$\boxed{5}$　　［信州大・医］

n を 2 以上の自然数とする。n 人でじゃんけんをする。各人はグー，チョキ，パーをそれぞれ $\dfrac{1}{3}$ の確率で出すものとする。勝者が 1 人に決まるまでじゃんけんを繰り返す。ただし，負けた人はその後のじゃんけんには参加しない。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　1 回目のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

(2)　1 回目のじゃんけんで，あいこになる確率を求めよ。

(3)　$n=5$ のとき，ちょうど 2 回のじゃんけんで，勝者がただ 1 人に決まる確率を求めよ。

$\boxed{6}$ ［東北大・理］

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a,\ b,\ c$ がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2) $a,\ b,\ c$ がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

7　　　　［東京大・文］

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い, 2 連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で, 1 試合目の勝者と, 1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は $\dfrac{1}{2}$ で, 引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

8　　［名古屋大・理］

玉が 2 個ずつ入った 2 つの袋 A, B があるとき，袋 B から玉を 1 個取り出して袋 A に入れ，次に袋 A から玉を 1 個取り出して袋 B に入れる，という操作を 1 回の操作と数えることにする。A に赤玉が 2 個，B に白玉が 2 個入った状態から始め，この操作を n 回繰り返した後に袋 B に入っている赤玉の個数が k 個である確率を $P_n(k)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_1(k)$ を求めよ。

(2)　$k=0,\ 1,\ 2$ に対する $P_n(k)$ を求めよ。

9　　　　［広島大・文］

n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　変量 x のデータの値が x_1，x_2，…，x_n であるとし，$f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1，x_2，…，x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1，x_2，…，x_n の分散であることを示せ。

(2)　c を定数として，変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき y_1，y_2，…，y_n の分散が z_1，z_2，…，z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3)　変量 x のデータの値が x_1，x_2，…，x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする。x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値を x_{n+1}，$\overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4)　次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった。このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ。

5　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［信州大・医］

(1) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，勝者がただ 1 人に決まるのは，勝者の選び方が ${}_n\mathrm{C}_1 = n$ 通りで，手の出方が 3 通りである。

これより，この場合の確率は，$\dfrac{n\cdot 3}{3^n} = \dfrac{n}{3^{n-1}}$ である。

(2) n 人で 1 回じゃんけんを行うとき，あいこにならないのは，2 種類の手が出た場合である。このとき，種類の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2 = 3$ 通り，出方が $2^n - 2$ 通りとなり，その確率は，$\dfrac{3(2^n-2)}{3^n} = \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}}$ である。

よって，あいこになる確率は，$1 - \dfrac{2^n-2}{3^{n-1}} = \dfrac{3^{n-1}-2^n+2}{3^{n-1}}$ である。

(3) 5 人でじゃんけんをし，2 回のじゃんけんで勝者がただ 1 人に決まるのは，

(i) 5 人→5 人→1 人のとき

5 人→5 人の確率は(2)より $\dfrac{3^4-2^5+2}{3^4} = \dfrac{17}{3^3}$，5 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{5}{3^4}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{17}{3^3}\cdot\dfrac{5}{3^4} = \dfrac{85}{3^7}$ である。

(ii) 5 人→4 人→1 人のとき

5 人→4 人は敗者がただ 1 人決まると考え，その確率は(1)から $\dfrac{5}{3^4}$，4 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{4}{3^3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{5}{3^4}\cdot\dfrac{4}{3^3} = \dfrac{20}{3^7}$ である。

(iii) 5 人→3 人→1 人のとき

5 人→3 人は勝者の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3 = 10$ 通り，手の出方が 3 通りより，その確率は $\dfrac{10\cdot 3}{3^5} = \dfrac{10}{3^4}$ となる。3 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{3}{3^2}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{3}{3^2} = \dfrac{30}{3^6}$ である。

(iv) 5 人→2 人→1 人のとき

5 人→2 人は敗者が 3 人決まると考え，その確率は(iii)から $\dfrac{10}{3^4}$，2 人→1 人の確率は(1)より $\dfrac{2}{3}$ となる。これより，この場合の確率は $\dfrac{10}{3^4}\cdot\dfrac{2}{3} = \dfrac{20}{3^5}$ である。

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{85}{3^7} + \dfrac{20}{3^7} + \dfrac{30}{3^6} + \dfrac{20}{3^5} = \dfrac{375}{3^7} = \dfrac{125}{729}$

［解　説］

じゃんけんを題材としたよく見かける確率問題ですが，意外なほど手こずります。

6　　［東北大・理］

(1)　$a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは，斜辺の長さが c のとき，

$$a^2+b^2=c^2\cdots\cdots\cdots①$$

そこで，a^2 と b^2，およびその和をまとめると，右表のようになる。

a^2 \\ b^2	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

すると，和が平方数なのは 25 だけより，①を満たすのは，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$$

また，斜辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様なので，求める直角三角形となる確率は，$\dfrac{2\times3}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2)　$a,\ b,\ c$ が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは，最大辺の長さが c のとき，

$$a+b>c\cdots\cdots\cdots②,\quad a^2+b^2<c^2\cdots\cdots\cdots③$$

まず，$c=1,\ 2$ では成立しないので $c\geqq3$ となり，それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i)　$c=3$ のとき

②より $a+b>3$，③より $a^2+b^2<9$ から，$(a,\ b)=(2,\ 2)$

(ii)　$c=4$ のとき

②より $a+b>4$，③より $a^2+b^2<16$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(iii)　$c=5$ のとき

②より $a+b>5$，③より $a^2+b^2<25$ から，$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

(iv)　$c=6$ のとき

②より $a+b>6$，③より $a^2+b^2<36$ から，

$$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3)$$

(i)～(iv)より，$(a,\ b)$ の組は $1+2+3+7=13$ 通りとなる。

また，最大辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様に 13 通りずつなので，求める鈍角三角形となる確率は，$\dfrac{13\times3}{6^3}=\dfrac{13}{72}$ である。

［解　説］

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。このような場合は，表を作ると数えもれが防げます。

7　　［東京大・文］

(1)　5 試合目で A が優勝するのは, 4 試合目の対戦までどのチームも 2 連勝せず, しかも 4 試合目と 5 試合目に A が勝つ場合である。

そこで, 各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと,

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBAA の場合となり, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCAB…となり, この場合は不適。

(i)(ii)より, 5 試合目で A が優勝する確率は $\frac{1}{32}$ である。

(2)　n 試合目 $(n\geqq 2)$ で A が優勝する場合, その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で, n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより, n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると,

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (n\text{ が }3\text{ の倍数でないとき}),\ \ p(n)=0\ (n\text{ が }3\text{ の倍数のとき})$$

(3)　l を正の整数とするとき, (2)より,

(i)　n を 3 で割った余りが 2 $(n=3l-1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 $(n=3l+1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii)　n を 3 で割った余りが 0 $(n=3l)$ のとき　$p(n)=0$

さて, m を正の整数とするとき, 総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m とすると, $m\geqq 2$ のとき,

$$\begin{aligned}P_m&=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}+0=2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^l+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^l\\&=2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}\\&=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}\end{aligned}$$

ここで, $m=1$ をあてはめると, $P_1=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$ となり, 成立している。

したがって, $P_m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$ である。

［解　説］

巴戦を題材にした有名問題です。誘導がたいへん丁寧です。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　袋Aに赤玉2個，袋Bに白玉2個の状態から始めて，与えられた操作を1回行った後，袋Bの赤玉の個数がk個である場合について，その確率$P_1(k)$は，

(i)　$k=0$のとき　B→Aに白，次にA→Bに白の場合より，$P_1(0)=1\times\frac{1}{3}=\frac{1}{3}$

(ii)　$k=1$のとき　B→Aに白，次にA→Bに赤の場合より，$P_1(1)=1\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

(iii)　$k=2$のとき　この場合は起こりえないので，$P_1(2)=0$

(2)　袋Bの赤玉の個数がk個である場合について，

(i)　与えられた操作をn回行った後，$k=0$のときに操作をもう1回行うとき

(1)から，$k=0$となる確率は$\frac{1}{3}$，$k=1$となる確率は$\frac{2}{3}$

(ii)　与えられた操作をn回行った後，$k=1$のときに操作をもう1回行うとき

$k=0$となるのは，B→Aに赤，次にA→Bに白の場合より，その確率は$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

$k=1$となるのは，B→Aに赤，次にA→Bに赤の場合，もしくはB→Aに白，次にA→Bに白の場合より，その確率は$\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}+\frac{1}{2}\times\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$

$k=2$となるのは，B→Aに白，次にA→Bに赤の場合より，その確率は$\frac{1}{2}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$

(iii)　与えられた操作をn回行った後，$k=2$のときに操作をもう1回行うとき

(i)と同様に考えて，$k=2$となる確率は$\frac{1}{3}$，$k=1$となる確率は$\frac{2}{3}$

(i)〜(iii)より，$P_n(k)$と$P_{n+1}(k)$の関係は，$P_n(0)+P_n(1)+P_n(2)=1$に留意すると，

$$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{6}P_n(1)\cdots\cdots\cdots①$$

$$P_{n+1}(1)=\frac{2}{3}P_n(0)+\frac{2}{3}P_n(1)+\frac{2}{3}P_n(2)=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 2)$となり，(1)から$P_1(1)=\frac{2}{3}$なので，$P_n(1)=\frac{2}{3}\ (n\geqq 1)$

①に代入すると，$P_{n+1}(0)=\frac{1}{3}P_n(0)+\frac{1}{9}$となり，$P_{n+1}(0)-\frac{1}{6}=\frac{1}{3}\left\{P_n(0)-\frac{1}{6}\right\}$

$$P_n(0)-\frac{1}{6}=\left\{P_1(0)-\frac{1}{6}\right\}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

したがって，$P_n(0)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$となり，

$$P_n(2)=1-P_n(0)-P_n(1)=1-\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n-\frac{2}{3}=\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

［解　説］

確率と漸化式について，よく見かける頻出問題です。

9　　［広島大・文］

(1)　x_1，x_2，…，x_n の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 とすると，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\overline{x^2}-2a\overline{x}+a^2=(a-\overline{x})^2+\overline{x^2}-(\overline{x})^2=(a-\overline{x})^2+s^2$$

よって，$f(a)$ は $a=\overline{x}$ のとき最小となり，最小値は s^2 である。

(2)　$z_k=cy_k$ で，y_1，y_2，…，y_n の平均を $\overline{y}$，z_1，z_2，…，z_n の平均を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cy_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y}$$

また，y_1，y_2，…，y_n の分散を ${s_y}^2$，z_1，z_2，…，z_n の分散を ${s_z}^2$ とすると，

$${s_z}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(cy_k)^2-(c\overline{y})^2=c^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2-c^2(\overline{y})^2=c^2{s_y}^2$$

条件 ${s_y}^2>{s_z}^2$ から，${s_y}^2>c^2{s_y}^2$ となり $c^2<1$，すなわち $-1<c<1$ である。

(3)　$\overline{x}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k$ より，$\sum_{k=1}^{n}x_k=n\overline{x}$ となり，x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値は，

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1}x_k=\frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}x_k+x_{n+1}\right)=\frac{1}{n+1}(n\overline{x}+x_{n+1})$$

(4)　与えられた 40 個のデータに，値 40 のデータを新たに加えたときを考える。

40 個のデータの平均値は 40 なので，41 個のデータの平均値は，

$$\frac{1}{41}(40\cdot40+40)=40$$

40 個のデータの分散は 670 なので，41 個のデータの分散は，

$$\frac{1}{41}\{670\cdot40+(40-40)^2\}\fallingdotseq653.6\cdots$$

よって，小数第 1 位を四捨五入すると，654 である。

40 個のデータの中央値は，小さい方から 20 番目(30)と 21 番目(40)の平均値から 35 なので，41 個のデータの中央値は 21 番目より 40 である。

［解 説］

データの分析に関して，平均値や分散などの定義の確認問題です。