を満たすならば, $f(x)$ と $g(x)$ は同じ関数であることを示せ。

(3)　$h(x)=(x-a)(x-b)(x-c)$ とすると,

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

であることを示せ。　[2000]

解答例

(1)　$f(b)=f(c)=0$, $b\neq c$ なので, $f(x)=p(x-b)(x-c)$

$f(a)=1$ より, $p(a-b)(a-c)=1$, $p=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}$ となり,

$$f(x)=\frac{1}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$$

(2)　$k(x)=f(x)-g(x)$ とおくと, 条件より, a, b, c は異なる 3 つの実数で, しかも $k(a)=k(b)=k(c)=0$ から, $k(x)$ は $(x-a)(x-b)(x-c)$ で割り切れる。

ところが, $f(x)$, $g(x)$ は高々2 次の関数なので, $k(x)$ も高々2 次の関数となる。よって, $k(x)=0$, すなわち $f(x)=g(x)$ となる。

(3)　$h'(x)=(x-b)(x-c)+(x-a)(x-c)+(x-a)(x-b)$ より,

$$h'(a)=(a-b)(a-c),\ h'(b)=(b-a)(b-c),\ h'(c)=(c-a)(c-b)$$

よって, $\dfrac{h(x)}{h'(a)(x-a)}=\dfrac{h(x)}{(a-b)(a-c)(x-a)}=\dfrac{1}{(a-b)(a-c)}(x-b)(x-c)$

$$\frac{h(x)}{h'(b)(x-b)}=\frac{h(x)}{(b-a)(b-c)(x-b)}=\frac{1}{(b-a)(b-c)}(x-a)(x-c)$$

$$\frac{h(x)}{h'(c)(x-c)}=\frac{h(x)}{(c-a)(c-b)(x-c)}=\frac{1}{(c-a)(c-b)}(x-a)(x-b)$$

ここで, $F(x)=\dfrac{h(x)}{h'(a)(x-a)}+\dfrac{h(x)}{h'(b)(x-b)}+\dfrac{h(x)}{h'(c)(x-c)}$ とおくと, $F(x)$ は高々2 次の関数で, しかも $F(a)=F(b)=F(c)=1$ となる。

よって, (2)より $F(x)=1$ となり,

$$\frac{1}{h(x)}=\frac{1}{h'(a)(x-a)}+\frac{1}{h'(b)(x-b)}+\frac{1}{h'(c)(x-c)}$$

コメント

(3)では，(2)をどのように利用しようか迷いました。とにかく高々2 次の関数をつくらなくてはいけないので，証明する式の両辺に$h(x)$をかけたわけです。もし，これに気付かなければ，右辺をそのまま計算しても OK ですが。

問　題

k を実数として，$f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が実数解 α，β $(\alpha\leqq\beta)$ をもつとき，次の問いに答えよ。

(1) α，β が $\alpha\leqq 1\leqq\beta$ を満たすように k の値の範囲を定めよ。

(2) (1)の場合に $f(x)$ の最小値がとりうる値の範囲を求めよ。 [1999]

解答例

(1) $f(x)=x^2-2kx+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)$

$f(x)=0$ の実数解 α，β が $\alpha\leqq 1\leqq\beta$ を満たす条件は,

$$f(1)=1-2k+\frac{1}{5}(2k-1)(4k-3)\leqq 0$$

$(2k-1)(-5+4k-3)\leqq 0$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 2$

(2) $f(x)=(x-k)^2-k^2+\dfrac{1}{5}(2k-1)(4k-3)=(x-k)^2+\dfrac{3}{5}k^2-2k+\dfrac{3}{5}$ より,

$f(x)$ の最小値を $m(k)$ とおくと,

$$m(k)=\frac{3}{5}k^2-2k+\frac{3}{5}=\frac{3}{5}\left(k-\frac{5}{3}\right)^2-\frac{16}{15}$$

(1)より，$\dfrac{1}{2}\leqq k\leqq 2$ なので，$m\left(\dfrac{5}{3}\right)\leqq m(k)\leqq m\left(\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$-\dfrac{16}{15}\leqq m(k)\leqq -\dfrac{1}{4}$

コメント

超基本です。計算ミス以外に減点の可能性が考えられないくらいです。

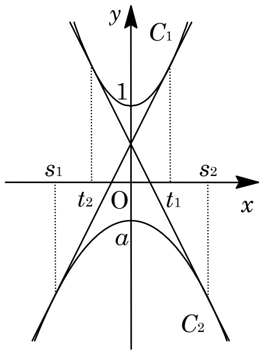
問　題

定数$a<1$に対し，放物線$C_1 : y=2x^2+1$，$C_2 : y=-x^2+a$を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 放物線C_1，C_2の両方に接する2つの直線の方程式をそれぞれaを用いて表せ。

(2) C_1と(1)で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積をS_1，C_2と(1)で求めた2つの直線で囲まれた図形の面積をS_2とするとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$を求めよ。 [2017]

解答例



(1) 放物線$C_1 : y=2x^2+1$ ……①，$C_2 : y=-x^2+a$ ……②の共通接線に対して，C_1，C_2上の接点をそれぞれ$(t,\ 2t^2+1)$，$(s,\ -s^2+a)$とおく。

①より，$y'=4x$から接線の方程式は，

$$y-(2t^2+1)=4t(x-t),\quad y=4tx-2t^2+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$y'=-2x$から接線の方程式は，

$$y-(-s^2+a)=-2s(x-s)$$

$$y=-2sx+s^2+a \cdots\cdots\cdots ④$$

③④が一致することより，

$$4t=-2s \cdots\cdots\cdots ⑤,\quad -2t^2+1=s^2+a \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤から$s=-2t$となり，⑥に代入すると，$-2t^2+1=4t^2+a$から，

$$t^2=\frac{1-a}{6},\quad t=\pm\sqrt{\frac{1-a}{6}}$$

よって，共通接線は，③から$y=\pm 4\sqrt{\dfrac{1-a}{6}}\,x-2\cdot\dfrac{1-a}{6}+1$となり，

$$y=\frac{2}{3}\sqrt{6-6a}\,x+\frac{a+2}{3},\quad y=-\frac{2}{3}\sqrt{6-6a}\,x+\frac{a+2}{3}$$

(2) 右上図のように，接点のx座標を$t_1=\sqrt{\dfrac{1-a}{6}}$，$s_1=-2t_1$とおき，$C_1$，$C_2$と2本の共通接線で囲まれた図形の面積を，それぞれ$S_1$，$S_2$とする。

すると，y軸に関する対称性から，

$$S_1=2\int_0^{t_1}\{2x^2+1-(4t_1x-2t_1{}^2+1)\}dx=4\int_0^{t_1}(x-t_1)^2dx$$

$$=\frac{4}{3}\left[(x-t_1)^3\right]_0^{t_1}=\frac{4}{3}t_1{}^3$$

$$S_2=2\int_{s_1}^{0}\{-2s_1x+s_1{}^2+a-(-x^2+a)\}dx=2\int_{s_1}^{0}(x-s_1)^2dx$$

$$=\frac{2}{3}\left[(x-s_1)^3\right]_{s_1}^{0}=-\frac{2}{3}s_1{}^3=\frac{16}{3}t_1{}^3$$

これより，$\dfrac{S_2}{S_1}=\dfrac{16}{4}=4$ となる。

コメント

放物線と接線で囲まれる図形の面積という頻出の構図です。なお，(1)では重解条件を利用しても構いません。

問　題

座標平面において, x 軸上に 3 点 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ があり, 曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸とこの 3 点で交わっているものとする。ただし, a, b は実数である。このとき, 以下の問いに答えよ。

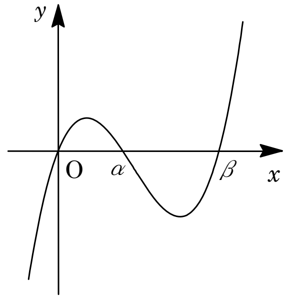
(1) 曲線 C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とする。S を α と β の式で表せ。

(2) β の値を固定して, $0<\alpha<\beta$ の範囲で α を動かすとき, S を最小とする α を β の式で表せ。 [2016]

解答例

(1) 曲線 $C: y=x^3+ax^2+bx$ が x 軸と 3 点 $(0,\ 0)$, $(\alpha,\ 0)$, $(\beta,\ 0)$ $(0<\alpha<\beta)$ で交わっているので, C は,

$$y=x(x-\alpha)(x-\beta)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$$



さて, C と x 軸で囲まれた 2 つの部分の面積の和を S とし, $f(x)=x^3-(\alpha+\beta)x^2+\alpha\beta x$ とおくと,

$$S=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\beta -f(x)dx$$
$$=\int_0^\alpha f(x)dx-\left(\int_0^\beta f(x)dx-\int_0^\alpha f(x)dx\right)$$
$$=2\int_0^\alpha f(x)dx-\int_0^\beta f(x)dx$$
$$=2\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\Big]_0^\alpha-\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{\alpha+\beta}{3}x^3+\frac{\alpha\beta}{2}x^2\Big]_0^\beta$$
$$=2\left(\frac{\alpha^4}{4}-\frac{\alpha^4+\alpha^3\beta}{3}+\frac{\alpha^3\beta}{2}\right)-\left(\frac{\beta^4}{4}-\frac{\alpha\beta^3+\beta^4}{3}+\frac{\alpha\beta^3}{2}\right)$$
$$=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{1}{3}\alpha^3\beta+\frac{1}{12}\beta^4-\frac{1}{6}\alpha\beta^3$$

(2) β の値を固定し, S を α の関数と考え $S(\alpha)$ と記すと, (1)から,

$$S(\alpha)=-\frac{1}{6}\alpha^4+\frac{\beta}{3}\alpha^3-\frac{\beta^3}{6}\alpha+\frac{1}{12}\beta^4\quad(0<\alpha<\beta)$$
$$S'(\alpha)=-\frac{2}{3}\alpha^3+\beta\alpha^2-\frac{\beta^3}{6}=-\frac{1}{6}(4\alpha^3-6\beta\alpha^2+\beta^3)$$
$$=-\frac{1}{6}(2\alpha-\beta)(2\alpha^2-2\beta\alpha-\beta^2)$$

すると, $\alpha=\dfrac{\beta}{2}$, $\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}\beta$ のとき $S'(\alpha)=0$ となり, $0<\alpha<\beta$ における $S(\alpha)$ の増減は右表のようになる。

α	0	$\cdots$	$\dfrac{\beta}{2}$	$\cdots$	β
$S'(\alpha)$		$-$	0	$+$	
$S(\alpha)$		↘		↗	

よって，$\alpha = \dfrac{\beta}{2}$ のとき，S は最小となる。

コメント

定積分と面積についての基本問題です。ただ，(2)の結論は感覚的にわかりますが。

問　題

座標平面上の 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = -x^2 + ax + b$ を考える。ただし, a, b は実数とする。

(1)　C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わるための a, b に関する条件を求めよ。

以下, a, b が(1)の条件を満たすとし, C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積が 9 であるとする。

(2)　b を a を用いて表せ。

(3)　a がすべての実数値をとって変化するとき, 放物線 C_2 の頂点が描く軌跡を座標平面上に図示せよ。　[2015]

解答例

(1)　$C_1 : y = x^2$ ……①, $C_2 : y = -x^2 + ax + b$ ……②を連立すると,

$$x^2 = -x^2 + ax + b\,,\ \ 2x^2 - ax - b = 0 \ \cdots\cdots\cdots③$$

C_1 と C_2 が異なる 2 点で交わることより, ③の判別式 $D = a^2 + 8b > 0$

(2)　③の解 $x = \dfrac{a \pm \sqrt{a^2 + 8b}}{4}$ を $x = \alpha,\ \beta\ \ (\alpha < \beta)$ とおくと, C_1 と C_2 で囲まれる部分の面積 S は,

$$S = \int_\alpha^\beta (-x^2 + ax + b - x^2)\,dx = \int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3$$

条件より, $\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = 9$ から $\beta - \alpha = 3$ となり, $\dfrac{\sqrt{a^2+8b}}{2} = 3$ である。

よって, $a^2 + 8b = 36$ から, $b = -\dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2}$ ………④

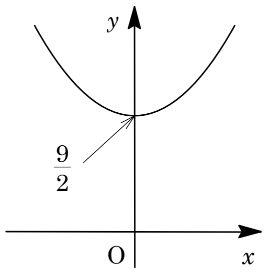
(3)　④を②に代入すると, $C_2 : y = -x^2 + ax - \dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2} = -\left(x - \dfrac{a}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{8}a^2 + \dfrac{9}{2}$

そこで, C_2 の頂点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと,

$$x = \frac{a}{2},\ \ y = \frac{1}{8}a^2 + \frac{9}{2}$$

a がすべての実数値をとって変化するとき, 点 P の軌跡は, 放物線 $y = \dfrac{1}{8}(2x)^2 + \dfrac{9}{2}$ すなわち $y = \dfrac{1}{2}x^2 + \dfrac{9}{2}$ である。

図示すると, 右図の曲線となる。



コメント

センターレベルの基本問題です。なお, (3)において, 軌跡の限界については考えなくてもよいにもかかわらず, 図示する意味は……。

問　題

関数 $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $t \geqq 0$ のとき，曲線 C は傾きが t である接線を 2 本もつことを示せ。

(2) (1)において，傾きが t である 2 本の接線と曲線 C との接点を，それぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする (ただし $p<q$)。このとき，点 P と点 Q は点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にあることを示せ。

(3) $t \geqq 0$ のとき，2 点 P, Q の距離の最小値を求めよ。また，最小値を与えるときの P, Q の x 座標 p, q もそれぞれ求めよ。 [2012]

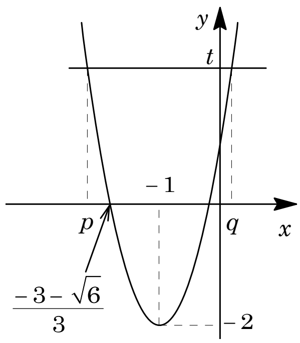
解答例

(1) $f(x)=x^3+3x^2+x-1$ に対して，

$$f'(x)=3x^2+6x+1$$

ここで，$t \geqq 0$ のとき，$f'(x)=t$ とすると，

$$3x^2+6x+1=t,\ 3(x+1)^2-2=t \cdots\cdots\cdots ①$$



右図より，①は異なる 2 つの実数解をもつことより，接点が 2 個，すなわち接線が 2 本存在する。

(2) ①の解が $x=p,\ q\ (p<q)$ なので，

$$p+q=-\frac{6}{3}=-2 \cdots\cdots\cdots ②$$

$$f(p)+f(p)=p^3+3p^2+p-1+q^3+3q^2+q-1$$

$$=(p+q)^3-3pq(p+q)+3(p+q)^2-6pq+(p+q)-2$$

②より，$f(p)+f(p)=-8+6pq+12-6pq-2-2=0$

よって，$\dfrac{p+q}{2}=-1$，$\dfrac{f(p)+f(p)}{2}=0$ となり，$\mathrm{P}(p,\ f(p))$ と $\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ は $\mathrm{A}(-1,\ 0)$ に関して対称の位置にある。

(3) $p \leqq \dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$ として，$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+(p^3+3p^2+p-1)^2$

ここで，$u=(p+1)^2$ とおくと，$p+1 \leqq -\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ から，$u \geqq \dfrac{2}{3}$ となり，

$$\mathrm{PA}^2=(p+1)^2+\left\{(p+1)^3-2(p+1)\right\}^2=u+u(u-2)^2=u^3-4u^2+5u$$

$g(u)=u^3-4u^2+5u$ とおくと，

$$g'(u)=3u^2-8u+5$$
$$=(3u-5)(u-1)$$

$g(u)$ の増減は右表のようになる。

u	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
$g'(u)$		+	0	−	0	+
$g(u)$	$\frac{50}{27}$	↗	2	↘	$\frac{50}{27}$	↗

そして，$u=\dfrac{2}{3}$，$\dfrac{5}{3}$ で最小値 $\dfrac{50}{27}$ をとる。

さて, (2)より，$\mathrm{PQ}=2\mathrm{PA}=2\sqrt{g(u)}$ となるので，PQ の最小値は,

$$2\sqrt{\frac{50}{27}}=\frac{10\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\frac{10\sqrt{6}}{9}$$

$u=\dfrac{2}{3}$ では，$p=-1-\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{6}}{3}$，②より，$q=\dfrac{-3+\sqrt{6}}{3}$

$u=\dfrac{5}{3}$ では，$p=-1-\sqrt{\dfrac{5}{3}}=\dfrac{-3-\sqrt{15}}{3}$，②より，$q=\dfrac{-3+\sqrt{15}}{3}$

コメント

(3)の変数の置き換えは, 2 段階だったものを，まとめて記しています。

問　題

放物線$y=x^2$上の点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$から直線$y=x$へ垂線を引き，交点をHとする。ただし，$t>1$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

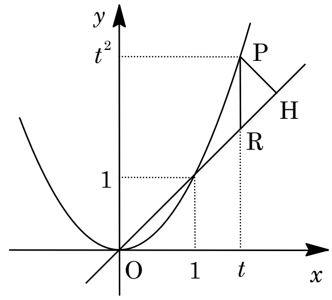
(1) Hの座標をtを用いて表せ。

(2) Pを通りy軸に平行な直線と直線$y=x$との交点をRとするとき，三角形PRHの面積をtを用いて表せ。

(3) $x\geqq 1$の範囲において，放物線$y=x^2$と直線$y=x$および線分PHとで囲まれた図形の面積をS_1とするとき，S_1をtを用いて表せ。

(4) 放物線$y=x^2$と直線$y=x$で囲まれた図形の面積をS_2とする。$S_1=S_2$であるとき，tの値を求めよ。 [2011]

解答例



(1) 放物線$y=x^2$上の点$\mathrm{P}(t,\ t^2)$から直線$y=x$……①への垂線の方程式は，

$$y-t^2=-(x-t),\quad y=-x+t^2+t\ \cdots\cdots②$$

①②より，$x=-x+t^2+t$，$x=y=\dfrac{t^2+t}{2}$

よって，点Hの座標は，$\left(\dfrac{t^2+t}{2},\ \dfrac{t^2+t}{2}\right)$である。

(2) $t>1$から，点Pと直線①の距離は，

$$\mathrm{PH}=\frac{|t-t^2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\frac{t^2-t}{\sqrt{2}}$$

△PRHは直角二等辺三角形より，その面積S_0は，$S_0=\dfrac{1}{2}\mathrm{PH}^2=\dfrac{1}{4}t^2(t-1)^2$

(3) 放物線$y=x^2$，直線$y=x$，線分PHで囲まれた図形の面積S_1は，

$$S_1=\int_1^t(x^2-x)\,dx+S_0=\frac{1}{3}(t^3-1)-\frac{1}{2}(t^2-1)+\frac{1}{4}t^2(t-1)^2$$
$$=\frac{1}{4}t^4-\frac{1}{6}t^3-\frac{1}{4}t^2+\frac{1}{6}$$

(4) 放物線$y=x^2$と直線$y=x$で囲まれた図形の面積S_2は，

$$S_2=\int_0^1(x-x^2)\,dx=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$$

$S_1=S_2$より，$\dfrac{1}{4}t^4-\dfrac{1}{6}t^3-\dfrac{1}{4}t^2+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}$となり，$t^2(3t^2-2t-3)=0$

$t>1$から，$t=\dfrac{1+\sqrt{10}}{3}$

コメント

放物線を題材にした図形の基本問題です。

問　題

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円を描き，その上半分を C とし，その両端を $\mathrm{A}(-1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$ とする。C 上の 2 点 M，N を $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ となるようにとる。ただし，$\mathrm{N}\neq\mathrm{B}$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

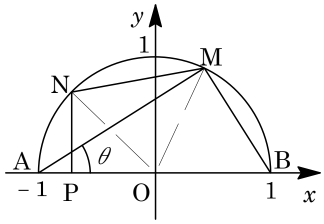
(1) $\angle\mathrm{MAB}=\theta$ とおくとき，弦の長さ MB および点 M の座標を θ を用いて表せ。

(2) 点 N から x 軸におろした垂線を NP としたとき, PB を θ を用いて表せ。

(3) $t=\sin\theta$ とおく。条件 $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ を t を用いて表せ。

(4) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ となるような点 M がただ一つあることを示せ。 [2010]

解答例



(1) $\mathrm{NM}=\mathrm{MB}$ より，点 M は BN の垂直二等分線上にあり，$\angle\mathrm{AMB}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{MB}=\mathrm{AB}\sin\theta=2\sin\theta$$

また，$\angle\mathrm{MOB}=2\theta$ から，$\mathrm{M}(\cos2\theta,\ \sin2\theta)$

(2) $\angle\mathrm{NOB}=4\theta$ から，$\mathrm{N}(\cos4\theta,\ \sin4\theta)$

よって，$\mathrm{P}(\cos4\theta,\ 0)$ より，$\mathrm{PB}=1-\cos4\theta$

(3) $\mathrm{MB}=\mathrm{PB}$ より，$2\sin\theta=1-\cos4\theta$ となり，

$$1-\cos4\theta=2\sin^2 2\theta=8\sin^2\theta\cos^2\theta=8\sin^2\theta(1-\sin^2\theta)$$

これから，$t=\sin\theta$ とおくと，$2t=8t^2(1-t^2)$ ………①

ここで，$0^\circ<4\theta\leqq180^\circ$ $(0^\circ<\theta\leqq45^\circ)$ から，$0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，①は,

$$1=4t(1-t^2),\quad 4t^3-4t+1=0 \text{ ………②}$$

(3) $f(t)=4t^3-4t+1$ とおくと，

$$f'(t)=12t^2-4=4(3t^2-1)$$

$0<t\leqq\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，②を満たす t はただ一つ存在する。このとき，$t=\sin\theta$ から，θ すなわち点 M はただ一つ存在する。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{3}$	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	1	$\searrow$		$\nearrow$	$1-\sqrt{2}$

コメント

丁寧な誘導のついた問題です。ただ，それが行き過ぎて，(1)と(2)は不気味です。

問　題

曲線 $y=x^2$ の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線と点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線が点 R で交わるとする。ただし, $a<0<b$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 点 R の座標および三角形 PRQ の面積を求めよ。

(2) 線分 PR と線分 QR を 2 辺とする平行四辺形を PRQS とする。折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PRQ}=90°$ を満たしながら P と Q が動くとき, (2)で求めた面積の最小値を求めよ。 [2009]

解答例

(1) $y=x^2$ より $y'=2x$ となり, 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線の方程式は,

$$y-a^2=2a(x-a),\quad y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様にして, 点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線の方程式は,

$$y=2bx-b^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $2ax-a^2=2bx-b^2$

$$2(b-a)x=b^2-a^2,\quad x=\frac{a+b}{2}$$

①より, $y=2a\cdot\dfrac{a+b}{2}-a^2=ab$ となり, $\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$である。

ここで, 線分 PQ の中点を M とおくと, $\mathrm{M}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$となり,

$$\mathrm{MR}=\frac{a^2+b^2}{2}-ab=\frac{(b-a)^2}{2}$$

よって, $\triangle\mathrm{PRQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(b-a)^2}{2}\cdot(b-a)=\dfrac{1}{4}(b-a)^3$

(2) 直線 PQ の方程式は,

$$y-a^2=\frac{b^2-a^2}{b-a}(x-a),\quad y=(a+b)x-ab$$

さて, 線分 PQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積を S_0 とすると,

$$S_0=\int_a^b\{(a+b)x-ab-x^2\}dx=-\int_a^b(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

さらに, $\triangle\mathrm{PSQ}=\triangle\mathrm{PRQ}$ を用いると, 折れ線 PSQ と曲線 $y=x^2$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=S_0+\triangle\mathrm{PSQ}=\frac{1}{6}(b-a)^3+\frac{1}{4}(b-a)^3=\frac{5}{12}(b-a)^3\ \cdots\cdots\cdots③$$

(3) 条件より, 直線 PR と QR が直交するので, $2a\cdot 2b=-1$, $a=-\dfrac{1}{4b}$

すると, ③に代入して, $S=\dfrac{5}{12}\left(b+\dfrac{1}{4b}\right)^3$

$b>0$ なので，相加平均と相乗平均の関係から，

$$b+\frac{1}{4b} \geqq 2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4b}}=1$$

ここで，等号は $b=\frac{1}{4b}\left(b=\frac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

以上より，S の最小値は $\frac{5}{12}\cdot 1^3=\frac{5}{12}$ である。

コメント

形式を変更すると，センター試験にそのまま流用できます。

問　題

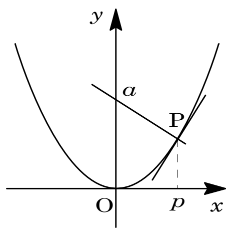
放物線 $C: y = x^2$ 上の点 P における法線とは，点 P における C の接線と点 P で垂直に交わる直線である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 $(p,\ p^2)$ における C の法線の方程式を求めよ。

(2)　y 軸上の点 $(0,\ a)$ を通る C の法線の本数を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$C: y = x^2$ より，$y' = 2x$ となり，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$ における接線の方向ベクトル，すなわち法線の法線ベクトルの成分は，$(1,\ 2p)$ と表せる。



これより，P における法線の方程式は，

$$(x - p) + 2p(y - p^2) = 0$$

$$x + 2py - p - 2p^3 = 0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①が点 $(0,\ a)$ を通る条件は，$2pa - p - 2p^3 = 0 \cdots\cdots\cdots ②$

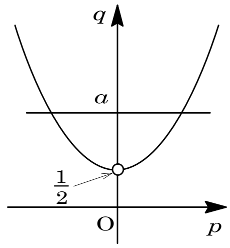
ここで，②の異なる実数解 p の個数が，点 $(0,\ a)$ を通る法線の本数に一致することより，

(i)　$p = 0$ のとき

②は任意の実数 a で成立する。

(ii)　$p \neq 0$ のとき

②より，$2a - 1 - 2p^2 = 0$，$a = p^2 + \dfrac{1}{2} \cdots\cdots\cdots ③$



さて，$p \neq 0$ のもとで，③の異なる実数解 p の個数は，直線 $q = a$ と $q = p^2 + \dfrac{1}{2}$ のグラフの共有点の個数に一致する。

すると，右図より，$a > \dfrac{1}{2}$ のとき p は 2 個存在し，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき p は存在しない。

(i)(ii)より，題意の法線の本数は，$a > \dfrac{1}{2}$ のとき 3 本，$a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき 1 本である。

コメント

法線の本数についての基本的な問題です。ただし，$a = \dfrac{1}{2}$ の場合は要注意です。

問　題

曲線$C: y=x^2$上に点$P(t,\ t^2)$をとり，点 P における曲線 C の接線を l，点 P を通り l に垂直な直線を m とする。ただし，$t>0$ とする。接線 l と x 軸との交点を Q とし，直線 m と x 軸，y 軸との交点をそれぞれR_1，R_2とする。また，$\triangle PQR_1$の面積をS_1とし，曲線 C と y 軸および線分PR_2で囲まれる図形の面積をS_2とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　点 Q と点R_1の x 座標を t を用いて表せ。

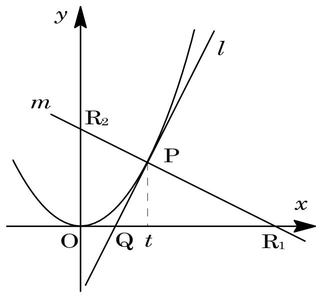
(2)　面積S_2を t を用いて表せ。

(3)　$S_1>S_2$が成り立つ t の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$y=x^2$に対して，$y'=2x$より，接線 l の方程式は，

$$y-t^2=2t(x-t),\quad y=2tx-t^2$$



x 軸との交点 Q は，$2tx-t^2=0$ より $x=\dfrac{t}{2}$

また, P を通り, l に垂直な直線 m の方程式は,

$$y-t^2=-\frac{1}{2t}(x-t),\quad y=-\frac{1}{2t}x+\frac{1}{2}+t^2$$

x 軸との交点R_1は，$-\dfrac{1}{2t}x+\dfrac{1}{2}+t^2=0$ より，

$$\frac{1}{2t}x=\frac{1}{2}+t^2,\quad x=t+2t^3$$

(2)　R_2の y 座標は，$y=\dfrac{1}{2}+t^2$ より，

$$S_2=\frac{1}{2}\left(t^2+\frac{1}{2}+t^2\right)\cdot t-\int_0^t x^2dx=t^3+\frac{1}{4}t-\left[\frac{x^3}{3}\right]_0^t=\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t$$

(3)　$S_1=\dfrac{1}{2}\left(t+2t^3-\dfrac{1}{2}t\right)\cdot t^2=\dfrac{1}{4}t^3+t^5$ となり，$S_1>S_2$から，

$$\frac{1}{4}t^3+t^5>\frac{2}{3}t^3+\frac{1}{4}t,\quad 12t^5-5t^3-3t>0,\quad t(4t^2-3)(3t^2+1)>0$$

よって, $t>0$ から，$t>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

コメント

微積分に関するセンターレベルの問題です。曲線と直線の位置関係についても，場合分けは必要ありません。

問　題

2 つの関数 $f(x)=-px^2+2\ (p>0)$，$g(x)=|x|-2$ が与えられていて，放物線 $y=f(x)$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$，$(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るとする。

(1) p の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点をすべて求めよ。

(3) (2)で求めた交点のうち，x 座標が最小になる点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。このとき，点 A における $y=f(x)$ の接線 $y=h(x)$ を求めよ。また，この接線 $y=h(x)$ と $y=g(x)$ の，点 A とは異なる，交点 $\mathrm{B}(b,\ g(b))$ を求めよ。

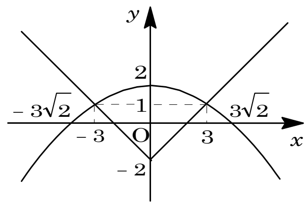
(4) 次の連立不等式の定める図形の面積を求めよ。

$$a\leqq x\leqq b,\ y\leqq h(x),\ y\geqq f(x),\ y\geqq g(x)$$

[2004]

解答例

(1) 放物線 $y=-px^2+2$ が 2 点 $(-3\sqrt{2},\ 0)$ と $(3\sqrt{2},\ 0)$ を通るので，$0=-18p+2$，$p=\dfrac{1}{9}$



(2) $f(-x)=f(x)$，$g(-x)=g(x)$ より，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフはともに y 軸対称である。

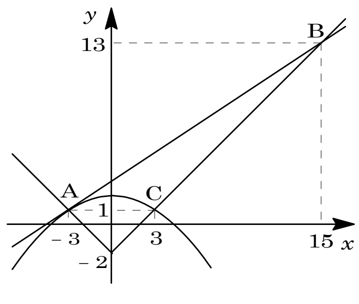
これより，$x\geqq 0$ において，$f(x)=g(x)$ とすると，

$$-\frac{1}{9}x^2+2=x-2,\ x^2+9x-36=0,\ (x+12)(x-3)=0$$

$x\geqq 0$ から，$x=3$，$y=3-2=1$ となる。

対称性から，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ の交点の座標は，$(3,\ 1)$，$(-3,\ 1)$ である。

(3) $f'(x)=-\dfrac{2}{9}x$ から，$f'(-3)=\dfrac{2}{3}$ となる。



これより，$\mathrm{A}(-3,\ 1)$ における接線の方程式は，

$$y-1=\frac{2}{3}(x+3),\ y=\frac{2}{3}x+3$$

$y=x-2$ との交点は，$\dfrac{2}{3}x+3=x-2$ から $x=15$

$$y=15-2=13$$

よって，$\mathrm{B}(15,\ 13)$ となる。

(4) $\mathrm{C}(3,\ 1)$ として，求める図形の面積を S とすると，

$$S=\triangle\mathrm{ABC}-2\int_0^3\left(-\frac{x^2}{9}+2-1\right)dx=\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 12-2\int_0^3\left(-\frac{x^2}{9}+1\right)dx$$

$$=36-2\left[-\frac{1}{27}x^3+x\right]_0^3=32$$

コメント

計算ミスが致命傷になる超基本題です。

問　題

関数 $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ を考える。

(1) 関数 $f(x)$ がつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a=0$ のとき，関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための b の条件を求めよ。

(3) 関数 $f(x)$ が $x>-1$ においてつねに増加するための a, b の条件を求め，その範囲を ab 平面上に図示せよ。　[2001]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{2}{3}ax^3+(a+b)x^2+(b+1)x$ に対して，$f'(x)=2ax^2+2(a+b)x+b+1$

関数 $f(x)$ がつねに増加する条件は，$f'(x)\geqq 0$ である。ただし，等号は恒等的には成立しない。

(i) $a=0$ のとき　$f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ なので，$2b=0$ かつ $b+1>0$

よって，$b=0$ となる。

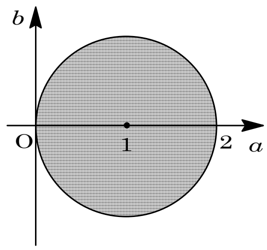
(ii) $a\neq 0$ のとき　$a>0$ かつ $f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$

$D/4=(a+b)^2-2a(b+1)\leqq 0$，$a^2+b^2-2a\leqq 0$

よって，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

(i)(ii)より，$a=b=0$，または $a>0$ かつ $(a-1)^2+b^2\leqq 1$

すなわち，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



(2) $a=0$ のとき，$x>-1$ で $f'(x)=2bx+b+1\geqq 0$ となる条件は,

(i) $2b=0$ のとき　(1)より適する。

(ii) $2b\neq 0$ のとき　$2b>0$ かつ $f'(-1)=-2b+b+1=-b+1\geqq 0$

よって, $0<b\leqq 1$ となる。

(i)(ii)より，求める条件は, $0\leqq b\leqq 1$

(3) $a\neq 0$ のとき　$f'(x)=2a\left(x+\dfrac{a+b}{2a}\right)^2-\dfrac{a^2+b^2-2a}{2a}$

$x>-1$ で $f'(x)\geqq 0$ となる条件は, $a>0$ において,

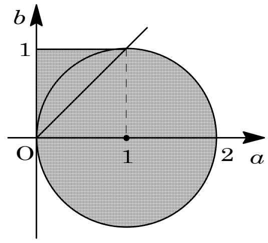
(i) $-\dfrac{a+b}{2a}\leqq -1$ $(b\geqq a)$ のとき

$f'(-1)=2a-2(a+b)+b+1=-b+1\geqq 0$ より, $b\leqq 1$ となる。

(ii) $-\dfrac{a+b}{2a}>-1$ $(b<a)$ のとき

$f'(x)=0$ の判別式 $D\leqq 0$ なので, (1)より，$(a-1)^2+b^2\leqq 1$

(2)と合わせると，$a=0$ のとき $0 \leqq b \leqq 1$，$a>0$ のとき $b \geqq a$ ならば $b \leqq 1$ で，$b<a$ ならば $(a-1)^2+b^2 \leqq 1$ となり，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含む。



コメント

ていねいに場合分けをして，結論を導いていく標準的な問題です。

問　題

放物線 $y = x^2 - 2px$ 上の点 $(t,\ t^2 - 2pt)$ における接線を y 軸方向に b だけ平行移動した直線を $l(t,\ b)$ とする。

(1)　直線 $l(t,\ b)$ の方程式を求めよ。

(2)　この放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが, x 座標が正の 2 点で交わるための $t,\ b$ の範囲を求めよ。

(3)　放物線と直線 $l(t,\ b)$ とが 2 点で交わるとき，これらが囲む図形の面積 S を求めよ。

(4)　(3)の図形の面積 S を直線 $x = u$ で 2 等分したい。u を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$y = x^2 - 2px$ ……①より，$y' = 2x - 2p$

$x = t$ における接線は，$y = (2t - 2p)(x - t) + (t^2 - 2pt) = 2(t - p)x - t^2$

これより，求める直線 $l(t,\ b)$ は，$y = 2(t - p)x - t^2 + b$ ………②

(2)　①②の交点の x 座標は，$x^2 - 2px = 2(t - p)x - t^2 + b$

$$x^2 - 2tx + t^2 - b = 0 \text{ ………③}$$

③の解を $x = \alpha,\ \beta\ \ (\alpha < \beta)$ とすると，$0 < \alpha < \beta$ より，

$D/4 = t^2 - (t^2 - b) > 0$ から，$b > 0$ ………④

$\alpha + \beta = 2t > 0$ から，$t > 0$ ………⑤

$\alpha\beta = t^2 - b > 0$ から，$b < t^2$ ………⑥

④⑤⑥をまとめて，$t > 0$，$0 < b < t^2$

(3)　$S = \int_\alpha^\beta \left\{ 2(t - p)x - t^2 + b - (x^2 - 2pt) \right\} dx = -\int_\alpha^\beta (x - \alpha)(x - \beta)\,dx$ ………⑦

よって，$S = -\left(-\dfrac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \dfrac{1}{6}\left\{ (\alpha + \beta)^2 - 4\alpha\beta \right\}^{\frac{3}{2}}$

$$= \frac{1}{6}\left\{ (2t)^2 - 4(t^2 - b) \right\}^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{3}b\sqrt{b}$$

(4)　⑦より，$x = \dfrac{\alpha + \beta}{2}$ によって, S は 2 等分されることがわかる。

すなわち，$u = \dfrac{\alpha + \beta}{2} = t$

コメント

微積分についての基本問題です。(4)は⑦の式の意味を考えると，瞬間的に答が求まります。

問　題

座標平面上に原点 O, 点 A$(1,\ a)$, 点 B$(s,\ t)$ がある。以下の問いに答えよ。

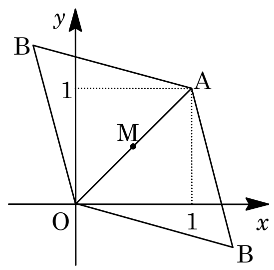
(1)　$a=1$ のとき, △OAB が正三角形となるような $(s,\ t)$ をすべて求めよ。

(2)　$\sqrt{3}$ は無理数であることを証明せよ。

(3)　△OAB が正三角形であり, a が有理数であるとき, s と t のうち少なくとも 1 つは無理数であることを示せ。　[2017]

解答例

(1)　原点 O, A$(1,\ a)$, B$(s,\ t)$ に対し, 辺 OA の中点を M とし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に垂直な単位ベクトルを $\vec{n}$ とする。



ここで, 正三角形 OAB に対し, $a=1$ のとき, $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$,

$\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)$, $\mathrm{MB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{OA}=\frac{\sqrt{6}}{2}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\vec{n}$$

$$=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{6}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ -1)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって, $s=\frac{1\pm\sqrt{3}}{2}$, $t=\frac{1\mp\sqrt{3}}{2}$ （複号同順）

(2)　$\sqrt{3}$ が無理数でないとすると, p, q を互いに素な自然数として $\sqrt{3}=\frac{q}{p}$ とおけ,

$$\sqrt{3}p=q,\ \ 3p^2=q^2$$

すると, q^2 は 3 の倍数, すなわち q は 3 の倍数となる。

これより, k を自然数として, $q=3k$ とおけ,

$$3p^2=9k^2,\ \ p^2=3k^2$$

すると, p^2 は 3 の倍数, すなわち p も 3 の倍数となり, $p,\ q$ が互いに素ということに反する。よって, $\sqrt{3}$ は無理数である。

(3)　(1)と同様にすると, $\mathrm{M}\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)$, $\vec{n}=\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1)$, $\mathrm{MB}=\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+1}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{a^2+1}\cdot\frac{1}{\sqrt{a^2+1}}(a,\ -1)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{a}{2}\right)\pm\left(\frac{\sqrt{3}}{2}a,\ -\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって, $s=\frac{1\pm\sqrt{3}a}{2}$, $t=\frac{a\mp\sqrt{3}}{2}$ （複号同順）………①

さて, a が有理数であるとき, ①から $\pm\sqrt{3}=a-2t$ ………②

ここで, t が有理数であると仮定すると, ②の右辺は有理数となり, (2)の結論に反する。したがって, t は無理数である。

すなわち，s と t のうち少なくとも 1 つは無理数である。

コメント

図形と式に実数の性質が融合した問題です。(1)(2)が(3)への誘導でしょうが，何か肩すかしを食らったような……。

問　題

座標平面上の直線 $y=-1$ を l_1，直線 $y=1$ を l_2 とし，x 軸上の 2 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$ を考える。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ について，次の条件を考える。

$$d(\mathrm{P},\ l_1) \geqq \mathrm{PO}\ \ かつ\ \ d(\mathrm{P},\ l_2) \geqq \mathrm{PA}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

ただし，$d(\mathrm{P},\ l)$ は点 P と直線 l の距離である。

(1) 条件①を満たす点 P が存在するような a の値の範囲を求めよ。

(2) 条件①を満たす点 P 全体がなす図形の面積 S を a を用いて表せ。ただし，a の値は(1)で求めた範囲にあるとする。 [2014]

解答例

(1) $l_1 : y=-1$，$l_2 : y=1$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a,\ 0)$，$\mathrm{P}(x,\ y)$ に対して，$d(\mathrm{P},\ l_1) \geqq \mathrm{PO}$ かつ $d(\mathrm{P},\ l_2) \geqq \mathrm{PA}$ ……①より，

$$|y+1| \geqq \sqrt{x^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots ②,\ \ |y-1| \geqq \sqrt{(x-a)^2+y^2}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②より，$(y+1)^2 \geqq x^2+y^2$，$y \geqq \dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ ………④

③より，$(y-1)^2 \geqq (x-a)^2+y^2$，$y \leqq -\dfrac{1}{2}(x-a)^2+\dfrac{1}{2}$ ………⑤

そこで，①を満たす点 P が存在する条件は，④⑤より，ある x に対して，

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2},\ \ 2x^2-2ax+a^2-2 \leqq 0$$

これより，$2x^2-2ax+a^2-2=0$ ……⑥の判別式を D とおくと，

$$D/4 = a^2-2(a^2-2) = -a^2+4 \geqq 0,\ \ -2 \leqq a \leqq 2$$

(2) ⑥より，$x=\dfrac{a \pm \sqrt{-a^2+4}}{2}$ となり，この値を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，点 P 全体がなす図形の面積 S は，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left\{-\frac{1}{2}(x-a)^2+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right\}dx=\int_{\alpha}^{\beta}-(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{-a^2+4}\right)^3$$

コメント

軌跡と領域についての標準的な問題です。出題範囲外ですが，題材は数 C の放物線の定義がベースになっています。

問　題

座標平面上で，次の連立不等式の表す領域を D とする。

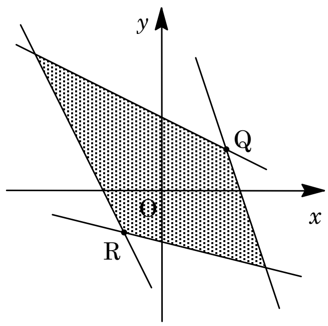
$$x+2y\leqq 5,\ 3x+y\leqq 8,\ -2x-y\leqq 4,\ -x-4y\leqq 7$$

点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$x+y$ の値が最大となる点を Q とし，最小となる点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 Q および点 R の座標を求めよ。

(2) $a>0$ かつ $b>0$ とする。点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が領域 D 内を動くとき，$ax+by$ が点 Q でのみ最大値をとり，点 R でのみ最小値をとるとする。このとき，$\dfrac{a}{b}$ の値の範囲を求めよ。　[2013]

解答例



(1) 連立不等式 $x+2y\leqq 5$，$3x+y\leqq 8$，$-2x-y\leqq 4$，$-x-4y\leqq 7$ の表す領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。

ここで，$x+y=k$ とおくと，この方程式は傾き -1 の直線を表す。

すると，図より，k の値が最大となる点 Q は，境界線 $x+2y=5\cdots\cdots$①と $3x+y=8\cdots\cdots$②の交点である。

①②を連立すると，$x=\dfrac{11}{5}$，$y=\dfrac{7}{5}$ より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{11}{5},\ \dfrac{7}{5}\right)$ となる。

k の値が最小となる点 R は，境界線 $-2x-y=4\cdots\cdots$③と $-x-4y=7\cdots\cdots$④の交点である。③④を連立すると，$x=-\dfrac{9}{7}$，$y=-\dfrac{10}{7}$ より，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{9}{7},\ -\dfrac{10}{7}\right)$ となる。

(2) $a>0$，$b>0$ のとき，$ax+by=l$ とおくと，この方程式は傾き $-\dfrac{a}{b}$ の直線を表す。

すると，l が点 Q でのみ最大値をとる条件は，直線①の傾きが $-\dfrac{1}{2}$ で，直線②の傾きが -3 より，$-3<-\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<3\cdots\cdots\cdots$⑤

また，l が点 R でのみ最小値をとる条件は，直線③の傾きが -2 で，直線④の傾きが $-\dfrac{1}{4}$ より，$-2<-\dfrac{a}{b}<-\dfrac{1}{4}$，$\dfrac{1}{4}<\dfrac{a}{b}<2\cdots\cdots\cdots$⑥

⑤⑥より，求める値の範囲は，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{a}{b}<2$ である。

コメント

領域と最大・最小についての基本問題です。ただ，問題の特性として，解答例を作成するのに時間がかかります。

問　題

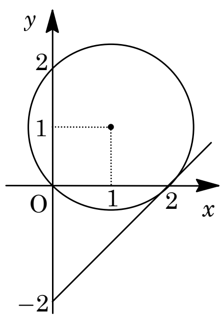
座標平面上の円$(x-1)^2+(y-1)^2=2$をCとする。以下の問いに答えよ。

(1) 直線$y=x-2$は円Cに接することを示せ。また，接点の座標も求めよ。

(2) 円Cと放物線$y=\frac{1}{4}x^2-1$の共有点の座標をすべて求めよ。

(3) 不等式$y\geqq\frac{1}{4}x^2-1$の表す領域をDとする。また，不等式$|x|+|y|\leqq 2$の表す領域をAとし，不等式$(|x|-1)^2+(y-1)^2\leqq 2$の表す領域をBとする。そして，和集合$A\cup B$，すなわち領域Aと領域Bを合わせた領域をEとする。このとき，領域Dと領域Eの共通部分$D\cap E$を図示し，さらに，その面積を求めよ。 [2013]

解答例



(1) 円$C:(x-1)^2+(y-1)^2=2$ ……①と直線$y=x-2$すなわち$x-y-2=0$ ……②に対して，Cの中心$(1,\ 1)$と直線②との距離は，$\frac{|1-1-2|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\sqrt{2}$となる。これは，$C$の半径と等しいので，円$C$と直線②は接する。

また，直線②の法線ベクトルの成分は$(1,\ -1)$とすることができ，しかもこのベクトルの大きさは，円Cの半径$\sqrt{2}$と等しいことより，接点の座標は，

$$(1,\ 1)+(1,\ -1)=(2,\ 0)$$

(2) 円Cと放物線$y=\frac{1}{4}x^2-1$ ……③との共有点は，①③を連立して，

$$(x-1)^2+\left(\frac{1}{4}x^2-2\right)^2=2,\ 16(x-1)^2+(x^2-8)^2=32$$

まとめると，$x^4-32x+48=0$，$(x-2)^2(x^2+4x+12)=0$

すると，$x^2+4x+12=0$は実数解をもたないので，解は$x=2$だけとなり，共有点の座標は$(2,\ 0)$である。

(3) 不等式$|x|+|y|\leqq 2$の表す領域Aは，4点$(2,\ 0)$，$(0,\ 2)$，$(-2,\ 0)$，$(0,\ -2)$を頂点とする正方形の内部または周上を表す。

また，不等式$(|x|-1)^2+(y-1)^2\leqq 2$の表す領域Bは，$x\geqq 0$のとき中心$(1,\ 1)$で半径$\sqrt{2}$の円の内部または周上，$x\leqq 0$のとき中心$(-1,\ 1)$で半径$\sqrt{2}$の円の内部または周上を表す。

さらに，不等式$y\geqq\frac{1}{4}x^2-1$の表す領域Dは，放物線③の上側または線上を表す。

以上より，$D\cap E=D\cap(A\cup B)$の表す領域は，右下図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

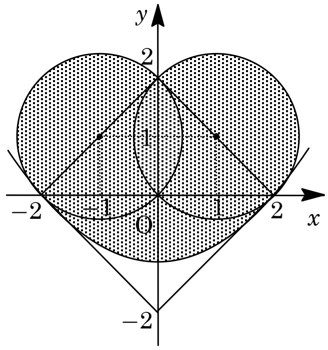
この面積 S は，y 軸に関する対称性より，

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}\pi(\sqrt{2})^2+\int_0^2\left\{-x+2-\left(\frac{1}{4}x^2-1\right)\right\}dx$$

$$=\pi+\int_0^2\left(-\frac{1}{4}x^2-x+3\right)dx$$

$$=\pi+\left[-\frac{1}{12}x^3-\frac{x^2}{2}+3x\right]_0^2=\pi+\frac{10}{3}$$

よって，$S=2\pi+\dfrac{20}{3}$ である。



コメント

不等式と領域の基本問題です。見かけほど繁雑ではありません。

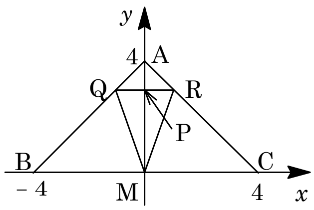
問　題

$\angle$A が直角の二等辺三角形 ABC を考える。辺 BC の中点を M とし, 線分 AM を $1:3$ に内分する点を P とする。また, 点 P を通り辺 BC に平行な直線と, 辺 AB, AC との交点をそれぞれ Q, R とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\angle\mathrm{QMR}$ を求めよ。

(2)　$\angle\mathrm{QMR}$ の 2 倍と $\angle\mathrm{QMB}$ の大小を判定せよ。　[2009]

解答例



(1)　M を原点とし, $\mathrm{A}(0,\ 4)$, $\mathrm{B}(-4,\ 0)$, $\mathrm{C}(4,\ 0)$ とする座標系を設定しても, 一般性を失わない。

すると, $\mathrm{AP}:\mathrm{PM}=1:3$ なので, $\mathrm{AP}=\mathrm{QP}=\mathrm{RP}=1$ となり, $\mathrm{Q}(-1,\ 3)$, $\mathrm{R}(1,\ 3)$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=(-1,\ 3),\ \overrightarrow{\mathrm{MR}}=(1,\ 3)$$

よって, $\cos\angle\mathrm{QMR}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MR}}|}=\dfrac{-1+9}{\sqrt{10}\times\sqrt{10}}=\dfrac{4}{5}$

(2)　(1)より, $\cos 2\angle\mathrm{QMR}=2\cos^2\angle\mathrm{QMR}-1=\dfrac{7}{25}$ ………①

また, $\overrightarrow{\mathrm{MB}}=(-4,\ 0)$ から,

$$\cos\angle\mathrm{QMB}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{MQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}||\overrightarrow{\mathrm{MB}}|}=\frac{4}{\sqrt{10}\times 4}=\frac{1}{\sqrt{10}}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで, $7\sqrt{10}<25$ から $\dfrac{7}{25}<\dfrac{1}{\sqrt{10}}$ となり, ①②より,

$$\cos 2\angle\mathrm{QMR}<\cos\angle\mathrm{QMB}$$

よって, $2\angle\mathrm{QMR}>\angle\mathrm{QMB}$ である。

コメント

いろいろな解法が考えられます。上の解は, 座標系を設定したときの一例です。

問　題

a を正の実数とし，点 $\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ と曲線 $C : y=ax^2\ (x \geqq 0)$ を考える。曲線 C 上の点で，点 A との距離が最小となるものを P とする。このとき次の問いに答えよ。

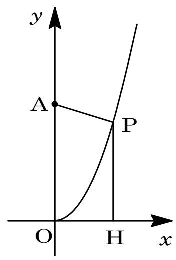
(1) 点 P の座標と線分 AP の長さを求めよ。

(2) 曲線 C と y 軸，および線分 AP で囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) $a>0$ のとき，面積 $S(a)$ の最小値を求めよ。また，そのときの a の値を求めよ。

[2005]

解答例



(1) $\mathrm{P}(t,\ at^2)$ とおくと，$\mathrm{A}\left(0,\ a+\dfrac{1}{2a}\right)$ より，

$$\mathrm{AP}^2=t^2+\left(at^2-a-\frac{1}{2a}\right)^2=a^2t^4-2a^2t^2+a^2+\frac{1}{4a^2}+1$$

$$=a^2(t^2-1)^2+\frac{1}{4a^2}+1$$

これより，$t^2=1\ (t=1)$ のとき，AP^2 は最小値 $\dfrac{1+4a^2}{4a^2}$ をとる。

すなわち $\mathrm{P}(1,\ a)$ において，AP は最小値 $\sqrt{\dfrac{1+4a^2}{4a^2}}=\dfrac{\sqrt{1+4a^2}}{2a}$

をとる。

(2) $S(a)=\dfrac{1}{2}(\mathrm{OA}+\mathrm{PH})\cdot\mathrm{OH}-\displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx=\dfrac{1}{2}\left(a+\dfrac{1}{2a}+a\right)\cdot 1-a\left[\dfrac{x^3}{3}\right]_0^1=\dfrac{2}{3}a+\dfrac{1}{4a}$

(3) $a>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$S(a)\geqq 2\sqrt{\frac{2}{3}a\cdot\frac{1}{4a}}=2\sqrt{\frac{1}{6}}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

等号は $\dfrac{2}{3}a=\dfrac{1}{4a}$ すなわち $a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき成立する。

よって，$a=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ のとき，$S(a)$ は最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

コメント

場合分けが不要であるように問題が設定されています。相加平均と相乗平均の関係を用いて，面積の最小値を求めます。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　原点を中心とする半径 $r\,(r>0)$ の円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ における接線の方程式は，$ax+by=r^2$ で与えられることを示せ。

(2)　円 $x^2+y^2=1$ と放物線 $C:\ y=x^2+1$ の両方に接する直線は 3 本ある。これらの接線の方程式を求めよ。

(3)　問(2)における 3 本の接線のうち，x 軸の正の部分と交わる接線を l_1，x 軸に平行な接線を l_2 とする。接線 l_1，l_2 および放物線 C とで囲まれる部分の面積を求めよ。

[2002]

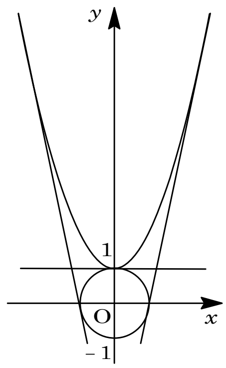
解答例

(1)　円 $x^2+y^2=r^2$ 上の点 $(a,\ b)$ において，$a^2+b^2=r^2$ ………①

また，この点における接線は，その法線ベクトルの成分が $(a,\ b)$ から，

$$a(x-a)+b(y-b)=0\ ,\ \ ax+by=a^2+b^2$$

①より，$ax+by=r^2$



(2)　$x^2+y^2=1$ ……②，$y=x^2+1$ ……③に対して，

③上の接点を $(t,\ t^2+1)$ とおくと，$y'=2x$ より，接線は，

$$y-(t^2+1)=2t(x-t)\ ,\ \ 2tx-y-t^2+1=0\ \text{………④}$$

②と④が接するので，$\dfrac{|-t^2+1|}{\sqrt{4t^2+1}}=1$

$$(-t^2+1)^2=4t^2+1\ ,\ \ t^4-6t^2=0\ ,\ \ t=0,\ \pm\sqrt{6}$$

よって，接線は④より，$y=1$，$y=\pm 2\sqrt{6}\,x-5$ となる。

(3)　2 直線 $y=1$ と $y=2\sqrt{6}\,x-5$ の交点は，$2\sqrt{6}\,x-5=1$ より，$x=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$ である。

求める部分の面積を S とすると，

$$S=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}(x^2+1-1)\,dx+\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}(x^2+1-2\sqrt{6}x+5)\,dx$$

$$=\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}x^2dx+\int_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}(x-\sqrt{6})^2dx=\frac{1}{3}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\sqrt{6}}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-\sqrt{6})^3\Big]_{\frac{\sqrt{6}}{2}}^{\sqrt{6}}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{3\sqrt{6}}{4}=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

コメント

誘導に従って(1)を用いて(2)を解こうとしましたが，計算が複雑なので止めました。

問　題

3 次関数 $y=x^3+ax^2+bx+c$ のグラフを G とする。

(1) xy 平面上の点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(2) G はこの上のある点に関して点対称であることを示せ。

(3) y 軸に平行な直線 $x=p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点の座標を求めよ。

(4) G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でないことを示せ。　[2001]

解答例

(1) 点 $(p,\ q)$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\frac{x+X}{2}=p,\quad \frac{y+Y}{2}=q$$

$x=2p-X$，$y=2q-Y$ より，対称点の座標は $(2p-X,\ 2q-Y)$ となる。

(2) $G: y=x^3+ax^2+bx+c$ ……①上の点 $(X,\ Y)$ に対して，

$$Y=X^3+aX^2+bX+c\ \cdots\cdots\cdots②$$

G 上の点 $(p,\ p^3+ap^2+bp+c)$ に関して対称移動した点を $(x,\ y)$ とすると，

$$X=2p-x,\quad Y=2(p^3+ap^2+bp+c)-y\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$2(p^3+ap^2+bp+c)-y=(2p-x)^3+a(2p-x)^2+b(2p-x)+c$

$$y=x^3-(a+6p)x^2+(12p^2+4ap+b)x-6p^3-2ap^2+c\ \cdots\cdots\cdots④$$

①と④が一致する条件は，

$$a=-a-6p\ \cdots\cdots⑤,\quad b=12p^2+4ap+b\ \cdots\cdots⑥,\quad c=-6p^3-2ap^2+c\ \cdots\cdots⑦$$

⑤より $p=-\frac{1}{3}a$ となり，このとき⑥⑦はともに成立する。

すると，$q=p^3+ap^2+bp+c=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$ となり，G はこのグラフ上の点 $\left(-\frac{1}{3}a,\ \frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c\right)$ に関して点対称である。

(3) 直線 $x=p$ に関する，点 $(X,\ Y)$ に対称な点を $(x,\ y)$ とすると，

$$\frac{x+X}{2}=p,\quad y=Y$$

$x=2p-X$，$y=Y$ より，対称点の座標は $(2p-X,\ Y)$ となる。

(4) (2)と同様にして，$X=2p-x$，$Y=y$ を②に代入すると，

$$y=-x^3+(a+6p)x^2-(12p^2+4ap+b)x+8p^3+4ap^2+2bp+c\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

x^3 の係数を比べると，どんな p の値に対しても①と⑧は一致しない。

したがって，G は y 軸に平行などんな直線に関しても線対称でない。

コメント

3 次曲線の有名な性質についての証明問題です。このように，一度きっちり証明しておくと記憶に残ります。

問　題

t を $0<t<1$ を満たす実数とする。面積が 1 である三角形 ABC において，辺 AB, BC, CA をそれぞれ $2:1$，$t:1-t$，$1:3$ に内分する点を D, E, F とする。また，AE と BF, BF と CD, CD と AE の交点をそれぞれ P, Q, R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　3 直線 AE, BF, CD が 1 点で交わるときの t の値 t_0 を求めよ。

　以下，t は $0<t<t_0$ を満たすものとする。

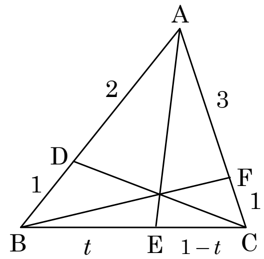
(2)　$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ を満たす実数 k, l をそれぞれ求めよ。

(3)　三角形 BCQ の面積を求めよ。

(4)　三角形 PQR の面積を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　△ABC において，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=2:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=t:1-t$，$\mathrm{CF}:\mathrm{FA}=1:3$ であり，$t=t_0$ のとき，AE, BF, CD が 1 点で交わることより，チェバの定理から，

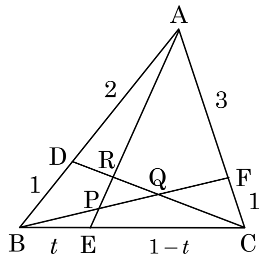


$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\ \frac{2}{1}\cdot\frac{t_0}{1-t_0}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$2t_0=3(1-t_0)$ から，$t_0=\dfrac{3}{5}$ となる。

(2)　条件より，$\mathrm{AP}=k\mathrm{AE}$，$\mathrm{CR}=l\mathrm{CD}$ なので，

$$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=k:1-k,\ \mathrm{CR}:\mathrm{RD}=l:1-l$$



さて，△AEC と直線 BF にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PE}}\cdot\frac{\mathrm{EB}}{\mathrm{BC}}\cdot\frac{\mathrm{CF}}{\mathrm{FA}}=1,\ \frac{k}{1-k}\cdot\frac{t}{1}\cdot\frac{1}{3}=1$$

すると，$kt=3(1-k)$ より，$k=\dfrac{3}{3+t}$ となる。

また，△CDB と直線 AE にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{CR}}{\mathrm{RD}}\cdot\frac{\mathrm{DA}}{\mathrm{AB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EC}}=1,\ \frac{l}{1-l}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{t}{1-t}=1$$

すると，$2lt=3(1-l)(1-t)$ より，$(3-t)l=3-3t$，$l=\dfrac{3-3t}{3-t}$ となる。

(3)　$\mathrm{BQ}:\mathrm{QF}=m:1-m$ とし，△BFA と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QF}}\cdot\frac{\mathrm{FC}}{\mathrm{CA}}\cdot\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}=1,\ \frac{m}{1-m}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{1}=1$$

すると，$2m=4(1-m)$ より，$m=\dfrac{2}{3}$ となる。

よって，△ABC の面積が 1 から，$\triangle\mathrm{BCQ}=\dfrac{2}{3}\triangle\mathrm{BCF}=\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{4}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{6}$

(4)　(2)から，$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=\dfrac{3}{3+t}:\left(1-\dfrac{3}{3+t}\right)=3:t$ となり，

$$\triangle\mathrm{ABP}=\frac{3}{3+t}\triangle\mathrm{ABE}=\frac{3}{3+t}\cdot t\triangle\mathrm{ABC}=\frac{3t}{3+t}$$

また，$\mathrm{CR}:\mathrm{RD}=\dfrac{3-3t}{3-t}:\left(1-\dfrac{3-3t}{3-t}\right)=3-3t:2t$ から，

$$\triangle\mathrm{CAR}=\frac{3-3t}{3-3t+2t}\triangle\mathrm{CAD}=\frac{3-3t}{3-t}\cdot\frac{2}{3}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{2-2t}{3-t}$$

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\triangle\mathrm{ABC}-\triangle\mathrm{BCQ}-\triangle\mathrm{CAR}-\triangle\mathrm{ABP}$ より，

$$\triangle\mathrm{PQR}=1-\frac{1}{6}-\frac{2-2t}{3-t}-\frac{3t}{3+t}=\frac{25t^2-30t+9}{6(3-t)(3+t)}=\frac{(5t-3)^2}{6(3-t)(3+t)}$$

コメント

平面図形の基本定理を適用する問題です。ベクトルを利用する手もありますが。

問　題

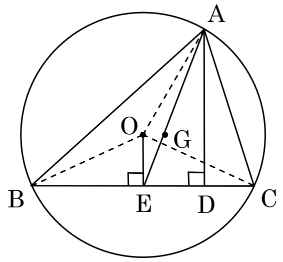
鋭角三角形 △ABC について，∠A，∠B，∠C の大きさを，それぞれ A，B，C とする。△ABC の重心を G，外心を O とし，外接円の半径を R とする。

(1) A と O から辺 BC に下ろした垂線を，それぞれ AD，OE とする。このとき，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$，$\mathrm{OE}=R\cos A$ を証明せよ。

(2) G と O が一致するならば，△ABC は正三角形であることを証明せよ。

(3) △ABC が正三角形でないとし，さらに OG が BC と平行であるとする。このとき，$\mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$，$\tan B\tan C=3$ を証明せよ。 [2014]

解答例



(1) △ABC の外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2R\sin C,\ \mathrm{BC}=2R\sin A,\ \mathrm{CA}=2R\sin B$$

ここで，△ABC の面積を S とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C\cdots\cdots\cdots①$$

A から辺 BC に下ろした垂線が AD より，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{BC}\cdot\mathrm{AD}=\mathrm{AD}\cdot R\sin A\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\mathrm{AD}\cdot R\sin A=2R^2\sin A\sin B\sin C$，$\mathrm{AD}=2R\sin B\sin C$

また，O から辺 BC に下ろした垂線が OE で，$\angle\mathrm{BOE}=\frac{1}{2}\angle\mathrm{BOC}=\frac{1}{2}\cdot2\angle\mathrm{A}=A$

よって，$\mathrm{OE}=R\cos\angle\mathrm{BOE}=R\cos A$

(2) 直線 AG と辺 BC は BC の中点，すなわち点 E で交わり，G と O が一致するならば，$\mathrm{GE}\perp\mathrm{BC}$ すなわち $\mathrm{AE}\perp\mathrm{BC}$ となる。これより $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である。

同様に考えると，$\mathrm{BG}\perp\mathrm{AC}$ となり，$\mathrm{BA}=\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}$ となり，△ABC は正三角形である。

(3) OG が BC と平行であるとき，$\triangle\mathrm{OGE}\backsim\triangle\mathrm{DEA}$ となり，$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=\mathrm{GE}:\mathrm{EA}$

ここで，点 G は△ABC の重心より，$\mathrm{GE}:\mathrm{EA}=1:3$ となり，

$$\mathrm{OE}:\mathrm{DA}=1:3,\ \mathrm{AD}=3\mathrm{OE}$$

(1)の結果から，$2R\sin B\sin C=3R\cos A$，$2\sin B\sin C=-3\cos(B+C)$ となり，

$$2\sin B\sin C=-3(\cos B\cos C-\sin B\sin C),\ 3\cos B\cos C=\sin B\sin C$$

よって，$\tan B\tan C=\dfrac{\sin B\sin C}{\cos B\cos C}=3$ となる。

コメント

図形の計量についての標準的な問題です。誘導に従えば，一見，難しそうな(3)の関係式が証明できます。

問　題

三角形 ABC の 3 辺の長さを $a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$ とする。実数 $t\geqq 0$ を与えたとき, A を始点とし B を通る半直線上に $\mathrm{AP}=tc$ となるように点 P をとる。次の問いに答えよ。

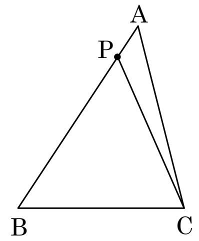
(1)　CP^2 を a, b, c, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\mathrm{CP}=a$ を満たすとき, t を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P が辺 AB 上にちょうど 2 つあるとき，$\angle\mathrm{A}$ と $\angle\mathrm{B}$ に関する条件を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　余弦定理から，$\cos\angle\mathrm{A}=\dfrac{b^2+c^2-a^2}{2bc}$ となり，



$$\begin{aligned}\mathrm{CP}^2&=b^2+t^2c^2-2btc\cos\angle\mathrm{A}\\&=b^2+t^2c^2-t(b^2+c^2-a^2)\\&=ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2\end{aligned}$$

(2)　$\mathrm{CP}=a$ のとき, (1)より，$ta^2+(1-t)b^2+(t^2-t)c^2=a^2$

$$(1-t)(-a^2+b^2-tc^2)=0$$

すると, $t\geqq 0$ から, $b\geqq a$ のとき $t=1,\ \dfrac{-a^2+b^2}{c^2}$，$b<a$ のとき $t=1$ である。

(3)　t の値が $0\leqq t\leqq 1$ に 2 つ存在する条件は, $b\geqq a$ のとき $0\leqq\dfrac{-a^2+b^2}{c^2}<1$ より,

$$b\geqq a\cdots\cdots\cdots①,\ \ b^2<a^2+c^2\cdots\cdots\cdots②$$

①より $\angle\mathrm{B}\geqq\angle\mathrm{A}$, ②より $\angle\mathrm{B}<90^\circ$

まとめると，$\angle\mathrm{A}\leqq\angle\mathrm{B}<90^\circ$ となる。

コメント

三角比の応用についての基本問題です。

問　題

3 辺の長さがそれぞれ $\sqrt{x^2-2x}$ ，$4-x$ ，2 で表される三角形がある。長さ $\sqrt{x^2-2x}$ の辺は他の 2 辺より長さが短くないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) このような三角形が描けるための x の満たす範囲を求めよ。

(2) この三角形の最短の辺と向かい合った角の大きさを θ とするとき，$\cos\theta$ を x を用いて表せ。

(3) x が(1)で求めた範囲にあるときの $\cos\theta$ の最小値と，その最小値を与える x の値を求めよ。 [2007]

解答例

(1) まず，$x^2-2x>0$ かつ $4-x>0$ から，$x<0$，$2<x<4$ ……①となり，条件より，

$$\sqrt{x^2-2x}\geqq 4-x\ \cdots\cdots\cdots②,\quad \sqrt{x^2-2x}\geqq 2\ \cdots\cdots\cdots③$$

$4-x>0$ なので，②より $x^2-2x\geqq(4-x)^2$ となり，$x\geqq\dfrac{8}{3}$ ………②′

③から，$x^2-2x\geqq 4$ となり，$x\leqq 1-\sqrt{5}$，$1+\sqrt{5}\leqq x$ ………③′

①②′③′をまとめると，$1+\sqrt{5}\leqq x<4$ ………④

さらに，三角形の形成条件から，$\sqrt{x^2-2x}<(4-x)+2$

$$x^2-2x<(6-x)^2,\quad x<\frac{18}{5}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$1+\sqrt{5}\leqq x<\dfrac{18}{5}$

(2) (1)より，$\dfrac{2}{5}<4-x\leqq 3-\sqrt{5}$ となるので，$4-x<2$ である。

よって，最短の辺の長さは $4-x$ であり，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{2^2+(x^2-2x)-(4-x)^2}{2\cdot 2\cdot\sqrt{x^2-2x}}=\frac{6x-12}{4\sqrt{x^2-2x}}=\frac{3(x-2)}{2\sqrt{x^2-2x}}$$

(3) (1)より，$x>2$ なので，

$$\cos\theta=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(x-2)^2}{x(x-2)}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{x-2}{x}}=\frac{3}{2}\sqrt{1-\frac{2}{x}}$$

$1+\sqrt{5}\leqq x<\dfrac{18}{5}$ より，$x=1+\sqrt{5}$ のとき $\cos\theta$ は最小となり，最小値は，

$$\frac{3}{2}\sqrt{\frac{-1+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}}=\frac{3}{2}\sqrt{\frac{(-1+\sqrt{5})^2}{-1+5}}=\frac{3}{4}(-1+\sqrt{5})$$

コメント

(1)では，不等式が多量に現れるので，いったん中締めをしています。なお，両辺を 2 乗すると，一般的に同値関係が崩れるので注意が必要です。

問　題

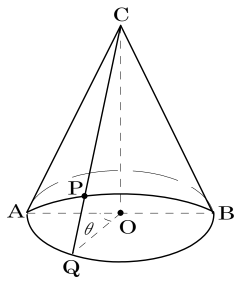
長さ 2 の線分 AB を直径とする円を底面とし，高さが$\sqrt{3}$の直円錐を考える。この直円錐の側面上で 2 点 A, B を結ぶ最短の道を l とする。直円錐の頂点を C，底面の中心を O とし以下の問いに答えよ。

(1) 直円錐の展開図を用いて，l の長さを求めよ。

(2) l 上の点 P に対して，線分 CP の延長と弧 AB の交点を Q とする。$\angle\mathrm{AOQ}=\theta$ としてCP^2を$\sin\theta$で表せ。ただし，$0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ$とする。

(3) P から線分 OQ に下ろした垂線を PR とし，A から線分 OQ に下ろした垂線を AS とする。$0^\circ<\theta\leqq90^\circ$の範囲で$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$の最大値を求めよ。　[1999]

解答例



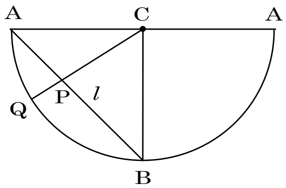
(1) 母線 AC の長さは$\sqrt{1+3}=2$となるので，側面の展開図の中心角をφとすると，

$$2\pi\cdot1=2\pi\cdot2\cdot\frac{\varphi}{360^\circ}\ \text{より，}\ \varphi=180^\circ$$

線分 AB は底面の直径なので，$\angle\mathrm{ACB}=90^\circ$

よって，l の長さは展開図で$\mathrm{AB}=2\sqrt{2}$となる。

(2) 弧 AQ の長さは，底面では$2\pi\cdot1\cdot\dfrac{\theta}{360^\circ}$であるが，側面の展開図では$2\pi\cdot2\cdot\dfrac{\angle\mathrm{ACQ}}{360^\circ}$と表せるので，$\angle\mathrm{ACQ}=\dfrac{\theta}{2}$

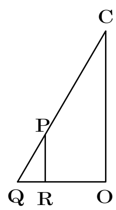


$\triangle$APC に正弦定理を適用すると，$\angle\mathrm{CAP}=45^\circ$から，

$$\frac{\mathrm{CP}}{\sin45^\circ}=\frac{2}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}$$

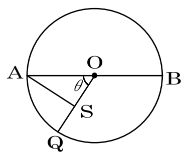
$$\mathrm{CP}=\frac{2\sin45^\circ}{\sin\left(135^\circ-\dfrac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{2}}{\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}$$

よって，$\mathrm{CP}^2=\dfrac{2}{\dfrac{1}{2}\left(\cos\dfrac{\theta}{2}+\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2}=\dfrac{4}{1+2\cos\dfrac{\theta}{2}\sin\dfrac{\theta}{2}}=\dfrac{4}{1+\sin\theta}$



(3) $\triangle$COQ について考えると，$\dfrac{\mathrm{OR}}{\mathrm{OQ}}=\dfrac{\mathrm{CP}}{\mathrm{CQ}}$から，

$$\mathrm{OR}=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{4}{1+\sin\theta}}=\frac{1}{\sqrt{1+\sin\theta}}\ \text{より，}\ \mathrm{OR}^2=\frac{1}{1+\sin\theta}$$



次に底面について，$\mathrm{OS}=\mathrm{OA}\cos\theta=\cos\theta$より$\mathrm{OS}^2=\cos^2\theta$

よって，$\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}=\cos^2\theta(1+\sin\theta)=(1-\sin^2\theta)(1+\sin\theta)$

$\sin\theta=t$ とおくと，$0°<\theta\leqq 90°$ より $0<t\leqq 1$

このとき，$f(t)=(1-t^2)(1+t)$ とおくと，

$$f'(t)=-2t(1+t)+(1-t^2)$$
$$=-(3t-1)(t+1)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\frac{32}{27}$	$\searrow$	

$f(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき最大値 $\dfrac{32}{27}$ をとる。すなわち $\dfrac{\mathrm{OS}^2}{\mathrm{OR}^2}$ の最大値は $\dfrac{32}{27}$ である。

コメント

断面図や展開図を書かないと，位置関係がとらえきれない問題です。

問　題

1 辺の長さが 1 である正四面体 OABC を考える。辺 OA の中点を P, 辺 OB を$2:1$に内分する点を Q, 辺 OC を$1:3$に内分する点を R とする。以下の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の長さと線分 PR の長さを求めよ。

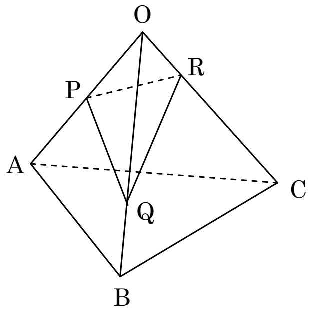
(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ を求めよ。

(3) 三角形 PQR の面積を求めよ。　[2015]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$



さて，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\frac{2}{3}\vec{b}-\frac{1}{2}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{1}{4}\vec{c}-\frac{1}{2}\vec{a}$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2=\frac{4}{9}\cdot1^2-2\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{13}{36}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2=\frac{1}{16}\cdot1^2-2\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{3}{16}$$

よって，$\mathrm{PQ}=\sqrt{\frac{13}{36}}=\frac{\sqrt{13}}{6}$, $\mathrm{PR}=\sqrt{\frac{3}{16}}=\frac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot1^2=\frac{5}{48}$

(3) △PQR の面積を S とすると，$S=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}})^2}$ となるので，

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{\frac{13}{6^2}\cdot\frac{3}{4^2}-\frac{5^2}{48^2}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{13\cdot3\cdot2^2-25}}{48}=\frac{\sqrt{131}}{96}$$

コメント

センターレベルの基本問題です。解答例では，(3)は数値計算だけとしましたが，出題の狙いは公式を導く方だったかもしれません。

問　題

1 辺の長さが 1 の正方形 OABC を底面とし，$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=\mathrm{BP}=\mathrm{CP}$ を満たす点 P を頂点とする四角錐 POABC がある。辺 AP を $1:3$ に内分する点を D，辺 CP の中点を E，辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点を Q とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と t を用いて表せ。

(3) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の値を求めよ。

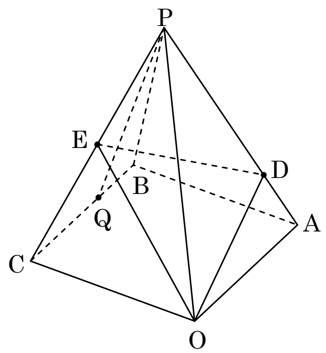
(4) 直線 PQ が平面 ODE に垂直であるとき，t の値および線分 OP の長さを求めよ。

[2013]

解答例

(1) 点 D は辺 AP を $1:3$ に内分する点，点 E は辺 CP の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OE}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$



(2) 点 Q は辺 BC を $t:(1-t)$ に内分する点より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{PQ}}&=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(1-t)(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\\&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\end{aligned}$$

(3) $\mathrm{OA}=1$，$\mathrm{OP}=\mathrm{AP}=k$ とおき，△OAP に余弦定理を適用すると，

$$k^2=1^2+k^2-2\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$$

(4) $\mathrm{OC}=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0$ であり，(2)と同様にすると，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}$

さて，直線 PQ が平面 ODE に垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0$ となり，

$$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(3\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$$

$$3(1-t)+\frac{1}{2}(1-t)+\frac{1}{2}-3\cdot\frac{1}{2}-k^2=0,\ \ \frac{7}{2}t+k^2=\frac{5}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=0$ から，$\left((1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\right)\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=0$

$$\frac{1}{2}(1-t)+1+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-k^2=0,\ \ \frac{1}{2}t+k^2=\frac{3}{2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$3t=1$ より $t=\frac{1}{3}$ となり，

また，$k^2=\frac{3}{2}-\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}=\frac{4}{3}$ より，$\mathrm{OP}=k=\sqrt{\frac{4}{3}}=\frac{2}{\sqrt{3}}$

コメント

空間ベクトルの図形への応用。(3)では正射影ベクトルを考える方法もあります。

問　題

原点を O とする座標空間に，3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 0,\ 2)$，$C(-2,\ 1,\ 3)$ がある。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ において，$\angle B$ は $\dfrac{\pi}{2}$ より大きいことを示せ。

(2) 点 A から直線 BC に下ろした垂線と直線 BC との交点を H とする。点 H の座標を求めよ。

(3) $\triangle OAH$ の面積を求めよ。 [2012]

解答例

(1) 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 0,\ 2)$，$C(-2,\ 1,\ 3)$ に対して，

$$\overrightarrow{BA}=(1,\ 0,\ -2),\ \overrightarrow{BC}=(-2,\ 1,\ 1)$$

これより，$\overrightarrow{BA}\cdot\overrightarrow{BC}=-2+0-2=-4<0$ となり，$\angle ABC>\dfrac{\pi}{2}$ である。

(2) 点 H は直線 BC 上にあることより，

$$\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BC}=(0,\ 0,\ 2)+t(-2,\ 1,\ 1)=(-2t,\ t,\ 2+t)\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

$\overrightarrow{AH}=(-2t-1,\ t,\ 2+t)$ と $\overrightarrow{BC}$ は垂直なので，

$$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{BC}=-2(-2t-1)+t+(2+t)=6t+4=0$$

よって，$t=-\dfrac{2}{3}$ となり，(*)から，$H\left(\dfrac{4}{3},\ -\dfrac{2}{3},\ \dfrac{4}{3}\right)$ である。

(3) 点 H から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点 I は，$I\left(\dfrac{4}{3},\ 0,\ 0\right)$ となるので，

$$\triangle OAH=\frac{1}{2}\cdot OA\cdot HI=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{\left(-\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

コメント

空間ベクトルについての基本問題です。

問　題

平面上に直角三角形 ABC があり，その斜辺 BC の長さを 2 とする。また，点 O は $4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

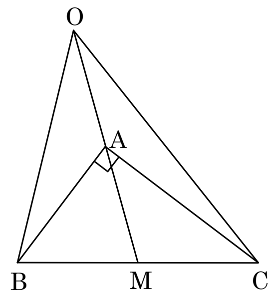
(1) 辺 BC の中点を M とするとき，点 A は線分 OM の中点となることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=10$ となることを示せ。

(3) $4|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{PC}|^2=-4$ を満たす点を P とするとき，$|\overrightarrow{OP}|$ の値を求めよ。

[2011]

解答例



(1) 条件より，$4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC}=\vec{0}$ ………①

また，辺 BC の中点を M とすると，

$$\overrightarrow{OM}=\frac{\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$4\overrightarrow{OA}-2\overrightarrow{OM}=\vec{0}$，$\overrightarrow{OM}=2\overrightarrow{OA}$

よって，点 A は線分 OM の中点となる。

(2) $\angle BAC=90^\circ$ から，$AM=BM=\frac{1}{2}BC=1$

すると，(1)より $|\overrightarrow{OM}|=2$ となり，△OBC に中線定理を適用して，

$$|\overrightarrow{OB}|^2+|\overrightarrow{OC}|^2=2(|\overrightarrow{OM}|^2+|\overrightarrow{BM}|^2)=10\ \cdots\cdots\cdots③$$

(3) 条件より，$4|\overrightarrow{PA}|^2-|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{PC}|^2=-4$ を変形すると，

$$4|\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OP}|^2-|\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OP}|^2=-4$$

$|\overrightarrow{OA}|=1$ および③から，

$$4(1-2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP}+|\overrightarrow{OP}|^2)-(10-2\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OP}-2\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OP}+2|\overrightarrow{OP}|^2)=-4$$

$$2|\overrightarrow{OP}|^2-2(4\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB}-\overrightarrow{OC})\cdot\overrightarrow{OP}=2$$

①より，$2|\overrightarrow{OP}|^2=2$ となり，$|\overrightarrow{OP}|=1$ である。

コメント

誘導に従えば，テクニカルな変形が不要であるように問題が構成されています。

問　題

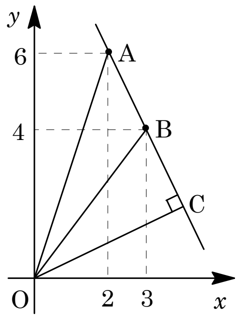
座標平面に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A(2,\ 6)$，$B(3,\ 4)$ をとり，点 O から直線 AB に垂線 OC を下ろす。また，実数 s と t に対し，点 P を，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ で定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 C の座標を求め，$|\overrightarrow{CP}|^2$ を s と t を用いて表せ。

(2) $s=\dfrac{1}{2}$ とし，t を $t\geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ。

(3) $s=1$ とし，t を $t\geqq 0$ の範囲で動かすとき，$|\overrightarrow{CP}|^2$ の最小値を求めよ。　[2009]

解答例



(1) 直線 AB の方程式は，$A(2,\ 6)$，$B(3,\ 4)$ から，

$$y-6=-2(x-2),\quad y=-2x+10\ \cdots\cdots①$$

直線 OC は直線 AB と垂直なので，その方程式は，

$$y=\frac{1}{2}x\ \cdots\cdots②$$

①②より，$-2x+10=\dfrac{1}{2}x$，$x=4$

②より，$y=2$ となり，$C(4,\ 2)$ である。

また，$\overrightarrow{OP}=s\overrightarrow{OA}+t\overrightarrow{OB}$ より，

$$\overrightarrow{OP}=s(2,\ 6)+t(3,\ 4)=(2s+3t,\ 6s+4t)$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{CP}|^2&=(2s+3t-4)^2+(6s+4t-2)^2\\&=(2s+3t)^2-8(2s+3t)+16+(6s+4t)^2-4(6s+4t)+4\\&=40s^2+60st+25t^2-40s-40t+20\end{aligned}$$

(2) $s=\dfrac{1}{2}$，$t\geqq 0$ のとき，(1)より，

$$|\overrightarrow{CP}|^2=10+30t+25t^2-20-40t+20=25t^2-10t+10=25\left(t-\frac{1}{5}\right)^2+9$$

よって，$|\overrightarrow{CP}|^2$ は，$t=\dfrac{1}{5}$ のとき最小値 9 をとる。

(3) $s=1$，$t\geqq 0$ のとき，(1)より，

$$|\overrightarrow{CP}|^2=40+60t+25t^2-40-40t+20=25t^2+20t+20=25\left(t+\frac{2}{5}\right)^2+16$$

よって，$|\overrightarrow{CP}|^2$ は，$t=0$ のとき最小値 20 をとる。

コメント

ベクトルの成分計算についての，不安になるほどの基本題です。

問　題

t を $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす数とし，空間内の 4 点 $A(t,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ t,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ t)$，$P\left(\frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t,\ \frac{4}{9}t\right)$を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ は正三角形であることを示し，その面積$S(t)$を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の重心を G とする。$\overrightarrow{PG}$ は$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$の両方に垂直であることを示せ。

(3) 四面体 PABC の体積$V(t)$を求めよ。また$V(t)$の最小値とその最小値を与える t の値を求めよ。 [2007]

解答例

(1) $AB=\sqrt{(t-1)^2+t^2+1}$，$BC=\sqrt{1+(t-1)^2+t^2}$，$CA=\sqrt{t^2+1+(t-1)^2}$ より，$AB=BC=CA$ となるので，$\triangle ABC$ は正三角形であり，その面積$S(t)$は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{(t-1)^2+t^2+1}\right)^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)$$

(2) $\triangle ABC$ の重心 G の座標は，$G\left(\frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3},\ \frac{t+1}{3}\right)$より，

$$\overrightarrow{PG}=\left(\frac{t+1}{3}-\frac{4}{9}t,\ \frac{t+1}{3}-\frac{4}{9}t,\ \frac{t+1}{3}-\frac{4}{9}t\right)=\frac{1}{9}(-t+3)(1,\ 1,\ 1)$$

ここで，$\overrightarrow{AB}=(1-t,\ t,\ -1)$，$\overrightarrow{AC}=(-t,\ 1,\ t-1)$より，

$$\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{9}(-t+3)(1-t+t-1)=0$$

$$\overrightarrow{PG}\cdot\overrightarrow{AC}=\frac{1}{9}(-t+3)(-t+1+t-1)=0$$

よって，$\overrightarrow{PG}$ は$\overrightarrow{AB}$，$\overrightarrow{AC}$の両方に垂直である。

(3) $0 \leqq t \leqq 1$ から，$|\overrightarrow{PG}|=\frac{1}{9}|-t+3|\sqrt{1^2+1^2+1^2}=\frac{\sqrt{3}}{9}(-t+3)$ となる。

四面体 PABC の体積$V(t)$は，$V(t)=\frac{1}{3}S(t)\cdot|\overrightarrow{PG}|$より，

$$V(t)=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}(t^2-t+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{9}(-t+3)=\frac{1}{18}(-t^3+4t^2-4t+3)$$

すると，$V'(t)=\frac{1}{18}(-3t^2+8t-4)$

$$=-\frac{1}{18}(3t-2)(t-2)$$

t	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(t)$		$-$	0	$+$	
$V(t)$		↘	$\frac{49}{486}$	↗	

よって，$V(t)$の増減は右表のようになり，$t=\frac{2}{3}$のとき，$V(t)$は最小値$\frac{49}{486}$をとる。

コメント

空間図形と微分の融合問題です。誘導が丁寧なので，出題意図がよくわかります。

問　題

空間ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$について次の問いに答えよ。ただし, h と k は実数とする。

(1) $h\vec{a}+\vec{b}$ が $\vec{a}$ と垂直であるとき, すべての実数 x に対して, $|x\vec{a}+\vec{b}|\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|$ が成り立つことを示せ。ただし, $\vec{0}$はすべてのベクトルと垂直であるとする。

(2) $h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}$ が $\vec{a}$, $\vec{b}$ のいずれとも垂直であるとき, すべての実数 x, y に対して, $|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$ が成り立つことを示せ。

(3) $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 4,\ -2)$, $\vec{c}=(-3,\ -6,\ 6)$ とするとき, $|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ の最小値を与える実数 x, y と, そのときの最小値を求めよ。 [2006]

解答例

(1) 条件より, $(h\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ なので, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-h|\vec{a}|^2$ となり,

$$|x\vec{a}+\vec{b}|^2-|h\vec{a}+\vec{b}|^2=(x^2-h^2)|\vec{a}|^2+2(x-h)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=(x^2-h^2)|\vec{a}|^2-2(x-h)h|\vec{a}|^2=(x^2-2xh+h^2)|\vec{a}|^2$$
$$=(x-h)^2|\vec{a}|^2=|(x-h)\vec{a}|^2\geqq 0$$

よって, $|x\vec{a}+\vec{b}|^2\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|^2$ から, $|x\vec{a}+\vec{b}|\geqq|h\vec{a}+\vec{b}|$

なお, 等号は, $(x-h)\vec{a}=\vec{0}$ のときに成立する。

(2) 条件より, $(h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{a}=0$, $(h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c})\cdot\vec{b}=0$ なので,

$$h|\vec{a}|^2+k\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdots\cdots①,\quad h\vec{a}\cdot\vec{b}+k|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{0}\cdots\cdots②$$

これより, $\vec{a}\cdot\vec{c}=-h|\vec{a}|^2-k\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}=-h\vec{a}\cdot\vec{b}-k|\vec{b}|^2$ となり,

$$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2-|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|^2$$
$$=(x^2-h^2)|\vec{a}|^2+(y^2-k^2)|\vec{b}|^2+2(xy-hk)\vec{a}\cdot\vec{b}+2(y-k)\vec{b}\cdot\vec{c}+2(x-h)\vec{a}\cdot\vec{c}$$
$$=(x^2-2xh+h^2)|\vec{a}|^2+(y^2-2yk+k^2)|\vec{b}|^2+2(xy-xk+hk-hy)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=(x-h)^2|\vec{a}|^2+(y-k)^2|\vec{b}|^2+2(x-h)(y-k)\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$=|(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}|^2\geqq 0$$

よって, $|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|^2\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|^2$ から, $|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|h\vec{a}+k\vec{b}+\vec{c}|$

なお, 等号は, $(x-h)\vec{a}+(y-k)\vec{b}=\vec{0}$ のときに成立する。

(3) 条件より, $|\vec{a}|^2=1+1+1=3$, $|\vec{b}|^2=1+16+4=21$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1+4-2=3,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=-3-6+6=-3,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=-3-24-12=-39$$

①②より, $3h+3k-3=0$, $3h+21k-39=0$

$$h+k-1=0\cdots\cdots③,\quad h+7k-13=0\cdots\cdots④$$

③④より, $h=-1$, $k=2$ となり, $|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|\geqq|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|\cdots\cdots\cdots⑤$

等号成立は，$(x+1)\vec{a}+(y-2)\vec{b}=\vec{0}$ のときであり，さらに $\vec{a}$，$\vec{b}$ が 1 次独立から，$x=-1$，$y=2$ の場合となる。

よって，⑤から $x=-1$，$y=2$ のとき，$|x\vec{a}+y\vec{b}+\vec{c}|$ は最小となり，最小値は，$-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}=(-2,\ 1,\ 1)$ より，

$$|-\vec{a}+2\vec{b}+\vec{c}|=\sqrt{4+1+1}=\sqrt{6}$$

コメント

(2)の不等式を用いて(3)の最小値を求めるという出題意図は明白です。また，等号成立のチェックは必要ですが，これは簡単に済んでしまいます。

問　題

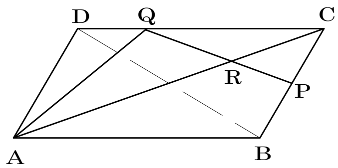
$0<\alpha<1$，$0<\beta<1$とする。平行四辺形 ABCD の辺 BC を$\alpha:1-\alpha$に内分する点をPとし，辺 CD を$1-\beta:\beta$に内分する点をQとする。また，線分 QP と平行四辺形の対角線 AC の交点を R とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{b}$として次の問いに答えよ。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。

(2) 長さの比$\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}$および$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}$を求めよ。

(3) $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AD}=1$，$\angle\mathrm{DAB}=60°$とするとき，$\triangle\mathrm{AQR}$の面積を求めよ。　[2004]

解答例



(1) $\mathrm{BP}:\mathrm{PC}=\alpha:1-\alpha$より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{a}+\alpha\vec{b}$

$\mathrm{CQ}:\mathrm{QD}=1-\beta:\beta$より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\beta\vec{a}+\vec{b}$

(2) $\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{t}{1-t}$，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}=s$とおくと，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AR}}&=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\\&=t(\vec{a}+\alpha\vec{b})+(1-t)(\beta\vec{a}+\vec{b})\\&=(t+\beta-\beta t)\vec{a}+(\alpha t+1-t)\vec{b}\cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=s\overrightarrow{\mathrm{AC}}=s\vec{a}+s\vec{b}\cdots\cdots\cdots②$$

$\vec{a}$，$\vec{b}$は1次独立なので，①②より，

$$t+\beta-\beta t=s\cdots\cdots\cdots③,\quad \alpha t+1-t=s\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$t+\beta-\beta t=\alpha t+1-t$，$t=\dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}$

すると，$1-t=\dfrac{1-\alpha}{2-\alpha-\beta}$より，$\dfrac{\mathrm{QR}}{\mathrm{RP}}=\dfrac{1-\beta}{1-\alpha}$

また，④より，$s=(\alpha-1)\cdot\dfrac{1-\beta}{2-\alpha-\beta}+1=\dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}$から，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{AC}}=\dfrac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}$

(3) $\triangle\mathrm{AQR}=s\triangle\mathrm{AQC}=s(1-\beta)\triangle\mathrm{ADC}=s(1-\beta)\triangle\mathrm{ABD}$

$$=\frac{1-\alpha\beta}{2-\alpha-\beta}(1-\beta)\cdot\frac{1}{2}\cdot1\cdot2\sin60°=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{(1-\alpha\beta)(1-\beta)}{2-\alpha-\beta}$$

コメント

平行四辺形を題材にした平面ベクトルの基本題です。

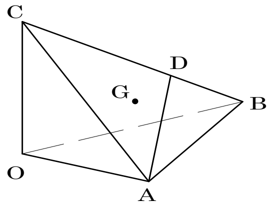
問　題

空間内に四面体 OABC があり$\angle$AOB, $\angle$BOC, $\angle$COA はすべて$90°$であるとする。辺 OA, OB, OC の長さを，それぞれ a, b, c とし，三角形 ABC の重心を G とする。

(1) $\angle$OGA, $\angle$OGB, $\angle$OGC がすべて$90°$であるための条件を a, b, c の関係式で表せ。

(2) 線分 BC を$1:2$に内分する点を D とする。点 P は直線 AD 上の A 以外の点を動き，点 Q は三角形 APQ の重心が点 G になるように動く。このとき，線分 OQ の長さの最小値を求めよ。　[2003]

解答例



(1) $\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とおくと，条件より，

$$|\vec{a}|=a,\ |\vec{b}|=b,\ |\vec{c}|=c,\ \vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=0$$

さて，$\angle\mathrm{OGA}=90°$ より，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{AG}=0$

点 G は△ABC の重心なので，$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

そこで，$\overrightarrow{AG}=\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}=\frac{1}{3}(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ から，

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(-2\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})=0,\ -2a^2+b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，$\angle\mathrm{OGB}=90°$ より，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{BG}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}-2\vec{b}+\vec{c})=0,\ a^2-2b^2+c^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\angle\mathrm{OGC}=90°$ より，$\overrightarrow{OG}\cdot\overrightarrow{CG}=0$

$$(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})\cdot(\vec{a}+\vec{b}-2\vec{c})=0,\ a^2+b^2-2c^2=0\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$-3a^2+3b^2=0$ から $a=b$，$-a^2+c^2=0$ から $a=c$ となる。これは③を満たすので，求める条件は，$a=b=c$ である。

(2) $\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=t:1-t\ (t\neq0)$ とおくと，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\overrightarrow{OD}=(1-t)\vec{a}+t\cdot\frac{2\vec{b}+\vec{c}}{3}=(1-t)\vec{a}+\frac{2t}{3}\vec{b}+\frac{t}{3}\vec{c}$$

また，$\frac{1}{3}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})=\overrightarrow{OG}$ より，

$$\overrightarrow{OQ}=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OP}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-(1-t)\vec{a}-\frac{2t}{3}\vec{b}-\frac{t}{3}\vec{c}$$

$$=-(1-t)\vec{a}+\left(1-\frac{2t}{3}\right)\vec{b}+\left(1-\frac{t}{3}\right)\vec{c}$$

$$|\overrightarrow{OQ}|^2=(1-t)^2a^2+\left(1-\frac{2t}{3}\right)^2b^2+\left(1-\frac{t}{3}\right)^2c^2$$

$$=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)t^2-\frac{2}{3}(3a^2+2b^2+c^2)t+a^2+b^2+c^2$$

そこで，平方完成をすると，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=\frac{1}{9}(9a^2+4b^2+c^2)\Big\{t-\frac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}\Big\}^2+\frac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}$$

以上より，$t=\dfrac{3(3a^2+2b^2+c^2)}{9a^2+4b^2+c^2}$のとき，OQ は最小値$\sqrt{\dfrac{a^2b^2+b^2c^2+4c^2a^2}{9a^2+4b^2+c^2}}$をとる。

コメント

(2)の平方完成の計算は，過程は省きましたが，たいへんな量でした。ところで，(1)は何のための設問なのでしょうか。

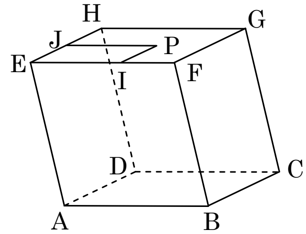
問　題

空間内の図形について次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle$ABC の面積は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ に等しいことを示せ。ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ はベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ とベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ との内積を表す。必要ならば，2 つのベクトルのなす角のコサインと内積の関係式を用いてよい。

(2)　a を正の定数とし，右図の平行六面体 ABCD-EFGH を考える。$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$ とし，$\angle\mathrm{FBC}=\angle\mathrm{BCD}=90^\circ$，$\angle\mathrm{EAB}=120^\circ$ とする。面 EFGH 上に点 P をとり，点 P から辺 EF 上に垂線 PI を下ろし，点 P から辺 EH 上に垂線 PJ を下ろす。$x=|\overrightarrow{\mathrm{EI}}|$，$y=|\overrightarrow{\mathrm{EJ}}|$ とするとき，$\triangle$ACP の面積を a, x, y を用いて表せ。

(3)　問(2)で点 P が面 EFGH 上を動くとき，$\triangle$ACP の面積の最小値を求めよ。　[2002]



（平行六面体ABCD-EFGH）

解答例

(1)　$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sin A=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\sqrt{1-\cos^2 A}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2(1-\cos^2 A)}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$$

(2)　条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=2a$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}=1\cdot 2a\cos 120^\circ=-a$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=x\overrightarrow{\mathrm{AB}}+y\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=2$$

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|^2&=x^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y^2|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2\\&\quad+2xy\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2y\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+2x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=x^2+y^2+4a^2-2ax\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}&=x|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}+x\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AD}}+y|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AE}}\\&=x-a+y\end{aligned}$$

そこで，$\triangle$ACP の面積を S とすると，(1)より，

$$\begin{aligned}S&=\frac{1}{2}\sqrt{2(x^2+y^2+4a^2-2ax)-(x-a+y)^2}\\&=\frac{1}{2}\sqrt{x^2-2xy+y^2-2ax+2ay+7a^2}\end{aligned}$$

(3)　$P = x^2 - 2xy + y^2 - 2ax + 2ay + 7a^2$ とおくと，$S = \dfrac{1}{2}\sqrt{P}$ となる。

さて，$x - y = t$ とおくと，$0 \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq 1$ より $-1 \leqq t \leqq 1$ であり，

$$P = (x-y)^2 - 2a(x-y) + 7a^2 = (x-y-a)^2 + 6a^2 = (t-a)^2 + 6a^2$$

(i)　$0 < a \leqq 1$ のとき

P は $t = a$ で最小値 $6a^2$ をとり，このとき S も最小となり，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{6a^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}a$$

(ii)　$a > 1$ のとき

P は $t = 1$ で最小値 $1 - 2a + 7a^2$ をとり，このとき S も最小となり，

$$S = \frac{1}{2}\sqrt{1 - 2a + 7a^2}$$

コメント

(3)は 1 文字を固定して，2 次関数として最小値を求める問題かとも思いましたが，式の特徴を利用すると，その必要はありませんでした。

問　題

空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$ をとる。

(1) 空間内の点 P が $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ を満たしながら動くとき，この点 P はある定点 Q から一定の距離にあることを示せ。

(2) (1)における定点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にあることを示せ。

(3) (1)における P について，四面体 ABCP の体積の最大値を求めよ。　[2000]

解答例

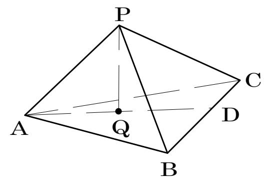
(1) BC を 2 : 1 に内分する点を D とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}}=3\overrightarrow{\mathrm{DP}}$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{BP}}+2\overrightarrow{\mathrm{CP}})=0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DP}}=0$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DP}}$ より，点 P は 2 点 A, D を直径の両端とする球を描く。すなわち 2 点 P, Q の距離が一定である定点 Q は，この球の中心で，線分 AD の中点である。

ここで，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 3)$ より，$\mathrm{D}\left(0,\ \frac{2}{3},\ 2\right)$ となり，$\mathrm{Q}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{3},\ 1\right)$ である。



(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+2\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{3}=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

よって，点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面上にある。

(3) まず，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-1,\ 2,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 0,\ 3)$ から，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{5\times10-1^2}=\frac{7}{2}$$

また，球の半径は，$\mathrm{AQ}=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+1^2}=\frac{7}{6}$

四面体 ABCP の体積が最大となるのは，PQ が平面 ABC に垂直なときなので，$\mathrm{PQ}=\mathrm{AQ}$ より，その最大値 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{7}{2}\cdot\frac{7}{6}=\frac{49}{36}$$

コメント

空間ベクトルの基本題です。

問　題

大きさ 1 の空間ベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$が$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$を満たすように与えられているとする。また空間ベクトル$\vec{d}$，$\vec{e}$，$\vec{f}$が

$$\vec{a}\cdot\vec{d}=1,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{d}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{e}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{e}=1,\ \vec{c}\cdot\vec{e}=0,$$
$$\vec{a}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{f}=0,\ \vec{c}\cdot\vec{f}=1$$

を満たすとき，点$\mathrm{D}(\vec{d})$，$\mathrm{E}(\vec{e})$，$\mathrm{F}(\vec{f})$および原点 O について次の問いに答えよ。

(1) $\vec{d}=x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c}$となるような実数 x, y, z を求めよ。同様に$\vec{f}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

(2) ベクトル$\vec{d}$，$\vec{f}$，$\vec{d}-\vec{f}$の大きさを求めよ。

(3) 三角形 ODF の面積を求めよ。

(4) 四面体 ODEF の体積を求めよ。 [1999]

解答例

(1) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=-\dfrac{1}{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$

$\vec{a}\cdot\vec{d}=1$より，$\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{a}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=1$なので，$x-\dfrac{1}{2}y=1$………①

$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$より，$\vec{b}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0$なので，$-\dfrac{1}{2}x+y-\dfrac{1}{2}z=0$………②

$\vec{c}\cdot\vec{d}=0$より，$\vec{c}\cdot\vec{d}=\vec{c}\cdot(x\vec{a}+y\vec{b}+z\vec{c})=0$なので，$-\dfrac{1}{2}y+z=0$………③

①②③より，$(x,\ y,\ z)=\left(\dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{1}{2}\right)$

また，$\vec{f}=u\vec{a}+v\vec{b}+w\vec{c}$とおいて同様にすると，$\vec{a}\cdot\vec{f}=0$より$u-\dfrac{1}{2}v=0$，$\vec{b}\cdot\vec{f}=0$より$-\dfrac{1}{2}u+v-\dfrac{1}{2}w=0$，$\vec{c}\cdot\vec{f}=1$より$-\dfrac{1}{2}v+w=1$

よって，$(u,\ v,\ w)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{2}\right)$から，$\vec{f}=\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}$

(2) (1)より，$|\vec{d}|^2=\left|\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}\right|^2=\dfrac{9}{4}+1+\dfrac{1}{4}+2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

$|\vec{f}|^2=\left|\dfrac{1}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{3}{2}\vec{c}\right|^2=\dfrac{1}{4}+1+\dfrac{9}{4}+2\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)+2\cdot\dfrac{3}{2}\cdot\left(-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{2}$

よって，$|\vec{d}|=|\vec{f}|=\sqrt{\dfrac{3}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

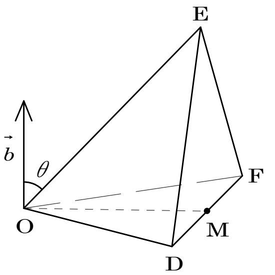
また，$\vec{d}-\vec{f}=\dfrac{3}{2}\vec{a}+\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{c}-\dfrac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}-\dfrac{3}{2}\vec{c}=\vec{a}-\vec{c}$

$|\vec{d}-\vec{f}|^2=|\vec{a}-\vec{c}|^2=1-2\cdot0+1=2$なので，$|\vec{d}-\vec{f}|=\sqrt{2}$

(3) $\triangle$ODF は$\mathrm{OD}=\mathrm{OF}=\dfrac{\sqrt{6}}{2}$の二等辺三角形より，底辺$\mathrm{DF}=\sqrt{2}$の中点を M とおくと，$\mathrm{OM}=\sqrt{\left(\dfrac{\sqrt{6}}{2}\right)^2-\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=1$となる。

よって，$\triangle\mathrm{ODF}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

(4)　$\vec{b}\cdot\vec{d}=0$，$\vec{b}\cdot\vec{f}=0$ より，$\vec{b}$ は平面 ODF に垂直である。



ここで，$\vec{b}$ と $\vec{e}$ のなす角を θ とおくと，$\vec{b}\cdot\vec{e}=1$，$|\vec{b}|=1$ から，$|\vec{e}|\cos\theta=1$ となる。

これは，△ODF を底面とするとき，四面体 ODEF の高さが 1 であることを表す。よって，体積は $\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1=\dfrac{\sqrt{2}}{6}$ となる。

コメント

(4)では，$\vec{b}$ が平面 ODF の法線ベクトルであるのに注目して解きました。

問　題

辺の長さ 1 の正四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおき，線分 OA を$m:n$に内分する点を P，線分 BC を$m:n$に内分する点を Q，線分 CO を$m:n$に内分する点を R，線分 AB を$m:n$に内分する点を S とする。（ただし，$m, n>0$とする）

(1) ① $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$，$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

② $\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を求めよ。

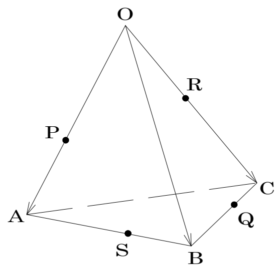
③ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{RS}}$が垂直かどうか調べよ。

(2) ① $m=n$のとき，点 P, Q, R, S は同一平面上にあることを示せ。

② このとき PQ, RS の交点を G として，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

③ G は正四面体 OABC に外接する球の中心であることを示し，その球の半径を求めよ。 [1998]

解答例



(1) $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}-\dfrac{m\vec{a}}{m+n}=\dfrac{-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c}}{m+n}$

$\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\overrightarrow{\mathrm{OS}}-\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}}{m+n}-\dfrac{n\vec{c}}{m+n}=\dfrac{n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c}}{m+n}$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60°=\dfrac{1}{2}$

また同様にして，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=\dfrac{1}{2}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RS}}=\frac{1}{(m+n)^2}(-m\vec{a}+n\vec{b}+m\vec{c})\cdot(n\vec{a}+m\vec{b}-n\vec{c})$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\left(-mn-\frac{1}{2}m^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{2}n^2+mn-\frac{1}{2}n^2+\frac{1}{2}mn+\frac{1}{2}m^2-mn\right)$$

$$=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RS}}$

(2) $m=n$のとき，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{SQ}}=\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$より，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=\overrightarrow{\mathrm{SQ}}$となる。これより, 4 点 P, Q, R, S は同一平面上にある。

このとき，四角形 PSQR は平行四辺形なので, G は PQ の中点となる。

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\dfrac{\dfrac{\vec{a}}{2}+\dfrac{\vec{b}+\vec{c}}{2}}{2}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{1}{4}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\dfrac{1}{4}\sqrt{1+1+1+2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}+2\cdot\dfrac{1}{2}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\vec{a}=\frac{-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}}{4}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AG}}|=\frac{1}{4}|-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|=\frac{1}{4}\sqrt{9+1+1-6\cdot\frac{1}{2}+2\cdot\frac{1}{2}-6\cdot\frac{1}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\dfrac{\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c}}{4}$，$\overrightarrow{\mathrm{CG}}=\dfrac{\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c}}{4}$ なので，$|\overrightarrow{\mathrm{BG}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CG}}|=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

以上より，G は正四面体 OABC に外接する球の中心であり，球の半径は $\dfrac{\sqrt{6}}{4}$ となる。

コメント

よくある構図の問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　2017 と 225 の最大公約数を求めよ。

(2)　225 との最大公約数が 15 となる 2017 以下の自然数の個数を求めよ。

(3)　225 との最大公約数が 15 であり，かつ 1998 との最大公約数が 111 となる 2017 以下の自然数をすべて求めよ。　[2017]

解答例

(1)　自然数 a と b の最大公約数を $G(a,\ b)$ と表すと，ユークリッドの互除法より，

$$G(2017,\ 225)=G(225,\ 217)=G(217,\ 8)$$
$$=G(8,\ 1)=1$$

$$\begin{array}{r} 27 \\ 8\overline{)217} \\ 16 \\ \hline 57 \\ 56 \\ \hline 1 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 1 \\ 217\overline{)225} \\ 217 \\ \hline 8 \end{array}\qquad \begin{array}{r} 8 \\ 225\overline{)2017} \\ 1800 \\ \hline 217 \end{array}$$

(2)　$15=3\times5$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$15\times1,\ 15\times2,\ 15\times3,\ \cdots,\ 15\times134$$

すると，$225=3^2\times5^2$ から，225 との最大公約数が 15 である自然数の個数は，134 以下の自然数で 3 の倍数でも 5 の倍数でもないものの個数となる。

ここで，134 以下の自然数で 3 の倍数となるものが 44 個，5 の倍数となるものが 26 個，15 の倍数となるものが 8 個である。

よって，求める自然数の個数は，$134-(44+26-8)=72$ である。

(3)　$111=3\times37$ を約数にもつ 2017 以下の自然数は，

$$111\times1,\ 111\times2,\ 111\times3,\ \cdots,\ 111\times18$$

すると，$1998=111\times2\times3^2$ から，1998 との最大公約数が 111 の自然数は，18 以下の自然数で 2 の倍数でも 3 の倍数でもない数と 111 との積になり，

$$111\times1,\ 111\times5,\ 111\times7,\ 111\times11,\ 111\times13,\ 111\times17$$

さらに，225 との最大公約数が 15 から，求める自然数は $111\times5=555$ である。

コメント

約数と倍数の問題です。(1)は年度の数が題材になっているため，2017 が素数という知識をもっていたとしても不思議ではありません。ただ，これをストレートに利用して，いきなり結論とするのは避けた方がよいでしょう。「ふるい」にかけて示せば別ですが。

問　題

自然数 n に対して，10^n を 13 で割った余りを a_n とおく。a_n は 0 から 12 までの整数である。以下の問いに答えよ。

(1)　a_{n+1} は $10a_n$ を 13 で割った余りに等しいことを示せ。

(2)　a_1，a_2，…，a_6 を求めよ。

(3)　以下の 3 条件を満たす自然数 N をすべて求めよ。

(i)　N を十進法で表示したとき 6 桁となる。

(ii)　N を十進法で表示して，最初と最後の桁の数字を取り除くと 2016 となる。

(iii)　N は 13 で割り切れる。　[2016]

解答例

(1)　10^n を 13 で割った余りが a_n より，q_n を自然数として，$10^n=13q_n+a_n$ と表せ，

$$10^{n+1}=10\cdot10^n=10(13q_n+a_n)=13(10q_n)+10a_n$$

すると，10^{n+1} を 13 で割った余り a_{n+1} は，$10a_n$ を 13 で割った余りに等しい。

(2)　10^1 を 13 で割った余りは 10 より，$a_1=10$ である。

そして，(1)の結論を当てはめていくと，a_2 は $10a_1=100$ を 13 で割った余りに等しく，$100=13\times7+9$ より $a_2=9$ である。

a_3 は $10a_2=90$ を 13 で割った余り $(90=13\times6+12)$ より，$a_3=12$ である。

a_4 は $10a_3=120$ を 13 で割った余り $(120=13\times9+3)$ より，$a_4=3$ である。

a_5 は $10a_4=30$ を 13 で割った余り $(30=13\times2+4)$ より，$a_5=4$ である。

a_6 は $10a_5=40$ を 13 で割った余り $(40=13\times3+1)$ より，$a_6=1$ である。

(3)　自然数 N を十進法で表示したとき，最初の桁の数字を k $(1\leqq k\leqq9)$，最後の桁の数字を l $(0\leqq l\leqq9)$ とおくと，条件(i)(ii)より，

$$N=k\cdot10^5+2\cdot10^4+0\cdot10^3+1\cdot10^2+6\cdot10^1+l$$

ここで，(2)の結論を合同式を用い，mod13 で記すと，

$$10^5\equiv4,\ 10^4\equiv3,\ 10^3\equiv12,\ 10^2\equiv9,\ 10^1\equiv10$$

これより，$N\equiv4k+2\cdot3+1\cdot9+6\cdot10+l=4k+l+75\equiv4k+l+10$

さらに，条件(iii)から N が 13 で割り切れることから，$4k+l+10$ が 13 の倍数となり，$14\leqq4k+l+10\leqq55$ より，

(a)　$4k+l+10=26$ のとき　$4k+l=16$ から $(k,\ l)=(2,\ 8)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 0)$

(b)　$4k+l+10=39$ のとき　$4k+l=29$ から $(k,\ l)=(5,\ 9)$，$(6,\ 5)$，$(7,\ 1)$

(c)　$4k+l+10=52$ のとき　$4k+l=42$ から $(k,\ l)=(9,\ 6)$

(a)～(c)より，求める自然数 N は，

220168，320164，420160，520169，620165，720161，920166

コメント

うまく誘導のついた整数問題です。なお，(3)の不定方程式は，一般的に解くよりは，値を絞り込んで数値を代入していった方が簡単です。また，(1)から合同式を利用してもよかったのですが……。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　n が正の偶数のとき，2^n-1 は 3 の倍数であることを示せ。

(2)　p を素数とし，k を 0 以上の整数とする。$2^{p-1}-1=p^k$ を満たす p，k の組をすべて求めよ。　[2015]

解答例

(1)　n が正の偶数のとき，l を自然数として，$n=2l$ とおくと，

$$\begin{aligned}2^n-1&=2^{2l}-1=4^l-1=(3+1)^l-1\\&=(3^l+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-2}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1}3+1)-1\\&=3(3^{l-1}+{}_l\mathrm{C}_1 3^{l-2}+{}_l\mathrm{C}_2 3^{l-3}+\cdots+{}_l\mathrm{C}_{l-1})\end{aligned}$$

よって，2^n-1 は 3 の倍数である。

(2)　素数 p，0 以上の整数 k に対して，$2^{p-1}-1=p^k$ ………(＊)

(i)　p が偶数のとき

p は素数より $p=2$，すると，(＊)から $2^1-1=2^k$ となり，$k=0$ である。

(ii)　p が奇数のとき

$p-1$ は偶数となり，(1)の結果から $2^{p-1}-1$ は 3 の倍数である。すると，(＊)から p^k が 3 の倍数すなわち p も 3 の倍数であることより，$p=3$ である。

(＊)から，$2^2-1=3^k$ となり，$k=1$ である。

(i)(ii)より，$(p,\ k)=(2,\ 0)$，$(3,\ 1)$

コメント

よく見かける整数問題です。(1)が誘導となっていますが，この問題でも，偶数の素数は 2 だけということがポイントになっています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　任意の自然数 a に対し，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 であることを証明せよ。

(2)　自然数 $a,\ b,\ c$ が $a^2+b^2=3c^2$ を満たすと仮定すると，$a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならないことを証明せよ。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しないことを証明せよ。　[2014]

解答例

(1)　まず，自然数 a に対し，a が 3 の倍数のとき a^2 も 3 の倍数である。

また，a が 3 の倍数でないとき，$a=3k\pm1$（k は整数）とおくと，

$$a^2=(3k\pm1)^2=9k^2\pm6k+1=3(3k^2\pm2k)+1$$

すると，a^2 を 3 で割った余りは 1 となる。

よって，a と a^2 について 3 で割った余りを対応させると，右表のようになり，a^2 を 3 で割った余りは 0 か 1 である。

a	0	1	2
a^2	0	1	1

(2)　a^2，b^2 に対し，a^2+b^2 を 3 で割った余りをまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	0	1
0	0	1
1	1	2

さて，$a^2+b^2=3c^2$ のとき，$3c^2$ が 3 の倍数より，a^2+b^2 も 3 の倍数である。すると，a^2，b^2 はともに 3 の倍数となり，さらに(1)より，$a,\ b$ はともに 3 の倍数である。

よって，a_1，b_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$ とおくと，

$$9a_1{}^2+9b_1{}^2=3c^2,\quad 3a_1{}^2+3b_1{}^2=c^2$$

これより，c^2 は 3 の倍数となり，(1)より，c は 3 の倍数である。

以上より，$a^2+b^2=3c^2$ のとき $a,\ b,\ c$ はすべて 3 で割り切れなければならない。

(3)　$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ が存在すると仮定したとき，(2)より，a_1，b_1，c_1 を自然数として，$a=3a_1$，$b=3b_1$，$c=3c_1$ とおくと，

$$9a_1{}^2+9b_1{}^2=3\cdot9c_1{}^2,\quad a_1{}^2+b_1{}^2=3c_1{}^2$$

すると，(2)から，a_2，b_2，c_2 を自然数として，$a_1=3a_2$，$b_1=3b_2$，$c_1=3c_2$ とおくことができ，$9a_2{}^2+9b_2{}^2=3\cdot9c_2{}^2$，$a_2{}^2+b_2{}^2=3c_2{}^2$

以下，同様に，$a_n=3a_{n+1}$，$b_n=3b_{n+1}$，$c_n=3c_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，

$$a>a_1>a_2>\cdots>0,\ b>b_1>b_2>\cdots>0,\ c>c_1>c_2>\cdots>0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，単調に減少する自然数の列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$ が存在することになり，明らかに不適である。

よって，$a^2+b^2=3c^2$ を満たす自然数 $a,\ b,\ c$ は存在しない。

コメント

ときどき見かける整数問題です。(1)と(2)は，メインの(3)の誘導となっています。

問　題

100 人の団体がある区間を列車で移動する。このとき，乗車券が 7 枚入った 480 円のセット A と，乗車券が 3 枚入った 220 円のセット B を購入して，利用することにした。以下の問いに答えよ。

(1) x が 0 以上の整数であるとき，次のことを示せ。

$\frac{1}{3}(100-7x)$ は，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない。

(2) 購入した乗車券は，余らせずすべて利用するものとする。このとき，セット A とセット B の購入の仕方をすべて挙げよ。

(3) 購入した乗車券は余ってもよいものとする。このとき，A のみ，あるいは B のみを購入する場合も含めて，購入金額が最も低くなるのは，A，B をそれぞれ何セットずつ購入するときか。またそのときの購入金額はいくらか。　[2012]

解答例

(1) x が 0 以上の整数であるとき，

$$y=\frac{1}{3}(100-7x)=\frac{1}{3}(3\times 33+1-3\cdot 2x-x)=33-2x-\frac{x-1}{3}$$

よって，y は $x-1$ が 3 で割り切れるときのみ整数となる。すなわち，x を 3 で割ったときの余りが 1 の場合に整数であり，それ以外の場合は整数ではない。

(2) A を x セット，B を y セット購入するとき，条件より，

$$7x+3y=100\,,\ \ y=\frac{1}{3}(100-7x)\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$y\geqq 0$ から $x\leqq\frac{100}{7}=14+\frac{2}{7}$ となり，さらに(1)から，x は 3 で割った余りが 1 である。これより，$x=1,\ 4,\ 7,\ 10,\ 13$

すると，①から，$(x,\ y)=(1,\ 31)$，$(4,\ 24)$，$(7,\ 17)$，$(10,\ 10)$，$(13,\ 3)$

(3) (2)と同様にして，

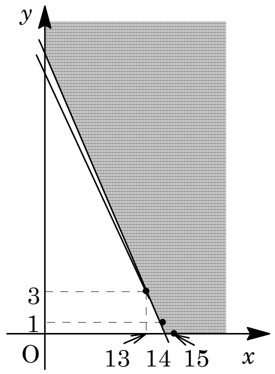
$$7x+3y\geqq 100\,,\ \ x\geqq 0\,,\ \ y\geqq 0\cdots\cdots\cdots②$$

②を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

ここで，$k=480x+220y$ とおくと，

$$y=-\frac{24}{11}x+\frac{k}{220}$$

さて，k が最小となる $(x,\ y)$ の組は，右図から，$(x,\ y)=(15,\ 0)$，$(14,\ 1)$，$(13,\ 3)$ に絞られる。



$(x,\ y)=(15,\ 0)$ のとき $k=7200$, $(x,\ y)=(14,\ 1)$ のとき $k=6940$, $(x,\ y)=(13,\ 3)$ のとき $k=6900$ である。

以上より，購入金額が最も低くなるのは，A が 13 セット，B が 3 セットの場合で，このとき 6900 円である。

コメント

(3)では，2 直線の傾きが $-\dfrac{7}{3}<-\dfrac{24}{11}$ であるのに注目し，$(x,\ y)=\left(\dfrac{100}{7},\ 0\right)$ に近い 3 つの格子点についてチェックしています。

問　題

数列a_1，a_2，…，a_n，… は，$a_{n+1}=\dfrac{2a_n}{1-{a_n}^2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$とするとき，a_{10}およびa_{11}を求めよ。

(2)　$\tan\dfrac{\pi}{12}$の値を求めよ。

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$とする。$a_k=a_1$を満たす 2 以上の自然数kで最小のものを求めよ。

[2011]

解答例

(1)　$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$から，$a_2=\dfrac{2a_1}{1-{a_1}^2}=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}}{1-\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$となり，

$$a_3=\frac{2a_2}{1-{a_2}^2}=\frac{2\cdot\sqrt{3}}{1-3}=-\sqrt{3}\,,\quad a_4=\frac{2a_3}{1-{a_3}^2}=\frac{2\cdot(-\sqrt{3})}{1-3}=\sqrt{3}$$

これより，帰納的に，

$$a_2=a_4=a_6=a_8=a_{10}=\sqrt{3}\,,\quad a_3=a_5=a_7=a_9=a_{11}=-\sqrt{3}$$

(2)　$x=\tan\dfrac{\pi}{12}$とおくと，2 倍角の公式より，$\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{2x}{1-x^2}$となり，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{2x}{1-x^2}\,,\quad 1-x^2=2\sqrt{3}x\,,\quad x^2+2\sqrt{3}x-1=0$$

$x>0$より，$x=-\sqrt{3}+2$

(3)　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{7}$とするとき，2 倍角の公式より，$a_2=\tan\dfrac{2}{7}\pi$，$a_3=\tan\dfrac{4}{7}\pi$，…となり，帰納的に，$a_k=\tan\dfrac{2^{k-1}}{7}\pi$である。

ここで，$k\geqq 2$において，$a_k=a_1$より，nを自然数として，

$$\frac{2^{k-1}}{7}\pi=\frac{\pi}{7}+n\pi\,,\quad 2^{k-1}=1+7n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(＊)を満たすkが最小となるのは，$n=1$のとき$k=4$である。

コメント

タンジェントの 2 倍角の公式がもとになっていますので，(2)もそれに対応した方法にしましたが，$\dfrac{\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}-\dfrac{\pi}{4}$とするのが普通です。なお，(1)と(3)は，ともに証明を省いています。

問　題

以下の問いに答えよ。答えだけでなく，必ず証明も記せ。

(1)　和$1+2+\cdots+n$をnの多項式で表せ。

(2)　和$1^2+2^2+\cdots+n^2$をnの多項式で表せ。

(3)　和$1^3+2^3+\cdots+n^3$をnの多項式で表せ。 [2010]

解答例

(1)　$S_1=1+2+\cdots+n$とおくと，$2S_1=(n+1)+(n+1)+\cdots+(n+1)=n(n+1)$

よって，$S_1=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$S_2=1^2+2^2+\cdots+n^2$とおくと，

$$S_1+S_2=\sum_{k=1}^{n}(k+k^2)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{3}\{k(k+1)(k+2)-(k-1)k(k+1)\}$$
$$=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

よって，$S_2=\dfrac{1}{3}n(n+1)(n+2)-\dfrac{1}{2}n(n+1)=\dfrac{1}{6}n(n+1)\{(2n+4)-3\}$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(3)　$S_3=1^3+2^3+\cdots+n^3$とおくと，

$$2S_1+3S_2+S_3=\sum_{k=1}^{n}(2k+3k^2+k^3)=\sum_{k=1}^{n}k(k+1)(k+2)$$
$$=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{4}\{k(k+1)(k+2)(k+3)-(k-1)k(k+1)(k+2)\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

よって，$S_3=\dfrac{1}{4}n(n+1)(n+2)(n+3)-2\cdot\dfrac{1}{2}n(n+1)-3\cdot\dfrac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

$$=\frac{1}{4}n(n+1)\{(n^2+5n+6)-4-2(2n+1)\}$$
$$=\frac{1}{4}n(n+1)(n^2+n)=\frac{1}{4}n^2(n+1)^2$$

コメント

連続自然数の和の知識をもとにした証明です。

問　題

放物線 $C: y = x^2 - 1$ と $a_1 > 1$ を満たす実数 a_1 を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C 上の点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線と x 軸との交点の x 座標を a_2 とするとき，a_2 を a_1 を用いて表せ。

(2) (1)で求めた a_2 に対して，C 上の点 $(a_2,\ {a_2}^2 - 1)$ おける接線と x 軸との交点の x 座標を a_3 とする。この操作を繰り返してできる数列を a_1，a_2，…，a_n，…とする。このとき，すべての n に対して，$a_n > 1$ を示せ。

(3) $b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ とおくとき，すべての n に対して，$b_{n+1} < {b_n}^2$ を示せ。

(4) $a_1 = 2$ のとき，$b_n < 10^{-12}$ となる n の値を 1 つ求めよ。ただし，必要があれば，$\log_{10} 2$ を 0.301 として計算してよい。　[2008]

解答例

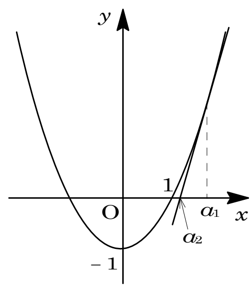
(1) $C: y = x^2 - 1$ に対して，$y' = 2x$ より，点 $(a_1,\ {a_1}^2 - 1)$ における接線は，

$$y - ({a_1}^2 - 1) = 2a_1(x - a_1)$$

点 $(a_2,\ 0)$ を通ることより，

$$-{a_1}^2 + 1 = 2a_1(a_2 - a_1),\quad 2a_1a_2 = {a_1}^2 + 1$$

よって，$a_2 = \dfrac{{a_1}^2 + 1}{2a_1}$



(2) (1)と同様にすると，$a_{n+1} = \dfrac{{a_n}^2 + 1}{2a_n}$ となる。

ここで，すべての n に対して，$a_n > 1$ であることを数学的帰納法によって示す。

(i) $n = 1$ のとき　条件より $a_1 > 1$ なので，成立している。

(ii) $n = k$ のとき　$a_k > 1$ と仮定すると，

$$a_{k+1} - 1 = \frac{{a_k}^2 + 1}{2a_k} - 1 = \frac{(a_k - 1)^2}{2a_k} > 0$$

よって，$a_{k+1} > 1$ となり，$n = k + 1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，すべての n に対して $a_n > 1$ である。

(3) 条件より，$b_n = \dfrac{1}{2}(a_n - 1)$ なので，

$$\begin{aligned} {b_n}^2 - b_{n+1} &= \frac{1}{4}(a_n - 1)^2 - \frac{1}{2}(a_{n+1} - 1) = \frac{1}{4}(a_n - 1)^2 - \frac{1}{2}\cdot\frac{(a_n - 1)^2}{2a_n} \\ &= \frac{1}{4}(a_n - 1)^2\cdot\frac{a_n - 1}{a_n} = \frac{(a_n - 1)^3}{4a_n} \end{aligned}$$

$a_n > 1$ より，${b_n}^2 - b_{n+1} > 0$ すなわち $b_{n+1} < {b_n}^2$ ……(＊)である。

(4)　まず，$b_1=\dfrac{1}{2}(2-1)=\dfrac{1}{2}$であり，$a_n>1$から$b_n>0$となるので，(＊)より，

$$\log_{10}b_{n+1}<2\log_{10}b_n$$

よって，$n\geqq 2$において，$\log_{10}b_n<2^{n-1}\log_{10}b_1=-2^{n-1}\log_{10}2=-0.301\times 2^{n-1}$

ここで，$b_n<10^{-12}$，すなわち$\log_{10}b_n<\log_{10}10^{-12}=-12$を満たすためには，

$$-0.301\times 2^{n-1}\leqq -12,\quad 2^{n-1}\geqq\frac{12}{0.301}>39.8$$

よって，$n\geqq 7$であればよく，求めるnの値の1つは7である。

コメント

有名なニュートン法の問題です。

問　題

2 つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$は, $a_1=b_1=1$および, 関係式

$$a_{n+1}=2a_nb_n\,,\ \ b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$$

を満たすものとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 3$のとき, a_nは 3 で割り切れるが, b_nは 3 で割り切れないことを示せ。

(2) $n\geqq 2$のとき, a_nとb_nは互いに素であることを示せ。 [2006]

解答例

(1) $n\geqq 3$ のとき, a_nは 3 で割り切れるが, b_nは 3 で割り切れないことを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=3$のとき　$a_1=b_1=1$より, $a_2=2\times1\times1=2$, $b_2=2\times1^2+1^2=3$となり,

$a_3=2\times2\times3=12$, $b_3=2\times2^2+3^2=17$

(ii) $n=k$のとき　a_kは 3 で割り切れ, b_kは 3 で割り切れないと仮定する。

すなわち $l,\,m$ を整数として, $a_k=3l$, $b_k=3m\pm1$

このとき, $a_{k+1}=6l(3m\pm1)=3\cdot2l(3m\pm1)$

$b_{k+1}=2\cdot9l^2+(3m\pm1)^2=3(6l^2+3m^2\pm2m)+1$

(i)(ii)より, $n\geqq 3$ のとき, a_nは 3 で割り切れるが, b_nは 3 で割り切れない。

(2) まず, $n\geqq 2$ のとき, $a_{n+1}=2a_nb_n$ より, a_nは偶数である。

また, $b_1=1$, $b_{n+1}=2{a_n}^2+{b_n}^2$より, 帰納的にb_nは奇数である。

さて, $n\geqq 2$ のときa_nとb_nは互いに素であることを, 数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=2$のとき　$a_2=2$, $b_2=3$から, a_2とb_2は互いに素である。

(ii) $n=k$のとき　a_kとb_kは互いに素であると仮定する。

ここで, a_{k+1}とb_{k+1}が 2 以上の公約数をもつとする。すると, a_{k+1}は偶数, b_{k+1}は奇数から, この公約数は 3 以上の素数を約数としてもつ。

この素数を g とし, a', b'を整数とすると,

$a_{k+1}=2a_kb_k=ga'$ ……①, $b_{k+1}=2{a_k}^2+{b_k}^2=gb'$ ……②

①より, a_kとb_kのいずれかはgの倍数となる。

a_kが g の倍数であるとき, ②より${b_k}^2$はgの倍数, すなわちb_kはgの倍数である。また, b_kがgの倍数であるとき, ②より$2{a_k}^2$はgの倍数, すなわちa_kは奇数gの倍数である。いずれの場合も, a_kとb_kは互いに素であるという仮定に反するので, a_{k+1}とb_{k+1}は互いに素である。

(i)(ii)より, $n\geqq 2$ のとき, a_nとb_nは互いに素である。

コメント

整数と漸化式の融合問題です。ただ, (2)の証明を考えるときに, (1)の結論に縛られすぎると, 時間を空費してしまいます。

問　題

座標平面上で，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$，$2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$ が表す領域を，それぞれ A, B とする。

(1) 領域 A を図示せよ。

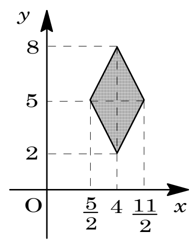
(2) 領域 B を図示せよ。

(3) 領域 B の点 $(x,\ y)$ で，x が正の整数であり y が整数であって，$\log_x|y|$ が有理数となる点を，理由を示してすべて求めよ。　[2003]

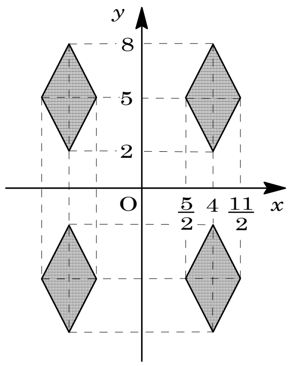
解答例

(1) 不等式 $2|x|+|y|\leqq 3$ ……①の表す領域は，4 点 $\left(\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ 3)$，$\left(-\dfrac{3}{2},\ 0\right)$，$(0,\ -3)$ を結んでできるひし形の内部または辺上である。

これより，不等式 $2|x-4|+|y-5|\leqq 3$ ……②の表す領域は，①の領域を x 軸方向に 4，y 軸方向に 5 だけ平行移動したものである。これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(2) 不等式 $2||x|-4|+||y|-5|\leqq 3$ ……③の表す領域は，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ のときは②と一致し，$x<0$，$y\geqq 0$ のときは②を y 軸対称したもの，$x<0$，$y<0$ のときは②を原点対称したもの，$x\geqq 0$，$y<0$ のときは②を x 軸対称したものである。これを図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。



(3) $\log_x|y|$ が有理数，すなわち $\log_x|y|=\dfrac{q}{p}$ となるの条件は，$x^{\frac{q}{p}}=|y|$，$x^q=|y|^p$ となる整数 p，q が存在することである。さて，$x>0$，$y>0$ では，領域内の格子点は，$x=3$ のとき，$(3,\ 4)$，$(3,\ 5)$，$(3,\ 6)$ であるが，いずれも $3^q=y^p$ は成立しない。

$x=4$ のとき，$(4,\ 2)$，$(4,\ 3)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$，$(4,\ 7)$，$(4,\ 8)$ であるが，$4^q=y^p$ が成立するのは $(4,\ 2)$，$(4,\ 4)$，$(4,\ 8)$ の場合である。

また，$x=5$ のとき，$(5,\ 4)$，$(5,\ 5)$，$(5,\ 6)$ であるが，$5^q=y^p$ が成立するのは $(5,\ 5)$ の場合だけである。

よって，$y<0$ のときも考え合わせると，求める点は，$(4,\ \pm 2)$，$(4,\ \pm 4)$，$(4,\ \pm 8)$，$(5,\ \pm 5)$ となる。

コメント

いきなり不等式③の領域を図示するのは難しいので，(1)が誘導となっています。

問　題

$\{m_k\}$を公比 r の等比数列とする。2 次関数 $y=x^2$ のグラフを C とし，C 上に点P_1をとる。各自然数 k に対し，点P_kから点P_{k+1}を順次つぎのように定める。点P_kを通り傾きm_kの直線をl_kとし，この直線と C とのもう 1 つの交点をP_{k+1}とする。ただし，C とl_kが接する場合は$\mathrm{P}_{k+1}=\mathrm{P}_k$とする。点$\mathrm{P}_k$の x 座標をa_kとする。

(1) a_{k+1}をa_kとm_kで表せ。

(2) 数列$\{a_k\}$の一般項をa_1，m_1，r，kで表せ。

(3) $a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$とする。このとき，ある 2 次関数$y=bx^2$があって，すべての自然数 k に対し直線l_kがその 2 次関数のグラフに接することを示し，b を r で表せ。ただし，$m_1\neq 0$，$r\neq -1$，0とする。 [2003]

解答例

(1) $\mathrm{P}_k(a_k,\ a_k^{\ 2})$，$\mathrm{P}_{k+1}(a_{k+1},\ a_{k+1}^{\ 2})$を結ぶ直線の傾き$m_k$は，$a_{k+1}\neq a_k$のとき，

$$\frac{a_{k+1}^{\ 2}-a_k^{\ 2}}{a_{k+1}-a_k}=m_k,\quad a_{k+1}+a_k=m_k,\quad a_{k+1}=-a_k+m_k\ \cdots\cdots\cdots①$$

$a_{k+1}=a_k$のときは，P_kにおける接線の傾きがm_kなので，$m_k=2a_k$となるが，このときも①は成立している。

(2) 数列$\{m_k\}$は公比 r の等比数列なので，$m_k=m_1r^{k-1}$

①より，$a_{k+1}=-a_k+m_1r^{k-1}\ \cdots\cdots\cdots②$

(i) $r=-1$のとき　②より，$a_{k+1}=-a_k+m_1(-1)^{k-1}$

両辺を$(-1)^{k+1}$で割って，$\dfrac{a_{k+1}}{(-1)^{k+1}}=\dfrac{a_k}{(-1)^k}+m_1$

$$\frac{a_k}{(-1)^k}=\frac{a_1}{-1}+(k-1)m_1=-a_1+m_1(k-1)$$

よって，$a_k=(-a_1-m_1+m_1k)(-1)^k$

(ii) $r\neq -1$のとき　②を変形して，$a_{k+1}-\dfrac{m_1}{1+r}r^k=-\left(a_k-\dfrac{m_1}{1+r}r^{k-1}\right)$

$$a_k-\frac{m_1}{1+r}r^{k-1}=\left(a_1-\frac{m_1}{1+r}r^0\right)(-1)^{k-1}$$

よって，$a_k=\dfrac{m_1}{1+r}r^{k-1}+\left(a_1-\dfrac{m_1}{1+r}\right)(-1)^{k-1}\ \cdots\cdots\cdots③$

(3) $r\neq -1$より，③において$a_1=\dfrac{m_1}{1+r}$とすると，$a_k=\dfrac{m_1}{1+r}r^{k-1}\ \cdots\cdots\cdots④$

このとき，$\mathrm{P}_k(a_k,\ a_k^{\ 2})$を通り，傾き$m_k=m_1r^{k-1}$の直線$l_k$は，

$$y-a_k^{\ 2}=m_1r^{k-1}(x-a_k),\quad y=m_1r^{k-1}x-m_1r^{k-1}a_k+a_k^{\ 2}$$

④を代入して，$y = m_1 r^{k-1} x - {m_1}^2 \dfrac{r^{2k-2}}{1+r} + {m_1}^2 \dfrac{r^{2k-2}}{(1+r)^2}$

$$= m_1 r^{k-1} x - {m_1}^2 \frac{r^{2k-1}}{(1+r)^2} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤と $y = bx^2$ を連立して，$bx^2 - m_1 r^{k-1} x + {m_1}^2 \dfrac{r^{2k-1}}{(1+r)^2} = 0$

$$D = {m_1}^2 r^{2k-2} - 4b{m_1}^2 \frac{r^{2k-1}}{(1+r)^2} = {m_1}^2 r^{2k-2} \left\{ 1 - \frac{4br}{(1+r)^2} \right\}$$

ここで，$m_1 \neq 0$，$r \neq 0$ から，$1 - \dfrac{4br}{(1+r)^2} = 0$，すなわち $b = \dfrac{(1+r)^2}{4r}$ とすると，任意の k に対して $D = 0$ となり，直線 l_k と $y = bx^2$ のグラフは接する。

コメント

(2)の漸化式はパターンどおりに解いています。

問　題

正の整数 a に対し，a の正の約数全体の和を $f(a)$ で表す。ただし，1 および a 自身も約数とする。たとえば，$f(1)=1$ であり，$a=15$ ならば 15 の正の約数は 1, 3, 5, 15 なので，$f(15)=24$ となる。次の問いに答えよ。

(1) a が正の奇数 b と正の整数 m を用いて $a=2^m b$ と表されるとする。このとき $f(a)=(2^{m+1}-1)f(b)$ が成り立つことを示せ。

必要ならば，$1+r+\cdots+r^m=\dfrac{r^{m+1}-1}{r-1}\ (r\neq 1)$ を用いてよい。

(2) a が 2 以上の整数 p と正の整数 q を用いて $a=pq$ と表されるとする。このとき $f(a)\geqq(p+1)q$ が成り立つことを示せ。また，等号が成り立つのは，$q=1$ かつ p が素数であるときに限ることを示せ。

(3) $a=2^2r$，$b=2^4s$（r, s は正の奇数）の形をした偶数 a, b を考える。$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ をみたす a, b を求めよ。 [2002]

解答例

(1) 正の奇数 b の正の約数を小さい方から b_1，b_2，$\cdots$，b_n とすると，$a=2^m b$ より，

$$f(a)=(1+2+2^2+\cdots+2^m)(b_1+b_2+\cdots+b_n)$$
$$=\frac{2^{m+1}-1}{2-1}f(b)=(2^{m+1}-1)f(b)$$

(2) p は 2 以上の整数より，少なくとも 1 と p を約数としてもつ。また，q は正の整数より，少なくとも q を約数としてもつ。すると，$a=pq$ のとき，

$$f(a)\geqq p\times q+1\times q=(p+1)q$$

等号が成立するのは，a が pq と q だけを約数としてもつ場合であり，$p\geqq 2$ より $q=1$ である。すると，$a=p$ は p と 1 だけを約数としてもち，p は素数となる。

(3) 条件より，$a=2^2r$，$b=2^4s$，$f(a)=2b$，$f(b)=2a$ なので，

$f(2^2r)=2\cdot 2^4s$ ………①，$f(2^4s)=2\cdot 2^2r$ ………②

(1)を用いると，①より，$(2^3-1)f(r)=2^5s$，$7f(r)=32s$ ………③

②より，$(2^5-1)f(s)=2^3r$，$31f(s)=8r$ ………④

$f(r)$，$f(s)$ は整数なので，③より s は 7 の倍数，④より r は 31 の倍数となる。

すなわち，k, l を正の整数として，$s=7k$，$r=31l$ と表すことができ，③④より，

$7f(r)=32\cdot 7k$，$f(r)=32k$ ………⑤

$31f(s)=8\cdot 31l$，$f(s)=8l$ ………⑥

一方，(2)より，$f(r)=f(31l)\geqq(31+1)l=32l$ ………⑦

$f(s)=f(7k)\geqq(7+1)k=8k$ ………⑧

⑤⑦より $32k \geqq 32l$ となり $k \geqq l$，⑥⑧より $8l \geqq 8k$ となり $l \geqq k$，よって $k = l$ である。

すると，⑤は $f(31k) = (31+1)k$ となり，31 は素数なので，(2)の等号成立条件から $k = 1$ である。

以上より，$s = 7$，$r = 31$ となり，$a = 2^2 \cdot 31 = 124$，$b = 2^4 \cdot 7 = 112$ である。

コメント

約数全体の和という有名な問題を題材にしてあります。難問ですが，演習することに価値のある問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数とする。どんな角度 θ に対しても,

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$$

が成り立つことを示せ。また，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta$ は

$$\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$$

と表されることを示せ。

(2)　$p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを示せ。

(3)　整式 $p_n(x)$ の定数項を求めよ。また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を求めよ。

[2002]

解答例

(1)　$n=1$ のとき　$2\cos\theta\cdot 1 - \cos(-\theta) = 2\cos\theta - \cos\theta = \cos\theta$

$n=2$ のとき　$2\cos\theta\cos\theta - 1 = 2\cos^2\theta - 1 = \cos 2\theta$

$n\geqq 3$ のとき　$2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta$

$$= \cos(n-1+1)\theta + \cos(n-1-1)\theta - \cos(n-2)\theta = \cos n\theta$$

以上より, n を正の整数とするとき,

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\cos\theta = x$ として，ある n 次式 $p_n(x)$ を用いて，$\cos n\theta = p_n(x)$ と表されることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$p_1(x) = x$ より x の 1 次式，$p_2(x) = 2x^2 - 1$ より x の 2 次式として表される。

(ii)　$n = k,\ k+1$ のとき

$\cos k\theta = p_k(x)$，$\cos(k+1)\theta = p_{k+1}(x)$ と仮定すると，①より，

$$\cos(k+2)\theta = 2\cos\theta\cos(k+1)\theta - \cos k\theta = 2x\,p_{k+1}(x) - p_k(x)$$

これより，$\cos(k+2)\theta$ は x の $k+2$ 次式で表される。

(i)(ii)より，$\cos n\theta$ はある n 次式 $p_n(x)$ を用いて $\cos n\theta = p_n(\cos\theta)$ と表される。

(2)　(1)より，$p_1(x) = x$，$p_2(x) = 2x^2 - 1$，$p_{n+2}(x) = 2x\,p_{n+1}(x) - p_n(x) \cdots\cdots\cdots ②$

さて，$p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき

$p_1(x) = x$ より奇関数，$p_2(x) = 2x^2 - 1$ より偶関数である。

(ii)　$n = 2k-1,\ 2k$ のとき

$p_{2k-1}(x)$ が奇関数，$p_{2k}(x)$ が偶関数であると仮定すると,

$p_{2k-1}(-x) = -p_{2k-1}(x)$，$p_{2k}(-x) = p_{2k}(x)$

②より，$p_{2k+1}(x) = 2x\,p_{2k}(x) - p_{2k-1}(x)$ なので,

$$p_{2k+1}(-x) = -2x\,p_{2k}(-x) - p_{2k-1}(-x) = -2xp_{2k}(x) + p_{2k-1}(x) = -p_{2k+1}(x)$$

また，$p_{2k+2}(x) = 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x)$ なので,

$$p_{2k+2}(-x) = -2x\,p_{2k+1}(-x) - p_{2k}(-x) = 2x\,p_{2k+1}(x) - p_{2k}(x) = p_{2k+2}(x)$$

よって，$p_{2k+1}(x)$ は奇関数，$p_{2k+2}(x)$ は偶関数となる。

(i)(ii)より，$p_n(x)$ は n が偶数ならば偶関数，奇数ならば奇関数になる。

(3)　まず，$p_n(x)$ の定数項を a_n とする。

n が奇数のとき，$p_n(-x) = -p_n(x)$ より，$a_n = -a_n$，$a_n = 0$

n が偶数のとき，$n = 2m$ として，②より，$p_{2m+2}(x) = 2x\,p_{2m+1}(x) - p_{2m}(x)$

定数項を比較すると，$a_{2m+2} = -a_{2m}$

$a_1 = -1$ より，$a_{2m} = -1\cdot(-1)^{m-1} = (-1)^m$

$m = \dfrac{n}{2}$ なので，$a_n = (-1)^{\frac{n}{2}}$

また，$p_n(x)$ の 1 次の項の係数を b_n とする。

n が偶数のとき，$p_n(-x) = p_n(x)$ より，$-b_n = b_n$，$b_n = 0$

n が奇数のとき，$n = 2m-1$ として，②より，$p_{2m+1}(x) = 2x\,p_{2m}(x) - p_{2m-1}(x)$

1 次の項の係数を比較すると，$p_{2m}(x)$ の定数項は $(-1)^m$ より,

$$b_{2m+1} = 2(-1)^m - b_{2m-1}\,,\quad \frac{b_{2m+1}}{(-1)^{m+1}} = \frac{b_{2m-1}}{(-1)^m} - 2$$

$b_1 = 1$ より，$\dfrac{b_{2m-1}}{(-1)^m} = \dfrac{b_1}{(-1)^1} - 2(m-1) = -(2m-1)$

$$b_{2m-1} = -(2m-1)(-1)^m$$

$m = \dfrac{n+1}{2}$ なので，$b_n = -n(-1)^{\frac{n+1}{2}}$

コメント

有名な問題です。ただ，問題量がたいへん多く，かなりの時間を費やしてしまいます。

問　題

数列$\{a_n\}$を$a_1=2$，$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で与える。a_1，$\cdots$，a_nの積をP_nとおく。

(1)　各nについて$a_n>0$であることを示せ。

(2)　各nについて$a_{n+1}=P_n+1$であることを示せ。

(3)　$S_n=\dfrac{1}{a_1}+\cdots+\dfrac{1}{a_n}$とおく。$S_1$，$S_2$，$S_3$，$S_4$を求めよ。

(4)　各nについてS_nをP_nで表せ。　[2001]

解答例

(1)　条件より，$a_{n+1}=a_n{}^2-a_n+1=\left(a_n-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$なので，$n\geqq 2$で$a_n>0$

また$a_1=2>0$から，すべての自然数nに対して，$a_n>0$となる。

(2)　条件より，$a_{n+1}-1=a_n{}^2-a_n=a_n(a_n-1)$

$$a_{n+1}-1=(a_1-1)a_1a_2\cdot\cdots\cdot a_n=(2-1)P_n=P_n$$

よって，$a_{n+1}=P_n+1$

(3)　(2)の結果を用いて，$a_1=2$，$a_2=P_1+1=a_1+1=3$，$a_3=P_2+1=a_1a_2+1=7$，$a_4=P_3+1=a_1a_2a_3+1=43$となる。

$$S_1=\frac{1}{a_1}=\frac{1}{2},\quad S_2=S_1+\frac{1}{a_2}=\frac{5}{6},\quad S_3=S_2+\frac{1}{a_3}=\frac{41}{42}$$

$$S_4=S_3+\frac{1}{a_4}=\frac{1805}{1806}$$

(4)　(3)より，$S_n=\dfrac{P_n-1}{P_n}$と推測できるので，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$のとき　$S_1=\dfrac{1}{2}=\dfrac{P_1-1}{P_1}$より成立する。

(ii)　$n=k$のとき　$S_k=\dfrac{P_k-1}{P_k}$と仮定すると，$P_{k+1}=P_ka_{k+1}$，$a_{k+1}=P_k+1$より，

$$S_{k+1}=S_k+\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{P_k-1}{P_k}+\frac{1}{a_{k+1}}=\frac{(P_k-1)a_{k+1}+P_k}{P_ka_{k+1}}=\frac{P_ka_{k+1}-a_{k+1}+P_k}{P_ka_{k+1}}$$

$$=\frac{P_{k+1}-a_{k+1}+P_k}{P_{k+1}}=\frac{P_{k+1}-1}{P_{k+1}}$$

(i)(ii)より，すべての自然数nに対して，$S_n=\dfrac{P_n-1}{P_n}$

コメント

(1)と(2)は数学的帰納法を利用するまでもありませんでした。(4)は(3)の流れから，やはり数学的帰納法の登場ですが。

問　題

(1)　自然数 a, b が互いに素であるとはどういうことか。

(2)　自然数 a, b が互いに素であるなら a^2, b^2 は互いに素であることを示せ。

(3)　n を自然数とする。もしも $\sqrt{n}$ が有理数ならば, $\sqrt{n}$ は自然数であることを示せ。ただし, 有理数とは分母と分子がともに整数で表される分数のことである。

(4)　n が自然数のとき, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数であることを示せ。 [2001]

解答例

(1)　自然数 a と b の公約数が 1 だけであることを, a, b が互いに素であるいう。

(2)　a_1, a_2, $\cdots$, a_n, b_1, b_2, $\cdots$, b_m は素数として, a, b を素因数分解すると,

$$a = {a_1}^{k_1}{a_2}^{k_2}\cdots{a_n}^{k_n},\ b = {b_1}^{l_1}{b_2}^{l_2}\cdots{b_m}^{l_m}$$

ただし, k_1, k_2, $\cdots$, k_n, l_1, l_2, $\cdots$, l_m は自然数とする。

$$a^2 = {a_1}^{2k_1}{a_2}^{2k_2}\cdots{a_n}^{2k_n},\ b^2 = {b_1}^{2l_1}{b_2}^{2l_2}\cdots{b_m}^{2l_m}$$

a, b が互いに素であるとき, a_1, a_2, $\cdots$, a_n, b_1, b_2, $\cdots$, b_m に同じ数はない。すると, ${a_1}^2$, ${a_2}^2$, $\cdots$, ${a_n}^2$, ${b_1}^2$, ${b_2}^2$, $\cdots$, ${b_m}^2$ にも同じ数はない。

すなわち, a^2, b^2 は互いに素である。

(3)　$\sqrt{n}$ が有理数であるとき, p と q を互いに素な自然数として, $\sqrt{n} = \dfrac{q}{p}$ とおく。

$$q = p\sqrt{n},\ q^2 = p^2 n$$

これより, p^2 は q^2 の約数となるが, (1)より p^2, q^2 は互いに素であるので, $p^2 = 1$, すなわち $p = 1$ となる。

よって, $\sqrt{n}$ は自然数である。

(4)　$\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ のうち多くとも 1 つは無理数であると仮定する。

すると, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 つが有理数であり, (3)より $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ の少なくとも 2 つが自然数である。よって, n, $n+1$, $n+2$ の少なくとも 2 つが平方数となる。

ところが, 平方数どうしの差は 3 以上なので, 連続 3 整数 n, $n+1$, $n+2$ のうち平方数となる数は, 多くとも 1 つである。

したがって, $\sqrt{n}$, $\sqrt{n+1}$, $\sqrt{n+2}$ のうち少なくとも 2 つは無理数である。

コメント

(4)がメインの問題ですが, ステップを 1 つずつ確認しながら進まないと, 足を踏みはずしてしまいそうです。

問　題

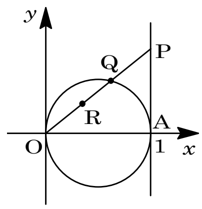
原点を O, 直線 $x=1$ 上の動点を P, 中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$, 半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C とする。線分 OP と C との交点で原点でないものを Q とし, OP 上に $\overline{\mathrm{OR}}=\overline{\mathrm{PQ}}$ を満たす点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ をとる。

(1) 点 P を動かしたとき, 点 R の軌跡を表す方程式を x と y とで表せ。

(2) $m,\ n$ を 100 以下の自然数として, 点 $\left(\dfrac{1}{m},\ \dfrac{1}{n}\right)$ が(1)で求めた曲線上にあるような組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。 [2000]

解答例

(1) $\mathrm{P}(1,\ t)$ とすると, $k>0$ として, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となる。



ここで, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(k\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0,\quad k=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}=\frac{1}{1+t^2}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$

さて, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{QP}}$ から, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\dfrac{1}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{t^2}{1+t^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ となり,

$$x=\frac{t^2}{1+t^2}\cdots\cdots\cdots①,\quad y=\frac{t^3}{1+t^2}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $y=tx$ となり, $x\neq 0$ のとき, $t=\dfrac{y}{x}$

①に代入して, $x\left(1+\dfrac{y^2}{x^2}\right)=\dfrac{y^2}{x^2}$, $x^3+xy^2=y^2\cdots\cdots\cdots③$

なお, $x=0$ のとき①より $t=0$ となり, このとき②より $y=0$

③において, $x=0$ とすると $y=0$ となるので, ③は $x=0$ の場合も適する。

以上より, 点 R の軌跡を表す方程式は, $x^3+xy^2-y^2=0$

(2) 点 $\left(\dfrac{1}{m},\ \dfrac{1}{n}\right)$ が③上にあるので, $\dfrac{1}{m^3}+\dfrac{1}{m}\cdot\dfrac{1}{n^2}=\dfrac{1}{n^2}$

$$n^2+m^2=m^3,\quad n^2=m^2(m-1)\cdots\cdots\cdots④$$

④の左辺は平方数なので, 右辺も平方数となり, $m-1$ が平方数となることが必要である。

ここで, $1\leqq n\leqq 10^2$ より $1\leqq n^2\leqq 10^4$ となるので, $1\leqq m^3-m^2\leqq 10^4$

$1+m^2\leqq m^3\leqq 10^4+m^2$ から, $2\leqq m^3\leqq 2\cdot 10^4$, $1<\sqrt[3]{2}\leqq m\leqq 10\sqrt[3]{20}<30$ となり,

$$m-1=1^2,\ 2^2,\ 3^2,\ 4^2,\ 5^2,\ m=2,\ 5,\ 10,\ 17,\ 26$$

$m=2$ のとき④より $n^2=2^2\cdot 1$ から $n=2$，$m=5$ のとき④より $n^2=5^2\cdot 4$ から $n=10$，$m=10$ のとき④より $n^2=10^2\cdot 9$ から $n=30$，$m=17$ のとき④より $n^2=17^2\cdot 16$ から $n=68$，$m=26$ のとき④より $n^2=26^2\cdot 25$ から $n=130$ となるが，100 以下の自然数という条件に反する。

以上より，$(m,\ n)=(2,\ 2)$，$(5,\ 10)$，$(10,\ 30)$，$(17,\ 68)$

コメント

(2)は整数問題で，雰囲気からすると難問ですが，まとめた④式が扱いやすく，あっさり $(m,\ n)$ の組が求まりました。

問　題

実数 p，自然数 q に対して，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ をそれぞれ

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n-p,\ b_1=q,\ b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$$

と定める。

(1) $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ をはじめから順に区画に分け，第 m 区画に属する項の個数が b_m となるようにする。m を正の偶数とするとき第 m 区画に属する項の和 T_m を求めよ。

[1999]

解答例

(1) $a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n-p$

(i) $p=1$ のとき　$a_{n+1}=a_n-1$ より，$a_n=1-(n-1)=-n+2$

$$S_n=\frac{1+(-n+2)}{2}\cdot n=\frac{n(-n+3)}{2}$$

(ii) $p\neq1$ のとき　$\alpha=\dfrac{-p}{1-p}$ として，$a_{n+1}-\alpha=p(a_n-\alpha)$

$$a_n=(a_1-\alpha)p^{n-1}+\alpha=\left(1-\frac{-p}{1-p}\right)p^{n-1}+\frac{-p}{1-p}=\frac{1}{1-p}(p^{n-1}-p)$$

$$S_n=\frac{1}{1-p}\left\{\frac{1\cdot(1-p^n)}{1-p}-pn\right\}=\frac{1}{(1-p)^2}\left\{1-p^n-p(1-p)n\right\}$$

(2) $b_1=q,\ b_{n+1}=b_n+(-1)^{n+1}q$

$n\geqq2$ で，$b_n=b_1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k+1}q=q+q\cdot\frac{(-1)^2\left\{1-(-1)^{n-1}\right\}}{1-(-1)}=\frac{q}{2}\left\{3-(-1)^{n-1}\right\}$

$n=1$ をあてはめると，$b_1=\dfrac{q}{2}(3-1)=q$ となり $n=1$ のときも成立する。

すると, n が奇数のとき $b_n=q$, n が偶数のとき $b_n=2q$ となる。

さて，第 m 区画末項までの項数は，m が偶数より $\dfrac{m}{2}\cdot q+\dfrac{m}{2}\cdot2q=\dfrac{3}{2}mq$ であり，これから第 m 区画の初項は，$n_0=\dfrac{3}{2}mq-2q+1=\left(\dfrac{3}{2}m-2\right)q+1$ 項目となる。

(i) $p=1$ のとき　(1)より数列 $\{a_n\}$ は等差数列となるので，

第 m 区画の初項は，$a_{n_0}=-\left\{\left(\dfrac{3}{2}m-2\right)q+1\right\}+2=1-\left(\dfrac{3}{2}m-2\right)q$

第 m 区画の末項は，$a_{\frac{3}{2}mq}=2-\dfrac{3}{2}mq$

よって，$T_m=\dfrac{1-\left(\dfrac{3}{2}m-2\right)q+2-\dfrac{3}{2}mq}{2}\cdot2q=3q-(3m-2)q^2$

(ii)　$p \neq 1$のとき　(1)より $a_n = \dfrac{1}{1-p}(p^{n-1} - p)$なので,

よって，$T_m = \dfrac{1}{1-p}\displaystyle\sum_{k=n_0}^{\frac{3}{2}mq}(p^{k-1} - p) = \dfrac{1}{1-p}\left\{ p^{\left(\frac{3}{2}m-2\right)q} \cdot \dfrac{1-p^{2q}}{1-p} - p \cdot 2q \right\}$

$$= \frac{1}{(1-p)^2}\left\{ p^{\left(\frac{3}{2}m-2\right)q}(1-p^{2q}) - 2p(1-p)q \right\}$$

コメント

内容は群数列だけですが，計算が複雑で疲れてしまう問題です。

問　題

(1)　自然数$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について，次の等式が成り立つことを示せ。

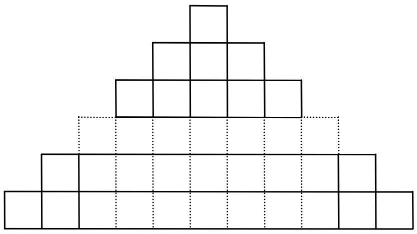
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

(2)　辺の長さ 1 の正三角形のタイルをいくつか用意して，辺の長さが自然数 m の正三角形をタイルで張りつめたい。

①　$m=2,\ 3,\ 4$のとき，どのようにタイル張りをすればよいか図示せよ。

②　一般に，辺の長さ m の正三角形をタイルで張りつめるのに必要なタイルの個数を m の式で表し，その式が成り立つ理由を述べよ。

(3)　辺の長さ 1 の正三角形を底面とする高さ 1 の正三角柱のブロックをいくつか用意して，すき間なく並べて高さ 1 の正三角柱の台を作る。このような台を n 段積み上げ，高さ n の台を作る。この台を真横から見たとき右図のように見えたという。ただし，図の小四角形はすべて辺の長さ 1 の正方形である。このとき台全体の体積を求めよ。　[1998]



解答例

(1)　数学的帰納法により，証明する。

(i) $n=1$のとき　　左辺$=1^2$，右辺$=\frac{1}{6}\cdot1\cdot2\cdot3=1$なので，成立。

(ii)　$n=k$のとき　　$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)$と仮定する。

両辺$+(k+1)^2$とすると，

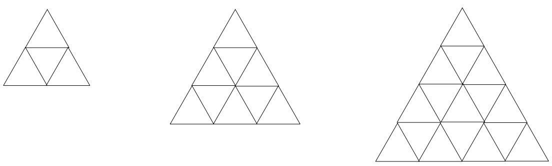
$$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+k^2+(k+1)^2=\frac{1}{6}k(k+1)(2k+1)+(k+1)^2$$

上式の右辺$=\frac{1}{6}(k+1)\{k(2k+1)+6(k+1)\}=\frac{1}{6}(k+1)(k+2)(2k+3)$

よって，$n=k+1$のときも成立。

(i)(ii)より，すべての自然数 n で$1^2+2^2+3^2+\cdots\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$

(2)　　$m=2$　　$m=3$　　$m=4$



k 段めの個数を a_k とすると，$a_k = 1 + 2(k-1) = 2k-1$

求めるタイルの個数を N_m とすると，$N_m = \sum_{k=1}^{m} a_k = \sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2$

(3) 正三角柱の 1 つのブロックの体積を v_0 ととすると，$v_0 = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 1 = \frac{\sqrt{3}}{4}$

求める台全体の体積を V とすると，

$$V = (N_1 + N_3 + N_5 + \cdots\cdots + N_{2n-1})v_0 = v_0\sum_{k=1}^{n} N_{2k-1} = \frac{\sqrt{3}}{4}\sum_{k=1}^{n}(2k-1)^2$$

$$= \frac{\sqrt{3}}{4}\left\{4\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1) - 4\cdot\frac{1}{2}n(n+1) + n\right\} = \frac{\sqrt{3}}{12}n(2n+1)(2n-1)$$

コメント

解きやすい問題です。特に(2)の前半の設問には驚いてしまいます。

問　題

A と B の 2 人が A, B, A, B, …の順にさいころを投げ，先に 3 以上の目を出した人を勝者として勝敗を決め，さいころ投げを終える。以下では，さいころを投げた回数とは A と B が投げた回数の和のこととする。2 と 3 の常用対数を $\log_{10}2=0.301$，$\log_{10}3=0.477$ として，以下の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げた回数が n 回以下では勝敗が決まらない確率 p_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。さらに，p_n が 0.005 より小さくなる最小の n を求めよ。

(2)　さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つ確率を求めよ。

(3)　自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つ確率を求めよ。 [2017]

解答例

(1)　さいころを投げた回数が n 回以下で勝敗が決まらない条件は，n 回とも 1 または 2 が出たときで，その確率 p_n は，$p_n=\left(\frac{2}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。

ここで，$p_n<0.005$ となるのは，$\left(\frac{1}{3}\right)^n<\frac{1}{200}$ から $\log_{10}\left(\frac{1}{3}\right)^n<\log_{10}\frac{1}{200}$ となり，

$$-n\log_{10}3<-(2+\log_{10}2)\,,\ \ n>\frac{2+\log_{10}2}{\log_{10}3}=\frac{2+0.301}{0.477}>4.8$$

したがって，求める最小の n は $n=5$ である。

(2)　さいころを投げた回数が 3 回以下で A が勝つのは，

(i)　1 回目で A が勝つとき　このときの確率は $\frac{2}{3}$ である。

(ii)　3 回目で A が勝つとき　このときの確率は $\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{27}$ である。

(i)(ii)より，求める確率は $\frac{2}{3}+\frac{2}{27}=\frac{20}{27}$ となる。

(3)　自然数 k に対し，さいころを投げた回数が $2k+1$ 回以下で A が勝つのは，(2)と同様に，A が 1 回目, 3 回目, 5 回目，…，$2k+1$ 回目で勝つ場合を考え，その確率を P とすると，

$$P=\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{1}{3}\right)^4\cdot\frac{2}{3}+\cdots+\left(\frac{1}{3}\right)^{2k}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\left\{1+\frac{1}{9}+\left(\frac{1}{9}\right)^2+\cdots+\left(\frac{1}{9}\right)^k\right\}$$

$$=\frac{2}{3}\cdot\frac{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{9}}=\frac{3}{4}\left\{1-\left(\frac{1}{9}\right)^{k+1}\right\}$$

コメント

確率の基本題です。裏があるのかと勘繰ってしまいそうですが。

問　題

袋の中に，赤玉が 15 個，青玉が 10 個，白玉が 5 個入っている。袋の中から玉を 1 個取り出し，取り出した玉の色に応じて，以下の操作で座標平面に置いたコインを動かすことを考える。

（操作）コインが点$(x,\ y)$にあるものとする。赤玉を取り出したときにはコインを点$(x+1,\ y)$に移動，青玉を取り出したときには点$(x,\ y+1)$に移動，白玉を取り出したときには点$(x-1,\ y-1)$に移動し，取り出した玉は袋に戻す。

最初に原点$(0,\ 0)$にコインを置き，この操作を繰り返して行う。指定した回数だけ操作を繰り返した後，コインが置かれている点を到達点と呼ぶことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 操作を n 回繰り返したとき，白玉を一度だけ取り出したとする。このとき，到達点となり得る点をすべて求めよ。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，到達点となりうる点の個数を求めよ。

(3) 座標平面上の 4 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ -1)$，$(1,\ -1)$を頂点とする正方形 D を考える。操作を n 回繰り返したとき，到達点が D の内部または辺上にある確率を P_n とする。P_3 を求めよ。

(4) 自然数 N に対して P_{3N} を求めよ。　[2016]

解答例

(1) 袋の中から玉を 1 個取り出したとき，赤玉，青玉，白玉である確率は，それぞれ $\dfrac{15}{30}=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{5}{30}=\dfrac{1}{6}$ である。そして，最初に原点$(0,\ 0)$に置かれたコインは，赤玉を取り出すと x 軸方向に 1，青玉を取り出すと y 軸方向に 1，白玉を取り出すと x 軸方向に -1 かつ y 軸方向に -1 だけ移動する。

さて，操作を n 回繰り返したとき，$0\leqq k\leqq n-1$ として，赤玉 k 回，青玉 $n-k-1$ 回，白玉 1 回取り出したとき，到達点は$(x,\ y)=(k-1,\ n-k-2)$から，

$$(-1,\ n-2),\ (0,\ n-3),\ (1,\ n-4),\ \cdots,\ (n-2,\ -1)$$

すなわち，線分 $x+y=n-3$ $(-1\leqq x\leqq n-2)$ 上の格子点全体となる。

(2) 操作を n 回繰り返したとき，赤玉 k 回，青玉 $n-k-l$ 回，白玉 l 回取り出し，l を $0\leqq l\leqq n$ で固定すると，$0\leqq k\leqq n-l$ として，到達点は$(x,\ y)=(k-l,\ n-k-2l)$から，線分 $x+y=n-3l$ $(-l\leqq x\leqq n-2l)$ 上の格子点全体となる。

その個数は $n-2l-(-l)+1=n-l+1$ より，到達点となりうる点の総数 N は，

$$N=\sum_{l=0}^{n}(n-l+1)=\sum_{l'=1}^{n+1}l'=\frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

(3)　操作を 3 回繰り返したとき，赤玉 k 回，青玉$3-k-l$回，白玉 l 回取り出し，l を $0\leqq l\leqq 3$ で固定すると，$0\leqq k\leqq 3-l$ として，到達点は$(x,\ y)=(k-l,\ 3-k-2l)$ から，線分 $x+y=3-3l\ (-l\leqq x\leqq 3-2l)$ 上の格子点全体となる。

(i)　$l=0$ のとき
線分 $x+y=3\ (0\leqq x\leqq 3)$ 上の格子点$(0,\ 3)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$，$(3,\ 0)$

(ii)　$l=1$ のとき
線分 $x+y=0\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上の格子点$(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$

(iii)　$l=2$ のとき
線分 $x+y=-3\ (-2\leqq x\leqq -1)$ 上の格子点$(-2,\ -1)$，$(-1,\ -2)$

(iv)　$l=3$ のとき
線分 $x+y=-6\ (-3\leqq x\leqq -3)$ 上の格子点$(-3,\ -3)$

(i)～(iv)より，到達点が与えられた正方形 D の内部または辺上にあるのは，
$(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$

(a)　$(-1,\ 1)$ のとき　赤玉 0 回，青玉 2 回，白玉 1 回取り出す場合

(b)　$(0,\ 0)$ のとき　赤玉 1 回，青玉 1 回，白玉 1 回取り出す場合

(c)　$(1,\ -1)$ のとき　赤玉 2 回，青玉 0 回，白玉 1 回取り出す場合

以上より，求める確率 P_3 は，

$$P_3=\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{1!1!1!}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{6}+\frac{3!}{2!1!}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{18}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}=\frac{25}{72}$$

(4)　(3)と同様に考え，操作を $3N$ 回繰り返したとき，赤玉 k 回，青玉$3N-k-l$回，白玉 l 回取り出し，l を $0\leqq l\leqq 3N$ で固定すると，$0\leqq k\leqq 3N-l$ として，到達点は$(x,\ y)=(k-l,\ 3N-k-2l)$ から，線分 $x+y=3N-3l\ (-l\leqq x\leqq 3N-2l)$ 上の格子点全体となる。

さて，$3N-3l\leqq -3$ または $3N-3l\geqq 3$ のとき，到達点はすべて与えられた正方形 D の外部となるので，D の内部または辺上にあるのは，$3N-3l=0\ (l=N)$ の場合のみである。

このとき，到達点は線分 $x+y=0\ (-N\leqq x\leqq N)$ 上の格子点全体となる。

よって，到達点が与えられた正方形 D の内部または辺上にあるのは，
$(-1,\ 1)$，$(0,\ 0)$，$(1,\ -1)$

(a)　$(-1,\ 1)$ のとき

$k-N=-1$ から赤玉 $N-1$ 回，青玉 $N+1$ 回，白玉 N 回取り出す場合で，確率は，

$$\frac{(3N)!}{(N-1)!(N+1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{6}\right)^{N}=\frac{2N}{3(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}$$

(b)　$(0,\ 0)$のとき

$k-N=0$から赤玉N回，青玉N回，白玉N回取り出す場合で，確率は，

$$\frac{(3N)!}{N!N!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^N\left(\frac{1}{3}\right)^N\left(\frac{1}{6}\right)^N=\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}$$

(c)　$(1,\ -1)$のとき

$k-N=1$から赤玉$N+1$回，青玉$N-1$回，白玉N回取り出す場合で，確率は，

$$\frac{(3N)!}{(N+1)!(N-1)!N!}\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}\left(\frac{1}{3}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{6}\right)^N=\frac{3N}{2(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}$$

以上より，求める確率P_{3N}は，

$$P_{3N}=\frac{2N}{3(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}+\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}+\frac{3N}{2(N+1)}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}$$

$$=\left\{\frac{2N}{3(N+1)}+1+\frac{3N}{2(N+1)}\right\}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N}(N!)^3}=\frac{19N+6}{N+1}\cdot\frac{(3N)!}{6^{2N+1}(N!)^3}$$

コメント

問題の設定が微妙にややこしい確率問題です。確率計算については，かなりの量があり，時間的に非常に厳しいものとなっています。

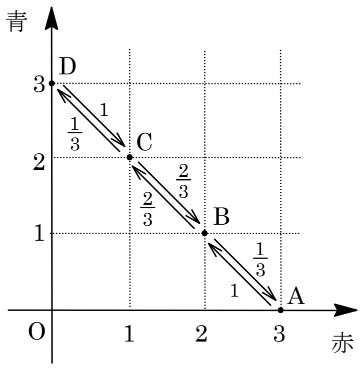
問　題

袋の中に最初に赤玉 2 個と青玉 1 個が入っている。次の操作を考える。

(操作)　袋から 1 個の玉を取り出し，それが赤玉ならば代わりに青玉 1 個を袋に入れ，青玉ならば代わりに赤玉 1 個を袋に入れる。袋に入っている 3 個の玉がすべて青玉になるとき，硬貨を 1 枚もらう。

この操作を 4 回繰り返す。もらう硬貨の総数が 1 枚である確率と，もらう硬貨の総数が 2 枚である確率をそれぞれ求めよ。 [2015]

解答例



まず，与えられた操作を行ったとき，袋に入っている 3 個の玉について，(赤，青)の個数の組は，(3, 0)，(2, 1)，(1, 2)，(0, 3)のいずれかである。

そして，この 4 つの状態をそれぞれ A, B, C, D とおき，それらの間の遷移確率をまとめると，右図のようになる。

さて，B(2, 1)の状態から始めて，操作を 4 回繰り返したとき，もらう硬貨の総数が 1 枚であるのは，D(0, 3)に 1 回だけ進む場合と考え，

B→C→D→C→B, B→C→B→C→D, B→A→B→C→D

すると，その確率は，$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}+\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}=\frac{26}{81}$ となる。

次に，B(2, 1)の状態から始めて，操作を 4 回繰り返したとき，もらう硬貨の総数が 2 枚であるのは，D(0, 3)に 2 回だけ進む場合と考え，

B→C→D→C→D

すると，その確率は，$\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\cdot 1\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{27}$ となる。

コメント

状態の推移のついて，よく見かけるタイプの問題です。計算する前に，推移確率をすべて求めて準備をしておくと，後は図から読み取るだけです。

問　題

A さんは 5 円硬貨を 3 枚，B さんは 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚持っている。2 人は自分が持っている硬貨すべてを一度に投げる。それぞれが投げた硬貨のうち表が出た硬貨の合計金額が多い方を勝ちとする。勝者は相手の裏が出た硬貨をすべてもらう。なお，表が出た硬貨の合計金額が同じときは引き分けとし，硬貨のやりとりは行わない。このゲームについて，以下の問いに答えよ。

(1)　A さんが B さんに勝つ確率 p，および引き分けとなる確率 q をそれぞれ求めよ。

(2)　ゲーム終了後に A さんが持っている硬貨の合計金額の期待値 E を求めよ。

[2014]

解答例

(1)　A さんが 5 円硬貨を 3 枚投げたとき，表 3 枚の場合(合計金額 15 円)，表 2 枚で裏 1 枚の場合(合計金額 10 円)，表 1 枚で裏 2 枚の場合(合計金額 5 円)，裏 3 枚の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$，${}_3C_1\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{8}$，${}_3C_2\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{8}$，$\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{8}$ である。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{3}{8}$	$\frac{1}{8}$

B さんが 5 円硬貨 1 枚と 10 円硬貨を 1 枚を投げたとき，2 枚とも表の場合(合計金額 5 円)，10 円表で 5 円裏の場合(合計金額 10 円)，10 円裏で 5 円表の場合(合計金額 5 円)，2 枚とも裏の場合(合計金額 0 円)について，その確率は，それぞれ $\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ ずつである。これをまとめると，右表のようになる。

合計金額	15 円	10 円	5 円	0 円
確率	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{4}$

以上より，A さんが B さんに勝つ確率 p，引き分けとなる確率 q は，

$$p=\frac{1}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{3}{8}$$

$$q=\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{4}$$

(2)　ゲーム終了後，A さんの所持金とその各々の場合の確率は以下のようになる。

(i)　B さんの合計金額が 0 円で A さんが勝った場合（所持金 30 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{7}{32}$$

(ii)　B さんの合計金額が 5 円で A さんが勝った場合（所持金 25 円）

$$\frac{1}{8}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{8}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{8}$$

(iii) B さんの合計金額が 10 円で A さんが勝った場合（所持金 20 円）

$\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{32}$

(iv) 引き分けの場合（所持金 15 円）で，確率は，(1)より $q=\dfrac{1}{4}$

(v) A さんの合計金額が 10 円で A さんが負けた場合（所持金 10 円）

$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{32}$

(vi) A さんの合計金額が 5 円で A さんが負けた場合（所持金 5 円）

$\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{8}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{16}$

(vii) A さんの合計金額が 0 円で A さんが負けた場合（所持金 0 円）

$\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{8}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{32}$

(i)～(vii)より，ゲーム終了後の A さん所持金の期待値 E は，

$$E=0\times\frac{3}{32}+5\times\frac{3}{16}+10\times\frac{3}{32}+15\times\frac{1}{4}+20\times\frac{1}{32}+25\times\frac{1}{8}+30\times\frac{7}{32}=\frac{255}{16}$$

コメント

内容的にはセンターレベルですが，集中力がかなり要求される確率の問題です。また，(2)では，題意を取り違えないように注意しなくてはいけません。

問　題

横一列に並んだ 6 枚の硬貨に対して，以下の操作 L と操作 R を考える。

L：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ左端から順に硬貨の表と裏を反転する。

R：さいころを投げて，出た目と同じ枚数だけ右端から順に硬貨の表と裏を反転する。

たとえば，表表裏表裏表 と並んだ状態で操作 L を行うときに，3 の目が出た場合は，裏裏表表裏表 となる。

以下,「最初の状態」とは硬貨が 6 枚とも表であることとする。

(1) 最初の状態から操作 L を 2 回続けて行うとき，表が 1 枚となる確率を求めよ。

(2) 最初の状態から L，R の順に操作を行うとき，表の枚数の期待値を求めよ。

(3) 最初の状態から L，R，L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となる確率を求めよ。 [2013]

解答例

(1) L を 2 回続けて行うとき，左端の硬貨は，必ず表→裏→表と反転する。これより，表が 1 枚となるのは，左端の硬貨が表，それ以外は裏という場合である。

このときは，出た目が，6→1 または 1→6 のいずれかより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^2+\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{18}$$

(2) L，R の順に操作を行うとき，出た目と表の枚数の関係は右表のようになる。

なお，右表では，L の操作で 1 の目が出るのを L1，2 の目が出るのを L2，3 の目が出るのを L3，…，R の操作で 1 の目が出るのを R1，2 の目が出るのを R2，3 の目が出るのを R3，…と表している。

	R1	R2	R3	R4	R5	R6
L1	4	3	2	1	0	1
L2	3	2	1	0	1	2
L3	2	1	0	1	2	3
L4	1	0	1	2	3	4
L5	0	1	2	3	4	5
L6	1	2	3	4	5	6

これより，表の枚数の期待値は，

$$0\times\frac{5}{36}+1\times\frac{10}{36}+2\times\frac{8}{36}+3\times\frac{6}{36}+4\times\frac{4}{36}+5\times\frac{2}{36}+6\times\frac{1}{36}=\frac{19}{9}$$

(3) L, R, L の順に操作を行うとき，すべての硬貨が表となるのは次の場合である。

(i) 最初の操作が L6 以外のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が 0 で，3 回目に 6 の目が出る場合より，

L1→R5→L6，L2→R4→L6，L3→R3→L6，L4→R2→L6，L5→R1→L6

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

(ii)　最初の操作が L6 のとき

L, R の順に操作を行ったとき表の枚数が k のとき, 3 回目に $6-k$ の目が出る場合より,

L6→R1→L5, L6→R2→L4, L6→R3→L3, L6→R4→L2, L6→R5→L1

この確率は，$\left(\frac{1}{6}\right)^3\times 5=\frac{5}{216}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\frac{5}{216}+\frac{5}{216}=\frac{5}{108}$ である。

コメント

パズルのような問題です。(2)では，期待値を求めるので，センター試験を解くときと同じように，すべての場合を表にまとめました。すると，これが次の(3)への誘導となっていました。

問　題

いくつかの玉が入った箱 A と箱 B があるとき，次の試行 T を考える。

(試行 T)　箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れ，その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れる。

最初に箱 A に黒玉が 3 個，箱 B に白玉が 2 個入っているとき以下の問いに答えよ。

(1)　試行 T を 1 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(2)　試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n $(n=1,\ 2,\ 3)$ を求めて既約分数で表せ。

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率を求めて既約分数で表せ。　[2012]

解答例

(1)　箱 A に黒玉が 3 個入っているとき，箱 A から 2 個の玉を取り出して箱 B に入れると，箱 A は黒玉 1 個，箱 B は黒玉 2 個と白玉 2 個になっている。その後，箱 B から 2 個の玉を取り出して箱 A に入れたとき，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 p_n は，$p_1=\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{6}$，$p_2=\dfrac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\dfrac{2}{3}$，$p_3=\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{1}{6}$

(2)　箱 A に黒玉が 2 個と白玉が 1 個入っているとき，試行 T によって箱 A に黒玉が n 個入っている確率を r_n とすると，$r_1=\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_3C_1}{{}_4C_2}+\dfrac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{5}{18}$

$$r_2=\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}+\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{11}{18},\quad r_3=\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{2}{18}$$

また，箱 A に黒玉が 1 個と白玉が 2 個入っているとき，試行 T によって箱 A に黒玉が n 個入っている確率を s_n とすると，$s_1=\dfrac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_3C_1}{{}_4C_2}+\dfrac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\dfrac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\dfrac{7}{18}$

$$s_2=\frac{{}_2C_1}{{}_3C_2}\times\frac{{}_3C_2}{{}_4C_2}+\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_1\times{}_2C_1}{{}_4C_2}=\frac{10}{18},\quad s_3=\frac{{}_2C_2}{{}_3C_2}\times\frac{{}_2C_2}{{}_4C_2}=\frac{1}{18}$$

これより，試行 T を 2 回行ったときに，箱 A に黒玉が n 個入っている確率 q_n は，

$$q_1=p_1\cdot s_1+p_2\cdot r_1+p_3\cdot p_1=\frac{7}{108}+\frac{10}{54}+\frac{1}{36}=\frac{5}{18}$$

$$q_2=p_1\cdot s_2+p_2\cdot r_2+p_3\cdot p_2=\frac{10}{108}+\frac{22}{54}+\frac{4}{36}=\frac{11}{18}$$

$$q_3=p_1\cdot s_3+p_2\cdot r_3+p_3\cdot p_3=\frac{1}{108}+\frac{4}{54}+\frac{1}{36}=\frac{1}{9}$$

(3)　試行 T を 3 回行ったときに，箱 A の中がすべて黒玉になっている確率は，

$$q_1\cdot s_3+q_2\cdot r_3+q_3\cdot p_3=\frac{5}{324}+\frac{22}{324}+\frac{6}{324}=\frac{11}{108}$$

コメント

難問ではありませんが，非常に煩雑な問題です。

問　題

1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードがある。その 4 枚のカードを横一列に並べ，以下の操作を考える。

操作：1 から 4 までの数字が 1 つずつ書かれた 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す。球に書かれた数字が i と j ならば，i のカードと j のカードを入れかえる。その後，2 個の球は袋に戻す。

初めにカードを左から順に 1, 2, 3, 4 と並べ，上の操作を 2 回繰り返した後のカードについて，以下の問いに答えよ。

(1) カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶ確率を求めよ。

(2) カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶ確率を求めよ。

(3) 左端のカードの数字が 1 になる確率を求めよ。

(4) 左端のカードの数字の期待値を求めよ。 [2011]

解答例

(1) 4 個の球が入っている袋から同時に 2 個の球を取り出す ${}_4\mathrm{C}_2 = 6$ 通りの場合が同様に確からしいとし，この操作を 2 回繰り返すとする。

さて，カードが左から順に 1, 2, 3, 4 と並ぶのは，1 回目に i と j を取り出したとき，2 回目も i と j を取り出す場合より，その確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 6=\dfrac{1}{6}$

(2) カードが左から順に 4, 3, 2, 1 と並ぶのは，1 回目に 1 と 4 を取り出し 2 回目に 2 と 3 を取り出す場合か，1 回目に 2 と 3 を取り出し 2 回目に 1 と 4 を取り出す場合のいずれかなので，その確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 2=\dfrac{1}{18}$

(3) 左端のカードの数字が 1 になるのは，次の 2 つの場合がある。

(i) 2 と 3, 2 と 4, 3 と 4 のいずれかを 2 回取り出すとき
この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3^2=\dfrac{9}{36}$

(ii) 1 と 2 を 2 回，または 1 と 3 を 2 回，または 1 と 4 を 2 回取り出すとき
この場合の確率は，$\dfrac{1}{6}\times\dfrac{1}{6}\times 3=\dfrac{3}{36}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{9}{36}+\dfrac{3}{36}=\dfrac{1}{3}$

(4) 左端のカードの数字が 2, 3, 4 になることは対等なので，(3)より，その確率はそれぞれ，$\dfrac{1}{3}\times\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{2}{9}$ である。

よって，左端のカードの数字の期待値 E は，$E=1\times\dfrac{1}{3}+2\times\dfrac{2}{9}+3\times\dfrac{2}{9}+4\times\dfrac{2}{9}=\dfrac{7}{3}$

コメント

確率の基本問題。(3)は 1 のカードが動かない場合と動く場合で分けています。

問　題

　1 から 6 までの数字が 1 つずつ書かれている 6 枚のカードがある。これらをよくきった上で，左から右に一列に並べる。カードに書かれた数字を左から順に a, b, c, d, e, f とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ となる確率を求めよ。

(2)　$a+b=c+d$ となる確率を求めよ。　[2009]

解答例

	1	2	3	4	5	6
1		3	4	5	6	7
2	3		5	6	7	8
3	4	5		7	8	9
4	5	6	7		9	10
5	6	7	8	9		11
6	7	8	9	10	11	

(1)　$a+b=c$ となるのは，$a<b$ の場合では，

　(i)　$c=3$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 2)$

　(ii)　$c=4$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 3)$

　(iii)　$c=5$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 4),\ (2,\ 3)$

　(iv)　$c=6$ のとき　$(a,\ b)=(1,\ 5),\ (2,\ 4)$

　(i)～(iv)より，$a+b=c$ となる確率は，d, e, f が任意の数から，

$$\frac{6\times2\times3!}{6!}=\frac{1}{10}$$

(2)　$a+b=c+d$ となるのは，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組が，$a<b$, $c<d$ の場合では，

　(i)　$a+b=5$ のとき　$(1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1,\ 4)$

　(ii)　$a+b=6$ のとき　$(1,\ 5,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1,\ 5)$

　(iii)　$a+b=7$ のとき　$(1,\ 6,\ 2,\ 5),\ (2,\ 5,\ 1,\ 6),\ (1,\ 6,\ 3,\ 4),$
　　$(3,\ 4,\ 1,\ 6),\ (2,\ 5,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 2,\ 5)$

　(iv)　$a+b=8$ のとき　$(2,\ 6,\ 3,\ 5),\ (3,\ 5,\ 2,\ 6)$

　(v)　$a+b=9$ のとき　$(3,\ 6,\ 4,\ 5),\ (4,\ 5,\ 3,\ 6)$

　(i)～(v)より，$a+b=c+d$ となる確率は，e, f が任意の数から，

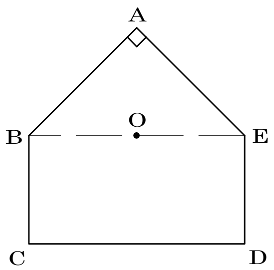
$$\frac{14\times2^2\times2!}{6!}=\frac{7}{45}$$

コメント

　センター試験の解法のように，いったん，すべての場合を列挙して，もれなく数え上げるのが，ベストでしょう。

問　題

図のような五角形 ABCDE（角 A が直角である二等辺三角形 ABE と長方形 BCDE をあわせた図形）において，辺 BC と辺 DE の長さは 1，辺 CD と線分 BE の長さは 2 とする。線分 BE の中点 O とする。また，5 枚のカードがあり，それぞれに A，B，C，D，E と書いてある。カードをよくきって 1 枚引き，もとに戻す。この操作を n 回繰り返し，i 回目に引いたカードの文字を P_i とする。たとえば，i 回目に B を引いたとすると，$P_i = B$ である。このとき，次の問いに答えよ。



(1) $\overrightarrow{OB}$ と $\overrightarrow{OC}$ の内積を求めよ。

(2) $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の内積が 1 である確率を求めよ。

(3) $\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD}$ と $\overrightarrow{OP_i}$ の内積を q_i とする。このとき，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率を求めよ。 [2008]

解答例

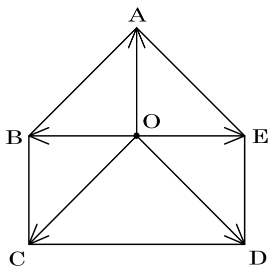
(1) $\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC} = 1\cdot\sqrt{2}\cos 45^\circ = 1$

(2) $\overrightarrow{OP_1}$ と $\overrightarrow{OP_2}$ の組の選び方は $5^2 = 25$ 通りで，これらは同様に確からしい。

さて，$\overrightarrow{OP_1}\cdot\overrightarrow{OP_2} = 1$ となる $(P_1,\ P_2)$ の選び方は，

$$(P_1,\ P_2) = (A,\ A),\ (B,\ B),\ (E,\ E),$$
$$(B,\ C),\ (C,\ B),\ (D,\ E),\ (E,\ D)$$

よって，7 通りあるので，この確率は $\dfrac{7}{25}$ である。



(3) まず，$q_i = (\overrightarrow{OC}+\overrightarrow{OD})\cdot\overrightarrow{OP_i} = -2\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OP_i} \neq 0$ となるのは，$P_i = A,\ C,\ D$ のときである。これより，$q_1q_2\cdots q_n \neq 0$ となる確率は，$\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ となる。

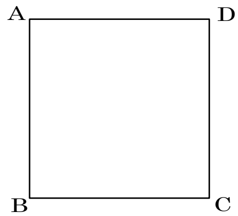
よって，$q_1q_2\cdots q_n = 0$ となる確率は，$1-\left(\dfrac{3}{5}\right)^n$ である。

コメント

問題文が長く，ハッタリがきいていますが，内容はごく平凡なものです。特に，(3) は，裏があるのではないかと，疑念が湧いてしまいます。

問　題

図のような 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD がある。この正方形の辺上の点 Q を，コインを投げて表が出れば反時計まわりに 1，裏が出れば時計まわりに 1 動かす試行を考える。点 Q が頂点 A から出発してこの試行が繰り返し行われるものとする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) 表の出る確率が$\dfrac{1}{2}$のコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。同様に上記の試行を 3 回および 4 回繰り返すとき，各頂点 A, B, C, D に点 Q がある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 表の出る確率 p が$\dfrac{1}{2}$より大きいコインを投げて，上記の試行を 2 回繰り返すとき，頂点 A, B, C, D のうち点 Q が頂点 C にある確率が最大となることを示せ。同様に 3 回繰り返すとき，点 Q が頂点 D にある確率が最大となることを示せ。　[2007]

解答例

(1) コインを投げる試行を n 回繰り返したとき，点 Q が A, B, C, D にある確率をそれぞれ $P_n(\mathrm{A})$，$P_n(\mathrm{B})$，$P_n(\mathrm{C})$，$P_n(\mathrm{D})$ とする。

すると，題意から，$P_1(\mathrm{A})=P_1(\mathrm{C})=0$，$P_1(\mathrm{B})=P_1(\mathrm{D})=\dfrac{1}{2}$ であり，

$$P_2(\mathrm{A})=P_2(\mathrm{C})=\frac{1}{2}P_1(\mathrm{B})+\frac{1}{2}P_1(\mathrm{D})=\frac{1}{2},\ P_2(\mathrm{B})=P_2(\mathrm{D})=0$$

$$P_3(\mathrm{B})=P_3(\mathrm{D})=\frac{1}{2}P_2(\mathrm{A})+\frac{1}{2}P_2(\mathrm{C})=\frac{1}{2},\ P_3(\mathrm{A})=P_3(\mathrm{C})=0$$

$$P_4(\mathrm{A})=P_4(\mathrm{C})=\frac{1}{2}P_3(\mathrm{B})+\frac{1}{2}P_3(\mathrm{D})=\frac{1}{2},\ P_4(\mathrm{B})=P_4(\mathrm{D})=0$$

(2) コインの表の出る確率が p，裏の出る確率が$1-p$ より，

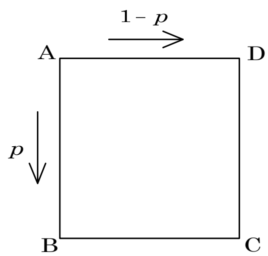
$$P_1(\mathrm{A})=P_1(\mathrm{C})=0,\ P_1(\mathrm{B})=p,\ P_1(\mathrm{D})=1-p$$

すると，$P_2(\mathrm{A})=(1-p)P_1(\mathrm{B})+pP_1(\mathrm{D})$

$$=(1-p)p+p(1-p)=-2p^2+2p$$

$$P_2(\mathrm{C})=pP_1(\mathrm{B})+(1-p)P_1(\mathrm{D})$$

$$=p^2+(1-p)^2=2p^2-2p+1$$



さて，$P_2(\mathrm{B})=P_2(\mathrm{D})=0$ であり，

$$P_2(\mathrm{C})-P_2(\mathrm{A})=4p^2-4p+1=(2p-1)^2$$

$p>\dfrac{1}{2}$ から，$P_2(\mathrm{C})>P_2(\mathrm{A})$ となり，$P_2(\mathrm{C})$ が最大である。

また，$P_3(\mathrm{A})=P_3(\mathrm{C})=0$ であり，

$$P_3(\mathrm{D})=(1-p)P_2(\mathrm{A})+pP_2(\mathrm{C})=(1-p)(-2p^2+2p)+p(2p^2-2p+1)$$
$$=4p^3-6p^2+3p$$
$$P_3(\mathrm{B})=pP_2(\mathrm{A})+(1-p)P_2(\mathrm{C})=p(-2p^2+2p)+(1-p)(2p^2-2p+1)$$
$$=-4p^3+6p^2-3p+1$$

ここで，$p>\dfrac{1}{2}$ から，$P_3(\mathrm{D})-P_3(\mathrm{B})=8p^3-12p^2+6p-1=(2p-1)^3>0$ となり，$P_3(\mathrm{D})>P_3(\mathrm{B})$ より，$P_3(\mathrm{D})$ が最大である。

コメント

内容は基本的ですが，ただ設問の量が多すぎます。n の値が 4 までなので，漸化式を立てるまでもありません。

問　題

1 つのさいころを 4 回投げて，出た目の数を順に x_1，x_2，x_3，x_4 とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$x_1 < x_2$ となる確率を求めよ。

(2)　$x_1 < x_2 < x_3$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_k \geqq x_{k+1}$ となる最小の自然数 k の期待値を求めよ。ただし，$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のときは $k=4$ と定める。　[2005]

解答例

(1)　さいころを 4 回投げるとき，目の数の組の総数は 6^4 通りである。

さて，$x_1 < x_2$ となる場合は ${}_6\mathrm{C}_2$ 通りで，x_3，x_4 は任意なので，その確率は,

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_2 \times 6^2}{6^4} = \frac{5}{12}$$

(2)　$x_1 < x_2 < x_3$ となる場合は ${}_6\mathrm{C}_3$ 通りで，x_4 は任意なので，その確率は,

$$\frac{{}_6\mathrm{C}_3 \times 6}{6^4} = \frac{5}{54}$$

(3)　$x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ となる場合は，$x_1 < x_2$ となる場合から $x_1 < x_2 < x_3$ となる場合を除いたものなので，その確率は，$\frac{5}{12} - \frac{5}{54} = \frac{35}{108}$ となる。

(4)　(i)　$x_1 \geqq x_2$ のとき

$k = 1$ となり, (1)より，その確率は $1 - \frac{5}{12} = \frac{7}{12}$ である。

(ii)　$x_1 < x_2$ かつ $x_2 \geqq x_3$ のとき

$k = 2$ となり, (3)より，その確率は $\frac{35}{108}$ である。

(iii)　$x_1 < x_2 < x_3 < x_4$ のとき

条件より $k = 4$ となり，その確率は $\frac{{}_6\mathrm{C}_4}{6^4} = \frac{5}{432}$ である。

(iv)　$x_1 < x_2 < x_3$ かつ $x_3 \geqq x_4$ のとき

$k = 3$ となり, (3)と同様に考えて，その確率は $\frac{5}{54} - \frac{5}{432} = \frac{35}{432}$ である。

(i)～(iv)より, k の期待値は，$1 \times \frac{7}{12} + 2 \times \frac{35}{108} + 3 \times \frac{35}{432} + 4 \times \frac{5}{432} = \frac{73}{48}$

コメント

順序関係が設定された事象の確率計算で，頻出のものです。2002 年に神戸大・理系で, 2003 年に一橋大で類題が出ています。

問　題

スイッチを入れると等確率で赤色または青色に輝く電球が横一列に 6 個並んでいる。これらの 6 個の電球のスイッチを同時に入れた後，左から電球の色を見ていき，色の変化の回数を調べる。

(1)　赤青青青青青，赤赤青青青青，…… のように左端が赤色で色の変化がちょうど 1 回起きる確率を求めよ。

(2)　色の変化が少なくとも 2 回起きる確率を求めよ。

(3)　色の変化がちょうど n 回$(0 \leqq n \leqq 5)$起きる確率を求めよ。

(4)　色の変化の回数の期待値を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　右図のように，6 個の電球を左から①～⑥とすると，色のパターンは2^6通りできる。

①→②→③→④→⑤→⑥

①が赤のとき，色の変化が 1 回だけなのは，赤→青の変化が起こった後は色の変化がない場合である。すると，初めて青になる電球は②～⑥のいずれかなので，この場合は${}_5C_1$通りある。

よって，左端が赤色で色の変化が 1 回だけ起きる確率は，$\dfrac{{}_5C_1}{2^6} = \dfrac{5}{64}$である。

(2)　(1)と同様に，①が青のとき色の変化が 1 回だけの確率は$\dfrac{5}{64}$であり，合わせて$\dfrac{5}{64} \times 2 = \dfrac{5}{32}$となる。また，色の変化のない確率は，明らかに$\dfrac{1}{64} \times 2 = \dfrac{1}{32}$である。

よって，色の変化が少なくとも 2 回起きる確率は，$1 - \left(\dfrac{5}{32} + \dfrac{1}{32}\right) = \dfrac{13}{16}$

(3)　色の変化がちょうど n 回起きる確率を$P(n)$とすると，(2)より，

$$P(0) = \frac{1}{32},\ P(1) = \frac{5}{32}$$

同様に考えて，$P(2) = \dfrac{{}_5C_2}{2^6} \times 2 = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16}$，$P(3) = \dfrac{{}_5C_3}{2^6} \times 2 = \dfrac{10}{32} = \dfrac{5}{16}$

$$P(4) = \frac{{}_5C_4}{2^6} \times 2 = \frac{5}{32},\ P(5) = \frac{{}_5C_5}{2^6} \times 2 = \frac{1}{32}$$

(4)　色の変化の回数の期待値を E とすると，

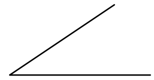
$$E = 0 \times \frac{1}{32} + 1 \times \frac{5}{32} + 2 \times \frac{10}{32} + 3 \times \frac{10}{32} + 4 \times \frac{5}{32} + 5 \times \frac{1}{32} = \frac{5}{2}$$

コメント

この問題は，最初，題意がつかめず，かなりの時間を費やしてしまいました。というのも，赤と青が交互に点滅すると思い込んだためです。いったん，そのような状況になってしまうと，なかなか抜け出せないものです。

問　題

n を正の整数とする。平面を n 本の直線，または 1 回折れ線でいくつかの領域に分けることを考える。ここで直線は両側に無限にのびているものとし，1 回折れ線とは，右図のように直線の途中を 1 回折り曲げたものである。次の問いに答えよ。



（1回折れ線）

(1)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の直線のみで分割されているとする。

(i)　n が 2 以上ならば，どの 2 本の直線も交わる。

(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の直線も同一点では交わらない。

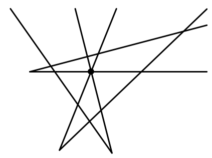
分割される平面の領域の数を L_n で表す。$n \geqq 2$ のとき，L_n と L_{n-1} の間の関係式を求めよ。また，L_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。

(2)　平面が次の条件(i)(ii)をみたす異なる n 本の 1 回折れ線のみで分割されているとする。

(i)　n が 2 以上ならば，どの 2 本の 1 回折れ線も異なる 4 点で交わる。

(ii)　n が 3 以上ならば，どの 3 本の 1 回折れ線も同一点では交わらない(右図を参照せよ)。

分割される平面の領域の数を H_n で表す。H_3 を求めよ。



（同一点で交わる 3本の1回折れ線）

(3)　H_n $(n \geqq 1)$ を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$n-1$ 本の直線で平面が L_{n-1} 個の領域に分割されているとき，条件をみたす直線を 1 本引くと，新たに $n-1$ 個の交点ができ，それによって分割される平面が n 個増える。

$$L_n = L_{n-1} + n \quad (n \geqq 2)$$

$L_1 = 2$ より，$L_n = 2 + (2 + 3 + \cdots + n) = 2 + \dfrac{2+n}{2} \cdot (n-1) = \dfrac{n^2+n+2}{2}$

$n = 1$ をあてはめると，$L_1 = 2$ となり成立するので，$L_n = \dfrac{n^2+n+2}{2}$ $(n \geqq 1)$

(2)　$H_1 = 2$ で，条件をみたす 1 回折れ線を 1 本引くと，交点が 4 個でき，それによって分割される平面が $4+1=5$ 個増える。

$$H_2 = H_1 + 5 = 7$$

さらに，条件をみたす 1 回折れ線をもう 1 本引くと，交点が $4 \times 2 = 8$ 個でき，それによって分割される平面が $8+1=9$ 個増える。

$$H_3 = H_2 + 9 = 16$$

(3)　(2)と同様に考えて，$n-1$本の 1 回折れ線で平面がH_{n-1}個の領域に分割されているとき，条件をみたす 1 回折れ線を 1 本引くと，新たに$4(n-1)$個の交点ができ，それによって分割される平面が$4(n-1)+1=4n-3$個増える。

$$H_n = H_{n-1}+4n-3 \quad (n \geqq 2)$$

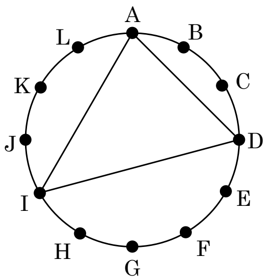
$H_1 = 2$より，$H_n = 2+(5+9+\cdots+4n-3) = 2+\dfrac{5+4n-3}{2}\cdot(n-1) = 2n^2-n+1$

$n=1$をあてはめると，$H_1 = 2$となり成立するので，$H_n = 2n^2-n+1 \quad (n \geqq 1)$

コメント

(1)は参考書などによく載っている問題です。(2)と(3)はこの類題で，見かけに反して，標準的な内容です。

問　題



右図のように円周を 12 等分する点 A, B, C, D, E, F, G, H, I, J, K, L が与えられている。これらの中から相異なる 3 点を選んで線分で結ぶと三角形が得られる。たとえば, A, D, I を選べば, 図のような三角形が得られる。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　正三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(2)　二等辺三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(3)　直角三角形を与えるような 3 点の選び方の総数を求めよ。

(4)　3 点を選んで得られる三角形のうち, 互いに合同でないものは全部でいくつあるか。　[1998]

解答例

(1) 正三角形は, $\triangle$AEI, $\triangle$BFJ, $\triangle$CGK, $\triangle$DHL の 4 つより, 正三角形を与える 3 点の選び方は 4 通りとなる。

(2) 正三角形でない二等辺三角形の総数は, 頂点を 1 つ決めると底辺の決め方は 4 通りずつなので, $4\times 12 = 48$ 通りとなる。(1)と合わせて, $48+4=52$ 通り。

(3) 円の直径が直角三角形の斜辺となることに着目する。まず, 斜辺を 1 つ決めるともう 1 つの頂点の決め方は 10 通りずつとなる。また斜辺の決め方は 6 通りなので, 直角三角形を与える 3 点の選び方は $10\times 6 = 60$ 通りとなる。

(4) 点 A を頂点にもつ三角形を考えても一般性は失われない。

(i)　直角三角形の場合　AG が斜辺となるので, 互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は B, C, D の 3 通りとなる。

(ii) 鈍角三角形の場合　対称性を考えると, 最大辺となるのは AF, AE, AD, AC である。互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は, 最大辺が AF または AE のとき B, C の 2 通りずつ, AD または AC のとき B だけの 1 通りずつ, 合わせて $2\times 2+1\times 2=6$ 通りとなる。

(iii) 鋭角三角形の場合　対称性を考えると, 最大辺となるのは AF, AE である。互いに合同でない三角形の他の頂点の選び方は, 最大辺が AF のとき H, I の 2 通り, AE のとき I だけの 1 通り, 合わせて $2+1=3$ 通りとなる。

(i)(ii)(iii)より, 互いに合同でない三角形は, $3+6+3=12$ 個ある。

コメント

(1)から(3)までは有名問題です。(4)は(3)と同じ考え方をしてみました。

問　題

係数が 0 か 1 である x の整式を，ここでは M 多項式とよぶことにする。整数を係数とする x の整式は，偶数の係数を 0 でおきかえ，奇数の係数を 1 でおきかえると M 多項式になる。2 つの整式は，このおきかえによって等しくなるとき合同であるという。たとえば，$5x^2+4x+3$ と x^2-1 とは対応する M 多項式がともに x^2+1 となるので，合同である。

M 多項式は，2 つの 1 次以上の M 多項式の積と合同になるとき可約であるといい，可約でないとき既約であるという。たとえば，x^2+1 は $(x+1)^2$ と合同であるから，可約である。

(1)　x^2+x+1 は既約な M 多項式であることを示せ。

(2)　1 次から 3 次までの既約な M 多項式をすべて求めよ。

(3)　x^4+x+1 は既約な M 多項式かどうか判定せよ。　[2000]

解答例

(1)　合同を記号「$\equiv$」で表す。まず，1 次の M 多項式は x，$x+1$ だけなので，これらの積は，x^2，$x(x+1)=x^2+x$，$(x+1)^2=x^2+2x+1\equiv x^2+1$ となり，いずれも x^2+x+1 と合同でない。

よって，x^2+x+1 は既約な M 多項式である。

(2)　1 次の M 多項式は，x，$x+1$ でともに既約である。

2 次の M 多項式は，x^2，x^2+1，x^2+x，x^2+x+1 であり，既約なのは(1)より x^2+x+1 だけである。

3 次の M 多項式は，x^3，x^3+1，x^3+x，x^3+x+1，x^3+x^2，x^3+x^2+1，x^3+x^2+x，x^3+x^2+x+1 である。

ここで，3 次の可約な M 多項式は，

$$x^3,\ x^2(x+1)=x^3+x^2,\ x(x+1)^2\equiv x(x^2+1)=x^3+x$$
$$(x+1)^3\equiv(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$$
$$x(x^2+x+1)=x^3+x^2+x$$
$$(x+1)(x^2+x+1)=x^3+2x^2+2x+1\equiv x^3+1$$

よって，3 次の既約な M 多項式は，x^3+x+1，x^3+x^2+1 となる。

以上より，3 次以下の既約な M 多項式は，

$$x,\ x+1,\ x^2+x+1,\ x^3+x+1,\ x^3+x^2+1$$

(3)　定数項が 1 である 4 次の可約な M 多項式をつくると，

$$(x+1)^4=(x+1)^2(x+1)^2\equiv(x^2+1)(x^2+1)=x^4+2x^2+1\equiv x^4+1$$

$$(x+1)^2(x^2+x+1) \equiv (x^2+1)(x^2+x+1) = x^4+x^3+2x^2+x+1$$
$$\equiv x^4+x^3+x+1$$
$$(x+1)(x^3+x+1) = x^4+x^3+x^2+2x+1 \equiv x^4+x^3+x^2+1$$
$$(x+1)(x^3+x^2+1) = x^4+2x^3+x^2+x+1 \equiv x^4+x^2+x+1$$
$$(x^2+x+1)^2 = x^4+2x^3+3x^2+2x+1 \equiv x^4+x^2+1$$

以上より，x^4+x+1 は既約な M 多項式である。

コメント

題意を理解して，既約な M 多項式の積を考えればよいというのを把握するのに時間がかかります。

問　題

下記の各命題についてその真偽を記し，理由を述べよ。

(1)　$\sqrt{7}$ は無理数である。

(2)　和も積も共に 0 でない有理数であるような 2 つの実数 a，b は，共に有理数である。

(3)　無理数は何乗かすると有理数になる。ただし，ここで何乗かするというのは，n を 1 以上のある整数として n 乗することである。

(4)　和も積も共に有理数であるような 2 つの実数 a，b に対して，a^5+b^5 は有理数である。　[2000]

解答例

(1)　命題は真。

（証明）p と q を互いに素な自然数として，$\sqrt{7}=\dfrac{q}{p}$ とおくと，

$$q=\sqrt{7}p,\ \ q^2=7p^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

よって，①より q^2 は 7 の倍数となり，q も 7 の倍数となるので，k を自然数として $q=7k$ とおくことができる。すると①は，

$$49k^2=7p^2,\ \ 7k^2=p^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②より p^2 は 7 の倍数となり，p も 7 の倍数となる。これは p と q が互いに素な自然数という条件に反する。

以上より，$\sqrt{7}\neq\dfrac{q}{p}$ となり，$\sqrt{7}$ は無理数である。

(2)　命題は偽。

（反例）$a=1-\sqrt{7}$，$b=1+\sqrt{7}$ とすると，(1)より a，b は共に無理数であるが，$a+b=2$，$ab=-6$ となり，ともに 0 でない有理数となる。

(3)　命題は偽。

（反例）$(1+\sqrt{7})^n=\displaystyle\sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k(\sqrt{7})^k$ に対して，n を偶奇に分けて考えると，

(i)　$n=2m\ (m\geqq 1)$ のとき

$$(1+\sqrt{7})^n=({}_{2m}\mathrm{C}_0+\cdots+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m}\cdot 7^m)+({}_{2m}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2m}\mathrm{C}_{2m-1}\cdot 7^{m-1})\sqrt{7}$$

(ii)　$n=2m-1\ (m\geqq 1)$ のとき

$$(1+\sqrt{7})^n=({}_{2m-1}\mathrm{C}_0+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-2}\cdot 7^{m-1})+({}_{2m-1}\mathrm{C}_1+\cdots+{}_{2m-1}\mathrm{C}_{2m-1}\cdot 7^{m-1})\sqrt{7}$$

(i)(ii)のいずれも $(1+\sqrt{7})^n$ は有理数でないことを表す。

(4)　命題は真。

（証明）a, b を有理数とすると，$k = a + b$，$l = ab$ は共に有理数である。

$$a^5 + b^5 = (a^2 + b^2)(a^3 + b^3) - a^2b^2(a + b) = (k^2 - 2l)(k^3 - 3kl) - l^2k$$

これより，$a^5 + b^5$ は有理数である。

コメント

教科書にも載っている証明問題です。

問　題

実数 a, b は $0<a<b$ を満たすとする。次の 3 つの数の大小関係を求めよ。

$$\frac{a+2b}{3},\ \sqrt{ab},\ \sqrt[3]{\frac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}$$ [1999]

解答例

まず，$\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2=\dfrac{4b^2-5ab+a^2}{4}=\dfrac{(4b-a)(b-a)}{4}$

$0<a<b$ なので，$\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^2-\left(\sqrt{ab}\right)^2>0$

よって，$\dfrac{a+2b}{3}>\sqrt{ab}$ ………①

また，$\left(\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^3=\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}-\dfrac{(a+2b)^3}{27}$

$$=\frac{b^3-3ab^2+3a^2b-a^3}{27}=\frac{(b-a)^3}{27}$$

$0<a<b$ なので，$\left(\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}\right)^3-\left(\dfrac{a+2b}{3}\right)^3>0$

よって，$\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>\dfrac{a+2b}{3}$ ………②

①②より，$\sqrt[3]{\dfrac{b(a^2+ab+b^2)}{3}}>\dfrac{a+2b}{3}>\sqrt{ab}$

コメント

上の解には書いていませんが，まず $a=1$，$b=4$ として各式の値を計算し，大小関係を予測して解いています。

問　題

(1)　$x \geqq y \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$ が成り立つことを示せ。

(2)　①　不等式 $\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$ が成り立つことを示せ。

②　①の不等式で等号が成り立つのはどのような場合か調べよ。　[1998]

解答例

(1)　$x \geqq y \geqq 0$ から，$x(1+y)-y(1+x)=x-y \geqq 0$ なので，$x(1+y) \geqq y(1+x)$

よって，$\dfrac{x}{1+x} \geqq \dfrac{y}{1+y}$

(2)　まず，$|x|+|y|+|z| \geqq |x+y|+|z| \geqq |x+y+z|$ より，(1)を用いて，

$$\frac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \geqq \frac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|} \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\dfrac{|x|}{1+|x|} \geqq \dfrac{|x|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots②$

$$\frac{|y|}{1+|y|} \geqq \frac{|y|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots③,\quad \frac{|z|}{1+|z|} \geqq \frac{|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots④$$

②＋③＋④より，$\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x|+|y|+|z|}{1+|x|+|y|+|z|} \cdots\cdots\cdots⑤$

①⑤より，$\dfrac{|x|}{1+|x|}+\dfrac{|y|}{1+|y|}+\dfrac{|z|}{1+|z|} \geqq \dfrac{|x+y+z|}{1+|x+y+z|}$

ここで，②の等号成立は，$|y|+|z|=0$ または $|x|=0$，すなわち $y=z=0$ または $x=0$ のときである。

また，③の等号成立は，$|x|+|z|=0$ または $|y|=0$，すなわち $x=z=0$ または $y=0$ のときである。

さらに，④の等号成立は，$|x|+|y|=0$ または $|z|=0$，すなわち $x=y=0$ または $z=0$ のときである。

以上をまとめると，$x,\ y,\ z$ の少なくとも 2 つが 0 のときである。このとき，①の等号も成立する。

求める等号成立条件は，x, y, z の少なくとも 2 つが 0 である。

コメント

(2)は(1)の利用の方法がポイントとなりますが，三角不等式に気づかないと難しいでしょう。有名問題なので，経験がものを言います。