《2018 入試対策》

東北大学

文系数学

1998―2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された東北大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 ，2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2013 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 東北大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

１　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

２　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1 $p,\ q$ を実数とする。関数 $f(x)=x^2+px+q$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が 0 以上となる点 $(p,\ q)$ 全体からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) pq 平面上に領域 D を図示せよ。

(2) D の点 $(p,\ q)$ で $q\leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。 [2017]

2 放物線 $C: y=-\dfrac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=-2|x|+k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。

(2) $a,\ b$ を実数とする。関数 $y=-2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。

(3) (2)で求めた領域 D の面積を求めよ。 [2016]

3 実数 x, y に対して，$A=2\sin x+\sin y$，$B=2\cos x+\cos y$ とおく。

(1) $\cos(x-y)$ を A, B を用いて表せ。

(2) x, y が $A=1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ。 [2014]

4 a を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ。 [2013]

5 関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\right|$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1) $t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおく。$f(x)$ を t の関数として表せ。

(2) x が $0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) x が $0^\circ\leqq x\leqq 90^\circ$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また, $f(x)$ が最大値をとる x は，$60^\circ< x< 75^\circ$ を満たすことを示せ。 [2012]

6　以下の問いに答えよ。

(1)　実数 x に関する連立不等式 $x \geqq -1$, $2\cdot 3^{x} + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　$x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式 $3^{x} + a\cdot 3^{-x} \geqq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。　[2011]

7　すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2} + 2^{x}a + 1 - a > 0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。　[2009]

8　a, b, c, d, e を実数とする。多項式 $f(x) = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとき，a, b, c, d, e の値を求めよ。

(i)　$x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right) = f(x)$　(ii)　$f(1-x) = f(x)$　(iii)　$f(1) = 1$　[2008]

9　定数 a, b, c, p, q を整数とし，次の x と y の 3 つの多項式

$$P = (x+a)^2 - 9c^2(y+b)^2,\ Q = (x+11)^2 + 13(x+11)y + 36y^2$$
$$R = x^2 + (p+2q)xy + 2pqy^2 + 4x + (11p - 14q)y - 77$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1)　多項式 P, Q, R を因数分解せよ。

(2)　P と Q, Q と R, R と P は，それぞれ x, y の 1 次式を共通因数としてもっているものとする。このときの整数 a, b, c, p, q を求めよ。　[2006]

10　複素数 z, w が条件 $\dfrac{1}{z-i} + \dfrac{1}{z+i} = \dfrac{1}{w}$ を満たしている。ただし，$z \neq \pm i$，$w \neq 0$ である。z の実部，虚部をそれぞれ x, y とし，w の実部，虚部をそれぞれ u, v とする。

(1)　$(z-w)^2$ を u と v で表せ。

(2)　$u = 0$ ならば，$x = 0$ であることを示せ。

(3)　$u > 0, v > 0$，かつ w^2 の実部が 1 となるような x を求め，u を用いて表せ。[2004]

11　実数 a に対して，集合 A, B を

$$A = \left\{x \mid x^2 + (1-a^2)x + a^3 - 2a^2 + a \leqq 0,\ x\text{は実数}\right\}$$
$$B = \left\{x \mid x^2 + (2a-7)x + a^2 - 7a + 10 < 0,\ x\text{は実数}\right\}$$

と定める。共通部分 $A \cap B$ が空集合でないための a の範囲を求めよ。　[2003]

12 　2 つの関数を

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\quad y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

(1)　$\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2)　y を t の関数で表せ。

(3)　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ。 [2003]

13 　$a,\ b$ は実数であり, 方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし, $i=\sqrt{-1}$ とする。このとき $a,\ b$ を求めよ。また, このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

14 　$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ として, x の関数 $f(x)$ を $f(x)=x^2+\dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x-2\sin\theta$ と定める。x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく。

(1)　θ が $\cos\theta\geqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす場合に, $m(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ。

(2)　$m(\theta)$ が最小となる θ の値と, そのときの最小値を求めよ。 [2002]

15 　等式 $x^2+(i-2)x+2ab+\left(\dfrac{b}{2}-2a\right)i=0$ を満たす実数 $a,\ b$ が存在するような, 実数 x の範囲を求めよ。ただし, $i=\sqrt{-1}$ である。 [2000]

16 　$|x^2-3x+1|>|x^2-1|-|2x-1|$ を満たす x の範囲を求めよ。 [2000]

17 　三つの角 $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ $(-90^\circ<\alpha,\ \beta,\ \gamma<90^\circ)$ が

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

を満たすとき, $\alpha+\beta+\gamma$ の値をすべて求めよ。 [1999]

18 　p を 0 でない実数とし, 2 次方程式 $x^2-px+5p=0$ を考える。

(1)　$x^2-px+5p=0$ の解 $\alpha,\ \beta$ が $\alpha^5+\beta^5=p^5$ を満たすとする。このときの p の値を求めよ。

(2)　$x^2-px+5p=0$ が虚数解をもち, その 5 乗が実数になるとする。このときの p の値を求めよ。 [1999]

■ 微分と積分

1 　$a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1)　$M(a)$ を求めよ。

(2)　実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3)　a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。　[2015]

2 　曲線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線を l_1，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線を l_2 とする。ただし，$a<b$ とする。l_1 と l_2 の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

(1)　R の座標を a と b を用いて表せ。

(2)　S を a と b を用いて表せ。

(3)　l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。　[2014]

3 　t は $0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数とする。放物線 $y=x^2$，直線 $x=1$，および x 軸とで囲まれた図形を A，放物線 $y=4(x-t)^2$ と直線 $y=1$ とで囲まれた図形を B とする。A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(t)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq t\leqq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2013]

4 　a を正の実数とし，$a\neq\dfrac{1}{2}$ とする。曲線 $C: y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし，点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。l と m の交点が C 上にあるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値を求めよ。

(2)　2 直線 l，m と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

[2012]

5 放物線 $y=x^2$ の 2 本の接線 $l,\ m$ は垂直であるとする。

(1) l の接点の座標が $(a,\ a^2)$ で与えられるとき，$l,\ m$ の交点の座標を a を用いて表せ。

(2) $l,\ m$ が y 軸に関して対称なとき，$l,\ m$ および放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2011]

6 a を実数とし，$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1) a の値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3) a が(1)で求めた範囲を動くとき，$y=f(x)$ の極大値を与える x について，点 $(x,\ f(x))$ が xy 平面上に描く図形を図示せよ。 [2008]

7 関数 $f(x)$ が，$f(x)=x^2-x\int_0^2|f(t)|dt$ を満たしているとする。このとき，$f(x)$ を求めよ。 [2007]

8 連立不等式 $1\leqq x\leqq 2,\ y\leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また，a を定数とし，不等式 $y\geqq x^2-3ax+2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) (1)の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。 [2006]

9 2 つの曲線 $C:y=-x^2$ と $D:y=(x-a)^2+b$ が 1 点で接している。曲線 D と曲線 $E:y=\dfrac{1}{2}(x-1)^2+1$ によって囲まれる部分の面積 S が最小となるように実数 $a,\ b$ を定め，そのときの S を求めよ。 [2005]

10 曲線 $C:y=x^2-2$ と直線 $L:y=x$ があり，曲線 $D:y=-(x-a)^2+b$ が L と接している。C と L の 2 つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき，以下の問いに答えよ。

(1) b を a で表し, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線 C と D によって囲まれる図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) a が動くとき, (2)の面積 $S(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2004]

11　$t \geqq 1$ において，関数 $f(t)=\int_{-1}^{1}|(x-t+2)(x+t)|dx$ を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ。　[2002]

12　2 つの放物線 $C: y=-(x+1)^2$ と $D: y=(x-1)^2+1$ の 2 本の共通接線を求めよ。また, C, D の 2 本の共通接線と C の囲む部分の面積を求めよ。　[2001]

13　a を正の定数とする。$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ一つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また，そのときの $f(x)$ を求めよ。

[1999]

14　2 つの曲線 $y=x^2$ と $y=-\frac{1}{2}x^2+\frac{3}{2}x+3$ で囲まれた図形を S とする。ただし，S は境界を含むものとする。

(1)　S の面積を求めよ。

(2)　直線 $y=x+k$ が, S と共通部分を持つための k の範囲を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　放物線 $C: y=x^2$ に対して，以下の問いに答えよ。

(1)　C 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ を通り，P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　l を(1)で求めた直線とする。$a\neq 0$ のとき，直線 $x=a$ を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し，F の座標を求めよ。　[2010]

2　不等式 $2y>x+1+3|x-1|$ が表す座標平面上の領域を D とする。実数 a に対して，放物線 C を $y=x^2-2ax+a^2+a+2$ で定める。このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ。　[2009]

3　xy 平面の 3 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ \sqrt{3})$ を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して，点 $\mathrm{P}(x,\ a)$ が△ABC に含まれるための x の範囲を求めよ。

(2)　(1)の定数 a に対して, (1)で求められた範囲を x が動くとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と, そのときの x の値を求めよ。

(3)　点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が△ABC に含まれるとき，$\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$ の最小値と, そのときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。　[2007]

4　放物線 $y=(x-p)^2-2$ が，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 2)$，$(0,\ 2)$ を頂点とする三角形と交わるような実数 p の範囲を求めよ。　[2001]

5　2 つの正の数 a, b に対し, xy 平面上の 3 点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ b)$，$\mathrm{C}(a,\ 0)$ とする。$0<t<1$ である各 t に対し, 線分 AB と BC を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$ とし，さらに線分 $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)$ を $t:1-t$ に内分する点を $\mathrm{R}(t)$ とし，点 $\mathrm{R}(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ の描く曲線を R とする。ただし，$\mathrm{R}(0)=\mathrm{A}$，$\mathrm{R}(1)=\mathrm{C}$ とする。

(1)　曲線 R を x と y で表せ。

(2)　2 点 $\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$ を結ぶ直線 $l(t)$ の方程式を求め，$l(t)$ が，点 $\mathrm{R}(t)$ で曲線 R に接することを示せ。

(3)　三角形 ABC 内で直線 $l(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$ が通る点の領域を図示し，その面積 S を求めよ。ただし，$l(0)$ は点 A, B を通る直線とし，$l(1)$ は点 B, C を通る直線とする。

[2000]

6　2 点 $\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ を考える。線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が $\angle\mathrm{OPB}=\angle\mathrm{QPA}$（O：原点）をみたしている。直線 OP の傾きを m として, Q の x 座標を m を用いて表せ。　[1998]

■ 図形と計量

1　鋭角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ADF}$ であることを示せ。　[2016]

2 $t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1) 三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2) 三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3) 辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。 [2015]

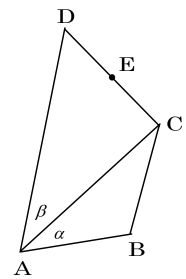
3 $\angle\mathrm{C}$ を直角とする直角三角形 ABC に対して，$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。$\angle\mathrm{A}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\sin\theta$ を求めよ。

(2) $\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

[2007]

4 すべての内角が 180° より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=r$，$\mathrm{AD}=2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形 $\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{ACE}$, $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積はすべて等しいとする。$\alpha=\angle\mathrm{BAC}$，$\beta=\angle\mathrm{CAD}$ とおく。



(1) $\alpha=\beta$ を示せ。

(2) $\cos\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle\mathrm{CAE}$ の値を求めよ。

[2005]

5 四角形 OABC は辺 OA を下底，辺 CB を上底とし，$\angle\mathrm{AOC}$ と $\angle\mathrm{OAB}$ が等しい等脚台形である。$a=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$，$c=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$，$m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1) $m<\dfrac{a^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 等脚台形 OABC の面積 S を a, c, m を用いて表せ。

(3) 対角線 OB と AC の交点を D とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

[2004]

■ ベクトル

1　s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。 [2017]

2　平面上で原点 O と 3 点 A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(-1,\ 1)$ を考える。実数 $s,\ t$ に対し，点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ により定める。以下の問いに答えよ。

(1) $s,\ t$ が条件 $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P$(x,\ y)$ の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が(1)で求めた範囲 D を動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ。 [2016]

3　t を正の実数とする。三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M，辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする。線分 AN と線分 BM の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表せ。

(2) 直線 OP は線分 BM と直交し，かつ $\angle$AOB の二等分線であるとする。このとき，辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ。 [2014]

4　四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。 [2013]

5 平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 p, q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$を満たす実数$p, q$を求めよ。

(2) 平面上のベクトル$\vec{x}$が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq 1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq 2$を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。 [2012]

6 三角形 OAB の辺 AB を$1:2$に内分する点を C とする。動点 D は$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x\geqq 1)$を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

(1) 実数yを$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S, 三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$の最大値と，そのときのxを求めよ。 [2011]

7 四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M, 辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式$\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式$|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$を満たしながら動くとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$であることを示せ。 [2010]

8 辺 AB の長さが 1, ∠A が直角となる三角形△ABC がある。辺 BC 上を点 C から点 B まで動く点 D を考え，内積$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$を$t$とおく。以下の問いに答えよ。

(1) tの動く範囲を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$が成り立つとき，$t$の値を求めよ。 [2009]

9　図 1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha = \angle BCD$）とし，$0° < \alpha < 120°$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　図 2 において，A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。

(2)　$\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ。

(3)　H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。　[2006]

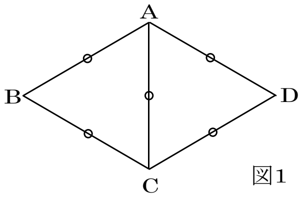


図1

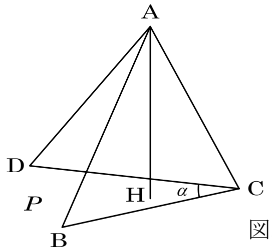


図2

10　$0 < t < \dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i)　$(1-t)\vec{a} + t\vec{b} = \vec{e}$　　(ii)　$(1-t)(\vec{a} + \vec{e}) = t(\vec{b} + \vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x} - \vec{a}$ と $\vec{x} - \vec{b}$ が垂直で長さの比が $t : 1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x} \cdot \vec{e}$ を t で表せ。　[2005]

11　三角形 ABC において，$AB = 1$，$AC = 2$，$\angle A = 60°$ とする。正の数 m, n に対し，辺 BC, CA, AB を $m : n$ の比に内分する点を順に D, E, F とする。

(1)　$\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{EF}$ が垂直であるときの比 $m : n$ を求めよ。

(2)　どのような正の整数 m, n に対しても，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{EF}$ は垂直でないことを示せ。

[2003]

12　四面体 OABC において，$\vec{a} = \overrightarrow{OA}$，$\vec{b} = \overrightarrow{OB}$，$\vec{c} = \overrightarrow{OC}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p} = \overrightarrow{LP}$，$\vec{q} = \overrightarrow{MQ}$，$\vec{r} = \overrightarrow{NR}$ とおく。

(1)　線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3)　直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{AX} = \overrightarrow{LP}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。　[2001]

■ 整数と数列

1　a を 3 で割り切れない正の整数とする。a を 3 で割ったときの商を b, 余りを c とする。次の問いに答えよ。

(1)　$c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ を満たす負でない整数 s, t を b を用いて表せ。

(2)　n を $n\geqq 2a-2$ を満たす整数とする。このとき $n=as+3t$ を満たす負でない整数 s, t が存在することを示せ。　[2017]

2　ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ, ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として, 可能性のある組$(l,\ m,\ n)$をすべて求めよ。　[2016]

3　次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=3,\ a_{n+1}>a_n,\ a_n^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}^2=3(a_n+a_{n+1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，a_n+a_{n+2} を a_{n+1} を用いて表せ。

(2)　$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　[2015]

4　平面上の$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$は$\angle \mathrm{OA_2A_1}=90^\circ$，$\mathrm{OA_1}=1$，$\mathrm{OA_2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$を満たすとする。$\mathrm{A_2}$から$\mathrm{OA_1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_3}$とする。$\mathrm{A_3}$から$\mathrm{OA_2}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_4}$とする。以下同様に，$k=4,\ 5,\ \cdots$について，$\mathrm{A}_k$から$\mathrm{OA}_{k-1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A}_{k+1}$として，順番に$\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，…を定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{h_k}=\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，自然数 n に対して $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を求めよ。ただし，$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ は $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積を表す。　[2008]

5　n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)　a_2，b_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。　[2007]

6 xy 平面で x 座標，y 座標がともに 0 以上の整数となる点を非負格子点という。非負格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ にその番号 $N(\mathrm{P})$ を $N(\mathrm{P})=2^x(2y+1)$ で付ける。

(1)　番号が 2000 番になる非負格子点の座標を求めよ。

(2)　連続する整数 $n,\ n+1,\ n+2$ を番号にもつ非負格子点をそれぞれ A, B, C とする。2 以上の整数 a により $n=2^a(2^a+1)$ となっているとき，△ABC の面積を a で表せ。

[1999]

7 実数の数列 $\{a_n\}$ が，$a_{3n}=a_n$，$a_{n+5}=a_n$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$，$a_1a_3a_5=8$ をみたすとき，

(1)　a_1，a_5 の値を求めよ。

(2)　数列の和 $a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$ を求めよ。　[1998]

■ 確率 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1 A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2)　A 君の得点が整数でなく，かつ，B 君の得点より大きい確率を求めよ。　[2017]

2 サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ ……(＊)を考える。

(1)　方程式(＊)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2)　方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。　[2015]

3　1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。　[2014]

4　A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1)　B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(2)　B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3)　B がちょうど 2 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

5　袋 A, 袋 B のそれぞれに，1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする。$X=1$，$X=2$，$X=3$，$X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また，X の期待値を求めよ。

(2)　$N=3$ とし，n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，そのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。　[2012]

6 先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を 2 回続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。

(2) B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。 [2011]

7 数直線上を動く点 P がある。裏表の出る確率が等しい硬貨を 2 枚投げて, 2 枚とも表が出たら P は正の向きに 1 だけ移動し，2 枚とも裏が出たら P は負の向きに 1 だけ移動し，それ以外のときはその位置にとどまるものとする。P が原点 O を出発点として，このような試行を n 回繰り返して到着した位置を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) $S_2 = -1$ となる確率を求めよ。

(2) $S_3 = 1$ となる確率を求めよ。

(3) 試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とするとき，S_n を求めよ。

(4) k を整数とするとき，$S_n = k$ となる確率を求めよ。 [2010]

8 袋の中に青玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ。

(1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。 [2009]

9 点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について, $a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し, $a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 2 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　P の座標が 7 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。　[2008]

10 1 から 6 の番号のつけられた 6 個の箱に，それぞれ 3 枚ずつの皿が重ねて置かれている。白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ 1 個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする。2 つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない。2 つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿 1 枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す。

(1)　サイコロを 3 回振るとき，皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなる確率を求めよ。

(2)　サイコロを 3 回振るとき，皿が 3 枚の箱が 2 個，5 枚の箱，4 枚の箱，2 枚の箱，1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率を求めよ。　[2005]

11 A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは，以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんをくり返し，最後に残った者を勝者とする。ただし，あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

(1)　1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(2)　2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(3)　3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(4)　$n \geqq 4$ とする。n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。　[2004]

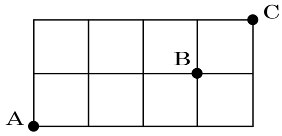
12 ある人がバス停 A で A 発 B 行きのバスに乗り，バス停 B で B 発 C 行きのバスに乗りかえてバス停 C へ向かうものとする。バスの発車時刻，バス停での待ち時間，バスの乗車時間は次の 5 つの条件を満たすものとする。

1. A 発 B 行きおよび B 発 C 行きのバスは同時刻に 3 分おきで発車している。
2. バス停 A での待ち時間は 0 分または 1 分または 2 分で，それぞれの起こる確率は$\dfrac{1}{3}$である。
3. バス停 B に到着後，最初に発車する C 行きのバスに乗りかえる。
4. A 発 B 行きのバスの乗車時間は 8 分または 10 分で，それぞれの起こる確率は$\dfrac{1}{2}$である。
5. B 発 C 行きのバスの乗車時間は 6 分または 7 分で，それぞれの起こる確率は$\dfrac{1}{2}$である。

ただし，条件 2，4，5 において，待ち時間，乗車時間の起こり方は独立であるとする。

この人がバス停 A に到着後バス停 C へ到着するまでにかかる時間が n 分である確率 $P(n)$ を求めよ。 [2003]

13 右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。



n を 7 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点に止まらずに B 地点を通り過ぎ，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。 [2002]

14　袋の中に赤の玉と白の玉が合計 4 個入っている。1 回の試行では袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，それが白であれば袋に戻し，赤の玉の場合は戻さずに別に用意した白の玉 1 個を袋に入れる。

(1)　最初は赤の玉と白の玉が 2 個ずつであるとして，3 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。

(2)　最初は赤の玉が 3 個，白の玉が 1 個であるとして，5 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。　[2001]

15　数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2, 3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

[2000]

16　白玉 3 個，赤玉 4 個があるとし，同じ色の玉は区別できないものとする。

(1)　上の 7 個を 2 つの区別のついた袋 A, B に分けて入れる。入れる方法は何通りあるか。ただし，いずれの袋にも 7 個のうち少なくとも 1 個は入れるものとする。

(2)　6 段の引き出しのついたタンスが 2 つあり，その中に上記の玉 7 個を分けて入れたい。ただし，どの引き出しにも 1 個しか入れないものとする。各タンスの引き出しは上から何段目か区別がつくが，2 つのタンスは区別しないものとすれば，入れる方法は何通りあるか。　[1998]

■ 論証

1　$f(x)=x^3$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq a<x<y$ を満たすすべての a, x, y に対して，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a}<\dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$y<x<b$ を満たすすべての x, y に対して，$f(x)>\dfrac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$ が成り立つような b の範囲を求めよ。　[2010]

2　$0<a<b$ とし, $m,\ n$ を自然数とする。

$f(m)=\log\dfrac{a^m+b^m}{2}$ ，$g(m)=\dfrac{\log(a^m)+\log(b^m)}{2}$ とする。このとき，$f(m+n)$ ，$f(m)+f(n)$ ，$g(m+n)$ ，$g(m)+g(n)$ を大きさの順に並べよ。ただし, 対数は常用対数とする。　[1998]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

$p,\ q$ を実数とする。関数 $f(x)=x^2+px+q$ の $-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が 0 以上となる点 $(p,\ q)$ 全体からなる領域を D とする。以下の問いに答えよ。

(1) pq 平面上に領域 D を図示せよ。

(2) D の点 $(p,\ q)$ で $q\leqq 5$ を満たすもの全体のなす図形の面積を求めよ。　[2017]

解答例

(1) $f(x)=x^2+px+q=\left(x+\dfrac{p}{2}\right)^2-\dfrac{p^2}{4}+q$ に対して，$-1\leqq x\leqq 2$ における最小値が 0 以上となる条件は，

(i) $-\dfrac{p}{2}<-1\ (p>2)$ のとき　$f(-1)=1-p+q\geqq 0$ より，$q\geqq p-1$

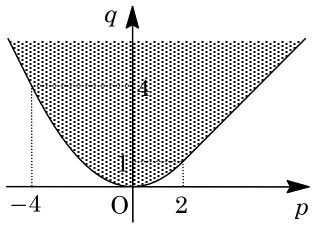
(ii) $-1\leqq -\dfrac{p}{2}\leqq 2\ (-4\leqq p\leqq 2)$ のとき　$f\left(-\dfrac{p}{2}\right)=-\dfrac{p^2}{4}+q\geqq 0$ より，$q\geqq \dfrac{p^2}{4}$

(iii) $-\dfrac{p}{2}>2\ (p<-4)$ のとき

$f(2)=4+2p+q\geqq 0$ より，$q\geqq -2p-4$

(i)～(iii)より，領域 D は右図の網点部となる。

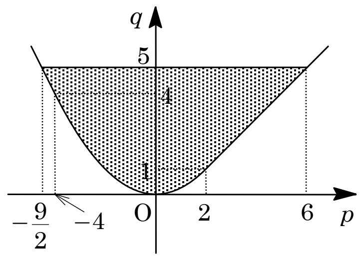
ただし，境界は領域に含まれる。



(2) D の $q\leqq 5$ を満たす部分は右図の網点部となり，

その面積を S とすると，

$$S=\left(6+\frac{9}{2}\right)\cdot 5-\frac{1}{2}(4+5)\left(-4+\frac{9}{2}\right)$$
$$-\int_{-4}^{2}\frac{p^2}{4}dp-\frac{1}{2}(1+5)(6-2)$$
$$=\frac{105}{2}-\frac{9}{4}-\frac{1}{12}\Big[p^3\Big]_{-4}^{2}-12$$
$$=\frac{153}{4}-\frac{72}{12}=\frac{129}{4}$$



コメント

2 次関数の最大・最小に関する典型問題です。また，(2)の面積計算は，長方形や台形の面積公式を利用しています。

問　題

放物線 $C: y=-\frac{1}{2}x^2$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=-2|x|+k$ のグラフが放物線 C と共有点をもつような実数 k の範囲を求めよ。

(2) $a,\ b$ を実数とする。関数 $y=-2|x-a|+b$ のグラフが放物線 C と共有点をちょうど 4 個もつような点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D を xy 平面に図示せよ。

(3) (2)で求めた領域 D の面積を求めよ。　　　[2016]

解答例

(1) $C: y=-\frac{1}{2}x^2$ ……①，$y=-2|x|+k$ ……②を連立すると，

$$-\frac{1}{2}x^2=-2|x|+k,\ -\frac{1}{2}x^2+2|x|=k \cdots\cdots ③$$

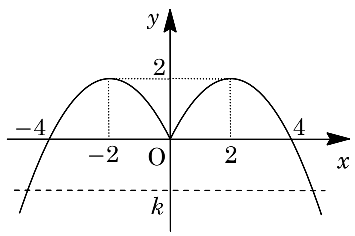
①②が共有点をもつ条件は，方程式③が実数解をもつ条件に対応し，さらに $y=-\frac{1}{2}x^2+2|x|$ ……④と $y=k$ が共有点をもつことに等しいので，④より，

(i) $x\geqq 0$ のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2+2x=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2$$

(ii) $x<0$ のとき

$$y=-\frac{1}{2}x^2-2x=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2$$



したがって，④のグラフは右図のようになり，求める条件は，$k\leqq 2$ である。

(2) $y=-2|x-a|+b$ ……⑤に対して，①⑤を連立すると，

$$-\frac{1}{2}x^2=-2|x-a|+b,\ -\frac{1}{2}x^2+2|x-a|=b \cdots\cdots ⑥$$

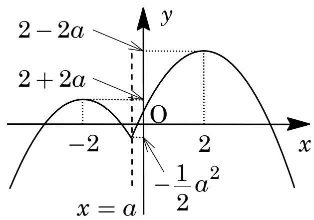
①⑤が 4 個の共有点をもつ条件は，方程式⑥が 4 個の異なる実数解をもつ条件に対応し，さらに $y=-\frac{1}{2}x^2+2|x-a|$ ……⑦と $y=b$ が 4 個の共有点をもつことに等しいので，⑦より，

(i) $x\geqq a$ のとき　$y=-\frac{1}{2}x^2+2(x-a)=-\frac{1}{2}(x-2)^2+2-2a$ ………⑧

(ii) $x<a$ のとき　$y=-\frac{1}{2}x^2-2(x-a)=-\frac{1}{2}(x+2)^2+2+2a$ ………⑨

すると，⑧と $y=b$ が 2 個の共有点，⑨と $y=b$ が 2 個の共有点をもつことになり，$2>a$ かつ $-2<a$ から，$-2<a<2$ であることが必要となる。

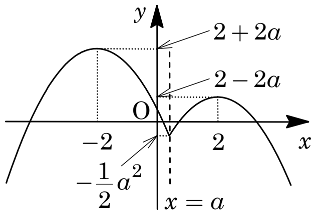
(a)　$-2<a<0$ のとき



$2-2a>2+2a$ となり，⑦のグラフは右図のようになり，求める条件は，

$$-\frac{1}{2}a^2<b<2+2a$$

(b)　$0\leqq a<2$ のとき



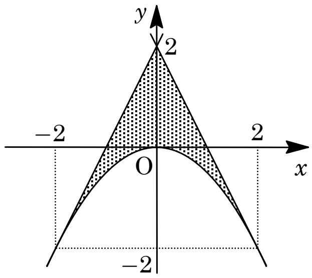
$2-2a\leqq 2+2a$ となり，⑦のグラフは右図のようになり，求める条件は，

$$-\frac{1}{2}a^2<b<2-2a$$

(a)(b)より，点 $(a,\ b)$ 全体のなす領域 D は xy 平面上で，

$$-\frac{1}{2}x^2<y<2+2x\quad(-2<x<0)$$

$$-\frac{1}{2}x^2<y<2-2x\quad(0\leqq x<2)$$



よって，D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。

(3)　領域 D は y 軸対称なので，その面積 S は，

$$S=2\int_0^2\left(2-2x+\frac{1}{2}x^2\right)dx=\int_0^2(x-2)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_0^2=\frac{8}{3}$$

コメント

絶対値つき関数を題材とした，グラフの共有点の個数に関する問題です。難しい計算はないものの，量的にはかなり多めです。

問　題

実数 x, y に対して，$A=2\sin x+\sin y$，$B=2\cos x+\cos y$ とおく。

(1)　$\cos(x-y)$ を A, B を用いて表せ。

(2)　x, y が $A=1$ を満たしながら変化するとき, B の最大値と最小値, およびそのときの $\sin x$，$\cos x$ の値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$A=2\sin x+\sin y$ ……①，$B=2\cos x+\cos y$ ……②に対して,

$$A^2+B^2=4\sin^2x+4\sin x\sin y+\sin^2y+4\cos^2x+4\cos x\cos y+\cos^2y$$
$$=4+1+4\cos(x-y)=5+4\cos(x-y)$$

よって，$\cos(x-y)=\dfrac{1}{4}(A^2+B^2-5)$ ………③

(2)　$A=1$ のとき，③より，$\cos(x-y)=\dfrac{1}{4}(1+B^2-5)=\dfrac{B^2}{4}-1$

すると，$-1\leqq\cos(x-y)\leqq1$ より，$-1\leqq\dfrac{B^2}{4}-1\leqq1$ となり,

$$0\leqq B^2\leqq8,\ -2\sqrt{2}\leqq B\leqq2\sqrt{2}$$

ここで，$B^2=8$ $(B=\pm2\sqrt{2})$ のとき，$\cos(x-y)=1$ であり, n を整数として,

$$x-y=2n\pi,\ y=x-2n\pi \text{ ………④}$$

(i)　$B=2\sqrt{2}$ のとき

①より $2\sin x+\sin y=1$，②より $2\cos x+\cos y=2\sqrt{2}$ となり，④から,

$$2\sin x+\sin x=1,\ 2\cos x+\cos x=2\sqrt{2}$$

よって，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(ii)　$B=-2\sqrt{2}$ のとき

①より $2\sin x+\sin y=1$，②より $2\cos x+\cos y=-2\sqrt{2}$ となり，④から,

$$2\sin x+\sin x=1,\ 2\cos x+\cos x=-2\sqrt{2}$$

よって，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$

(i)(ii)より，B は $\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最大値 $2\sqrt{2}$ をとり，$\sin x=\dfrac{1}{3}$，$\cos x=-\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき最小値 $-2\sqrt{2}$ をとる。

コメント

三角関数の加法定理についての有名問題の 1 つです。(2)では，大雑把に評価して，そのあと細部を詰めています。

問　題

a を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ が，$-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつような a の値の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，放物線 $y=x^2-2(a+1)x+3a$ の頂点の y 座標が取りうる値の範囲を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　2 次方程式 $x^2-2(a+1)x+3a=0$ ……①に対して，

$$f(x)=x^2-2(a+1)x+3a=(x-a-1)^2-a^2+a-1$$

さて，①が $-1\leqq x\leqq 3$ の範囲に 2 つの異なる実数解をもつ条件は，

$$-a^2+a-1<0\ \cdots\cdots\cdots②,\quad -1<a+1<3\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$f(-1)=5a+3\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots④,\quad f(3)=-3a+3\geqq 0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

②より $a^2-a+1>0$ となり，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}>0$ から，つねに成立する。

③より $-2<a<2$，④より $a\geqq -\dfrac{3}{5}$，⑤より $a\leqq 1$ となる。

よって，求める条件は，$-\dfrac{3}{5}\leqq a\leqq 1$

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標は，

$$y=-a^2+a-1=-\left(a-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{3}{4}$$

すると，$-\dfrac{3}{5}\leqq a\leqq 1$ において，$a=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{3}{4}$ をとり，$a=-\dfrac{3}{5}$ のとき最小値 $-\dfrac{49}{25}$ をとる。

これより，y の取りうる値の範囲は，$-\dfrac{49}{25}\leqq y\leqq -\dfrac{3}{4}$ である。

コメント

2 次方程式の解の配置の定型的な問題です。なお，(1)は定数分離も考えましたが，(2)の設問から普通に解きました。

問　題

関数 $f(x)$ を，$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\right|$ と定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおく。$f(x)$ を t の関数として表せ。

(2)　x が $0°\leqq x\leqq 90°$ の範囲を動くとき，t のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　x が $0°\leqq x\leqq 90°$ の範囲を動くとき，$f(x)$ のとりうる値の範囲を求めよ。また，$f(x)$ が最大値をとる x は，$60°<x<75°$ を満たすことを示せ。　[2012]

解答例

(1)　条件より，$t=-\sin x+\sqrt{3}\cos x$ とおくと，

$$t^2=\sin^2 x+3\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x=2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x+1$$

これより，$f(x)=\left|2\cos^2 x-2\sqrt{3}\sin x\cos x-\sin x+\sqrt{3}\cos x-\dfrac{5}{4}\right|$ に対して，

$$f(x)=\left|t^2-1+t-\frac{5}{4}\right|=\left|t^2+t-\frac{9}{4}\right|$$

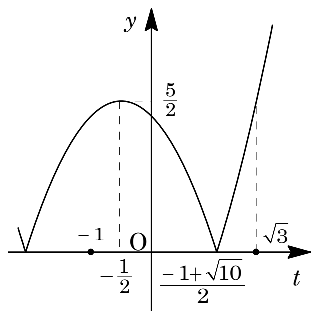
(2)　$t=2\sin(x+120°)$ なので，$0°\leqq x\leqq 90°$ のとき，$120°\leqq x+120°\leqq 210°$ から，

$$-1\leqq t\leqq\sqrt{3}$$

(3)　$f(x)=g(t)$ とおくと，$g(t)=\left|\left(t+\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{5}{2}\right|$

$g(t)=0$ となるのは，$t=-\dfrac{1}{2}\pm\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{-1\pm\sqrt{10}}{2}$

すると，$y=g(t)$ のグラフは右図のようになり，



$$g(\sqrt{3})-g\left(\frac{1}{2}\right)=\left(\sqrt{3}+\frac{3}{4}\right)-\frac{5}{2}=\sqrt{3}-\frac{7}{4}<0$$

よって，$f(x)=g(t)$ のとりうる値の範囲は，

$$0\leqq f(x)\leqq\frac{5}{2}$$

また，$f(x)$ が最大となるのは，$t=2\sin(x+120°)=-\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち，

$\sin(x+120°)=-\dfrac{1}{4}$ ……(＊)のときで，加法定理より，

$$\sin 195°=-\sin 15°=-\sin(45°-30°)=-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}=-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

すると，$-\dfrac{1}{4}+\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}=\dfrac{6-(\sqrt{2}+1)^2}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}=\dfrac{3-2\sqrt{2}}{4(\sqrt{6}+\sqrt{2}+1)}>0$ より，(＊)に対し，

$$-\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}<-\frac{1}{4}<0,\ \ \sin 195°<\sin(x+120°)<\sin 180°$$

よって，$180°<x+120°<195°$ となり，$60°<x<75°$ である。

コメント

置き換えによって最大・最小を求める問題です。ただ，最後の詰めが……。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　実数 x に関する連立不等式 $x \geqq -1$，$2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$ が解をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2)　$x \geqq -1$ を満たすすべての実数 x に対し，不等式 $3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。　[2011]

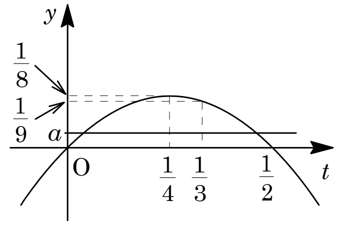
解答例

(1)　条件より，$2\cdot 3^x + a\cdot 3^{-x} \leqq 1$ は，$t = 3^x$ とおくと，$2t + \dfrac{a}{t} \leqq 1$ となり，

$$a \leqq -2t^2 + t\,,\quad a \leqq -2\left(t - \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{1}{8} \cdots\cdots\cdots①$$

また，$x \geqq -1$ から，$t \geqq \dfrac{1}{3} \cdots\cdots\cdots②$

すると，連立不等式①②が解をもつ条件は，$t \geqq \dfrac{1}{3}$ と直線 $y = a$ が $y = -2\left(t - \dfrac{1}{4}\right)^2 + \dfrac{1}{8}$ のグラフの下側にある t の範囲に共通部分が存在することに対応する。



よって，右図より，$a \leqq \dfrac{1}{9}$ である。

(2)　(1)と同様にすると，$3^x + a\cdot 3^{-x} \geqq a$ は，$t + \dfrac{a}{t} \geqq a$ となり，

$$t^2 + a \geqq at\,,\quad t^2 \geqq a(t-1) \cdots\cdots\cdots③$$

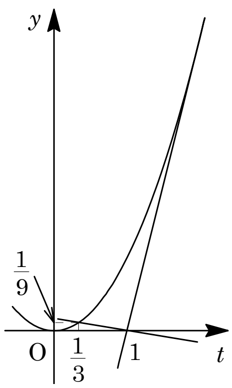
条件より，②のとき③がつねに成立する条件は，$t \geqq \dfrac{1}{3}$ において，$y = t^2 \cdots\cdots④$のグラフがつねに直線 $y = a(t-1) \cdots\cdots⑤$の上側にあることに対応する。

⑤が点$\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$を通るとき，$\dfrac{1}{9} = a\left(\dfrac{1}{3} - 1\right)$から，$a = -\dfrac{1}{6}$

④と⑤が接するとき，$t^2 - a(t-1) = 0$ の判別式が，

$$D = a^2 - 4a = 0\,,\quad a = 0,\ 4$$

よって，右図から，求める a の範囲は，$-\dfrac{1}{6} \leqq a \leqq 4$ となる。



コメント

指数不等式が題材ですが，置き換えれば 2 次不等式となります。どちらの設問も，グラフを用いて眼で解いています。

問　題

すべての実数 x に対して不等式 $2^{2x+2}+2^{x}a+1-a>0$ が成り立つような実数 a の範囲を求めよ。 [2009]

解答例

不等式 $2^{2x+2}+2^{x}a+1-a>0$ に対して，$2^{x}=t>0$ とおくと，

$$4t^{2}+at+1-a>0\,,\ \ 4\left(t+\frac{a}{8}\right)^{2}-\frac{1}{16}a^{2}-a+1>0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すべての $t>0$ に対して, $(*)$が成立する条件は,

(i)　$-\dfrac{a}{8}>0$ $(a<0)$ のとき

$-\dfrac{1}{16}a^{2}-a+1>0$ より，$a^{2}+16a-16<0$ となり, $a<0$ から,

$$-8-4\sqrt{5}<a<0$$

(ii)　$-\dfrac{a}{8}\leqq 0$ $(a\geqq 0)$ のとき

$1-a\geqq 0$ より，$a\leqq 1$ となり, $a\geqq 0$ から,

$$0\leqq a\leqq 1$$

(i)(ii)より，$-8-4\sqrt{5}<a\leqq 1$

コメント

2 次不等式の成立条件を，軸の位置で場合分けをするタイプの基本題です。

問　題

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を実数とする。多項式 $f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ が次の条件(i), (ii), (iii)をすべて満たすとき, a, b, c, d, e の値を求めよ。

(i)　$x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$　　(ii)　$f(1-x)=f(x)$　　(iii)　$f(1)=1$　　[2008]

解答例

$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ に対し,

$$x^4 f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e\right)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

条件(i)より，$x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$ なので,

$$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

よって，$a=e$，$b=d$ ………①

これより，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$ となる。

さらに，条件(iii)より $f(1)=1$ なので，$2a+2b+c=1$ ………②

また，条件(ii)より，$f(1-x)=f(x)$ に $x=0$ を代入すると，①と合わせて,

$f(1)=f(0)$，$a=1$ ………③

さらに，条件(ii)に $x=-1$ を代入すると，$f(2)=f(-1)$ より,

$16a+8b+4c+2b+a=a-b+c-b+a$，$5a+4b+c=0$ ………④

②③④より，$b=-2$，$c=3$ となり，①から,

$a=1$，$b=-2$，$c=3$，$d=-2$，$e=1$

このとき，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$ となり，条件(i)(ii)(iii)をすべて満たす。

コメント

条件(ii)が計算難なので，数値代入で係数を決めています。

問　題

定数 a, b, c, p, q を整数とし，次の x と y の 3 つの多項式

$$P=(x+a)^2-9c^2(y+b)^2,\ \ Q=(x+11)^2+13(x+11)y+36y^2$$

$$R=x^2+(p+2q)xy+2pqy^2+4x+(11p-14q)y-77$$

を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 多項式 P, Q, R を因数分解せよ。

(2) P と Q，Q と R，R と P は，それぞれ x，y の 1 次式を共通因数としてもっているものとする。このときの整数 a, b, c, p, q を求めよ。 [2006]

解答例

(1) 多項式 P, Q, R を因数分解すると，

$$P=(x+a)^2-9c^2(y+b)^2=\{x+a+3c(y+b)\}\{x+a-3c(y+b)\}$$

$$=(x+3cy+a+3bc)(x-3cy+a-3bc)$$

$$Q=(x+11)^2+13(x+11)y+36y^2=(x+11+9y)(x+11+4y)$$

$$=(x+9y+11)(x+4y+11)$$

$$R=x^2+(p+2q)xy+2pqy^2+4x+(11p-14q)y-77$$

$$=x^2+(py+2qy+4)x+2pqy^2+(11p-14q)y-77$$

$$=x^2+(py+2qy+4)x+(py-7)(2qy+11)$$

$$=(x+py-7)(x+2qy+11)$$

(2) まず，P と Q が 1 次式を共通因数としてもち，しかも c が整数より，

(i) $3c=9$，$a+3bc=11$ のとき　$c=3$，$a+9b=11$

(ii) $-3c=9$，$a-3bc=11$ のとき　$c=-3$，$a+9b=11$

(i)(ii)より，$c=\pm3$，$a+9b=11$ ………①

また，Q と R が 1 次式を共通因数としてもち，しかも q が整数より，

$2q=4$，$q=2$ ………②

①②より，$P=(x+9y+11)(x-9y+a-9b)$，$R=(x+py-7)(x+4y+11)$

さらに，R と P が 1 次式を共通因数としてもち，しかも p が整数より，

$p=-9$，$a-9b=-7$ ………③

①③より，$a=2$，$b=1$

コメント

因数分解を題材とした基本問題です。ただ，注意を怠ると，(2)で(i)と(ii)の場合があるのを忘れてしまいます。

問　題

複素数 $z,\ w$ が条件 $\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{1}{w}$ を満たしている。ただし，$z\neq\pm i$，$w\neq 0$ である。z の実部，虚部をそれぞれ $x,\ y$ とし，w の実部，虚部をそれぞれ $u,\ v$ とする。

(1)　$(z-w)^2$ を u と v で表せ。

(2)　$u=0$ ならば，$x=0$ であることを示せ。

(3)　$u>0,\ v>0$，かつ w^2 の実部が 1 となるような x を求め，u を用いて表せ。[2004]

解答例

(1)　条件より，$\dfrac{1}{w}=\dfrac{1}{z-i}+\dfrac{1}{z+i}=\dfrac{2z}{z^2+1}$

$z=0$ では成立しないので $z\neq 0$ となり，$w=\dfrac{z^2+1}{2z}=\dfrac{1}{2}\left(z+\dfrac{1}{z}\right)$………①

$$(z-w)^2=\left(\frac{1}{2}z-\frac{1}{2z}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z-\frac{1}{z}\right)^2=\frac{1}{4}\left(z+\frac{1}{z}\right)^2-1=w^2-1$$

よって，$(z-w)^2=(u+vi)^2-1=u^2-v^2-1+2uvi$ ………②

(2)　$u=0$ のとき，①より $z+\dfrac{1}{z}$ は純虚数なので，k を実数として $z+\dfrac{1}{z}=ki$ となる。

$$z^2-kiz+1=0,\quad z=\frac{ki\pm\sqrt{-k^2-4}}{2}=\frac{k\pm\sqrt{k^2+4}}{2}i$$

よって，z は純虚数より，$x=0$ である。

(3)　$w^2=u^2-v^2+2uvi$ の実部が 1 より，$u^2-v^2=1$ ………③

このとき，②より，$(z-w)^2=2uvi$，$\{(x-u)+(y-v)i\}^2=2uvi$

$$(x-u)^2-(y-v)^2+2(x-u)(y-v)i=2uvi$$

$x,\ y,\ u,\ v$ は実数なので，

$$(x-u)^2-(y-v)^2=0\ \text{………④},\quad (x-u)(y-v)=uv\ \text{………⑤}$$

④より $y-v=\pm(x-u)$ となり，⑤に代入すると，$\pm(x-u)^2=uv$

$u>0,\ v>0$ より，$(x-u)^2=uv$，$x=u\pm\sqrt{uv}$

③より $v=\sqrt{u^2-1}$ となるので，$x=u\pm\sqrt{u\sqrt{u^2-1}}$

コメント

文字と関係式がたくさん現れ，方針に迷いが生じます。この交通整理の能力が問われます。

問　題

実数 a に対して，集合 A, B を

$$A=\left\{x \mid x^2+(1-a^2)x+a^3-2a^2+a \leqq 0,\ x\text{は実数}\right\}$$
$$B=\left\{x \mid x^2+(2a-7)x+a^2-7a+10<0,\ x\text{は実数}\right\}$$

と定める。共通部分 $A \cap B$ が空集合でないための a の範囲を求めよ。　[2003]

解答例

まず，$x^2+(1-a^2)x+a^3-2a^2+a \leqq 0$ ……①から，

$$x^2+(1-a^2)x+a(a-1)^2 \leqq 0,\ \{x-(a^2-a)\}\{x-(a-1)\} \leqq 0$$

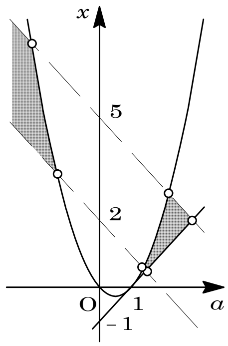
ここで，$(a^2-a)-(a-1)=(a-1)^2 \geqq 0$ より，$a^2-a \geqq a-1$ となり，①の解は，$a-1 \leqq x \leqq a^2-a$ ……②である。

次に，$x^2+(2a-7)x+a^2-7a+10<0$ ……③から，

$$x^2+(2a-7)x+(a-2)(a-5)<0,\ (x+a-2)(x+a-5)<0$$

すると，$-a+2<-a+5$ より，③の解は，$-a+2<x<-a+5$ ……④である。

さて，$x=a-1$ ……⑤，$x=a^2-a=\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}$ ……⑥，$x=-a+2$ ……⑦，$x=-a+5$ ……⑧のグラフをかき，②と④をともにみたす $(a,\ x)$ を図示すると，右図の網点部となる。



⑥と⑦の交点は，$a^2-a=-a+2$ より $a=\pm\sqrt{2}$，⑤と⑧の交点は，$a-1=-a+5$ より $a=3$ である。

以上より，①と③をみたす x が存在する条件は，$a<-\sqrt{2}$，$\sqrt{2}<a<3$ である。

コメント

不等式の解が a の値で場合分けということを覚悟して臨みましたが，意外にも，その必要はありませんでした。なお，後半は，⑤～⑧の大小関係を把握するのにグラフを用いました。

問　題

2 つの関数を

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\quad y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

(1)　$\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2)　y を t の関数で表せ。

(3)　$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ。 [2003]

解答例

(1)　$t^3=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta\sin^2\theta+3\sqrt{3}\sin^3\theta$

$$=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta(1-\cos^2\theta)+3\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos^2\theta)$$

$$=-8\cos^3\theta+9\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta=-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+3\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta$$

3 倍角の公式より, $t^3=-2\cos 3\theta+3t$ となり, $\cos 3\theta=\dfrac{-t^3+3t}{2}$ である。

(2)　$t^2=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+3\sin^2\theta$

$$=\frac{1+\cos 2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin 2\theta+3\cdot\frac{1-\cos 2\theta}{2}=\sqrt{3}\sin 2\theta-\cos 2\theta+2$$

これより, $\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta=-t^2+2$

すると, $y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

$$=-4\cdot\frac{-t^3+3t}{2}-t^2+2+2t=2t^3-t^2-4t+2$$

(3)　$t=2\sin(\theta+30°)$ と合成すると, $0°\leqq\theta\leqq 180°$ から $30°\leqq\theta+30°\leqq 210°$ となり, $-1\leqq t\leqq 2$ である。

(2)より, $y'=6t^2-2t-4$

$$=2(3t+2)(t-1)$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	$\frac{98}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

右表より, $t=2$ のとき最大値 6 をとる。このとき $2\sin(\theta+30°)=2$ より, $\theta+30°=90°$ すなわち $\theta=60°$ である。

また, $t=1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき $2\sin(\theta+30°)=1$ より, $\theta+30°=30°$, $150°$ すなわち $\theta=0°$, $120°$ である。

コメント

(1)は, 3 倍角の公式が関係するようなので, とりあえず t の 3 乗を計算しました。すると, 予測した通りでした。

問　題

a，b は実数であり，方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。このとき a，b を求めよ。また，このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

解答例

$x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ ……①に対して，a，b が実数であることより，①が解 $x=1+i$ をもつとき，$x=1-i$ も解になる。

すると，①の左辺は $x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=x^2-2x+2$ で割り切れる。

そこで，①の左辺を $f(x)$ とおき，x^2-2x+2 で割ると，

$$f(x)=(x^2-2x+2)\{x^2+(a+4)x+4\}+(-2a+b+1)x+a^3-8$$

よって，$-2a+b+1=0$ ……②，$a^3-8=0$ ……③

③より $a=2$，②に代入して $b=3$

このとき，$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+6x+4)$ となり，$x=1+i$ 以外の①の解は，$x=1-i$，$-3\pm\sqrt{5}$ である。

コメント

基本題です。計算ミスには注意。

問　題

$0° \leqq \theta \leqq 180°$ として，x の関数 $f(x)$ を $f(x) = x^2 + \dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x - 2\sin\theta$ と定める。x が整数を動くときの $f(x)$ の最小値を $m(\theta)$ とおく。

(1)　θ が $\cos\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を満たす場合に，$m(\theta)$ が最小となる θ の値を求めよ。

(2)　$m(\theta)$ が最小となる θ の値と，そのときの最小値を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$f(x) = x^2 + \dfrac{2\cos\theta}{\sqrt{3}}x - 2\sin\theta = \left(x + \dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}\right)^2 - \dfrac{\cos^2\theta}{3} - 2\sin\theta$ として，

$\cos\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき，$y = f(x)$ のグラフの軸 $x = -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}}$ は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{3} = -\frac{1}{\sqrt{3}} \leqq -\frac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leqq -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt{3}} = -\frac{1}{2}$$

x は整数値をとるので，$x = -1$ のとき $f(x)$ は最小値をとる。

$$m(\theta) = 1 - \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}} - 2\sin\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta + 30°)$$

ここで，$\cos\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より $0° \leqq \theta \leqq 30°$ なので，$30° \leqq \theta + 30° \leqq 60°$ となり，$\theta + 30° = 60°$ すなわち $\theta = 30°$ のとき，$m(\theta)$ は最小値 $1 - \dfrac{4}{\sqrt{3}} \cdot \dfrac{\sqrt{3}}{2} = -1$ をとる。

(2)　$0° \leqq \theta \leqq 180°$ のとき，$-1 \leqq \cos\theta \leqq 1$ より，$-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

(i)　$-\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leqq -\dfrac{1}{2}$ $(0° \leqq \theta \leqq 30°)$ のとき

(1)より，$m(\theta)$ は $\theta = 30°$ のとき最小値 -1 をとる。

(ii)　$-\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leqq \dfrac{1}{2}$ $(30° \leqq \theta \leqq 150°)$ のとき

$x = 0$ のとき $f(x)$ は最小値をとり，$m(\theta) = -2\sin\theta$ となる。

よって，$m(\theta)$ は $\theta = 90°$ のとき最小値 -2 をとる。

(iii)　$\dfrac{1}{2} \leqq -\dfrac{\cos\theta}{\sqrt{3}} \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ $(150° \leqq \theta \leqq 180°)$ のとき

$x = 1$ のとき $f(x)$ は最小値をとり，

$$m(\theta) = 1 + \frac{2\cos\theta}{\sqrt{3}} - 2\sin\theta = 1 - \frac{2}{\sqrt{3}}(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta) = 1 - \frac{4}{\sqrt{3}}\sin(\theta - 30°)$$

ここで，$150° \leqq \theta \leqq 180°$ なので，$120° \leqq \theta - 30° \leqq 150°$ となり，$\theta - 30° = 120°$ すなわち $\theta = 150°$ のとき，$m(\theta)$ は最小値 $1 - \frac{4}{\sqrt{3}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -1$ をとる。

(i)(ii)(iii)より，$m(\theta)$ は $\theta = 90°$ のとき最小値 -2 をとる。

コメント

(1)は(2)の 1 つの場合になっています。難しいというよりは繁雑な感じのする問題です。

問　題

等式 $x^2+(i-2)x+2ab+\left(\dfrac{b}{2}-2a\right)i=0$ を満たす実数 $a,\ b$ が存在するような，実数 x の範囲を求めよ。ただし，$i=\sqrt{-1}$ である。　　[2000]

解答例

$x^2+(i-2)x+2ab+\left(\dfrac{b}{2}-2a\right)i=0$ を変形して，

$$(x^2-2x+2ab)+\left(x+\frac{b}{2}-2a\right)i=0$$

a, b, x が実数なので，

$$x^2-2x+2ab=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ x+\frac{b}{2}-2a=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$b=4a-2x$

①に代入して，$x^2-2x+2a(4a-2x)=0$

$$8a^2-4xa+x^2-2x=0\cdots\cdots\cdots③$$

a が実数のとき②より b も実数になるので，求める条件は方程式③が実数解をもつことである。

$$D/4=4x^2-8(x^2-2x)\geqq 0$$

まとめて $x^2-4x\leqq 0$ より, $0\leqq x\leqq 4$ となる。

コメント

①②式を a, b についての方程式として見直し, x の条件を求める問題です。

問　題

$|x^2-3x+1|>|x^2-1|-|2x-1|$ を満たす x の範囲を求めよ。 [2000]

解答例

$|x^2-3x+1|>|x^2-1|-|2x-1|$ に対して，$x^2-3x+1=0$ の解は $x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$，$x^2-1=0$ の解は $x=\pm1$，$2x-1=0$ の解は $x=\dfrac{1}{2}$ なので，次の 6 つの場合に分ける。

(i)　$x<-1$ のとき　$x^2-3x+1>x^2-1+(2x-1)$ より $-5x>-3$，$x<\dfrac{3}{5}$

$x<-1$ と合わせて，$x<-1$

(ii)　$-1\leqq x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ のとき　$x^2-3x+1>-(x^2-1)+(2x-1)$ より，

$2x^2-5x+1>0$ から，$x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$，$\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}<x$

$-1\leqq x<\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$ と合わせて，$-1\leqq x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$

(iii)　$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}$ のとき　$-(x^2-3x+1)>-(x^2-1)+(2x-1)$ より，$x>1$

$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\leqq x<\dfrac{1}{2}$ と合わせると，解なし。

(iv)　$\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ のとき　$-(x^2-3x+1)>-(x^2-1)-(2x-1)$ より $5x>3$，$x>\dfrac{3}{5}$

$\dfrac{1}{2}\leqq x<1$ と合わせて，$\dfrac{3}{5}<x<1$

(v)　$1\leqq x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ のとき　$-(x^2-3x+1)>x^2-1-(2x-1)$ より，

$2x^2-5x+1<0$ から，$\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}<x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

$1\leqq x<\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$ と合わせて，$1\leqq x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

(vi)　$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\leqq x$ のとき　$x^2-3x+1>x^2-1-(2x-1)$ より $-x>-1$，$x<1$

$\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\leqq x$ と合わせると，解なし。

(i)～(vi)より，$x<\dfrac{5-\sqrt{17}}{4}$，$\dfrac{3}{5}<x<\dfrac{5+\sqrt{17}}{4}$

コメント

注意力がすべての問題です。

問　題

三つの角α，β，γ $(-90°<\alpha,\ \beta,\ \gamma<90°)$が

$$\tan\alpha+\tan\beta+\tan\gamma=\tan\alpha\tan\beta\tan\gamma$$

を満たすとき，$\alpha+\beta+\gamma$の値をすべて求めよ。　[1999]

解答例

$\tan\alpha=a$，$\tan\beta=b$，$\tan\gamma=c$とおく。

条件より，$a+b+c=abc$ ………(＊)

ここで$ab=1$とすると，(＊)より$a+b=0$となり，a，bは方程式$x^2+1=0$の 2 つの実数解となるが，$x=\pm i$より不適である。よって，$ab\neq 1$となる。

すると，加法定理から，$\tan(\alpha+\beta)=\dfrac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=\dfrac{a+b}{1-ab}$

さらに$\dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c=1$，すなわち$ab+bc+ca=1$のとき，(＊)から$a+b+c=abc=k$とおくと，$a$，$b$，$c$は方程式$x^3-kx^2+x-k=0$の 3 つの実数解となるが，$x=k$，$\pm i$より不適である。よって，$\dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c\neq 1$となる。

もう一度，加法定理を用いて，

$$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=\frac{\tan(\alpha+\beta)+\tan\gamma}{1-\tan(\alpha+\beta)\tan\gamma}=\frac{\dfrac{a+b}{1-ab}+c}{1-\dfrac{a+b}{1-ab}\cdot c}=\frac{a+b+c-abc}{1-ab-bc-ca}$$

(＊)より，$\tan(\alpha+\beta+\gamma)=0$

ここで，$-90°<\alpha,\ \beta,\ \gamma<90°$から，$-270°<\alpha+\beta+\gamma<270°$

よって，$\alpha+\beta+\gamma=-180°,\ 0°,\ 180°$

コメント

問題文の等式は，相加平均と相乗平均の関係を利用するのではないかと思わせるものです。しかし，各項が正とは限らないので，まず加法定理を利用する普通の考え方で計算したところ，予想以上にうまく事が運びました。と思ったところ，分母が 0 でないという条件のチェックが必要でした。

問　題

p を 0 でない実数とし, 2 次方程式 $x^2 - px + 5p = 0$ を考える。

(1)　$x^2 - px + 5p = 0$ の解 α，β が $\alpha^5 + \beta^5 = p^5$ を満たすとする。このときの p の値を求めよ。

(2)　$x^2 - px + 5p = 0$ が虚数解をもち, その 5 乗が実数になるとする。このときの p の値を求めよ。 [1999]

解答例

(1)　$x^2 - px + 5p = 0$ の解が α，β より，$\alpha + \beta = p$，$\alpha\beta = 5p$

$$\alpha^2 + \beta^2 = (\alpha + \beta)^2 - 2\alpha\beta = p^2 - 10p$$

$$\alpha^3 + \beta^3 = (\alpha + \beta)^3 - 3\alpha\beta(\alpha + \beta) = p^3 - 15p^2$$

すると，$\alpha^5 + \beta^5 = (\alpha^2 + \beta^2)(\alpha^3 + \beta^3) - \alpha^2\beta^2(\alpha + \beta)$

$$= (p^2 - 10p)(p^3 - 15p^2) - 25p^3$$

$$= p^5 - 25p^4 + 125p^3$$

条件より，$\alpha^5 + \beta^5 = p^5$ なので，$25p^4 - 125p^3 = 0$

$p \neq 0$ より，$p = 5$

(2)　$x^2 - px + 5p = 0$ が虚数解をもつので,

$$D = p^2 - 20p < 0,\ \ 0 < p < 20 \cdots\cdots\cdots ①$$

このとき, 虚数解を α，$\overline{\alpha}$ とすると，$\alpha + \overline{\alpha} = p$，$\alpha\overline{\alpha} = 5p$

条件より，α^5 が実数なので，$\alpha^5 = \overline{\alpha}^5$

$$(\alpha - \overline{\alpha})(\alpha^4 + \alpha^3\overline{\alpha} + \alpha^2\overline{\alpha}^2 + \alpha\overline{\alpha}^3 + \overline{\alpha}^4) = 0$$

α は虚数なので $\alpha \neq \overline{\alpha}$ から，$\alpha^4 + \alpha^3\overline{\alpha} + \alpha^2\overline{\alpha}^2 + \alpha\overline{\alpha}^3 + \overline{\alpha}^4 = 0$

$$\alpha^4 + \overline{\alpha}^4 + \alpha\overline{\alpha}(\alpha^2 + \overline{\alpha}^2) + (\alpha\overline{\alpha})^2 = 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで, (1)より $\alpha^2 + \overline{\alpha}^2 = p^2 - 10p$

$$\alpha^4 + \overline{\alpha}^4 = (\alpha^2 + \overline{\alpha}^2)^2 - 2\alpha^2\overline{\alpha}^2 = (p^2 - 10p)^2 - 50p^2 = p^4 - 20p^3 + 50p^2$$

②より，$p^4 - 20p^3 + 50p^2 + 5p(p^2 - 10p) + 25p^2 = 0$

$$p^4 - 15p^3 + 25p^2 = 0$$

$p \neq 0$ より，$p^2 - 15p + 25 = 0$

よって，$p = \dfrac{15 \pm 5\sqrt{5}}{2}$ （この値はともに①を満たす）

コメント

解と係数の関係を利用する問題です。(1), (2)とも頻出題です。

問　題

$a>0$ を実数とする。関数 $f(t)=-4t^3+(a+3)t$ の $0 \leqq t \leqq 1$ における最大値を $M(a)$ とする。

(1)　$M(a)$ を求めよ。

(2)　実数 $x>0$ に対し，$g(x)=M(x)^2$ とおく。xy 平面において，関数 $y=g(x)$ のグラフに点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るとき，実数 $s>0$ とその接線の傾きを求めよ。

(3)　a が正の実数全体を動くとき，$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$ の最小値を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$f(t)=-4t^3+(a+3)t$ に対して，$f'(t)=-12t^2+a+3$

$a>0$ より，$f'(t)=0$ の解は $t=\pm\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ となる。

(i)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}<1\ (0<a<9)$ のとき

$0 \leqq t \leqq 1$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。これより，$f(t)$ は $t=\sqrt{\dfrac{a+3}{12}}$ において最大値 $M(a)$ をとり，

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\frac{a+3}{12}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$M(a)=\sqrt{\frac{a+3}{12}}\left(-4\cdot\frac{a+3}{12}+a+3\right)=\frac{\sqrt{a+3}}{2\sqrt{3}}\cdot\frac{2}{3}(a+3)=\frac{\sqrt{3}}{9}(a+3)^{\frac{3}{2}}$$

(ii)　$\sqrt{\dfrac{a+3}{12}} \geqq 1\ (a \geqq 9)$ のとき

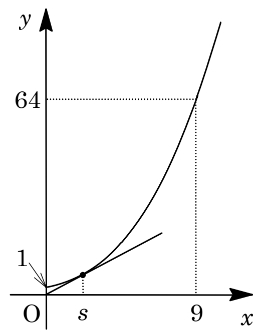
$0 \leqq t \leqq 1$ において $f(t)$ は単調増加するので，$t=1$ において最大値 $M(a)$ をとり，

$$M(a)=-4+(a+3)=a-1$$

(2)　$g(x)=M(x)^2$ より，(1)から，

$$g(x)=\left\{\frac{\sqrt{3}}{9}(x+3)^{\frac{3}{2}}\right\}^2=\frac{1}{27}(x+3)^3 \quad (0<x<9)$$

$$g(x)=(x-1)^2 \quad (x \geqq 9)$$



さて，点 $(s,\ g(s))$ で接する直線が原点を通るより，

$$\frac{g(s)}{s}=g'(s)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(i)　$0<s<9$ のとき

$(*)$より，$\dfrac{1}{27}\cdot\dfrac{(s+3)^3}{s}=\dfrac{1}{9}(s+3)^2$ から $s+3=3s$ となり，$s=\dfrac{3}{2}$

(ii)　$s \geqq 9$ のとき　$(*)$より，$\dfrac{(s-1)^2}{s}=2(s-1)$ から $s=-1$ となるが，成立しない。

(i)(ii)より，$s=\dfrac{3}{2}$となり，このとき接線の傾きは，$\dfrac{1}{9}\left(\dfrac{3}{2}+3\right)^2=\dfrac{9}{4}$である。

(3)　$k=\dfrac{M(a)}{\sqrt{a}}$より，$k^2=\dfrac{M(a)^2}{a}=\dfrac{g(a)}{a}$となり，$k^2$は原点 O と点$(a,\ g(a))$を結ぶ直線の傾きとなる。

すると，(2)よりk^2の最小値は$\dfrac{9}{4}$となるので，kの最小値は$\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{3}{2}$である。

コメント

微分法の総合問題です。(3)の分数関数を直線の傾きとみる方法は必須技法です。

問　題

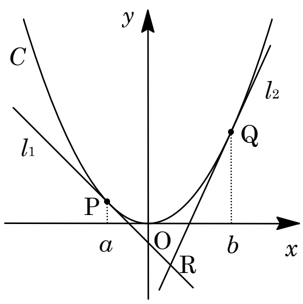
曲線 $C: y = x^2$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線を l_1，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線を l_2 とする。ただし，$a < b$ とする。l_1 と l_2 の交点を R とし，線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積を S とする。

(1) R の座標を a と b を用いて表せ。

(2) S を a と b を用いて表せ。

(3) l_1 と l_2 が垂直であるときの S の最小値を求めよ。　[2014]

解答例



(1)　$y = x^2$ より，$y' = 2x$ となり，点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$ における接線 l_1 は，

$$y - a^2 = 2a(x-a),\ y = 2ax - a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

同様に，点 $\mathrm{Q}(b,\ b^2)$ における接線 l_2 は，

$$y = 2bx - b^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$2ax - a^2 = 2bx - b^2$

$$2(b-a)x = b^2 - a^2,\ x = \frac{a+b}{2}$$

①より $y = 2a\cdot\dfrac{a+b}{2} - a^2 = ab$ となり，l_1 と l_2 の交点 R は，$\mathrm{R}\left(\dfrac{a+b}{2},\ ab\right)$ である。

(2)　線分 PR，線分 QR および曲線 C で囲まれる図形の面積 S は，

$$S = \int_a^{\frac{a+b}{2}}(x^2 - 2ax + a^2)dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x^2 - 2bx + b^2)dx$$

$$= \int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx + \int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx$$

$$= \left[\frac{1}{3}(x-a)^3\right]_a^{\frac{a+b}{2}} + \left[\frac{1}{3}(x-b)^3\right]_{\frac{a+b}{2}}^{b} = \frac{1}{3}\left(\frac{b-a}{2}\right)^3 - \frac{1}{3}\left(\frac{a-b}{2}\right)^3$$

$$= \frac{1}{12}(b-a)^3$$

(3)　l_1 と l_2 が垂直であるとき，$2a\cdot 2b = -1$，$a = -\dfrac{1}{4b}$ である。

すると，$a < b$ から $a < 0 < b$ となり，相加平均と相乗平均の関係から，

$$S = \frac{1}{12}\left(b + \frac{1}{4b}\right)^3 \geqq \frac{1}{12}\left(2\sqrt{b\cdot\frac{1}{4b}}\right)^3 = \frac{1}{12}$$

等号成立は，$b = \dfrac{1}{4b}$ $\left(b = \dfrac{1}{2}\right)$ のときとなり，このとき S は最小値 $\dfrac{1}{12}$ をとる。

コメント

センター試験や 2 次試験，また参考書の例題で，よく見かける超頻出問題です。

問　題

t は $0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数とする。放物線 $y=x^2$，直線 $x=1$，および x 軸とで囲まれた図形を A, 放物線 $y=4(x-t)^2$ と直線 $y=1$ とで囲まれた図形を B とする。A と B の共通部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　$S(t)$ を求めよ。

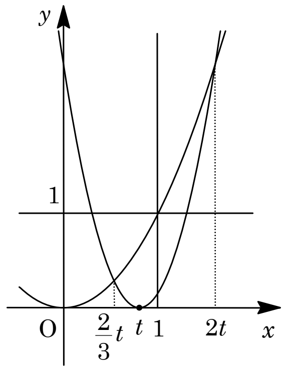
(2)　$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　放物線 $y=x^2$ と放物線 $y=4(x-t)^2$ の式を連立して交点の x 座標を求めると，

$$x^2=4(x-t)^2,\ \{x+2(x-t)\}\{x-2(x-t)\}=0$$

よって，$x=\frac{2}{3}t,\ 2t$ となる。



さて，$0 \leqq t \leqq 1$ より，$0 \leqq \frac{2}{3}t \leqq \frac{2}{3}$，$0 \leqq 2t \leqq 2$ となり，$2t$ と 1 との大小で場合分けをすると，$S(t)$ は,

(i)　$2t<1\left(0 \leqq t<\frac{1}{2}\right)$ のとき

$$S(t)=\int_{\frac{2}{3}t}^{2t}\{x^2-4(x-t)^2\}dx=\int_{\frac{2}{3}t}^{2t}-3\left(x-\frac{2}{3}t\right)(x-2t)dx$$

$$=(-3)\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2t-\frac{2}{3}t\right)^3=\frac{32}{27}t^3$$

(ii)　$2t \geqq 1\left(\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1\right)$ のとき

$$S(t)=\int_{\frac{2}{3}t}^{1}\{x^2-4(x-t)^2\}dx=\int_{\frac{2}{3}t}^{1}(-3x^2+8tx-4t^2)dx$$

$$=\left[-x^3+4tx^2-4t^2x\right]_{\frac{2}{3}t}^{1}=-\left(1-\frac{8}{27}t^3\right)+4t\left(1-\frac{4}{9}t^2\right)-4t^2\left(1-\frac{2}{3}t\right)$$

$$=\frac{32}{27}t^3-4t^2+4t-1$$

(2)　(i)　$0 \leqq t<\frac{1}{2}$ のとき　$S(t)=\frac{32}{27}t^3$ より単調に増加する。

(ii)　$\frac{1}{2} \leqq t \leqq 1$ のとき　$S(t)=\frac{32}{27}t^3-4t^2+4t-1$ より,

$$S'(t)=\frac{32}{9}t^2-8t+4$$

$$=\frac{4}{9}(4t-3)(2t-3)$$

すると，$S(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\frac{3}{4}$ のとき極大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$	$\cdots$	1
$S'(t)$		$+$	0	$-$	
$S(t)$	$\frac{4}{27}$	↗	$\frac{1}{4}$	↘	

(i)(ii)より，$S(t)$ は $t=\frac{1}{2}$ において連続なので，$t=\frac{3}{4}$ のとき最大値 $\frac{1}{4}$ をとる。

コメント

定積分と面積に関する基本的な問題です。場合分けも煩雑ではありません。

問　題

a を正の実数とし，$a \neq \dfrac{1}{2}$ とする。曲線 $C: y = x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と $\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ をとる。点 P を通り P における C の接線と直交する直線を l とし，点 Q を通り Q における C の接線と直交する直線を m とする。l と m の交点が C 上にあるとき，以下の問いに答えよ。

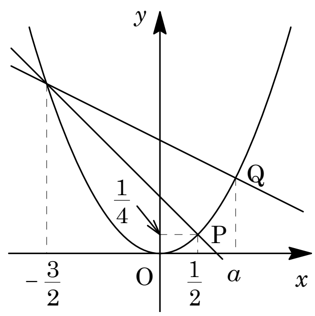
(1)　a の値を求めよ。

(2)　2 直線 $l,\ m$ と曲線 C で囲まれた図形のうちで y 軸の右側の部分の面積を求めよ。

[2012]

解答例

(1)　$C: y = x^2 \cdots\cdots$①に対して，$y' = 2x$



$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$における接線の傾きは 1 なので，接線と直交する直線 l は，

$$y - \frac{1}{4} = -\left(x - \frac{1}{2}\right),\ \ y = -x + \frac{3}{4} \cdots\cdots\cdots②$$

①②の交点は，$x^2 = -x + \dfrac{3}{4}$，$\left(x - \dfrac{1}{2}\right)\left(x + \dfrac{3}{2}\right) = 0$ となり，$x = \dfrac{1}{2},\ -\dfrac{3}{2}$ である。

ここで，$\mathrm{Q}(a,\ a^2)$ における接線と直交する直線 m は，同様にして，

$$y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a),\ \ y = -\frac{1}{2a}x + \frac{1}{2} + a^2 \cdots\cdots\cdots③$$

また，①③の交点は，$x^2 = -\dfrac{1}{2a}x + \dfrac{1}{2} + a^2$，$(x - a)\left(x + \dfrac{1}{2a} + a\right) = 0$ となり，

$$x = a,\ -\frac{1}{2a} - a$$

$a > 0$ で，$a \neq \dfrac{1}{2}$ から，$-\dfrac{3}{2} = -\dfrac{1}{2a} - a$ となり，$2a^2 - 3a + 1 = 0$

よって，$(2a - 1)(a - 1) = 0$ より，$a = 1$ である。

(2)　$a = 1$ のとき，直線 m は，$y = -\dfrac{1}{2}x + \dfrac{3}{2}$ となる。

2 直線 $l,\ m$ と曲線 C で囲まれた図形のうちで $x \geqq 0$ の部分の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{3}{2}\right)\cdot 1 - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{4} + \frac{3}{4}\right)\cdot\frac{1}{2} - \int_{\frac{1}{2}}^{1} x^2 dx = \frac{5}{4} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{8}\right) = \frac{17}{24}$$

コメント

放物線と直線に囲まれた面積という定番の問題です。(2)では，台形の面積公式を利用しています。

問　題

放物線 $y=x^2$ の 2 本の接線 l, m は垂直であるとする。

(1)　l の接点の座標が $(a,\ a^2)$ で与えられるとき，l, m の交点の座標を a を用いて表せ。

(2)　l, m が y 軸に関して対称なとき，l, m および放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$y=x^2$ より，$y'=2x$ となり，点 $(a,\ a^2)$ における接線 l は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots ①$$

接線 m は，同様にして接点 $(b,\ b^2)$ とすると，$y=2bx-b^2\ \cdots\cdots\cdots ②$

①②の交点は，$2ax-a^2=2bx-b^2$，$2(a-b)x=a^2-b^2$ から,

$$x=\frac{a+b}{2},\ \ y=2a\cdot\frac{a+b}{2}-a^2=ab\ \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，条件より，2 本の接線 l, m は直交するので,

$$2a\cdot 2b=-1,\ \ b=-\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

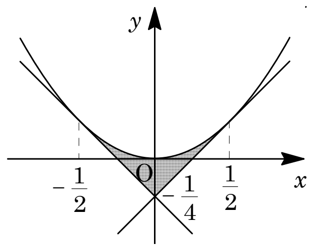
③④から，$x=\dfrac{1}{2}\Big(a-\dfrac{1}{4a}\Big)=\dfrac{4a^2-1}{8a}$，$y=-a\cdot\dfrac{1}{4a}=-\dfrac{1}{4}$

よって，l, m の交点の座標は，$\Big(\dfrac{4a^2-1}{8a},\ -\dfrac{1}{4}\Big)$ となる。

(2)　l, m が y 軸に関して対称なとき，交点は y 軸上にあるので,

$$4a^2-1=0,\ \ a=\pm\frac{1}{2}$$

このとき，接線 l, m は，$y=x-\dfrac{1}{4}$，$y=-x-\dfrac{1}{4}$ となり，l, m および放物線 $y=x^2$ で囲まれる部分の面積 S は，y 軸対称性を考えて,



$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(x^2-x+\frac{1}{4}\Big)dx=2\int_0^{\frac{1}{2}}\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^2dx$$

$$=\frac{2}{3}\Big[\Big(x-\frac{1}{2}\Big)^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{12}$$

コメント

放物線と接線で囲まれた図形が題材のセンター試験でも頻出の基本問題です。

問　題

a を実数とし，$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ とおく。方程式 $f(x)=0$ が 2 つの異なる実数解をもつとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の極値を求めよ。

(3)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，$y=f(x)$ の極大値を与える x について，点 $(x,\ f(x))$ が xy 平面上に描く図形を図示せよ。　[2008]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+(2a-4)x^2+(a^2-4a+4)x$ に対し，$f(x)=0$ ……(＊)とすると，

$$x\{x^2+(2a-4)x+(a-2)^2\}=0,\ \ x(x+a-2)^2=0$$

よって，(＊)の解は，$x=0,\ -a+2$ となり，異なる 2 つの実数解をもつ条件は，$-a+2\neq 0$ より，$a\neq 2$ である。

(2)　$f'(x)=3x^2+2(2a-4)x+(a-2)^2=(x+a-2)(3x+a-2)$

これより，$f'(x)=0$ の解は，$x=-a+2,\ \dfrac{-a+2}{3}$

(i)　$a>2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f(-a+2)=0$$

また，極小値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

x	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$	$\dfrac{-a+2}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$	$\nearrow$

(ii)　$a<2$ のとき

右表より，極大値は，

$$f\left(\frac{-a+2}{3}\right)=\frac{-4(a-2)^3}{27}$$

また，極小値は，

$$f(-a+2)=0$$

x	$\cdots$	$\dfrac{-a+2}{3}$	$\cdots$	$-a+2$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$\dfrac{-4(a-2)^3}{27}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(3)　$y=f(x)$ の極大値を与える x について，$(x,\ y)=(x,\ f(x))$ とおくと，

(i)　$a>2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=(-a+2,\ 0)$ となるので，その軌跡の方程式は，

$$y=0\ (x<0)$$

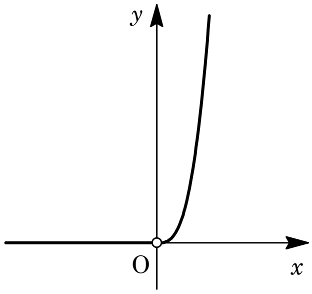
(ii)　$a<2$ のとき

(2)より，$(x,\ y)=\left(\dfrac{-a+2}{3},\ \dfrac{-4(a-2)^3}{27}\right)$となるので，

その軌跡の方程式は，

$$y=-\frac{4}{27}(-3x)^3=4x^3\ (x>0)$$

(i)(ii)より，点$(x,\ f(x))$は，右図の太線を描く。



コメント

方程式$f(x)=0$の左辺が 1 次式の積として因数分解できるとは，予想しませんでした。不意を突かれた感じです。

問　題

関数 $f(x)$ が，$f(x)=x^2-x\int_0^2|f(t)|dt$ を満たしているとする。このとき，$f(x)$ を求めよ。 [2007]

解答例

$f(x)=x^2-x\int_0^2|f(t)|dt$ に対し，$\int_0^2|f(t)|dt=c$ ……(＊)とおくと, $c\geqq 0$ で,

$$f(x)=x^2-cx$$

(＊)に代入して，$c=\int_0^2|t^2-ct|dt$

(i)　$0\leqq c<2$ のとき

$$c=\int_0^c-(t^2-ct)dt+\int_c^2(t^2-ct)dt=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_0^c+\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_c^2$$

$$=-\frac{c^3}{3}+\frac{c^3}{2}+\frac{1}{3}(8-c^3)-\frac{c}{2}(4-c^2)=\frac{c^3}{3}-2c+\frac{8}{3}$$

よって，$c^3-9c+8=0$，$(c-1)(c^2+c-8)=0$

すると, $0\leqq c<2$ より，$c=1$ である。

(ii)　$c\geqq 2$ のとき

$$c=\int_0^2-(t^2-ct)dt=-\left[\frac{t^3}{3}-\frac{ct^2}{2}\right]_0^2=-\frac{8}{3}+2c$$

よって，$c=\frac{8}{3}$ となり，この値は $c\geqq 2$ を満たす。

(i)(ii)より，$f(x)=x^2-x$，$f(x)=x^2-\frac{8}{3}x$

コメント

いわゆる置き換え型の積分方程式です。場合分けはあるものの，常套手段だけで $f(x)$ は求まります。

問　題

連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2$, $y \leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また, a を定数とし, 不等式 $y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

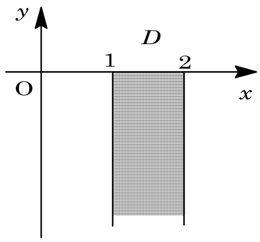
(2) (1)の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。 [2006]

解答例

(1) $D : 1 \leqq x \leqq 2,\ \ y \geqq 0$, $E : y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ に対して, 領域 E の境界線は,

$$y = x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a) \cdots\cdots\cdots (*)$$



$a \leqq 0$ のときは領域 D と E は明らかに共有点をもたない。

そこで, $a > 0$ のとき, D と E とが共有点をもつ条件は, $(*)$と x 軸の交点が $x = a$, $2a$ より, $a \leqq 2$ かつ $2a \geqq 1$ である。よって, $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 2$ となる。

(2) (i) $2a \leqq 2\left(\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1\right)$のとき

$$S(a) = \int_1^{2a} -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a \cdot \frac{x^2}{2} - 2a^2 x\right]_1^{2a}$$

$$= -\frac{1}{3}(8a^3 - 1) + \frac{3}{2}a(4a^2 - 1) - 2a^2(2a - 1) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3}$$

(ii) $1 \leqq a\ (1 \leqq a \leqq 2)$ のとき

$$S(a) = \int_a^{2} -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \left[-\frac{x^3}{3} + 3a \cdot \frac{x^2}{2} - 2a^2 x\right]_a^{2}$$

$$= -\frac{1}{3}(8 - a^3) + \frac{3}{2}a(4 - a^2) - 2a^2(2 - a) = \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3}$$

(3) (i) $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S'(a) = -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(2a - 1)(2a - 3)$$

右表より, $S(a)$ は単調に増加する。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

(ii) $1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$S'(a) = \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6$$

$$= \frac{1}{2}(5a - 6)(a - 2)$$

$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	0
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

(i)(ii)より $S(a)$ の最大値は, $S\left(\dfrac{6}{5}\right) = \dfrac{16}{75}$

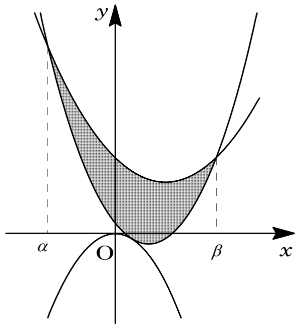
コメント

頻出の放物線と面積の問題です。領域で味付けがしてありますが。

問　題

2 つの曲線$C: y=-x^2$と$D: y=(x-a)^2+b$が 1 点で接している。曲線 D と曲線$E: y=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$によって囲まれる部分の面積$S$が最小となるように実数$a$, bを定め，そのときのSを求めよ。 [2005]

解答例



まず，$C: y=-x^2$……①と$D: y=(x-a)^2+b$……②が接しているので，

$$-x^2=(x-a)^2+b,\ \ 2x^2-2ax+a^2+b=0$$
$$D/4=a^2-2(a^2+b)=0$$

よって，$b=-\frac{1}{2}a^2$……③となり，②に代入すると，

$$y=(x-a)^2-\frac{1}{2}a^2=x^2-2ax+\frac{1}{2}a^2\text{………②}'$$

ここで，②′と$E: y=\frac{1}{2}(x-1)^2+1$……④の交点は，

$$x^2-2ax+\frac{1}{2}a^2=\frac{1}{2}(x-1)^2+1,\ \ \frac{1}{2}x^2-(2a-1)x+\frac{1}{2}(a^2-3)=0\text{………⑤}$$

すると，$D=(2a-1)^2-(a^2-3)=3a^2-4a+4=3\left(a-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}>0$……⑥となることより，⑤はつねに異なる実数解をもち，

$$x=2a-1\pm\sqrt{3a^2-4a+4}$$

この値を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とすると，②′と④によって囲まれる部分の面積$S$は，

$$S=\int_\alpha^\beta -\frac{1}{2}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3$$
$$=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{3a^2-4a+4}\right)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{3a^2-4a+4}\right)^3$$

よって，S が最小となるのは，⑥より$a=\frac{2}{3}$，③より$b=-\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}=-\frac{2}{9}$のときであり，その最小値は，$S=\frac{2}{3}\left(\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^3=\frac{32}{27}\sqrt{6}$である。

コメント

いわゆる$\frac{1}{6}$公式を利用する微積分の基本問題です。完答することが望まれます。

問　題

曲線$C: y = x^2 - 2$と直線$L: y = x$があり，曲線$D: y = -(x-a)^2 + b$が L と接している。C と L の 2 つの交点を結ぶ線分上に D と L の接点があるとき，以下の問いに答えよ。

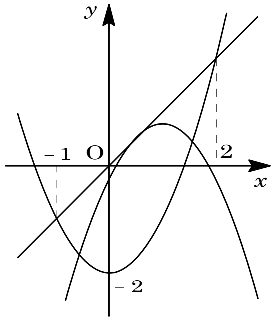
(1) bをaで表し, aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 2 つの曲線 C と D によって囲まれる図形の面積$S(a)$を求めよ。

(3) aが動くとき, (2)の面積$S(a)$の最大値と最小値を求めよ。 [2004]

解答例

(1) $C: y = x^2 - 2$……①と$L: y = x$……②の交点は,



$x^2 - 2 = x$，$x^2 - x - 2 = 0$

よって，$x = -1$，2

②と$D: y = -(x-a)^2 + b$……③の共有点は,

$x = -(x-a)^2 + b$，$x^2 + (1-2a)x + a^2 - b = 0$

②と③が接することより,

$D = (1-2a)^2 - 4(a^2 - b) = 0$，$b = a - \dfrac{1}{4}$………④

このとき，接点の x 座標は$x = -\dfrac{1-2a}{2}$となり，これが

$-1 \leqq x \leqq 2$にあることより,

$-1 \leqq -\dfrac{1-2a}{2} \leqq 2$，$-2 \leqq 2a - 1 \leqq 4$，$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$

(2) ④を③に代入して，$y = -x^2 + 2ax - a^2 + a - \dfrac{1}{4}$………③′

③′と①との交点は，$x^2 - 2 = -x^2 + 2ax - a^2 + a - \dfrac{1}{4}$

$2x^2 - 2ax + a^2 - a - \dfrac{7}{4} = 0$，$x = \dfrac{2a \pm \sqrt{-4a^2 + 8a + 14}}{4}$

これを$x = \alpha$，β $(\alpha < \beta)$とおくと, C と D で囲まれる図形の面積$S(a)$は,

$$S(a) = \int_\alpha^\beta -\left(2x^2 - 2ax + a^2 - a - \frac{7}{4}\right)dx = \int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$= -2\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\sqrt{-4a^2 + 8a + 14}\right)^3$$

$$= \frac{1}{24}\left(\sqrt{-4a^2 + 8a + 14}\right)^3$$

(3) $f(a) = -4a^2 + 8a + 14$とおくと, (2)より，$S(a) = \dfrac{1}{24}\left(\sqrt{f(a)}\right)^3$となり,

$f(a) = -4(a-1)^2 + 18$

(1)から$-\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$より，$f(a)$は最大値$f(1)=18$，最小値$f\left(-\dfrac{1}{2}\right)=f\left(\dfrac{5}{2}\right)=9$をとる。すると，$S(a)$の最大値は$S(1)=\dfrac{1}{24}\left(\sqrt{18}\right)^3=\dfrac{9}{4}\sqrt{2}$となり，最小値は$S\left(-\dfrac{1}{2}\right)=S\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{1}{24}\left(\sqrt{9}\right)^3=\dfrac{9}{8}$となる。

コメント

数Ⅱの微積分の超頻出基本問題です。

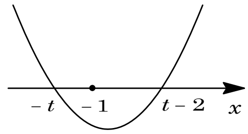
問　題

$t \geqq 1$ において，関数 $f(t)=\int_{-1}^{1}\left|(x-t+2)(x+t)\right|dx$ を最小にする t の値と，そのときの最小値を求めよ。 [2002]

解答例

まず，$g(x)=(x-t+2)(x+t)$ とおくと，

$$f(t)=\int_{-1}^{1}\left|g(x)\right|dx$$



また，$g(x)=0$ の解は，$x=t-2$，$-t$ であるが，$t \geqq 1$ より $-t \leqq -1 \leqq t-2$ となり，$g(x)$ のグラフは右図のようになる。

(i)　$t-2 \geqq 1\ (t \geqq 3)$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{1}-g(x)\,dx=-\int_{-1}^{1}(x^2+2x-t^2+2t)\,dx=-2\int_{0}^{1}(x^2-t^2+2t)\,dx$$

$$=-2\left[\frac{x^3}{3}-(t^2-2t)x\right]_0^1=2t^2-4t-\frac{2}{3}=2(t-1)^2-\frac{8}{3}$$

よって, $t \geqq 3$ のとき，$f(t)$ は単調に増加する。

(ii)　$t-2<1\ (1 \leqq t<3)$ のとき

$$f(t)=\int_{-1}^{t-2}-g(x)\,dx+\int_{t-2}^{1}g(x)\,dx$$

$$=-\int_{-1}^{t-2}(x^2+2x-t^2+2t)\,dx+\int_{t-2}^{1}(x^2+2x-t^2+2t)\,dx$$

$$=-\left[\frac{x^3}{3}+x^2-(t^2-2t)x\right]_{-1}^{t-2}+\left[\frac{x^3}{3}+x^2-(t^2-2t)x\right]_{t-2}^{1}$$

$$=-\frac{2}{3}(t-2)^3-2(t-2)^2+2+2(t^2-2t)(t-2)$$

$$=-\frac{2}{3}(t-2)^3-2(t-2)^2+2+2t(t-2)^2$$

$$f'(t)=-2(t-2)^2-4(t-2)+2(3t-2)(t-2)$$

$$=(t-2)\{-2(t-2)-4+2(3t-2)\}$$

$$=4(t-2)(t-1)$$

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$f'(t)$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

これより，$1 \leqq t<3$ のとき，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

(i)(ii)より，$f(t)$ は連続関数なので，$t=2$ のとき最小値 2 をとる。

コメント

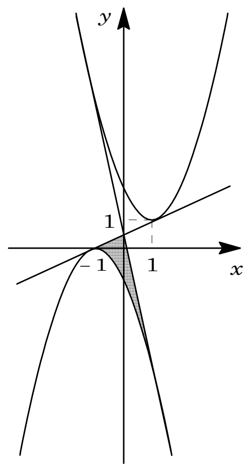
$t \geqq 1$ という条件のために場合分けは減少しましたが，積分の計算は，簡単とはとうてい言えません。

問　題

2 つの放物線$C: y=-(x+1)^2$と$D: y=(x-1)^2+1$の 2 本の共通接線を求めよ。また, C, Dの 2 本の共通接線とCの囲む部分の面積を求めよ。 [2001]

解答例

$C: y=-(x+1)^2$………①, $D: y=(x-1)^2+1$………②とする。



まず, ①上の点$(t,\ -(t+1)^2)$における接線の方程式は, $y'=-2(x+1)$から,

$$y+(t+1)^2=-2(t+1)(x-t)$$

$$y=-2(t+1)x+t^2-1 \cdots\cdots\cdots③$$

②と③が接することより, $(x-1)^2+1=-2(t+1)x+t^2-1$

$$x^2+2tx-t^2+3=0$$

$D/4=t^2-(-t^2+3)=0$から, $2t^2-3=0$, $t=\pm\dfrac{\sqrt{6}}{2}$

③に代入して, 共通接線の方程式は,

$$y=-(\sqrt{6}+2)x+\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots④,\quad y=(\sqrt{6}-2)x+\frac{1}{2} \cdots\cdots\cdots⑤$$

すると, ④と⑤の交点は, $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$となるので, 求める網点部の面積$S$は,

$$S=\int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{0}\left\{(\sqrt{6}-2)x+\frac{1}{2}+(x+1)^2\right\}dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left\{-(\sqrt{6}+2)x+\frac{1}{2}+(x+1)^2\right\}dx$$

$$=\int_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{0}\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2dx+\int_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{2}}\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3\right]_{-\frac{\sqrt{6}}{2}}^{0}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3\right]_{0}^{\frac{\sqrt{6}}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3+\frac{1}{3}\left(\frac{\sqrt{6}}{2}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{2}$$

コメント

2 つの放物線の共通接線を題材にした頻出問題です。

問　題

a を正の定数とする。$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ を満たす関数 $f(x)$ がただ一つしか存在しないように定数 a の値を定めよ。また，そのときの $f(x)$ を求めよ。[1999]

解答例

条件より，$f(x)=ax+\int_0^1\{f(t)\}^2dt$ ………①

$\int_0^1\{f(t)\}^2dt=c$ ……②とおくと，①より $f(x)=ax+c$ ………③

②③より，$c=\int_0^1(at+c)^2dt=\int_0^1(a^2t^2+2act+c^2)dt=\dfrac{a^2}{3}+ac+c^2$

よって，$c^2+(a-1)c+\dfrac{a^2}{3}=0$ ………④

④の解がただ一つしかないことより，

$$D=(a-1)^2-4\cdot\frac{a^2}{3}=0,\ \ a^2+6a-3=0$$

$a>0$ より，$a=-3+2\sqrt{3}$

このとき④の重解は，$c=-\dfrac{a-1}{2}=-\dfrac{-4+2\sqrt{3}}{2}=2-\sqrt{3}$

以上より，③から，$f(x)=(-3+2\sqrt{3})x+(2-\sqrt{3})$

コメント

常套手段だけで完答できるものです。気を付けるのは，c の値を計算するときくらいです。

問　題

2 つの曲線 $y = x^2$ と $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$ で囲まれた図形を S とする。ただし，S は境界を含むものとする。

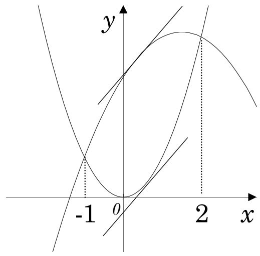
(1)　S の面積を求めよ。

(2)　直線 $y = x + k$ が, S と共通部分を持つための k の範囲を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$y = x^2 \cdots\cdots$①と $y = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 \cdots\cdots$②の交点は,

$x^2 = -\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3$，$x^2 - x - 2 = 0$ より，$x = -1,\ 2$



S の面積を S とすると,

$$S = \int_{-1}^{2}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3\right) - x^2\right\}dx$$

$$= \int_{-1}^{2} -\frac{3}{2}(x-2)(x+1)\,dx$$

$$= -\frac{3}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(2+1)^3 = \frac{27}{4}$$

(2)　①と $y = x + k$ が接する場合は，$x^2 = x + k$，$x^2 - x - k = 0$ が重解をもつので,

$$D = 1 + 4k = 0,\quad k = -\frac{1}{4}$$

②と $y = x + k$ が接する場合は，$-\frac{1}{2}x^2 + \frac{3}{2}x + 3 = x + k$，$x^2 - x + 2k - 6 = 0$ が重解をもつので,

$$D = 1 - 4(2k - 6) = 0,\quad k = \frac{25}{8}$$

求める k の範囲は，図より $-\frac{1}{4} \leqq k \leqq \frac{25}{8}$

コメント

超基本レベルの問題です。

問　題

放物線$C : y = x^2$に対して，以下の問いに答えよ。

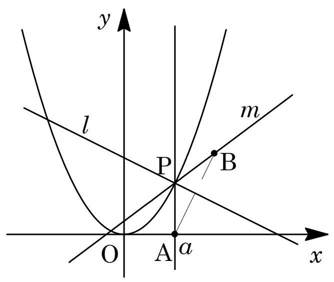
(1)　C 上の点$\mathrm{P}(a,\ a^2)$を通り，P における C の接線に直交する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　l を(1)で求めた直線とする。$a \neq 0$のとき，直線$x = a$を l に関して対称に折り返して得られる直線 m の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた直線 m は a の値によらず定点 F を通ることを示し，F の座標を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$C : y = x^2$に対して，$y' = 2x$



これから，点$\mathrm{P}(a,\ a^2)$における C の接線の方向ベクトルの成分を$(1,\ 2a)$とおくことができるので，接線に直交する直線 l の方程式は，

$$(x-a)+2a(y-a^2)=0,\quad x+2ay-a-2a^3=0$$

(2)　点$\mathrm{A}(a,\ 0)$の l に関する対称点を$\mathrm{B}(b,\ c)$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = k(1,\ 2a),\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + k(1,\ 2a)$$

よって，$(b,\ c) = (a,\ 0) + k(1,\ 2a) = (a+k,\ 2ak)$ ………①

また，線分 AB の中点$\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{c}{2}\right)$が l 上にあることより，

$$\frac{a+b}{2} + 2a\cdot\frac{c}{2} - a - 2a^3 = 0,\quad b + 2ac - a - 4a^3 = 0 \text{ ………②}$$

①②より，$a + k + 4a^2k - a - 4a^3 = 0$，$k = \dfrac{4a^3}{4a^2+1}$

よって，$(b,\ c) = \left(a + \dfrac{4a^3}{4a^2+1},\ \dfrac{8a^4}{4a^2+1}\right)$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}} = \left(a + \frac{4a^3}{4a^2+1} - a,\ \frac{8a^4}{4a^2+1} - a^2\right) = \frac{a^2}{4a^2+1}(4a,\ 4a^2-1)$$

$a \neq 0$のとき, 2 点 P, B を通る直線 m の方程式は,

$$y - a^2 = \frac{4a^2-1}{4a}(x-a),\quad y = \frac{4a^2-1}{4a}x + \frac{1}{4}$$

(3)　a の値によらず直線 m が通る定点 F の座標は, (2)より，$\mathrm{F}\left(0,\ \dfrac{1}{4}\right)$である。

コメント

図形と方程式についての基本題です。ただ，(3)については，定点が 2 点以上存在する可能性はないので, 1 点を見つけて終了としています。

問　題

不等式 $2y > x+1+3|x-1|$ が表す座標平面上の領域を D とする。実数 a に対して，放物線 C を $y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$ で定める。このとき，C 上の点がすべて D の点となるような a の範囲を求めよ。 [2009]

解答例

放物線 $C : y = x^2 - 2ax + a^2 + a + 2$，領域 $D : 2y > x+1+3|x-1|$ に対して，C 上の点がすべて D の点となる条件は，すべての x について，

$$2(x^2 - 2ax + a^2 + a + 2) > x+1+3|x-1| \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$より, $x \geqq 1$ において，$2(x^2 - 2ax + a^2 + a + 2) > x+1+3(x-1)$

$$x^2 - 2(a+1)x + a^2 + a + 3 > 0,\ \{x-(a+1)\}^2 - a + 2 > 0 \cdots\cdots\cdots①$$

$(*)$より, $x < 1$ において，$2(x^2 - 2ax + a^2 + a + 2) > x+1-3(x-1)$

$$x^2 - (2a-1)x + a^2 + a > 0,\ \left(x - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + 2a - \frac{1}{4} > 0 \cdots\cdots\cdots②$$

さて, $x \geqq 1$ において，①が成立する条件は,

(i)　$a+1 \geqq 1\ (a \geqq 0)$ のとき

$-a+2 > 0$ から，$a < 2$ となり，$0 \leqq a < 2$

(ii)　$a+1 < 1\ (a < 0)$ のとき

$1 - 2(a+1) + a^2 + a + 3 > 0$，$a^2 - a + 2 > 0$ となり，つねに成立するので，$a < 0$

(i)(ii)より，$a < 2 \cdots\cdots\cdots③$

次に, $x < 1$ において，②が成立する条件は,

(iii)　$\dfrac{2a-1}{2} \geqq 1\ \left(a \geqq \dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$1 - (2a-1) + a^2 + a \geqq 0$，$a^2 - a + 2 \geqq 0$ となり，つねに成立するので，$a \geqq \dfrac{3}{2}$

(iv)　$\dfrac{2a-1}{2} < 1\ \left(a < \dfrac{3}{2}\right)$ のとき

$2a - \dfrac{1}{4} > 0$ から，$a > \dfrac{1}{8}$ となり，$\dfrac{1}{8} < a < \dfrac{3}{2}$

(iii)(iv)より，$a > \dfrac{1}{8} \cdots\cdots\cdots④$

以上より，すべての x について$(*)$が成立する条件は，③④から $\dfrac{1}{8} < a < 2$ である。

コメント

数式的な処理で押し通すと，内容は 2 次不等式の解法になります。

問　題

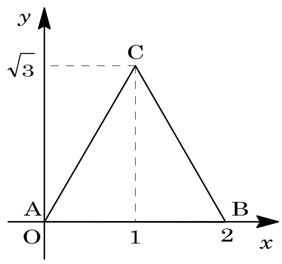
xy 平面の 3 点 $A(0,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$C(1,\ \sqrt{3})$ を頂点とする△ABC に対して以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ を満たす定数 a に対して，点 $P(x,\ a)$ が△ABC に含まれるための x の範囲を求めよ。

(2)　(1)の定数 a に対して，(1)で求められた範囲を x が動くとき，$AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と，そのときの x の値を求めよ。

(3)　点 $P(x,\ y)$ が△ABC に含まれるとき，$AP^2 + BP^2 + CP^2$ の最小値と，そのときの点 P の座標 $(x,\ y)$ を求めよ。　[2007]

解答例



(1)　直線 AC, 直線 BC の方程式は，それぞれ，

$$y = \sqrt{3}x,\quad y = -\sqrt{3}(x-2)$$

点 $P(x,\ a)$ が△ABC に含まれるための条件は，$0 \leqq a \leqq \sqrt{3}$ より，

$$a \leqq \sqrt{3}x,\quad a \leqq -\sqrt{3}(x-2)$$

よって，$\dfrac{a}{\sqrt{3}} \leqq x \leqq 2 - \dfrac{a}{\sqrt{3}}$ ………(＊)

(2)　$P(x,\ a)$ に対し，

$$\begin{aligned} AP^2 + BP^2 + CP^2 &= x^2 + a^2 + (x-2)^2 + a^2 + (x-1)^2 + (a-\sqrt{3})^2 \\ &= 3x^2 + 3a^2 - 6x - 2\sqrt{3}a + 8 \\ &= 3(x-1)^2 + 3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5 \end{aligned}$$

(＊)から，$x = 1$ のとき，$AP^2 + BP^2 + CP^2$ は最小値 $3a^2 - 2\sqrt{3}a + 5$ をとる。

(3)　(2)より，$P(x,\ y)$ に対し，

$$AP^2 + BP^2 + CP^2 = 3(x-1)^2 + 3y^2 - 2\sqrt{3}y + 5 = 3(x-1)^2 + 3\left(y - \frac{\sqrt{3}}{3}\right)^2 + 4$$

よって，$(x,\ y) = \left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\right)$ は△ABC に含まれることより，この点において $AP^2 + BP^2 + CP^2$ は最小値 4 をとる。

コメント

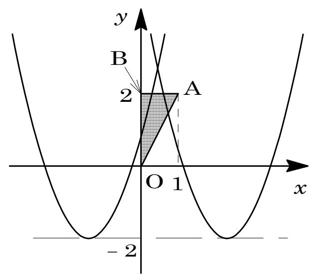
丁寧すぎると感じるくらいの誘導がついています。(3)だけの出題だったとしても，難しくはありません。

問　題

放物線 $y=(x-p)^2-2$ が, 3 点 $(0,\ 0)$, $(1,\ 2)$, $(0,\ 2)$ を頂点とする三角形と交わるような実数 p の範囲を求めよ。 [2001]

解答例

まず, $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 2)$, $\mathrm{B}(0,\ 2)$ とし, 放物線 $y=(x-p)^2-2$ に対して, $f(x,\ y)=(x-p)^2-y-2$ とおく。



放物線と△OAB が交わる条件は, 右図から, 放物線が線分 OA または OB の少なくとも一方と交わることである。

(i)　放物線が線分 OA と交わるとき

$f(0,\ 0)\cdot f(1,\ 2)\leqq 0$ より, $(p^2-2)\{(1-p)^2-4\}\leqq 0$

$$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})(p+1)(p-3)\leqq 0$$

$$-\sqrt{2}\leqq p\leqq -1,\ \ \sqrt{2}\leqq p\leqq 3$$

(ii)　放物線が線分 OB と交わるとき

$f(0,\ 0)\cdot f(0,\ 2)\leqq 0$ より, $(p^2-2)(p^2-4)\leqq 0$

$$(p+\sqrt{2})(p-\sqrt{2})(p+2)(p-2)\leqq 0$$

$$-2\leqq p\leqq -\sqrt{2},\ \ \sqrt{2}\leqq p\leqq 2$$

(i)(ii)より, 放物線と△OAB が交わる条件は, $-2\leqq p\leqq -1$, $\sqrt{2}\leqq p\leqq 3$

コメント

放物線が線分 AB だけと交わる場合のないことが, 図からわかります。なお, 正領域・負領域の考え方を利用して, p の範囲を求めました。

問　題

2 つの正の数 a, b に対し, xy 平面上の 3 点を $\mathrm{A}(-a,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ b)$, $\mathrm{C}(a,\ 0)$ とする。$0<t<1$ である各 t に対し, 線分 AB と BC を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{Q}(t)$ とし, さらに線分 $\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)$ を $t:1-t$ に内分する点を $\mathrm{R}(t)$ とし, 点 $\mathrm{R}(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ の描く曲線を R とする。ただし, $\mathrm{R}(0)=\mathrm{A}$, $\mathrm{R}(1)=\mathrm{C}$ とする。

(1)　曲線 R を x と y で表せ。

(2)　2 点 $\mathrm{P}(t)$, $\mathrm{Q}(t)$ を結ぶ直線 $l(t)$ の方程式を求め, $l(t)$ が, 点 $\mathrm{R}(t)$ で曲線 R に接することを示せ。

(3)　三角形 ABC 内で直線 $l(t)$, $0\leqq t\leqq 1$ が通る点の領域を図示し, その面積 S を求めよ。ただし, $l(0)$ は点 A, B を通る直線とし, $l(1)$ は点 B, C を通る直線とする。

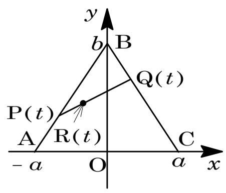
[2000]

解答例

(1)　条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(-a(1-t),\ bt)$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+t\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(at,\ b(1-t))$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}(t)}&=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OP}(t)}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}(t)}\\&=(1-t)(-a(1-t),\ bt)+t(at,\ b(1-t))\\&=(a(2t-1),\ 2bt(1-t))\end{aligned}$$



点 $\mathrm{R}(t)$ の座標を $(x,\ y)$ とすると, $x=a(2t-1)$ ……①, $y=2bt(1-t)$ ……②

①より $t=\dfrac{x+a}{2a}$, これを②に代入して,

$$y=2b\cdot\frac{x+a}{2a}\left(1-\frac{x+a}{2a}\right)=\frac{b}{2a^2}(x+a)(a-x)=-\frac{b}{2a^2}(x^2-a^2)\ \cdots\cdots\cdots③$$

なお, $0\leqq t\leqq 1$ なので①から, $-a\leqq x\leqq a$ である。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)}=(at+a(1-t),\ b(1-t)-bt)=(a,\ b(1-2t))$ より,

$$l(t):y-bt=\frac{b(1-2t)}{a}\left\{x+a(1-t)\right\}$$

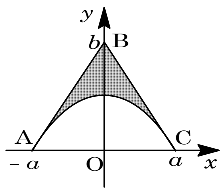
まとめて, $y=\dfrac{b(1-2t)}{a}x+b(1-2t+2t^2)$ ………④

③④より, $-\dfrac{b}{2a^2}(x^2-a^2)=\dfrac{b(1-2t)}{a}x+b(1-2t+2t^2)$

$$x^2+2a(1-2t)x+a^2(1-2t)^2=0,\ \left\{x+a(1-2t)\right\}^2=0\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

これより, ⑤は重解 $x=a(2t-1)$ をもつので, ③と④は点 $\mathrm{R}(t)$ で接する。

(3)　直線$l(t)$の通過する領域は，(1)(2)より，直線 AB，BC の下側で，放物線③の上側であり，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



その面積Sは，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2a\cdot b-\int_{-a}^{a}-\frac{b}{2a^2}(x^2-a^2)\,dx$$

$$=ab+\frac{b}{2a^2}\left(-\frac{1}{6}\right)(a+a)^3=\frac{1}{3}ab$$

コメント

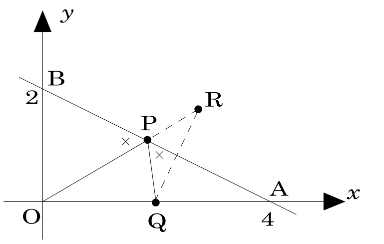
線分の通過領域の問題です。(2)で図形的に考えることができるように誘導があります。

問　題

2 点 $A(4,\ 0)$, $B(0,\ 2)$ を考える。線分 AB 上の点 P と x 軸上の点 Q が $\angle OPB = \angle QPA$ （O：原点）をみたしている。直線 OP の傾きを m として, Q の x 座標を m を用いて表せ。 [1998]

解答例

点 Q の x 座標を k とし, $Q(k,\ 0)$ の直線 AB に関する対称点を $R(a,\ b)$ とおく。



直線 AB の方程式は $\dfrac{x}{4}+\dfrac{y}{2}=1$ ……①なので, 法線ベクトルは $\left(\dfrac{1}{4},\ \dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(1,\ 2)$ となる。

$$\overrightarrow{OR}=\overrightarrow{OQ}+l(1,\ 2)=(k+l,\ 2l)$$

線分 QR の中点が①上にあるので,

$$\frac{1}{4}\cdot\frac{k+k+l}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{2l}{2}=1,\ 5l=8-2k\ \cdots\cdots\cdots②$$

$\angle OPB = \angle QPA$ より, 点 R は直線 OP : $y=mx$ 上にあるので,

$$2l=m(k+l),\ (2-m)l=mk\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $(2-m)\dfrac{8-2k}{5}=mk,\ (3m+4)k-8(2-m)=0$

$$k=\frac{8(2-m)}{3m+4}$$

コメント

頻出の反射の問題です。上の解は常套手段である折り返しを用いたもので, この方法が最も簡明です。他には, 正接の加法定理を用いることも可能ですが, 計算が複雑になり, しかも点 Q が点 O に一致するときや, 直線 PQ が y 軸に平行になる場合のチェックのために記述量が 2 倍程度にふくらみます。

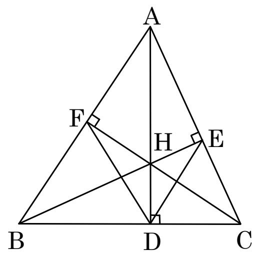
問　題

鋭角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2)　$\angle ADE = \angle ADF$ であることを示せ。　[2016]

解答例



(1)　垂心が H である右図の△ABC において，

$$\angle BFC = \angle BEC = 90^\circ$$

すると，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する。

また，$\angle AFH = \angle AEH = 90^\circ$ より，

$$\angle AFH + \angle AEH = 180^\circ$$

すると，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する。

(2)　(1)から，四角形 BCEF が円に内接することより，

$$\angle ECF = \angle EBF \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle CEH + \angle CDH = 180^\circ$ から，四角形 CEHD が円に内接するので，

$$\angle ECH = \angle HDE,\ \angle ECF = \angle ADE \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\angle BDH + \angle BFH = 180^\circ$ から，四角形 BDHF が円に内接するので，

$$\angle FBH = \angle HDF,\ \angle EBF = \angle ADF \cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$\angle ADE = \angle ADF$

コメント

円に内接する四角形を題材にした，教科書の練習問題に掲載されているような問題です。

問　題

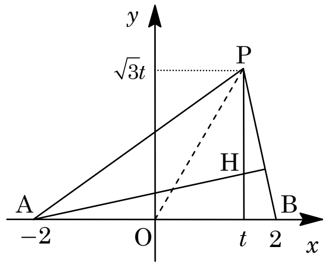
$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $A(-2,\ 0)$，$B(2,\ 0)$，$P(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$t>0$ のとき $\angle PAB<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，$\triangle APB$ が鋭角三角形となる条件は $\angle PBA<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle APB<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $OP>2$ $(2t>2)$ となる。

よって，求める t の範囲は，$1<t<2$ である。

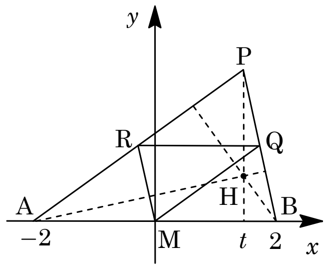
(2)　P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{BP}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0 \text{ ………②}$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

よって，$\triangle APB$ の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。



(3)　M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので，

$$RQ /\!/ AB,\ QM /\!/ PA,\ RM /\!/ PB$$

ここで，H は $\triangle APB$ の垂心より，

$$PH\perp RQ,\ BH\perp QM,\ AH\perp RM \text{ ………③}$$

さて，xy 平面に垂直に z 軸をとり，$\triangle ABP$ を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において，P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると，③より，s を正の実数として，$C\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$CM=2$ から，$t^2+\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり，

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABP}\right)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\left(t^2-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}}$$

$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}\left(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\right)$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。

問　題

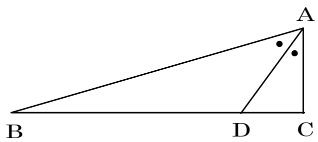
$\angle$C を直角とする直角三角形 ABC に対して，$\angle$A の二等分線と線分 BC の交点をD とする。また，線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。$\angle A=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta$ を求めよ。

(2)　$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

[2007]

解答例



(1)　条件より，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{3}{5}$，$\cos\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{4}{5}$ より，

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{24}{25}$$

(2)　$$\sin\frac{5}{12}\pi=\sin\left(\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\right)=\sin\frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{4}+\cos\frac{\pi}{6}\sin\frac{\pi}{4}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

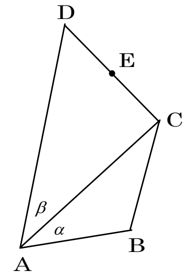
$$>\frac{1.414}{4}(1+1.732)>0.96=\frac{24}{25}$$

ここで，関数 $f(\theta)=\sin\theta$ は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において単調に増加し，$\sin\theta<\sin\dfrac{5}{12}\pi$ となることから，$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ である。

コメント

数値計算はあるものの，さほど面倒でもなく，あっさりと解決する問題です。

問　題



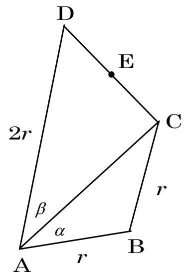
すべての内角が$180°$より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=r$，$\mathrm{AD}=2r$とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形△ABC，△ACE，△ADEの面積はすべて等しいとする。$\alpha=\angle\mathrm{BAC}$，$\beta=\angle\mathrm{CAD}$とおく。

(1)　$\alpha=\beta$を示せ。

(2)　$\cos\angle\mathrm{DAB}=\dfrac{3}{5}$であるとするとき，$\sin\angle\mathrm{CAE}$の値を求めよ。

[2005]

解答例



(1)　△ABCは二等辺三角形なので，$\mathrm{AC}=2\mathrm{AB}\cos\alpha=2r\cos\alpha$

そこで，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}r\cdot2r\cos\alpha\cdot\sin\alpha=r^2\cos\alpha\sin\alpha$

$$\triangle\mathrm{ADC}=\frac{1}{2}\cdot2r\cdot2r\cos\alpha\cdot\sin\beta=2r^2\cos\alpha\sin\beta$$

条件より，$\triangle\mathrm{ADC}=2\triangle\mathrm{ABC}$なので，

$$\sin\alpha=\sin\beta$$

よって，$\alpha=\beta$または$\alpha=180°-\beta$

すると，条件より$\alpha+\beta<180°$なので，$\alpha=\beta$である。

(2)　$\alpha=\beta$より，$\mathrm{AC}=2r\cos\beta$となるので，$\angle\mathrm{ACD}=90°$であり，

$$\mathrm{CD}=2r\sin\beta=2r\sin\alpha$$

さて，$\triangle\mathrm{ACE}=\triangle\mathrm{ADE}$から，点 E は辺 CD の中点となり，

$$\mathrm{CE}=\frac{1}{2}\mathrm{CD}=r\sin\alpha$$

ここで，$\angle\mathrm{CAE}=\theta$とおくと，

$$\tan\theta=\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{AC}}=\frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha}=\frac{1}{2}\tan\alpha\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$\cos2\alpha=\dfrac{3}{5}$なので，$2\alpha<90°$から$\tan2\alpha=\dfrac{4}{3}$となり，

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha}=\frac{4}{3},\ 2\tan^2\alpha+3\tan\alpha-2=0,\ (2\tan\alpha-1)(\tan\alpha+2)=0$$

$\alpha<90°$から$\tan\alpha>0$なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\tan\theta=\dfrac{1}{4}$となり，$\sin\theta=\dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}}=\dfrac{1}{\sqrt{17}}$である。

コメント

問題の図からも想像できますが，△ACD は直角三角形です。この発見がポイントになります。

問　題

四角形 OABC は辺 OA を下底, 辺 CB を上底とし, $\angle$AOC と $\angle$OAB が等しい等脚台形である。$a=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$, $c=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|$, $m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。

(1) $m<\dfrac{a^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(2) 等脚台形 OABC の面積 S を a, c, m を用いて表せ。

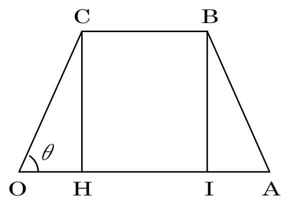
(3) 対角線 OB と AC の交点を D とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を用いて表せ。

[2004]

解答例

(1) $\angle\mathrm{AOC}=\theta$ とおくと, $m=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=ac\cos\theta$ となる。

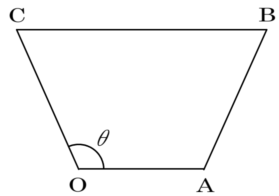
頂点 C, B から OA に下ろした垂線の足を, それぞれ H, I とする。



(i) OA＞CB ($0°<\theta<90°$) のとき

OH = AI から OH + AI$<a$ となり, $\mathrm{OH}<\dfrac{a}{2}$

よって, $m=a\cdot c\cos\theta=a\mathrm{OH}<\dfrac{a^2}{2}$



(ii) OA ≦ CB ($90°\leqq\theta<180°$) のとき

$\cos\theta\leqq 0$ より, $m<\dfrac{a^2}{2}$ は成立する。

(2) (i) OA＞CB ($0°<\theta<90°$) のとき

(1)より, $\mathrm{CB}=a-2c\cos\theta=a-\dfrac{2m}{a}$

$$\mathrm{CH}=c\sin\theta=c\sqrt{1-\cos^2\theta}=c\sqrt{1-\frac{m^2}{a^2c^2}}=\frac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a}$$

よって, $S=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{2m}{a}+a\right)\cdot\dfrac{\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a}=\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}$

(ii) OA ≦ CB ($90°\leqq\theta<180°$) のとき

$$\mathrm{CB}=a+2c\cos(180°-\theta)=a-2c\cos\theta,\ \mathrm{CH}=c\sin(180°-\theta)=c\sin\theta$$

(i)と同様に, $S=\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}$

(i)(ii)より, $S=\dfrac{(a^2-m)\sqrt{a^2c^2-m^2}}{a^2}$

(3) CB // OA より, $\mathrm{CD}:\mathrm{DA}=\mathrm{CB}:\mathrm{OA}=\left(a-\dfrac{2m}{a}\right):a=(a^2-2m):a^2$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{(a^2-2m)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+a^2\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2a^2-2m}$$

コメント

台形の上底と下底の長さの大小関係で，場合分けをする必要があります。この点に気付くことがポイントの１つです。

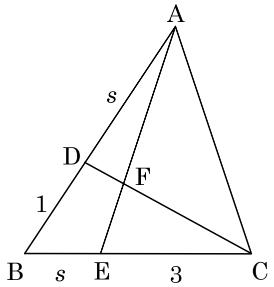
問　題

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。 [2017]

解答例



(1) $\triangle$ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$

条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので，

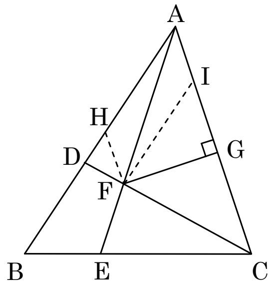
$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは α が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より，

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより，

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\dfrac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

よって，FG の長さが最大となるときの s の値は $s=\sqrt{3}$ である。

コメント

平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが，(1)では分点ベクトル，(2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

問　題

平面上で原点 O と 3 点 A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，C$(-1,\ 1)$を考える。実数 s，t に対し，点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$により定める。以下の問いに答えよ。

(1) s，t が条件 $-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ を満たすとき，点 P$(x,\ y)$の存在する範囲 D を図示せよ。

(2) 点 P が(1)で求めた範囲 D を動くとき，内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}$の最大値を求め，そのときの P の座標を求めよ。 [2016]

解答例

(1) A$(3,\ 1)$，B$(1,\ 2)$，P$(x,\ y)$に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$より，

$$(x,\ y)=s(3,\ 1)+t(1,\ 2)=(3s+t,\ s+2t)$$

これより，$s=\dfrac{1}{5}(2x-y)$，$t=\dfrac{1}{5}(-x+3y)$となる。

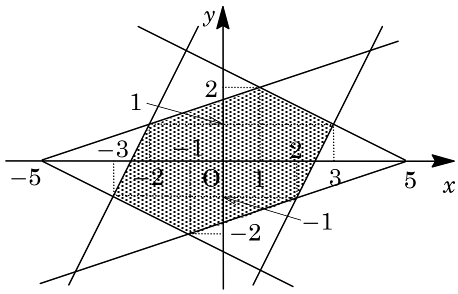
さて，条件より，$-1\leqq s\leqq 1$，$-1\leqq t\leqq 1$，$-1\leqq s+t\leqq 1$ なので，

$$-5\leqq 2x-y\leqq 5\cdots\cdots①,\ -5\leqq -x+3y\leqq 5\cdots\cdots②,\ -5\leqq x+2y\leqq 5\cdots\cdots③$$

①より，$2x-5\leqq y\leqq 2x+5$

②より，$\dfrac{1}{3}(x-5)\leqq y\leqq\dfrac{1}{3}(x+5)$

③より，$-\dfrac{1}{2}(x+5)\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}(x-5)$



よって，点 P の存在範囲 D は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(2) C$(-1,\ 1)$に対し，$k=\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-x+y$ とおくと $y=x+k$ となり，xy 平面上で傾き 1 の直線群を表す。

すると，k が最大になるのは，(1)の図から点 P が P$(-2,\ 1)$のときになり，最大値は$-(-2)+1=3$である。

コメント

ベクトルと領域に関する問題で，最初から成分表示をした解答例です。

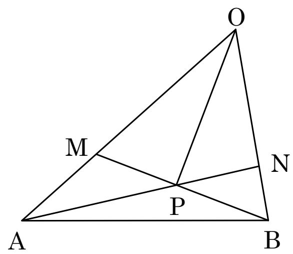
問　題

t を正の実数とする。三角形 OAB の辺 OA を $2:1$ に内分する点を M, 辺 OB を $t:1$ に内分する点を N とする。線分 AN と線分 BM の交点を P とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表せ。

(2) 直線 OP は線分 BM と直交し, かつ $\angle\mathrm{AOB}$ の二等分線であるとする。このとき, 辺 OA と辺 OB の長さの比と t の値を求めよ。 [2014]

解答例



(1) $\triangle\mathrm{OAN}$ と直線 BM について, メネラウスの定理を適用すると, $\dfrac{\mathrm{OM}}{\mathrm{MA}}\cdot\dfrac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}\cdot\dfrac{\mathrm{NB}}{\mathrm{BO}}=1$ である。

条件より, $\mathrm{OM}:\mathrm{MA}=2:1$, $\mathrm{ON}:\mathrm{NB}=t:1$ なので,

$$\frac{\mathrm{AP}}{\mathrm{PN}}=\frac{\mathrm{MA}}{\mathrm{OM}}\cdot\frac{\mathrm{BO}}{\mathrm{NB}}=\frac{1}{2}\cdot\frac{t+1}{1}=\frac{t+1}{2}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{(t+1)+2}\{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t+1)\overrightarrow{\mathrm{ON}}\}$

$$=\frac{1}{t+3}\left\{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(t+1)\cdot\frac{t}{t+1}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right\}=\frac{1}{t+3}(2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

(2) $\triangle\mathrm{OMB}$ において, $\mathrm{OP}\perp\mathrm{BM}$ かつ $\angle\mathrm{MOP}=\angle\mathrm{BOP}$ より, $\mathrm{OM}=\mathrm{OB}$ となり,

$$\frac{2}{3}\mathrm{OA}=\mathrm{OB},\ \ \mathrm{OA}:\mathrm{OB}=3:2$$

また, 点 P は MB の中点であるので, (1)より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{t+3}\left(2\cdot\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{t+3}(3\overrightarrow{\mathrm{OM}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

よって, $\dfrac{3}{t+3}=\dfrac{t}{t+3}=\dfrac{1}{2}$ から, $t=3$ である。

コメント

平面ベクトルの基本問題です。解答例では, メネラウスの定理を利用しましたが, 必須というわけではありません。

問　題

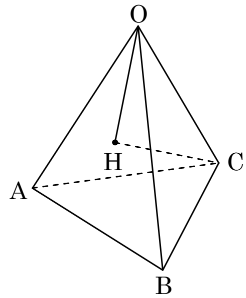
四面体 OABC において，$OA=OB=OC=1$ とする。$\angle AOB=60^\circ$，$\angle BOC=45^\circ$，$\angle COA=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{OH}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。 [2013]

解答例



(1) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

さて，点 H は平面 OAB 上にあるので，$s,\ t$ を実数とし，

$$\overrightarrow{OH}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

すると，$\overrightarrow{CH}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ となり，条件から $\overrightarrow{CH}$ は平面 OAB に垂直なので，

$$\overrightarrow{CH}\cdot\vec{a}=s+\frac{1}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0,\ \ \overrightarrow{CH}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}s+t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

これより，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となり，$\overrightarrow{OH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2) (1)より，$\overrightarrow{CH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{CH}|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+(-1)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

よって，$CH=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) $\triangle OAB=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より，四面体 OABC の体積 V は，(2)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}$$

コメント

空間ベクトルの図形への応用についての基本題です。詳しすぎるぐらいの誘導がついています。なお，対称性に着目した方法も可能です。

問　題

平面上のベクトル$\vec{a}$，$\vec{b}$が，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$を満たすとする。ただし，記号$\vec{a}\cdot\vec{b}$は$\vec{a}$と$\vec{b}$の内積を表す。以下の問いに答えよ。

(1) 実数 p, q に対して，$\vec{c}=p\vec{a}+q\vec{b}$とおく。このとき，次の条件$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$，$p>0$を満たす実数$p, q$を求めよ。

(2) 平面上のベクトル$\vec{x}$が，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$を満たすとき，$|\vec{x}|$のとりうる値の範囲を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-\dfrac{1}{2}$より，

$$|\vec{c}|^2=|p\vec{a}+q\vec{b}|^2=p^2|\vec{a}|^2+2pq\vec{a}\cdot\vec{b}+q^2|\vec{b}|^2=p^2-pq+q^2$$

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot(p\vec{a}+q\vec{b})=p|\vec{a}|^2+q\vec{a}\cdot\vec{b}=p-\frac{1}{2}q$$

すると，$|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=0$から，$p^2-pq+q^2=1$……①，$p-\dfrac{1}{2}q=0$……②

①②より，$p^2-2p^2+4p^2=1$，$p^2=\dfrac{1}{3}$となり，$p>0$から，

$$p=\frac{1}{\sqrt{3}},\ q=\frac{2}{\sqrt{3}}$$

(2) $\vec{x}=s\vec{a}+t\vec{b}$とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{x}=s-\dfrac{1}{2}t$，$\vec{b}\cdot\vec{x}=-\dfrac{1}{2}s+t$となる。

条件から，$-1\leqq\vec{a}\cdot\vec{x}\leqq1$，$1\leqq\vec{b}\cdot\vec{x}\leqq2$なので，

$$-1\leqq s-\frac{1}{2}t\leqq1\ \text{………①},\quad 1\leqq-\frac{1}{2}s+t\leqq2\ \text{………②}$$

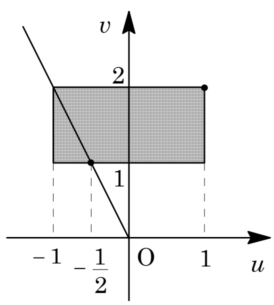
ここで，$u=s-\dfrac{1}{2}t$，$v=-\dfrac{1}{2}s+t$とおくと，$s=\dfrac{2}{3}(2u+v)$，$t=\dfrac{2}{3}(u+2v)$

①②より，$-1\leqq u\leqq1$，$1\leqq v\leqq2$………③

さて，$|\vec{x}|^2=s^2-st+t^2$なので，

$$|\vec{x}|^2=\frac{4}{9}\{(2u+v)^2-(2u+v)(u+2v)+(u+2v)^2\}$$

$$=\frac{4}{3}(u^2+uv+v^2)$$



すると，③は右図の網点部となるので，$(u,\ v)=(1,\ 2)$のとき，$|\vec{x}|^2$は最大値$\dfrac{4}{3}(1+2+4)=\dfrac{28}{3}$をとる。

また，$|\vec{x}|^2=\dfrac{4}{3}\left(u+\dfrac{1}{2}v\right)^2+v^2$ から，v をいったん固定すると，$|\vec{x}|^2$ が最小となるのは，$u=-\dfrac{1}{2}v$ $(v=-2u)$ のときであり，この関係を満たしながら，$1\leqq v\leqq 2$ で v を変化させると，$(u,\ v)=\left(-\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ で最小値 1 をとる。

以上より，$1\leqq|\vec{x}|^2\leqq\dfrac{28}{3}$ となり，$1\leqq|\vec{x}|\leqq\dfrac{2}{3}\sqrt{21}$ である。

コメント

成分表示を用いるか，そのまま 1 次結合で計算を進めるかを迷いましたが，後者の立場で記しました。なお，(2)の u，v への置き換えは，1 文字固定という方法で最大・最小を求めるときに，領域を長方形にしてわかりやすくするためです。

問　題

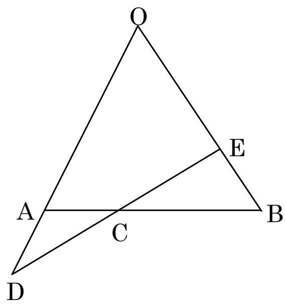
三角形 OAB の辺 AB を $1:2$ に内分する点を C とする。動点 D は $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ $(x\geqq 1)$ を満たすとし，直線 CD と直線 OB の交点を E とする。

(1) 実数 y を $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で定めるとき，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{x}+\frac{1}{y}=3$$

(2) 三角形 OAB の面積を S，三角形 ODE の面積を T とするとき，$\dfrac{S}{T}$ の最大値と，そのときの x を求めよ。　[2011]

解答例



(1) $\triangle$OAB と直線 DE に対し，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OD}}{\mathrm{DA}}\cdot\frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CB}}\cdot\frac{\mathrm{BE}}{\mathrm{EO}}=1$$

$\mathrm{AC}:\mathrm{CB}=1:2$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=x\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=y\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$\frac{x}{x-1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1-y}{y}=1,\ \ x(1-y)=2y(x-1)$$

よって，$x+2y=3xy$ より，$\dfrac{2}{x}+\dfrac{1}{y}=3$ ………$(*)$

(2) まず，$T=xyS$ から，$\dfrac{S}{T}=\dfrac{1}{xy}$ となる。

さて，$(*)$から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$3=\frac{2}{x}+\frac{1}{y}\geqq 2\sqrt{\frac{2}{xy}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{xy}},\ \ \frac{9}{8}\geqq\frac{1}{xy}$$

等号は，$\dfrac{2}{x}=\dfrac{1}{y}=\dfrac{3}{2}\left(x=\dfrac{4}{3},\ y=\dfrac{2}{3}\right)$ のときに成立するが，この値は，条件の $x\geqq 1$ を満たしている。

よって，$\dfrac{S}{T}$ の最大値は $\dfrac{9}{8}$ となり，このとき $x=\dfrac{4}{3}$ である。

コメント

平面ベクトルの有名な構図の問題です。メネラウスの定理を利用せずに，普通に解く方法もあります。

問　題

四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

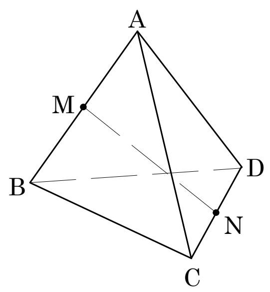
(1)　等式 $\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式 $|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式 $|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{AB}|=|\overrightarrow{CD}|$ であることを示せ。　　　　[2010]

解答例



(1)　$\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}=\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{PA}+\overrightarrow{PB}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{PC}+\overrightarrow{PD}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{PM}=\overrightarrow{PN},\ \ \overrightarrow{PM}-\overrightarrow{PN}=\vec{0}$$

これより，$\overrightarrow{NM}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。

(2)　$|\overrightarrow{QA}+\overrightarrow{QB}|=|\overrightarrow{QC}+\overrightarrow{QD}|$ から，(1)と同様にすると，

$$|\overrightarrow{QM}|=|\overrightarrow{QN}|$$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3)　まず，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2&=|\overrightarrow{MA}-\overrightarrow{MR}|^2+|\overrightarrow{MB}-\overrightarrow{MR}|^2\\&=|\overrightarrow{MA}|^2+|\overrightarrow{MB}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2\overrightarrow{MA}\cdot\overrightarrow{MR}-2\overrightarrow{MB}\cdot\overrightarrow{MR}\\&=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-2(\overrightarrow{MA}+\overrightarrow{MB})\cdot\overrightarrow{MR}\\&=2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2\end{aligned}$$

同様にして，

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2&=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{NR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}-\overrightarrow{MN}|^2\\&=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2\end{aligned}$$

すると，$|\overrightarrow{RA}|^2+|\overrightarrow{RB}|^2=|\overrightarrow{RC}|^2+|\overrightarrow{RD}|^2$ より，

$$2|\overrightarrow{MA}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2=2|\overrightarrow{NC}|^2+2|\overrightarrow{MR}|^2-4\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+2|\overrightarrow{MN}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}=|\overrightarrow{NC}|^2+|\overrightarrow{MN}|^2-|\overrightarrow{MA}|^2\cdots\cdots(*)$ となり，$\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}$ は R のとり方によらず一定である。

(4)　点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{RM}|=|\overrightarrow{RN}|$ であり，

$$|\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}-\overrightarrow{MR}|^2,\ \ |\overrightarrow{RM}|^2=|\overrightarrow{MN}|^2-2\overrightarrow{MN}\cdot\overrightarrow{MR}+|\overrightarrow{MR}|^2$$

$(*)$を代入して，$|\overrightarrow{\mathrm{RM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|$

よって，$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$から，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$である。

コメント

(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。

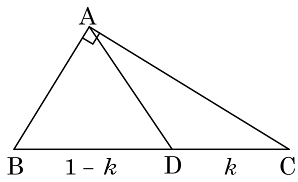
問　題

辺 AB の長さが 1, $\angle$A が直角となる三角形△ABC がある。辺 BC 上を点 C から点 B まで動く点 D を考え, 内積 $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ を t とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　t の動く範囲を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ が成り立つとき, t の値を求めよ。　[2009]

解答例



(1)　BD : DC $=1-k:k$ $(0\leqq k\leqq 1)$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$, $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=0$ なので,

$$t=\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\left(k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$=k|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}=k$$

よって, $0\leqq k\leqq 1$ から, $0\leqq t\leqq 1$ である。

(2)　(1)より $k=t$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

条件より, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ から,

$$\left(t\overrightarrow{\mathrm{AB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=t(\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}})\cdot(-\overrightarrow{\mathrm{AC}}),\ (1-t)|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=t|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

よって, $1-t=t$ より, $t=\dfrac{1}{2}$

コメント

ベクトルの平面図形への応用の基本題です。ベクトルの始点を A とすることは, 問題文から読み取れます。

問　題

図 1 のような AB = BC = CD = DA = AC = 1 である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha=\angle\mathrm{BCD}$）とし，$0°<\alpha<120°$ とする。以下の問いに答えよ。

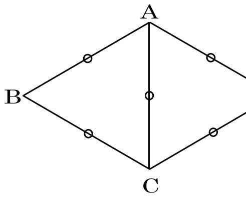


図1

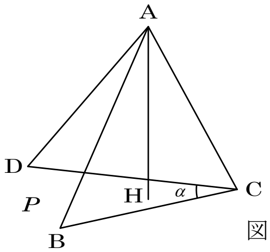


図2

(1) 図 2 において，A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と α とで表せ。

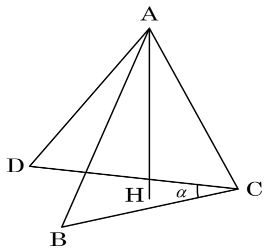
(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の長さを α を用いて表せ。

(3) H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。　[2006]

解答例

(1) x, y を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+y\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ となる。

ここで，条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=1$



$$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=1\cdot1\cdot\cos 60°=\frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=1\cdot1\cdot\cos\alpha=\cos\alpha$$

まず，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ より，$(x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+y\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$

$$x|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2+y\overrightarrow{\mathrm{CD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$$

$$x+y\cos\alpha-\frac{1}{2}=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ より，$(x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+y\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$

$$x\overrightarrow{\mathrm{CB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+y|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0,\ \ x\cos\alpha+y-\frac{1}{2}=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\begin{pmatrix}1 & \cos\alpha\\ \cos\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=\frac{1}{2(1-\cos^2\alpha)}\begin{pmatrix}1 & -\cos\alpha\\ -\cos\alpha & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}=\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}$

(2) (1)より，$x=y=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=|x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+x\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=x^2+x^2+1+2x^2\cos\alpha-2x\cdot\frac{1}{2}-2x\cdot\frac{1}{2}$$

$$=2(1+\cos\alpha)x^2-2x+1=\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}-2\cdot\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}+1$$

$$=\frac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{\dfrac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}}$ となる。

(3)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

H が△BCD の重心となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので，

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}=\frac{1}{3},\ \cos\alpha=\frac{1}{2}$$

よって，$0°<\alpha<120°$ から，$\alpha=60°$

コメント

冒頭の $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ がポイントとなります。なお，連立方程式は，係数に文字が入っていたので，行列を用いて解いています。

問　題

$0<t<\dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i)　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$　　　(ii)　$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t:1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ。　[2005]

解答例

まず，条件(i)より，$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$ ………①

また，条件(ii)より，$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$，$(1-t)\vec{a}-t\vec{b}=(2t-1)\vec{e}$ ………②

①②より，$2(1-t)\vec{a}=2t\vec{e}$，$2t\vec{b}=2(1-t)\vec{e}$ となり，

$$\vec{a}=\frac{t}{1-t}\vec{e}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \vec{b}=\frac{1-t}{t}\vec{e}\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると，$\vec{x}-\vec{a}=\vec{x}-\dfrac{t}{1-t}\vec{e}=\dfrac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}$ ………⑤

$$\vec{x}-\vec{b}=\vec{x}-\frac{1-t}{t}\vec{e}=\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，条件 $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ に，⑤⑥を適用すると，

$$\{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}\}\cdot\{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}\}=0$$

$$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+t^2+t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)|\vec{e}|^2=0$$

$|\vec{e}|=1$ より，$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ ………⑦

また，条件 $|\vec{x}-\vec{a}|:|\vec{x}-\vec{b}|=t:1-t$ に，⑤⑥を適用すると，

$$(1-t)\left|\frac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}\right|=t\left|\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\right|,\quad |(1-t)\vec{x}-t\vec{e}|=|t\vec{x}-(1-t)\vec{e}|$$

$$(1-t)^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+t^2|\vec{e}|^2=t^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+(1-t)^2|\vec{e}|^2$$

$|\vec{e}|=1$ より，$(1-2t)|\vec{x}|^2=1-2t$ となり，$0<t<\dfrac{1}{2}$ から $|\vec{x}|^2=1$ ………⑧

⑦⑧より，$t(1-t)-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ となるので，

$$\vec{x}\cdot\vec{e}=\frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2}$$

コメント

文字がたくさん出てくるので，方針を明確にし，交通整理をしながら計算を進めます。ここでは，まず $\vec{a}$，$\vec{b}$ を消去するために，③と④を導きました。

問　題

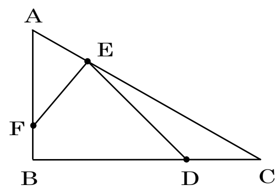
三角形 ABC において，$AB=1$，$AC=2$，$\angle A=60^\circ$ とする。正の数 m，n に対し，辺 BC, CA, AB を $m:n$ の比に内分する点を順に D, E, F とする。

(1) $\overrightarrow{DE}$ と $\overrightarrow{EF}$ が垂直であるときの比 $m:n$ を求めよ。

(2) どのような正の整数 m, n に対しても，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{EF}$ は垂直でないことを示せ。

[2003]

解答例



(1) まず，$\overrightarrow{DE}=\overrightarrow{AE}-\overrightarrow{AD}=\dfrac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}-\dfrac{n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC}}{m+n}$

$$=\frac{-n}{m+n}\overrightarrow{AB}+\frac{n-m}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

$$\overrightarrow{EF}=\overrightarrow{AF}-\overrightarrow{AE}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{AB}-\frac{n}{m+n}\overrightarrow{AC}$$

さて，$\overrightarrow{DE}\perp\overrightarrow{EF}$ より，$\overrightarrow{DE}\cdot\overrightarrow{EF}=0$ となり，

$$\{-n\overrightarrow{AB}+(n-m)\overrightarrow{AC}\}\cdot(m\overrightarrow{AB}-n\overrightarrow{AC})=0$$

条件より，$|\overrightarrow{AB}|=1$，$|\overrightarrow{AC}|=2$，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=1\cdot2\cos60^\circ=1$ なので，

$$-mn\cdot1^2+(n^2+mn-m^2)\cdot1+(-n^2+mn)\cdot2^2=0$$

$$m^2-4mn+3n^2=0,\ (m-3n)(m-n)=0$$

$m=3n$，$m=n$ より，$m:n=3:1$ または $m:n=1:1$ である。

(2) $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}=\dfrac{1}{(m+n)^2}(n\overrightarrow{AB}+m\overrightarrow{AC})\cdot(m\overrightarrow{AB}-n\overrightarrow{AC})$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}\{mn\cdot1^2+(m^2-n^2)\cdot1-mn\cdot2^2\}$$

$$=\frac{1}{(m+n)^2}(m^2-3mn-n^2)$$

ここで，$\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$ と仮定すると，$m^2-3mn-n^2=0$ から $m=\dfrac{3\pm\sqrt{13}}{2}n$ となるので，m，n が正の整数のとき $\overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{EF}=0$ は成立しない。すなわち，どのような正の整数 m, n に対しても，$\overrightarrow{AD}$ と $\overrightarrow{EF}$ が垂直になる場合はない。

コメント

ベクトルの内積についての基本的な問題です。オーソドックスに計算を進めていけば，結論が導けます。

問　題

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

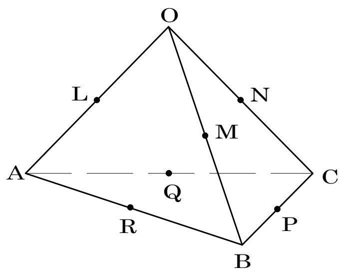
(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。　[2001]

解答例

(1) 線分 LP の中点を S とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$



これから，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と表せ，点 S は線分 MQ の中点に一致する。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ とも表せるので，S は線分 NR の中点にも一致する。

よって，線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わる。

(2) 条件より，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$………①

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\ \cdots\cdots\text{②}$$

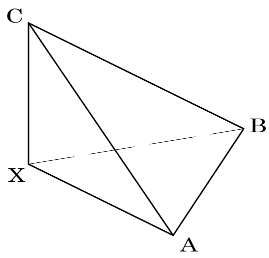
$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\ \cdots\cdots\text{③}$$

②③より $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$，①③より $\vec{b}=\vec{p}+\vec{r}$，①②より $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$

(3) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$

$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{r}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{r}$$



$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ が互いに直交することより，四面体 XABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\right)|\vec{r}|=\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$

コメント

(3)で与えられた条件によって，四面体 OABC の 4 つの面は合同になります。このとき，この四面体は直方体に埋め込まれるということが元になっています。ずいぶん前になりますが，1993 年に東大・理で，この考え方を利用する問題が出ています。

問　題

a を 3 で割り切れない正の整数とする。a を 3 で割ったときの商を b, 余りを c とする。次の問いに答えよ。

(1)　$c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ を満たす負でない整数 s, t を b を用いて表せ。

(2)　n を $n\geqq 2a-2$ を満たす整数とする。このとき $n=as+3t$ を満たす負でない整数 s, t が存在することを示せ。　[2017]

解答例

(1)　3 で割り切れない正の整数 a を 3 で割ったときの商を b, 余りを c とすると,

$$a=3b+c\quad(c=1,\ 2)$$

さて，$c=2$ のとき，$2a+1=as+3t$ から，$2(3b+2)+1=(3b+2)s+3t$ となり,

$$6b+5=(3b+2)s+3t\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$(s,\ t)=(1,\ b+1)$ は①を満たすので，$6b+5=(3b+2)\cdot 1+3(b+1)$

$$0=(3b+2)(s-1)+3(t-b-1),\ (3b+2)(s-1)=-3(t-b-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$3b+2$ と 3 は互いに素なので, k を整数として,

$$s-1=-3k,\ t-b-1=(3b+2)k$$

よって，$s=-3k+1$，$t=(3b+2)k+b+1$ となり，$s\geqq 0$，$t\geqq 0$ より,

$$-3k+1\geqq 0,\ (3b+2)k+b+1\geqq 0$$

すると，$k\leqq\dfrac{1}{3}$ かつ $k\geqq-\dfrac{b+1}{3b+2}=-\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3(3b+2)}$ となり，$b\geqq 0$ から,

$$-\frac{1}{2}\leqq k\leqq\frac{1}{3}$$

以上より，$k=0$ となり，①を満たす $(s,\ t)$ は $(s,\ t)=(1,\ b+1)$ のみである。

(2)　整数 $n\,(n\geqq 2a-2)$ に対し，$n=as+3t\ \cdots\cdots$③を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在することを, c の値で場合分けをして示す。

(i)　$c=2$ のとき　$a=3b+2$ となり，$n\geqq 2(3b+2)-2=6b+2$

(i-i)　$n=6b+2$ のとき

③より $6b+2=(3b+2)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(1,\ b)$ で満たされる。

(i-ii)　$n=6b+3$ のとき

③より $6b+3=(3b+2)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(0,\ 2b+1)$ で満たされる。

(i-iii)　$n=6b+4$ のとき

③より $6b+4=(3b+2)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(2,\ 0)$ で満たされる。

(i-iv)　$n\geqq 6b+5$ のとき

l を自然数とし，$n=6b+2+3l$ のときは $(s,\ t)=(1,\ b+l)$，$n=6b+3+3l$ のときは $(s,\ t)=(0,\ 2b+1+l)$，$n=6b+4+3l$ のときは $(s,\ t)=(2,\ l)$ で満たされる。

(ii)　$c=1$ のとき　$a=3b+1$ となり，$n \geqq 2(3b+1)-2=6b$

(ii-i)　$n=6b$ のとき

③より $6b=(3b+1)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(0,\ 2b)$ で満たされる。

(ii-ii)　$n=6b+1$ のとき

③より $6b+1=(3b+1)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(1,\ b)$ で満たされる。

(ii-iii)　$n=6b+2$ のとき

③より $6b+2=(3b+1)s+3t$ となり，$(s,\ t)=(2,\ 0)$ で満たされる。

(ii-iv)　$n \geqq 6b+3$ のとき

l を自然数とし，$n=6b+3l$ のときは $(s,\ t)=(0,\ 2b+l)$，$n=6b+1+3l$ のときは $(s,\ t)=(1,\ b+l)$，$n=6b+2+3l$ のときは $(s,\ t)=(2,\ l)$ で満たされる。

(i)(ii)より，整数 $n\,(n \geqq 2a-2)$ に対し，③を満たす負でない整数 $s,\ t$ が存在する。

コメント

不定方程式を題材とした整数問題です。設定がやや複雑ですが，特殊解を見つけるのは，さほど難しくはありません。ただ，上の解答例では，(2)が(1)とストレートにつながっていませんが。

問　題

ある工場で作る部品 A, B, C はネジをそれぞれ 7 個, 9 個, 12 個使っている。出荷後に残ったこれらの部品のネジをすべて外したところ，ネジが全部で 54 個あった。残った部品 A, B, C の個数をそれぞれ l, m, n として，可能性のある組$(l,\ m,\ n)$をすべて求めよ。　[2016]

解答例

条件より，l, m, n を 0 以上の整数として，$7l+9m+12n=54$ ………(＊)

まず，$12n=54-(7l+9m)\leqq 54$ から，$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

また，$7l=54-9m-12n=3(18-3m-4n)$ から，l は 3 の倍数となる。

(i)　$n=0$ のとき　(＊)から，$7l+9m=54$ ……①となり，$l\leqq 7$ である。

(a)　$l=0$ のとき　①から $9m=54$ となり，$m=6$

(b)　$l=3$ のとき　①から $9m=33$ となり，m は整数でないので不適

(c)　$l=6$ のとき　①から $9m=12$ となり，m は整数でないので不適

(ii)　$n=1$ のとき　(＊)から，$7l+9m=42$ ……②となり，$l\leqq 6$ である。

(a)　$l=0$ のとき　②から $9m=42$ となり，m は整数でないので不適

(b)　$l=3$ のとき　②から $9m=21$ となり，m は整数でないので不適

(c)　$l=6$ のとき　②から $9m=0$ となり，$m=0$

(iii)　$n=2$ のとき　(＊)から，$7l+9m=30$ ……③となり，$l\leqq 4$ である。

(a)　$l=0$ のとき　③から $9m=30$ となり，m は整数でないので不適

(b)　$l=3$ のとき　③から $9m=9$ となり，$m=1$

(iv)　$n=3$ のとき　(＊)から，$7l+9m=18$ ……④となり，$l\leqq 2$ である。

(a)　$l=0$ のとき　④から $9m=18$ となり，$m=2$

(v)　$n=4$ のとき　(＊)から，$7l+9m=6$ ……⑤となり，$l=0$ のみである。

このとき，⑤から $9m=6$ となり，m は整数でないので不適

(i)〜(v)より，(＊)を満たす 0 以上の整数の組$(l,\ m,\ n)$は，

$$(l,\ m,\ n)=(0,\ 6,\ 0),\ (6,\ 0,\ 1),\ (3,\ 1,\ 2),\ (0,\ 2,\ 3)$$

コメント

基本的な不定方程式を解く問題ですが，文章題という意図が不明です。不良品を見込んで多く作ったとか，保管用のサンプルを作ったなどと考えていると，時間が知らぬ間に……。

問　題

次の性質をもつ数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=3,\ a_{n+1}>a_n,\ a_n^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}^2=3(a_n+a_{n+1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，a_n+a_{n+2} を a_{n+1} を用いて表せ。

(2) $b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定まる数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2015]

解答例

(1) 条件より，$a_n^2-2a_na_{n+1}+a_{n+1}^2=3(a_n+a_{n+1})$……①なので,

$$a_{n+1}^2-2a_{n+1}a_{n+2}+a_{n+2}^2=3(a_{n+1}+a_{n+2})\text{………②}$$

②－①より，$a_{n+2}^2-a_n^2-2a_{n+1}(a_{n+2}-a_n)=3(a_{n+2}-a_n)$

ここで，$a_{n+2}>a_{n+1}>a_n$ から，$a_{n+2}-a_n>0$ となり,

$$a_{n+2}+a_n-2a_{n+1}=3,\ a_{n+2}+a_n=2a_{n+1}+3\text{………③}$$

(2) ③より，$a_{n+2}-2a_{n+1}+a_n=3$ となり，$(a_{n+2}-a_{n+1})-(a_{n+1}-a_n)=3$………④

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$ とおくと，④より，$b_{n+1}-b_n=3$ となり,

$$b_n=b_1+3(n-1)\text{………⑤}$$

さて，①より，$a_1^2-2a_1a_2+a_2^2=3(a_1+a_2)$ となり，$a_1=3$ から,

$$9-6a_2+a_2^2=3(3+a_2),\ a_2^2-9a_2=0$$

すると，$a_2>a_1=3$ から $a_2=9$ となり，$b_1=a_2-a_1=6$

よって，⑤から，$b_n=6+3(n-1)=3(n+1)$

(3) (2)より，$n\geqq 2$ において,

$$a_n=3+\sum_{k=1}^{n-1}3(k+1)=3+3\cdot\frac{2+n}{2}(n-1)=3+\frac{3}{2}(n^2+n-2)=\frac{3}{2}n(n+1)$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

コメント

誘導つきの漸化式の問題です。(1)の結果が(2)へとつながり，さらに(3)へとスムーズに解いていくことができます。

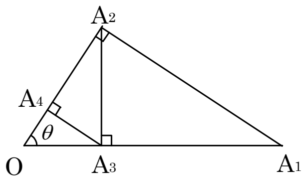
問　題

平面上の$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$は$\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90°$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{OA_2} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$を満たすとする。$\mathrm{A_2}$から$\mathrm{OA_1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_3}$とする。$\mathrm{A_3}$から$\mathrm{OA_2}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A_4}$とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$について，$\mathrm{A}_k$から$\mathrm{OA}_{k-1}$へ垂線を下ろし，交点を$\mathrm{A}_{k+1}$として，順番に$\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，$\cdots$を定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\ (k = 1,\ 2,\ \cdots)$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$とおくとき，自然数$n$に対して$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$を求めよ。ただし，$\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$は$\overrightarrow{h_k}$と$\overrightarrow{h_{k+1}}$の内積を表す。 [2008]

解答例



(1) $\angle \mathrm{A_1OA_2} = \theta$とおくと，$\cos\theta = \dfrac{\mathrm{OA_2}}{\mathrm{OA_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$より，

$$\sin\theta = \sqrt{1 - \frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

これより，$\mathrm{A_1A_2} = \mathrm{OA_1}\sin\theta = \dfrac{\sqrt{6}}{3}$であり，

$$\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2} = \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\cos\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$$

よって，$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} = \dfrac{\sqrt{6}}{3}\left(\dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$と$\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}$のなす角は，$180° - \theta$より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}} &= \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}} = \frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k-1}\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^{k}\cos(180° - \theta)\\ &= \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = -\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{k}\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}} = \frac{-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}}{1 - \frac{1}{3}} = -\frac{1}{3}\left\{1 - \left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}$

コメント

数列の応用についての基本問題です。相似な図形と等比数列が融合した構図となっています。

問　題

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)　a_2，b_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。　[2007]

解答例

(1)　x^2 を $x^2-6x-12$ で割ると，$x^2=(x^2-6x-12)\cdot 1+(6x+12)$ より，

$$a_2=6,\ b_2=12$$

(2)　x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $q_n(x)$ とおくと，条件より，

$$x^n=(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx+b_n)$$

すると，

$$\begin{aligned}x^{n+1}&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx^2+b_nx)\\&=x(x^2-6x-12)q_n(x)+a_n\left\{(x^2-6x-12)+(6x+12)\right\}+b_nx\\&=(x^2-6x-12)\{xq_n(x)+a_n\}+(6a_n+b_n)x+12a_n\end{aligned}$$

ここで，x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ より，

$$a_{n+1}=6a_n+b_n,\ b_{n+1}=12a_n\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_2=6$，$b_2=12$ なので，(＊)から，帰納的に a_n と b_n はともに 6 の倍数であり，素数の公約数として, 2 と 3 をもつ。

さて，a_n と b_n が 5 以上の素数 m を公約数としてもつとき, k, l を整数として，

$$a_n=m\cdot k,\ b_n=m\cdot l$$

(＊)から，$6a_{n-1}+b_{n-1}=m\cdot k$，$12a_{n-1}=m\cdot l$

$$2^2\cdot 3a_{n-1}=m\cdot l,\ 2b_{n-1}=m(2k-l)$$

$m\geqq 5$ より，a_{n-1} と b_{n-1} は素数 m を公約数としてもつ。

すると，帰納的に，a_2 と b_2 は素数 m を公約数としてもつことになるが，これは $a_2=6$，$b_2=12$ に反する。

以上より，a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

コメント

(3)では，記述はしていませんが，a_3 と b_3 も計算をして結論を推測しています。その後，簡略に書きましたが，帰納法を用いて証明をしています。

問　題

xy 平面で x 座標, y 座標がともに 0 以上の整数となる点を非負格子点という。非負格子点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ にその番号 $N(\mathrm{P})$ を $N(\mathrm{P})=2^x(2y+1)$ で付ける。

(1)　番号が 2000 番になる非負格子点の座標を求めよ。

(2)　連続する整数 $n,\ n+1,\ n+2$ を番号にもつ非負格子点をそれぞれ A, B, C とする。2 以上の整数 a により $n=2^a(2^a+1)$ となっているとき, △ABC の面積を a で表せ。

[1999]

解答例

(1)　$N(\mathrm{P})=2000$ のとき, $2^x(2y+1)=2000=2^4\times5^3$

ここで, $y\geqq0$ より $2y+1$ は奇数, また $x\geqq0$ より $x=0$ では $2^x=1$, $x\geqq1$ では 2^x は偶数となる。

2000 は偶数なので, $2^x=2^4$, $2y+1=5^3$ より, $x=4$, $y=62$

(2)　条件より, $N(\mathrm{A})=n$, $N(\mathrm{B})=n+1$, $N(\mathrm{C})=n+2$

まず, $N(\mathrm{A})=2^x(2y+1)=2^a(2^a+1)$

$a\geqq2$ より 2^a は偶数, 2^a+1 は奇数より, $2^a(2^a+1)$ は偶数となるので,

$$2^x=2^a,\ 2y+1=2^a+1$$

$x=a$, $y=2^{a-1}$ となり, $\mathrm{A}\left(a,\ 2^{a-1}\right)$

次に, $N(\mathrm{B})=2^x(2y+1)=2^a(2^a+1)+1$

$2^a(2^a+1)+1$ は奇数より, $2^x=1$, $2y+1=2^a(2^a+1)+1$

$x=0$, $y=2^{a-1}(2^a+1)$ となり, $\mathrm{B}\left(0,\ 2^{a-1}(2^a+1)\right)$

さらに, $N(\mathrm{C})=2^x(2y+1)=2^a(2^a+1)+2=2\left\{2^{a-1}(2^a+1)+1\right\}$

$a\geqq2$ より 2^{a-1} は偶数, $2^{a-1}(2^a+1)+1$ は奇数, そして $2\left\{2^{a-1}(2^a+1)+1\right\}$ は偶数となるので,

$$2^x=2,\ 2y+1=2^{a-1}(2^a+1)+1$$

$x=1$, $y=2^{a-2}(2^a+1)$ となり, $\mathrm{C}\left(1,\ 2^{a-2}(2^a+1)\right)$

すると, $\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(a,\ 2^{a-1}-2^{a-1}(2^a+1)\right)=\left(a,\ -2^{2a-1}\right)$

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(1,\ 2^{a-2}(2^a+1)-2^{a-1}(2^a+1)\right)=\left(1,\ -2^{a-2}(2^a+1)\right)$$

よって, $\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left|-2^{2a-1}+a\cdot2^{a-2}(2^a+1)\right|=\dfrac{1}{2}\left|(a-2)2^{2a-2}+a\cdot2^{a-2}\right|$

$a\geqq2$ なので, $\triangle\mathrm{ABC}=(a-2)2^{2a-3}+a\cdot2^{a-3}$

コメント

格子点の絡んだ整数問題です。本年度の名大・理に, 形式的にはかなり差があるものの, 内容的に非常によく似た問題が出題されています。

問　題

実数の数列$\{a_n\}$が，$a_{3n}=a_n$，$a_{n+5}=a_n$，$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$，$a_1a_3a_5=8$ をみたすとき，

(1) a_1，a_5の値を求めよ。

(2) 数列の和$a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $a_{3n}=a_n$より，$a_1=a_3$，$a_2=a_6$，$a_3=a_9$，$a_4=a_{12}$，$a_5=a_{15}$ ………①

$a_{n+5}=a_n$より，$a_1=a_6$，$a_2=a_7$，$a_3=a_8$，$a_4=a_9$，$a_5=a_{10}$ ………②

①②より，$a_1=a_2=a_3=a_4$

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$より，$4a_1+a_5=4$ ………③

$a_1a_3a_5=8$より，$a_1{}^2a_5=8$ ………④

③④より，$a_1{}^2(-4a_1+4)=8$，$a_1{}^3-a_1{}^2+2=0$

$(a_1+1)(a_1{}^2-2a_1+2)=0$

$a_1{}^2-2a_1+2=(a_1-1)^2+1>0$から$a_1=-1$，③より$a_5=8$

(2) 数列$\{a_n\}$は周期 5 の周期数列で，$S_n=a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n$とおく。

$a_1+a_2+a_3+a_4+a_5=4$から，kを 0 以上の整数として，

(i) $n=5k+1$のとき

$S_n=4k-1=4\cdot\dfrac{n-1}{5}-1=\dfrac{4n-9}{5}$

(ii) $n=5k+2$のとき

$S_n=4k-2=4\cdot\dfrac{n-2}{5}-2=\dfrac{4n-18}{5}$

(iii) $n=5k+3$のとき

$S_n=4k-3=4\cdot\dfrac{n-3}{5}-3=\dfrac{4n-27}{5}$

(iv) $n=5k+4$のとき

$S_n=4k-4=4\cdot\dfrac{n-4}{5}-4=\dfrac{4n-36}{5}$

(v) $n=5k+5$のとき

$S_n=4k+4=4\cdot\dfrac{n-5}{5}+4=\dfrac{4n}{5}$

コメント

(1)(2)ともわずかの計算量で完答できます。答案作成に必要なエネルギーは少しで十分です。

問　題

A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が整数でなく，かつ，B 君の得点より大きい確率を求めよ。　[2017]

解答例

(1) 6 枚のカードから無作為に 3 枚のカードを取り出す ${}_6\mathrm{C}_3=20$ 通りが同様に確からしいとする。このとき，与えられた条件で，取り出したカードに書かれた数と得点との関係を列挙すると右表のようになる。

カード	得点	カード	得点
1, 2, 3	2	0, 1, 2	3
1, 2, 4	$\frac{7}{3}$	0, 1, 3	4
1, 2, 5	$\frac{8}{3}$	0, 1, 4	5
1, 3, 4	$\frac{8}{3}$	0, 1, 5	6
1, 3, 5	3	0, 2, 3	5
1, 4, 5	$\frac{10}{3}$	0, 2, 4	6
2, 3, 4	3	0, 2, 5	7
2, 3, 5	$\frac{10}{3}$	0, 3, 4	7
2, 4, 5	$\frac{11}{3}$	0, 3, 5	8
3, 4, 5	4	0, 4, 5	9

さて, A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出し，双方とも得点が 3 点となるのは,

(i) A 君，B 君ともに 0 を取り出すとき
その確率は，$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

(ii) A 君のみ 0 を取り出すとき
その確率は，$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{2}{20}=\dfrac{2}{400}$

(iii) B 君のみ 0 を取り出すとき
その確率は，$\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{2}{400}$

(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{400}+\dfrac{2}{400}+\dfrac{2}{400}=\dfrac{1}{80}$ となる。

(2) 整数でない A 君の得点で場合分けをすると,

(i) A 君が $\dfrac{7}{3}$ 点のとき　B 君は $\dfrac{7}{3}$ 点より小なので，確率は $\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

(ii) A 君が $\dfrac{8}{3}$ 点のとき　B 君は $\dfrac{8}{3}$ 点より小なので，確率は $\dfrac{2}{20}\times\dfrac{2}{20}=\dfrac{4}{400}$

(iii) A 君が $\dfrac{10}{3}$ 点のとき　B 君は $\dfrac{10}{3}$ 点より小なので，確率は $\dfrac{2}{20}\times\dfrac{7}{20}=\dfrac{14}{400}$

(iv) A 君が $\dfrac{11}{3}$ 点のとき　B 君は $\dfrac{11}{3}$ 点より小なので，確率は $\dfrac{1}{20}\times\dfrac{9}{20}=\dfrac{9}{400}$

(i)～(iv)より，求める確率は，$\dfrac{1}{400}+\dfrac{4}{400}+\dfrac{14}{400}+\dfrac{9}{400}=\dfrac{7}{100}$ となる。

コメント

センター試験でよく見られる数え上げタイプの確率の基本問題です。20 通りの場合を書き上げて準備することがすべてです。

問　題

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ ……(＊)を考える。

(1) 方程式(＊)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。 [2015]

解答例

(1) 方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ …(＊)が実数解をもつ条件は，

$$D={p_2}^2-16p_1p_3\geqq 0,\quad p_2\geqq 4\sqrt{p_1p_3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$p_2\geqq 4$ となり，$p_2=4$，5，6 のときを考える。

(i) $p_2=4$ のとき　①より $1\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$1\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(ii) $p_2=5$ のとき　①より $\frac{5}{4}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\frac{25}{16}\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(iii) $p_2=6$ のとき　①より $\frac{3}{2}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\frac{9}{4}\geqq p_1p_3$ となり，

$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(i)〜(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1+1+3}{6^3}=\dfrac{5}{216}$ である。

(2) 方程式(＊)が虚数解 α，β をもつ条件は，$D<0$ より $p_2<4\sqrt{p_1p_3}$ ………②

さらに，$\alpha\beta=1$ である条件は，$\dfrac{2p_3}{2p_1}=1$ より，$p_3=p_1$ ………③

②③より，$p_2<4\sqrt{{p_1}^2}=4p_1$ ………④

(i) $p_1=p_3=1$ のとき　④より $p_2<4$，$p_2=1$，2，3

(ii) $p_1=p_3\geqq 2$ のとき　$4p_1\geqq 8$ となるので，④より，$p_2=1$，2，3，4，5，6

(i)〜(ii)より，求める確率は，$\dfrac{3+6\cdot 5}{6^3}=\dfrac{11}{72}$ である。

コメント

よく見かける確率の頻出題です。場合分けも複雑ではなく，内容は基本的です。

問　題

1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3) 10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。 [2014]

解答例

(1) 10 個の玉から 2 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2 = 45$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10 = 2\times5$ より，${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{4}{45}$ である。

(2) 10 個の玉から 4 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_4 = 210$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100 = 2^2\times5^2$ より，次の 2 つの場合がある。

(i) 4 つの数字が $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$ の場合　1 通り

(ii) 4 つの数字が $(1,\ 4,\ 5,\ 5)$ の場合　${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1 = 4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210} = \dfrac{1}{42}$ である。

(3) 10 個の玉から 6 個を順に取り出す ${}_{10}\mathrm{P}_6$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1 個目から 3 個目，4 個目から 6 個目に書かれている数字の組合せを，それぞれ A, B とすると，A の 3 つの数字の積と B の 3 つの数字の積が等しい場合は，

(i) $A = B$ のとき

数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り，A, B への数字の振り分けが 2^3 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，${}_5\mathrm{C}_3\times2^3\times3!\times3! = 5\times2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(ii) $A = (2,\ 2,\ 3)$, $B = (1,\ 4,\ 3)$，または $A = (1,\ 4,\ 3)$, $B = (2,\ 2,\ 3)$ のとき

A, B への数字の振り分けが $2\times2^2 = 2^3$ 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，$(2^3\times3!\times3!)\times2 = 2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(iii) $A = (2,\ 2,\ 5)$, $B = (1,\ 4,\ 5)$，または $A = (1,\ 4,\ 5)$, $B = (2,\ 2,\ 5)$ のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times3!\times3!)\times2 = 2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(i)～(iii)より，求める確率は，

$$\frac{(5+1+1)\times 2^4\times(3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6}=\frac{7\times 2^4\times(3!)^2}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}=\frac{2}{75}$$

コメント

$2\times 2=1\times 4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

問　題

A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1)　B がちょうど 1 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(2)　B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3)　B がちょうど 2 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

解答例

(1)　A→B と投げて B が勝ちとなるのは, A が 5 以下の目を出し, B が 6 の目を出す場合になるので，この確率は,

$$\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{5}{36}$$

(2)　右表は，一番左側の列が 1 回目の目，一番上側の行が 2 回目の目であり，それらの目とその和との関係を表したものである。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

さて，A→B→A→B と投げて B が勝ちとなるのは，まず A は 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり，右表から 10 通りの場合がある。さらに，B は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ，1 回目との目の和が 6 以上であり，これは右表から 20 通りの場合がある。よって，この確率は,

$$\frac{10}{36}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{162}$$

(3)　A→B→A→B と投げてゲームが終了しないのは, A, B とも 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり, 10 通りずつの場合がある。よって，この確率は,

$$\frac{10}{36}\times\frac{10}{36}=\frac{25}{324}$$

コメント

確率の基本題ですが，センター試験風に表を作ってしまえば，その後の計算はほとんど不要です。

問　題

袋 A, 袋 B のそれぞれに, 1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1) $N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, 数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし, 取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後, 数字が一致していた回数を X とする。$X=1$, $X=2$, $X=3$, $X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また, X の期待値を求めよ。

(2) $N=3$ とし, n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し, カードの数字が一致していたら, そのカードを取り除き, 一致していなかったら, 元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし, n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。　[2012]

解答例

(1) 与えられた試行に対して, A から取り出した数字と, B から取り出した数字が一致する回数を X とし, $X=i$ である確率を $P(i)$ とおく。

$X=4$ となるのは, A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が 1 通りのときより, $P(4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$ である。

$X=3$ となる場合はないので, $P(3)=0$ である。

$X=2$ となるのは, A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が, 一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り, それぞれに対し, 一致しない数字の対応が 1 通りずつのときである。これより, $P(2)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\cdot 1}{4!}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X=1$ となるのは, A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が, 一致する数字の対応が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通り, それぞれに対し, 一致しない数字の対応が 2 通りずつのときである。これより, $P(1)=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\cdot 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$ である。

したがって, X の期待値は, $4\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}=1$ である。

(2) 与えられた試行に対して, カードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$, 一致しない確率は $\dfrac{2}{3}$ なので, n 回目でカードが初めて取り除かれる確率 p_n は, $n\geqq 2$ のとき,

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは, $n=1$ のときも成立している。

また，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率 q_n は，$q_1 = q_2 = 0$

$n \geqq 3$ のときは，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n-2)$ で初めてカードが 1 枚取り除かれ，$n-1$ 回目と n 回目に 1 枚ずつ取り除かれる場合である。カードが 2 枚のとき，数字が一致する確率は $\frac{1}{2}$，一致しない確率は $\frac{1}{2}$ なので，

$$q_n = \sum_{k=1}^{n-2} p_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1\right\}}{\frac{4}{3} - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1\right\}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

コメント

頻出ですが, (2)は不注意によるミスをやってしまいがちな問題です。

問　題

先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を 2 回続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) A が 2 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。

(2) B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率を求めよ。 [2011]

解答例

(1) A, B, C が玉を取り出す確率は，それぞれ $\frac{1}{6}$，$\frac{1}{3}$，$\frac{1}{2}$ である。

最初，赤玉 3 個，白玉 7 個入った箱から，A が赤玉 2 個を取り出す確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{540}$$

(2) まず, B が赤玉を手に入れない場合の確率を求める。

(i) 1 回目に B が白玉，2 回目も B が白玉を取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{135}$$

(ii) 1 回目に B が白玉，2 回目は A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{7}{45}$$

(iii) 1 回目は A または C，2 回目に B が白玉を取り出すとき

1 回目に赤玉を取り出すときと白玉を取り出すときに分けると，

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{45}$$

(iv) 1 回目に A または C，2 回目も A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{2}{3}\times1\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{4}{9}$$

(i)〜(iv)より, B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率は，

$$1-\left(\frac{7}{135}+\frac{7}{45}+\frac{7}{45}+\frac{4}{9}\right)=\frac{26}{135}$$

コメント

注意力がすべてといっても過言ではない問題です。(2)は，余事象を考えない方がよかったかもしれません。さらに，(iii)の場合も(ii)にまとめた方がよかったかもしれません。

問　題

数直線上を動く点 P がある。裏表の出る確率が等しい硬貨を 2 枚投げて，2 枚とも表が出たら P は正の向きに 1 だけ移動し，2 枚とも裏が出たら P は負の向きに 1 だけ移動し，それ以外のときはその位置にとどまるものとする。P が原点 O を出発点として，このような試行を n 回繰り返して到着した位置を S_n とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$S_2=-1$ となる確率を求めよ。

(2)　$S_3=1$ となる確率を求めよ。

(3)　試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とするとき，S_n を求めよ。

(4)　k を整数とするとき，$S_n=k$ となる確率を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　硬貨を 2 枚投げて，点 P が正の向きに 1 だけ移動する事象を A，負の向きに 1 だけ移動する事象を B，その位置にとどまる事象を C とすると，条件より，

$$P(A)=\frac{1}{4},\ P(B)=\frac{1}{4},\ P(C)=\frac{1}{2}$$

さて，$S_2=-1$ となるのは，B と C が 1 回ずつ起こった場合より，その確率は，

$$_2\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$

(2)　$S_3=1$ となるのは，A が 1 回，C が 2 回起こったか，または A が 2 回，B が 1 回起こった場合より，その確率は，

$$_3\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^2+{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\cdot\frac{1}{4}=\frac{15}{64}$$

(3)　試行を n 回繰り返して出た表の総数を i とし，このとき，A が p 回，B が q 回，C が $n-p-q$ 回起こったとすると，

$$2p+(n-p-q)=i,\ p-q=i-n\cdots\cdots\cdots(*)$$

一方，$S_n=1\times p+(-1)\times q=p-q$ となるので，$(*)$から，$S_n=i-n$ である。

(4)　$S_n=k$ となるのは，(3)より，$i-n=k$ から，

$$i=n+k,\ 2n-i=2n-(n+k)=n-k$$

よって，表の総数が $n+k$，裏の総数が $n-k$ の場合で，その確率は，

$$_{2n}\mathrm{C}_{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}={}_{2n}\mathrm{C}_{n+k}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n}\quad(-n\leqq k\leqq n)$$

なお，$k<-n$，$n<k$ のときは，$S_n=k$ となる確率は 0 である。

コメント

n 回試行後の位置 S_n が，試行の回数 n と表の総数 i だけで決まってしまうという不思議な感じのする問題でした。

問　題

袋の中に青玉が 7 個, 赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして, 以下の問いに答えよ。

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3)　赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出されるのは, 青→青→青→赤から, その確率は,

$$\frac{{}_7\mathrm{P}_3\times 3}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{8}$$

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される, すなわち赤玉 3 個, 青玉 5 個が取り出される確率は,

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_3\times 3!\times {}_7\mathrm{P}_5}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{7}{15}$$

(3)　7 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される, すなわち赤玉 3 個, 青玉 4 個が取り出される確率は,

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_3\times 3!\times {}_7\mathrm{P}_4}{{}_{10}\mathrm{P}_7}=\frac{7\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{7}{24}$$

すると, 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率は, (2)から,

$$\frac{7}{15}-\frac{7}{24}=\frac{7}{40}$$

コメント

順列を同様に確からしいとしています。なお, (3)は(2)を利用した方法です。

問　題

点Pが次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り, 出た目の数を k とする。Pの座標 a について, $a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し, $a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し, そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　Pの座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき, ちょうど 2 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　Pの座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき, ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　Pの座標が 7 であるとき, ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　まず, 点Pの座標が x であることを, 点 $\mathrm{P}(x)$ と表す。

さて, $a=1, 2, 3, 4, 5, 6$ として, 最初 $\mathrm{P}(a)$ であったとき, 2 回目にサイコロを振って初めて原点に移動し終了するのは, 次の場合である。

1 回目に a 以外の目 l が出て $\mathrm{P}(a-l)$ に移動し, 2 回目に $a-l>0$ のときは $a-l$ の目, $a-l<0$ のときは $l-a$ の目が出る場合であり, 各 $\mathrm{P}(a-l)$ に対して 1 通りずつ決まる。

よって, この確率は, $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$ である。

(2)　(1)と同様に考えて, 最初 $\mathrm{P}(a)$ であったとき, 1 回目に a 以外の目 l が出て $\mathrm{P}(a-l)$ に移動する。

2 回目に原点に移動しないためには, $a-l>0$ のときは $a-l$ 以外の目, $a-l<0$ のときは $l-a$ 以外の目が出る場合であり, 各 $\mathrm{P}(a-l)$ に対して 5 通りずつとなる。そして, このとき $\mathrm{P}(b)$ に移動したとする。

3 回目は, $b>0$ のときは b の目, $b<0$ のときは $-b$ の目が出て, 初めて原点に移動し終了する。

よって, この確率は, $\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{216}$ である。

(3)　(2)と同様に, 最初 $\mathrm{P}(7)$ であったときを考える。

(i)　$n=1$ のとき

1 回目で原点に移動する場合はないので, 終了する確率は 0 である。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき

n 回目に原点に初めて移動し終了するのは，次の場合である。

1 回目は任意で，P の座標は 1 以上 6 以下になる。$n \geqq 3$ では 2 回目以降 $n-1$ 回目までは原点に移動しない 5 通りずつの目が出て，n 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

よって，この確率は，$1\times\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-2}$ である。

なお，この値は $n=2$ のときも成立している。

コメント

ポイントは，点 P の座標が -6 以上 6 以下の 0 でない整数であったときにサイコロを振ると，$\frac{1}{6}$ の確率で原点への移動が可能であるということです。

問　題

1 から 6 の番号のつけられた 6 個の箱に，それぞれ 3 枚ずつの皿が重ねて置かれている。白いサイコロと黒いサイコロそれぞれ 1 個を同時に振って，出た目に応じて次の規則で皿を移動させるものとする。2 つのサイコロに同じ目が出たときは皿は移動させない。2 つのサイコロに異なる目が出たときは，黒いサイコロの目の数と同じ番号の箱から皿 1 枚を白いサイコロの目の数と同じ番号の箱に移す。

(1) サイコロを 3 回振るとき，皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなる確率を求めよ。

(2) サイコロを 3 回振るとき，皿が 3 枚の箱が 2 個，5 枚の箱，4 枚の箱，2 枚の箱，1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率を求めよ。 [2005]

解答例

(1) 皿が 4 枚の箱と 2 枚の箱がそれぞれ 3 個ずつとなるのは，1 回目に異なる目，2 回目に 1 回目に出た以外の異なる目が出て，さらに 3 回目に 1 回目，2 回目に出た以外の異なる目が出ることより，その確率は，

$$\frac{{}_6\mathrm{P}_2}{6^2}\times\frac{{}_4\mathrm{P}_2}{6^2}\times\frac{{}_2\mathrm{P}_2}{6^2}=\frac{5}{324}$$

(2) まず，皿が 1 番の箱に 5 枚，2 番の箱に 4 枚，3 番の箱に 2 枚，4 番の箱に 1 枚，5 番と 6 番の箱に 3 枚ずつとなるのは，次の 2 つの場合がある。

(i) サイコロの目が(白，黒)＝(1，3)，(1，4)，(2，4)と出るとき

出る順序は$3!=6$通りより，この確率は，

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 6=\frac{6}{6^6}$$

(ii) サイコロの目が(白，黒)＝(1，4)，(1，4)，(2，3)と出るとき

出る順序は 3 通りより，この確率は，

$$\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times\frac{1}{6^2}\times 3=\frac{3}{6^6}$$

すると，皿が 3 枚の箱が 2 個，5 枚の箱，4 枚の箱，2 枚の箱，1 枚の箱がそれぞれ 1 個ずつとなる確率は，箱の番号と皿の枚数との対応を考えると，

$$\left(\frac{6}{6^6}+\frac{3}{6^6}\right)\times{}_6\mathrm{P}_4=\frac{1}{2^2 6^4}\times 6\times5\times4\times3=\frac{5}{72}$$

コメント

おもしろい確率の問題です。(2)では，イメージをはっきりさせるために，具体例から考えました。どんな解法をとるにせよ，注意深く，疑い深く，論を進める必要があります。

問　題

A, B, C の 3 人でじゃんけんをする。一度じゃんけんで負けたものは, 以後のじゃんけんから抜ける。残りが 1 人になるまでじゃんけんをくり返し, 最後に残った者を勝者とする。ただし, あいこの場合も 1 回のじゃんけんを行ったと数える。

(1)　1 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(2)　2 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(3)　3 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。

(4)　$n \geqq 4$ とする。n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　3 人でじゃんけんをすると, 手の出方の総数は, $3^3 = 27$ 通りである。

勝者が決まるのは, 勝者の決め方が 3 通りで, 勝つ手の出方が 3 通りなので, $3\times 3 = 9$ 通りとなり, その確率は $\dfrac{9}{27} = \dfrac{1}{3}$ である。

(2)　3 人でじゃんけんをするとき, (1)より 1 人勝ちの確率は $\dfrac{1}{3}$, 同様に, 1 人負けの確率も $\dfrac{1}{3}$, あいこの確率は $1 - \dfrac{1}{3} - \dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{3}$ である。また, 2 人でじゃんけんをするとき, 1 人勝ちの確率は $\dfrac{2\times 3}{3^2} = \dfrac{2}{3}$, あいこの確率は $1 - \dfrac{2}{3} = \dfrac{1}{3}$ である。

さて, 3 人でじゃんけんをして, 2 回目に勝者が決まるのは, じゃんけんをする人数で場合分けをすると, 次の 2 つの場合がある。

(i)　3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}$ 1 人のとき　この確率は, $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{9}$

(ii)　3 人 $\xrightarrow{1回}$ 2 人 $\xrightarrow{2回}$ 1 人のとき　この確率は, $\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{9}$

(i)(ii)より, 2 回目に勝者が決まる確率は, $\dfrac{1}{9} + \dfrac{2}{9} = \dfrac{1}{3}$

(3)　(i)　3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}$ 3 人 $\xrightarrow{3回}$ 1 人のとき　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\times\dfrac{1}{3} = \dfrac{1}{27}$

(ii)　3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}$ 2 人 $\xrightarrow{3回}$ 1 人のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{27}$

(iii)　3 人 $\xrightarrow{1回}$ 2 人 $\xrightarrow{2回}$ 2 人 $\xrightarrow{3回}$ 1 人のとき　$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{3}\times\dfrac{2}{3} = \dfrac{2}{27}$

(i)(ii)(iii)より, 3 回目に勝者が決まる確率は, $\dfrac{1}{27} + \dfrac{2}{27} + \dfrac{2}{27} = \dfrac{5}{27}$

(4)　(i)　$n-1$ 回目まで 3 人で続けるとき

3 人 $\xrightarrow{1回}$ 3 人 $\xrightarrow{2回}$ $\cdots$ $\xrightarrow{n-1回}$ 3 人 $\xrightarrow{n回}$ 1 人とじゃんけんをする人数が変化するので, その確率は, $\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}\times\dfrac{1}{3} = \left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ である。

(ii)　k 回目 $(1 \leqq k \leqq n-1)$ に 1 人負けた後, 2 人で続けるとき

$$3\text{ 人} \xrightarrow{1\text{回}} \cdots \xrightarrow{k-1\text{回}} 3\text{ 人} \xrightarrow{k\text{回}} 2\text{ 人} \xrightarrow{k+1\text{回}} \cdots \xrightarrow{n-1\text{回}} 2\text{ 人} \xrightarrow{n\text{回}} 1\text{ 人}$$

とじゃんけんをする人数が変化するので, その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \times \frac{1}{3} \times \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k-1} \times \frac{2}{3} = 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

(i)(ii)より, n 回目のじゃんけんで勝者が決まる確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^{n} + \sum_{k=1}^{n-1} 2\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = \left(\frac{1}{3}\right)^{n} + 2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n} = (2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

コメント

(4)に至るたいへん詳しい誘導がつけられています。

問　題

ある人がバス停 A で A 発 B 行きのバスに乗り，バス停 B で B 発 C 行きのバスに乗りかえてバス停 C へ向かうものとする。バスの発車時刻，バス停での待ち時間，バスの乗車時間は次の 5 つの条件を満たすものとする。

1. A 発 B 行きおよび B 発 C 行きのバスは同時刻に 3 分おきで発車している。
2. バス停 A での待ち時間は 0 分または 1 分または 2 分で，それぞれの起こる確率は $\frac{1}{3}$ である。
3. バス停 B に到着後，最初に発車する C 行きのバスに乗りかえる。
4. A 発 B 行きのバスの乗車時間は 8 分または 10 分で，それぞれの起こる確率は $\frac{1}{2}$ である。
5. B 発 C 行きのバスの乗車時間は 6 分または 7 分で，それぞれの起こる確率は $\frac{1}{2}$ である。

ただし，条件 2，4，5 において，待ち時間，乗車時間の起こり方は独立であるとする。

この人がバス停 A に到着後バス停 C へ到着するまでにかかる時間が n 分である確率 $P(n)$ を求めよ。 [2003]

解答例

A 発 B 行きのバスと B 発 C 行きのバスは，同時刻に 3 分おきで発車しているので，A 発 B 行きのバスに 8 分乗車したときはバス停 B で 1 分待ち，10 分乗車したときはバス停 B で 2 分待つことになる。

すると，バス停 A での待ち時間, A から B への乗車時間，バス停 B での待ち時間, B から C への乗車時間という 4 つの時間の組について，次の 12 通りの場合が考えられる。ただし，単位を分とする。

$$(0,\ 8,\ 1,\ 6),\ (1,\ 8,\ 1,\ 6),\ (2,\ 8,\ 1,\ 6),\ (0,\ 8,\ 1,\ 7)$$
$$(1,\ 8,\ 1,\ 7),\ (2,\ 8,\ 1,\ 7),\ (0,\ 10,\ 2,\ 6),\ (1,\ 10,\ 2,\ 6)$$
$$(2,\ 10,\ 2,\ 6),\ (0,\ 10,\ 2,\ 7),\ (1,\ 10,\ 2,\ 7),\ (2,\ 10,\ 2,\ 7)$$

この 12 通りの場合は同様に確からしく，合計の時間が 15 分，21 分になる場合がそれぞれ 1 通りずつ，合計の時間が 16 分, 17 分, 18 分, 19 分, 20 分になる場合がそれぞれ 2 通りずつあるので，

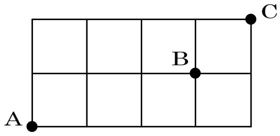
$$P(15) = P(21) = \frac{1}{12},\ P(16) = P(17) = P(18) = P(19) = P(20) = \frac{1}{6}$$

なお, $n \leqq 14$ または $22 \leqq n$ のときは，$P(n) = 0$ である。

コメント

読解力だけの問題です。

問　題

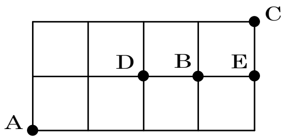


右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。

n を 7 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点に止まらずに B 地点を通り過ぎ，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。

[2002]

解答例



6 回目に B を通り過ぎるという条件より，6 回目では 1 の目が出て，D から E に進むことになり，その確率は $\frac{1}{6}$ である。

すると，5 回目までに D に到達していることになり，A から D への進み方には次の 2 つの場合がある。

1 つは，1 の目が 1 回出て，3 の目が 1 回，4 か 5 か 6 の目が 3 回出るときで，その確率は，$\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{72}$ である。

もう 1 つは，2 の目が 2 回出て，3 の目が 1 回，4 か 5 か 6 の目が 2 回出るときで，その確率は，$\frac{5!}{2!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{144}$ である。

よって，5 回目までに D に到達している確率は，$\frac{5}{72}+\frac{5}{144}=\frac{5}{48}$ である。

さらに，7 回目以降に E から C に進むには，7 回目から n 回目までに，3 が 1 回出ればよいので，その確率は，

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{6}\cdot\frac{1}{6}+\left(\frac{5}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}+\cdots+\left(\frac{5}{6}\right)^{n-7}\cdot\frac{1}{6}=\frac{\frac{1}{6}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}}{1-\frac{5}{6}}=1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}$$

以上より，n 回目までに C 地点に到達する確率は，

$$\frac{5}{48}\times\frac{1}{6}\times\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}=\frac{5}{288}\left\{1-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}\right\}$$

コメント

複雑な場合分けを予想しましたが，6 回目が右に 2 区画進む場合だけなので，あっさり解決してしまいました。なお, 7 回目以降は余事象で考えた方が簡単でした。

問　題

袋の中に赤の玉と白の玉が合計 4 個入っている。1 回の試行では袋から 1 個の玉を無作為に取り出し，それが白であれば袋に戻し，赤の玉の場合は戻さずに別に用意した白の玉 1 個を袋に入れる。

(1) 最初は赤の玉と白の玉が 2 個ずつであるとして，3 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。

(2) 最初は赤の玉が 3 個，白の玉が 1 個であるとして，5 回以下の試行で袋の中が白の玉 4 個となる確率を求めよ。 [2001]

解答例

(1) (i) 2 回の試行で白玉が 4 個となるとき

赤・赤と取り出す場合で，その確率は，$\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{8}$

(ii) 3 回の試行で白玉が初めて 4 個となるとき

赤・白・赤または白・赤・赤と取り出す場合で，その確率は，

$$\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{5}{32}$$

(i)(ii)より, 3 回以下の試行で白玉 4 個となる確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{5}{32}=\dfrac{9}{32}$

(2) (i) 3 回の試行で白玉が 4 個となるとき

赤・赤・赤と取り出す場合で，その確率は，$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{2}{4}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{32}$

(ii) 4 回の試行で白玉が初めて 4 個となるとき

赤・赤・白・赤または赤・白・赤・赤または白・赤・赤・赤と取り出す場合で，その確率は,

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{18}{128}$$

(iii) 5 回の試行で白玉が初めて 4 個となるとき

まず, 4 回目が白のときは，赤・赤・白・白・赤または赤・白・赤・白・赤または白・赤・赤・白・赤と取り出す場合で，その確率は,

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{54}{512}$$

また，4 回目が赤のときは，赤・白・白・赤・赤または白・赤・白・赤・赤または白・白・赤・赤・赤と取り出す場合で，その確率は,

$$\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\times\frac{1}{4}\times\frac{3}{4}\times\frac{2}{4}\times\frac{1}{4}=\frac{21}{512}$$

合わせると，$\dfrac{54}{512}+\dfrac{21}{512}=\dfrac{75}{512}$

(i)(ii)(iii)より, 5 回以下の試行で白玉 4 個となる確率は, $\dfrac{3}{32}+\dfrac{18}{128}+\dfrac{75}{512}=\dfrac{195}{512}$

コメント

ケアレスミスを避けようとすると，神経が磨り減り，本当に疲れてしまいます。

問　題

数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2，3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

[2000]

解答例

1 が a 回, 2 または 3 が b 回, 4 が c 回, 5 または 6 が d 回出たとすると，条件より，

$$a+b+c+d=5 \cdots\cdots\cdots ①,\quad 2+2b-c-2d=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①×2＋②より，$3a+4b+c=10 \cdots\cdots\cdots ③$

$a \geqq 0$, $c \geqq 0$ なので $4b \leqq 10$ となり, b は 0 以上の整数より，$b=0,\ 1,\ 2$

(i)　$b=0$ のとき　③より $3a+c=10$

①より $0 \leqq a+c \leqq 5$ なので，$(a,\ c)=(3,\ 1)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 0,\ 1,\ 1)$ となり，②を満たす。

(ii)　$b=1$ のとき　③より $3a+c=6$

①より $0 \leqq a+c \leqq 4$ なので，$(a,\ c)=(2,\ 0),\ (1,\ 3)$

$(a,\ c)=(2,\ 0)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 0,\ 2)$ となり，②を満たす。

$(a,\ c)=(1,\ 3)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 3,\ 0)$ となり，②を満たす。

(iii)　$b=2$ のとき　③より $3a+c=2$

①より $0 \leqq a+c \leqq 3$ なので，$(a,\ c)=(0,\ 2)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 2,\ 1)$ となり，②を満たす。

(i)(ii)(iii)より, 5 回振った後に点 A が原点にあるのは，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組が，

$$(3,\ 0,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 0,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3,\ 0),\ (0,\ 2,\ 2,\ 1)$$

求める確率は，これらの場合の和となり，

$$\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}$$

$$=\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}+\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}=\frac{70}{3^3\cdot 6^2}=\frac{35}{486}$$

コメント

ランダムウォークを題材とした頻出問題です。5 回移動するだけですので，場合分けの数もそんなに多くはありません。

問　題

白玉 3 個, 赤玉 4 個があるとし, 同じ色の玉は区別できないものとする。

(1)　上の 7 個を 2 つの区別のついた袋 A, B に分けて入れる。入れる方法は何通りあるか。ただし, いずれの袋にも 7 個のうち少なくとも 1 個は入れるものとする。

(2)　6 段の引き出しのついたタンスが 2 つあり, その中に上記の玉 7 個を分けて入れたい。ただし, どの引き出しにも 1 個しか入れないものとする。各タンスの引き出しは上から何段目か区別がつくが, 2 つのタンスは区別しないものとすれば, 入れる方法は何通りあるか。 [1998]

解答例

(1)　袋 A に白を x 個, 赤を y 個入れ, 残りを袋 B に入れるとする。

すると, $0\leqq x\leqq 3$, $0\leqq y\leqq 4$ から $(x,\ y)$ の組の個数は $(3+1)\times(4+1)=20$ 通り。この 20 通りには, $(x,\ y)=(0,\ 0)$, $(3,\ 4)$ の 2 通りの場合も数えられているので, 求める場合の数は $20-2=18$ 通り。

(2)　タンスを左右に並べて, 左側のタンスを A, 右側のタンスを B として区別する。

A に白を x_1 個, 赤を y_1 個入れ, B に白を x_2 個, 赤を y_2 個入れるとすると, $1\leqq x_1+y_1\leqq 6$, $1\leqq x_2+y_2\leqq 6$ となることより, その入れ方は, (1)から 18 通りとなる。

(i)　$x_1=0$ のとき, $y_1=1,\ 2,\ 3,\ 4$

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 1)$, $(x_2,\ y_2)=(3,\ 3)$ では, ${}_6C_0\times{}_6C_1\times{}_6C_3\times{}_3C_3$ 通り

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 2)$, $(x_2,\ y_2)=(3,\ 2)$ では, ${}_6C_0\times{}_6C_2\times{}_6C_3\times{}_3C_2$ 通り

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 3)$, $(x_2,\ y_2)=(3,\ 1)$ では, ${}_6C_0\times{}_6C_3\times{}_6C_3\times{}_3C_1$ 通り

$(x_1,\ y_1)=(0,\ 4)$, $(x_2,\ y_2)=(3,\ 0)$ では, ${}_6C_0\times{}_6C_4\times{}_6C_3\times{}_3C_0$ 通り

よって, ${}_6C_0\times{}_6C_3\times(6\cdot1+15\cdot3+20\cdot3+15\cdot1)=2520$ 通り

(ii)　$x_1=1$ のとき, $y_1=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 0)$, $(x_2,\ y_2)=(2,\ 4)$ では, ${}_6C_1\times{}_5C_0\times{}_6C_2\times{}_4C_4$ 通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 1)$, $(x_2,\ y_2)=(2,\ 3)$ では, ${}_6C_1\times{}_5C_1\times{}_6C_2\times{}_4C_3$ 通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 2)$, $(x_2,\ y_2)=(2,\ 2)$ では, ${}_6C_1\times{}_5C_2\times{}_6C_2\times{}_4C_2$ 通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 3)$, $(x_2,\ y_2)=(2,\ 1)$ では, ${}_6C_1\times{}_5C_3\times{}_6C_2\times{}_4C_1$ 通り

$(x_1,\ y_1)=(1,\ 4)$, $(x_2,\ y_2)=(2,\ 0)$ では, ${}_6C_1\times{}_5C_4\times{}_6C_2\times{}_4C_0$ 通り

よって, ${}_6C_1\times{}_6C_2\times(1\cdot1+5\cdot4+10\cdot6+10\cdot4+5\cdot1)=11340$ 通り

(iii)　$x_1=2$ のとき, (ii)と同じく 11340 通り

(iv)　$x_1=3$ のとき, (i)と同じく 2520 通り

ここで，題意は 2 つのタンス A, B を区別しないことなので，(i)～(iv)より，

$$\frac{2520\times 2+11340\times 2}{2}=13860\text{ 通り}$$

コメント

(2)は(1)を利用すると上のようになり，計算量がすさまじいものになります。

問　題

$f(x)=x^3$ とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq a < x < y$ を満たすすべての $a,\ x,\ y$ に対して，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$ が成り立つことを示せ。

(2)　$y < x < b$ を満たすすべての $x,\ y$ に対して，$f(x) > \dfrac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$ が成り立つような b の範囲を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$0 \leqq a < x < y$ を満たすすべての a, x, y に対して，

$$\frac{f(y)-f(x)}{y-x}-\frac{f(x)-f(a)}{x-a}=\frac{y^3-x^3}{y-x}-\frac{x^3-a^3}{x-a}$$
$$=(y^2+xy+x^2)-(x^2+ax+a^2)=(y^2-a^2)+x(y-a)$$
$$=(y-a)(y+a+x)>0$$

よって，$\dfrac{f(x)-f(a)}{x-a} < \dfrac{f(y)-f(x)}{y-x}$

(2)　$y < x < b$ を満たすすべての x, y に対して $f(x) > \dfrac{(x-y)f(b)+(b-x)f(y)}{b-y}$ から，

$$(b-y)f(x)-(x-y)f(b)-(b-x)f(y)>0 \cdots\cdots\cdots ①$$

すると，①の左辺は，

$$(b-x+x-y)f(x)-(x-y)f(b)-(b-x)f(y)$$
$$=(b-x)\{f(x)-f(y)\}+(x-y)\{f(x)-f(b)\}$$
$$=(b-x)(x^3-y^3)+(x-y)(x^3-b^3)$$
$$=(b-x)(x-y)\{(x^2+xy+y^2)-(x^2+bx+b^2)\}$$
$$=(b-x)(x-y)\{x(y-b)+(y^2-b^2)\}$$
$$=(b-x)(x-y)(y-b)(x+y+b)$$

$b-x>0$，$x-y>0$，$y-b<0$ より，①は，$x+y+b<0 \cdots\cdots\cdots ②$

$y < x < b$ を満たすすべての x, y に対して，②が成り立つ条件は，

(i)　$b>0$ のとき

$y=\dfrac{b}{4}$，$x=\dfrac{b}{2}$ とすると，②は $\dfrac{7}{4}b<0$ となり，成立しない。

(ii)　$b=0$ のとき

$y<x<0$ を満たすすべての x, y に対して，$x+y<0$ となり，②は成立する。

(iii) $b<0$ のとき

$y<x<b$ を満たすすべての x, y に対して，明らかに②は成立する。

(i)(ii)(iii)より，求める b の範囲は，$b \leqq 0$ である。

コメント

(2)は，(1)と独立に，計算だけで進めましたが，この問題は，$y=f(x)$ のグラフにおいて，上に凸になっている範囲を求めるものです。

問　題

$0<a<b$ とし, m, n を自然数とする。

$f(m)=\log\dfrac{a^m+b^m}{2}$,　$g(m)=\dfrac{\log(a^m)+\log(b^m)}{2}$ とする。このとき, $f(m+n)$, $f(m)+f(n)$, $g(m+n)$, $g(m)+g(n)$ を大きさの順に並べよ。ただし, 対数は常用対数とする。 [1998]

解答例

$$f(m)+f(n)=\log\frac{a^m+b^m}{2}+\log\frac{a^n+b^n}{2}=\log\frac{(a^m+b^m)(a^n+b^n)}{4},$$

$f(m+n)=\log\dfrac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}$ から,

$$(a^m+b^m)(a^n+b^n)-2(a^{m+n}+b^{m+n})=-a^ma^n-b^mb^n+a^mb^n+a^nb^m$$
$$=a^m(-a^n+b^n)+b^m(-b^n+a^n)=(a^n-b^n)(-a^m+b^m)<0\quad(0<a<b\text{ より})$$

$\dfrac{(a^m+b^m)(a^n+b^n)}{4}<\dfrac{a^{m+n}+b^{m+n}}{2}$ から, $f(m)+f(n)<f(m+n)$ ………①

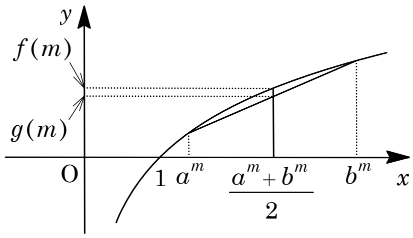
$$g(m)+g(n)=\frac{\log(a^m)+\log(b^m)}{2}+\frac{\log(a^n)+\log(b^n)}{2}=\frac{(m+n)(\log a+\log b)}{2},$$

$g(m+n)=\dfrac{\log(a^{m+n})+\log(b^{m+n})}{2}=\dfrac{(m+n)(\log a+\log b)}{2}$ から,

$$g(m)+g(n)=g(m+n)\ \text{………②}$$

また, 曲線 $y=\log x$ は上に凸なので, 2 点 $(a^m,\ 0)$, $(b^m,\ 0)$ を結ぶ線分の中点を考えると, $f(m)>g(m)$ となる。また $f(n)>g(n)$ から,

$$f(m)+f(n)>g(m)+g(n)\ \text{………③}$$



①②③より,

$$f(m+n)>f(m)+f(n)>g(m)+g(n)=g(m+n)$$

コメント

4 つの式の値の大小比較なので, 初めから適当に差をとっていたのでは, 運が悪いとなかなか結論に達しません。上の解では曲線 $y=\log x$ の形状に着目して, まず $f(m)>g(m)$ から, ③の式と $f(m+n)>g(m+n)$ を導きました。結局, 後者の式は不要だったのですが, 最初はこの関係をもとにして残りの式の大小関係を考えました。なお, $f(m)>g(m)$ を直接的に示すには, 相加平均と相乗平均の関係から, 不等式 $\dfrac{a^m+b^m}{2}>\sqrt{a^mb^m}=(a^mb^m)^{\frac{1}{2}}$ を利用します。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆