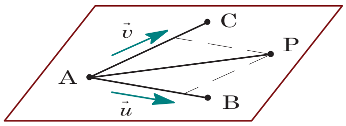
第 2 講　平面の方程式

平面は，異なる 3 点によって決定されます。この 3 点を A, B, C とし，平面 ABC に含まれる任意の点を P とおきます。



$\overrightarrow{AP}=t'\overrightarrow{AB}+s'\overrightarrow{AC}$ （t'，s' は実数）

点 P の始点を原点 O に変更すると，

$\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{OA}=t'\overrightarrow{AB}+s'\overrightarrow{AC}$，$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t'\overrightarrow{AB}+s'\overrightarrow{AC}$ （t'，s' は実数）

ここで，直線 AB, AC に平行なベクトルをそれぞれ $\vec{u}$，$\vec{v}$ $(\vec{u}\neq\vec{0},\ \vec{v}\neq\vec{0})$ とすると，$\vec{u}$，$\vec{v}$ は互いに平行でなく，$\vec{u}$ は $\overrightarrow{AB}$ の実数倍，$\vec{v}$ は $\overrightarrow{AC}$ の実数倍なので，$t'\overrightarrow{AB}=t\vec{u}$，$s'\overrightarrow{AC}=s\vec{v}$ とおくことができ，

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}+s\vec{v}$ （t, s は実数）

と表すことができます。

平面のパラメータ表示

点 A を通り，互いに平行でない 2 つのベクトル $\vec{u}$，$\vec{v}$ を含む平面

$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OA}+t\vec{u}+s\vec{v}$ （t, s は実数）

$P(x,\ y,\ z)$，$A(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{u}=(a',\ b',\ c')$，$\vec{v}=(d',\ e',\ f')$ とおくと，

$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(a',\ b',\ c')+s(d',\ e',\ f')$ （t, s は実数）

《注》パラメータ t, s を消去して x, y, z の関係を求めると，次式が得られます。

$$(b'f'-c'e')(x-x_0)+(c'd'-a'f')(y-y_0)+(a'e'-b'd')(z-z_0)=0$$

例題 3　$O(0,\ 0,\ 0)$, $A(0,\ 0,\ 1)$, $P(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$, $Q(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)$ とするとき，点 A から平面 OPQ に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　点 H は平面 OPQ 上の点より，

$\overrightarrow{OH}=t\overrightarrow{OP}+s\overrightarrow{OQ}=t(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)+s(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)=(2\sqrt{2}t+\sqrt{2}s,\ \sqrt{5}s,\ s)$

すると，$\overrightarrow{AH}=(2\sqrt{2}t+\sqrt{2}s,\ \sqrt{5}s,\ s-1)$ となる。

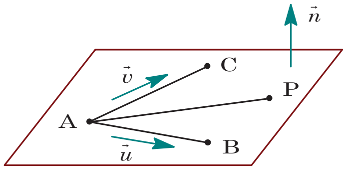
直線 AH は平面 OPQ に垂直なので，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OP}=0$，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ より，

$2\sqrt{2}(2\sqrt{2}t+\sqrt{2}s)=0$，$2t+s=0$ ………①

$\sqrt{2}(2\sqrt{2}t+\sqrt{2}s)+\sqrt{5}\cdot\sqrt{5}s+(s-1)=0$，$4t+8s-1=0$ ………②

①②より，$s=\dfrac{1}{6}$，$t=-\dfrac{1}{12}$ となるので，$H\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$である。

次に，点 A を通り，$\vec{u}$，$\vec{v}$ を含む平面に対して，垂直なベクトルを $\vec{n}$ $(\vec{n} \neq \vec{0})$ とすると，



$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{u} + s\vec{v})$$
$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{n}\cdot\vec{u} + s\vec{n}\cdot\vec{v}$$

となります。この $\vec{n}$ を平面 ABC の法線ベクトルといいます。

ここで，$\vec{n}\cdot\vec{u} = 0$，$\vec{n}\cdot\vec{v} = 0$ から，

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}},\quad \vec{n}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}) = 0$$

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

展開してまとめると，一般的に，$ax + by + cz + d = 0$ と表せます。

平面の方程式

点 $\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り，ベクトル $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ に垂直な平面の方程式

$$a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$$

《注》パラメータ t, s を消去して導いた方程式と比較すると，

$$a = b'f' - c'e',\quad b = c'd' - a'f',\quad c = a'e' - b'd'$$

数学 C の範囲になりますが，行列 A の行列式を $\det A$ としたとき，

$$a = \det\begin{pmatrix} b' & e' \\ c' & f' \end{pmatrix},\quad b = \det\begin{pmatrix} c' & f' \\ a' & d' \end{pmatrix},\quad c = \det\begin{pmatrix} a' & d' \\ b' & e' \end{pmatrix}$$

と表すことができます。

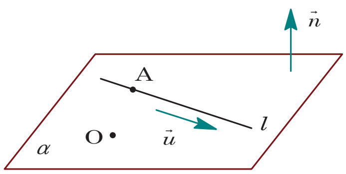
例題 4　原点 O と直線 $l : \dfrac{x+1}{-3} = 1 - y = \dfrac{z-4}{2}$ を含む平面 α の方程式を求めよ。

$\boxed{\text{解}}$　l は $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 4)$ を通り，方向ベクトル $\vec{u} = (-3,\ -1,\ 2)$ の直線である。

平面 α の法線ベクトルを $\vec{n} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，$\vec{u}\cdot\vec{n} = 0$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{n} = 0$ より，

$$-3a - b + 2c = 0 \cdots\cdots ①,\quad -a + b + 4c = 0 \cdots\cdots ②$$

①②より，$a = \dfrac{3}{2}c$，$b = -\dfrac{5}{2}c$ となり，



$$\vec{n} = \left(\frac{3}{2}c,\ -\frac{5}{2}c,\ c\right) = \frac{c}{2}(3,\ -5,\ 2)$$

よって，平面 α の方程式は，

$$3(x - 0) - 5(y - 0) + 2(z - 0) = 0$$
$$3x - 5y + 2z = 0$$

問題 3

平面$\alpha : 2x+3y-z-4=0$と平面$\beta : 4x-y+2z-3=0$の交線，および点$(2,\ 1,\ -1)$を含む平面γの方程式を求めよ。

問題 4

点$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$と平面$ax+by+cz+d=0$の距離を$h$とすると，

$$h=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

であることを示せ。

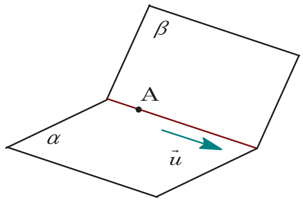
第2講　平面の方程式

問題3

$\alpha : 2x+3y-z-4=0 \cdots\cdots$①，$\beta : 4x-y+2z-3=0 \cdots\cdots$②に対して，

まず，z を消去すると，$8x+5y-11=0$

$$x=\frac{5y-11}{-8} \cdots\cdots\cdots ③$$



また，y を消去すると，$14x+5z-13=0$

$$x=\frac{5z-13}{-14} \cdots\cdots\cdots ④$$

よって，平面α と平面β の交線は，③④より，

$$x=\frac{5y-11}{-8}=\frac{5z-13}{-14},\quad \frac{x}{5}=\frac{y-\frac{11}{5}}{-8}=\frac{z-\frac{13}{5}}{-14}$$

すなわち，この交線は点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{11}{5},\ \frac{13}{5}\right)$を通り，方向ベクトル$\vec{u}=(5,\ -8,\ -14)$の直線となる。

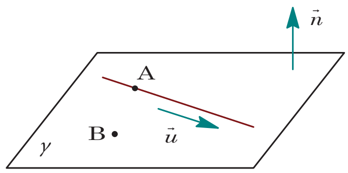
ここで，$\mathrm{B}(2,\ 1,\ -1)$とすると，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(2,\ -\frac{6}{5},\ -\frac{18}{5}\right)=\frac{2}{5}(5,\ -3,\ -9)$

さて，平面γ の法線ベクトルを$\vec{n}=(a,\ b,\ c)$とおくと，$\vec{u}\cdot\vec{n}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{n}=0$より，

$$5a-8b-14c=0 \cdots\cdots ⑤,\quad 5a-3b-9c=0 \cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥より，$b=-c$，$a=\frac{6}{5}c$ となり，

$$\vec{n}=\left(\frac{6}{5}c,\ -c,\ c\right)=-\frac{c}{5}(-6,\ 5,\ -5)$$



よって，平面γ の方程式は，

$$-6(x-2)+5(y-1)-5(z+1)=0$$

$$-6x+5y-5z+2=0$$

《注》次のような解法もあります。

まず，平面β は点$(2,\ 1,\ -1)$を含まないので，2 平面α，β の交線を含む平面は，k を定数として，

$$2x+3y-z-4+k(4x-y+2z-3)=0 \cdots\cdots\cdots (*)$$

$(*)$が点$(2,\ 1,\ -1)$を含むので，

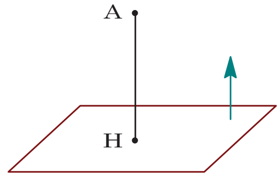
$$2\times2+3\times1-(-1)-4+k\{4\times2-1+2\times(-1)-3\}=0$$

よって，$4+2k=0$ より $k=-2$ となり，$(*)$に代入すると，平面γ の方程式は，

$$2x+3y-z-4-2(4x-y+2z-3)=0,\quad -6x+5y-5z+2=0$$

問題 4

点 A$(x_0,\ y_0,\ z_0)$を通り，平面$ax+by+cz+d=0$……①に垂直な直線は，その方向ベクトルの成分を$(a,\ b,\ c)$とすることができるので，



$$(x,\ y,\ z)=(x_0,\ y_0,\ z_0)+t(a,\ b,\ c)\cdots\cdots\cdots②$$

②を①に代入して，

$$a(x_0+at)+b(y_0+bt)+c(z_0+ct)+d=0$$

$$(a^2+b^2+c^2)t+ax_0+by_0+cz_0+d=0,$$

よって，$t=-\dfrac{ax_0+by_0+cz_0+d}{a^2+b^2+c^2}$となり，この値を$t=t_0$とおく。

すると，垂線の足はH$(x_0+at_0,\ y_0+bt_0,\ z_0+ct_0)$と表すことができ，

$$h=\mathrm{AH}=\sqrt{(x_0+at_0-x_0)^2+(y_0+bt_0-y_0)^2+(z_0+ct_0-z_0)^2}$$

$$=\sqrt{t_0{}^2(a^2+b^2+c^2)}=|t_0|\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{|-(ax_0+by_0+cz_0+d)|}{a^2+b^2+c^2}\cdot\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

$$=\frac{|ax_0+by_0+cz_0+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

《注》上の式は「点と平面の距離」の公式と呼ばれています。