高校数学の方法

2013 年 9 月 2 日

目 次

はじめに 4
問題一覧 7

第 1 章　問題の構造 13
1.1　決定と証明 13
1.2　命題と条件 16
1.3　解ける根拠 21
1.4　解答の条件 27

第 2 章　糸口をつかむ 31
2.1　記号の導入 31
2.1.1　等しいものを文字に置く 32
2.1.2　未知なものを文字に置く 35
2.1.3　存在するものを文字に置く 36
2.1.4　文字の一般性 38
2.1.5　定数と変数の見方を変える 39
2.1.6　問題と考え方 40
2.2　条件と結論の分析 44
2.2.1　同値変形で解きほぐす 44
2.2.2　結論からさかのぼる 47
2.2.3　定義に立ちかえる 49
2.2.4　問題と考え方 51
2.3　関係の図示 54
2.3.1　関数の図示 55
2.3.2　数列の図示 57
2.3.3　確率過程の図示 59
2.3.4　問題と考え方 60
2.4　個別と一般 61
2.4.1　例で考える 62
2.4.2　例による型認識 63
2.4.3　推測して数学的帰納法 65
2.4.4　一般化して考える 66
2.4.5　問題と考え方 72

第 3 章　論証の推進　75
3.1　場合分け 75
3.1.1　定数の範囲で式が変わる 75
3.1.2　個数を数える場合分け 77
3.1.3　問題と考え方 81
3.2　必要と十分 84
3.2.1　必要条件で絞り十分性を確認する 84
3.2.2　推論とは必要条件による限定 87
3.2.3　絞って調べるか，同値変形か 90
3.2.4　問題と考え方 92
3.3　数学的帰納法 94
3.3.1　変形型数学的帰納法 95
3.3.2　複合命題と数学的帰納法 97
3.3.3　問題と考え方 99
3.4　間接証明と背理法 103
3.4.1　対偶を示す 104
3.4.2　背理法 105
3.4.3　問題と考え方 111

第 4 章　構造の分析　114
4.1　図形とは何か 114
4.1.1　図形の論証方法 114
4.1.2　値域・軌跡・通過範囲 119
4.1.3　問題と考え方 124
4.2　不変な関係 127
4.2.1　恒等式 127
4.2.2　定点を通る曲線群 131
4.2.3　不変量の発見 135
4.2.4　対称性の発見と活用 137
4.2.5　問題と考え方 144
4.3　帰納的定義 147
4.3.1　漸化式で解く 148
4.3.2　マルコフ過程 151
4.3.3　数列を漸化式に戻す 153
4.3.4　問題と考え方 155
4.4　存在の証明 157
4.4.1　存在の直接証明 157
4.4.2　存在の間接証明ー鳩の巣論法 159
4.4.3　最小自然数の存在 163
4.4.4　離散的写像の不動点定理 163
4.4.5　存在の間接証明ー中間値の定理 164
4.4.6　問題と考え方 166

第 5 章　解答 **170**
5.1　2 章解答 170
5.2　3 章解答 206
5.3　4 章解答 240

はじめに

高校で数学を学ぶ意義

なぜ小学校，中学校，高校で数学が必須の科目とされているのか．結論をいえば，数学は現代世界で人間が生きるうえで，なくてはならないからである．なぜなくてはならないのか．それには二つの理由がある．

第一，現代文明は数学なしにはありえない．数学を身につけなければ仕事もできないし，人間的な生活をおくることもできない．

現代の文明は，あらゆるところで数学が基本的な方法として用いられている．身の回りにあるテレビ，パソコン，携帯電話などの情報機器，鉄道，飛行機などの交通機関，橋やビルなどあらゆる建造物，すべて数学なしには設計もできず建設もできず，運転もできない．つまり存在しえない．また，あらゆる経済活動は数をもとにおこなわれ，数学なしに生産活動を組織することはできない．

情報技術はあらゆるものを形式化しさらに数字化してつかみ動かそうとする基本的な傾向がある．情報技術は，人間がこういうものだと認識したあらゆるものに番号を振ろう (コード化しよう) とする．この傾向については賛否がありうる．しかしこの傾向を押しとどめることはできない．

だから，現代文明を成り立たせている数学を理解し，身につけなければ生産活動に携われないし，生活もできない．数学は現代社会で人間として生きていくうえで不可欠である．実際の仕事や日常生活でどれだけ数学がいるかということよりも重要であるが，さらに大切なことは，基礎的な素養として一定の数学を習得しなければ，今日の文明のもとでは人間的な生活を送ることができないということである．

第二，数学は人間に不可欠な言葉である．

人間はサルからわかれ長い時間を経て，言葉を使うことで**力をあわせ協力して働く生き物**になった．人間はこの世界から糧を得るために力をあわせて働いてきた．人間一人一人は弱い生き物だが，力をあわせることで生きてきた．力をあわせるために言葉が生まれた．言葉は豊かになり，世界をなんらかの形に切りとってつかむ方法になった．言葉は人と人が伝達しあう方法であると同時に，考えるということを可能にした．先に生きたものの智慧を次代に伝えることができるようになった．これが言葉である．

人間は働きそしてそのことを省みる．言葉がそれを可能にした．今日の労働は昨日より疲れるとか，この石を持ちあげるのはあの石より楽だなど，体感しうる労働量の比較から量の認識がはじまる．また実がなるまでの日にちを数えることもあっただろう．こうして量の仕組みの科学が育っていった．それが数学なのだ．量の認識と数の発見からはじまり，これもまた途方もなく長い時間をかけて数学が育ってきた．

数学は，世界の仕組みを把握し，量を抽象してとらえる言葉そのものである．第一の生得の言葉が量の構造把握と結びついて論理や論証が生まれ，抽象して判断する言葉としての数学が育つ．これが人間である．数学は第二の母語であり，しかもこの母語は第一の母語のうえに表されるが，他の母語の上に表すこと，翻訳が可能なのだ．

数学はそれ自体として存在するが，存在するところは抽象された場 (ところ) である．それゆえに数学的な判断は論証による．数学は論証してはじめて存在する．ある数学的事実は何を根拠に成立するか．それを考える．本当か?　なぜなのか?　と考える．数学的事実を把握し，根拠を論証し，一見正しいことも根拠が明確でなければあくまで疑い，真偽を追求する．

だから数学を勉強することは，批判的論証の基礎訓練である．証明するということ自体が近代の人間の必須の方法である．論述や弁証が典型的に用いられる数学を学び，結論の根拠を論述したり

証明することをとおして，筋道を立て結論を予測しそれを論証する力をつける．

大学入試とは何か

大学入試はこの面から大学での勉強にたえうるかどうかを試す．その力の度合いによって選抜しようということである．だから入試数学といっても何か特別な数学があるわけではない．学問としての数学を正面から勉強することが，結局は力をつける早道である．これが本当の勉強である．他に楽な道はない．

科学はものごとの根拠を問うことにはじまる．根拠を問うとは現象を根本において捉えることである．さらにその根本としたことをも問い直す．この永続，それが科学だ．このような科学精神を育てること，これがあれば入学試験そのものは何ら恐れることはない．

言葉が，伝達の道具であるとともに考えることそのものであるように，数学もまた数や量を共有する道具であるとともに世界を把握する第二の言葉そのものである．だから数学を学ぶことは人間が人間として自分を確立するうえで必須のことなのである．

受験勉強も人間の成長にとって大切な学問である．現代日本では，受験数学が小手先の方法に落ちこんでいる．しかし，受験勉強をどのように取り組むかは，一人一人の態度だ．学問として正面から取り組めばいい．それがいちばん力のつく道である．そういう勉強をしようとする高校生や高校生の数学教育に携わる人は今もいるはずだ．

数学にとって問題とは何か

さて数学では実際に問題を解くことがその根幹にある．数学の問題は他の教科の問題とは少し意味合いが違う．世界史において教科の内容を学ぶこととは，基本的な歴史的事実をまずしっかりとつかみ，そのうえでその事実が歴史のなかでどのような意味をもつのかを考え，まとめることである．世界史の試験は歴史的事実をどれだけ把握しているかということと，その事実の意義を評価する力がどれだけあるかを試すものだ．

数学はすべて現実世界の量に根拠をもつ．そこから一定の抽象を経て，数学的な諸現象が得られる．数学的現象を調べること自体が数学の問題なのだから，その意味で数学は問題自体の中にある．もちろん学校教育の数学が現実世界とのつながりを薄めてしまっていることは問題なのだが，将来どのような仕事に就こうと，そこで必要な数学の共通の土台としての数学は確かに必要で，抽象された数学の世界は問題そのものの中にある．問題を解き，疑問を解決し，わかったことをまとめる．このような営為そのものが数学なのだ．

数学はいつも「これは本当だろうか」という問い,「これを求めるにはどうしたらいいのだろう」という問い，これを原動力にしてきた．こうして論証のための体系がまとめられていった．既知なことが整理され体系化されていった．そのようにまとめられた体系は系統だって学校教育のなかで教えられる．しかしそれだけでは知識に過ぎない．

数学するとは問題を立て問題を解く実践そのものである．演習問題は数学そのものの超縮小模型である．だから数学では問題をどんどん解くことがどうしても必要である．結果だけが解答ではない．それが確かに問いに対する解であることを論証しなければならない．ここまで含めて問題に対する解答なのだ．このような数学の実践，それが問題を解くということだ．高校生にとって数学は問題の中にあり，問題を解くことは数学に触れることなのだ．

数学の問題の構造を実際の問題を通して調べ，それを手がかりに問題を解く方法論を身につける．問題に対面したときに**意識的に方法を考える**ことが身につけば，その結果として，実力が飛躍

する．方法をおぼえることよりも，どう解こうかと方法を考える態度を身につけることの方がはるかに大切なのだ．最初にこのことは断っておきたい．その上で，さあ，一緒に考えていこう．

問題一覧

1 章 1 節

- 08 一橋【1.1】／すべて求めよ
- 08 京大文系【1.2】／真偽の決定

1 章 2 節

- 09 京大理系乙【1.3】／平面図形の論証
- 06 大府大後期経済【1.4】／対偶と証明

1 章 3 節

- 08 京大理系甲文系【1.6】／解の個数
- 06 大府大後期経済【1.4】／対偶と証明
- 08 東大理科【1.7】／確率過程
- 出典不明【1.8】／数列の論証

2 章 1 節

- 84 防衛大改題【2.1】／二つの等号
- 06 東大文科【2.2】／円に内接四辺形
- 出典不明【2.3】／二次方程式の共通解
- 03 京大【2.4】／正四面体の特徴づけ
- 出典不明【2.5】／方程式の解の存在範囲
- 02 名大理系【2.1】／三つの等号条件
- 04 早稲田商学部【2.2】 ／真数の最高位の数と対数
- 04 名大【2.3】／連立方程式の解の存在条件
- 05 東大文科【2.4】／方程式の解の存在範囲
- 05 阪大【2.5】／空間図形
- 07 早稲田【2.6】／特別な四面体の外接球
- 97 名大【2.7】／ベクトルの論証
- 83 東大【2.8】／空間図形の最小値
- 99 お茶の水女子大【2.9】／量の最大最小
- 06 名大【2.10】／場合の数の論証

2 章 2 節

- 07 早稲田・教育【2.6】／不等式の証明
- 08 東大文科【2.7】／軌跡
- 01 日本女子大【2.8】／数の論証
- 出典不明【2.9】／数の論証
- 07 慶應経済【2.10】／新しい関係と集合
- 作成問題【2.11】／等式・不等式の同値変形
- 作成問題【2.12】／ねじれの位置にある 2 直線
- 02 京大理系【2.13】／円周上の点の位置
- 06 京大理系後期【2.14】／外接円と内接円の半径

- 04 岐阜大【2.15】／連立一次方程式
- 04 愛媛大【2.16】／整数値関数
- 96 甲南大【2.17】／2 変数定符号二次式
- 07 東北後期文系【2.18】／点集合の面積
- 08 早稲田理工【2.19】／格子点上の関数

2 章 3 節
- 96 関西大【2.12】／2 次関数の解の個数
- 00 京大文系【2.13】／数列と階差数列
- 92 一橋【2.14】／確率と数列
- 08 京大理系乙【2.20】／2 次関数の解の個数
- 95 大阪市大【2.21】／確率と数列
- 01 名古屋【2.22】／確率と数列
- 04 東大文系【2.23】／確率と数列

2 章 4 節
- 09 奈良医科大【2.16】／場合の数
- 01 京大文系後期【2.17】／数列と集合
- 01 愛媛大【2.15】／数列と整数
- 01 慶応理工【2.18】／多項式関数
- 01 京府医大【2.19】／多項式関数の一致
- 02 北大【2.24】／場合の数
- 00 名古屋市大【2.25】／確率
- 07 名古屋市大【2.26】／出会いの数
- 01 九大【2.27】／シュワルツの不等式
- 01 東工大【2.28】／確率，二項定理
- 04 一橋後期【2.29】／確率と期待値
- 大阪市大過去問【2.30】／数列の決定
- 01 お茶の水女子大【2.31】／素因数の集合

3 章 1 節
- 00 京大文系【3.1】／絶対値関数の定積分で定まる関数
- 鳥取大過去問【3.2】／場合の数を数える
- 08 京大文系【3.3】／一筆がきの場合の数
- 作成問題【3.1】／方程式の解
- 作成問題【3.2】／2 次方程式の解の配置
- 87 高崎経済大【3.3】／対数関数と領域
- 98 京大文系【3.4】／分数式と不等式
- 00 阪大文系 【3.5】／絶対値で定まる関数
- 埼玉大過去問改題【3.6】／個数の処理

- 04 三重大後期【3.7】／等差数列をなす自然数の部分集合
- 06 群馬大医【3.8】／整数の個数の処理
- 08 東工大理特【3.9】／立体部分の個数処理

3 章 2 節
- 出典不明【3.4】／不等式の成立条件
- 09 一橋大【3.5】／整数解を求める
- 99 京大後期文系【3.6】／領域の包含条件
- 大阪市大過去問【3.7】／整数解をもつ条件
- 84 東京工大【3.8】／3 乗和を素数べきで表す
- 01 京大理系【3.9】／整数の論証
- 05 大教大【3.10】／整数値整式の論証
- 97 一橋大【3.10】／数列と整数
- 97 お茶の水大【3.11】／数列と整数
- 94 阪大文理【3.12】／数列と整数
- 04 京大理系【3.13】／行列の論証
- 01 千葉【3.14】／素数と整数解を求める
- 05 京大理系【3.15】／整数解を求める

3 章 3 節
- 出典不明【3.11】／変形帰納法
- 00 横浜国立大学改題【3.12】／整数解の有限性
- 出典不明【3.13】／命題の証明
- 97 東京工大改題【3.14】／整数解の有限性
- 99 上智・理工【3.16】／数列と余り
- 出典不明【3.17】／変形帰納法
- 阪大過去問【3.18】／数列と整数
- 作成問題【3.19】／相乗平均・相加平均の不等式
- 99 滋賀医大【3.20】／複雑な数学的帰納法
- 01 横浜市大【3.21】／複雑な数学的帰納法
- 04 東大理系【3.22】／証明すべきことを強める
- 02 京大後期理系【3.23】／整式の係数と数学的帰納法
- 86 京大文理【3.24】／ n 項数列の論証
- 作成問題【3.25】／方程式の解の配置

3 章 4 節
- 出典不明【3.15】／不等式成立の条件
- 00 北見工業大学【3.16】／素数が無数にある証明
- 09 千葉大【3.17】／ある型の素数が無数にある証明
- 既知事実【3.18】／ $\sqrt{2}$ が無理数であること

- 大阪市大【3.19】／立方根と 2 次方程式
- 名大類題【3.20】／ 2 次チェビシフの多項式
- 09 千葉大【3.21】／整数解の非存在証明
- 99 阪大改題【3.26】／有理点を頂点とする正三角形
- 00 千葉【3.28】／不定方程式の整数解の不存在証明
- 00 九州大改題【3.29】／三角関数と 3 次，2 次の方程式
- 98 一橋【3.30】／対数と無理数
- 04 一橋【3.27】／放物線上の格子点
- 06 京大後期文系 5 番理系 6 番【3.31】／三角関数と無理数
- 02 名大理系【3.32】／積分と数列
- 05 東大理科改題【3.33】／ 2 次方程式の (複素) 定数の条件

4 章 1 節
- 07 阪大文理【4.1】／反転
- 08 京大理系乙【4.2】／真を示す
- 作成問題【4.3】／領域と値域の基本
- 92 千葉大【4.4】／弦の通過範囲
- 98 中京大【4.1】／交点の軌跡
- 98 奈良女子大【4.2】／反転と軌跡
- 01 北大【4.3】／反転と軌跡
- 99 都立大【4.4】／媒介変数表示と領域
- 出典不明【4.5】／直線の通過領域
- 97 東大文系【4.6】／直線の通過領域
- 97 一橋後期【4.7】／曲線の一部の通過領域
- 05 阪大理系【4.8】／曲線の通過領域
- 05 一橋【4.9】／曲線の一部の通過領域
- 07 東大【4.10】／点の存在領域

4 章 2 節
- 法政大過去問【4.5】／恒等式の応用
- 早稲田過去問改題【4.6】／恒等式の応用
- 出典不明【4.7】／関数の最大最小
- 出典不明【4.8】／円と直線の交点を通る円
- 作成問題【4.9】／円と円の交点を通る円
- 出典不明【4.7】／関数の最大最小
- 出典不明【4.7】／関数の最大最小
- 作成問題【4.10】／濃度の推移
- 出典不明【4.11】／ある条件を満たす三角形の点

- 95 上智大【4.12】／対称式
- 作成問題【4.13】／整数解
- 98 甲南大【4.14】／不等式の証明
- 89 京大文系【4.15】／数列の論証
- 91 関西大【4.11】／恒等式の応用，式の決定
- 00 上智・文系【4.12】／恒等式の応用，式の決定
- 01 名古屋後期【4.13】／恒等式の応用，式の決定
- 作成問題【4.14】／ 2 直線の交点を通る直線
- 99 神戸大【4.15】／恒等式の除法への応用
- 99 京都府立医大【4.16】／周期をもつ多項式関数は定数
- 作成問題【4.17】／ある条件を満たす四面体の点

4 章 3 節

- 出典不明【4.16】／文字列の個数
- 03 東大文科【4.17】／確率過程
- 出典不明【4.18】／状態の推移と確率
- 03 東大文科【4.19】／数列と整数問題
- 05 京大理系【4.21】／場合の数
- 84 東大文理【4.22】／細胞分裂過程
- 07 名大理系【4.23】／ポリアの壺
- 05 名大理系【4.24】／確率過程の論証
- 04 阪大理系【4.25】／数列と整数問題
- 08 慶應医【4.26】／マルコフ過程

4 章 4 節

- 04 千葉大後期【4.20】／ある種の図形の存在証明
- 89 広島大学【4.21】／鳩の巣原理
- 既知事実【2】／ディリクレの証明
- 00 大阪女子大【4.22】／一次不定方程式の解の存在
- 92 神戸大【4.23】／有限集合の写像の不動点定理
- 99 京大理系後期【4.24】／等面四面体の存在
- 92 京大文系後期【4.27】／奇数解の存在条件
- 99 京大文系【4.28】／一次不定方程式の解の存在
- 99 名大理系【4.29】／鳩の巣原理の応用
- 97 京大理系【4.31】／部屋割り論法による数列の決定
- 06 愛知教育大【4.30】／鳩の巣原理の応用
- 作成問題【4.32】／ 2 次不定方程式の整数解
- 01 東大文系【4.33】／有限集合の写像の不動点定理

- 06 京大文系【4.34】／有限集合の写像の不動点定理
- 05 信州大理系【4.35】／中間値の定理の活用
- 02 京大文理後期【4.36】／中間値の定理の図形の存在証明への応用
- 作成問題【4.37】／正射影と三角形の変形

第1章　問題の構造

1.1　決定と証明

問題の形

数学の問題を形式から見てみよう．実際の入試問題ではどのようになっているのだろうか．京都大学は基本的に 1 題を小問に分けない形式で出題している．そのためどのような出題であるかを数えるのに適している．2009 年はそれぞれ 1 問ずつ小問に分かれそれを含めて異なる問題が理系甲乙文系あわせて 17 題が出題された．そのうち「求めよ」が 11 題,「示せ」が 6 題である．何を，求めよあるいは示せといっているのか．実は 2008 年も，問題総数，配分ともまったく同じであった．ちなみに 2008 年は次のような内容である．

問題	種類	内容
理系甲 1，乙 1	求めよ	必要十分条件
理系甲 2，乙 2	求めよ	確率
理系甲 3，文系 2	示せ	角の相等
理系甲 4	求めよ	解の個数
理系甲 5，乙 5	求めよ	体積
理系甲 6	示せ	不等式
理系乙 3	示せ	図形の存在
理系乙 4	求めよ	解の個数
理系乙 6	示せ	不等式
文系 1	示せ	不等式
文系 3	求めよ	解の個数
文系 4	求めよ	解の個数
文系 5	求めよ	場合の数

入試問題の中には「図示せよ」などもあるがこれは領域を求めることであるから，基本的にいって入試問題は，なんらかの数学的結果を求めよというものと，示せ，つまり証明せよというものに大別されることがわかる．その過程にヒントを与えるために小問に分かれていることが多いのだが，最後は「求めよ」か「示せ」である．

「求めよ」というのはどういうことか．これはいいかえると「未知なるものを決定せよ」ということである．解を決定せよ，解の個数を決定せよ，体積を決定せよ，そして条件 (単に条件といえば必要十分条件のことである) を決定せよ等である．このように入試問題の一つの形は**決定問題**であるといえる．

「示せ」といわれるもう一つの形はいうまでもなく**証明問題**である．だがこの二つの形式はその内容においては互いに入り組んでいる．決定問題が証明問題でもあり，証明問題が決定問題でもある．

決定問題は証明問題である

決定問題は結論だけ出せばよいのではなく，それ以外にあり得ないことの論証が必要である．2008年一橋大学の前期 1 番は次の問題だった．

例題 1.1　［08 一橋］

k を正の整数とする．$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数 n が，ちょうど 1 個であるような k をすべて求めよ．

もしこの問題の「すべて求めよ」が単に「求めよ」であったなら，問題は変わるのだろうか.「求めよ」だけなら少なくとも一つ求めればいいのか．そんなことはない.「求めよ」だけであっても条件を満たすものすべてを決定しなければならないし，それですべてであること，その他にはないことの証明がなされていなければならない．だからまず**必要条件で範囲を絞り**，その範囲の一つ一つを調べて条件を満たすものを決定しなければならない.

未知なるものを求める**決定問題**は，正しい決定内容ととりうる値がそれだけであることの証明の両方が必要である．そのように解答をつくってみよう.

解答　$5n^2-2kn+1<0$ を満たす整数が存在するために，2 次方程式 $5x^2-2kx+1=0$ が相異なる 2 実解をもつことが必要である．判別式を D とする．

$$D/4=k^2-5>0$$

k が正整数なので $3\leqq k$.

この 2 次方程式の二つの解を $\alpha,\ \beta$ とする．$|\beta-\alpha|>2$ なら少なくとも 2 個存在するので，

$$|\beta-\alpha|\leqq 2$$

が必要である．

$$(\beta-\alpha)^2=(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=\left(\frac{2k}{5}\right)^2-\frac{4}{5}\leqq 4$$

なので $k^2\leqq 30$ となる．2 つの条件から $k=3,\ 4,\ 5$ が必要である．

$k=3$ のとき．$\alpha,\ \beta=\dfrac{1}{5},\ 1$ となり，条件を満たす n はない.

$k=4$ のとき．$\alpha,\ \beta=\dfrac{4\pm\sqrt{11}}{5}$ となり，

$$0<\frac{4-\sqrt{11}}{5}<1<\frac{4+\sqrt{11}}{5}<2$$

であるから，条件を満たす.

$k=5$ のとき．$\alpha,\ \beta=1\pm\dfrac{2\sqrt{5}}{5}$ となり同様に条件を満たす.

ゆえに条件を満たすのは $k=4,\ 5$ である．　□

証明問題は真偽決定問題である

逆に証明問題の内容は真か偽のいずれであるかを決定する問題と見ることができる．2007 年京都大学の文系 5 番は次の問題だった.

例題 1.2　［07 京大文系］

n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか．正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ．

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ は共に有理数である．
命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である．

これは分類としては論証問題に入るのだろう．が，それぞれ根拠を示して真か偽かを決定せよといっている．つまり問題の形式は**真偽の決定**である．一般にある命題 A とその否定 $\overline{A}$ について

命題 A およびその否定 $\overline{A}$ のいずれか一方が真であり他方は偽である．それは確定する．

が成り立つ．命題とその否定のいずれかが成り立ち「いずれでもない」や第三の結論はない．このことを**排中律**というのだが，現代数学はこの排中律を公理として認めて建設されている．だから背理法が可能なのだ．いずれにしても真か偽以外はない．したがって真であることを示すか，反例をあげて偽であることを示すか，いずれかを行う．

解答　命題 p は正しくない．それを示す．
$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ が共に有理数であるような自然数 n が存在したとする．

$$\sqrt{n}=\frac{p}{q}\ (p,\ q \text{ は互いに素な自然数})$$

とおく．これから

$$n=\frac{p^2}{q^2}$$

左辺は整数である．ところが p^2 と q^2 も互いに素である．これから $q^2=1$．つまり $q=1$ となり $\sqrt{n}$ は整数 p である．同様に $\sqrt{n+1}$ も整数である．したがって二つの自然数 p と r を用いて

$$n=p^2,\ n+1=r^2$$

とおける．ところがこれから n を消去すると

$$1=r^2-p^2=(r+p)(r-p)$$

r と p は自然数なので，$r+p=r-p=1$ であるが，このとき $r=1,\ p=0$ となり，n が自然数であることに反する．よって $\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ が共に有理数であるような自然数 n は存在しない．

命題 q は正しい．それを示す．
ある n で $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数 α になったとする．命題 p は偽なので，$\sqrt{n+1},\ \sqrt{n}$ のいずれもが有理数ということはない．$\sqrt{n}$ が無理数のとき $\sqrt{n+1}$ が有理数なら $\sqrt{n+1}-\alpha=\sqrt{n}$ で左辺有理数なので $\sqrt{n}$ が無理数であることに矛盾．逆のときも同様に矛盾する．したがって $\sqrt{n+1},\ \sqrt{n}$ はともに無理数である．$\sqrt{n}=\omega$ (無理数) とおく．すると $\sqrt{n+1}=\alpha+\omega$ となる．$\alpha\neq 0$ である．このとき

$$n+1=\alpha^2+2\alpha\omega+\omega^2=\alpha^2+2\alpha\omega+n$$

これから

$$\omega=\frac{1-\alpha^2}{2\alpha}$$

左辺は無理数で右辺は有理数なので矛盾である．よって $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数となる n は存在しない． □

命題 q が正しいことの証明は次のようにすることもできる．

別解　ある n で $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数 α になったとする．明らかに $\alpha \neq 0$ である．そこで

$$\frac{1}{\alpha}=\frac{1}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n+1}+\sqrt{n}$$

これから

$$\sqrt{n+1}=\frac{1}{2}\left(\alpha+\frac{1}{\alpha}\right),\ \sqrt{n}=\frac{1}{2}\left(-\alpha+\frac{1}{\alpha}\right)$$

となり，$\sqrt{n+1}$，$\sqrt{n}$ がともに有理数となる．これは命題 p が偽であることと矛盾する． □

多くの証明問題は「真であること (成立すること) を証明せよ」と「真」という結論を先に示し，そのうえで証明だけを問うものになることが多い．しかし本来はこの京大の問題のように，真か偽かわからないところから探求するのが問題である．この意味で，命題を証明する**証明問題**は，より一般的にいえば，命題が真か偽かのいずれであるかを決定する問題なのである．だからこの意味では証明問題も決定問題なのだ．

いずれにせよ**数学の問題**は，未知なるものの値を決定しその根拠を明示することを要求する．ここでいう「値」とは，単に数値という意味ではない．最大値や最小値のような値であることが多いのだが，実数の区間であったり，一定の不等式で定まる領域であったり，さらにまた命題の属性としての「真」か「偽」(それを真理値ということもある) であることもある．

問題には謙虚な姿勢で

ところで数学の問題というのは恣意的に作られたものなのだろうか．実はそうではない．どのように簡単な問題でも，数学の問題であるかぎりは数学的現象のある側面を切りとったものなのだ．数学的な現象を体系化してつかむ方法や形式は自由である．しかしつかまれる数学的事実，数学的現象そのものは，客観的に存在している．大きな木も，珍しく貴重な植物も，道端の雑草も同じ植物だ．植物としての神秘をもっている．これと同じように最先端の数学も入試数学も同じ数学なのだ．だから問題に対しては謙虚な姿勢で向かわなければならない．

1.2　命題と条件

命題とは何か

問題を解くときには，まず与えられた条件と証明すべき結論を明確にする．これが基本である．そのために日頃使っている「命題」や「条件」とは何であるのかをはっきりさせよう．「条件」を理解するためにはその前提として「命題」を理解しなければならない．多くの教科書の「命題と証明」の章では「命題」が次のように定義されている．

> 式や文章で表された事柄で，正しいか正しくないかが明確に決まるものを**命題**という．
> 命題が正しいことを**真**であるといい，正しくないことを**偽**であるという．

「事柄」そのものは定義されていないが，数学的現象について何らかの事実や推論を述べたもの，と言うことである．

命題の定義への疑問

この段落は難しければ読み飛ばしてもよいところだ．しかしこの教科書の定義に何かひっかかるものを感じた人はいないだろうか．何か疑問が起こらなかっただろうか．

「正しいか正しくないかが，明確に決まる」かどうかどうやって判断するのだろう．証明できるか反例があげられたとき真偽が決定される．とすれば，証明もできないし反例もあげられないとき，それは命題ではないのか，あるいは力不足で証明もできないし反例もあげられないだけであるのか，どうやって判断するのかということである．証明もせず反例もあげないで，あらかじめ「命題」であるかどうか判断できるのだろうか．

さらに次のような問題もある．正しいか正しくないかはつねに決定されるのか，ということである．命題は真偽いずれかであるとしても，決定はできるのか．実はこの問題は数学体系の完備性，十分性という問題で，大変難しい．

これらはすべて当然で自然な疑問である．だが，この問題を掘りさげようと思ったら，数学基礎論の勉強をしなければならない．いずれも数学体系をどのように組み立てるのかという難しい問題なのだ．高校の教科書の定義は厳密な意味で「命題」の定義ではない．実は命題とは「いくつかの公理と論理演算の列」として定義されるのだが，ここではそれ以上追求することはできない．

このように高校数学のなかには，論理的な穴がいっぱいある．それはそれでいいのだ．それは人間が数学的現象を捉えるときの不十分さということであり，さらに学ぶなかで必要なときに解決していけばいいのだ．もし上に書いたようなことが気になる人はさらに勉強を続けてほしい．

まず常識を大切に

高校数学段階ではこれらを問題にする必要はない．まず常識を大切にして「5 は 3 より大きい」は命題である.「5 は 3 より美しい」は命題ではない．なぜなら「3 より大きい」は明確に定義されるが,「3 より美しい」は定義されないからである，としてよい．そこでこれを踏まえて，われわれの数学の世界では，真偽は確定するとして，命題を次のように理解すればよい．

数学的に定義され内容の確定する主部と述部よりなる文

ここで「主部」とは，何について述べるかを明示する部分,「述部」とは主部で明示されたものの属性であると主張する部分である．

命題をこのような文として理解しよう．主部で明示されたものが実際にその属性をもつか否かいずれかであり，それによって命題の真偽は確定する．

「条件」とは何か

教科書では「条件」とは何かについて，明確には述べられていない．教科書では命題よりも先に必要条件や十分条件，つまりは「条件」が出てくる構成になっている．そのため「条件」とは何かが明確にならないのだ.「命題」はわかったものとし，これを基本にして順次考えていこう．

さて「16 は 4 の倍数である」は命題である．この 16 を変数 x に変えた「 x は 4 の倍数である」は x に何が入るのかによって真になったり偽になったりする．この場合は 16 を x に置きかえたが文字は必要に応じて使い分ける．

命題の主部を適当な変数，例えば x や a などに置きかえたものを**命題関数**という．そしてこれを p や，変数を明確にしたいときは $p(x)$，$p(a)$ のように書く．例えば $p(a)$ ：「a は偶数である」

のようなものだ．命題関数 $p(x)$ はそれ自体真偽が定まらないから命題ではない． x に値を代入することによって命題になる．「真である」ことを「成立する」ともいう．

この $p(x)$ についていえば，$p(3)$ つまり「3 は奇数である」は真，$p(4)$ つまり「4 は奇数である」は偽である．命題関数というからには何かの値をとると考えることもできる．この場合の値は何かといえば，それは「真」と「偽」だこの二つの値をとる．だから上の例では $p(3) = 真, p(4) = 偽$ と考えることもできる．

そこで「条件」の定義だが，命題関数 $p(x)$ のことを x **に関する条件**というのだ．命題の定義にたちかえっていうと，文字を x とすれば，条件とは「x に代入することによって真偽が定まる式や文」のことである．何となく使ってきた「条件」もこのようにして明確に定義される．

$$実数\ a,\ b\ に対し\ 2\ 次方程式\ x^2 + ax + b = 0\ は実数根をもつ.$$

は，文字 a と b に関する条件である．上の書き方では命題関数 p は

$$p(a,\ b)\ :「x^2 + ax + b = 0\ は実根をもつ.」$$

となる．この条件は

$$a,\ b\ は\ a^2 - 4b \geqq 0\ を満たす.$$

と**同値**となる．したがって，命題関数 $p(a,\ b)$ は，$a^2 - 4b \geqq 0$ を満たす a と b なら真，そうでなければ偽となる．

なお，条件は単に p のように変数を明示しないで書くことも多い．

複合命題

「命題」はいくらでも複雑なものがあり得る．いちばん単純なのは「何々(について述べる)」という主題の部分 (主部) と「(何々) である」とそのものの内容を述べる述語の部分 (述部) から成り立っている断定型である．「3 は奇数である」とかのたぐいだ．

これに対して，二つの条件 $p,\ q$ を用いて $p \Rightarrow q$ と表される推論も命題である．推論型の命題を複合型命題ということもある．ここで p や q は例えば

$$p : x\ は\ -1 \leqq x \leqq 2\ をみたす. \qquad q : x\ は\ 0 \leqq x \leqq 1\ をみたす.$$

のような何かの条件である．この例の場合 x についての条件である．

このように命題には事実を述べた断定型と，推論を述べた推論型がある．しかし「3 は奇数である」という断定型命題は，「x が 3 ならば x は奇数である」と推論型に表されるので，基本的に命題は推論型であるとしてもよい．

$$p\ ならば\ q \quad (これを「p \Rightarrow q」と記す).$$

の形に表される命題を考えよう．このとき 条件 p をこの命題の**仮定**(条件)， 条件 q を**結論**(条件)という．

仮定される条件と示すべき結論を明確に

数学の問題とはこのような複合型命題の真偽の決定問題，あるいは条件が真となる x の値の決定問題のいずれかであると言ってもよい．そこで，問題文を読んだらその問題の構造をつかまなければならない．仮定と結論とよく言われるが，仮定とは「何々のとき」「何々とすれば」のように，何ごとかに関する条件が成立するという仮定である．結論はその条件が成立するときに，その結果として成り立つ事実であり，これもまた一つの条件である．

だから問題解決の第一歩は，次のことを確認することである．

(i) 全体に共通な大前提は何か．

(ii) 成立が仮定される条件は何か．

(iii) 小問に分かれている場合，各小問における条件の相互関係はどのようになっているか．

(iv) その結果として成立することを示すべき結論，あるいは決定すべき事柄は何か．

例題 1.3　［09 京大理系乙］

平面上の鋭角三角形 $\triangle$ABC の内部（辺や頂点は含まない）に点 P をとり，A$'$ を B，C，P を通る円の中心，B$'$ を C，A，P を通る円の中心，C$'$ を A，B，P を通る円の中心とする．このとき A，B，C，A$'$，B$'$，C が同一円周上にあるための必要十分条件は P が $\triangle$ABC の内心に一致することであることを示せ．

考え方

全体に共通な前提：

> 平面上の鋭角三角形 $\triangle$ABC の内部（辺や頂点は含まない）に点 P をとり，A$'$ を B，C，P を通る円の中心，B$'$ を C，A，P を通る円の中心，C$'$ を A，B，P を通る円の中心とする．

このもとで，二つの命題：

> 甲：A，B，C，A$'$，B$'$，C が同一円周上にある．
> 乙：P が $\triangle$ABC の内心に一致する．

に対し「甲ならば乙」,「乙ならば甲」のいずれもが成り立つことを示す．これが問題の構造である．

そのうえで証明法であるが，次のような間接証明ができないか考えてみよう．

> 1) 条件 A を満たすものは一つしかない．　2) X も Y も条件 A を満たす．
> 3) ゆえに $X = Y$ である．

中心が同一直線上にない三円が同一の点を共有すれば，その点は一つしかない．あるいは，三角形の外心はただ一つしかない．この簡単なことを用いると比較的簡明に証明できる．

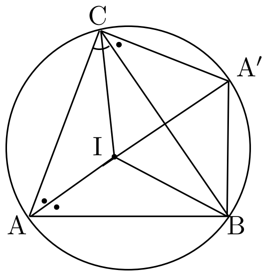
証明

点 P と A$'$，B$'$，C$'$ が題意のように定まっている前提のもとで次の二条件の同値性を示す．

条件甲：A，B，C，A$'$，B$'$，C$'$ が同一円周上にある．

条件乙：P が $\triangle$ABC の内心 I と一致する．

(1)　甲ならば乙を示す．



$\mathrm{A'B} = \mathrm{A'C}$ より $\mathrm{A'}$ は弧 BC の中点．円周角の相等より $\angle\mathrm{A'AB} = \angle\mathrm{A'AC}$．つまり直線 $\mathrm{AA'}$ は角 A の二等分線である．従って内心 I は $\mathrm{AA'}$ 上にある．他についても同様なので，三直線 $\mathrm{AA'}$，$\mathrm{BB'}$，$\mathrm{CC'}$ は内心 I で交わる．

$\angle\mathrm{CIA'} = \angle\mathrm{IAC} + \angle\mathrm{ICA}$，$\angle\mathrm{ICA'} = \angle\mathrm{ICB} + \angle\mathrm{BCA'}$ である．

ここで角の二等分より $\angle\mathrm{ICA} = \angle\mathrm{ICB}$．円周角の相等によって $\angle\mathrm{BCA'} = \angle\mathrm{BAA'} = \angle\mathrm{IAC}$．これから $\angle\mathrm{CIA'} = \angle\mathrm{ICA'}$ が結論される．

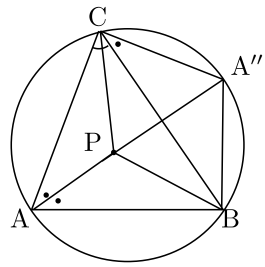
この結果 $\mathrm{A'I} = \mathrm{A'C}$ となり，内心 I は $\mathrm{A'}$ を中心とし B，C を通る円周上にある．点 P も同じ円周上にある．$\mathrm{B'}$，$\mathrm{C'}$ についても同様に成り立つ．

三点 $\mathrm{A'}$，$\mathrm{B'}$，$\mathrm{C'}$ を中心とする三円上に I と P の両点がある．これら三円の中心が一直線上に来ることはない．よって三円が共有する点は一点しかない．つまり $\mathrm{P} = \mathrm{I}$ である．

(2)　乙ならば甲を示す．

$\angle\mathrm{A}$ の二等分線と $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の交点を　$\mathrm{A''}$ とする．点 P は内心なので，(1) と同様にして，$\mathrm{PA''} = \mathrm{BA''} = \mathrm{CA''}$ である．

つまり $\mathrm{A''}$ は三点 P，B，C から等距離にある．点 $\mathrm{A'}$ も等距離にある．同一直線上にない三点から等距離にある点は一つなので $\mathrm{A'} = \mathrm{A''}$ である．つまり $\mathrm{A'}$ は $\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円上にある．他も同様である．　□



では次の問題はどうだろうか．06 大阪府立大後期経済の問題だ．

例題 1.4　［06 大府大後期経済］

x，y，z を 0 でない 3 つの実数とする．$A = x + y + z$，$B = xy + yz + zx$，$C = xyz$ とおき，以下の命題を考える．

(p) $A = 0$ ならば，$B < 0$ である．

(q) A，B，C がすべて正ならば，x，y，z はすべて正である．

(r) x，y，z の 1 つだけが正ならば，$A < 0$ または $B \leqq 0$ である．

このとき以下の問に答よ．

(1) (p) が成り立つことを証明せよ．

(2) (q) が成り立つことを仮定して (r) が成り立つことを証明せよ．

(3) (q) が成り立つことを証明せよ．

こうなると問題の分析が難しい．(2) は前提が (q) である．そのもとでの (r) の成立を示せといっている．このところをおさえることと，命題の否定の作り方を正しくすること．これに注意して解いてみてほしい．

解答

(1) $A=0$ なので，$z=-x-y$ である．よって，

$$\begin{aligned} B &= xy+y(-x-y)+(-x-y)x \\ &= -x^2-xy-y^2=-\left(x+\frac{y}{2}\right)^2-\frac{3y^2}{4} \leqq 0 \end{aligned}$$

これが 0 になるのは，$x+\dfrac{y}{2}=0,\ y=0$，つまり $x=y=0$ のとき．$x,\ y,\ z$ が 0 でない 3 つの実数なので等号は成立しない．これより $B<0$ である．

(2) (r) の対偶を示す．

(r) の対偶は,「$A \geqq 0$ かつ $B>0$ であるとき，$x,\ y,\ z$ の正の個数は 0，2，3 である」である．

もし $A=0$ なら (1) から $B<0$ なので，$A \neq 0$．よって $A>0$ である．

$C>0$ なら (q) から $x,\ y,\ z$ の正の個数は 3．$C<0$ なら $x,\ y,\ z$ の正の個数 0 か 2．

よって (r) の対偶が示された．

(3) $A,\ B,\ C$ がすべて正なので，特に $C=xyz>0$ よって $x,\ y,\ z$ のなかに 0 はなく，負のものは偶数個である．

$x>0,\ y<0,\ z<0$ とする．$A=x+y+z>0$ より $x>-(y+z)$ である．$y+z<0$ なので

$$\begin{aligned} B &= xy+yz+zx=x(y+z)+yz \\ &< -(y+z)^2+yz=-\left(y-\frac{z}{2}\right)-\frac{3}{4}z^2<0 \end{aligned}$$

したがって $B>0$ と矛盾した．

よって $x,\ y,\ z$ のなかの負のものは 0 個，つまりすべて正である． □

このように問題を読んだらまず問題を分析し，どのような条件が成立すると仮定するとき，何を決定しなければならないのかを明確にすることである．

1.3　解ける根拠

論証の根拠

どのような論証も，より基本的なことから論証しなければならない．大学入試問題では一般的には高校教科書を基本とし，そこから論証すればよい．しかし，ときには教科書のなかに載っている公式そのものを示せという問題もあれば，普段は証明せずに用いていることを示さなければならないこともある．

数学の力をつけるためには，普段用いている公式や，日頃証明することなく用いている事実を，時には立ち止まって考えなおしてみることである．それを自分でやっていく人は，どんどん力をのばしてゆくことができる．

例えば次の問題はどのように解くだろうか．これは数論の基本事項である．

例題 1.5

a と b を整数，p を素数とする．ab が p で割り切れれば，a または b が p で割り切れることを証明せよ．

これなど日頃は当然のように用いている．改めて示そうとすると，何を根拠に解けばよいのかわからない．p が素数であるということは，p の約数が 1 と p 以外にないということであり，これは整数 p 自身の内在的な性質だ．そのような性質をもつ p が二つの整数の積 ab の約数になれば，a か b 少なくとも一方の約数になっている，これは p と他の整数との関係だ．

ここに難しさがある．

解答　a も b が p で割り切れないとし，a と b を p で割った商が q_1，q_2，余りが r_1，r_2 とする．

$$\begin{cases} a = pq_1 + r_1 \quad (1 \leqq r_1 < p) \\ b = pq_2 + r_2 \quad (1 \leqq r_2 < p) \end{cases}$$

である．これから

$$ab = (pq_1 + r_1)(pq_2 + r_2) = p^2 q_1 q_2 + p(q_1 r_2 + q_2 r_1) + r_1 r_2$$

なので，ab が p の倍数なら $r_1 r_2$ が p の倍数となる．

$$r_1 r_2 = pN$$

とおく．$1 \leqq r_1,\ r_2 \leqq p-1$ なので，左辺の素因数分解に現れる素数は 1 以上 $p-1$ 以下である．一方，右辺には素因数 p がある．これは素因数分解の一意性と矛盾する．

よって a か b の少なくとも一つは p の倍数である．　□

ここでは**素因数分解の一意性**を根拠にした．つまり，どのような順に因数を見つけていったとしても，素数の積に分解できた段階で，順番を除いて因数分解は一通りに定まる，ということである．大学入試問題を解くときには素因数分解の一意性は証明せずに用いてもよい．

しかし，ではこの素因数分解の一意性はどのように示されるのか．素因数の個数に関する数学的帰納法がひとつの方法である．このところは『整数の基本』,『数論初歩』を見てほしい．

本当に解けるのか

問題を読んで,「求めよ」といわれればさっそく求めはじめるし,「示せ」といわれればすぐに示そうとする……?　と，そこで一呼吸おいて,「そもそもこの値は本当に決定できるのか」，あるいは「なぜ示せるのか」と解ける根拠を考えたことはないだろうか．

例えば等式の中に未知な文字が 3 個あるとき，独立な等式も 3 個あれば基本的に問題は解ける．問題を解くときに，未知数の個数と条件の個数を確認しているか．与えられた条件から未知数を確定するのに必要な未知数の個数だけの等式をどのように導くのか，問題を解くときにはこのように考えを進めたい．問題をそのまま解きはじめるのではなく，解が決定できる根拠を考えつつ，少し高い視点を持ちながら解く．

このように問題を読んだ段階で「なぜこの問題は解けるのか」を考えることをすすめたい．入試問題なので解けるに決まっている．解けない問題は問題としてまちがっているということになる．しかし解ける根拠を考えることで方法が発見されるのだ．

実際に何か新しいことを研究するときは解けるとはかぎらないし，人間生きていくのに，解けないかも知れない問題に立ち向かわなければならないことはしょっちゅうある．解けないどころかあまりに理不尽なことに直面することも多々ある．それが現実だ．

が，とにかく入試問題は解ける．解けるはずだからといってすぐ解こうとしても解けない．そこで「解ける根拠はどこにあるのか」を考える．そのことによって解き方がわかってしまうということがよくあるのだ.「解ける根拠」は必ず問題の中にある．

決定可能性

決定可能であるかどうかは，次の 2 点で決まる．

(1) 決定できるだけの条件がそろっており，かつそれらの条件相互が独立で矛盾がない．いくつかは他の等式から導ける等式があってもよい．このような等式は「独立でない」という．

$$\begin{cases} 3x+2y+z=10 \\ x+y+z=6 \\ x+2y+3z=13 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=10 \\ x+y+z=6 \\ 2x+y=4 \end{cases} \qquad \begin{cases} 3x+2y+z=10 \\ x+y+z=6 \\ 3x+2y+z=13 \end{cases}$$

第 1 の連立方程式は解が決定される．第 2 の連立方程式は解が決定されない．三つの式は独立でない．第 3 の連立方程式は解が存在しない．矛盾した条件がある．ということである．

(2) 具体的に決定する方法が存在する．上記連立方程式で解が決まるものは解ける．方法があるからだ．2 次方程式は必ず解ける．根の公式があるからだ．実は 5 次方程式になると，解があることはあるのだが根の公式はない．かならずできる方法を**アルゴリズム**という．もちろん入試問題で「求めよ」とくれば必ず方法はあるのだが,「これとこれを求めればこれが決まる」という見通しを立てることが大切である．

2008 年京大理系甲と文系の問題.

例題 1.6　［08 年京大理系甲文系］

定数 a は実数であるとする．方程式

$$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$$

を満たす実数 x はいくつあるか．a の値によって分類せよ．

「満たす実数 x」の個数である．つまり，集合 A を

$$A=\{\ x\mid x\ \text{は実数},\ (x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0\ \}$$

とする．集合 A の要素の個数 $n(A)$ が求めるものである．A のことを方程式 $(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ の「(実数) 解集合」という．

本問の方程式は 4 次であり，根の個数は複素数の範囲で重複したものを重ねて数えると必ず 4 個である．本問は，そのうち相異なる実数根はいくつあるかということなので有限個に確定することはまちがいない．(1) は成り立つ．本問のように一定の条件 (今の場合は方程式) を満たすものをすべて求めよ，またその個数を求めよといった型の問題では，(1) は「確かに有限個に確定する」ということになることが多い．

4 次方程式の根が重なるのは，因数に分解された各 2 次方程式の少なくとも一方が重根をもつときと，二つの 2 次方程式に共通根がある場合である．方程式の共通根を求める方法は，共通根があるとしてそれを必要条件で絞り，確認する．2 次方程式なのでかならずできる．これが (2) である．

根と解　ところで今,「解」と「根」を使い分けた．根と解は意味が違う．

n 次方程式

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = 0$$

の**根**とは

$$a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_0 = a_n(x - \alpha_1)(x - \alpha_2)\cdots(x - \alpha_n)$$

と n 個の 1 次式の積に因数分解したときの，$\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n$ のことを言う．n 次方程式はつねに n 個の根をもつ．またこれらの中には同じものがあることもある．

それに対して**解**とは「方程式を満たすもの」で，実質は集合

$$\{\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \cdots,\ \alpha_n\ \}$$

の要素のことである．同じものは一つと見なす．だから n 次方程式は n 個以下の解をもつ，あるいは解集合の要素の個数は n 以下である，といえる．

40 年前は中学でも「2 次方程式の根」と正しくいっていた．正しい使い方に戻ることを願っている．本問は実数解の個数を数えよということなのだ．さて解答である．

解答　2 つの 2 次方程式

$$x^2 + ax + 1 = 0, \quad 3x^2 + ax - 3 = 0$$

のいずれかを満たす実数 x の個数が求めるものである．これら 2 次方程式の判別式をそれぞれ $D_1,\ D_2$ とする．

$$D_1 = a^2 - 4,\ D_2 = a^2 + 36 > 0$$

$D_1 > 0$ となる a は $|a| > 2$ のときで，$D_1 = 0$ となる a は $a = \pm 2$ である．

2 つの方程式に共通解があるとしてそれを α とおく．

$$\alpha^2 + a\alpha + 1 = 0, \quad 3\alpha^2 + a\alpha - 3 = 0$$

辺々引いて

$$-2\alpha^2 + 4 = 0$$

つまり 2 つの方程式に共通な解はあるとすれば $\pm\sqrt{2}$ である．$\sqrt{2}$ が共通な解のとき $a = -\dfrac{3}{\sqrt{2}}$．$-\sqrt{2}$ が共通な解のとき $a = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$．これらのときそれぞれの他の 1 解は異なる．以上から方程式を満たす実数 x の個数は

(i) $|a| < 2$ のとき，2 個．

(ii) $|a| = 2$ または $|a| = \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき，3 個．

(iii) $2 < |a| < \dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または $\dfrac{3}{\sqrt{2}} < |a|$ のとき，4 個．

となる． □

なお本問はグラフを用いる別の解法もある．同様の問題が理系乙でも出題されたので，2 章 3 節「関係の図示」の問題に入れておく．問題 2.20 である．

次に確率の問題を見てみよう．2008 年東大理系の問題である．

例題 1.7　［08 年東大理科］

白黒 2 種類のカードがたくさんある．そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作 (**A**) を考える．

(**A**) 手持ちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる．

以下の問 (1)，(2) に答えよ．

(1) 最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

(2) 最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作 (**A**) を n 回繰り返した後に初めて，6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ．

この問題が解ける根拠は問題が与えた操作 (**A**) の中の「等確率」というところである．つまり 1 枚 1 枚のカードが選ばれる確率はその場に何枚のカードがあるかだけで決まる．何回この操作を繰り返した後でもこれは変わらない．n 回目のいくつかの状態から $n+1$ 回目のいくつかの状態への推移の確率が，n によらず一定であるといういわゆるマルコフ過程となり，n による確率のあいだに漸化式を立てることができる．漸化式は最初のいくつかの値 (初期値) によって数列を決定する．漸化式が出来るということによって (1) がわかる．その漸化式が解けることによって (2) が確認される．

解答　以下白 k 枚，黒 l 枚である事象を $(k,\ l)$ とかく．

(1) 最初に白は偶数枚あり，操作 (**A**) で白の変化は ± 1 なので，すべてが同色，つまり $(4,\ 0)$ か $(0,\ 4)$ になるのは偶数回の操作の後である．

n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになるのは $n-1$ 回繰り返した後 $(3,\ 1)$ か $(1,\ 3)$ であって，n 回目に 1 枚ある方の色を変える場合である．$n=2m$ とおき，$n-1=2m-1$ 回繰り返した後，$(3,\ 1)$ か $(1,\ 3)$ である確率を a_m とおく．$2m-3$ 回繰り返した後も $(3,\ 1)$ か $(1,\ 3)$ のいずれかであるので，$2m-3$，$2m-2$，$2m-1$ の間の変化とその確率は次のようになる．

確率	a_{m-1}	$\frac{3}{4}$		1	a_m
事象と変化	$(3,1)$, $(1,3)$	$\rightarrow$	$(2,2)$	$\rightarrow$	$(3,1)$, $(1,3)$

よって

$$a_m = \frac{3}{4}a_{m-1}$$

$a_1 = 1$ なので

$$a_m = \left(\frac{3}{4}\right)^{m-1} = \left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}$$

$(3,\ 1)$ か $(1,\ 3)$ から $(4,\ 0)$ か $(0,\ 4)$ となる確率は $\dfrac{1}{4}$ なので，求める確率は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{4}\cdot\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1} & (n：偶数) \\ 0 & (n：奇数) \end{cases}$$

(2) 1 回の操作で白の枚数の変化は ± 1 である．最初に白 3 枚なので，白が 0 枚か 6 枚になるのは 3 以上の奇数回の操作の後である．$n = 2m+1$ とする．$2m$ 回の後 $(5,\ 1)$ か $(1,\ 5)$ である確率を p_m，$(3,\ 3)$ である確率を q_m とする．$m \geqq 2$ のとき $m-1$ 回後と m 回後の事象と移行の確率は次のようになる．

確率	p_{m-1}	$\frac{5}{6}$		$\frac{2}{6}$	p_m
事象と変化	$(5,1),\ (1,5)$	↘		↗	$(5,1),\ (1,5)$
事象			$(2,4),\ (4,2)$		
事象と変化	$(3,3)$	↗		↘	$(3,3)$
確率	q_{m-1}	1		$\frac{4}{6}$	q_m

ゆえに次の関係式が成り立つ．

$$\begin{cases} p_m = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{2}{6}p_{m-1} + 1\cdot\dfrac{2}{6}q_{m-1} \\ q_m = \dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{4}{6}p_{m-1} + 1\cdot\dfrac{4}{6}q_{m-1} \end{cases}$$

$p_1 = \dfrac{2}{6}$，$q_1 = \dfrac{4}{6}$ なので，この結果 $m \geqq 1$ に対して

$$q_m = 2p_m$$

がつねに成立する．よって

$$p_m = \frac{5}{6}\cdot\frac{2}{6}p_{m-1} + 1\cdot\frac{2}{6}(2p_{m-1}) = \frac{17}{18}p_{m-1}$$

$$\therefore\quad p_m = \left(\frac{17}{18}\right)^{m-1}\cdot\frac{2}{6} = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}$$

$(5,\ 1)$ または $(1,\ 5)$ からすべて同色に移行する確率は $\dfrac{1}{6}$ なので．求める確率は

$$\begin{cases} \dfrac{1}{18}\cdot\left(\dfrac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}} & (n：3\ 以上の奇数) \\ 0 & (n：偶数\quad または\ 1) \end{cases}$$

である． □

証明可能性

証明問題における証明可能性は，実はあらかじめわかっているのではない．決定問題における決定方法の存在の問題と同様である．

少し脱線．数学の世界では「リーマン予想」とか「ゴールドバッハ予想」とか「予想」といわれるものがある．それは証明できるだろう，こういうことが成り立つだろうと「予想」されるのであるが，その予想の真偽を決定することは，その時点では出来なかったからこそ「予想」になる．

$$x^4+y^4+z^4=w^4 \text{ を満たす自然数 } x,\ y,\ z,\ w \text{ は存在しない．}$$

を「オイラー予想」という．存在しない証明もできず，逆に予想に反する解も見つからないままに長い時間が過ぎた．オイラーは 1707 年 4 月 15 日生まれで 1783 年 9 月 18 日没の人だ．ところがこの予想の発表から二百年以上経った 1988 年に，これを成立させる解が見つかった．なんと

$$2,682,440^4+15,365,639^4+18,796,760^4=20,615,673^4$$

というのだ.「オイラー予想」には反例が見つかった．

一方「フェルマーの最終定理」というのがある．17 世紀の人フェルマーは，古代ギリシャのディオファントスの書物の余白に

> 2 よりも大きなべき指数 n について，$a^n+b^n=c^n$ をみたす三つの整数 a,b,c を見出すことは不可能である．私はこれについてのまったくすばらしい証明を得たが，ここの余白は狭すぎて書き記すことができない．

と書き込んだ．ここに言う「べき指数 n」は自然数である．フェルマーは他にも数多くの予想を残しすべては決着がついた．が，この予想だけは証明することも，反例をあげることもできなかった.「フェルマーの最終定理」「フェルマーの大定理」または「フェルマーの予想」と呼ばれてきた．

350 年もの間解決出来なかった．1994 年に至ってプリンストン大学のアンドリュー・ワイルズがついに完全な証明に成功した．その証明は日本の数学者の谷村豊と志村五郎が打ち出した方向 (指導原理) にもとずいていた．このように歴史に残る大問題は，証明可能性自体が問題であった．

さてわれわれが考える入試問題などでは，証明可能であることはまちがいない．問われていることは確実な論証構成力である．とくに京大のように小問に分けず，大問一つで出題するところは，このような問題分析能力を求めているということを心得ておきたい．

1.4　解答の条件

解答である条件

以上のことから解答が解答であるための必要にして十分な条件とは何かが明らかになってくる．問題は，共通な事実や全体で成立している条件で構成される前提のもとで何かを決定せよという形である．解答とは

前提の下で，求められた内容を決定し，その根拠を示す．

ことである．**前提，仮定，結論**を自分自身に明確にし，求められていることを明確にすることが出発だ．問題全体についても個々の論述についてもいえることだ．多くの問題はここをはっきりさせればそれで解法の見通しが立つ．そして結論を根拠とともに示す．これが解答だ．

どんな結果にも根拠を示す

根拠を示すのは論証のそれぞれの段階においても必要であり，解答全体として仮定条件から結論条件を導くことができているか，この両面で確認しなければならない．例えば確率の問題で「3 個のサイコロを振る．和が 3 の倍数になる確率を求めよ」を解こうとする．このとき

> サイコロの目の出方は 6^3 通りあり，そのうち和が 3 の倍数になるのは$\cdots$．

と論述を進める人が多い．しかし 6^3 通りあるということも一つの結論である．この根拠は何か．やはり次のように進めるべきだ．

> 三つのサイコロを区別する．それぞれのサイコロの目の出方は 6 通りあり，各サイコロの目の出方は独立なので，サイコロの目の出方は 6^3 通りある．そのうち和が 3 の倍数になるのは⋯．

あるいは小問に分かれている確率などの問題で (1) ですべての場合の総数を問われて，何も理由を書かずに「6^3 通り」とだけ書いて済ます人もたいへん多い．小問のはじめの方の問いこそていねいに根拠を書くべきなのだ．そうすると問題の全体がつかめる．サイコロを区別して数えるということをおさえることが，その後の計算を確実にするために必要なのだ．

単に条件とあれば，必要十分条件だ

例えば次のような過去問題がある．出典を知らないのであるがいい問題だ．

例題 1.8　［出典不明］

a は実数の定数とする．

$$a_1 = a,\ a_n = 3^n - 5a_{n-1}\ (n \geqq 2)$$

で定まる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ．

(1) 一般項 a_n を a と n の式で表せ．

(2) 任意の自然数 n に対し，$a_{n+1} > a_n$ が成り立つときの a の値を求めよ．

これは a の条件を求めよということなのだが，見落としやすいところがある．条件といえばそれは必要十分条件なのだ．

解答

(1) 漸化式を $(-5)^n$ で割って

$$\frac{a_n}{(-5)^n} = \left(-\frac{3}{5}\right)^n + \frac{a_{n-1}}{(-5)^{n-1}}\ (n \geqq 2)$$

これから

$$\frac{a_{n+1}}{(-5)^{n+1}} - \frac{a_n}{(-5)^n} = \left(-\frac{3}{5}\right)^{n+1}$$

なので，

$$\begin{aligned}\frac{a_n}{(-5)^n} &= \frac{a_1}{(-5)} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{3}{5}\right)^{k+1} \\ &= \frac{a}{(-5)} + \left(-\frac{3}{5}\right)^2 \times \frac{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}}{1+\frac{3}{5}}\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{a}{(-5)} + \frac{9}{40}\left\{1-\left(-\frac{3}{5}\right)^{n-1}\right\} \\
\therefore\quad a_n &= \left(a-\frac{9}{8}\right)(-5)^{n-1} + \frac{3^{n+1}}{8}
\end{aligned}
$$

これは $n=1$ でも成立する．

(2)

$$
a_{n+1} - a_n = \frac{3^{n+1}}{4} - 6\left(a-\frac{9}{8}\right)(-5)^{n-1} > 0 \quad \cdots ①
$$

がすべての自然数 n で成立すればよい．

これは $a-\dfrac{9}{8}=0$ なら成立する．よって $a=\dfrac{9}{8}$ は十分条件である．

必要条件でもあることを示す．

① を $(-5)^{n-1}$ で割って整理する．$n=2k,\ 2k+1$ に応じて

$$
-\frac{5}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k} < a-\frac{9}{8} < \frac{5}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1}
$$

これがすべての自然数 k で成立する．これから

$$
\left|a-\frac{9}{8}\right| < \frac{5}{8}\left(\frac{3}{5}\right)^{2k-1}
$$

k を大きくすると，$\dfrac{5}{8}\left(\dfrac{3}{5}\right)^{2k-1}$ はいくらでも小さくなるので，

$$
\left|a-\frac{9}{8}\right| = 0
$$

が必要である．ゆえに $a=\dfrac{9}{8}$ は必要十分条件である．□

このような論理に関する感覚的な鋭さを養いたい．以上で問題とは何かを考えた．

高校数学の方法とは

それでは数学の問題を解く一般的な方法はあるのか．それはない．それがあれば何も考えることはない．数学は客観的に存在している．記述法や形式はいろいろあっても，それを可能にしている数学的存在は確かにある．人間は自然を探求するように数学を探究してきた．

入試問題など高校数学の問題は，作り出された問題であり，結果はあらかじめ出題者にはわかっている．したがって高校数学の問題は必ず解ける．高校数学の問題は，一つは理解を助けるためにあり，一つは問題を分析して系統立てて解く力を訓練するためにある．そこで求められる力は，この先いろんな分野で能動的に生きていくために必要なものに他ならない．ならばいくつかの基本的な方法を定式化し，それを身につけていくことは，単に数学ができるようになる以上の意味をもつことになる．そのためにいくつかの方法をできるだけ系統的に考えていこう．

数学の問題を解こうとするとき，どこから手をつけていいか見当もつかなかったり，あるいは逆にやみくもに試行錯誤したり，いずれにしても系統立てて問題に取り組むということがなかなかで

きない．数学の問題というのはそれ自身構造をもっている．まず**問題の構造を見抜く**ことである．それによって問題を解く道筋も定まってくる．もちろん一般に一つということはないのだが，問題の構造が正確に見えれば，半ば解けたといってよい．構造を見抜き解法の道筋を発見する補助手段として，いくつかの方法がある．

新しい問題に出会ったとき，ここで勉強した方法を**意識的に**適用してみてほしい．それができればずいぶん力が伸びたことを実感できるだろう．その方法を次のように分類して順次その内容を考えるとともに，近年の入試問題を演習問題として考え方とともに紹介する．

(1) 前提，成立が仮定される条件，結論として成立を示すべき条件を整理する．これは当然の作業である．そのうえで，それらの諸条件は一体どのようにからみあっているのか．それが問題の構造であるが，それを見ぬかなければならない．そのためにいくつか試してみるべき方法，視点というものがある．それが**問題解決の糸口**である．典型的な方法をまとめる．

(2) ある程度の見通しができたら，論証を進めなければならない．論証とは，仮定条件から結論条件へ同値変形をくりかえして道筋をつけることである．必要性だけを問うているときもあるが基本は同値変形である．それ自体が道筋に沿った問題の探求である．そのための補助となるいくつかの**論証推進のための方法**を整理する．

(3) 数学の問題というのはどんなに小さなものであれ，それ自身一つの数学的現象である．そのような現象を引き起こす内部構造をもつ．どのような構造がそこで働いているのか．この観点から問題を見る．この力をつけるために，高校数学で習う典型的な構造について，**内部構造の分析**を試みる．それをいかした論証の方法を学ぶ．

これらについて，解説と例題，演習問題とその解答で進めたい．この『高校数学の方法』では，数学 IIB までの範囲を扱い，教科書と学校で入手した問題集を一通りやった段階を仮定している．それぞれの解答は，その項目の方法の実践であるが，またまったく別の方法があるときもある．他の方法があるときはできるかぎり別解も紹介する．異なる問題を二題解くよりも一題を二通りの方法で解く方が力がつく．日頃からつねに別解を考えるようにしてほしい．

第2章　糸口をつかむ

2.1　記号の導入

記号の発見　記号，これは人間が見つけ出したすばらしい道具である．企業や学校などいろんな組織の標章にはじまりパソコンや携帯電話のアイコンまで，現代社会は記号としての文字，標章，符号などにあふれている．制服なんかも記号の一種である．記号は何か「同じもの」であることを示すのに用いられる．

数学でも同じだ．概念，数式，命題などを書き表わすために符号を用いる．三つの数 $1,\ 2,\ 3$ の集まりを集合という考え方で把握し，さらにそれを $A = \{\ 1,\ 2,\ 3\ \}$ のように一つの記号 A で表す．ここには，抽象的な人間の精神活動の歴史と発展がこめられている．この場合三数を**括弧 $\{\quad\}$ でくくる**という行為をしている．何かの集まりを一つのこととしてつかみ，一段高いところからまとめる作用を括る (kukuru) 働きという．これは人間の心 (kokoro) の最も基本的な働きである．括弧でくくる作用は，くくられた内容がひとまとまりのものであることを認識するという抽象作用が第一で，ひとまとまりであるから，これに一つの符丁をつけるという作用が第二である．この符丁が記号である．記号は心の働きの必然の結果である．

文字記号は定数，変数，未知数などいろいろの働きをしているが，文字記号で表すということ自体が一つの抽象である．さらに，$2x + 3y = 1$，$5x + 7y = 1$，$-3x + 2y = 1$ などの形から，$ax + by = 1$ (a と b は互いに素な整数) と表すのは，そこに共通な一般的な形を見いだしている．これがこころの働きであり，数学の基礎である．

記号を使う能力　記号は普通は文字で表す．日本語では日本文字と区別して西洋文字を使うことが多い．見分けがつきやすく便利である.「日本語のなかで，西洋文字で表した記号を使いこなす」ことが，ある意味ではこれが高校数学の目的である．入学試験の数学問題は，もちろんいろんな分野から出題されるが，基調にあるのは,「問題文に書かれた数学的事実を読み取り，文字記号を用いて式に表し，その式を操作して必要な結論を引き出せる」かどうかを判定するということである．題意をつかみ，成立している条件を式に表す．同時に，証明すべき結論も式に表す．そして条件式から結論を決定する．これが問題を解く基本である．

何をどう置くか　だから，問題を解こうとするとき，まず最初に考えなければならないのは，問題文を数式等の数学用語に翻訳するためにどのような設定をするか，つまり，何をどにように置くか，である．ここからはじめて，文字で考えることで，問題解決の糸口を見いだし，論証を進めることを学ぼう．

問題文をよく読んだら，一息おいてこの問題を解くのに何をどう置けばよいのか考える．一つの置き方が見つかっても，他によりいい方法がないかも考える．どう置くのかと考えることで，何がいちばん基本的な変数かとか，何が決まれば全体が決まるかとか，いろんな変数の相互関係を調べることになる．

「平面上に2点A, Bがあり，線分AB上に点Pがある.」これは日本語である．これを「数学の言葉」に翻訳しなければならない．どんな翻訳があるか.

(1) 点Aを原点，点Bをx軸上にとり，線分ABを座標平面に置く．B$(b,\ 0)$とする．線分AB上の点Pを$0 \leqq t \leqq b$の範囲の実数tを用いてP$(t,\ 0)$と置く.

(2) Aを始点とするベクトルで考える．線分AB上の点Pを$0 \leqq t \leqq 1$の実数tを用いて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$と置く.

等いろいろある．もちろん図形の論証でいくのなら，平面上に線分ABをおいて，そのうえの点Pを指示するところからはじめることになる．座標で考えるか，ベクトルで考えるか，図形の論証か，この先の展開を考え適切な設定をすることが必要である．このように「さあ，問題を解こう」とするとき，まず最初に考えなければならないのは**何をどう置くか**である.

適当な文字の導入によって，問題の条件や結論を数式の言葉に翻訳することを考える．数学が苦手な人は，この「置きかえによる問題文の式への翻訳」が苦手な場合がほとんどである．問題に対して適切に文字を置き，式に翻訳できれば三分の一は解けたようなものだ．しっかり勉強して，次のような考え方を身につけよう.

(1) 複雑な式のなかから共通の形を見いだし，それを別の文字で置き換える.

(2) いくつかの式のとる値が等しいとして与えられている条件は，この等しい値を文字で表す.

(3) 変化する量があればその量を変数で表す．未知量を求めるときは，方程式として解く.

(4) 条件が「何々が存在する」とあれば，存在するものを文字に置き，存在する必要条件を求める.

(5) 図形を一般性を失わないで，できるだけ単純な式になるように座標平面に置く.

(6) 考える対象が量の関係なら，変数を導入し，他の量との関係を調べ，関数形に表す.

(7) 座標のなかで動きのあるものを，適当な変数 (媒介変数，パラメーター) で表す.

(8) 自然数nによって定まる場合の数や確率はa_nなど数列におく．そのうえで漸化式を考える.

このなかで(2)，(3)，(4)は文字におく典型的な場合である．以下でもう少し詳しく説明し，例題をあげる.

2.1.1 等しいものを文字に置く

二つ以上の等号でむすばれた条件などは，その等しいものを別の文字で表すことによって，論証が簡明になることが多い．同一の文字で表さたものは，相等しい.

例題 2.1 ［84防衛大改題］

相異なる3数$a,\ b,\ c$が
$$\frac{a^3+2a}{a+1} = \frac{b^3+2b}{b+1} = \frac{c^3+2c}{c+1}$$
を満たすとき，次の式の値を求めよ.

(1) $a+b+c$

(2) $abc+ab+bc+ca$

考え方　問題の条件は三つの分数式の値が等しいといっている．a, b, c 三つの文字に対して等式は二つだから a, b, c の値が定まるわけではない．しかし一定の式の値は定まる．それを求めよといっている．三つ以上のものが等しい場合は，その式の値を文字におく．互いに等しい値を文字におくのだ．これは等しいものを文字におく典型だ．そして得られた式を見れば，a, b, c について同じ形をしている．これはどういうことか．そこから解答作りがはじまる．

解答

$$\frac{a^3+2a}{a+1}=\frac{b^3+2b}{b+1}=\frac{c^3+2c}{c+1}=k$$

と置く．すると

$$\begin{cases} a^3+2a=k(a+1) \\ b^3+2b=k(b+1) \\ c^3+2c=k(c+1) \end{cases} \tag{2.1}$$

が成り立つ．ゆえに三数 a, b, c は 3 次方程式

$$X^3+(2-k)X-k=0$$

の三解である．3 次方程式の解と係数の関係から

$$\begin{aligned} &a+b+c=0 \\ &ab+bc+ca=2-k \\ &abc=k \end{aligned}$$

つまり，

$$a+b+c=0, \quad abc+ab+bc+ca=2$$

□

最初に等しいものを一つの文字に置くことがカギである．なお，解と係数を用いて関係式を導いたところは，次のように辺々引いて求めていくこともできる．

解答 2　(2.1) の第 1 式と第 2 式，第 2 式と第 3 式をそれぞれ引くと

$$\begin{cases} a^3-b^3+2(a-b)=k(a-b) \\ b^3-c^3+2(b-c)=k(b-c) \end{cases}$$

$a-b\neq 0$, $b-c\neq 0$ なので

$$\begin{cases} a^2+ab+b^2+2=k \\ b^2+bc+c^2+2=k \end{cases} \tag{2.2}$$

さらにこの二式を辺々引いて

$$a^2-c^2+b(a-c)=(a-c)(a+b+c)=0$$

$a-c\neq 0$ なので

$$a+b+c=0$$

が得られる．

(2.1) の三式をすべて加えると

$$a^3+b^3+c^3+2(a+b+c)=k(a+b+c)+3k$$

$a+b+c=0$ なので

$$a^3+b^3+c^3=3k$$

一方

$$a^3+b^3+c^3-3abc=(a+b+c)(a^2+b^2+c^2-ab-bc-ca)$$

なので，$a+b+c=0$ を用いると $a^3+b^3+c^3-3abc=0$．あわせて $k=abc$ を得る．

(2.2) 式と $c^2+ca+a^2+2=k$ の三式を加えると

$$\begin{aligned} & 2(a^2+b^2+c^2)+ab+bc+ca+6=3k \\ \iff\quad & 2\{(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)\}+ab+bc+ca+6=3abc \end{aligned}$$

より

$$abc+ab+bc+ca=2$$

を得る． □

もしこの k とおく方法を使わず，与えられた関係式のみから求めると，やや複雑になる．

解答 3

$$\frac{a^3+2a}{a+1}=\frac{b^3+2b}{b+1}$$

より

$$\begin{aligned} 0 &= (a^3+2a)(b+1)-(b^3+2b)(a+1) \\ &= a^3b-ab^3+a^3-b^3+2a-2b \\ &= (a-b)\{ab(a+b)+a^2+ab+b^2+2\} \end{aligned}$$

$a-b\neq 0$ なので

$$ab(a+b)+a^2+ab+b^2+2=0 \tag{2.3}$$

同様に

$$bc(b+c)+b^2+bc+c^2+2=0$$

得られた二式を辺々引いて

$$\begin{aligned} 0 &= a^2b+ab^2-b^2c-bc^2+a^2-c^2+ab-bc \\ &= (a-c)\{b(a+c)+b^2+a+c+b\} \end{aligned}$$

$a-c\neq 0$ なので

$$0=b(a+c)+b^2+a+c+b=(a+b+c)(b+1)$$

$b+1$ は条件式の分母にあり 0 ではない．

$$\therefore\quad a+c+b=0$$

が得られる．

(2.3) に $a+b=-c$ を代入して

$$-abc+a^2+ab+b^2+2=0$$

および同様に得られる二式

$$-abc+b^2+bc+c^2+2=0$$
$$-abc+c^2+ca+a^2+2=0$$

をすべて加えると

$$-3abc+ab+bc+ca+2(a^2+b^2+c^2)+6=0$$

ここで

$$a^2+b^2+c^2=(a+b+c)^2-2(ab+bc+ca)=-2(ab+bc+ca)$$

なので

$$-3abc+ab+bc+ca-4(ab+bc+ca)+6=0$$

これから

$$abc+ab+bc+ca=2$$

を得る． □

これは簡単な例であるが，三通りの方法で解くことができた．このようにひとつの解法が見つかっても，それで終わりにせずに他の解法はないか，考えてみたい．異なる問題を三題解くよりも，同じ問題を三通りの方法で解く方が力がつく．

2.1.2 未知なものを文字に置く

点が動いたり，角が変化したり，動くもの，変化するものをとらえ，一定の条件を満たすものを求めようとすれば，文字の導入が必要である．変化量，未知量には変数を置く．これをしっかりと心得ておきたい．

例題 2.2 ［06 東大文科 1 番］

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している．この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ．

考え方　四角形が円に内接しているということは，それを分けた各三角形も円に内接している．正弦定理は外接円の半径と三角形の内角を用いて辺の長さを表す．二辺が既知の三角形で余弦定理と連立すれば，内角の正弦や余弦，残る辺の長さが決まる．それを，辺の長さが未知の方の三角形に用いればよい．

解答　$\angle \mathrm{BCD}=\theta$ とする．また $\mathrm{AB}=x$ とする．このとき $\mathrm{AD}=44-(13+13+x)=18-x$ である．

$\triangle$CBD の外接円の半径が $\dfrac{65}{8}$ であるから，正弦定理によって

$$\mathrm{BD}=2\cdot\frac{65}{8}\sin\theta \quad \cdots ①$$

である．

また $\triangle$CBD に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{BD}^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos\theta \quad \cdots②$$

①，② から BD を消去する．

$$\left(2 \cdot \frac{65}{8} \sin\theta\right)^2 = 13^2 + 13^2 - 2 \cdot 13^2 \cos\theta$$

ここで，$\cos\theta = t$ とおく．

$$\frac{13^2 \cdot 5^2}{16}(1 - t^2) = 2 \cdot 13^2 (1 - t)$$

ここで $0 < \theta < \pi$ なので $-1 < \cos\theta < 1$ である．よって $1 - t \neq 0$．

$$\therefore \quad 25(1 + t) = 32$$

これから $t = \dfrac{7}{25}$ である．この結果

$$\mathrm{BD}^2 = 2 \cdot 13^2 \left(1 - \frac{7}{25}\right) = \left(\frac{6 \cdot 13}{5}\right)^2$$

次に，$\triangle$ABD において余弦定理を用いる．$\angle\mathrm{A} = \pi - \theta$ であるから

$$\mathrm{BD}^2 = x^2 + (18 - x)^2 - 2x(18 - x)\cos(\pi - \theta)$$

これから

$$\left(\frac{6 \cdot 13}{5}\right)^2 = x^2 + (18 - x)^2 + 2x(18 - x) \cdot \frac{7}{25}$$

これを整理して

$$x^2 - 18x + 56 = (x - 4)(x - 14) = 0$$

$$\therefore \quad (\mathrm{AB},\ \mathrm{AD}) = (4,\ 14),\ (14,\ 4)$$

□

2.1.3　存在するものを文字に置く

「何々が存在するとき」のように存在が条件である設定は多い．このように存在するといわれれば存在するものを文字におく．そして，得られる等式からいくつかのことを引き出す．このように文字に置くことから引き出されるのは,「何々が存在する」ための必要条件である．そのうえで実際に存在するための十分条件を検証する．

例題 2.3

$a,\ b$ が実数のとき次の二つの 2 次方程式

$$x^2 + ax + b = 0, \qquad ax^2 + bx + 1 = 0$$

が共通解をもつための条件とそのときの共通解を求めよ．

考え方　共通解があるとして，それを文字に置く．ここから得られる結果は必要条件だ．必要条件として何を引き出すかは，いろいろ工夫のしどころである．そのうえで，得られた結果の十分性を確認していく．

解答 1　共通解が存在するとし，それを α とおく．

$$\alpha^2 + a\alpha + b = 0 \tag{2.4}$$

$$a\alpha^2 + b\alpha + 1 = 0 \tag{2.5}$$

(2.4)$\times a-$(2.5) より

$$(a^2 - b)\alpha + ab - 1 = 0$$

$a^2 - b = 0$ のとき．$ab - 1 = 0$ も成り立ち b を消去すると $a^3 = 1$．a が実数なので $a = 1$．$b = 1$．このとき両式は一致し，共通解は $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$．

$a^2 - b \neq 0$ のとき．$\alpha = \dfrac{1 - ab}{a^2 - b}$ が必要である．これから

$$\left(\frac{1 - ab}{a^2 - b}\right)^2 + a\left(\frac{1 - ab}{a^2 - b}\right) + b = 0$$

この分母を払い整理すると，

$$a^3 + b^3 + 1 - 3ab = (a + b + 1)(a^2 + b^2 + 1 - a - b - ab) = 0$$

$a^2 + b^2 + 1 - a - b - ab = \dfrac{(a - b)^2 + (b - 1)^2 + (1 - a)^2}{2}$ より，係数は実数なのでこれが 0 になるのは $a = b = 1$ のときだが，$a^2 - b \neq 0$ に反する．よって $a + b + 1 = 0$．明らかに $x = 1$ が共通解．

求める条件と共通解は

$$(1)\quad a = b = 1,\ x = \frac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \qquad (2)\quad a + b + 1 = 0,\ x = 1$$

である．　□

解答 2　同様に設定する．(2.4)$-$(2.5) より

$$\begin{aligned} & a\alpha(\alpha - 1) + b(\alpha - 1) - (\alpha + 1)(\alpha - 1) \\ = \ & (\alpha - 1)(a\alpha - \alpha + b - 1) = 0 \end{aligned}$$

$\alpha = 1$ のとき．条件は $a + b + 1 = 0$．

$a\alpha - \alpha + b - 1 = 0$ のとき．

$a = 1$ なら $b = 1$ で，このとき両式は一致し，共通解は $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$．

$a \neq 1$ なら $\alpha = \dfrac{1 - b}{a - 1}$ が必要．

$$\left(\frac{1 - b}{a - 1}\right)^2 + a\left(\frac{1 - b}{a - 1}\right) + b = 0$$

分母を払い整理すると

$$a^2 + b^2 + 1 - a - b - ab = 0$$

解法 1 と同様に $a=b=1$ となり，$a \neq 1$ に反する．

よって同様の解を得る． $\square$

解答 3　(2.4)$\times\alpha-$(2.5) とする．

$$\alpha^3-1=(\alpha-1)(\alpha^2+\alpha+1)=0$$

$\alpha=1$ のとき．条件は $a+b+1=0$.

$\alpha^2+\alpha+1=0$ のとき．$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ または $\overline{\alpha}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$．係数が実数なので一方が共通解なら他方も共通解である．

第 1 の方程式で解と係数の関係から

$$-a=\alpha+\overline{\alpha},\ b=\alpha\cdot\overline{\alpha}$$

$\alpha+\overline{\alpha}=-1$，$\alpha\cdot\overline{\alpha}=1$ より条件は $a=b=1$.

よって同様の解を得る． $\square$

このように「何をどう置くか」と考え式を立てることが，問題解決の第一歩である．式を立てようとすることで問題を解きほぐす糸口が見つかることが多い．したがって，今後いろんな所で目的意識をもってこれを試してほしい．

2.1.4　文字の一般性

文字で考えることによって，文字を入れ替えただけの同じ論証はくりかえさなくてもよいことになる．

例えば △ABC があり，角の対辺の長さが $a,\ b,\ c$ であるとする．各辺の長さと角の大きさの間に余弦定理が成り立つことを証明しようとする．まず，一つの $\angle A$ について $a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ が成り立つことが示せたとする．すると，他の $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ なども必然的に成り立つ．

なぜだろうか．証明の過程ですべての文字について $A\to B,\ B\to C,\ C\to A$ の置き換えをすれば，それに対応して対辺の長さも $b\to c,\ c\to a,\ a\to b$ に置き換わる．したがって，$a^2=b^2+c^2-2bc\cos A$ を示したのとまったく同じ論証の過程を経て $b^2=c^2+a^2-2ca\cos B$ が示される．

いくつかの文字を含む条件からある結論を引き出したとする．すると，文字を規則正しく置きかえた結論は「同様に示される」.「同様に示される」ことを活用して証明を簡略化できる．これも文字という考え方のもつ大きな力である．この考え方はすでに例題 (2.1) の**解答 3** において用いている．

$-abc+a^2+ab+b^2+2=0$，**および同様に得られる 2 式**
$-abc+b^2+bc+c^2+2=0$，$-abc+c^2+ca+a^2+2=0$

この論述でも三文字を $a\to b,\ b\to c,\ c\to a$ と順に入れ替えた結論については「同様に」ということで済ませている．

例題 2.4　[03 年京大]

四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i) $\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC},\ \mathrm{OB}\perp\mathrm{AC},\ \mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$

(ii) 4 つの面の面積がすべて等しい

をみたしている．このとき，この四面体は正四面体であることを示せ．

考え方　どの文字についても対称性がある．つまり，どの頂点に関しても同じ条件である．このような場合一つの頂点 O を始点にとって示せたなら同じ論証はくりかえさなくても，文字を置きかえて得られる結論は,「同様に」とすることで，くりかえさなくてもよい．

解答

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とおくと, 条件 (i) より

$$\overrightarrow{a} \cdot \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}\right) = 0, \quad \overrightarrow{b} \cdot \left(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}\right) = 0, \quad \overrightarrow{c} \cdot \left(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right) = 0$$

$$\therefore \quad \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} = \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} = \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} \quad \cdots ①$$

また, 条件 (ii) より

$$\triangle\mathrm{OAB} = \triangle\mathrm{OBC} = \triangle\mathrm{OCA}$$

なので

$$\frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 - \left(\overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{b}\right|^2\left|\overrightarrow{c}\right|^2 - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\left|\overrightarrow{c}\right|^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2 - \left(\overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a}\right)^2}$$

となる．ここで ① を適用すると

$$\left|\overrightarrow{a}\right|^2\left|\overrightarrow{b}\right|^2 = \left|\overrightarrow{b}\right|^2\left|\overrightarrow{c}\right|^2 = \left|\overrightarrow{c}\right|^2\left|\overrightarrow{a}\right|^2$$

$$\therefore \quad \left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right|$$

すなわち

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC}$$

条件 (i) は三組の対辺が互いに直交することなので，四点 O, A, B, C に関して対称である．したがって O の代わりに A や B を始点にとることで,

$$\mathrm{AB} = \mathrm{AC} = \mathrm{AO}$$

$$\mathrm{BC} = \mathrm{BO} = \mathrm{BA}$$

を得る．つまり

$$\mathrm{OA} = \mathrm{OB} = \mathrm{OC} = \mathrm{AB} = \mathrm{BC} = \mathrm{CA}$$

したがって, 四面体 OABC は正四面体である． □

2.1.5　定数と変数の見方を変える

a や b と書けば「定数」で動かず，x や y と書けば「変数」で動く，と固定的に考えてはならない．a, b を定数に，x, y を変数にするのは習慣に過ぎない．x と a の式

$$x^2 + ax + a - 2 = 0 \tag{2.6}$$

がある．これはどのような式に見えるだろうか．当然 x の 2 次方程式と見えるだろう．では次の問題はどのように解くだろうか．

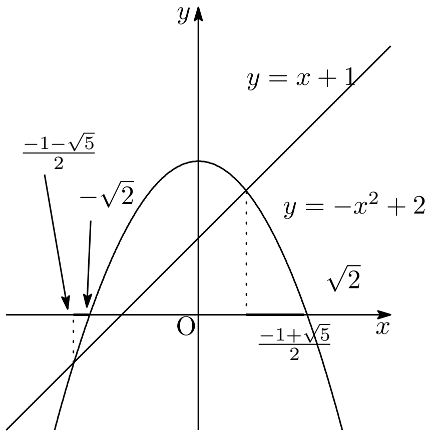
例題 2.5

x の 2 方程式 (2.6) で，定数 a が $0 \leqq a \leqq 1$ の範囲で変化するとき，解はどのような範囲にあるか．

解答 1　(2.6) は $a(x+1) = -x^2+2$ と変形される．これから二つのグラフ

$$y = -x^2+2,\ \ y = a(x+1)$$

の交点がどのように変化するかを考える．第 2 式の直線はつねに $(-1,\ 0)$ を通る直線で傾き a が 0 から 1 まで変化するのだから，図のように



$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq -\sqrt{2},\quad \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \leqq x \leqq \sqrt{2}$$

とわかる．□

考え方 2　しかしさらに考えて見よう．x が求める範囲にあるということは，$0 \leqq a \leqq 1$ で (2.6) を満たす a がとれるということだ．つまり $0 \leqq a \leqq 1$ の a が存在するような範囲として x の範囲が定まる．(2.6) は a の 1 次方程式で x が定数とも考えられる．このように見れば，a の 1 次方程式 (2.6) が $0 \leqq a \leqq 1$ に解をもつような定数 x の範囲として，求まることになる．

解答 2

$$f(a) = x^2+ax+a-2$$

とおくと，$f(0)f(1) \leqq 0$ であればいい．つまり

$$(x^2-2)(x^2+x-1) \leqq 0$$

$$(x^2-2)(x^2+x-1) = \left(x - \frac{-1-\sqrt{5}}{2}\right)(x+\sqrt{2})\left(x - \frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)(x-\sqrt{2})$$

より同じ結論を得る．□

x や y を変数や未知数，a や b を定数と見るのは習慣に過ぎない．要は二つの文字 x と a の間に (2.6) の関係が成り立っている，ということだけがある．いずれを変数とし，いずれを定数とするかは固定されていない．いくつかの文字の混じった式では，どの文字を固定してどの文字を動かすのかよく考えたい．また，小問の (1) では定数であったものを (2) では動かすということもよくある．

2.1.6　問題と考え方

問題

2.1　［02 名大理系前期］　考え方 2.1　解答 5.1

関係式

$$x^a = y^b = z^c = xyz$$

を満たす 1 とは異なる三つの正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ が，少なくとも 1 組存在するような，正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ．ただし，$a \leqq b \leqq c$ とする．

2.2　［04 早稲田］　考え方 2.2　解答 5.2

2004 個の数

$$2^1,\ 2^2,\ 2^3,\ \cdots,\ 2^{2004}$$

のうち，十進法で表したとき，その最高位の数字が 1 であるものはいくつあるか．ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$ とする．

2.3　［04 名大］　考え方 2.3　解答 5.3

$a,\ b,\ c$ を実数とし，実数の組 $(x,\ y,\ z)$ に関する方程式

$$\text{(i)}\quad \begin{cases} x+y-2z=3a \\ 2x-y-z=3b \\ x-5y+4z=3c \end{cases} \quad \text{および}\quad \text{(ii)}\quad x^2+y^2+z^2=1$$

を考える．

(1) 方程式 (i) が解をもつための $a,\ b,\ c$ に関する条件を求めよ．またそのときの方程式 (i) の解 $(x,\ y,\ z)$ を求めよ．

(2) 方程式 (i) と (ii) がただ一つの共通解をもつとき，その共通解 $(x,\ y,\ z)$ は方程式 $2x^2+2xy+2y^2=1$ をみたすことを示せ．

2.4　［05 東大文科］　考え方 2.4　解答 5.4

0 以上の実数 $s,\ t$ が $s^2+t^2=1$ をみたしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ．

2.5　［05 阪大］　考え方 2.5　解答 5.5

空間内の 4 点 A，B，C，D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2,\ \mathrm{AD}=3$$
$$\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

をみたしている．この 4 点から等距離にある点を E とする．線分 AE の長さを求めよ．

2.6　［07 早稲田］　考え方 2.6　解答 5.6

半径 r の球面上に異なる 4 点 A，B，C，D がある．

$$\mathrm{AB}=\mathrm{CD}=\sqrt{2},\ \mathrm{AC}=\mathrm{AD}=\mathrm{BC}=\mathrm{BD}=\sqrt{5}$$

であるとき，r の値を求めよ．

2.7　［97 名大］　考え方 2.7　解答 5.7

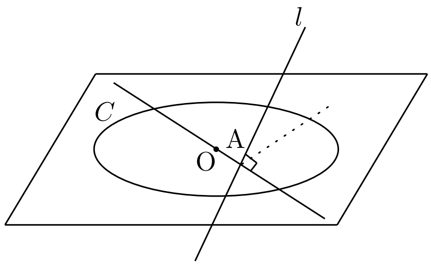
△ABC 上に時速 $u,\ v,\ w$ で等速運動する 3 点があって，それぞれ A から辺 AB に沿って B へ，B から辺 BC に沿って C へ，C から辺 CA に沿って A へ同時に出発するとする．t 時間後のそれらの位置をそれぞれ $\mathrm{P}(t)$，$\mathrm{Q}(t)$，$\mathrm{R}(t)$ とする．

3 点が同時に次の頂点に到達するための必要十分条件は $\triangle\mathrm{P}(t)\mathrm{Q}(t)\mathrm{R}(t)$ の重心の位置が t によらず一定なことである．これを示せ．

2.8　［83 東大］　考え方 2.8　解答 5.8

平面上に点 O を中心とする半径 1 の円 C がある．

また，この平面上の O と異なる点 A を通って，直線 OA と垂直な空間直線 l があり，平面とのなす角が $45°$ である．このとき，直線 l 上を動く点 P と，円 C 上を動く点 Q の間の距離の最小値を 2 点間の距離 $\mathrm{OA} = a$ で表せ．



2.9　［99 お茶の水女子大］　考え方 2.9　解答 5.9

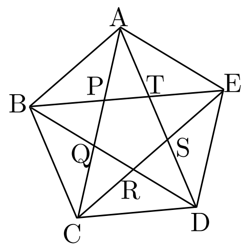
あるクラスの生徒は A 町に a 人，B 町に b 人住んでいる． A 町と B 町は l km の道路で結ばれている．この道路上， A 町から x km の距離にある地点に全員集合したい．以下のそれぞれの場合につき，全員の交通費の合計が最小となるのはどのようなときかを調べ， そのときの x の値と交通費の総額を示せ．ただし，いずれの場合も，比例定数は最初の 1km に対する交通費がちょうど 100 円となるように設定してあるものとする．

(1) 交通費が距離に比例するとき．

(2) 交通費が距離の 3 乗に比例するとき．

2.10　［06 名大］　考え方 2.10　解答 5.10

正五角形 ABCDE の頂点 A と C，C と E，E と B，B と D，D と A をそれぞれ結んだ 5 本の対角線を考えると，それらは右図のように 5 つの点 P，Q，R，S，T で交わる．この 5 つの点 P，Q，R，S，T 上にそれぞれ 1 枚ずつ，表裏が定まったコインが置かれ固定されているとする．
いま，表裏が定まっていて互いに区別のつかない 5 枚のコインを新たに用意し，5 つの点 A，B，C，D，E 上に 1 枚ずつ置く．すると各対角線上にはそれぞれ 4 枚のコインが並ぶことになる．



問　どの対角線上にも表のコインが偶数枚置かれているような，A，B，C，D，E 上へのコインの置き方の場合の数は何通りあるか．考察の過程をていねいに説明して解答せよ．

考え方

2.1　問題 2.1　解答 5.1

いくつかのものが等式によって等しいとされたとき，その等しいものを文字に置くのが基本である．その上で x, y, z のいずれかを消去し必要条件を求め，その後でその十分性を吟味しよう．

2.2　問題 2.2　解答 5.2

各桁に 1 からはじまる数が一つずつあることは，ほぼ見当がつく．問題はそれをどのように論証するかだ．ここは文字を導入して，2^k が l 桁で最高位の数字が 1 である，ことを式や不等式に表そう．

2.3　問題 2.3　解答 5.3

これは連立 1 次方程式が不定になる場合だ．つまり無数の解がある．これをすべて求める？　解の形は決まる．それを書き表すためには，何らかの文字が必要だ．この解の全体は空間の直線になる．(2) ではその直線が球と接することが問題になっている．

2.4　問題 2.4　解答 5.4

条件も方程式の係数も s と t に関して対称である．$s+t$ と st で表せる．条件 $s^2+t^2=1$ が成り立っているので一方を消去できる．こうして係数が 1 文字になれば，その文字に範囲を定めて，係数が動く範囲にあるような x の範囲を求めればよい．

2.5　問題 2.5　解答 5.5

このような図形問題は，座標で解くか，ベクトルで解くか，あるいは他の方法で解くか．まずそれを考えなければならない．方法を固定せず，見通しが立つまで少しやってみることだ．条件の中に直角や 60° のような角があれば，座標で考えることが容易である．

2.6　問題 2.6　解答 5.6

このような場合は座標に入れることが難しい．具体的に数値の与えられた図形では，数値から図形の性質を見抜くことが大切である．対称性から外接球の中心がどこにあるかはわかる．半径 r に関する方程式を作る．これが基本方針である．

2.7　問題 2.7　解答 5.7

問題を数式に翻訳しなければならない．点 $\mathrm{P}(t)$ は線分 AB 上にあり，$\mathrm{AP}(t)=ut$ である．一般的な図形であるからベクトルで表すとして，点 $\mathrm{P}(t)$ などをこれを等式に表現するためには，何が必要か．

2.8　問題 2.8　解答 5.8

先に P と Q のいずれを固定するか．P が決まれば最小になる Q の位置は決まることがわかる．その上で l 上の点 P の位置を何らかの変数に置く．その変数で PQ を表せばよい．

2.9　問題 2.9　解答 5.9

それぞれ変化するのだから関数を導入しよう．問題文をよく読み，文章で書かれた内容を関数で表せばよい．

2.10　問題 2.10　解答 5.10

この問題は 2 つのことがカギである．

(1) A に表を置くか裏を置くか決めれば，すべて決まることに気づく．

(2) 順に決めていって，最後の対角線上の置き方は，それまでの置き方で決まっているが，ここにも偶数個あることをどのように示すか．

これらを考え，何らかの道具が必要である．

2.2　条件と結論の分析

同値ということ　例えば点Pに関する条件 p を「点 P が直線 $l: x+2y-5=0$ 上にある」，条件 q を「点 P と原点の距離は $\sqrt{5}$ 以上である」としよう．このとき，原点と直線 l との距離が $\sqrt{5}$ なので，p が成立すれば必ず q が成立する．

$$
\begin{aligned}
p \Rightarrow q \quad & \text{のとき，}\quad p\text{ は }q\text{ の十分条件であるといい，}\\
q \Rightarrow p \quad & \text{のとき，}\quad p\text{ は }q\text{ の必要条件であるという．}\\
p \Rightarrow q\text{ かつ }q \Rightarrow p \quad & \text{のとき，}\quad p\text{ は }q\text{ の必要十分条件であるという．}
\end{aligned}
$$

p が q の必要十分条件であるとき，

$$p\text{ と }q\text{ は互いに同値である}$$

ともいい，$p \iff q$ と書くことが多い．

数学の論証では，さまざまの条件についてそれらが同値であるかどうかを確認することが基礎である．同値な命題は同等の価値がある．

同値変形とは　p が等式や命題 (等式も命題だが) であるとき, $p \iff q$ と同値関係を保って別の等式や命題 q に変形することを**同値変形**という．方程式 $x-\sqrt{x-1}=3$ を同値変形を活用して解いてみよう．

$$
\begin{aligned}
x-\sqrt{x-1}=3 \quad &\iff \quad x-3=\sqrt{x-1}\\
&\iff \quad (x-3)^2=x-1\text{ かつ }x \geqq 3\\
&\iff \quad x^2-7x+10=0\text{ かつ }x \geqq 3\\
&\iff \quad (x-2)(x-5)=0\text{ かつ }x \geqq 3\\
&\iff \quad x=5
\end{aligned}
$$

2.2.1　同値変形で解きほぐす

仮定された条件や示したい結論を同値変形する．これができれば問題は半ば解けている．仮定条件と結論を同値変形してそのあいだの隔たりが埋まれば，多くの場合問題は解ける．

例題 2.6　［07 早稲田・教育］

(1) $a \geqq 1,\ b \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right) \geqq 2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)$$

(2) $a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1$ のとき，次の不等式が成立することを示せ．

$$\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right) \geqq 3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)$$

考え方　(1) は結論の同値変形の一種であるが，示したい不等式を移項し，左辺ー右辺を変形する．移項したり同類項をまとめたりすることはもっとも基本的な同値変形である．(2) はいろんな方法がある．左辺から右辺を引いた式を，正の部分と負の部分でまとめると，それぞれ因数分解できることに気づきたい．あるいは，3 個の場合はできなくても 4 個ならできることに気づけばそこから道はひらける．

解答

(1)

$$\begin{aligned}
&\left(a^2-\frac{1}{a^2}\right)+\left(b^2-\frac{1}{b^2}\right)-2\left(ab-\frac{1}{ab}\right)\\
=\ &(a-b)^2-\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2=(a-b)^2-\frac{(b-a)^2}{a^2b^2}\\
=\ &\frac{(a-b)^2(a^2b^2-1)}{a^2b^2}
\end{aligned}$$

$a \geqq 1,\ b \geqq 1$ なので $a^2b^2-1 \geqq 0$ である．よって (1) の不等式が成立し，等号成立条件は $a=b$ である．

(2)　因数分解と式変形

$$\begin{aligned}
x^3+y^3+z^3-3xyz &= (x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-yz-zx)\\
&= \frac{1}{2}(x+y+z)\left\{(x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2\right\}
\end{aligned}$$

を用いる．

$$\begin{aligned}
&\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right)-3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)\\
=\ &a^3+b^3+c^3-3abc-\left(\frac{1}{a^3}+\frac{1}{b^3}+\frac{1}{c^3}-\frac{3}{abc}\right)\\
=\ &\frac{1}{2}(a+b+c)\left\{(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2\right\}\\
&-\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right\}\left\{\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2\right\}
\end{aligned}$$

$a \geqq 1,\ b \geqq 1,\ c \geqq 1$ なので，(1) とあわせて

$$a+b+c \geqq \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}$$

$$(a-b)^2 \geqq \left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2,\ (b-c)^2 \geqq \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2,\ (c-a)^2 \geqq \left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2$$

が成り立つ．よって (2) の不等式が成立する．等号が成立するために，第二の不等式群の条件から $a=b=c$ が必要で，このとき，$(a-b)^2+(b-c)^2+(c-a)^2=0$，$\left(\frac{1}{a}-\frac{1}{b}\right)^2+\left(\frac{1}{b}-\frac{1}{c}\right)^2+\left(\frac{1}{c}-\frac{1}{a}\right)^2=0$ であるから，これは等号成立の十分条件でもある．□

(2) の別解　$A,\ B,\ C,\ D \geqq 1$ とする．(1) から

$$\begin{aligned}
&\left(A^4-\frac{1}{A^4}\right)+\left(B^4-\frac{1}{B^4}\right)+\left(C^4-\frac{1}{C^4}\right)+\left(D^4-\frac{1}{D^4}\right)\\
\geqq\ &2\left(A^2B^2-\frac{1}{A^2B^2}\right)+2\left(C^2D^2-\frac{1}{C^2D^2}\right) \geqq 4\left(ABCD-\frac{1}{ABCD}\right)
\end{aligned}$$

ここで，

$$A=a^{\frac{3}{4}},\ B=b^{\frac{3}{4}},\ C=c^{\frac{3}{4}},\ D=(abc)^{\frac{1}{4}}$$

を代入する．これから不等式

$$\begin{aligned}&\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right)+\left(abc-\frac{1}{abc}\right)\geqq 4\left(abc-\frac{1}{abc}\right)\\ \therefore\quad&\left(a^3-\frac{1}{a^3}\right)+\left(b^3-\frac{1}{b^3}\right)+\left(c^3-\frac{1}{c^3}\right)\geqq 3\left(abc-\frac{1}{abc}\right)\end{aligned}$$

が得られる． □

次のような問題でも，条件と同値な等式をまず立て，それを同値変形することで点の満たすべき必要十分条件として点の軌跡が求まる．

例題 2.7 ［08 東大前期文科］

座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(−1, 0), C(0, −1) に対し

$$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$$

を満たす点 P の軌跡を求めよ．ただし，P $\neq$ A, B, C とする．

考え方 いろいろと図形的にやりたいのだが，なかなか難しい．あるいは場合分けが必要だ．そこで角の相等という条件を余弦の相等に置きかえ，さらにそれをベクトルで表してその条件と同値な等式を作ろう．それができればその同値変形を行うのだ．

解答 角を 0 以上 π 未満にとることにより，条件 $\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ は，条件

$$\cos\angle\mathrm{APC}=\cos\angle\mathrm{BPC}\quad\cdots①$$

と同値である．P$(X,\ Y)$ とする．

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(1-X,\ -Y)\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{PB}}=(-1-X,\ -Y)\ ,\quad \overrightarrow{\mathrm{PC}}=(-X,\ -1-Y)$$

となる．P $\neq$ A, B, C よりこれらは 0 ベクトルではない．この条件の下で条件 ① は次の等式と同値である．

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|}$$

である．$\left|\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right|\neq 0$ なので，

$$\left(\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{PB}}\right|=\left(\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}\right)\left|\overrightarrow{\mathrm{PA}}\right|$$

となる．これを成分で書くと

$$\begin{aligned}&\{(1-X)(-X)+(-1-Y)(-Y)\}\sqrt{(1+X)^2+Y^2}\\ &=\{(-1-X)(-X)+(-1-Y)(-Y)\}\sqrt{(1-X)^2+Y^2}\\ \Longleftrightarrow\quad&(X^2+Y^2+Y-X)\sqrt{X^2+Y^2+1+2X}\\ &=(X^2+Y^2+Y+X)\sqrt{X^2+Y^2+1-2X}\end{aligned}$$

根号の符号条件から

$$(X^2+Y^2+Y-X)(X^2+Y^2+Y+X) \geqq 0 \quad \cdots ②$$

が必要で，このとき条件は

$$(X^2+Y^2+Y-X)^2(X^2+Y^2+1+2X) = (X^2+Y^2+Y+X)^2(X^2+Y^2+1-2X)$$

と同値である．つまり

$$\begin{aligned} & \{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2-2X(X^2+Y^2+Y)\}(X^2+Y^2+1+2X) \\ = \ & \{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2+2X(X^2+Y^2+Y)\}(X^2+Y^2+1-2X) \end{aligned}$$

これを展開し整理すると次式を得る．

$$\begin{aligned} & X\{(X^2+Y^2+Y)^2+X^2\}-X(X^2+Y^2+Y)(X^2+Y^2+1) \\ = \ & XY(X^2+Y^2-1)=0 \quad \cdots ③ \end{aligned}$$

条件 ② は中心が $\left(\pm\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ で原点を通る 2 つの円の共通の外部か共通の内部 (と周) である．よって求める軌跡は

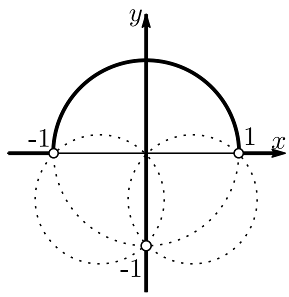
$x=0$ または $y=0$ または $x^2+y^2=1$

かつ

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 \geqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 \geqq \dfrac{1}{2}$

または

$\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{1}{2}$ かつ $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(y+\dfrac{1}{2}\right)^2 \leqq \dfrac{1}{2}$



ただし，$(\pm1,\ 0)$, $(0,\ -1)$ は除く．これを図示する． □

2.2.2 結論からさかのぼる

まず次の例題をやってみよう．

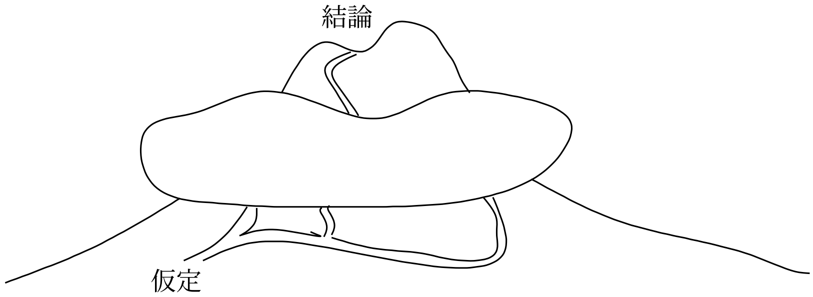
例題 2.8 ［01 日本女子大］

正の数 a に対して $b=a^a$ とおくとき，次のことを示せ．

(1) $1<a<2$ ならば $a^b<b^a$ である．

(2) $a>2$ ならば $a^b>b^a$ である．

考え方 この問題をどのように考えただろうか．ノートに「 $1<a<2$ より…」と書いて，それ以上に進めない人はいなかっただろうか．(1)(2) の前提は「正の数 a に対して $b=a^a$」だ．この前提のもとに，(1) の論証の出発は確かに**仮定**「$1<a<2$」だ．だから「 $1<a<2$ より…」と書いて次を考えようとするのは理由のないことではない．しかし,「 $1<a<2$ より…」と書きはじめて，まっすぐに**結論**「 $a^b<b^a$」に行き着くことは，簡単ではない．



山の頂上を結論とし，麓を最初の仮定としよう．麓からいくつか道が分かれているが，山の途中には雲がかかっていて，どの道を行けば頂上にたどり着けるかわからない，これが問題に直面したときの状況だ．ノートに「$1 < a < 2$ より…」と書いてそこで次にすすめなかった人は，このときに麓のどの道を行こうかわからず，あるいは道さえわからず，立ち止まってしまったようなものだ．

こんなときはどうすればよいのだろう．山登りを例にあげたが，実は山登りと問題を解くことには，重大な違いがある．それは何か．山登りは麓から頂上へ向かって進むのだが，問題を解くことは，最初の仮定と最後の結論の間の**道筋をつける**ことなのだ．だから道は，頂上から麓へ降りていって発見しても良い．この問題では結論 $a^b < b^a$ から逆にたどる．

そこでこの問題をもう一度よく見ると,「正の数 a に対して」と書かれているが，(1) は $1 < a < 2$ のとき，(2) は $2 < a$ のとき，結論の不等号が逆になっているので結局， $1 < a$ の前提のもとで，$a^b < b^a$ か $a^b > b^a$ かが a が 2 より大きいか小さいかで決まることを示せ，といっている．これに注意して考えよう

解答　$1 < a$ のとき

$$\begin{aligned} a^b < b^a &\iff a^{a^a} < (a^a)^a \\ &\iff a^{a^a} < a^{a^2} \\ &\iff a^a < a^2 \quad (\because \ 1 < a) \\ &\iff a < 2 \quad (\because \ 1 < a) \end{aligned}$$

となり，(1) と (2) があわせて示された． □

例題 2.9　［出典不明］

$0 < x < 1,\ 0 < y < 1,\ 0 < z < 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$(1) \quad xy + 1 > x + y \quad (2) \quad xyz + 2 > x + y + z \quad (3) \quad xy^2z + 3 > x + 2y + z$$

考え方　結論を同値変形しよう．

解答

(1)　$0 < x < 1,\ 0 < y < 1$ より $x - 1 < 0,\ y - 1 < 0$ なので

$$xy + 1 - (x + y) = (x - 1)(y - 1) > 0 \quad \therefore \quad xy + 1 > x + y$$

(2)　$0 < xy < 1$ なので (1) より

$$xyz + 2 = (xy)z + 1 + 1 > xy + z + 1$$

(1) より $xy+z+1>x+y+z$ なので，題意が示された．

(3)　$0<xy<1,\ 0<yz<1$ なので (1) より

$$xy^2z+3=(xy)(yz)+1+2>xy+1+yz+1=x+y+y+z$$

よって題意が示された．　$\square$

2.2.3　定義に立ちかえる

糸口がわからないとき，まず考えるべきことは，問題文中の言葉および記号の意味ははっきりわかっているか，ということである．そこをおさえることで解決の糸口がつかめることが少なくない．それを「定義に立ちかえる」という．それには二つの側面がある．

第 1 は，学校で習ったはずの言葉の正確な意味を押さえる，ということである．

例えば,「$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ」という問題がある．まず「無理数とは何か」がわからなければ解きようがない.「無理数とは有理数でない実数」のことだ．だから,「$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ」ということは「$\sqrt{2}$ が有理数でないことを示せ」ということだとわかる．これなら証明は背理法でするのが自然だ．$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定する．そこで次は有理数とは何か.「有理数とは分数で表される数」だ．分数は必ず既約分数に出来るから「$\sqrt{2}$ が有理数である」ということは，互いに素な整数 p と q で $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ となるものが存在することである．定義からはじめて $\sqrt{2}=\dfrac{p}{q}$ という「式」ができた．これが出発点である．

また,「自然数 n に対して $45n+13$ と $10n+3$ はつねに互いに素であることを示せ.」は「互いに素」という言葉の意味，つまり定義がわからなければ，どうしようもない.「1 以外に公約数がない」が定義だ．ということは,「最大公約数が 1」であることを示せばよい．そこで $45n+13$ と $10n+3$ の最大公約数を d とし，$45n+13=da$ と $10n+3=db$ とおく．

第 2 は，出題者が定めた記号の意味を，自分がわかっている言葉で言い換える，ということである．

「負でない整数 x の 10 進法で表した下 2 桁を $C(x)$ とする」というのが京大文系問題にあった．出題者がこの記号を使って $C(x)=C(y)$ と用いたとしよう．このとき

$$C(x)=C(y) \quad \Longleftrightarrow \quad x-y \text{ が } 100 \text{ の倍数}$$

ととらえられるか，である．

また「実数 x に対して x を超えない最大の整数を $[x]$」と表す．これはガウス記号といわれ，よく使われる記号だが，日本語で定義された $[x]$ の定義に立ちかえれば，$[x]$ は

$$[x] \leqq x < [x]+1$$

を満たす整数であるということになる．

このように**定義に立ちかえる**ことは，数学の問題を解く前提であり，逆にここをはっきりさせることで，問題解決の糸口をつかむことができる．

例題 2.10　［07 慶應経済］

$N=\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots.\}$ を自然数全体の集合とする．集合 S を

$$S=\{(x,\ y)\mid x\in N,\ y\in N\ \}$$

と定める．S の2つの票奏 $(a,\ b)$, $(c,\ d)$ に対して，次の条件PまたはQが成り立つとき，$(a,\ b) \triangleleft (c,\ d)$ と表すことにする．

$$\mathrm{P}：a+b<c+d$$
$$\mathrm{Q}：a+b=c+d \text{ かつ } a<c$$

また S の要素 $(m,\ n)$ に対して集合 $T(m,\ n)$ を

$$T(m,\ n)=\{(x,\ y)\mid,(x,\ y)\in S,\ (x,\ y)\triangleleft(m,\ n)\ \}$$

と定める．

(1) $T(2,\ 3)$ の要素をすべて書き並べよ．

(2) $T(1,\ n)$ の要素の個数を n の式で表せ．

(3) $T(2,\ n)$ の要素の個数を n の式で表せ．

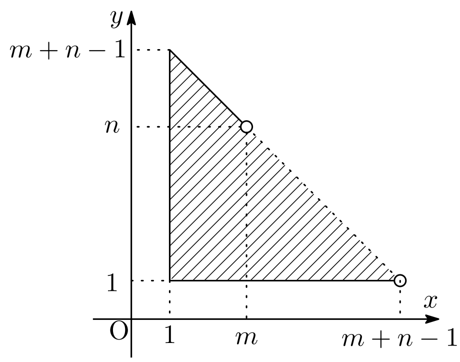
(4) S の要素 $(x,\ y)$ に対して $w(x,\ y)=2^x\cdot 2^y$ とおく．$T(2,\ n)$ のすべての要素 $(x,\ y)$ に対する $w(x,\ y)$ の和を n の式で表せ．

考え方　出題者の定めた新しい記号を定義にしたがってつかみ直し，既知の記号で表し直せばよい．また，これは次節の「関係の図示」の方法であるのだが，$T(m,\ n)$ を図示しながらつかむとよい．そこまですると条件を満たす格子点の個数を求める問題だ．

解答

(1)

$T(m,\ n)$ は $1\leqq x,\ 1\leqq y,\ x+y<m+n$ または $x+y=m+n,\ x<m$ のいずれかを満たす S の要素からなる．図の斜線および実線上の格子点である．したがって $T(2,\ 3)$ の要素は



$$(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4)$$
$$(2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$$

(2)　同様に考え $T(1,\ n)$ の要素は

$$\begin{array}{l}(1,\ 1),\ \cdots,\ (1,\ n-2),\ (1,\ n-1)\\ (2,\ 1),\ \cdots,\ (2,\ n-2)\\ \quad\cdots\\ (n-1,\ 1)\end{array}$$

なので，その個数は

$$1+2+\cdots+n-1=\frac{(n-1)n}{2}.$$

(3)　同様に考え $T(2,\ n)$ の要素は

$$\begin{array}{l} (1,\ 1),\ \cdots,\ (1,\ n)\ \ ,\quad (1,\ n+1) \\ \quad \cdots \\ (k,\ 1),\ \cdots,\ (k,\ n-k+1) \\ \quad \cdots \\ (n,\ 1) \end{array}$$

なので，その個数は

$$1+2+\cdots+n+1=\frac{n^2+n+2}{2}.$$

(4)　$T(2,\ n)$ の要素に対する $w(x,\ y)$ は

$$\begin{array}{l} 2^1\cdot 2^1,\ \cdots,\ 2^1\cdot 2^n\ ,\quad 2^1\cdot 2^{n+1} \\ \quad \cdots \\ 2^k\cdot 2^1,\ \cdots,\ 2^k\cdot 2^{n-k+1} \\ \quad \cdots \\ 2^n\cdot 2^1 \end{array}$$

なので，$x=k\ (k \geqq 2)$ に対する和は

$$2^k(2^1+\cdots+2^{n-k+1}=2^k\cdot 2\cdot(2^{n-k+1}-1)=2^{n+2}-2^{k+1}$$

である．したがって総和は

$$\begin{aligned} & \sum_{k=1}^{n}\left(2^{n+2}-2^{k+1}\right)+2^1\cdot 2^{n+1} \\ = \ & n\cdot 2^{n+2}-2^2(2^n-1)+2^{n+2}=n\cdot 2^{n+2}+4 \end{aligned}$$

となる．　□

2.2.4　問題と考え方

問題

2.11　［作成問題］　考え方 2.11　解答 5.11

以下の方程式，不等式を，同値変形を繰り返して解け．

(1) $x^2+2x+\sqrt{x^2+2x-4}=10$

(2) $\sqrt{x+1}+\sqrt{2x+3}=5$

(3) $\dfrac{1}{x-5}+\dfrac{1}{x+4}=\dfrac{1}{x-4}+\dfrac{1}{x+3}$

(4) $\dfrac{x-1}{x+1}+\dfrac{x+5}{x+7}=\dfrac{x+1}{x+3}+\dfrac{x+3}{x+5}$

(5) $\sqrt{5-x}+x \leqq 3$

(6) $\sqrt{x-1}>x-3$

2.12　［作成問題］　考え方 2.12　解答 5.12

四面体 ABCD がある．直線 AB 上の点 P と直線 CD 上の点 Q で，直線 PQ が，直線 AB および直線 CD と直交するものがただ一つ存在することを示せ．

2.13　［02 京大理系前期］考え方 2.13　解答 5.13

半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある．

(1) $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ ならば $\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形であることを示せ．

(2) $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2 \leqq 9$ が成立することを示せ．また，この場合等号が成立するのはどのような場合か．

2.14　［06 京大理系後期］考え方 2.14　解答 5.14

平面上の点 O を中心とし半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A，B，C がある．$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径 r は $\dfrac{1}{2}$ 以下であることを示せ．

2.15　［04 岐阜大］考え方 2.15　解答 5.15

a と b を実数の定数とする．$x,\ y,\ z$ を未知数とする連立 1 次方程式 $\begin{cases} x+2y+5z=3 \\ \quad ay+2z=2 \\ \quad 8y+bz=5 \end{cases}$ を考える．以下の問いに答えよ．

(1) この連立 1 次方程式がただ一組の解を持つために a と b が満たすべき必要十分条件を与え，その条件の下での解を求めよ．

(2) この連立 1 次方程式が無数に多くの解を持つために a と b が満たすべき必要十分条件を与え，その条件の下での解をもれなく求めよ．

2.16　［04 愛媛大］考え方 2.16　解答 5.16

(1) $a,\ b,\ c$ を整数とし，$f(x)=x^3-x+3(ax^2+bx+c)$ とおく．すべての整数 n に対して，$f(n)$ は 3 の倍数であることを示せ．

(2) すべての係数が整数である 3 次の整式 $g(x)$ が次の二つの条件

　(A) x^3 の係数は 1 である．

　(B) すべての整数 n に対して，$g(n)$ は 3 の倍数である．

を満たすならば，$g(x)$ はある整数 $a,\ b,\ c$ を用いて，

$$g(x)=x^3-x+3(ax^2+bx+c)$$

と表されることを示せ．

2.17　［96 甲南大］考え方 2.17　解答 5.17

$a,\ b,\ c,\ k$ を実数とする．

(1) $ax^2+2bxy+cy^2=k(x^2+y^2)$ をみたす実数 $x,\ y$ が $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外に存在するためには，$b^2 \geqq (a-k)(c-k)$ が成り立つことが，必要十分であることを証明せよ．

(2) さらに $p,\ q$ を実数とする．任意の実数 $x,\ y$ に対して

$$p(x^2+y^2) \leqq ax^2+2bxy+cy^2 \leqq q(x^2+y^2)$$

が成り立つための p の最大値と q の最小値を， $a,\ b,\ c$ を用いて表せ．

2.18　［07 東北後期文系］考え方 2.18　解答 5.18

xy 平面の 3 点 $(0,\ 0),\ (1,\ 0),\ (0,\ 1)$ を頂点とする三角形を A とし，3 点 $(0,\ 0),\ (b,\ 0),\ (0,\ 1)$ を頂点とする三角形を B とする．点 $(a_1,\ a_2)$ が A 内を動き，点 $(b_1,\ b_2)$ が B 内を動くとき，$(a_1+b_1,\ a_2+b_2)$ で表される点の全体を $A+B$ とかく．

(1) $b=2$ のとき $A+B$ の面積を求めよ．

(2) すべての $b>0$ に対して，$\sqrt{|A+B|} \geqq \sqrt{|A|}+\sqrt{|B|}$ を示せ．ただし $|A+B|,\ |A|,\ |B|$ は，それぞれ $A+B,\ A,\ B$ の面積とする．

2.19　［08 早稲田理工］考え方 2.19　解答 5.19

自然数 $m,\ n$ に対して $f(m,\ n)$ を

$$f(m,\ n)=\frac{1}{2}\{(m+n-1)^2+(m-n+1)\}$$

で定める．以下の問に答えよ．

(1) $f(m,\ n)=100$ をみたす $m,\ n$ を 1 組求めよ．

(2) $a,\ b,\ c,\ d$ は整数で，等式 $a^2+b=c^2+d$ をみたすとする．不等式 $-a<b\leqq a,\ -c<d\leqq c$ が成り立つならば，$a=c,\ b=d$ となることを示せ．

(3) 任意の自然数 k に対し，$f(m,\ n)=k$ をみたす $m,\ n$ がただ 1 組だけ存在することを示せ．

考え方

2.11　問題 2.11　解答 5.11

等式，不等式の同値変形の基本問題である．負でない実数 a に対し，$x^2=a$ となる解のうち負でない方を $\sqrt{a}$ と表す．これが根号の定義である．また次のような同値関係に注意しよう．

1)　$a \geqq \sqrt{b}$, かつ $b \geqq 0 \iff a^2 \geqq b \geqq 0$, かつ $a \geqq 0$

2)　$a \leqq \sqrt{b}$, かつ $b \geqq 0 \iff a<0,\ b \geqq 0$ または $0 \leqq a^2 \leqq b$

証明

1)　$a \geqq \sqrt{b}$, かつ $b \geqq 0$ なら両辺 0 以上なので 2 乗して $a^2 \geqq b \geqq 0$, かつ $a \geqq 0$

逆に $a^2 \geqq b \geqq 0$, かつ $a \geqq 0$ なら，平方根をとって $a \geqq \sqrt{b}$, かつ $b \geqq 0$

2)　$a \leqq \sqrt{b}$, かつ $b \geqq 0$ のとき．$a<0$ は含まれる．または $0 \leqq a$ なら両辺 2 乗して $0 \leqq a^2 \leqq b$

逆に $a<0,\ b \geqq 0$ または $0 \leqq a^2 \leqq b$ のとき．

$a<0$ なら $a \leqq \sqrt{b}$は成立, $0 \leqq a^2 \leqq b$ なら平方根をとって $a \leqq \sqrt{b}$が成立．

2.12　問題 2.12　解答 5.12

証明すべき条件を同値な表現に置きかえる．例えばベクトルで表すとどうなるのか．両方に直交するような点 P，Q の存在を，その条件を満たす係数の関係で表してみよう．そうすると，連立 1 次方程式の解の存在条件と同値であることがわかる．

2.13　問題 2.13　解答 5.13

「鋭角」という結論をどのように同値な条件に変換するか．それを考えよう．別解のように (1) はもっと簡単にすますこともできるが，(2) を見すえてできるだけ一般的に解こう．

2.14　問題 2.14　解答 5.14

まず示すべき結果を同値変形し，何を示せばよいのかを明確にしよう．そこからの証明方法はいくつもある．また，いくつかの別解もある．

2.15　問題 2.15　解答 5.15

第 2，第 3 式が題意をみたすような解をもてば第 1 式から x も決まる．第 2，第 3 式で未知数をいずれか消去する．そうすると，基本的な 1 次方程式 $Ax = B$ の解の様子が A と B が 0 であるか否かで場合分けされることに帰着する．

2.16　問題 2.16　解答 5.16

条件 A，B のもとで (1) と (2) が互いに逆になっている．(2) は十分性を確認するだけでよいことに注意しよう．また（1）（2）を同値変形でいちどに解決することもできる．

2.17　問題 2.17　解答 5.17

条件はすべて x と y の合計が 2 次である式で与えられている．このようなときは，いずれかが 0 である時を別に考えれば，比 $\dfrac{y}{x}$ の関係になる．このようになれば 2 次方程式が実数解をもつ条件となる．

2.18　問題 2.18　解答 5.18

出題者の定めた記号を良く解析しよう．2 つの動点をベクトルでとらえたときの和である．一方を固定し他方を動かす．その図形を固定した方の点を動かすことで動かせばよい．

2.19　問題 2.19　解答 5.19

さまざまの解法が考えられる．(3) では，小問 (2) と定義式の与えられた $f(x)$ とをどのように関連させるか，という観点で考えよう．その上で，別解なども考えてほしい．

2.3　関係の図示

人間はまず言葉で考える．その次には絵や装飾で考えまた表現する．もちろん言葉を文字に書いて考えるということも，現代の人間にとっては普通のことだが，縄文時代の土器，弥生時代の土器などの模様でもわかるように，文字のない古い時代にも図で何ごとかを表すということが行われてきた．図の方がはるかに古い．

数学に戻っていえば，変化や関係を図に書いて考えることはたいへん基本的な方法なのだ．図形問題で図をかいて考えるのは，問題の対象が「図形」そのものなのだから当然だ．図形問題というわけではないときに，図をかく重要性を良く心得ておこう．ここでは，直接図形が題材になる問題ではないが，しかし図で考えることが有効ないくつかの場合について学ぶ．

2.3.1　関数の図示

関数のグラフとは何か．関数 $y=f(x)$ のグラフとは xy 平面上に点の集合

$$\{(x,\ y) \mid x \text{ は実数}, y=f(x)\ \}$$

のことだ．これは普通は何らかの曲線になる．この曲線の形によって，関数の性質が浮かびあがる．つながっているか切れているか．なめらかか折れ曲がっているか．右上がりか右下がりか．上に凸か下に凸か．等々．また，二つの関数のグラフから，それらの関数相互の関係もいろいろ読みとれるのだった．これが基本である．

値域を図示する　次の例題のように，図を描いて考える典型は，変域や関数の値域を図示することで問題に見通しをつけることである．

例題 2.11　[98 産能大]

x, y を実数とするとき，次の問に答えよ．

(1) $x^2+y^2 \leqq 1$ であるとき， $3x+y$ の最大値を求めよ．

(2) $x \geqq 0$，$y \geqq 0$，$3x+y \leqq 5$ であるとき，x^2+y^2 の最大値を求めよ．

(3) $|x|+|y| \leqq 1$ であるとき， $y-x^2+5x$ の最大値を求めよ．

(4) $|x+y| \leqq 1$ であるとき， $y-x^2+5x$ の最大値を求めよ．

解答

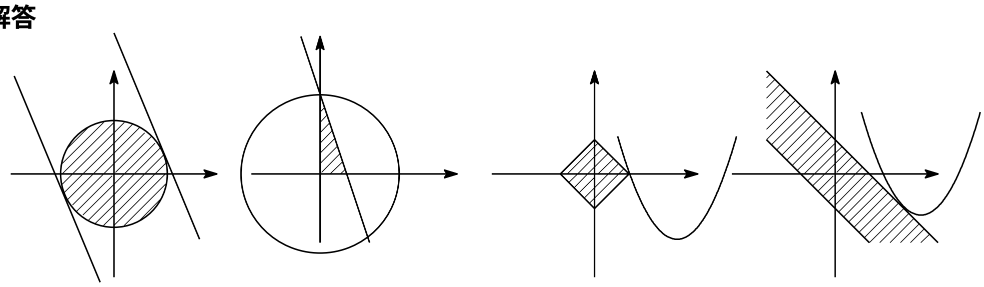


図 1　　図 2　　図 3　　図 4

(1) $3x+y=k$ とおく．$x^2+y^2 \leqq 1$ の点に対して k のとりうる値の範囲は，領域 $x^2+y^2 \leqq 1$ と直線 $3x+y=k$ が共有点を持つ範囲として，定まる．k の最大値，最小値は直線 $3x+y=k$ が円 $x^2+y^2=1$ と接するときである．

$$\frac{|-k|}{\sqrt{3^2+1}}=1 \quad \therefore \quad k=\pm\sqrt{10}$$

最大値は $\sqrt{10}$ である．

(2) $x^2+y^2=k$ とおくとこれは半径 $\sqrt{k}$ の円．条件の領域と共有点があるなかで半径最大になるのは， $(x,\ y)=(5,\ 0)$ のとき．最大値 25 である．

(3) $y - x^2 + 5x = k$ とおくと $y = x^2 - 5x + k = \left(x - \dfrac{5}{2}\right)^2 - \dfrac{25}{4} + k$．軸の位置から図 3 のときが k 最大．つまり $(x,\ y) = (1,\ 0)$ のとき．最大値は $0 - 1^2 + 5 \cdot 1 = 4$ である．

(4) 同じく図 4 のように $x + y = 1$ と接するとき．$x^2 - 5x + k = -x + 1$ が重解を持つときなので， $D/4 = 4 - (k - 1) = 0$ より最大値は 5 である． □

方程式の解とグラフの共有点　文字定数を含む方程式 $f(x) = 0$ が一定の範囲に解をもつような定数の範囲を求めるとき，これを次のように関数のグラフの共有点で考えると簡明である．

もとの方程式 $f(x) = 0$ を，文字定数を含まない部分を左辺に，文字定数を含む部分を右辺に分け，

$$g(x) = h(x)$$

とする．方程式 $f(x) = 0$ の実数解は，二つの曲線

$$y = g(x),\ y = h(x)$$

のグラフの共有点の x 座標である．

一般に右辺 $h(x)$ は次数が低くなり (1 次か定数の場合が多い) 簡単である．それに対して $y = g(x)$ の方は文字定数を含まない固定された関数である．

例題 2.12　[96 関西大]

x の方程式

$$\cos 2x + 2k \sin x + k - 4 = 0,\ (0 \leqq x \leqq \pi)$$

の異なる解の個数が 2 つであるために k のみたすべき条件を求めよ．

解答　$t = \sin x$ とおく．$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$ なので

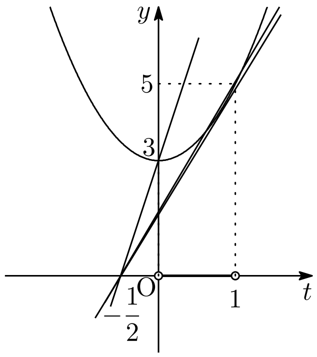
$$\begin{array}{rll} & \cos 2x + 2k \sin x + k - 4 = 0 & \cdots ① \\ \text{より} & (1 - 2t^2) + 2kt + k - 4 = 0 & \cdots ② \\ \iff & 2t^2 + 3 = 2kt + k & \end{array}$$

ここで $0 \leqq x \leqq \pi$ であるから $t = 1$ に対して x は一つ定まり，$0 \leqq t < 1$ に対して x は 2 つ定まる．したがって ① を満たす x が 2 つあることは，t の 2 次方程式 ② が $0 \leqq t < 1$ にただ一つの解をもつことと同値である．

このことに注意して，

$$\begin{cases} y = 2t^2 + 3 \\ y = 2kt + k = 2k\left(t + \dfrac{1}{2}\right) \end{cases}$$

の交点の t 座標がが $0 \leqq t < 1$ にただ一つあるような k の範囲を求めればよい．



直線 $y=2kt+k$ は k によらずつねに $\left(-\frac{1}{2},\ 0\right)$ を通る．

直線 $y=2kt+k$ が $(0,\ 3)$，$(1,\ 5)$ を通るとき，$k=3,\ \frac{5}{3}$ である．また直線 $y=2kt+k$ が放物線 $y=2t^2+3$ と接するときの k を求める．② の判別式が 0 となる k のうち，正のものである．

$$D/4=k^2-2(-k+3)=k^2+2k-6=0$$

より $k=-1+\sqrt{7}$ である．

$-1+\sqrt{7}<\frac{5}{3}$ なので，交点の t 座標がが $0 \leqq t<1$ にただ一つあるような k の範囲はグラフから

$$k=-1+\sqrt{7},\ \frac{5}{3}<k \leqq 3$$

である． □

2.3.2 数列の図示

さらにこの「関数」が，実数に対して定義された普通の関数のみならず，定義域が自然数の関数のときにもグラフの考え方が有効なのだ．定義域が自然数の関数？　それはつまり数列だ．自然数 n に対して定義された関数 $f(n)$ が高校数学の重要な内容の一つである．これは, $f(n)=a_n$ とおけば，数列と同じものであることによく注意すること．このような関数 $f(n)$ を解析する基本は

$$\Delta f(n)=f(n+1)-f(n)$$

を解析することである．これはつまり階差数列である．

階差を取る作用は $\Delta f(n)=\dfrac{f(n+1)-f(n)}{(n+1)-n}$ としてみればわかるように，関数の導関数を考えることに対応している．実は「階差をとる」ことを「差分する」ともいうのだが，これは言うまでもなく「微分する」と対応する言葉の使い方だ．ついでながら階差数列からもとの数列を見出す

$$f(n)=f(1)+\sum_{k=1}^{n-1}\Delta f(k)$$

という操作は，関数 $f(x)$ では，原始関数を求める積分そのものだ．ついでに言えばこの操作を「和分する」という.「積分する」に対応する言葉だ．

そこで次の問題を考えよう．

例題 2.13　［00 京大文系］

実数 $x_1,\ \cdots,x_n\ (n \geqq 3)$ が条件

$$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0\ (2 \leqq k \leqq n-1)$$

を満たすとし, $x_1,\cdots,x_n$ の最小値を m とする．このとき，$x_l=m$ となる $l\ (1 \leqq l \leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ．

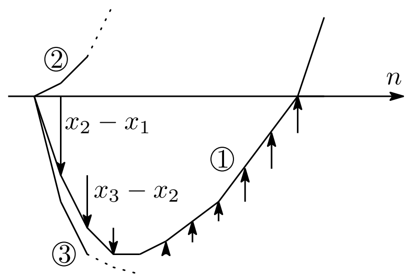
考え方　最初に問題の条件を階差の関係

$$x_k - x_{k-1} < x_{k+1} - x_k \ (2 \leqq k \leqq n-1)$$

にできるかどうかだ．これは「数列を調べるのならまず階差を調べよ」ということが頭にあればできる.「関数を調べるのならまず微分して導関数を調べよ」ということなのだ.

その次にこの階差数列の不等式は何を意味しているかだ.

階差が増加している．微分が増加している．二次導関数が正．下に凸なグラフ．と理系の人なら連想が進むかも知れない．が，これは文系の問題だ．階差が増加しているようなグラフをかいてみよう．階差が増加しているということは，数列が減少しているときは減少幅が小さくなり，数列が増加しているときは増加幅が大きくなることだ.



これでわかる．実際下に凸な折れ線になる．形としては① のようにはじめ減少で途中から増加に転じる場合，途中の 1 カ所で $x_{k+1} - x_k = 0$ となればそこで最小になり最小値をとる x_k の個数は 2 個，$x_k - x_{k-1} < 0 < x_{k+1} - x_k$ なら 1 個．② や③ の形なら x_1 か x_n の 1 個のみとなる.

解答　題意の条件は

$$x_{k+1} - x_k > x_k - x_{k-1} \ (2 \leqq k \leqq n-1)$$

と書ける.

(i) $x_2 - x_1 > 0$ なら

$$x_k - x_{k-1} > 0 \ (2 \leqq k \leqq n)$$

となり 数列 $\{x_n\}$ は単調増加．よって $x_1 = m$ となり他に m となるものはない．この場合は 1 個.

(ii) $0 > x_n - x_{n-1}$ なら

$$0 > x_k - x_{k-1} \ (2 \leqq k \leqq n)$$

となり 数列 $\{x_n\}$ は単調減少．よって $x_n = m$ となり他に m となるものはない．この場合は 1 個.

(iii) ある番号 k_0 があって

$$x_{k_0+1} - x_{k_0} > 0 > x_{k_0} - x_{k_0-1}$$

となるとき.

$x_1, \cdots, x_{k_0}$ は単調減少で，$x_{k_0}, \cdots, x_n$ は単調増加．よって $x_{k_0} = m$ となり他に m となるものはない．この場合は 1 個.

(iv) ある番号 k_0 があって

$$x_{k_0+1} - x_{k_0} = 0$$

となるとき．このときは

$$x_{k_0+2} - x_{k_0+1} > x_{k_0+1} - x_{k_0} = 0 > x_{k_0} - x_{k_0-1}$$

となる．同様の議論から $m = x_{k_0+1} = x_{k_0}$ となりこの他に m となるものはない．この場合は 2 個. □

2.3.3　確率過程の図示

このような考え方は，試行が順次おこなわれる場合の，場合の数や確率の過程を考えるときにも有効である．あとで「漸化式」のところでもういちどマルコフ過程という確率の問題を取り上げる．ここではまず事象の変化を図示して考えることを学んでほしい．

次の例題などは試行の過程を図にして考えないと困難だ．

例題 2.14　［92 一橋］

「一つのサイコロを振り，出た目が 4 以下ならば A に 1 点を与え，5 以上ならば B に 1 点を与える」という試行を繰り返す．

(1) A と B の得点差が 2 になったところでやめて得点の多い方を勝ちとする．n 回以下の試行で A が勝つ確率 p_n を求めよ．

(2) A の得点が B の得点より 2 多くなるか，または B の得点が A の得点より 1 多くなったところでやめて，得点の多い方を勝ちとする．n 回以下の試行で A が勝つ確率 q_n を求めよ．

解答

(1)　x 軸に回数 n，y 軸に得点差 d を取り，点 $(n,\ d)$ を平面にとる．するとこの試行は，平面上の点の移動としてとらえることができる．点 $(n,\ d)$ から点 $(n+1,\ d+1)$ へ移動する確率は $\dfrac{4}{6}$，点 $(n,\ d)$ から点 $(n+1,\ d-1)$ へ移動する確率は $\dfrac{2}{6}$ になる．

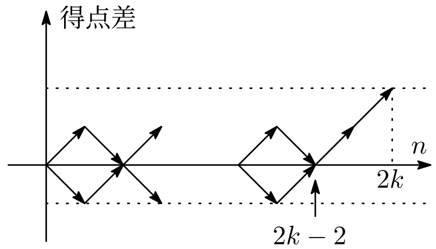


図 1

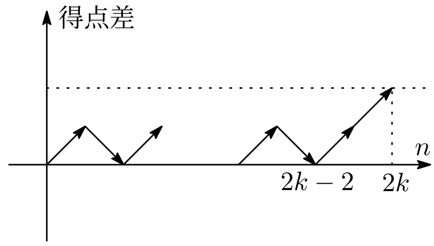


図 2

このようにすると，得点差が ± 1 の間をくり返し，最後に A が 2 連勝するしか得点差が 2 になることはない．したがって，奇数回目の得点差は奇数なので，得点差が 2 になるのは，偶数回目しかないことがわかる．$2k$ 回目に A が勝つ確率 r_{2k} は，

$$r_{2k} = \left(\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\right)^{k-1}\times\left(\frac{2}{3}\right)^2 = \left(\frac{4}{9}\right)^k$$

したがって n が偶数なら

$$p_n = \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}\left(\frac{4}{9}\right)^k = \frac{\dfrac{4}{9}\left\{1-\left(\dfrac{4}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\}}{1-\dfrac{4}{9}} = \frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^n\right\}$$

n が奇数なら

$$p_n = p_{n-1} = \frac{4}{5}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}$$

(2)　同様にして，図 2 のようになる．考え方はまったく同じである．

$$\begin{cases} \dfrac{4}{7}\left\{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{n}{2}}\right\} & (n:\text{偶数}) \\ \dfrac{4}{7}\left\{1-\left(\dfrac{2}{9}\right)^{\frac{n-1}{2}}\right\} & (n:\text{奇数}) \end{cases}$$

その解は上のようになる．□

2.3.4　問題と考え方

問題

2.20　［08 京大理系乙］　考え方 2.20　解答 5.20

定数 a は実数であるとする．関数 $y=\left|x^2-2\right|$ と $y=\left|2x^2+ax-1\right|$ のグラフの共有点はいくつあるか．a の値によって分類せよ．

2.21　［95 大阪市大］　考え方 2.21　解答 5.21

袋の中に赤玉 6 個と白玉 4 個が入っている．袋に戻さずに玉を 1 個ずつ取り出す試行を考える．取り出された玉のうちで，白玉の個数が赤玉の個数より多いときは試行を中止し，そうでないときは袋の中に玉があるかぎり試行を続けるものとする．次の問に答えよ．

(1) 玉を 3 個取り出した時点で試行が終わる確率を求めよ．

(2) 玉を 5 個取り出した時点で試行が終わる確率を求めよ．

(3) 玉を 10 個すべて取り出すまで試行が続く確率を求めよ．

2.22　［01 名古屋］　考え方 2.22　解答 5.22

数直線上の原点 O から出発して，硬貨を投げながら駒を整数点上動かすゲームを考える．毎回硬貨を投げて表が出れば $+1$ ，裏が出れば -1 ，それぞれ駒を進めるものとする．ただし，点 -1 または点 3 に着いたときは以後そこにとどまるものとする．

(1) k 回目に硬貨を投げたあと，駒が点 1 にある確率を求めよ．

(2) k 回目に硬貨を投げたあと，駒がある点 X_k の期待値 $E[X_k]$ を求めよ．

2.23　［04 東大前期文系］　考え方 2.23　解答 5.23

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある、この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作を繰り返し行う．

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5，6 であれば右端の板を裏返す．

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる．

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ．

(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする．

p_{2k+1} を求めよ．

注意:さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

考え方

2.20　［08 京大理系乙］　問題 2.20　解答 5.20

絶対値が等しい実数 $|A|=|B|$ は，$A=\pm B$ と同値である．こうして文字定数を含む二つの二次方程式が得られる．この方程式を定数のある部分とない部分に分け，グラフの共有点の個数で考えるのも一つの方法である．

2.21　［95 大阪市大］　問題 2.21　解答 5.21

樹形図をいかにうまくとるかであるが，経路を図示し，各点に至る経路の総数を書いていけばよい．

2.22　［01 名古屋］　問題 2.22　解答 5.22

状態の変化をもとに漸化式を作るのであるが，その際状態と変化を図示すると考えやすい．この確率問題はさまざまの解法があるので，一つで終わらずにいろいろ考えたい．

2.23　［04 東大前期文系］　問題 2.23　解答 5.23

同様に状態の変化をもとに漸化式を作る問題である．最初すべて白で対称であり，いずれの確率も等しいので，一つの板が黒であるときにどの板が黒であるかは同様に確かである．

2.4　個別と一般

個別と一般という場合，個別とは一般的な場合の実例である．また，一般とはここの実例から帰納的に推測される一般法則である．

抽象的な問題，一般的に自然数 n について証明する問題などでは，例を作って考えることが問題をとらえるうえで大変有効だ．というより，もともと数学とは，いろんな実例の中からそれらの本質をとらえて，一般的な性質が成立することを証明するものである．実例の論証から一般的な論証の見通しを得る．

それは科学の方法の第一のものだ．こうではないかという仮説を立てる．これは一般の場合の推測だ．それを個別実験で確かめる．科学の方法は実験だ．実験とは例を調べることである．実験で大切なことはそれがどれだけ一般化できるかということだ．実験でまちがいないとなると，なぜそれが成り立つのか理論を追求する．これは数学の問題を解くときにもいえることだ．

入試問題では，はじめの方の小問で具体的な例を考えさせ，後でその一般化を問う，という形でつねに出される．このような場合に大切なことは，後に一般的な場合に証明することに備えて個別の場合を**できるだけ一般的に証明する**，ということだ．

2.4.1 例で考える

例題 2.15 ［01 愛媛大］

n を自然数とし，1 または -1 を $2n$ 個並べた数列 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n})$ を考える．例えば，$n=1$ のときは

$$(1,\ 1),\ (1,\ -1),\ (-1,\ 1),\ (-1,\ -1)$$

の 4 通りがある．

(1) $\dfrac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})$ は整数であることを示せ．

(2) $\dfrac{1}{2}(a_1+a_2+\cdots+a_{2n})$ が 2 の倍数となるような数列 $(a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n})$ は全部で何通りあるか．

これは出題者が例 ($n=1$ の場合) で考えなさいと言ってくれている．$n=1$ のときは四つの場合，a_1+a_2 は 0 か 2 か -2 のいずれかで，つねに偶数になる．任意の n に対しどのように考えればよいか．そこを考える．

(2) はどのように考えるか．(1) の考え方をふまえると $2n-2k$ が 4 の倍数になるような数列の総数ということになる．

解答

(1)　$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}$ の中で，1 と -1 を可能なだけ組にする．k 組できたとする．すると残りは $2n-2k$ 個あり，これらはすべて 1 か -1 である．したがって $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{2n}$ の和は $2n-2k$ または $-(2n-2k)$ となり，つねに偶数である．

(2)　1 の個数が k である数列は ${}_{2n}\mathrm{C}_k$ 通りできる．このとき -1 は $2n-k$ 個あるので和は $k-(2n-k)=2k-2n$ である．$2n-2k$ が 4 の倍数になればよい．

n が偶数か奇数かで場合に分ける．

$n=2m$ のとき $2n-2k=4m-2k$ なので 4 の倍数になるのは k が偶数のとき．

$n=2m-1$ のとき $2n-2k=2m-2(k+1)$ なので $2n-2k$ が 4 の倍数になるのは k が奇数のとき．ところが二項定理

$$(1+x)^{2n}=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k x^k$$

に $x=1,\ -1$ を代入すると

$$\begin{aligned}2^{2n}&=\sum_{k=0}^{2n}{}_{2n}\mathrm{C}_k\\ 0&=({}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_2n)-({}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1})\end{aligned}$$

これから

$${}_{2n}\mathrm{C}_0+{}_{2n}\mathrm{C}_2+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_2n={}_{2n}\mathrm{C}_1+{}_{2n}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{2n}\mathrm{C}_{2n-1}=2^{2n-1}$$

となり，いずれの場合も 2^{2n-1} 通りである．□

例を考えると話が具体的になり，抽象的な証明も何をやっているかよくわかる．

2.4.2　例による型認識

例で考えるもう一つの大切な役割は，抽象的な設問に対して，具体的にとらえる，ということである．例を一つ作る．すると何が問題かがわかる．解答の方向性も見えてくる．抽象的に見えていたものが，実は大変具体的であることがわかる．

例を用いて考えることで，実はそこで成立している型 (パターン) を認識することができる．それを記述すればそれが解答になる．例によって型の認識を助け，それを引き出すことができるのである．**個別から一般へ**，これが例で考えるということである．例で考えよう！

例題 2.16　［09 奈良医科大］

n を 2 以上の整数とし，1 から n までの相異なる n 個の整数を横一列に並べて得られる各順列 σ に対して，左から i 番目の数字を $\sigma(i)$ と記す．このとき，条件 $1 \leqq i < j \leqq n$，かつ $\sigma(i) > \sigma(j)$ を満たす整数の対 $(i,\ j)$ の個数を $l(\sigma)$ とおく．更に 1 から n までの順列全体のなす集合を S とする．順列 σ が S 全体を動くとき，$l(\sigma)$ の総和 $\displaystyle\sum_{\sigma \in S} l(\sigma)$ を求めよ．

考え方　このような抽象的な問題のときには，総和を T_n のようにおいて，T_3 や T_4 を具体的に書いてみる．

$n = 3$ のとき．順列は 6 個ある．

順列	条件を満たす対
$(1,\ 2,\ 3)$	なし
$(1,\ 3,\ 2)$	$(2,\ 3)$
$(2,\ 1,\ 3)$	$(1,\ 2)$
$(2,\ 3,\ 1)$	$(1,\ 3),\ (2,\ 3)$
$(3,\ 1,\ 2)$	$(1,\ 2),\ (1,\ 3)$
$(3,\ 2,\ 1)$	$(1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 3)$

よって $T_3 = 9$ である．

この実験をよく見てみよう．ここに数 4 を加えたとき条件を満たす対がいくつ増えるかを考え，T_4 と T_3 の関係式を求める．それをもとに T_{n+1} と T_n の関係式を導く．それから一般項を出す．これが考えられる一つの方法である．

この表から規則性を見出すこともできる．条件を満たさない対がちょうどこの表でちょうど上下逆に同数あることに気づけば，直接求めることができる．

解 1　n を明示して S と σ を S_n，σ_n のように書き，$T_n = \displaystyle\sum_{\sigma \in S_n} l(\sigma_n)$ とおく．

一つの n 文字の順列 σ_n に対し新たに文字 $n+1$ を加える．加える位置は $n+1$ 通りある．置いた結果として左から k $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n+1)$ 番目の位置になるように $n+1$ を加える．加えた結果できる $n+1$ 文字の順列で，加えた $n+1$ の右方には $n+1-k$ 個の文字があり，$n+1$ とこれらの文字に対応する整数の対 $(k,\ j)$ $(j = k+1,\ \cdots,\ n+1)$ が新たに条件を満たす対に加わる．その個数は $n+1-k$ である．

一つの n 文字の順列 σ_n に対し，新たに文字 $n+1$ を加えることで $n+1$ 文字の順列 σ_{n+1} が $n+1$ 通りでき，その結果，条件を満たす整数の対は

$$n + n - 1 + \cdots + 1 + 0 = \frac{n(n+1)}{2} \quad (\text{個})$$

増える．σ_n は $n!$ 個あるので

$$T_{n+1} = (n+1)T_n + \frac{n(n+1)}{2} \cdot n!$$

が得られる．これから

$$\frac{T_{n+1}}{(n+1)!} - \frac{T_n}{n!} = \frac{n}{2}$$

$S_2 = 1$ であるから

$$\frac{T_n}{n!} = \frac{T_2}{2} + \sum_{k=2}^{n-1} \frac{k}{2} = \frac{n(n-1)}{4}$$

$$\therefore \quad \sum_{\sigma \in S_n} l(\sigma_n) = \frac{n(n-1)n!}{4}$$

解 2　S の中で，ある順列とそれを逆に並べた順列を対応させることにより，$1 \leqq i < j \leqq n$ に対して $\sigma(i) > \sigma(j)$ となる順列と $\sigma(i) < \sigma(j)$ となる順列は同数あることがわかる．

すべての順列に対する整数の対 $(i,\ j)$ は

$${}_n\mathrm{C}_2 \cdot n! \ (\text{個})$$

あるので，条件を満たす対の総数 $\displaystyle\sum_{\sigma \in S} l(\sigma)$ は

$$\sum_{\sigma \in S} l(\sigma) = \frac{1}{2} \cdot {}_n\mathrm{C}_2 \cdot n! = \frac{n(n-1)n!}{4}$$

である．□

このように，個別の数で実験し，そこから型を見ぬく．同様に次の問題も実験が必要である．

例題 2.17　［01 京大文系後期］

1 または -1 からなる数列 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ において，そのうち m 個が 1 で，$(n-m)$ 個が -1 とする．$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対し

$$b_k = \frac{1}{2}\left(ka_k + \sum_{j=1}^{k} a_j\right)$$

とおく．集合

$$\{\ b_k \mid 1 \leqq k \leqq n\ \}$$

を求めよ．

考え方　これは一体なんだ！　というのが正直なところだ．そこで例を 2，3 作って考える．$n = 7,\ m = 4$ で考えよう．ここでまず条件を満たす数列はいくつもあることに気づく．

a_1	a_2	a_3	a_4	a_5	a_6	a_7
1	-1	-1	1	1	1	-1
1	1	1	1	-1	-1	-1
-1	-1	-1	1	1	1	1

このおのおのに対して数列 $\{b_n\}$ を確かめる．ここは次を見ないで必ず自分で作ってみよう．すると

b_1	b_2	b_3	b_4	b_5	b_6	b_7
1	-1	-2	2	3	4	-3
1	2	3	4	-1	-2	-3
-1	-2	-3	1	2	3	4

となり，いずれも集合は

$$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ -1,\ -2,\ -3\}$$

となる．これから，n と m が決まれば，数列 $\{a_n\}$ のとりかたに関係なく求める集合が，1 から m までと，-1 から $-(n-m)$ までででできている，ということが推測される．

いろんな抽象的な問題で例を作って考える大切さを認識してもらいたい．

さて，推測できた段階で次に進む．本例題の証明方法はいろいろある．

ここでは，作った例から問題の仕組みを考え，より直接的に証明する方法でやってみよう．

例を見てみると， b_k は $a_1,\ \cdots,\ a_k$ のうちの 1 の個数か，-1 の個数に -1 をかけたものになっていることに気づく．そこでもう一度 b_k の作り方をよく見てみよう．a_k の k 倍と, k 個の和の和！

解 1

$$\begin{aligned} b_k &= \frac{1}{2}\left(ka_k + \sum_{j=1}^{k} a_j\right) \\ &= \frac{a_k + a_1}{2} + \frac{a_k + a_2}{2} + \cdots + \frac{a_k + a_k}{2} \end{aligned}$$

ここで

$$\frac{a_k + a_j}{2} = \begin{cases} 1 & a_k = a_j = 1 \text{ のとき} \\ -1 & a_k = a_j = -1 \text{ のとき} \\ 0 & a_k \neq a_j \text{のとき} \end{cases}$$

b_k は，a_k が 1 なら, $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ の中に 1 が現れるたびに 1 を加えたもの．a_k が -1 なら, $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ の中に -1 が現れるたびに -1 を加えたもの．

したがって b_k は $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_k$ の中にある $a_k(=1,\ -1)$ と同じものの個数と a_k をかけあわせた値に一致する．1 と同じものの個数と 1 をかけあわせた値は順に $1,\ 2,\ \cdots,\ m$ であり，-1 と同じものの個数と -1 をかけあわせた値は順に $-1,\ -2,\ \cdots,\ -(n-m)$ である．

b_k はこれらの値を 1 回ずつとる．したがって

$$\{\ b_k \mid 1 \leqq k \leqq n\ \} \tag{2.7}$$

$$= \begin{cases} \{-(n-m),\ \cdots,\ -1,\ 1,\ \cdots,\ m\} & (m \neq 0,\ n-m \neq 0 \text{ のとき}) \\ \{-n,\ -(n-1),\ \cdots,\ -1\ \} & (m = 0 \text{ のとき}) \\ \{1,\ 2,\ \cdots,\ m\} & (n = m \text{ のとき}) \end{cases} \tag{2.8}$$

となる．□

2.4.3 推測して数学的帰納法

例から考え，推測したことを証明する典型は，漸化式と a_1 が与えられたときに，$a_2,\ a_3,\ \cdots$ の値を実際に求めて，それから一般項 $\{a_n\}$ を推測し，それを数学的帰納法で示すのと同じだ.「数学

的帰納法」は自然数に関する性質についての命題を自然数の性質を根拠に示す間接証明の一つである．直接証明が難しいときに用いる決定的な方法である．

そして,「推測してから間接に証明する」というのは何も自然数に関することにかぎらない一般的な考え方である．

そこで，直前の例題 2.17 である．1 と -1 のいろいろな数列を作り結論が推測できたとする．これを数学的帰納法で示してみよう．

解 2

推測の結論 2.7 が成立することを，n についての数学的帰納法で示す．

$n=1$ のとき．

$$b_1 = \frac{1}{2}(a_1 + a_1) = a_1$$

であるから，$a_1 = 1,\ -1$ に応じて

$$\{b_1\} = \{1\},\ \{-1\}$$

となり 2.7 は成立する．

n のとき成立するとする．$n+1$ のときにも成立することを示す．a_{n+1} を新たに加える．$b_1,\ \cdots,\ b_n$ は $a_1,\ \cdots,\ a_n$ で決まる．

$a_{n+1}=1$ のとき．1 が $m+1$ 個，-1 が $n-m$ 個である．したがって $b_{n+1}=m+1$ を示せばよい．ところが

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{2}\left((n+1)a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} a_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\{(n+1) + m - (n-m) + 1\} = m+1 \end{aligned}$$

$a_{n+1}=-1$ のとき．1 が m 個，-1 が $n-m+1$ 個である．したがって $b_{n+1}=-(n-m+1)$ を示せばよい．ところが

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{2}\left((n+1)a_{n+1} + \sum_{j=1}^{n+1} a_j\right) \\ &= \frac{1}{2}\{-(n+1) + m - (n-m) - 1\} = -(n-m+1) \end{aligned}$$

よって $n+1$ のときにも成立し，2.7 は成立する． □

2.4.4 一般化して考える

一般から個別へ　問題を考えるとき一般化して考えることでかえって分かりやすくなることがある.「一般から個別へ」「一般から特殊へ」．これが考えるときの方向性である．

小問で最初に具体的な数で問が立てられ，次に一般化して n の場合を問う，というのはよくあることだが，そのときにいきなり n の場合を考えた方が分かりやすいことがある．また，そこまでいかなくても，小問の具体的な数の場合を考えるにあたって，一般化した n の場合に考えやすい方法を探す，ということも大切なことである．小問 (1) はいろんな方法で解けるだろうが，次の (2) で一般化を問われたときに通用する方法を (1) で考えなければならない．

このように，例で考え一般化するというのは，入試問題では，はじめの小問で具体的な例を考えさせるという形でつねに出される．このような場合に大切なことは，後の小問で一般的な場合に証

明することに備えて「**できるだけ一般的に証明する**」ということだ．どのような点に注意して一般化を考えるのか．

一般化を試みよ　一つの問題が解けたらそれに満足せず，さらに一般的にした問題を自分で作り考えてみるということだ．それが勉強であり，いちばん力をつける．勉強の姿勢として，これまでもいろいろと別解を考えることを重視し，それによって力をつけてきた．そのような勉強を通して，**少々下手でもかならずできる普遍的な方法**で解く力を身につけよう.「うまい方法」が好きな人もいるが，これは実際に問題に向かったときいつも思い浮かぶわけではない．しかしできればおもしろい．考える価値はある．それはそうだが，まず身につけるべきなのは普遍的な方法である．

そのためには，とにかく何とか解けたときに，一般化を試みておくことだ．問題を一般化して見る．変数の個数を n にする等だ．あるいは条件の一部をはずしてみる．一般化しても成立しそうだと見当をつけたら**一般的な場合にも通用する方法**を考える．問題が解けてもそれに満足せずこの辺りを考えておく．それは必ず他の場面で生きてくる．一つの問題について，このようないろんな側面から考えたい．違う問題を 2 題解くより，ひとつの問題を 2 通りの方法で解く方が，力がつく．なぜならそのことによって，他の関連した問題が一気に解けるようになるからだ．そういう勉強をしてもらいたい．

本質を見抜いた一般化は，証明を簡明にする．しかし，過度な一般化，機械的な一般化は多くの場合証明が出来ないことが多い．それでも一般的に考えようとすることで問題を大きな枠組のなかで考えることができる．そのうえで個別に解く．こうして**個別と一般を行き来する**ことが大切なのだ．

まず次の問題を普通に解こう．

例題 2.18　［01 慶応理工］

実数 $a,\ b,\ c$ に対し $g(x)=ax^2+bx+c$ を考え，$u(x)$ を $u(x)=g(x)g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ で定義する．

(1) $u(x)$ は $y=x+\dfrac{1}{x}$ の整式 $v(y)$ として表せることを示せ．

(2) 上で求めた $v(y)$ は $-2 \leqq y \leqq 2$ の範囲のすべての y に対して $v(y) \geqq 0$ であることを示せ．

解答 1

(1)

$$\begin{aligned}
g(x)g\left(\frac{1}{x}\right) &= (ax^2+bx+c)\left(\frac{a}{x^2}+\frac{b}{x}+c\right)\\
&= ac\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)+b(a+c)\left(x+\frac{1}{x}\right)+a^2+b^2+c^2\\
&= ac\left(x+\frac{1}{x}\right)^2+b(a+c)\left(x+\frac{1}{x}\right)+(a-c)^2+b^2
\end{aligned}$$

確かに

$$v(y)=acy^2+b(a+c)y+(a-c)^2+b^2$$

と表される．

(2)

$$\begin{aligned} v(-2) &= 4ac-2b(a+c)+(a-c)^2+b^2=(a+c-b)^2 \geqq 0 \\ v(2) &= 4ac+2b(a+c)+(a-c)^2+b^2=(a+c+b)^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

なので, y^2 の係数の符号と軸の位置を考えて場合分けする．

$ac \leqq 0$，または $ac>0$ で $\left|\dfrac{-b(a+c)}{2ac}\right|>2$ なら，$-2 \leqq y \leqq 2$ で $v(y) \geqq 0$ ．

$ac>0$ でかつ $\left|\dfrac{-b(a+c)}{2ac}\right| \leqq 2$ のときは，この条件の下で，$v\left(-\dfrac{b(a+c)}{2ac}\right) \geqq 0$ を示せばよい．

軸の条件は $b^2(a+c)^2 \leqq 16a^2c^2$ となるので

$$\begin{aligned} v\left\{-\frac{b(a+c)}{2ac}\right\} &= -\frac{b^2(a+c)^2-4ac\{(a-c)^2+b^2\}}{4ac} \\ &= \frac{(a-c)^2(4ac-b^2)}{4ac} \geqq \frac{(a-c)^2}{4ac}\left\{4ac-\frac{16a^2c^2}{(a+c)^2}\right\} \\ &= \frac{ac(a-c)^4}{(a+c)^2} \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに題意が示された． □

注意　(2) は $v(y)$ を b で整理すると

$$v(y)=b^2+(a+c)yb+acy^2+(a-c)^2$$

となる． b の二次式と見た判別式は

$$D=(a+c)^2y^2-4\{acy^2+(a-c)^2\}=(a-c)^2(y^2-4)$$

となる．ゆえに $|y| \leqq 2$ なら $D \leqq 0$ となり任意の実数 b に対して $v(y) \geqq 0$ なのだ．これは「より個別性を用いたうまい方法」には違いないし，見つければおもしろいが，なかなか気づくとはかぎらない．

さて，より一般的な方法はないか．考えるヒントは $y=x+\dfrac{1}{x}$ と置いたとき，$|y| \leqq 2$ になるような x はどんなものかということだ．それが判れば， $v(y)=g(x)g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ だから， $v(y)$ の問題を $g(x)$ の問題に還元できる．

解答 2

(1)　$g(x)g(z)$ は明らかに x と z の対称式である．したがってこれは基本対称式 $x+z$ と xz の整式である．$x+z$ と xz で表したものの z に $\dfrac{1}{x}$ を代入する．$g(x)g\left(\dfrac{1}{x}\right)$ は $x+\dfrac{1}{x}$ と $x \cdot \dfrac{1}{x}=1$ の整式となる．つまり $y=x+\dfrac{1}{x}$ の整式として表せる．

(2)　$-2<y<2$ の範囲 y を固定し y_0 とする．

$$y_0=x+\frac{1}{x}$$

となる x を求める．

$$x^2-y_0x+1=0$$

で，判別式 $D=y_0^2-4<0$ であるから，虚数解 α と $\bar{\alpha}$ をもつ．さらに解と係数の関係から $\alpha\cdot\bar{\alpha}=1$ である．

$$v(y_0)=g(\alpha)g\left(\frac{1}{\alpha}\right)=g(\alpha)g\left(\bar{\alpha}\right)$$

g(x) は実数係数の整式であるから

$$g(\alpha)g\left(\bar{\alpha}\right)=g(\alpha)\overline{g(\alpha)}=|g(\alpha)|^2\geqq 0$$

$y_0=\pm 2$ のとき

$$y_0=x+\frac{1}{x}$$

はそれぞれ重解 1 と -1 をもつ．よって，

$$v(\pm 2)=g(\pm 1)g\left(\frac{1}{\pm 1}\right)=g(\pm 1)g(\pm 1)=g(\pm 1)^2\geqq 0$$

となる．

したがって $-2\leqq y\leqq 2$ の範囲のすべての y に対して $v(y)\geqq 0$ であることが示された． □

このように考えれば， $g(x)$ は二次式でなくても，一般の実数係数の多項式で成立する．

もう一つ考えよう．

例題 2.19　［01 京府医大］

次の実数係数の三次式を $f(x)$ とする．

$$f(x)=x^3+px^2+qx+r$$

いま，二つの実数係数の整式 $g(x),\ h(x)$ が次を満たすものとする．

$$f(g(x))=f(h(x))\quad :\quad \text{恒等的に等しい}$$

このとき次のいずれかが成り立つことを示せ．

(1) $g(x),\ h(x)$ ： 恒等的に等しい．

(2) 二つの整式 $g(x),\ h(x)$ はともに定数である．

まず $f(x)$ が三次式であることをそのまま使う解を考えよう．簡単のため必要に応じて $g(x)$ 等を g と書いてよい．

解答 1

$$f(g)-f(h)=(g-h)\{g^2+gh+h^2+p(g+h)+q\}$$

これがすべての x で成立するので，$g-h=0$ か $g^2+gh+h^2+p(g+h)+q=0$ かのいずれかは無数の x で成立する．$g-h=0$ が無数の x で成立するとすれば，$g(x),\ h(x)$ が x の整式なので $g(x),\ h(x)$ は恒等的に等しい．同様に $g^2+gh+h^2+p(g+h)+q=0$ が無数の x で成立し，したがって恒等的に成立するとする．

$g(x),\ h(x)$ の次数が異なる場合，大きい方の次数を $m>0$ とすると $g^2+gh+h^2+p(g+h)+q$ は $2m$ 次の整式である．恒等的に 0 ではあり得ない．

$g(x)$, $h(x)$ の次数が等しい場合，それを m 次として $g(x) = ax^m + \cdots$, $h(x) = bx^m + \cdots$ と置く．このとき

$$g^2 + gh + h^2 + p(g+h) + q = (a^2 + ab + b^2)x^{2m} + \cdots)$$

となる．実数 a, b に対して $a^2 + ab + b^2 > 0$ であるからもし $m \geqq 1$ ならこれが恒等的に 0 になることはない．

ゆえに $m = 0$ で，$g(x)$, $h(x)$ はともに定数である． □

注意　問題は $f(x)$ がこのような形の三次式であることは必要か，ということだ．$a^2 + ab + b^2 > 0$ と同様なことが成り立つために，$g - f$ で割った商の方が偶数次でなければならない．つまり，多項式の次数は奇数でなければならない．

これをふまえて奇数次数の場合の一般的な証明を考えよう．

注意　以下の証明中，もし n が偶数なら方程式 $f(x) = C$ は 2 つの実数解をもつ．よって $g(x) = h(x)$ は言えない．このことを指摘された読者に感謝する．

解答 2

$$f(g) - f(h) = (g - h)\{g^2 + gh + h^2 + p(g+h) + q\}$$

これがすべての x で成立するので，$g - h = 0$ か $g^2 + gh + h^2 + p(g+h) + q = 0$ かのいずれかは無数の x で成立する．$g - h = 0$ が無数の x で成立するとすれば，$g(x)$, $h(x)$ が x の整式なので $g(x)$, $h(x)$ は恒等的に等しい．同様に $g^2 + gh + h^2 + p(g+h) + q = 0$ が無数の x で成立し，したがって恒等的に成立するとする．

$g(x)$, $h(x)$ の次数が異なる場合，大きい方の次数を $m > 0$ とすると $g^2 + gh + h^2 + p(g+h) + q$ は $2m$ 次の整式である．恒等的に 0 ではあり得ない．

$g(x)$, $h(x)$ の次数が等しい場合，それを m 次として $g(x) = ax^m + \cdots$, $h(x) = bx^m + \cdots$ と置く．このとき

$$g^2 + gh + h^2 + p(g+h) + q = (a^2 + ab + b^2)x^{2m} + \cdots)$$

となる．実数 a, b に対して $a^2 + ab + b^2 > 0$ であるからもし $m \geqq 1$ ならこれが恒等的に 0 になることはない．

ゆえに $m = 0$ で，$g(x)$, $h(x)$ はともに定数である． □

例題 2.20

凸 12 角形がある．12 個の頂点から 6 個の頂点を選び凸 6 角形を作る．頂点を区別して数えるものとする．このとき，12 角形とちょうど 3 辺を共有するものはいくつあるか．

多くの場合，次のように場合に分けて数えるだろう．それ自体は間違っていない．しかし，その過程で一体どのようにして 6 個の頂点は選ばれるのか．それをどのように把握すればよいのか，考えてみよう．また，12 を $4n$ にしてもできる方法になっているだろうか，とも考えてみよう．そうすることで，別の方法が見えてくる．

解答の 1 では図を省略するので，図を描いて追認しよう．そしてその上で上記のことを考えよう．

解答 1　3 辺の共有の仕方は

i) 隣りあう 3 辺，ii) 隣りあう 2 辺と独立な 1 辺，iii) 独立した 3 辺

それぞれの場合を計算する．

i)　3 連辺の中央の辺の選び方は 12 通り．これで 4 頂点が決まる．あと 2 頂点は隣りあわない 6 頂点から 2 点選ぶが，それら自身隣りあわないように選ぶので，

$$12({}_6\mathrm{C}_2-5)=120\ (\text{通り}).$$

ii)　2 連辺の中央の頂点で場合分けする．あと 1 辺と 1 頂点をそれぞれ他のものと隣りあわず，2 連辺とも隣りあわないように選ぶ．2 連辺とどれだけ離れているかで場合分け，対称なものが 2 つずつある．

$$12\times(2\times4+2\times3+2\times3)=240\ (\text{通り}).$$

iii)　1 辺を固定し左回りに次の辺をどこにとるかで場合に分け，第 3 の辺のとり方を数える．いずれの辺を固定しても同じなので，これを 3 分の 1 にする．その場合は

$$12\times\frac{1}{3}(4+3+2+1)=40\ (\text{通り}).$$

あわせて $120+240+40=400$ (通り) である．　□

しかしこのように場合に分けなければならないのだろうか．またこのような方法では次の一般化の証明が面倒である．つまり

> 頂点の区別される凸 $4n$ 角形がある．$2n$ 個の頂点を選び凸 $2n$ 角形を作る．もとの $4n$ 角形とちょうど n 辺を共有するものはいくつあるか．

を解こうとすると，数列の和を計算しなければならないことになる．

そこでこのこのような 6 角形はどのように決定されるのか，もういちど考えてみよう．

解答 2　ある頂点をとる．その頂点から 12 角形の辺幾つを越えて 6 角形の頂点をとるかで 6 角形は決定される．その越える辺数を $x,\ y,\ z,\ s,\ t,\ u$ とする．すると題意をみたす 6 角形は

$$x+y+z+s+t+u=12$$

をみたし，6 変数のうちちょうど 3 個が 1，他は 2 以上であるような $x,\ y,\ z,\ s,\ t,\ u$ によって決定される．6 変数のうちどれを 1 にするかが ${}_6\mathrm{C}_3=20$ (通り)．$x,\ y,\ z$ が 2 以上とすると

$$\begin{aligned}&x+y+z=9,\ (x,\ y,\ z\geqq 2)\\ \iff\quad &(x-2)+(y-2)+(z-2)=3,\ (x-2,\ y-2,\ z-2\geqq 0)\end{aligned}$$

となる $x,\ y,\ z$ のとり方だけある．これは重複組合せ ${}_3\mathrm{H}_3={}_5\mathrm{C}_2=10$ (通り)．よってある頂点が 6 角形の頂点に選ばれる場合は $20\times10=200$ (通り)．

このようにして選ばれた 6 点に対し，選ばれなかった 6 点で作られる 6 角形を考える．もとの 6 角形で越える辺数が x のところは，選ばれなかった 6 点で作られる 6 角形では逆に $x-2$ の辺が 12 角形と辺を共有する．あわせて $(x-2)+(y-2)+(z-2)=3$ 個の辺が 12 角形と辺を共有し，これも題意をみたす．よって特定の点が頂点に選ばれない場合も 200 (通り)．あわせて 400 (通り)．　□

（注 1）　最後のところの論証は，次のようにしてもよい．

固定した頂点の選び方 12 通り．総計 12×200 には同じ 6 角形が 6 個ずつある．よって条件を満たす異なる 6 角形は $12\times200\div6=400$ (個) ある．

（注 2）　一般の場合も同様に解ける．確認してほしい．

$$2\times{}_{2n}\mathrm{C}_n\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_{n-1}\ (\text{通り}).$$

2.4.5　問題と考え方

問題

2.24　［02 北大］　考え方 2.24　解答 5.24

(1) 1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち，1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ．

(2) n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ．

2.25　［00 名古屋市大］　考え方 2.25　解答 5.25 n 本のロープがあり，二つ折りにしてロープの端をそろえてある．ロープの端をでたらめに二つずつ選んで結んでいき，1 度結んだ端を 2 度選ばずに, n 個の結び目を作る. n 本のロープがすべてつながって一つの輪ができる確率を $P(n)$ とする．

(1) $P(3)$ を求めよ．

(2) $P(4)$ を求めよ．

(3) $P(n)$ を求めよ．

2.26　［07 名古屋市大］　考え方 2.26　解答 5.26
1 から n までの番号が 1 つずつ書かれた n 枚のカードがある．次の条件を満たすように左から右に n 枚を並べる場合の数を $C(n)$ とする．

条件：1 から n までのすべての自然数 k について，左から k 番目に番号 k のカードがこない．

次の問に答えよ．

(1) $C(4)$ を求めよ．

(2) $C(6)$ を求めよ．

(3) $n \geqq 3$ について，$C(n+2)$ を n，$C(n)$，$C(n+1)$ で表せ．

2.27　［01 九大］　考え方 2.27　解答 5.27
以下の設問に答えよ．

(1) 正の実数 $a,\ b,\ c$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c}$$

(2) 正の実数 x_i $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して次の不等式が成り立つことを証明せよ．

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geqq \frac{n^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

2.28　［01 東工大］　考え方 2.28　解答 5.28

箱の中に 1 から N までの番号が一つずつ書かれた N 枚のカードが入っている．この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して戻すという試行を k 回行う．このとき，はじめから j 回目 $(j=1,\ \cdots,\ k)$ までに取り出したカードの番号の和を X_j とし，$X_1,\ \cdots,\ X_k$ のうちのどれかが k となる確率を $P_N(k)$ とする．

(1) $N \geqq 3$ のとき $P_N(1),\ P_N(2),\ P_N(3)$ を N で表せ．

(2) $P_3(4),\ P_3(5)$ を求めよ．

(3) $k \leqq N$ のとき，$P_N(k)$ を N と k で表せ．

2.29　［04 一橋後期］　考え方 2.29　解答 5.29

n は 3 以上の整数とする．数直線上で，座標が 0 の点を O とし，座標が n の点を C とする．$0<a<b<n$ をみたす整数 $a,\ b$ を無作為に選び，座標が a の点を A，座標が b の点を B とする．線分 OA，AB，BC のうちの最小値を X とする．

(1) $X=2$ である確率を n で表せ．

(2) さらに，n は 3 の倍数とする．X の期待値を n で表せ．

2.30　［大阪市大］　考え方 2.30　解答 5.30

数列 $\{a_n\}$ は条件 $\begin{cases} a_1=1, \\ a_n+(2n+1)(2n+2)a_{n+1}=\dfrac{2(-1)^n}{(2n)!} \end{cases}$ をみたすとする．

(1) a_2, a_3, a_4 をそれぞれ求めよ．

(2) 一般項 a_n を求めよ．

2.31　［01 お茶の水女子大］　考え方 2.31　解答 5.31 $m,\ n$ は自然数として，

$$S(m,\ n)=\{\ p \mid p \text{ は素数}, p \text{ は } 1+n+n^2+\cdots+n^m \text{ の約数}\ \}$$

とおく．以下で $\emptyset$ は空集合を表す．

(1) $S(2,\ 2)$ の要素をすべて書け．

(2) $S(5,\ 2)$ の要素をすべて書け．

(3) $S(3,\ 2)$ の要素をすべて書け．

(4) $S(2,\ n) \subseteq S(5,\ n)$ がすべての自然数 n について成り立つか否か理由をつけて答えよ．

(5) $S(2,\ n) \cap S(3,\ n)=\emptyset$ がすべての自然数 n について成り立つか否か理由をつけて答えよ．

(6) 「どんな $m,\ n$ に対しても $S(2,\ n) \subseteq S(m,\ n)$ または $S(2,\ n) \cap S(m,\ n)=\emptyset$ が成り立つ」という命題は，正しいか否か理由をつけて答えよ．

考え方

2.24　問題 2.24　解答 5.24

(1) は (2) のための準備である．一般的に解くことを念頭に，(1) を考える．個別の場合を樹形図やすべて書き出す方法で解き，一般化で改めて考える人がいるが，それは違う．あくまで 4 桁を n 桁にしてもそのままいける方法を，個別の $n=4$ で考えるのである．

2.25　問題 2.25　解答 5.25

問題の中にヒントがある．(3) を見れば，$\dfrac{P(4)}{P(3)}$ が簡単な形になるはず．それを $n=3$ のときに試してみるというつもりで (1)(2) を解けばよい．$n=3$ や $n=4$ で考えるのだが，そのときに一般的に n で示せるように考えるのだ．(1)(2) を個別に樹形図とかで数えるのではなく，必ず n でも通用する考え方をしよう．

2.26　問題 2.26　解答 5.26

(1)(2) を樹形図で計算するより，n が小さいところからどのように決まっていくかをよく考えよう．ここで一般的な法則性を見抜こう．

2.27　問題 2.27　解答 5.27

$n=3$ の場合に，一般化できるような方法をさがしておくことが大切である．コーシー・シュワルツの不等式の証明法に立ちかえる別解もある．

2.28　問題 2.28　解答 5.28

(3) は (1) の一般化である．(1）の方法をよく見直すことで（3）の方法を考えたい．結局は $x_1+x_2+\cdots+x_j=k$ となる自然数の組の個数が問題であることがわかる．

2.29　問題 2.29　解答 5.29

(2) で期待値を求めるので，$X=k$ の確率が必要である．だから (1) で最小値が 2 ということを，個別に考えるのではなく，すべてが 2 以上の事象からすべてが 3 以上の事象を除いたものとしてとらえよう．これによって (2) が同様に考えることができる．

2.30　問題 2.30　解答 5.30

推測して数学的帰納法で示す典型問題である．

2.31　問題 2.31　解答 5.31

後半が前半の一般化である．前半の論証の根拠をよく考え，そこから一般的方法を見いだしたい．

第3章　論証の推進

3.1　場合分け

なぜ場合分けが必要か　「場合に分ける」ということは，数学のあらゆるところで出てくる.「場合分け」というのはもっとも基本的な数学の方法だ．場合分けは大きくいって二つある．

第一, 考えている対象を式に書きあらわしたり，計算しようとすると，定数の範囲などの条件によって式や計算法を変えなければならないとき．条件を場合に分け，一つ一つが実際に数えたり計算できるように問題を細分する，これが場合に分ける，ということである．

第二, A という集合の個数 $n(A)$ を数えるのに，A をいくつかの互いに共通部分のない集合に分割することで数えるとき．つまり集合 A の要素の個数を $n(A)$ で表すと

$$A = A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_l \quad ,\text{異なる } i \text{ と } j \text{ に対して}, A_i \cap A_j = \emptyset$$

のとき

$$n(A) = n(A_1) + n(A_2) + \cdots + n(A_l)$$

となる．このように $n(A)$ を細分して求めるために場合に分けるのである．

いずれにおいても，大切なことは

(1) 適切な場合分けか．もっといいわけ方はないのか.

(2) 場合分けに抜け落ちがないか，必ず確認する．

(3) 場合分けに重なりがないか，必ず確認する．

第二の場合は特に場合分けに共通部分がないかを確認することが大切である．確率の場合は事象が排反であるかどうかの問題である．もし共通部分があれば，二つに分けた場合でいえば

$$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$$

によって二重に数えた部分を引かなければならない.

(4) 場合に分けて考えたことを最後に総合しているか.

3.1.1　定数の範囲で式が変わる

これらを例題で考えながら，確認していこう.

例題 3.1　［00 京大文系前期］

a を実数とする． x の二次方程式

$$x^2 - ax = 2\int_0^1 |t^2 - at|\,dt$$

は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか．

考え方　まず右辺の定積分を計算しなければならない．被積分関数に絶対値がある．絶対値記号はそれ自身場合分けで定義される記号だ．つまり

$$|a| = \begin{cases} a & (a \geqq 0) \\ -a & (a < 0) \end{cases}$$

したがって次の所からはじめることになる．

解答

$$|t^2 - at| = \begin{cases} t^2 - at & (t^2 - at \geqq 0) \\ -t^2 + at & (t^2 - at < 0) \end{cases}$$

である．一方，積分域は $0 \leqq t \leqq 1$ である．t がこの範囲を動くとき，途中で $t^2 - at$ の符号が変わるか変わらないかは a の範囲によって決まる．a の範囲によって積分計算は次のように区間に分けねばならない．

$$2\int_0^1 |t^2 - at|\,dt = \begin{cases} 2\displaystyle\int_0^1 (t^2 - at)\,dt & (a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ 2\displaystyle\int_0^a (-t^2 + at)\,dt + 2\displaystyle\int_a^1 (t^2 - at)\,dt & (0 < a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ 2\displaystyle\int_0^1 (-t^2 + at)\,dt & (1 < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

である．積分を計算して

$$2\int_0^1 |t^2 - at|\,dt = \begin{cases} -a + \dfrac{2}{3} & (a \leqq 0 \text{ のとき}) \\ \dfrac{2}{3}a^3 - a + \dfrac{2}{3} & (0 < a \leqq 1 \text{ のとき}) \\ a - \dfrac{2}{3} & (1 < a \text{ のとき}) \end{cases}$$

となる．そこで，

$$f(x) = x^2 - ax - 2\int_0^1 |t^2 - at|\,dt$$

とおく． 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ の端の値 $f(0)$，$f(1)$ の符号を調べる．

(i) $a \leqq 0$ のとき

$$\begin{aligned} f(0) &= -\left(-a + \frac{2}{3}\right) = a - \frac{2}{3} < 0 \\ f(1) &= 1 - a - \left(-a + \frac{2}{3}\right) = \frac{1}{3} > 0 \end{aligned}$$

よって $0 \leqq x \leqq 1$ における解は 1 個．

(ii) $0 < a \leqq 1$ のとき

$$\begin{aligned} f(0) &= -\left(\frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}\right) = -\frac{1}{3}(2a^3 - 3a + 2) \\ &= -\frac{1}{3}\{a^3 + (a-1)^2(a+2)\} < 0 \\ f(1) &= 1 - a - \left(\frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3}\right) = -\frac{2}{3}\left(a^3 - \frac{1}{2}\right) \end{aligned}$$

よってこの場合はさらに場合分けされる．$f(1)$ の値が 0 以上なら 1 個，0 未満なら 0 個である．

$$\begin{cases} 1\text{ 個} & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{\sqrt[3]{2}}\right) \\ 0\text{ 個} & \left(\dfrac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \leqq 1\right) \end{cases}$$

(iii) $1 < a$ のとき

$$\begin{aligned} f(0) &= -a + \frac{2}{3} < 0 \\ f(1) &= 1 - a - \left(a - \frac{2}{3}\right) = -2a + \frac{5}{3} < 0 \end{aligned}$$

よって $0 \leqq x \leqq 1$ における解は 0 個.

以上から与方程式の $0 \leqq x \leqq 1$ における解は

$$a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\text{のとき 1 個，}\quad \frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a\text{ のとき 0 個}$$

となる． □

注意

(1) このように場合分けでは**まず場合分けを済ます**ことが大切だ．上の一つ一つについて，その場で計算する人もいるが，先に全体の場合分けを済ますこと．

(2) a の範囲の境界での等号はいずれにつけてもよい．境界ではいずれの式で計算しても同じ値になる．

3.1.2 個数を数える場合分け

こんどは個数を数える場合分けをやってみよう．ていねいに場合分けをしていこう．

例題 3.2 ［鳥取大過去問］

ある試験において，20 点満点の問題が 5 題出題されている．各問いとも 0 点，5 点，10 点，15 点，20 点のいずれかで全部を採点するものとする．

(1) おこりうる採点の仕方はいく通りあるか．

(2) 少なくとも 3 問が正解である場合はいく通りあるか．

(3) 総得点が 80 点以上である場合はいく通りあるか．

解答

(1) 各問いとも 5 通りの採点の仕方があるから

$$5^5 = 3125(\text{通り})$$

(2) 正解の個数で場合に分けて考えよう.

5 問とも正解になるのは，1（通り）

4 問正解になるのは

［どの 4 問かの決め方］×［他の 1 問の採点の仕方］（通り）

$$\therefore \quad {}_5\mathrm{C}_4 \cdot 4 = 20\ (\text{通り})$$

同様に 3 問正解になるのは

$$\therefore \quad {}_5\mathrm{C}_3 \cdot 4^2 = 160\ (\text{通り})$$

あわせて

$$1 + 20 + 160 = 181\ (\text{通り})$$

(3) まずどのような場合分けが必要かを考えよう．得点で考えるのがよいか．減点で考えるのがよいか.

問題 1〜問題 5 の各々から減点される点数を $5x_1, \cdots, 5x_5$ とする.

$$0 \leqq 5x_1 + \cdots + 5x_5 \leqq 20 \iff 0 \leqq x_1 + \cdots + x_5 \leqq 4$$

となる非負の整数 $x_1, \cdots, x_5$ の取り方の総数が求めるものである.

条件 $0 \leqq x_1, \cdots, x_5 \leqq 4$ は $0 \leqq x_1 + \cdots + x_5 \leqq 4$ なら必然的に満たされる.

$$x_1 + \cdots + x_5 = k,\ k = 0, \cdots 4$$

のとき $x_1, \cdots, x_5$ の取り方の総数は

$${}_{k+5-1}\mathrm{C}_4$$

それぞれの場合の計算式ができた．この場合分けはもちろん重なりがない．よって

$${}_8\mathrm{C}_4 + {}_7\mathrm{C}_4 + \cdots + {}_4\mathrm{C}_4 = 126$$

となる. □

別解　工夫をすれば場合分けが必要でなくなる.

$$0 \leqq x_1 + \cdots + x_5 \leqq 4$$

となる非負整数の組 $(x_1, \cdots, x_5)$ に対し $x_6 = 4 - (x_1 + \cdots + x_5)$ とすると

$$x_1 + \cdots + x_5 + x_6 = 4$$

となる非負整数の組 $(x_1, \cdots, x_5,\ x_6)$ が得られる.

逆に

$$x_1+\cdots+x_5+x_6=4$$

となる非負整数の組 $(x_1, \cdots, x_5,\ x_6)$ から

$$0 \leqq x_1+\cdots+x_5 \leqq 4$$

となる非負整数の組 $(x_1, \cdots, x_5)$ が得らる．

よってこれらはは 1 対 1 に対応している．

$$0 \leqq x_1+\cdots+x_5 \leqq 4$$

となる非負整数の組 $(x_1, \cdots, x_5)$ と

$$x_1+\cdots+x_5+x_6=4$$

となる非負整数の組 $(x_1, \cdots, x_5,\ x_6)$ は同じだけある．

$$\therefore\quad {}_{4+6-1}\mathrm{C}_4=126$$

である． □

次の問題はどのような場合分けが必要かはそれほど明らかではない．

例題 3.3　［08 京大文系］

正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする，F 上の点 P に対して，始点と終点がともに P であるような，図形 F の一筆がきの経路の数を $N(\mathrm{P})$ で表す．正 n 角形の頂点をひとつとって A とし，$a=N(\mathrm{A})$ とおく．また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし，$b=N(\mathrm{B})$ とおく．このとき a と b を求めよ．

注：一筆がきとは，図形を，かき始めから終わりまで，筆を紙からはなさず，また同じ線上を通らずにかくことである．

考え方　このようなときは「例で考える」にしたがって，n の値を 4 や 5 で考えてみるのも一つの方法である．頂点から頂点に移動するには辺と弧のいずれを先に描くかで 2 通り．それに気づけば，結局頂点をどの順に動いていくかという問題だということがわかる．(2) では，頂点間の移動が辺と弦の両方通れるときと，一方しか通れないときがあることと，ここにも場合分けの要素がこのようにあることがわかる．

一方，n のときの場合の数を a_n や b_n とおいて漸化式を立て求めることもできる..

解答　$a=N(\mathrm{A})$ について．一筆がきの経路に関する場合分けは次の様に起こる．

(i) 頂点から隣りあう頂点への移動は n カ所あり，それぞれ移り方は辺と弧のいずれを先に通るかの 2 通り．したがって，頂点の間の移動の順を決めれば，それに対して経路は 2^n 通りできる．

(ii) 点の間の移動順では，右回りから始めるか，左回りから始めるかが場合分けされる．これは対称性からたがいに同数あるので，左回りからはじめる場合で考えその 2 倍ある．

(iii) 左回りからはじめるときで考える．点の間の移動順では，途中で折り返さないか途中で折り返すかの場合に分けられる．折り返さない場合は1通り．折り返す場合．2回折り返すのはA以外で折り返すとき．Aで折り返すときは1回折り返す．したがって折り返しなしも含めて，折り返しの仕方は $n+1$ 通り．

これらはそれぞれ異なる一筆がきを作り，場合分けは他にはない．

$$\therefore \quad a = 2^n \cdot 2 \cdot (n+1) = (n+1)2^{n+1}$$

$b = N(\mathrm{B})$ について．

点Bのある辺をCDとする．左回りにC，B，Dと並ぶものとする．

点Bに始まり点Bに終わる一つの一筆がきに対し，左回りなら最初のBDを書くところを最後に移動することでDから始まる一筆がきで，最後にDに戻るとき辺を通るものが得られる．右回りなら最初のBCを書くところを最後に移動することでCから始まる一筆がきで，最後にCに戻るとき辺を通るものが得られる．逆にこの操作を逆にたどることで，頂点を始点とする一筆がきで最後に始点に戻るとき辺を通るものから，その辺の中点を始点とする一筆がきが得られ，これは一対一に対応している．

したがって，b は頂点から始まる一筆がきで，最後に始点に戻るとき辺を通ると指定した場合の数に等しい．この条件を付け加えた頂点を始点とする一筆がきは a の計算で (i) の部分を 2^{n-1} としたものである．

$$\therefore \quad b = (n+1)2^n$$

以上である． □

別解　正 n 角形の代わりに凸な n 角形で考えても同じことである．

n 角形のときの a を a_n とする．$n=3$ のとき，左回りと決めると a_3 は点の移動の順番の決め方が4通りある．一つの順番に対し，辺と弧の選び方は 2^3 通りある．右回りも同数．ゆえに $a_3 = 2 \cdot 4 \cdot 2^3 = 64$ である．

n 角形に新たに $n+1$ 番の頂点を加えると，その頂点を挟むもとの n 角形の2頂点の間の移動の仕方が，2通りから4通りになる．これによって n 角形の場合の一つの一筆がきの経路に対し，$n+1$ 角形の場合の一筆がきの経路が2つ得られる．

さらに新たに付け加わった $n+1$ 番目の点で折り返す一筆がきの経路が右回りと左回りも考えて $2 \cdot 2^{n+1}$ 個できる．ゆえに

$$a_{n+1} = 2a_n + 2 \cdot 2^{n+1}$$

これから

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}} = \frac{a_n}{2^n} + 2$$

$$\therefore \quad \frac{a_n}{2^n} = \frac{a_3}{2^3} + 2(n-3)$$

これを整理して，$a_n = (n+1)2^{n+1}$．

同様に n 角形のときの b を b_n とする．$n=3$ のとき，左回りと決めると b_3 も点の移動の順番の決め方は4通りある．一つの移動の型に対し，Bのある辺は，一筆がきの最初と最後が辺を通り，途中では弧を通ることが決まるので，2^2 通りある．$b_3 = 2 \cdot 4 \cdot 2^2 = 32$ である．

n 角形に新たに $n+1$ 番の頂点を加えると，その頂点を挟むもとの n 角形の2頂点の間の移動の仕方が，2通りから4通りになる．これによって n 角形の場合の一つの一筆がきの経路に対し，$n+1$ 角形の場合の一筆がきの経路が2つ得られる．

さらに新たに付け加わった $n+1$ 番目の点で折り返す一筆がきの経路が右回りと左回りも考えて $2\cdot 2^n$ 個できる．ゆえに

$$b_{n+1}=2b_n+2\cdot 2^n$$

これから，$b_n=(n+1)2^n$． □

3.1.3 問題と考え方

問題

3.1 ［作成問題］ 考え方 3.1 解答 5.32

$a,\ b,\ c$ は実数の定数である． x に関する次の各方程式を解け.

(1) $ax=b$

(2) $a(a+1)x=a+1$

(3) $b(ax-b)=a(a-bx)$

(4) $a^2(x-1)+a(x+4)=2x+3$

(5) $(a-1)(a-4)x=a-2(x+1)$

(6) $a^2(x-a)+b^2(x+b)=2abx$

(7) $ax^2+bx+c=0$

3.2 ［作成問題］ 考え方 3.2 解答 5.33

$f(x)=x^2-2ax+b$ とする．解が次のようになるための $a,\ b$ の条件を求めよ.

(1) $f(x)=0$ が $0\leqq x\leqq 1$ に二つの解 (重解の場合を含む) をもつ.

(2) $f(x)=0$ が $0<x<1$ に二つの解 (重解の場合を含む) をもつ.

(3) $f(x)=0$ が $0\leqq x\leqq 1$ にちょうど一つの解 (重解の場合を含まない) をもつ.

(4) $f(x)=0$ が $0<x<1$ にちょうど一つ解 (重解の場合を含まない) をもつ.

(5) $f(x)=0$ が $0\leqq x\leqq 1$ に解をもつ.

(6) $f(x)=0$ が $0<x<1$ に解をもつ.

3.3 ［87 高崎経済大］ 考え方 3.3 解答 5.34

次の不等式をみたす点 $(x,\ y)$ の存在する範囲を図示せよ.

$$\log_x y+2\log_y x\leqq 3$$

3.4 ［98 京大文系前期］ 考え方 3.4 解答 5.35

$a,\ b$ は実数で $a\neq b,\ ab\neq 0$ とする．このとき不等式

$$\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}>\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}$$

を解け.

3.5　［00 阪大文系］　考え方 3.5　解答 5.36

関数 $f(x)=x-2+3|x-1|$ を考える．$0 \leqq x \leqq 2$ の範囲で，関数

$$g(x)=\left|\int_0^x f(t)\,dt\right|+\left|\int_x^2 f(t)\,dt\right|$$

の最大値を求めよ．

3.6　［埼玉大過去問改題 (2)(4) 追加］　考え方 3.6　解答 5.37

1，2，3 の数字のみでできた n 桁の整数で，同じ数字が隣り合わないものを要素とする集合を $M(n)$ とする．また $M(n)$ の要素のなかで数字 1 をちょうど k 個含む整数の個数を $a(n,\ k)$ とおく．

(1) $M(3)$ を求めよ．

(2) $M(n)$ の要素の個数を求めよ．

(3) $a(n,\ 0)$，$a(n,\ 1)$ および $a(n,\ 2)$ を求めよ．

(4) $a(n,\ k)$ を求めよ．ただし $n \geqq k+3$ とする．

3.7　［04 三重大後期］　考え方 3.7　解答 5.38

自然数 $1, 2, 3, \cdots$ 全体を二つ以上のグループに分けることを考える．ただし各グループは無限に多くの自然数を含み，それらが等差数列を成しているものとする．

(1) 各グループには，$n,\ n+1$ のような連続する自然数が含まれないことを示せ．

(2) 自然数全体を二つのグループに分けるときの，その分け方を求めよ．

(3) 自然数全体を三つのグループ A，B，C に分けるものとし，1，3 が A に，2 が B にそれぞれ入っているものとする．このとき 4，5，6 がそれぞれどのグループに入るか述べ，それを証明せよ．

(4) 自然数全体を三つのグループに分けるときの，その分け方をすべて求めよ．

3.8　［06 群馬大医］　考え方 3.8　解答 5.39

n は自然数とし，$(x,\ y,\ z)$ は空間の点とする．

(1) $x,\ y,\ z$ を $2n$ 以下の自然数とするとき，$x \leqq 2y \leqq z$ を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ．

(2) $x,\ y,\ z$ を $6n$ 以下の自然数とするとき，積 xyz が 6 の倍数である点 $(x,\ y,\ z)$ の個数を求めよ．

3.9　［08 東工大理特 II1］　考え方 3.9　解答 5.40

正四面体を、底面に平行な $(n-1)$ 枚の平面で高さを n 等分するように切る．残りの面に関しても同様に切ると正四面体は幾つの部分に分かれるか，個数を求めよ．

考え方

3.1　問題 3.1　解答 5.32

文字係数の方程式の解は，あらゆるところに現れる基本事項である．(1) と (7) は特に重要である．解がどのように場合分けられるのか，第一の場合分けは最高次の項の係数が 0 であるか否かによるが，その上で他の項の係数の場合分けがどのように進むのかよく考えておこう．

3.2　問題 3.2　解答 5.33

2 次方程式の解の配置を軸によって場合分けすることも，高校数学の基本事項である．(5)，(6) はこれをもとに区間に解が存在する条件を場合分けをあわせて定める問題である．

3.3　問題 3.3　解答 5.34

底をそろえたうえで，不等式の同値変形をおこない，対数の範囲を求める．対数不等式から底の範囲を考慮して場合分けし，真数に関する不等式を導く．

3.4　問題 3.4　解答 5.35

これはひたすら同値変形と場合分けという問題である．移項して通分すると 2 次の分数不等式になる．どの部分から場合分けしていけばよいのかをよく考えることが大切である．

3.5　問題 3.5　解答 5.36

絶対値のある定積分を絶対値が挟むという形である．内の関数を場合分けして絶対値を外し，その上で x の範囲で場合分けして定積分する．その後得られた関数の外側の絶対値を外せばよい．

3.6　問題 3.6　解答 5.37

(1) は辞書式に書き出す．(3) は (4) を見越して一般化できる場合分けを考える．1 の位置で場合分けする．抜けなく重なりなく場合に分けるにはどうするかを考えよう．

3.7　問題 3.7　解答 5.38

はじめの方の数の入り方をどこまで決めればすべて決まるか，それが問題である．それぞれ，他にはあり得ないことを論述しなければならない. (4）ではそれまでの論証を補いながら，どこで決定されるかを考えそれを示してゆく．

3.8　問題 3.8　解答 5.39

場合に分けて個数を数える．どの文字について場合分けするか．これが第 1 の問題．次に，後半はどのような場合分けをすれば，抜けなく重なりなく数えられるか．6 の倍数であることは 6 で割った余りと関係しないのではないか．ならば余りによる場合分けも考えられる．

3.9　問題 3.9　解答 5.40

どのような形の立体からなっているかを考え，その他にはないことを示していけばよい．その上で実際の個数の計算では，階差数列で考えるのが整理されていて考えやすい．

3.2　必要と十分

考える方法としての必要条件　「何々が成立する条件を求めよ」といわれればこれはもちろん必要十分条件を求めなければならない．簡単な場合は同値変形を繰り返していけばよい．しかしそれが簡単ではない場合，もう少し大がかりにしなければならない．それが「必要条件で絞ったものを個別に確認する」ということである．

何らかのものを求める過程で，必要条件で探す範囲を絞るということが重要になる．

また，何らかの必要十分条件を求めるのに，まず必要条件を求め，それでほぼ条件が確定したなら，次にそれが十分条件でもあることを示す．

このようにして論証を進めることも人間の自然な発想である．このような方法を目的意識をもって用いることが大切である．

3.2.1　必要条件で絞り十分性を確認する

「変数が一定の定義域を動くときつねに何かが成り立つための定数に関する条件を求める」問題で，

(1) その条件 (例えば $x \geqq y \geqq 0$) 特別な場合 (例えば 1，1 など) でいったん条件を求める．

(2) その求まった条件がすべての x と y で成り立つ十分条件でもあることを示す．

とすることが有効なときがある．この方法を「**必要条件で絞る**」という．

整数問題などでは，条件を満たすすべての整数や整数の組を求める問題では，何らかの必要条件で範囲を絞ることが出来れば，その範囲にある整数は有限個となり，後は一つ一つ調べるという方法が基本である．

例題 3.4

$x \geqq y \geqq 0$ をみたすすべての $x,\ y$ に対して $ax+by \geqq 0$ が成り立つために，定数 $a,\ b$ がみたすべき条件を求めよ．

考え方　一定の条件を満たすすべての x と y に対してつねに成立する条件を求めよということだが，すべてで成立するものを直接さがすのは困難なときがある．

そのときどうするか．いくつかの特別な x と y の値で試してみるだろう．条件を決めるべき定数は a と b の二つなのだから，二組の x と y の値で試せばある程度のことはわかる．

それから逆にその条件の下でつねに成立することを示せばよい．それが次の解答だ．

解答　$x=1,\ y=0$ のとき

$$ax+by=a \geqq 0$$

$x=1,\ y=1$ のとき

$$a+b \geqq 0$$

逆に $a+b \geqq 0$ かつ $a \geqq 0$ とする．

$$ax+by=a(x-y)+(a+b)y$$

$x-y \geqq 0,\ y \geqq 0$ より

$$ax+by \geqq 0$$

以上から, 求める条件は

$$\begin{cases} a+b \geqq 0 \\ a \geqq 0 \end{cases}$$

である. □

例題 3.5　［09 一橋大］

2 以上の整数 $m,\ n$ は $m^3+1^3=n^3+10^3$ をみたす．$m,\ n$ を求めよ.

考え方　そのまま因数分解し，積のみで場合に分けると場合が多くなる．そこで何らかの方法で範囲を絞りたい．いちばん一般的な方法は，実数条件で絞るというものだ.

あわせて演習問題の［05 京大理系 3.15］で方法を確認しよう.

解答　与関係式から

$$m^3-n^3=(m-n)(m^2+mn+n^2)=10^3-1=3^3\cdot 37$$

である．ここで $u=m-n,\ v=m^2+mn+n^2$ とおく．$m^3>n^3$ より $u>0,\ v>0$ である.

$u^2=m^2-2mn+n^2$ であるから $v-u^2=3mn$．つまり $m(-n)=\dfrac{u^2-v}{3}$.

したがって m と $-n$ は 2 次方程式

$$t^2-ut+\frac{u^2-v}{3}=0$$

の 2 つの解である．m と n は実数であることが必要なので，判別式を D とおくと

$$D=u^2-\frac{4(u^2-v)}{3}\geqq 0$$

これから $4v\geqq u^2$　$\cdots$①を得る.

$3^3\cdot 37=uv$ となる $u,\ v$ のうち，条件①を満たし，かつ $m(-n)=\dfrac{u^2-v}{3}$ が整数となるものは

$$(u,\ v)=(3,\ 333),\ (9,\ 111)$$

である．それぞれ $m(-n)=-108,\ -10$ である.

$m-n=3,\ m(-n)=-108$ のとき，$m,\ -n$ は

$$t^2-3t-108=0$$

の 2 つの解．$\therefore (m,\ -n)=(12,\ -9)$.

$m-n=9,\ m(-n)=-10$ のとき，$m,\ -n$ は

$$t^2-9t-10=0$$

の 2 つの解．$\therefore (m,\ -n)=(10,\ -1)$.

$m,\ n$ が 2 以上の解となるのは次の組のみである.

$$\therefore\quad (m,\ n)=(12,\ 9)$$

他の絞り方

$m^3+1^3=n^3+10^3$ で $n \geqq 2$ なので $m \geqq 11$ が必要である．その結果

$$m^2+mn+n^2 \geqq 11^2+11\cdot 2+2^2=147$$

である．これから $m^2+mn+n^2=333,\ 999$ である． □

注意

$$1729=12^3+1^3=9^3+10^3$$

は，**ラマヌジャンのタクシー数**といわれる．

その由来は次のような逸話である．1918 年 2 月ごろ、ラマヌジャンは療養所に入っており、見舞いに来たハーディは次のようなことを言った。

「乗ってきたタクシーのナンバーは 1729 だった。さして特徴のない、つまらない数字だったよ」これを聞いたラマヌジャンは、すぐさま次のように言った。「そんなことはありません。とても興味深い数字です。それは 2 通りの 2 つの立方数の和で表せる最小の数です」 実は、1729 は次のように表すことができる。すなわち、1729 が $A=B^3+C^3=D^3+E^3$ という形で表すことのできる最小の数であることを、ラマヌジャンは即座に指摘したのである。

例題 3.6 ［99 京大後期文系］

3 次関数 $y=x^3+kx$ のグラフを考える．連立不等式 $\begin{cases} y>-x \\ y<-1 \end{cases}$ が表す領域を A とする．A のどの点からも上の 3 次関数のグラフに接線が 3 本引けるための, k についての必要十分条件を求めよ．

考え方 これは京大らしい出題形式である．つまり問題を二つの段階に分割しなければならない．まず，3 次関数 $y=x^3+kx$ のグラフに 3 本の接線が引けるような xy 平面上の領域を確定しなければならない．

その上で，領域 A がそこに含まれるための k に関する条件を求める．そのときに，必要条件で絞り，それが十分条件でもあることを示すのである．

解答 $C : y=x^3+kx$ とする．xy 平面上の点 $(p,\ q)$ から C へ 3 本の接線が引けるために，$p,\ q$ が満たすべき条件を求める．点 $(p,\ q)$ から C への接線の接点の x 座標を t とする．$y'=3x^2+k$ から，C の $x=t$ 上の点における接線は

$$y=(3t^2+k)(x-t)+t^3+kt=(3t^2+k)x-2t^3 \quad \cdots ①$$

である．① が点 $(p,\ q)$ を通るので

$$2t^3-(3t^2+k)p+q=0 \quad \cdots ②$$

このような t が 3 個存在すればよい．② の左辺を $f(t)$ とおく. $f(t)=0$ が相異なる 3 個の実数解をもてばよい．$f'(t)=6t^2-6tp=6t(t-p)$ であるから条件は

$$f(0)f(p)=(q-kp)(q-p^3-kp)<0$$

である．これを満たす点 $(p,\ q)$ の集合を B とする．

$$B=\left\{(x,\ y)|kx<y<x^3+kx \quad \text{または} \quad kx>y>x^3+kx\right\}$$

となる．

求めるべき k の条件は $A \subset B$ となることである．領域 A が第 4 象限にあるので，A の点の x 座標は正である．x が正のとき $kx < x^3 + kx$ なので，B のうち x 座標が正の領域は

$$kx < y < x^3 + kx \quad \cdots ③$$

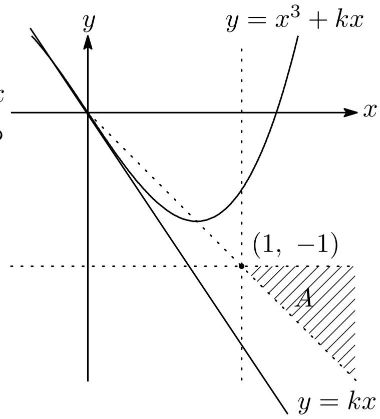
である．③ で定まる領域を B_+ とする．$A \subset B_+$ となる k の条件を求める．点 $(1,\ -1)$ は，領域 A の境界上の点であるので，点 $(1,\ -1)$ が領域

$$kx \leqq y \leqq x^3 + kx$$

を満たすことが必要である．したがって

$$-2 \leqq k \leqq -1 \quad \cdots ④$$

が必要である．



k が ④ を満たすとき C が極小になる x の値は $y' = 3x^2 + k = 0,\ x > 0$ より $x = \sqrt{-\dfrac{k}{3}}$ であるが，④ なので，

$$0 < \sqrt{\frac{1}{3}} \leqq \sqrt{-\frac{k}{3}} \leqq \sqrt{\frac{2}{3}} < 1$$

となる．つまり $x \geqq 1$ において $y = x^3 + kx$ は単調に増加する．この結果 $x \geqq 1$ において

$$-1 < x^3 + kx$$

となり，A は $y < x^3 + kx$ に含まれる．また ④ のとき A が $y > kx$ に含まれることも明らかである．よって領域 A の点は条件 ③ を満たし，A は領域 B_+ に含まれる．つまり，条件 ④ は十分条件であることが示された．

求める必要十分条件は ④ である． □

3.2.2 推論とは必要条件による限定

A ならば B である．このとき，結論 B は A が成立するための必要条件である．このように推論を重ねていくことは，必要条件によって範囲を限定していくことに他ならない．「必要条件で絞る」というと何か特殊な方法のようだが，そうではない．「必要条件」とはもともと「絞って限定する」ものなのだ．

例題 3.7 ［大阪市大過去問］

n を整数とする．「方程式 $x^2 - y^2 = n$ が整数解 (x, y) をもつ」ためには，n が奇数または 4 の倍数であることが，必要かつ十分条件であることを示せ．

解答 整数解をもつとする．それを $(x, y) = (x_0,\ y_0)$ とする．すると，

$$x_0{}^2 - y_0{}^2 = (x_0 + y_0)(x_0 - y_0) = n$$

となる．$x_0+y_0=x_0-y_0+2y_0$ なので， x_0+y_0 と x_0-y_0 の偶数，奇数は一致する．だから，x_0+y_0 が奇数なら n は奇数．x_0+y_0 が偶数なら n は 4 の倍数．つまり必要条件であることがわかる．

これは整数解をもつような n が「奇数または 4 の倍数」に絞られたのだ．n は $2\times$ 奇数 ではあり得ないことがわかったのだ．

逆に，

$n=2k+1$ のときは

$$(k+1)^2-k^2=2k+1$$

なのでたしかに $(x,y)=(k+1,\ k)$ という整数解がある．

$n=4k$ のときは

$$(k+1)^2-(k-1)^2=4k$$

なのでたしかに $(x,y)=(k+1,\ k-1)$ という整数解がある．よって条件「奇数または 4 の倍数」は十分条件でもある． □

例題 3.8　［84 東京工大］

$a,\ b$ を正の整数とする．

(1) $c=a+b,\ d=a^2-ab+b^2$ とおくとき，不等式

$$1<\frac{c^2}{d}\leqq 4$$

が成り立つことを示せ．

(2) a^3+b^3 が素数の整数乗になる $a,\ b$ をすべて求めよ．

必要条件で絞る方法を用いる整数問題の典型だ．どのような必要条件を用いるか．それが小問でヒントとして与えられている．そこで用いられているのは実数条件だ．実数条件だけでも素数が二つに限定されるのだ．

解答

(1)　$d=\left(a-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3b^2}{4}>0$ であるから，

$$d<c^2\leqq 4d$$

を示せばよい．

$$\begin{aligned}
c^2-d &= a^2+2ab+b^2-(a^2-ab+b^2)=3ab>0\\
4d-c^2 &= 4(a^2-ab+b^2)-(a^2+2ab+b^2)\\
&= 3(a-b)^2\geqq 0
\end{aligned}$$

より成立する．

(2)　a^3+b^3 が素数のべきになったとしてそれを

$$a^3+b^3=p^n$$

とおく．一方，$a^3+b^3=(a+b)(a^2-ab+b^2)=cd$ であるから $c=p^k,\ d=p^{n-k}$ とおける．ここで，$c \geqq 2,\ d \geqq 1$ なので，k の範囲は $1 \leqq k \leqq n$ である．ゆえに (1) から

$$1 < p^{3k-n} \leqq 4$$

したがって次の三通りのいずれかである．

$$\begin{aligned} p=2,\ 3k-n=1 \\ p=2,\ 3k-n=2 \\ p=3,\ 3k-n=1 \end{aligned}$$

$p=2,\ 3k-n=1$ のとき．$n=3k-1$ である．したがって $a+b=2^k,\ a^2-ab+b^2=2^{2k-1}$ となる．このとき

$$(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)=2^{2k}-2^{2k-1}=2^{2k-1}$$

であるから，$3ab=2^{2k-1}$．このような k は存在しない．
$p=2,\ 3k-n=2$ のとき．$n=3k-2$ である．したがって $a+b=2^k,\ a^2-ab+b^2=2^{2k-2}$ となる．このとき

$$(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)=2^{2k}-2^{2k-2}=3\cdot 2^{2k-2}$$

であるから，$3ab=3\cdot 2^{2k-2}$．a と b は

$$a+b=2^k,\ ab=2^{2k-2}$$

を満たせばよい．$t^2-2^kt+2^{2k-2}=(t-2^{k-1})^2$ より

$$(a,\ b)=(2^{k-1},\ 2^{k-1}),\ (k \geqq 1)$$

$p=3,\ 3k-n=1$ のとき．$n=3k-1$ である．したがって $a+b=3^k,\ a^2-ab+b^2=3^{2k-1}$ となる．このとき

$$(a+b)^2-(a^2-ab+b^2)=3^{2k}-3^{2k-1}=2\cdot 3^{2k-1}$$

であるから，$3ab=2\cdot 3^{2k-1}$．a と b は

$$a+b=3^k,\ ab=2\cdot 3^{2k-2}$$

を満たせばよい．$t^2-3^kt+2\cdot 3^{2k-2}=(t-2\cdot 3^{k-1})(t-3^{k-1})$ より

$$(a,\ b)=(2\cdot 3^{k-1},\ 3^{k-1}),\ (3^{k-1},\ 2\cdot 3^{k-1}) \quad (k \geqq 1)$$

以上から

$$(a,\ b)=(2^{k-1},\ 2^{k-1}),\ (2\cdot 3^{k-1},\ 3^{k-1}),\ (3^{k-1},\ 2\cdot 3^{k-1}) \quad (k \geqq 1)$$

となる．□

例題 3.9　［01 京大理系］

整数 n に対し

$$f(n)=\frac{n(n-1)}{2}$$

とおき，

$$a_n = i^{f(n)}$$

と定める．ただし，i は虚数単位を表す．このとき，

$$a_{n+k} = a_n$$

が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ．

考え方　この問題はどうだろうか.「どこから手をつけていいかわかりにくい」という声が聞こえる．そのときは $a_{n+k} = a_n$ を同値変形で解きほぐすのだ．まず $f(n)$ は連続二数の積なので必ず整数になる．i は

$$\cdots,\ i^{-2} = -1,\ i^{-1} = -i,\ i^0 = 1,\ i^1 = i,\ i^2 = -1,\ i^3 = -i,\ i^4 = 1,\ \cdots$$

と，べき指数が 4 の倍数のときにかぎり 1 になる．この辺りは前提として必要だ．そして，同値変形を活用して問題を解きほぐすのだ．

解答

$$\begin{aligned} a_{n+k} = a_n \quad &\Longleftrightarrow \quad i^{f(n+k)} = i^{f(n)} \\ &\Longleftrightarrow \quad i^{f(n+k)-f(n)} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad f(n+k) - f(n) \text{ が 4 の倍数} \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{(n+k)(n+k-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \text{が 4 の倍数} \end{aligned}$$

となる．

※　こうなればもう複素数を離れて，整数の問題になった．

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{2} - \frac{n(n-1)}{2} = \frac{k(k+2n-1)}{2} = 4l\ (l \text{ 整数})$$

つまり，任意の整数 n に対してつねに $k(k+2n-1) = 8l$ (l 整数) となればよい．

$n = 0$ のとき $k^2 - k = k(k-1) = 8l$. k と $k-1$ は奇数偶数が逆なので，整数 m を用いて $k = 8m$ か $k = 8m+1$ と書けることが必要．

$n = 1$ のとき $k^2 + k = k(k+1) = 8l$．k と $k+1$ は奇数偶数が逆なので $k = 8m$ か $k = 8m-1$ と書けることが必要．両方成立するのは $k = 8m$．つまり $k = 8m$ が必要．

逆に $k = 8m$ なら $k^2 + (2n-1)k$ は 8 の倍数になる．

$$\therefore\quad k = 8m\ (\ m \text{ は正の整数})$$

□

3.2.3　絞って調べるか，同値変形か

このようにある程度複雑な論証では，必要条件で範囲を絞り，それぞれについて十分性を吟味するということが重要である．しかしまた，問題をよく分析することで，はじめから必要十分な条件を引き出すこともできる．

次の例題を二通りの方法でやってみよう．

例題 3.10　［05 大教大］

(1) 整式 $f(x)=a+bx$ を考える．任意の整数 x に対して，$f(x)$ が整数であるための必要十分条件は「$a,\ b$ がともに整数である」ことを示せ．

(2) 整式 $g(x)=a+bx+cx^2$ を考える．任意の整数 x に対して，$g(x)$ が整数であるための必要十分条件は「$a,\ b+c,\ 2c$ のすべてが整数である」ことを示せ．

(3) 整式 $h(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ を考える．任意の整数 x に対して，$h(x)$ が整数であるための必要十分条件は「$a,\ b+c+d,\ 2c,\ 6d$ のすべてが整数である」ことを示せ．

解法 1

(1)

$$f(0)=a,\ f(1)=a+b$$

がともに整数なので，すべての整数 x で $f(x)$ が整数となるために a と b が整数となることが必要である．逆にこのとき，任意の整数 x に対して $f(x)$ は整数であるのでこれは十分条件でもある．

(2)

$$g(0)=a,\ g(1)=a+b+c,\ g(2)=a+2b+4c$$

が整数となる．これから，$g(1)-g(0)=b+c$，$g(2)-g(1)=b+c+2c$ が整数となるので，$a,\ b+c,\ 2c$ が整数となることが必要である．

十分条件であることを示す．

$b+c=p,\ 2c=q$ とおくと $b=p-\dfrac{q}{2}$，$c=\dfrac{q}{2}$ より

$$\begin{aligned} g(x) &= a+\left(p-\frac{q}{2}\right)x+\frac{q}{2}x^2 \\ &= a+px+q\cdot\frac{x(x-1)}{2} \end{aligned}$$

となる，整数 x に対し $\dfrac{x(x-1)}{2}$ は整数なので，すべての整数 x に対し $g(x)$ は整数となることが示された．

(3) 同様に

$$h(0)=a,\ h(1)=a+b+c+d,\ h(2)=a+2b+4c+8d,\ h(-1)=a-b+c-d$$

が整数である．これから $h(1)-h(0)=b+c+d$，$h(1)+h(-1)=2(a+c)$，$h(2)-2(b+c+d)=a+2c+6d$ が整数である．よって $a,\ b+c+d,\ 2c,\ 6d$ は整数であることが必要である．

十分条件であることを示す．

$b+c+d=p,\ 2c=q,\ 6d=r$ とする．$d=\dfrac{r}{6}$，$c=\dfrac{q}{2}$，$b=p-\dfrac{q}{2}-\dfrac{r}{6}$ なので，

$$\begin{aligned} h(x) &= a+\left(p-\frac{q}{2}-\frac{r}{6}\right)x+\frac{q}{2}x^2+\frac{r}{6}x^3 \\ &= a+px+q\cdot\frac{x(x-1)}{2}+r\cdot\frac{(x-1)x(x+1)}{6} \end{aligned}$$

整数 x に対し $\dfrac{(x-1)x(x+1)}{6}$ は整数なので，すべての整数 x に対し $g(x)$ は整数となることが示された． □

解法 2

(1) 一般に，整式 $f(x)$ がすべての整数 x に対して整数値をとるための必要十分条件は，$f(0)$ が整数であり，かつ階差 $f(x+1)-f(x)$ がすべての整数 x に対して整数値をとることである．
よって $f(x)=a+bx$ のとき

$$\begin{aligned} & \text{整式 } f(x) \text{ が任意の整数 } x \text{ に対して整数値をとる．} \\ \iff\ & f(0)=a,\ f(x+1)-f(x)=b \text{ が整数} \end{aligned}$$

である．

(2) 同様に $g(x)=a+bx+cx^2$ のとき

$$\begin{aligned} & \text{整式 } g(x) \text{ が任意の整数 } x \text{ に対して整数値をとる．} \\ \iff\ & g(0)=a,\ g(x+1)-g(x)=(b+c)+2cx \text{ が整数} \\ \iff\ & a,\ b+c,\ 2c \text{ が整数 } (\because\ (1)) \end{aligned}$$

である．

(3) 同様に $h(x)=a+bx+cx^2+dx^2$ をのとき

$$\begin{aligned} & \text{整式 } h(x) \text{ が任意の整数 } x \text{ に対して整数値をとる．} \\ \iff\ & h(0)=a,\ h(x+1)-h(x)=(b+c+d)+(3d+2c)x+3dx^3 \text{が整数} \\ \iff\ & a,\ b+c+d,\ 3d+(3d+2c),\ 2\cdot 3d \text{ が整数 } (\because\ (2)) \\ \iff\ & a,\ b+c+d,\ 2c,\ 6d \text{ が整数} \end{aligned}$$

である． □

3.2.4 問題と考え方

問題

以下の 3 題はともに,「必要条件で絞る」ことをせずに他の方法でも求まる．いろいろと考えてほしい．

3.10 ［97 一橋大］ 考え方 3.10 解答 5.41
すべての正の整数 n に対して 5^n+an+b が 16 の倍数となるような 16 以下の正の整数 $a,\ b$ を求めよ．

3.11 ［97 お茶の水大］ 考え方 3.11 解答 5.42
どんな正の数 $x,\ y$ に対しても不等式

$$(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4)$$

が成り立つような c の範囲を求めよ．

3.12　［94 阪大文理前期］　考え方 3.12　解答 5.43

どのような自然数 n に対しても $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1)$ が常に n で割り切れるような整数 a, b の組 (a, b) は

$$0 < a \leqq 6m \text{ かつ } 0 < b \leqq 6m \text{ (ただし } m \text{ は自然数)}$$

の範囲に全体で何組あるか．その個数を m で表わせ．

3.13　［04 京大理系前期］　考え方 3.13　解答 5.44

行列 $A,\ B$ を

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ 0 & \beta \end{pmatrix}$$

とする．次の条件 (＊) が成り立つための実数 $\alpha,\ \beta$ についての必要十分条件を求めよ．

(＊) どんな 2 次正方行列 Y に対しても，2 次正方行列 X で $AX - XB = Y$ となるものがある．

3.14　［01 千葉］　考え方 3.14　解答 5.45

自然数 $x,\ y$ を用いて $p^2 = x^3 + y^3$ と表せるような素数 p をすべて求めよ．また，このときの $x,\ y$ をすべて求めよ．

3.15　［05 京大理系前期］　考え方 3.15　解答 5.46

$a^3 - b^3 = 217$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ．

考え方

3.10　問題 5.41　解答 5.41

すべての自然数で成立するので，まずいくつかの整数を代入してみればよい．文字が 2 個入っているので二つの値を代入する．これで必要条件を出す．十分性を確認する．いろいろな解法あり．ぜひ考えておこう．

3.11　問題 5.42　解答 5.42

すべての正数で成立する．x と y に関して成立する．また x と y の対称式である．$x = y$ のときも成立しなければならない．これで得られる条件に関して十分性を調べてみよう．直接示すことができないかも研究しよう．

3.12　問題 5.43　解答 5.43

すべての整数で成立するので，まずいくつかの整数を代入してみればよい．文字が 2 個入っているので二つの値を代入する．これで必要条件を出す．十分性を確認する．いろいろな解法あり．ぜひ考えておこう．

3.13　問題 5.44　解答 5.44

このような論証は必要条件と十分条件を分けよう．成立すべき条件を同値変形する．その上で必要条件から決めていけばよい．

3.14　問題 3.14　解答 5.45

x^3+y^3 を因数分解する．p は素数である．それから因数分解された因数の値がいくつかの場合しかないことがわかる．そこで，x と y の対称性に注目しよう．それなら x と y が整数であるために，まず実数であることが必要だ．これで p の範囲を絞りたい．

3.15　問題 3.15　解答 5.46

右辺の因数分解が簡単になるので，あらゆる場合を調べてもよい．しかし，実数条件で絞っておくことができれば場合分けも少しになる．

3.3　数学的帰納法

数学的帰納法の原理　「数学的帰納法」はよく知っている言葉だが，ではその中にある「帰納」とはどういう意味なのだろうか.「帰納」は「演繹」という言葉と対になっている.「帰納」とは多くの例を調べその間になり立つ法則を推測してきっとこうに違いなという「仮説」を立てることだ.「演繹」は，成立することがわかっている一般的な命題をもとに，具体的，個別的な命題を推論によって証明することをいう.

では「数学的帰納法」とは何か．自然数を含む数学的事柄がどのようになっているかを知りたいとき，

(1) 1 のときはこうだ，2 のときはこうだと調べていって

(2) n のときもこうに違いないと推測して仮説を立て，

(3) $n=1$ で成立する．$n=k$ で成立すれば $n=k+1$ でも成立する．ゆえに任意の n で成立することを証明する．

というのが普通のやり方だ．この (3) の部分の証明方法のことが「数学的帰納法」である．このような証明法が可能な根拠は自然数の次の性質による．

> 自然数の部分集合 A が次の性質をもっているとする．
>
> $$1 \in A,\ \text{かつ}\ k \in A \Rightarrow k+1 \in A$$
>
> このとき集合 A は自然数の集合 Z と一致する．

数学的帰納法では A は命題の成立する番号の集合である．A が上の性質が成り立つことを示すことで，A が自然数の全体に一致し，したがってすべての自然数でその命題が成立する，これが数学的帰納法の原理だ.

入試問題では，(1)〜(3) 全体が問題になることもあれば，仮説は提示して (3) の部分の論証だけが問題になることもある．この (3) の部分の証明法は，この通りの形である必要はなく，いくつかの応用形がある．まずそれを確認しよう．

$p(n)$ を自然数 n に関する条件とする．

「すべての自然数 n に対し条件 $p(n)$ が成立する」ことを証明する方法としての数学的帰納法の主な型は次の三つである．

(1) ［基本型］

(i) $p(1)$ が成立する.

(ii) $p(k)$ が成立するなら $p(k+1)$ が成立する.

(iii) (1), (2) より, すべての n に対して $p(n)$ が成立する.

(2) ［応用型 1］

(i) $p(1),\ p(2)$ が成立する.

(ii) $p(k-1),\ p(k)$ が成立するならば $p(k+1)$ が成立する.

(iii) (1), (2) より, すべての n に対して $p(n)$ が成立する.

(3) ［応用型 2］

(i) $p(1)$ が成立する.

(ii) $p(1),\ p(2),\ \cdots,\ p(k)$ が成立するなら $p(k+1)$ が成立する.

(iii) (1), (2) より, すべての n に対して $p(n)$ が成立する.

いずれの型で証明しようとしているのか，はっきりさせて論述しなければならない.

3.3.1 変形型数学的帰納法

応用型を簡単な例題で確認しておこう.

例題 3.11 ［出典不明］

$\alpha+\beta$ ，$\alpha\beta$ が整数のとき，任意の自然数 n に対して

$$\sum_{r=0}^{n} \alpha^{n-r}\beta^{r}$$

は整数であることを示せ.

考え方 これを数学的帰納法で示そうとして $n=1$ のときの成立を確認し，$n=k$ での成立を仮定して $n=k+1$ のときの成立を示そうと計算すると

$$\begin{aligned} & \alpha^{k+1}+\alpha^{k}\beta+\cdots+\alpha\beta^{k}+\beta^{k+1} \\ = \; & (\alpha+\beta)(\alpha^{k}+\alpha^{k-1}\beta+\cdots+\beta^{k})-\alpha\beta(\alpha^{k-1}+\alpha^{k-2}\beta+\cdots+\beta^{k-1}) \end{aligned}$$

となる．仮定したのは $n=k$ のときなので，第二のかっこ内が整数である保証がない．このようなときは［応用型 1］になる．つまり次のようにする.

解答

数学的帰納法で示す.

(1) $n=1$ のとき $\displaystyle\sum_{r=0}^{1} \alpha^{n-r}\beta^{r}=\alpha+\beta$ で成立.

$n=2$ のとき

$$\sum_{r=0}^{2} \alpha^{n-r}\beta^{r}=\alpha^{2}+\alpha\beta+\beta^{2}=(\alpha+\beta)^{2}-\alpha\beta$$

で成立.

(2) $n=k,\ k+1$ で成立するとする.

$$
\begin{aligned}
&\sum_{r=0}^{k+2}\alpha^{n-r}\beta^{r}\\
=&\ \alpha^{k+2}+\alpha^{k+1}\beta+\cdots+\alpha\beta^{k+1}+\beta^{k+2}\\
=&\ (\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\alpha^{k}\beta+\cdots+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^{k}+\alpha^{k-1}\beta+\cdots+\beta^{k})
\end{aligned}
$$

より $n=k+2$ のときも成立する.

(3) よってすべての自然数について題意が示された. □

例題 3.12 ［00 横浜国立大学改題］

数列 $\{a_n\}$ を

$$a_0=1,\ a_n=\sum_{k=1}^{n}3^{k}a_{n-k}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots)$$

で定める. 数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ.

考え方 このようになかなか解けない数列の一般項を求めたいときは, いくつかの n について調べ, 一般項を推測するところからはじめなければならない.

解答

$$
\begin{aligned}
a_1 &= 3a_0=3\\
a_2 &= 3a_1+3^2a_0=18\\
a_3 &= 3a_2+3^2a_1+3^3a_0=108
\end{aligned}
$$

となるので $a_n=3\cdot6^{n-1}(n=1,\ 2,\ \cdots)$ と推測される. これを数学的帰納法で示す.

(1) $n=1$ のとき, $a_1=3$ より成立.

(2) $n=1,\ 2,\ \cdots,\ m$ で成立するとする. このとき

$$
\begin{aligned}
a_{m+1} &= \sum_{k=1}^{m+1}3^{k}a_{m+1-k}\\
&= \sum_{k=1}^{m}3^{k}\cdot3\cdot6^{m-k}+3^{m+1}\\
&= 3^{m+1}\left(\sum_{k=1}^{m}2^{m-k}\right)+3^{m+1}\\
&= 3^{m+1}\left(\frac{2^m-1}{2-1}\right)+3^{m+1}\\
&= 3\cdot6^{m}
\end{aligned}
$$

よって $n=m+1$ でも成立する.

(3) 以上から $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し $a_n=3\cdot6^{n-1}$ が示された.

ゆえに一般項は $a_n = \begin{cases} 1 & (n=0) \\ 3\cdot 6^{n-1} & (n \geqq 1) \end{cases}$ である． $\square$

$a_1 = 3,\ a_2 = 18,\ a_3 = 108$ だからといって

$$a_n = 3\cdot 6^{n-1} + (n-1)(n-2)(n-3)$$

かも知れない．しかしこれはやってみれば $n=4$ で成り立たないことがわかる．推測はもっとも妥当らしい形を推測しなければならないが，推測すべき形は一つではないことに注意しよう．

3.3.2　複合命題と数学的帰納法

数学的帰納法はすべて，何らかの自然数 n を含む命題がすべての n で成立することを示すのだ．その命題が複合命題

条件 P が成立する．　⇒　条件 Q が成立する．

であるときを考える．

例題 3.13

$n \geqq 2$ とする．n 個の実数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は $|x_i| < 1\ (i=1,\ 2,\ \cdots n)$ をみたしている．このとき，

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < x_1x_2\cdots x_n + n - 1$$

がなり立つことを示せ．

考え方　この問題の n と $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ は本来，出題者の与えた定数であり，固定されている．しかし，ここで証明すべきことを次のような命題にする．

解答　次の命題を示せばよい．

> $n \geqq 2$ とする．n 個の実数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ が，条件 $|x_i| < 1\ (i=1,\ 2,\ \cdots n)$ をみたすならば，不等式
>
> $$x_1 + x_2 + \cdots + x_n < x_1x_2\cdots x_n + n - 1$$
>
> がなり立つ．

これを数学的帰納法で示す．

(1) $n = 2$ のとき．

$$x_1x_2 + 1 - (x_1 + x_2) = (x_1 - 1)(x_2 - 1)$$

ここで $x_1 - 1 < 0,\ x_2 - 1 < 0$ ならば $(x_1-1)(x_2-1) > 0$ よりつねに成立．

(2) $n = k$ のとき成立するとする．$n = k+1$ のとき

$$x_1x_2\cdots x_kx_{k+1} + k = x_1x_2\cdots(x_kx_{k+1}) + k - 1 + 1$$

ここで $y_k = x_kx_{k+1}$ とすると $|y_k| < 1$ である．k 個の数 $x_1,\ \cdots,\ x_{k-1},\ y_k$ に対して帰納法の仮定を使うと

$$x_1x_2\cdots x_{k-1}y_k + k - 1 + 1 > x_1 + x_2 + \cdots + y_k + 1$$

次に $n=2$ のときになり立つので

$$y_k+1=x_kx_{k+1}+1>x_k+x_{k+1}$$

あわせて

$$x_1x_2\cdots x_kx_{k+1}+k>x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}$$

(3) したがって一般に n のときに題意が示された. □

n 個の実数の条件 $P(n):|x_i|<1\ (i=1,\ 2,\ \cdots n)$ ，と，条件 $Q(n):x_1+x_2+\cdots+x_n<x_1x_2\cdots x_n+n-1$ がある．これからつくられた自然数 n に関する条件

$$p(n):P(n)\quad\Rightarrow\quad Q(n)$$

を考え，すべての自然数 n に対して条件 $p(n)$ が成立することを示す.

このようにしておくと，数学的帰納法の仮定が，個別の x_i に対して仮定されるのではなく，条件を満たす任意の x_i に対して仮定されるので，証明がずっとやりやすくなる.「証明すべきことを強める」とか「個数に関する数学的帰納法」とかいろいろ呼ばれる．基本は自然数 n を含む命題の成立を，n についての数学的帰納法で示すのである．個別の x_i とはいっても文字 x_i であるから，もともとの命題そのものを強めた意味で解釈することもできる．要はどのような数学的帰納法をしているのか，明確に押さえることである.

例題 3.14　［97 東京工大改題］

n を自然数，r を正の有理数とする．このとき，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=r$$

をみたす自然数の x_k の組 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ の個数は有限であることを示せ.

考え方　n 個の未知数とある与えられた有理数 r に関する命題，を証明するのに，これを

r が有理数である．　$\Rightarrow$　n 個の未知数をもつ上の方程式の解が有限個である.

に証明内容を拡大し，数学的帰納法を適用する.

解答　「未知数の個数が n であるかぎり，任意の有理数 r について，解の個数が有限個である」ことを数学的帰納法で証明する.

まず，任意の有理数 r に対して

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}=r$$

をみたす自然数の x_k の組 $(x_1,x_2,\cdots,x_n)$ で $x_1\leqq x_2\leqq\cdots\leqq x_n$ となるものの個数が有限であることを数学的帰納法で示す.

(1) $n=1$ のとき．$r\leqq 0$ なら解なしなので、有限個であることは成立する.

$r>0$ とする．$r=\dfrac{1}{a}$ (a は自然数) という形をしているときは,

$$\frac{1}{x_1}=\frac{1}{a}$$

より $x_1 = a$ のみが解である．解の個数は 1.
r が自然数の逆数という形をしていないときは解なし.
いずれにせよ解の個数は有限である.

(2) $n = j$ のとき成立するとする.
$\dfrac{1}{x_k} \leqq \dfrac{1}{x_1}$ であるから

$$r = \sum_{k=1}^{j+1} \frac{1}{x_k} \leqq \frac{j+1}{x_1}$$

よって $0 < x_1 \leqq \dfrac{j+1}{r}$ となりこれを満たす整数 x_1 の個数は有限である．これを $x_1 = a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N$ とする．各 a_l に対し

$$\sum_{k=2}^{j+1} \frac{1}{x_k} = r - \frac{1}{a_l}$$

は未知数の個数が j 個なので帰納法の仮定により解の個数は有限である．$l = 1,\ \cdots,\ N$ のそれぞれについて言えるので， $n = j + 1$ のときも解の個数は有限である.

(3) 従って自然数 n に対して

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{x_k} = r$$

をみたす自然数の x_k の組 $(x_1, x_2, \cdots, x_n)$ で $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ となるものの個数が有限であることが示された.

つぎに $x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ という仮定をとる．するとそれらを並べ替えたものが解になる．その個数は n 個がすべて異なるとき $n!$ 倍され，同じものを含むときは $n!$ より小さい．いずれにせよ，$x_1 \leqq x_2 \leqq \cdots \leqq x_n$ という仮定をとると，解の個数は高々有限数倍されるだけである.

従って，題意の有限性が証明された. □

このように, n 以外にも定数などがある場合に，証明することを強めることによって，帰納法がかえってうまくできることが少なくない.

3.3.3 問題と考え方

問題

3.16 ［99 上智・理工］ 考え方 3.16 解答 5.47
漸化式 $a_1 = 4,\ a_{n+1} = 3{a_n}^2 + 4a_n + 3\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ で定まる整 数列 $\{a_n\}$ を考える.

(1) $a_n - 4$ が 7 で割り切れることを証明せよ.

(2) ${a_n}^2 + a_n + 1$ が 7^n で割り切れることを証明せよ.

(3) 正整数 p について， ${a_n}^{3p}$ を 7^n で割った余りを求めよ.

3.17 ［出典不明］ 考え方 3.17 解答 5.48
n を自然数とし，x の関数 $f_n(x)$ を $f_n(x) = \dfrac{1}{2}\left(x^n + \dfrac{1}{x^n}\right)$ で定める.

(1) $t=\dfrac{1}{2}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)$ とすると，$f_n(x)$ は t の n 次の整数係数の整式 $T_n(t)$ になることを示せ．また，$T_n(t)$ の t^n 項の係数を求めよ．

(2) 実数 θ に対し，$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)$ が成り立つことを示せ．

3.18 ［阪大過去問］ 考え方 3.18 解答 5.49
p, q は正の整数とし，二次方程式 $x^2-px-q=0$ の二つの実数解を α, β とする．$A_n=\alpha^n+\beta^n$ とおくとき，すべての正の整数 n について次のことがなりたつことを示せ．

(1) A_n は整数である．

(2) $A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 で割り切れる．

3.19 ［作成問題］ 考え方 3.19 解答 5.50

(1) 関数 $y=\log x$ が上に凸な関数であることを用いて，$p+q=1$ である正の定数 $p,\ q$ と正の数 $x,\ y$ に対して，次の不等式が成立することを示し，等号が成立する場合を述べよ．

$$x^p y^q \leqq px+qy$$

(2) $p_1+p_2+\cdots+p_n=1$ を満たす正の定数 $p_1,\ p_2,\ \cdots,\ p_n$ と正の数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ に対して，次の不等式が成立することを示し，等号が成立する場合を述べよ．

$$x_1^{p_1}x_2^{p_2}\cdots x_n^{p_n} \leqq p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n$$

3.20 ［99 滋賀医大］ 考え方 3.20 解答 5.51
$a_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2$ とおく．自然数 m に対して

$$m^3 \leqq a_n \leqq (m+1)^3$$

が成り立つような a_n の個数を c_m とする．このとき，次のことを証明せよ．

(1) すべての自然数 m に対して $c_m \geqq 1$ である．

(2) すべての自然数 m に対して $c_m \leqq 2$ である．

3.21 ［01 横浜市大］ 考え方 3.21 解答 5.52
実数 $\beta>1$ に対して関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\beta x-[\beta x]$$

で定義する．ここで実数 y に対して $[y]$ は $m \leqq y < m+1$ を満たす整数 m を表す．すなわち，$[y]$ は y を越えない最大の整数である．関数 $f_n(x),\ d_n(x)\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ をそれぞれ

$$f_1(x)=f(x),\quad f_{n+1}(x)=f(f_n(x)),$$
$$d_1(x)=[\beta x],\quad d_{n+1}(x)=[\beta f_n(x)]$$

で定義する． x の範囲を $0 \leqq x \leqq 1$ とするとき，つぎの問いに答えよ．

(1) すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$0 \leqq d_n(x) \leqq [\beta]$$

が成り立つことを証明せよ．

(2) すべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$f_n(x) = \beta^n x - \sum_{k=1}^{n} \beta^{n-k} d_k(x)$$

が成り立つことを証明せよ．

(3)

$$\lim_{n\to\infty} \left| x - \sum_{k=1}^{n} \frac{d_k(x)}{\beta^k} \right| = 0$$

を証明せよ．

3.22　［04 東大理系］　考え方 3.22　解答 5.53

関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める．

$$\begin{aligned} f_1(x) &= x^3 - 3x \\ f_2(x) &= \{f_1(x)\}^3 - 3f_1(x) \\ f_3(x) &= \{f_2(x)\}^3 - 3f_2(x) \end{aligned}$$

以下同様に，$n \geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば，関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x) = \{f_n(x)\}^3 - 3f_n(x)$$

で定める．

このとき以下の問いに答えよ．

(1) a を実数とする．$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ．

(2) a を実数とする．$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ．

(3) n を 3 以上の自然数とする．$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ．

3.23　［02 京大後期理系］　考え方 3.23　解答 5.54

$f(x)$ は x^n の係数が 1 である x の n 次式である．相異なる n 個の有理数 $q_1,\ q_2,\ \cdots,\ q_n$ に対して $f(q_1),\ f(q_2),\ \cdots,\ f(q_n)$ がすべて有理数であれば，$f(x)$ の係数はすべて有理数であることを，数学的帰納法を用いて示せ．

3.24　［86 京大文理］　考え方 3.24　解答 5.55

すべては 0 でない n 個の実数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ があり，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ かつ $a_1+a_2+\cdots+a_n=0$ を満たすとき，$a_1+2a_2+\cdots+na_n>0$ が成り立つことを証明せよ．

3.25　［作成問題］　考え方 3.25　解答 5.56

(1) 正の実数 a_0, a_1, $\cdots$, a_n に対して

$$a_nx^n - a_{n-1}x^{n-1} - \cdots - a_1x - a_0 = 0$$

は正の解をただ一つもつことを示せ.

(2) ① の正の解を r とする．このとき① の他の解 α はすべて $|\alpha| \leqq r$ をみたすことを示せ.

(3) $0 < A_0 < A_1 < \cdots < A_n$ である実数に対し，方程式

$$A_nx^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1x + A_0 = 0$$

の解 α はすべて $|\alpha| \leqq 1$ をみたすことを示せ.

考え方

3.16　問題 3.16　解答 5.47
数学的帰納法の典型問題である.

3.17　問題 5.48　解答 5.48
T_{k+1} を T_k で表そうとすると，T_{k-1} が現れる．このようなときは，$n = 1,\ 2$ で確認すればよい. 後半は三角関数の加法定理と結びつけよう.

3.18　問題 5.49　解答 5.49
同様に，A_{k+1} を A_k で表そうとすると，A_{k-1} が現れる．このようなときは，$n = 1,\ 2$ で確認すればよい.

3.19　問題 3.19　解答 5.50
帰納法の仮定を使っても直ちには結論に至らない．そこで (1) を使う．帰納法の仮定＋ (1)，この道筋で式をいろいろ変形してみよう．なおこれは上に凸な関数であればつねに成立するし，下に凸でも不等号を逆にしてつねに成立する.

3.20　問題 3.20　解答 5.51
やや複雑な論証である．一般に，不等号の関係を数学的帰納法で示すのは難しくなる．帰納法は当然 m に関して行う．(1) では，帰納法の仮定としての $c_m \geqq 1$ の意味することは不等式を満たす n の存在である．いくつか存在すればそのなかで最大のものをとる．その次の自然数に着目して考えてみよう.

3.21　問題 3.21　解答 5.52
記号の複雑さに惑わされず，順次証明を進めていけばよい．できれば，一体何をしているのか，そこで考えてみよう.

3.22　問題 3.22　解答 5.53
まず，(1)，(2) で問題の状況をしっかりつかもう．そして (3) を数学的帰納法で示すのであるが，そのとき「結論を強めた命題を示す」とうまくいく．その考え方をここで学んでほしい.

3.23　問題 3.23　解答 5.54

次数に関する数学的帰納法を行おう．除法の原理，因数定理が次数を下げる原理である．なお，数学的帰納法によらない証明も可能である．

3.24　問題 3.24　解答 5.55

直接示すことができる．その場合は，負から正への単調増加数列であることから，符号の変わり目に注目することが大切である．または，数列の項数に関する数学的帰納法を行おう．その場合帰納法の仮定を使うために一工夫がいる．

3.25　問題 3.25　解答 5.56

これもまた次数に関する数学的帰納法を行おう．次数を下げるのがこの場合は微分である．これで (1) はできる.（2）は複素数に関する不等式

$$|\alpha| - |\beta| \leqq |\alpha - \beta| \leqq |\alpha| + |\beta|$$

がいる．

3.4　間接証明と背理法

間接証明　間接証明というのは広い概念である．命題 P が成立することを示すのに，直接 P の成立を示すのではなく,「このような理由で P が成立する以外にありえない」ということを示すのである．多くの場合，根拠になっているのは排中律，つまり命題 A かその否定 $\overline{A}$ のいずれか一方がつねに成立し，A でもなければ $\overline{A}$ でもないという第三の場合はない，ということである．

代表的な間接証明は対偶証明と背理法である．

対偶証明　命題 :「 P ならば Q である」の真偽と，その対偶命題 :「 Q でなければ P でない」の真偽は一致する．したがって［ P ならば Q ］を証明するためには［Q でなければ P でない］を証明すればよい．対偶が成立することを示すことで，もとの命題が成立することを示す証明は，直接に［ P ならば Q ］を証明するのではないから間接証明の一つである．

背理法　この対偶を用いた証明法の応用として背理法がある.「Q でないと仮定する．すると前提条件 A と矛盾が起こる．したがって Q が成立する.」このような証明法を **背理法**という．

しかし背理法は「対偶による証明」より応用が広い．Q を示したい，しかし明示的には A が書かれていない．このようなときにも A を適切にとって何らかの矛盾に持ち込めばいいからだ．

その他の間接証明　よく見るとすでにいくつかの間接証明は使っている．

1)　対象 X が条件 A を満たし，対象 Y も条件 A を満たす．かつ条件 A を満たすものはただ一つに定まる．ゆえに $X = Y$ である．

これも $X = Y$ を直接に示すのではないので，間接証明である．この方法はすでに例題 1.3 で用いたところである．

2)　存在証明の基本的な方法の「鳩の巣原理」．$n+1$ 個以上のボールのそれぞれが n 個の箱のいずれかに入っている．2 個以上のボールが入っている箱が存在する．その箱がどれであるかはわからない．しかし存在する．

3)　連続関数の中間値の定理．$f(x)$ が連続で定義域内の $a,\ b\ (a < b)$ に対して，$f(a) = \alpha$，$f(b) = \beta$ とする．α と β の間にある任意の実数 γ に対して，$a < c < b$ で $f(c) = \gamma$ となる c が存在する．c がいくらかはわからない．しかし存在する．

4)　数学的帰納法も間接証明であるし，ある命題 $P \Rightarrow Q$ が偽であることを示すのに，反例：P であって Q ではない例をあげるのも間接証明である．

3.4.1　対偶を示す

例題 3.15　［出典不明］

$a,\ b,\ c$ は同時には 0 でない実数とする．$a,\ b,\ c$ に関する条件

$$ax + by + cz > 0 \text{ なる任意の } x,\ y,\ z \text{ に対し } x + y + z > 0 \text{ が成り立つ}$$

と，条件 $a = b = c > 0$ は同値であることを示せ．

考え方　二つの方向の証明の一方で対偶を示す方が簡明になるところがある．同値性を証明すべき二つの命題を明確にし，それぞれの証明を対偶を示すことでおこなう可能性を念頭に検証しよう．

解答　条件「$ax + by + cz > 0$ なる任意の $x,\ y,\ z$ に対し $x + y + z > 0$ が成り立つ」を P とし，条件 $a = b = c > 0$ を Q とする．$P \Rightarrow Q$ をその対偶を示すことで示す．

条件 Q の否定は

$$a \neq b,\ b \neq c,\ c \neq a,\ a = b = c \leqq 0$$

のいずれかが成り立つことである．

(1) $a \neq b$ のとき．

$$x = a - b,\ y = b - a,\ z = 0$$

とすると

$$ax + by + cz = a(a - b) + b(b - a) = (a - b)^2 > 0$$

であるが $x + y + z = 0$ となる．つまり反例ができたので

$$ax + by + cz > 0 \text{ なる任意の } x,\ y,\ z \text{ に対し } x + y + z > 0 \text{ が成り立つ}$$

が否定された．

(2) $b \neq c,\ c \neq a$ のときも同様．

(3) $a = b = c \leqq 0$ のとき．

$$ax + by + cz > 0 \text{ より } a(x + y + z) > 0.\ a \leqq 0 \text{ より } x + y + z < 0$$

つまりすべての場合に

$$ax + by + cz > 0 \text{ なる任意の } x,\ y,\ z \text{ に対し } x + y + z > 0 \text{ が成り立つ}$$

は成立しない．

よって対偶 $\overline{Q} \Rightarrow \overline{P}$ が示せたので，$P \Rightarrow Q$ が証明された．

逆に Q が成り立つとき，$ax + by + c = a(x + y + z)$，かつ $a > 0$ なので，$ax + by + cz > 0$ ならば $x + y + z > 0$ となり，P が成り立つ．

以上から，条件 P と条件 Q が同値であることが示された．　□

3.4.2　背理法

古来有名な背理法を振り返ろう．これは昔から知られていることを入試問題にしたものだ．解答を作ってみてほしい．

例題 3.16　［00 北見工業大学］

次の定理と証明について，以下の問いに答えよ．

定理　素数は無限に存在する．

証明　定理が成立しないとすると，素数は有限個である．それらの素数を p_1，p_2，$\cdots, p_n$ とする．このとき，$q = (p_1 p_2 \cdots p_n) + 1$ を考えると，<u>q は p_1，p_2，$\cdots, p_n$ のどれでも割り切れない．</u>(1) したがって，q を素数の積として表したとき，この積に現れる素数は p_1，p_2，$\cdots, p_n$ のいずれとも異なる．<u>これは矛盾である．</u>(2) したがって定理が証明された．

(1) 上のように，結論が成り立たないと仮定して矛盾を導き出すことにより命題を証明する方法を何というか．

(2) 下線 (1) の主張がなぜ成り立つかを説明せよ．

(3) 下線 (2) で何と何が矛盾するのかを答えよ．

(4) P_n で小さい方から n 番目の素数を表すとき，不等式

$$P_{n+1} \leqq (P_1 P_2 \cdots P_n) + 1$$

が成り立つことを示せ．

解答

(1) 背理法

(2) q は p_1，p_2，$\cdots, p_n$ のどれで割っても 1 余るからである．

(3) q は p_1，p_2，$\cdots, p_n$ を因数にもたない 1 より大きい整数なので，その素因数は p_1，p_2，$\cdots, p_n$ と異なる．よって p_1，p_2，$\cdots, p_n$ がすべての素数であるという仮定と矛盾する．

(4) $(P_1 P_2 \cdots P_n) + 1$ は P_1，P_2，$\cdots, P_n$ を因数にもたない 1 より大きい整数なので，その素因数 P は P_1，P_2，$\cdots, P_n$ と異なる．

P_n は小さい方から n 番目の素数なので P は P_1，P_2，$\cdots, P_n$ より大きい．P_n の次に大きいのが P_{n+1} なので

$$P_1 < P_2 < \cdots < P_n < P_{n+1} \leqq P \leqq (P_1 P_2 \cdots P_n) + 1$$

よって題意が示された．　□

証明がこのようにできる以上，その証明の前提となる条件がなければならない．Q を「素数は無数にある」という命題としてこの問題を「 P ならば Q 」の形にするとき P には何が来るのだろう．P としてはこの場合「『素数』を 1 とそれ自身の他に約数のない数と定める」という定義命題がとれる．つまりこの証明のなかには素数の定義が前提として入っている．

この証明は本質的にはユークリッドによってなされた．ユークリッドは『原論』のなかで，素数の個数が三個であるとして矛盾が起こるという形で議論した．ユークリッドは歴史に残る人のなかで，はじめて背理法を用いた人である．

これを用いる問題が最近現れた．

例題 3.17　［09 千葉大］

(1) 5 以上の素数は，ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表されることを示せ．

(2) N を自然数とする．$6N-1$ は，$6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつことを示せ．

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数は無限に多く存在することを示せ．

考え方　(3) で先の素数に関するユークリッドの方法を応用しよう．

解答

(1) 5 以上の素数 p は奇数でありかつ 3 の倍数ではない．従って 6 で割った余りは 1 か 5 である．p は 5 以上なので，ある自然数 n を用いて $6n+1$ または $6n-1$ の形で表される．

(2) N が自然数なので $6N-1 \geqq 5$ である．$6N-1$ は 3 の倍数でないのでその因数分解に 3 は表れない．従ってすべての素因数は $6n+1$ または $6n-1$ の形で表される．すべての素因数が $6n+1$ 型のものばかりと仮定し，それらを $6n_1+1$，$\cdots$，$6n_l+1$ とする．

一般に 6 で割って 1 余る二数 $6u+1$，$6v+1$ の積は

$$(6u+1)(6v+1) = 6(6uv+u+v)+1$$

より再び 6 で割って 1 余る．これを繰りかえし用いることにより，$6n_1+1$，$\cdots$，$6n_l+1$ のべきの積

$$(6n_1+1)^{e_1}\cdots(6n_l+1)^{e_l} \quad \cdots①$$

も 6 で割って 1 余る数であることが分かる．

これは $6N-1$ が 6 で割って -1 つまり 5 余る数であること矛盾する．

よって $6N-1$ は，$6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数を約数にもつ．

(3) $6n-1$ (n は自然数) の形で表される素数の個数が有限で k 個であるとする．それらを $6m_1-1$，$\cdots$，$6m_k-1$ とする．このとき

$$L = 6(6m_1-1)\cdots(6m_k-1)-1$$

とおくと，L は $6m_1-1$，$\cdots$，$6m_k-1$ のいずれでも割り切れない．一方 L は $6N-1$ 型なので (2) から $6n-1$ 型の素因数をもつ．それは $6m_1-1$，$\cdots$，$6m_k-1$ のいずれとも異なる．

$6m_1-1$，$\cdots$，$6m_k-1$ 以外の $6n-1$ 型の素数が存在し，これらが $6n-1$ 型の素数のすべてであるという仮定と矛盾した．よって，$6n-1$ 型の素数は無限に多く存在する．　□

次の命題も，その証明は背理法の典型であるが，背理法の立て方はいくつかある．

例題 3.18

$\sqrt{2}$ が無理数であることを示せ．

解答 1 $\sqrt{2}$ が無理数でない，つまり有理数とする． $\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ とおく．ここで分数を約分し p と q は互いに素であるとする．

$$\therefore \quad 2p^2=q^2$$

奇数の平方は再び奇数であるから左辺が偶数なので q は偶数でなければならない． $q=2q'$ とおく．すると

$$2p^2=(2q')^2 \quad \Rightarrow \quad p^2=2{q'}^2$$

これから p も偶数となり，p と q は 2 という公約数をもった．つまり，p と q が互いに素であることと矛盾した．ゆえに $\sqrt{2}$ は無理数である． □

解答 2 $\sqrt{2}$ が無理数でない，つまり有理数とする． $\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ とおく．

$$\therefore \quad 2p^2=q^2$$

左辺の因数分解における因数 2 の個数は奇数である．右辺の因数分解における因数 2 の個数は偶数であるこれは矛盾である．ゆえに $\sqrt{2}$ は無理数である． □

解答 3 $\sqrt{2}$ が無理数でない，つまり有理数とする． $\sqrt{2}=\dfrac{q}{p}$ とおく．

$$\therefore \quad 2p^2=q^2$$

奇数の平方は再び奇数であるから左辺が偶数なので q は偶数でなければならない． $q=2q'$ とおく．すると

$$2p^2=(2q')^2 \quad \Rightarrow \quad p^2=2{q'}^2$$

これから p も偶数となり $p=2p'$ とおける．これから再び

$$2{p'}^2={q'}^2$$

となる．再び p', q' とも 2 で割れる．これは何回でも繰り返される．つまり p も q も 2 で無限回割れる．これは $p=q=0$ 以外では不可能である．ゆえに $\sqrt{2}$ は無理数である． □

「 $\sqrt{2}$ は無理数である」という命題は「 P ならば Q 」という形はしていない．P のところは少なくとも，無理数の定義，整数，有理数の定義と性質が入っていなければならない．が，それは当然の前提として命題中には書かれていない．したがって，有理数のどのような性質との矛盾を導くのかによって，いくつかの解法がある．

例題 3.19 ［大阪市大］

次の各問に答えよ

(1) $m,\ n$ は自然数とする．$m>n$ のとき，$2^{\frac{n}{m}}$ は無理数であることを示せ．

(2) $2^{\frac{1}{3}}$ は有理数を係数とする 2 次方程式の解にならないことを示せ．

解答

(1)　$2^{\frac{n}{m}}$ が有理数と仮定し，既約分数 $2^{\frac{n}{m}}=\dfrac{q}{p}$ とおく．これから

$$2^np^m=q^m$$

p^m，q^m も互いに素で 2 が素数なので q は 2 の倍数である．$q=2q'$ とおく．これを代入し簡約すると

$$p^m=2^{m-n}q'^m$$

$m>n$ なので右辺は偶数．この結果 p も 2 の倍数となり，$\dfrac{q}{p}$ が既約分数であること矛盾した．$2^{\frac{n}{m}}$ を有理数と仮定するかぎり起こる矛盾なので，$2^{\frac{n}{m}}$ は有理数でない，つまり無理数である．

(2)　$2^{\frac{1}{3}}$ は 3 次方程式

$$x^3-2=0$$

の解である．さらに $2^{\frac{1}{3}}$ が有理数係数の 2 次方程式の解でもあるとする．2 次方程式の x^2 の係数で割ることにより

$$x^2+bx+c=0 \quad b,\ c \text{ は有理数}$$

の解であるとしてよい．ここで

$$x^3-2=(x^2+bx+c)(x-b)+(b^2-c)x+bc-2$$

である．ここに $x=2^{\frac{1}{3}}$ を代入することにより

$$(b^2-c)2^{\frac{1}{3}}+bc-2=0$$

となる．

$b^2-c\neq 0$ なら $2^{\frac{1}{3}}=-\dfrac{bc-2}{b^2-c}$ となる．(1) を $n=1,\ m=3$ で用いると $2^{\frac{1}{3}}$ は無理数なので，矛盾である．

$b^2-c=0$ なら $bc-2=0$ も成り立ち，c を消去して $b^3-2=0$．b は実数なので $b=2^{\frac{1}{3}}$ となり，b が有理数であることと矛盾した．

したがって $2^{\frac{1}{3}}$ は有理数を係数とする 2 次方程式の解にならないことが示された．　□

次の例題もまたいろんな証明法がある．

例題 3.20　［名大類題］

$a,\ b$ を実数とする．関数 $f(x)=x^2+ax+b\,(-1\leqq x\leqq 1)$ の絶対値の最大値を $g(a,\ b)$ とする．

(1) $g(a,\ b)\geqq\dfrac{1}{2}$ を示せ．

(2) 等号が成立する $(a,\ b)$ を求めよ．

解答 1

(1)　背理法で示す．$g(a,\ b)<\dfrac{1}{2}$ とする．つまり，$-1\leqq x\leqq 1$ のすべての x に対して，$|f(x)|<\dfrac{1}{2}$ が成り立つとする．特に $|f(1)|<\dfrac{1}{2}$，$|f(-1)|<\dfrac{1}{2}$ であるから

$$|1+a+b|<\frac{1}{2},\ |1-a+b|<\frac{1}{2}$$

つまり

$$-\frac{1}{2} < 1+a+b < \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2} < 1-a+b < \frac{1}{2}$$

を得る． 辺々加えると

$$-1 < 2+2b < 1$$

つまり

$$-\frac{3}{2} < b < -\frac{1}{2}$$

しかし, これは

$$|f(0)| = |b| > \frac{1}{2}$$

を意味するので, 仮定と矛盾．よって, $g(a,\ b) \geqq \frac{1}{2}$ が示された．

(2)　$g(a,\ b) = \frac{1}{2}$ のとき $-1 \leqq x \leqq 1$ のすべての x に対して, $|f(x)| \leqq \frac{1}{2}$ が成り立つ．

$|f(1)| < \frac{1}{2}$ または $|f(-1)| < \frac{1}{2}$ の少なくとも一方が成り立つと, (1) と同様に $|f(0)| = |b| > \frac{1}{2}$ となる．これは, $g(a,\ b) = \frac{1}{2}$ に反する．よって

$$|f(1)| = |1+a+b| = \frac{1}{2},\ |f(-1)| = |1-a+b| = \frac{1}{2}$$

である． ここで, もし

$$1+a+b = \pm\frac{1}{2},\ 1-a+b = \mp\frac{1}{2}\ (\text{複号同順})$$

とすると, $a = \pm\frac{1}{2},\ b = -1$ になる．この場合 $f(x) = x^2 \pm \frac{1}{2}x - 1$ となり $|f(0)| = 1$ で不適．$1+a+b,\ 1-a+b$ がともに負となるときも, 明らかに不適．よって

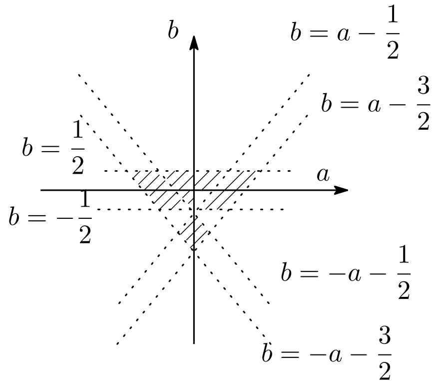
$$1+a+b = \frac{1}{2},\ 1-a+b = \frac{1}{2}$$

が必要である．このとき, $a = 0,\ b = -\frac{1}{2}$ となり, $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}$ となるので, 確かに, $g\left(0,\ -\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ である．$g(a,\ b) = \frac{1}{2}$ となる $(a,\ b)$ はこれにかぎることも示された．　$\square$

解答 2

(1)　$g(a,\ b)<\dfrac{1}{2}$ とする．つまり，$-1 \leqq x \leqq 1$ のすべての x に対して，$|f(x)|<\dfrac{1}{2}$ が成り立つとする．特に $|f(1)|<\dfrac{1}{2}$，$|f(0)|<\dfrac{1}{2}$，$|f(-1)|<\dfrac{1}{2}$ であるから

$$|1+a+b|<\frac{1}{2},\ |b|<\frac{1}{2},\ |1-a+b|<\frac{1}{2}$$



この領域を ab 平面に図示する．

$$\begin{cases} -a-1-\dfrac{1}{2}<b<-a-1+\dfrac{1}{2} \\ a-1-\dfrac{1}{2}<b<a-1+\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

の領域と，領域 $-\dfrac{1}{2}<b<\dfrac{1}{2}$ には共通部分がない．

これは関数 $f(x)$ が与えられている，つまり存在していることと矛盾する．

よって，$g(a,\ b) \geqq \dfrac{1}{2}$ が示された．

(2)

$$|1+a+b| \leqq \frac{1}{2},\ |b| \leqq \frac{1}{2},\ |1-a+b| \leqq \frac{1}{2}$$

としたとき，これらの条件をみたすのは図から明らかに $\left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のみ．　□

$x^2-\dfrac{1}{2}$ という関数を既知であれば次のような論証が可能である．

解答 3

(1)　$h(x)=x^2-\dfrac{1}{2}$ とおく．これを用いて，　$g(a,\ b)<\dfrac{1}{2}$ として矛盾を示す．

$h(x)$ は $x=0$ で最小値 $h(0)=-\dfrac{1}{2}$ をとり，$h(-1)=h(1)=\dfrac{1}{2}$ である．$g(a,\ b)<\dfrac{1}{2}$ であるから

$$\begin{cases} f(-1)-h(-1)<0 \\ f(0)-h(0)>0 \\ f(1)-h(1)<0 \end{cases}$$

したがって $f(x)-h(x)=0$ は $-1<x<0<x<1$ におのおの一個，合計二個の解を持つ．ところが

$$f(x)-h(x)=ax+b+\frac{1}{2}$$

となり，一次式であるから，恒等的に $f(x)-h(x)=0$ が成り立つ．つまり

$$f(x)=h(x)$$

ところが $|h(x)|$ は $\dfrac{1}{2}$ の値をとる．すなわち $g(a,\ b)<\dfrac{1}{2}$ と矛盾した．

したがって $g(a,\ b) \geqq \dfrac{1}{2}$.

(2)　(1) より $g(a,\ b) = \dfrac{1}{2}$ になるのが $f(x) = h(x)$ のときだから $a = 0,\ b = -\dfrac{1}{2}$.

つまり $(a,\ b) = \left(0,\ -\dfrac{1}{2}\right)$.　□

整数問題に関する背理法の典型問題である.

例題 3.21　［09 千葉大］

p を素数，n を 2 以上の自然数とするとき，方程式

$$x^n - p^n x - p^{n+1} = 0$$

は整数解を持たないことを証明せよ.

考え方　これは率直に素数であることから，倍数の関係を見ていけばよい.

解答　方程式 $x^n - p^n x - p^{n+1} = 0$ が整数解 α をもつとする．つまり

$$\alpha^n = p^n\alpha + p^{n+1} = p^n(\alpha + p) \quad \cdots ①$$

となる整数 α が存在するとする．これから α^n は p の倍数であり，p が素数なので，α が p の倍数でなければばならない．$\alpha = p\alpha'$ とおく.

これを ① に代入する.

$$p^n {\alpha'}^n = p^n(p\alpha' + p)$$

この結果,

$$\alpha'^n = p(\alpha' + 1) \quad \cdots ②$$

となり，同様に α' は p の倍数である．$\alpha' = p\alpha''$ とおき ② に代入する．両辺 p で約することにより次式を得る.

$$p^{n-1}\alpha''^n = p\alpha'' + 1$$

$n \geqq 2$ なので左辺は p の倍数である．右辺は p で割ると 1 余り p の倍数でない．これは矛盾である.

よって与方程式に整数解はない.

□

3.4.3　問題と考え方

問題

3.26　［99 阪大改題］　考え方 3.26　解答 5.57

次の各問いに答えよ.

(1) $\sqrt{3}$ は無理数であることを示せ.

(2) xy 平面上の点 $(a,\ b)$ は，$a,\ b$ がともに有理数のときに有理点と呼ばれる．xy 平面において，三つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ.

3.27　［04 一橋前期］　考え方 3.27　解答 5.58

$a,\ b,\ c$ は整数で，$a < b < c$ をみたす．放物線 $y = x^2$ 上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$，$\mathrm{C}(c,\ c^2)$ をとる.

(1) $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ とはならないことを示せ．ただし，$\sqrt{3}$ が無理数であることを証明なしに用いてよい．

(2) $a = -3$ のとき，$\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ となる組 $(b,\ c)$ をすべて求めよ．

3.28　［00 千葉］　考え方 3.28　解答 5.59

n が 3 以上の整数のとき，

$$x^n + 2y^n = 4z^n$$

を満たす整数 $x,\ y,\ z$ は $x = y = z = 0$ 以外に存在しないことを証明せよ．

3.29　［00 九州大改題］　考え方 3.29　解答 5.60

複素数 $z = \cos 20^\circ + i \sin 20^\circ$ と，それに共役な複素数 $\bar{z}$ に対し $\alpha = z + \bar{z}$ とする．

(1) α は整数を係数とするある三次方程式の解となることを示せ．

(2) この三次方程式は 3 個の実数解をもち，そのいずれも有理数ではないことを示せ．

(3) 有理数を係数とする二次方程式で，α を解とするものは存在しないことを示せ．

3.30　［98 一橋］　考え方 3.30　解答 5.61

(1) $\log_5 3$ は無理数であることを示せ．

(2) $\log_{10} r$ が有理数となる有理数 r は $r = 10^q$ $(q = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \cdots)$ に限ることを示せ．

(3) 任意の正の整数 n に対して，$\log_{10}(1 + 3 + 3^2 + \cdots + 3^n)$ は無理数であることを示せ．

3.31　［06 京大後期文系 5 番理系 6 番］　考え方 3.31　解答 5.62

$\tan 1^\circ$ は有理数か．

3.32　［02 名大前期理系］　考え方 3.32　解答 5.63

$f(x)$ を実数全体で定義された連続関数で，$x > 0$ で $0 < f(x) < 1$ を満たすものとする．$a_1 = 1$ とし，順に，$a_m = \displaystyle\int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx$ $(m = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ により数列 $\{a_m\}$ を定める．

(1) $m \geqq 2$ に対し，$a_m > 0$ であり，かつ $a_1 > a_2 > \cdots > a_{m-1} > a_m > \cdots$ となることを示せ．

(2) $\dfrac{1}{2002} > a_m$ となる m が存在することを背理法を用いて示せ．

3.33　［05 東大理科改題］　考え方 3.33　解答 5.64

$|z| > \dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w の全体を T とする．このとき，T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ．

考え方

3.26　［99 阪大改題］　問題 3.26　解答 5.57
$\sqrt{3}$ を用いることがヒントになっている．するとこれは面積か傾きで矛盾を作るのではないかと考えられる．これらを 2 通りの方法で表してみよう．

3.27　［04 一橋前期］　問題 3.27　解答 5.58
前問別解と同様に tan の加法定理が使える．(2）は必要条件から絞って調べよう．

3.28　［00 千葉]　問題 3.28　解答 5.59
これは $\sqrt{2}$ は無理数であることと同様の方法で示せる．ただ，有理数の場合既約分数にとれることは証明なしに使ったが，この場合はそれに対応する準備が必要だ．3 数の最大公約数が 1 であるようにとれるかを考えよう．

3.29　［00 九州大改題］　問題 3.29　解答 5.60
（2）と（3）が背理法である．(2)：整数係数で最高次数の係数が 1 の方程式が有理数解をもてばその解は整数である，まずこれを示して背理法の論証を進める．(3)：α が 3 次方程式，かつ 2 次方程式の解であるとすると，3 次式を 2 次式で割った余りの 1 次式でできる方程式の解になる！ここに気づいたら，ていねいに論証を進めよう．

3.30　［98 一橋］　問題 3.30　解答 5.61
(1)，(3) が背理法である．(2) の「限る」とは必要条件であることを示せということである．数学特有の言い方にも慣れていこう．

3.31　［06 京大後期文系 5 番理系 6 番］　問題 3.31　解答 5.62
$\tan 1^\circ$ が有理数なら $\tan 2^\circ$ も有理数？順にいけば $\tan 30^\circ$ も有理数となる．背理法と帰納法を結合させればよいと見通せる．

3.32　［02 名大前期理系］　問題 3.32　解答 5.63
存在しないということは？　すべての m に対し $a_m \geqq \dfrac{1}{2002}$ ということだ．一方（1）をうまく用いて，$\displaystyle\lim_{m\to\infty} = 0$ を示せば矛盾である．

3.33　［05 東大理科改題］　問題 3.33　解答 5.64
条件自体を対偶でいいかえてみよう．$z^2 - 2z - w = 0$ の解がすべて $|z| \leqq \dfrac{5}{4}$ にあるということだ．これがわかれば T を具体的に求めなくても本問は解ける．

第 4 章　構造の分析

4.1　図形とは何か

図形は点の集合　平面図形，関数のグラフ，直線，放物線，円，軌跡，領域，と図形問題はつねに出てくる．これに対してそれぞれ個別に対応しているのがほとんどの場合だ．しかしこれらには共通のことがある．図形とは**一定の条件を満たす点の集合**だということだ．この観点をしっかりもっておくことが必要である．

図形＝{ 点 P — P は一定の条件を満たす．}

例えば円は,

点 O からの距離が等しい，という条件を満たす点 P の集合.

として定義される．これを xy 座標の方程式で表せば,

方程式 $x^2+y^2=r^2$ を満たす点 $(x,\ y)$ の集合.

としても定義される．方程式もまた変数に関するひとつの条件である．

図形の性質とはその点の集合に何らかの規則性や構造を見出し，それを点の集合の性質としてつかんだものである．だから

図形の探求＝点の集合の構造の探求

ということである．ここでは，条件を満たす点の集合としての図形のとらえ方とその構造を探求する方法を学ぼう．

4.1.1　図形の論証方法

記述の方法が図形問題を解く方法に直結する．座標，ベクトル，複素数は，本質的には座標平面に入れられた図形を，計算で扱うための方法である．それぞれに特徴があるので，適切な方法を選ばなければならない．方法が指示されていないときは，もっとも適切な方法を見いだすことが大切である．また問題をいろいろな方法で解いて解いてその相互関係を体得しておくことも大切である．一つの問題を，これらのすべての方法で解いてみよう．

例題 4.1　［07 阪大文理］

xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする．O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件 (a), (b) で定まる点 Q を考える．

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ.
(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$.

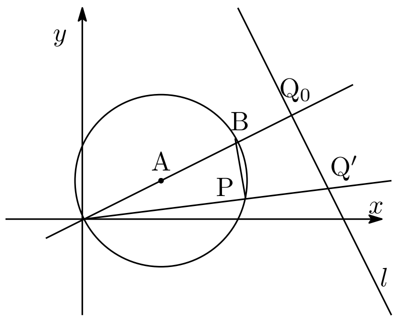
以下の問いに答えよ.

(1) 点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ．

(2) (1) の直線を l とする．l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ．

解法 1　(1) B を OB が円 C の直径となる点とし，半直線 OA 上の点 Q_0 を

$$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}_0}| = 2r|\overrightarrow{\mathrm{OQ}_0}| = 1 \quad \cdots ①$$



となるようにとる．Q_0 を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と直交する直線を l とする．O を除く C 上の点 P に対し，直線 OP は l と平行ではない．直線 OP と l の交点を Q' とする．
$\mathrm{Q}' \neq \mathrm{P}$ のとき

$$\triangle \mathrm{OPB} \backsim \triangle\, \mathrm{OQ}_0\mathrm{Q}'$$

なので，$\mathrm{OP} : \mathrm{OB} = \mathrm{OQ}_0 : \mathrm{OQ}'$ が成り立つ．
この結果

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}'}| = |\overrightarrow{\mathrm{OB}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}_0}| = 1$$

したがって $\mathrm{Q} = \mathrm{Q}'$ である．$\mathrm{Q}' = \mathrm{P}$ のときも成り立つ．つまり点 P が円 C 上を動けば，点 Q は直線 l 上を動く．

逆に，直線 l 上の点 Q があれば，半直線 OQ と円 C は原点および他の点で交わり，条件を満たす点 P を定める．よって点 Q の軌跡が直線 l である，

(2) 原点を中心とする半径 1 の円を D とする．

$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = 1$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}| < 1$ なら $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| > 1$ である．つまり点 P が円 D の内部にあれば点 Q は円 D の外部にある．同様に点 P が円 D の外部にあれば点 Q は円 D の内部にあり，点 P が円 D の周上にあれば点 Q は点 P と一致する．

したがって円 C が円 D の内部にあれば l と C に共通点はない．円 C が円 D に内接すれば l と C は 1 点を共有する．円 C が円 D と交われば，l はこの交点を通り，したがって l と C は 2 点で交わる．つまり C と D が 2 点で交わることが求める条件である．その条件は $\mathrm{OB} > 1$ であるから，r に関する条件は $r > \dfrac{1}{2}$ である．　□

解法 2　記号は解法 1 のものを使う．

(1) 条件から正の数 k を用いて

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

とおけ，さらに条件から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}| = k|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2 = 1$$

である．この結果 $k = \dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}$ となり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}} \quad \cdots ②$$

円 C は線分 OB を直径とする円なので，点 P が円 C 上にあることは

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{BP}} = 0$$

と同値である．これから

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$$

ここに ② を代入．

$$\frac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^4}-\frac{2}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$$

① より

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}$$

$$\therefore\quad \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{Q_0Q}}=0$$

これは，点 Q が，点 $\mathrm{Q_0}$ を通り $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示している．
(2) l が C と 2 点で交わる条件は，円 C の中心 A と l との距離が半径 r より小さいことである．
(1) から A と l との距離は $||\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}|-r|$ であり，① から

$$|\overrightarrow{\mathrm{OQ_0}}|=\frac{1}{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2r}$$

であるから，条件は $\left|\frac{1}{2r}-r\right|<r$ となる．

つまり $-r<\frac{1}{2r}-r<r$ となり，求める r の条件は $\frac{1}{2}<r$ である． □

解法 3　(1) $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とし，② を成分で書く．

$$x=\frac{X}{X^2+Y^2},\ y=\frac{Y}{X^2+Y^2}\quad\cdots③$$

円 C の中心を $(a,\ b)$ とする．原点を通るので，$r^2=a^2+b^2$ である．円 C は円の方程式

$$(x-a)^2+(y-b)^2=a^2+b^2\quad\cdots④$$

を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の集合である．点 Q の軌跡は，ここに ③ を代入して得られた方程式で定まる図形から，もし $(X,\ Y)=(0,\ 0)$ が含まれればそれを除いた集合である．

④ を展開整理して代入する．条件から $(x^2+y^2)(X^2+Y^2)=1$ なので

$$\frac{1}{X^2+Y^2}+\frac{-2aX}{X^2+Y^2}+\frac{-2bY}{X^2+Y^2}=0$$

を得る．これから点 Q は方程式

$$ax+by=\frac{1}{2}$$

で定まる直線 l 上を動く．この直線の法線方向は $(a,\ b)$ でこれは $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であるから題意が示せた．
(2) l が C と 2 点で交わる条件は，円 C の中心 $(a,\ b)$ と l との距離が半径 r より小さいことである．

$$\frac{\left|a^2+b^2-\frac{1}{2}\right|}{\sqrt{a^2+b^2}}<r$$

$r=\sqrt{a^2+b^2}$ なので

$$\frac{\left|r^2-\frac{1}{2}\right|}{r}<r$$

$$-r^2 < r^2 - \frac{1}{2} < r^2$$

$$\therefore \quad \frac{1}{2} < r$$

□

解法 4　(1) 図形を複素数平面で考え，$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$ とおく．条件から正の数 k を用いて $z = kw$ とおけ，さらに条件から

$$|z| \cdot |w| = k\,|w|^2 = 1$$

である．この結果

$$k = \frac{1}{|w|^2}$$

となり

$$z = \frac{w}{|w|^2} = \frac{1}{\overline{w}}$$

である．$\mathrm{A}(a)$ とする．円 C の条件から $|a| = r$ である．円 C は点 A を中心とし半径 r の円周上にあるので

$$|z - a| = r$$

これから

$$\left|\frac{1}{\overline{w}} - a\right| = r = |a|$$

$$\therefore \quad |1 - \overline{w}a| = |\overline{w}a|$$

両辺 2 乗して

$$\begin{aligned} |1 - \overline{w}a|^2 &= (1 - \overline{w}a)(1 - w\overline{a}) \\ &= 1 - \overline{w}a - w\overline{a} + |\overline{w}a|^2 = |\overline{w}a|^2 \end{aligned}$$

これから

$$1 = \overline{w}a + w\overline{a}$$

これを満たす w を一つとり $\mathrm{Q}_0(w_0)$ とする．

$$1 = \overline{w_0}a + w_0\overline{a}$$

$$\therefore \quad 0 = (\overline{w} - \overline{w}_0)a + (w - w_0)\overline{a}$$

両辺 $|a|^2 = a\overline{a}$ で割ることにより，

$$\overline{\left(\frac{w - w_0}{a}\right)} = -\frac{w - w_0}{a}$$

を得る．複素数 $\dfrac{w - w_0}{a}$ が純虚数となったので，直線 $\mathrm{Q}_0\mathrm{Q}$ は直線 OA と直交している．
(2) はベクトルの場合と同様なので省略する．　□

点 Q は，点 P の，原点を中心とする半径 1 の円に関する**反転**または**鏡像**である，という．反転を扱うには，図形的方法とベクトルや座標，あるいは複素数平面による方法がある．解法 1 は，若干異なるが，ベクトルを用いた解法 2 と座標による解法 3 は，本質的には同じことで，表現が異なるだけである．

ベクトルでは $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \dfrac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ までしかできないが，複素数では $z = \dfrac{1}{w}$ まで簡明になるので，逆に解いて代入することが可能になる．このように反転を座標平面で扱うときは，複素数平面として考えるのが一番簡明である．

2008 年京大理系乙の 3 番は次の問題だった．

例題 4.2　［08 京大理系乙］

空間の 1 点 O を通る 4 直線でどの 3 直線も同一平面上にないようなものを考える．このとき，4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で，4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ．

この問題を決定問題として言いかえると次のようになる．

> 次の命題の真偽を決定せよ．
>
> 空間の 4 直線が条件：「1 点 O を通りかつどの 3 直線も同一平面上にない」を満たすなら，4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で 4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在する．

このような問題は構造が比較的明確だ．図形的に考えることもできるが，基本的には空間ベクトルの問題として処理するのがよい．そのとき，空間では同一平面上にない 3 ベクトルは 1 次独立で，他の任意のベクトルを書き表すことができる，ということに思い至ればよい．

解答　4 本の直線の方向ベクトルを $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{d}$ とする．ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ が表す 3 本の直線は同じ平面上にはないので，これらのベクトルのいずれも他の二つのベクトルで表すことはできない．つまり 1 次独立である．空間は 3 次元であるから 1 次独立なベクトルの個数は 3 個以内である．つまり 4 個のベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$，$\overrightarrow{d}$ は 1 次独立ではない．

$$\overrightarrow{d} = \alpha\overrightarrow{a} + \beta\overrightarrow{b} + \gamma\overrightarrow{c}$$

となる実数 α, β, γ が存在する．どの 3 直線も同一平面上にないので，$\alpha\beta\gamma \neq 0$ である．

各直線上の 4 点 A，B，C，D を

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \alpha\overrightarrow{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -\beta\overrightarrow{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = \gamma\overrightarrow{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \overrightarrow{d}$$

で定める．これらはいずれも原点とは異なる．このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} - \overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

より

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} - \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

なので，点 D は 3 点 A，B，C で定まる平面 π 上にある．四辺形 ABCD の 2 辺 AD と BC が平行で長さが等しいので ABCD は平行四辺形である．したがって π は 4 直線のいずれとも O 以外の点で交わり，4 つの交点が平行四辺形の頂点になる．π は問題の条件をすべて満たす平面である．□

注意　この論証では，次の各命題が同値であることを用いた．

- 3ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ は同一平面上にない.
- 3ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ は1次独立である.
- 3ベクトル $\overrightarrow{a}$，$\overrightarrow{b}$，$\overrightarrow{c}$ を用いて同じ空間内の任意のベクトルを表すことができる.

高校数学の範囲では3次行列の逆行列等は習わないので，これは教科書のように図形的証明しかない．が，これらの正確な定義と同値性の証明などについては『数学対話』のなかの「線型代数の考え方」等にあるので，根拠を知りたいと思ったらこれを参考にしてほしい.

4.1.2　値域・軌跡・通過範囲

図形とは一定の条件を満たす点の集合であると考えれば，媒介変数をもつ曲線の**通過領域**も，適切に考えることができる．通過領域の問題は，いくつかの解法があるが，基本は次のように媒介変数の存在する条件から求めるものである.

(i) 点 $(X,\ Y)$ が通過範囲にあるための必要十分条件を書く.

(ii) それは媒介変数 t の存在する条件として表される.

(iii) t の方程式が解をもつ条件を X と Y の不等式で書き表す.

この観点から，値域・軌跡・通過範囲を統一的に把握しよう．これは，**問題の構造をよく見て論理的に考える**練習になる.

例題 4.3

---

(1) $x=t^2+2t-3$ とする. t が $0 \leqq t \leqq 1$ の範囲に存在するとき，対応する x からなる数直線の部分集合 V を求めよ.

(2) $x-ty-1=0,\ tx+y-1=0$ とする．t が実数にあるとき，対応する点 $(x,\ y)$ からなる xy 平面の部分集合 V を求めよ.

(3) $t^2+tx+y=0$ とする．t が $0 \leqq t \leqq 1$ に存在するとき, 対応する点 $(x,\ y)$ からなる xy 平面の部分集合 V を求めよ.

(4) $s+t=x,\ st=y$ とする．実数 $s,\ t$ が $|s|+|t| \leqq 1$ に存在するとき, 対応する点 $(x,\ y)$ からなる xy 平面の部分集合 V を求めよ.

問題を解きながら，普通はどのようにいわれているのか，考えていこう．あえて問題にあわせた解答をしていく.

解答

(1)

$$\begin{cases} s=f(t)=t^2+2t-3=(t+1)^2-4 \\ s=x \end{cases}$$

とおき, 二つのグラフが $0 \leqq t \leqq 1$ で交わる x の範囲を求めればよい.

$s=(t+1)^2-4$ となり，グラフの軸が $t=-1$ である．したがってここでは単調増加なので

$$f(0) \leqq x \leqq f(1)$$

よって

$$V=\{x \mid -3 \leqq x \leqq 0\}$$

これは「t が $0 \leqq t \leqq 1$ を変域とするときの x の値域」というものだ.「 x のとる値」とは, 実は「 t が存在するような x の値」である.

(2)

解 1

$x,\ y$ の連立方程式と見て解く.

$$x=\frac{1+t}{1+t^2},\ y=\frac{1-t}{1+t^2}$$

$x+y=\dfrac{2}{1+t^2} \neq 0,\ x-y=\dfrac{2t}{1+t^2}$ なので

$$t=\frac{x-y}{x+y}$$

これを条件式に代入することにより

$$x^2-x+y^2-y=0$$

$x+y \neq 0$ とあわせて

$$V=\{(x,\ y) \mid x^2-x+y^2-y=0,\ (x,\ y) \neq (0,\ 0)\}$$

解 2

$x-ty-1=0$ となる t が存在するのは

$$(x,\ y)=(1,\ 0) \text{ または } y \neq 0,\ t=\frac{x-1}{y}$$

$tx+y-1=0$ となる t が存在するのは

$$(x,\ y)=(0,\ 1) \text{ または } x \neq 0,\ t=-\frac{y-1}{x}$$

$\dfrac{x-1}{y}=-\dfrac{y-1}{x}$ より

$$x(x-1)+y(y-1)=0$$

これは $(x,\ y)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ も含む．よって

$$V=\{(x,\ y) \mid x^2-x+y^2-y=0,\ (x,\ y) \neq (0,\ 0)\}$$

注意　さらに, これは二直線が直交することからも求められる．その場合, 除外点の考察をていねいにすること.

本問の図形が「 t が実数を動くときの二直線の交点の軌跡」というものだ.「軌跡」といっても「点の集合」であることに変わりない.

(3) 求める $(x,\ y)$ であることは，$t_0{}^2+t_0x+y=0$ となる $0 \leqq t_0 \leqq 1$ の範囲の t_0 が存在することと同値である．

ゆえに t の二次方程式 $t^2+tx+y=0$ が $0 \leqq t \leqq 1$ に解をもつような $(x,\ y)$ に他ならない．
$f(t)=t^2+tx+y$ とおく．次のいずれかが成り立てばよい．

$$\begin{aligned}
&f(0)\cdot f(1) \leqq 0\\
&D=x^2-4y \geqq 0,\ f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0,\ 0 \leqq -\frac{x}{2} \leqq 1
\end{aligned}$$

これから, V は次の条件のいずれかをみたす点 $(x,\ y)$ の集合

$$\begin{cases} y \geqq 0\\ 1+x+y \leqq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} y \leqq 0\\ 1+x+y \geqq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2-4y \geqq 0\\ 1+x+y \geqq 0,\ y \geqq 0\\ -2 \leqq x \leqq 0 \end{cases}$$

これは「t が $0 \leqq t \leqq 1$ を動くときの直線の通過範囲」というものだ．条件をみたす点 $(x,\ y)$ の集合であることに変わりない．

(4) s と t が実数という条件の下

$$\begin{aligned}
|s|+|t| \leqq 1 \quad &\Longleftrightarrow \quad (|s|+|t|)^2 \leqq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad s^2+2|st|+t^2 \leqq 1\\
&\Longleftrightarrow \quad (s+t)^2-2st+2|st| \leqq 1\\
&\qquad \therefore \quad x^2-2y+2|y| \leqq 1
\end{aligned}$$

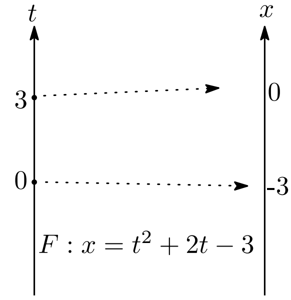
一方, s と t は二次方程式 $X^2-xX+y=0$ の 2 解である．この二次方程式が 2 実数解をもたねばならない

$$x^2-4y \geqq 0$$

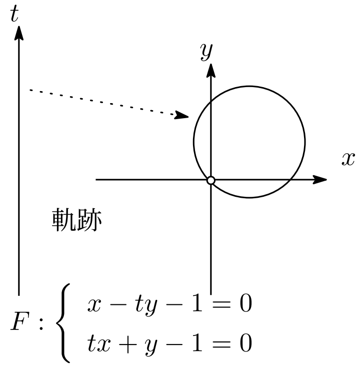
よって

$$V=\{(x,\ y)\,|\,x^2-2y+2|y| \leqq 1 \text{ かつ } x^2-4y \geqq 0\}$$

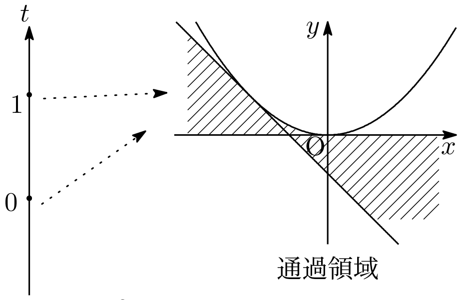
$x^2-2y+2|y| \leqq 1$ は， $y \geqq 0$ なら $-1 \leqq x \leqq 1$ ， $y<0$ なら $x^2-4y \leqq 1$ を意味する．
これは「領域から領域への写像」だ．



値域

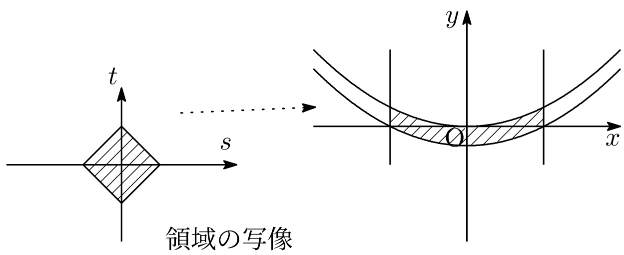


軌跡



通過領域

$F : t^2 + tx + y = 0$



領域の写像

通常「値域，軌跡，通過範囲」といわれるものもこのように言い方や見方をかえれば，同じ型の問題であることは理解できただろうか．

問題の定式化　さて問題の構造をもう少し定式化して考えよう．

A, B を数直線や座標平面，またはその部分集合とする．A の要素を動く変数 T と B の要素を動く変数 X の間の関係式がある (一つとはかぎらない) とする．この関係式を $F(T,\ X) = 0$ と象徴的に書こう．象徴的というのは，式が一つとはかぎらないからである．また， T や X と大文字を使ったのは，$X = (x,\ y)$ のような平面の点 (二変数) のこともあるからだ．一変数のときは小文字を使うのが普通だが統一的に大文字にした．T は通常のいい方では**媒介変数**にあたる．

この観点から例題の (1)(2)(3) を再度一般的な命名と問題の形にまとめる．

(1) t が実数 A の部分集合 $U = \{\ t \mid 0 \leqq t \leqq 1\}$ を動くとき F : $x - (t^2 + 2t - 3) = 0$ で定まる x の値の集合 V(実数 B の部分集合) を求めよ．V を関数 $x = f(t) = t^2 + 2t - 3$ の**値域**という．

(2) t が 実数 A を動くとき二つの式 $F : \begin{cases} x - ty - 1 = 0 \\ tx + y - 1 = 0 \end{cases}$ で定まる xy 平面 B の部分集合 V を求めよ．集合 V を F で定まる点の**軌跡**という．

(3) t が実数 A の部分集合 $U = \{t|0 \leqq t \leqq 1\}$ を動くとき，式 F : $t^2 + tx + y = 0$ で定まる xy 平面 B 内の直線の存在する集合 V を求めよ．集合 V のことを直線の**通過領域**という．

このように上の問題はどれも次の形をしている，

集合 A と集合 B の要素の間に一定の関係があるときに，A の部分集合 U の各要素と
この関係で対応する B の要素の集合 V を求めよ．

集合で書けば V は次のように書ける．

$$V = \{\ X \mid X \in B,\ F(T,\ X) = 0 \text{ となる } T(\in U) \text{ が存在する }\}$$

このように考えれば，要素 $X = X_0$ が V に属するための必要十分条件が $F(T_0,\ X_0) = 0$ となる T_0 が U に存在することであることが見やすい．これから X_0 が満たすべき必要十分条件が求まり，それがつまり V を**定める**．入試問題では，x や y を固定して，t が存在するための必要十分条件として x や y の存在範囲を定める，という論述方針で取り組むのがよい．

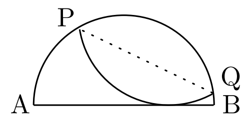
受験参考書ではこのようにして媒介変数の存在条件として V を求める方法を「逆像法」とか「逆手法」とかいうことが多い．何となく「裏ワザ」的な名前がついているため，正面から勉強しないことが多いようだが，この方法こそ問題の構造を論理的に解明する「**正攻法**」なのだ．これがときに応じて値域であり，軌跡であり，通過領域，ということだ．値域とか，軌跡とか，通過領域とか，いろいろに訳すのは日本の高校数学ぐらいなもので，かえってわかりにくくなっている．大切なことは，この V は**媒介変数 T が存在するための条件として定まる**ということだ．

ただしあくまで「定まる」ということであって，具体的に**求まる**かどうかは別の問題である．例えば『数学対話』のなかの「包絡線」で取りあげた通過領域は，この方法では具体的には求まらなかった．そこでもう少し，軌跡や通過領域を図形的に考えることが必要になり，それを述べたのが,「包絡線」である．

また，例題の (4) で，もし $x = 2s + t,\ y = st$ として対称性を崩すと，たちまちこのままではできない．この場合も領域の形を定めるためには，別の工夫がいる．万能ということではなく，領域や軌跡が何によって定まるのかを，しっかりおさえよ，ということである．入試問題は，この**対象のなかにある論理**がつかめているかを問う問題が多く，したがって，ここで述べてきたことで解けるものがほとんどなのだ．

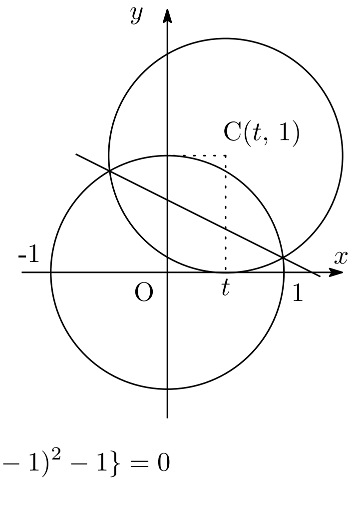
例題 4.4　［92 千葉大］

線分 AB を直径とする半円がある．周上の弧 PQ を弦 PQ で折り返したとき，折り返された弧が AB に接したとする (右図)．このような弦 PQ の存在する範囲を求めて図示せよ．



考え方　さてこれは何をどう置けばよいのか．まずこれは座標平面に入れよう．当然円の中心を原点にする単位円だ．座標平面に入れて考える．折り返すとはどういうことだ．円弧を折り返すように考えるが，折り返された円弧は別の円の弧の一部だ．

ここが飛躍だ．この新しい折り返された円は，当然もとの円と半径は同じ 1 だ．では中心は． x 軸に接する円の中心の x 座標は x 軸との接線だ．そこで,「何をどう置くか」だ．



解答　接点を t とおく．折り返された円は中心が $(t,\ 1)$ で半径が 1 の円である．

$$(x-t)^2 + (y-1)^2 = 1^2$$

弦 PQ はもとの円と新たな円の交点を通る直線である．直線 PQ の方程式は次のようになる．

$$\begin{aligned} & x^2 + y^2 - 1 + (-1)\{(x-t)^2 + (y-1)^2 - 1\} = 0 \\ \iff\ & 2tx + 2y - t^2 - 1 = 0 \end{aligned}$$

t の変域は $-1 \leqq t \leqq 1$ である．

よって弦 PQ の通過範囲は媒介変数 t が $-1 \leqq t \leqq 1$ を動くときの，直線 $2tx+2y-t^2-1=0$ の通過範囲と，円の周および内部の共通部分である．

$$f(t)=t^2-2xt-2y+1$$

とおく．x と y を固定する．点 $(x,\ y)$ が直線 PQ の通過範囲にあることは，$f(t)=0$ となる t が $-1 \leqq t \leqq 1$ に存在することと同値である．いいかえると t の方程式 $f(t)=0$ が $-1 \leqq t \leqq 1$ に解をもつ条件を x と y の不等式で書いたものが直線 PQ の通過範囲である．

よって，$f(-1)f(1) \leqq 0$ ，または $D \geqq 0,\ f(-1) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0,\ -1 \leqq$ 軸 $\leqq 1$ が成り立てばよい．$t=\pm 1$ がこの二組の条件のいずれにも入っているが,「または」だからこれでよい．

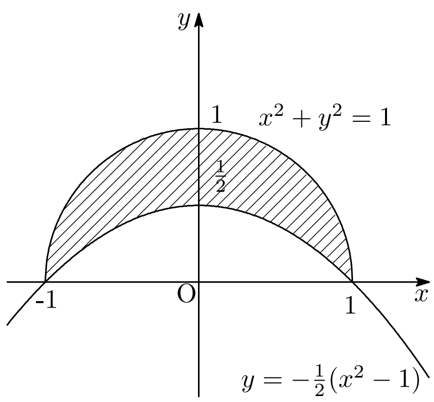
これから次のいずれかを満たす点の集合と円の周および内部との共通部分が求めるものである．

① $1-x-y \leqq 0,$ かつ $1+x-y \geqq 0$

② $1-x-y \geqq 0,$ かつ $1+x-y \leqq 0$

③ $x^2-(1-2y) \geqq 0,\ 1-x-y \geqq 0,$
$1+x-y \geqq 0,$ かつ $-1 \leqq x \leqq 1$

この領域と半円の内部の共通部分が求める通過範囲である．図示すると右のようになる． □



4.1.3 問題と考え方

問題

4.1 ［98 中京大］ 考え方 4.1 解答 5.65

m がすべての実数値をとりながら変わるとき，二つの直線

$$mx-y+4m+21=0,\ x+my+3m-14=0$$

の交点の軌跡を求めよ．

4.2 ［98 奈良女子大］ 考え方 4.2 解答 5.66

xy 平面上の y 軸に平行な直線 $x=1$ を l とする．l 上の点 P に対して次の三つの条件を満たす点 Q を対応させる．

(1) 原点を O とするとき， Q は直線 OP 上にある．

(2) Q の x 座標は負である．

(3) $|\mathrm{AB}|$ で線分 AB の長さを表すとき，$|\mathrm{OP}||\mathrm{OQ}|=1$ を満たす．

P が l 上を動くとき， Q の軌跡を求めよ．

4.3 ［01 北大］ 考え方 4.3 解答 5.67

xy 平面上の円 $x^2+y^2=1$ へ，この円の外部の点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から 2 本の接線を引き、その接点を A, B とし，線分 AB の中点を Q とする．

(1) 点 Q の座標を $a,\ b$ を用いて表せ.

(2) 点 P が円 $(x-3)^2+y^2=1$ 上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ.

4.4　［99 都立大］　考え方 4.4　解答 5.68

点 $(x,\ y)$ が xy 平面の第 3 象限を動くとき，

$$x'=\frac{-5x-6y+7}{x+3y-5},\ y'=\frac{2x-3y-1}{x+3y-5}$$

によって与えられる点 $(x',\ y')$ はどんな領域を動くか．その領域を図示し，境界を含めた領域の面積を求めよ.

4.5　［出典不明］　考え方 4.5　解答 5.69

θ がすべての実数値を動くとき, xy 平面上の直線

$$y=(\cos\theta)x-\cos 2\theta$$

の通過する範囲を求め図示せよ.

4.6　［97 東大文系］　考え方 4.6　解答 5.70

$0 \leqq t \leqq 1$ をみたす実数 t に対して，xy 平面上の点 A，B を

$$\mathrm{A}\left(\frac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)},\ -2\right),\ \mathrm{B}\left(\frac{2}{3}t,\ -2t\right)$$

と定める．t が $0 \leqq t \leqq 1$ を動くとき，直線 AB の通りうる範囲を求めよ.

4.7　［97 一橋後期］　考え方 4.7　解答 5.71

実数 a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，曲線 $y=x^3-3a^2x+a^2$ の極大点と極小点の間にある部分 (ただし，極大点，極小点は含まない) が通る範囲を図示せよ.

4.8　［05 阪大理系前期］　考え方 4.8　解答 5.72

θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする．時刻 t における座標が

$$\begin{cases} x=t\cos\theta \\ y=1-t^2+t\sin\theta \end{cases}$$

で与えられるような動点 P$(x,\ y)$ を考える．t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする．C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする．以下の問いに答えよ.

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき，Q の x 座標を求めよ.

(2) θ が変化すると曲線 C も変化する．θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ.

(3) θ が変化すると点 Q も変化する．Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ.

4.9　［05 一橋前期］　考え方 4.9　解答 5.73

a を定数とし，x の 2 次関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める．

$$f(x) = x^2 - 3$$
$$g(x) = -2(x-a)^2 + \frac{a^2}{3}$$

(1) 二つの放物線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が二つの共有点をもつような a の範囲を求めよ．

(2) (1) で求めた範囲に属する a に対して，二つの放物線によって囲まれる図形を C_a とする．C_a の面積を a で表せ．

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき，少なくとも 1 つの C_a に属する点全体からなる図形の面積を求めよ．

4.10　［07 東大］　考え方 4.10　解答 5.74

座標平面上の 2 点 P，Q が，曲線 $y = x^2$ $(-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を 1:2 に内分する点 R が動く範囲を D とする．ただし，P=Q のときは R=P とする．

(1) a を $-1 \leqq a \leqq 1$ をみたす実数とするとき，点 (a, b) が D に属するための b の条件を a を用いて表せ．

(2) D を図示せよ．

考え方

4.1　［98 中京大］　問題 4.1　解答 5.65

軌跡は媒介変数の存在条件である．この観点からいくつかの解法を考えておこう．基本は連立 1 次方程式を解くように x と y を m で表すことである．そこからとりうる範囲を確定して，m を消去すればよい．

4.2　［98 奈良女子大］　問題 4.2　解答 5.66

反転の応用形である．反転の場合と同様に P と Q は互いに他を表すことができる．

4.3　［01 北大］　問題 4.3　解答 5.67

（1）は図形的に反転の関係を求めてから，一方を他方で表してもよいし，また直線 AB の方程式を求め，直線 OP との交点として Q を確定してもよい．

4.4　［99 都立大］　問題 4.4　解答 5.68

一見見かけは複雑だが，逆に解ければ条件 $x < 0,\ y < 0$ に代入するだけである．分母が 0 となるときを別に考え，分母を払えば x と y の連立 1 次方程式である．

4.5　［出典不明］　問題 4.5　解答 5.69

θ が媒介変数であるが，$t = \cos\theta$ とおけば θ の存在と，$-1 \leqq t \leqq 1$ の範囲の t の存在とが同値になり，例題と同じ直線の通過領域の問題である．

4.6　［97 東大文系］　問題 4.6　解答 5.70

直線 AB を t を用いて表すと簡単な式になった．ただし 3 次式である．しかし t の 3 次方程式と見て解が与えられた範囲にあることが，必要十分条件であることは変わりない．3 次関数なので極値の位置で場合分けである．

4.7　［97 一橋後期］　問題 4.7　解答 5.71

基本は通る範囲の点であるための必要十分条件を書くことである．その条件をよく見ると a^2 の 1 次式ではないか．1 次式なら例外を除いて逆に解ける．

4.8　［05 阪大理系前期］　問題 4.8　解答 5.72

二つの媒介変数があるので，いずれを固定して考えているのか見極めること．その点に注意すればよい．

4.9　［05 一橋前期］　問題 4.9　解答 5.73

(3) が通過範囲の問題である．どれかの C_a に属するための必要十分条件とは，つまりその点を要素にもつ a が存在することとして書ける．統一した考え方のもとに，厳密に論証しよう．

4.10　［07 東大］　問題 4.10　解答 5.74

これは逆像法の方が難しくなる場合である．問題にしたがって a を固定し正像法で b の条件を出すのがよい．逆像法による解答も研究しよう．

4.2　不変な関係

変化の中で変わらないもの　数学の問題の多くは，関数 $y=f(x)$ で x の変化に対する y の値の変化という関数や，平面上を動く点とか，試行のたびに変化する値とか，いろいろと「動くもの」がある．その時，動くもののなかで動かないものを見つけることが，問題を解くうえで大きなカギになることが多い．

第一は**不変量**の発見である．いろんな関数や，確率などの試行の過程，あるいは定数や変数の変化など，さまざまの「変化」がある．その変化を調べるときに，それらが変化しても変わらない関係や量を発見し，それを軸に変化の相互関係を解明する．

第二は**不動点**の発見だ．関数のグラフが傾きなどいろいろと変化するとき，にもかかわらずつねに定点を通るならそこを軸に考えればよい．係数に媒介変数の入った曲線では，つねに通る点をさがそう．図形が形を変えつつ移動するとき，つねに通る定点がわかれば糸口がつかめる．

これらを考える基礎の一つが**恒等式**の考え方である．すべての x で成立する関係式とは，x が変化しても動かない関係そのものだからである．恒等式の正確な理解からはじめよう．

4.2.1　恒等式

まず恒等式とは何か．それを理解するためには「等号」を知らねばならない．

次の三つの等号はそれぞれ意味が異なる．

(1) $x^2-3x+2=0$

(2) $x^2-3x+2=(x-1)(x-2)$

(3) $y = x^2 - 3x + 2$

自分でその違いが説明できるだろうか．

(1) の等式は x に特定の値を代入したときのみ成立し「方程式」といわれる．

(2) の等式は x に任意の値を代入したとき成立し「恒等式」といわれる．

(3) の等式は y が $x^2 - 3x + 2$ で定まる x の関数であること，あるいは $x^2 - 3x + 2$ を y と置いたことを意味している．また, x と y の等式と見れば一定の $(x,\ y)$ の値に対してのみ成立する一種の方程式 (不定方程式) でもある．

このように等号はいろんな意味があるので，常に意識して等号の意味を考えなければならない．そこで，恒等式を特徴づける基本性質を示そう．

定理 1

$A(x), B(x)$ が高々n 次の x についての整式であるとき，次の三つの命題は同値である．またこのとき，等式 $A(x) = B(x)$ は **恒等式** であるという．

(i) $A(x)$ と $B(x)$ は同一の式である．つまり，次数が等しくかつ同じ次数の項の係数が等しい．

(ii) 任意の x の値に対して $A(x)$, $B(x)$ は同一の値をとる．

(iii) 等式 $A(x) = B(x)$ が異なる $n + 1$ 個の x の値に対して成り立つ．

証明

(1) (i) $\Rightarrow$ (ii)：明白である．

(2) (ii) $\Rightarrow$ (iii)：明白である．

(3) (iii) $\Rightarrow$ (i)：$H(x) = A(x) - B(x)$ は n 次以下の整式である．$a_i (1 \leqq i \leqq n + 1)$ の相異なる a_i に対して, $H(a_i) = 0$ であるから，因数定理より，

$$H(x) = (x - a_1)(x - a_2)\cdots(x - a_{n+1})Q(x)$$

と因数分解される．もし $Q(x) \neq 0$ なら，左辺の次数は n 以下であり，右辺の次数は $n + 1$ 以上となる．よって矛盾が起こる．従って $H(x) = 0$ ．つまり $A(x) = B(x)$ である．

このとき (ii) $\Rightarrow$ (iii)，(iii) $\Rightarrow$ (i) より (ii) $\Rightarrow$ (i)．ゆえに (i) と (ii) は同値．他も同様．

ゆえに三つの条件は互いに他の二つの必要十分条件になっていることが示された． □

これをおさえて次の例題を考えよう．問題を読んだら少し自分で考えてみてほしい．

例題 4.5 ［法政大過去問］

$P(x)$ を三次以下の整式とする．恒等的に $P(x + 1) + P(x - 1) = 2P(x)$ が成立すれば，任意の α に対しても恒等的に $P(x + \alpha) + P(x - \alpha) = 2P(x)$ が成立することを示せ．

考え方　この問題を普通は次のように x の整式の問題として解く．しかしまた α に関する整式と見ることもできる．
解答 1　$P(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ とおく．

$$
\begin{aligned}
& P(x+1) + P(x-1) \\
= \ & a(x+1)^3 + b(x+1)^2 + c(x+1) + d + a(x-1)^3 + b(x-1)^2 + c(x-1) + d \\
= \ & 2ax^3 + 2bx^2 + (6a+2c)x + (2b+2d) \\
= \ & 2P(x) \\
= \ & 2ax^3 + 2bx^2 + 2cx + 2d
\end{aligned}
$$

これが恒等式になるので，

$$6a + 2c = 2c \ , \ 2b + 2d = 2d$$

より $a = 0$ ，　$b = 0$. つまり $P(x) = cx + d$ ．このとき

$$P(x+\alpha) + P(x-\alpha) = 2cx + 2d = 2P(x)$$

より成立．　□

ここで少し観点を変え，α の式と見てみよう．
解答 2

$$P(x+\alpha) + P(x-\alpha) = 2P(x) \quad \cdots ①$$

を α に関する等式と見る．① が α の方程式か恒等式かを考える．$P(x)$ の最高次数が三次なら

$$\alpha^3 + (-\alpha)^3 = 0$$

なので

$$P(x+\alpha) + P(x-\alpha) = P(\alpha + x) + P(-\alpha + x)$$

つまり ① の左辺は α の多項式として二次以下で，右辺は定数である．ところが ① は $\alpha = 1$, -1 , 0 で成立する．よって ① は x が何であれ α の恒等式である．つまり任意の α に対して x の恒等式でもある．　□

これが「**恒等式を発見する**」ということである．大切なことは「どの文字について恒等式か」を考えることだ．もう一つ例題をしよう．

例題 4.6　［早稲田過去問改題］

直線 $y = mx + m^2 + m + 1$ は m がどんな値をとっても，ある一定の y 軸と平行な軸をもつ放物線と接している．この放物線の方程式を求めよ．

考え方　これにも実は 2 通りの方法がある．直線と連立するとつねに重解をもつような 2 次関数を求めればよい．一方直線の通過領域を求めてもよいのだ．直線は通過領域の境界の曲線と接しながら動いていく．
解答　求める放物線を

$$y = ax^2 + bx + c$$

とおく．これが直線 $y=mx+m^2+m+1$ と接することは， y を消去して整理した二次方程式

$$ax^2+(b-m)x+c-m^2-m-1=0$$

が重解をもつことと同値である．

$$D=(b-m)^2-4(c-m^2-m-1)a=0$$

これが m についての恒等式となればよい． m で整理し

$$(4a+1)m^2+2(2a-b)m+b^2-4ac+4a=0$$

したがって求める条件は

$$\begin{cases} 4a+1=0 \\ 2a-b=0 \\ b^2-4ac+4a=0 \end{cases}$$

これから

$$a=-\frac{1}{4},\ b=-\frac{1}{2},\ c=\frac{3}{4}$$

つまり求める放物線の方程式は

$$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

である． □

　これには別解がある．前節の「図形は点の集合だ」を参考にしてほしい．

別解　直線 $y=mx+m^2+m+1$ の通過範囲を求める．

$$m^2+(x+1)m+1-y=0$$

とおく．m が全実数を動くので，

$$D=(x+1)^2-4(1-y)\geqq 0$$

これから，

$$y\geqq -\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

直線の通過範囲の境界の曲線に直線 $y=mx+m^2+m+1$ は接している．実際

$$mx+m^2+m+1=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

とおくと．これは

$$x^2+2(2m+1)x+4m^2+4m+1=0$$

この判別式 D' は

$$D'/4=(2m+1)^2-(4m^2+4m+1)=0$$

だからである．ゆえに求める放物線は

$$y=-\frac{1}{4}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{3}{4}$$

である． □

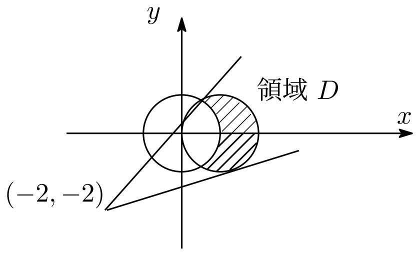
注意　図形的には通過領域の境界にもとの直線が接するのは当然だが，念のためそれを確認した．

例題 4.7

不等式 $1 \leqq x^2+y^2 \leqq 2x$ で定まる領域を D とする．$(x,\ y)$ がこの領域を動くとき，$\dfrac{y+2}{x+2}$ の最大値と最小値を求めよ．

考え方　最大値と最小値を求める x と y の式を k などとおく．その上でどこかに不変なものがあるだろうか考えよう．

解答　$\dfrac{y+2}{x+2}=k$ とおく．D を図示する．D の x に対しては $x+2 \neq 0$ なので，分母を払ってよいことがわかる．



$$y+2=k(x+2)$$

となる．これは xy 平面上の傾きが k の直線である．さらにこの直線は k の値にかかわらず定点 $(-2,\ -2)$ を通る．

したがって，点 $(-2,\ -2)$ と，領域 D 内の点を結ぶ直線の傾きの最大値と最小値を求めればよい．二円の交点は $\left(\dfrac{1}{2},\ \pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ でこれらを通るときの傾きは，$k=\dfrac{4\pm\sqrt{3}}{5}$．また円 $x^2+y^2=2x$ と接する傾きは直線と点 $(1,\ 0)$ との距離が 1 になるときなので，

$$\frac{|3k-2|}{\sqrt{k^2+1}}=1$$

より $k=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{4}$．これらを比較し図を考えて

$$\text{最大値}:\frac{4+\sqrt{3}}{5},\qquad \text{最小値}:\frac{3-\sqrt{3}}{4}$$

□

このように関数の値域を図から考えるときに，不動点があれば考察は明快になる．

4.2.2　定点を通る曲線群

このように，座標幾何で恒等式の考え方は必須のものだ．その典型は次の例だ．曲線の式の係数に媒介変数が入ると，一連の曲線の集合ができる．これを**曲線群**という．この分野は次の二つのことが重要な問題になる．

(1) 二曲線の交点を通る曲線群の表示と応用．

(2) 曲線群の通過範囲を求める方法．

これらの問題では，題意を満たす点の存在と方程式の解の存在とを結びつけて考えることである．要点を述べる．

二曲線の交点を通る曲線群　二つの曲線 $f(x,\ y)=0,\ g(x,\ y)=0$ に対して

$$f(x,\ y)+kg(x,\ y)=0 \quad \cdots ②$$

は，始めの 2 曲線のすべての交点を通る曲線を表す．なぜか．$(\alpha,\ \beta)$ を 1 つの交点とする．

$$f(\alpha,\ \beta)=0,\ g(\alpha,\ \beta)=0$$

である．したがって次式が成り立つ．

$$f(\alpha,\ \beta)+kg(\alpha,\ \beta)=0$$

これは曲線 ② が交点 $(\alpha,\ \beta)$ を通ることを示している．

ただし次の二点に注意しよう．第一に曲線 ② は交点を通る曲線をすべて表すわけではない．第二に曲線 ② は $g(x,\ y)=0$ 自身は表せない．

例

(1) 二直線

$$l_1 : a_1x+b_1y+c_1=0 \quad , \quad l_2 : a_2x+b_2y+c_2=0$$

が点 P で交わるとき，

$$(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

は，点 P を通る直線を表す．ただし l_2 は表せない．

$$h(a_1x+b_1y+c_1)+k(a_2x+b_2y+c_2)=0$$

と二つの実数 $h,\ k$ を用いれば P を通るすべての直線を表すことができる．

(2) 二つの放物線

$$C_1 : y=a_1x^2+b_1x+c_1 \quad , \quad C_2 : y=a_2x^2+b_2x+c_2$$

が二点 P，Q で交わるとする．このとき

$$(a_1x^2+b_1x+c_1-y)+k(a_2x^2+b_2x+c_2-y)=0$$

は点 P，Q を通る．$k=-\dfrac{a_1}{a_2}$ なら 1 次式になるので直線，その他の場合は放物線を表す．

(3) 二円と直線

$$\begin{cases} C_1 & : x^2+y^2+a_1x+b_1y+c_1=0 & \cdots ③ \\ C_2 & : x^2+y^2+a_2x+b_2y+c_2=0 & \cdots ④ \\ l & : (a_1-a_2)x+(b_1-b_2)y+c_1-c_2=0 & \cdots ⑤ \end{cases}$$

次のことが成り立つ．

(i) ⑤ は点 P から $C_1,\ C_2$ への接線の長さが等しい点の軌跡である．

(ii) ③，④，⑤ のうち二つが交われば他のものもその交点を通る．

例題 4.8

円 $C : x^2 + y^2 = 4$ と直線 $l : 2x + y - 2 = 0$ の交点を通りかつ原点も通る円の方程式を求めよ．

解答　求める円を

$$x^2 + y^2 - 4 + k(2x + y - 2) = 0$$

とおく．これが原点を通るので $-4 - 2k = 0$．これから $k = -2$．よって円の方程式は

$$x^2 + y^2 - 4 - 2(2x + y - 2) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad 0(x - 2)^2 + (y - 1)^2 = 5$$

である． □

円と円，円と直線の交点を通る円はいつもこのように元の二式と係数 k などを用いて書けるのだろうか．それを考えるのが次の例題である．

例題 4.9

二つの円 C_1，C_2 が次の方程式で与えられている．

$$\begin{aligned} C_1 &: \quad x^2 + y^2 - 1 = 0 \\ C_2 &: \quad x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7 = 0 \end{aligned}$$

(1) xy 平面上の点 P から C_1 へ引いた接線の接点を $\mathrm{T_1}$，点 P から C_2 へ引いた接線の接点を $\mathrm{T_2}$ とする．$\mathrm{PT_1} = \mathrm{PT_2}$ となるような点 P の軌跡を求めよ．

(2) 実数 k に対し，

$$k(x^2 + y^2 - 1) + x^2 - 4x + y^2 - 4y + 7 = 0 \quad \cdots (*)$$

と置く．これが円となる k の範囲を求めよ．

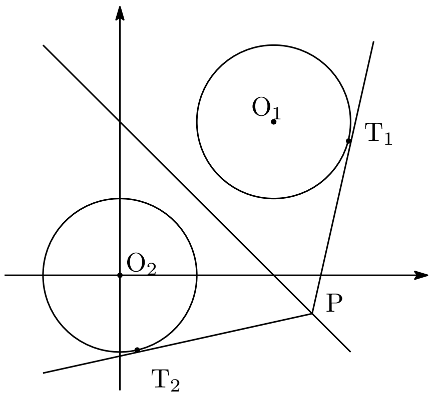
(3) k が (2) の範囲にあるとき，この円を D_k とする．(1) で求めた軌跡上の任意の点 P から D_k に引いた接線の接点を S とし，点 P から C_1 へ引いた接線の接点を $\mathrm{T_1}$ する．このとき常に $\mathrm{PS} = \mathrm{PT_1}$ が成り立つことを示せ．

(4) xy 平面上の円 C があって，(1) で求めた軌跡上の任意の点 P から C に引いた接線の接点を U とし，点 P から C_1 へ引いた接線の接点を $\mathrm{V_1}$ する．このとき常に $\mathrm{PU} = \mathrm{PV_1}$ が成り立つならば円 C を $(*)$ の形に表すような実数 k が存在することを示せ．

解答

(1)　2 円の中心をそれぞれ $\mathrm{O_1}$, $\mathrm{O_2}$ とする．$\mathrm{P}(X, Y)$ とおく．三平方の定理より，

$$\begin{cases} \mathrm{O_1T_1}^2 + \mathrm{PT_1}^2 = \mathrm{PO_1}^2 \\ \mathrm{O_2T_2}^2 + \mathrm{PT_2}^2 = \mathrm{PO_2}^2 \end{cases}$$



条件から

$$\mathrm{PO_1}^2-\mathrm{O_1T_1}^2=\mathrm{PO_2}^2-\mathrm{O_2T_2}^2$$

つまり

$$X^2+Y^2-1=(X-2)^2+(Y-2)^2-1$$

これを整理して $X+Y=2$．これを満たす点 $(X,\ Y)$ は二円の外部にあり，つねにそれぞれの円に接線が引ける．

$$\therefore\quad \text{軌跡は}\quad x+y=2$$

(2)　$(*)$ を変形する．$k=-1$ なら直線なので，$k\neq-1$ とする．

$$\left(x-\frac{2}{k+1}\right)^2+\left(y-\frac{2}{k+1}\right)^2=\frac{k^2-6k+1}{(k+1)^2}$$

これが円になるのは，$k^2-6k+1>0,\ k\neq-1$ のとき．

$$\therefore\quad k<3-2\sqrt{2},\ 3+2\sqrt{2}<k$$

(3)　D_k の中心を O_k とし，$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とおく．三平方の定理より，

$$\begin{cases}\mathrm{O_1T_1}^2+\mathrm{PT_1}^2=\mathrm{PO_1}^2\\ \mathrm{O_kS}^2+\mathrm{PS}^2=\mathrm{PO_k}^2\end{cases}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{PS}^2&=\mathrm{PO_k}^2-\mathrm{O_kS}^2\\&=\left(X-\frac{2}{k+1}\right)^2+\left(Y-\frac{2}{k+1}\right)^2-\frac{k^2-6k+1}{(k+1)^2}\\&=\frac{1}{k+1}\{k(X^2+Y^2-1)+X^2-4X+Y^2-4Y+7\}\\&=\frac{1}{k+1}\{(k+1)(X^2+Y^2-1)-(X^2+Y^2-1)+X^2-4X+Y^2-4Y+7\}\end{aligned}$$

(1) より

$$-(X^2+Y^2-1)+X^2-4X+Y^2-4Y+7=0$$

なので，

$$\mathrm{PS}^2=X^2+Y^2-1=\mathrm{PT_1}^2$$

である．

$$\therefore\quad \mathrm{PS}=\mathrm{PT_1}$$

(4)　$\mathrm{P}(X,\ Y)$ とし，

$$C:x^2-\alpha x+y^2-\beta y+\gamma=0$$

とおく．$\mathrm{PU}=\mathrm{PV_1}$ より (1) と同様にして

$$X^2-\alpha X+Y^2-\beta Y+\gamma=X^2+Y^2-1$$

これが直線 $X+Y=2$ と一致する．よって $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は 0 でない実数 h を用いて

$$-\alpha=h,\ -\beta=h,\ \gamma+1=-2h$$

と表される．これが (*) の形になるためには,

$$\frac{4}{k+1}=\alpha,\ \frac{7-k}{1+k}=\gamma$$

となればよいが，α と γ の関係を h で表すと

$$\frac{4}{k+1}=-h\ \cdots①\ ,\ \frac{7-k}{1+k}=-2h-1\ \cdots②$$

となる．① が成立すれば ② も成立する．ゆえに $\dfrac{4}{k+1}=\alpha$ より $k=\dfrac{4}{\alpha}-1$ とおけばよい．この k に対して確かに $C=D_k$ である． □

4.2.3 不変量の発見

いろんな変換や，確率などの試行過程，あるいは定数や変数の変化など，さまざまの「変化」がある．その変化を調べるときに，それらが変化しても変わらない関係や量を発見し，それを軸に変化の相互関係を解明する．それはどのようなことか，一番わかりやすい例を考えよう．

例題 4.10

容器 A には 3 % の食塩水が 300g，容器 B には 6 % の食塩水が 300g 入れてある．A，B からそれぞれ 100g の食塩水をとって A の分を B に，B の分を A に入れる．このような操作を n 回 $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ 繰り返して行った後の，容器 A の食塩水の濃度を求めよ．

考え方　濃度の違う食塩水を交互に入れていくので，もちろん濃度は 1 回ごとの操作で変化していく．しかし，このような操作で変わらないものがある．そう．二つの容器に入っている塩の量の和は一定だ．

解答　n 回の操作の後で 容器 A の食塩水の濃度が a_n%，容器 B の食塩水の濃度が b_n% であるとする．すると，操作後の塩が操作前のどこから来たかを考えることで次の連立漸化式が得られる．

$$\begin{cases} 300\times\dfrac{a_n}{100}=200\times\dfrac{a_{n-1}}{100}+100\times\dfrac{b_{n-1}}{100} \\ 300\times\dfrac{b_n}{100}=100\times\dfrac{a_{n-1}}{100}+200\times\dfrac{b_{n-1}}{100} \end{cases}$$

この 2 式を加えると

$$300\times\left(\frac{a_n}{100}+\frac{b_n}{100}\right)=300\times\left(\frac{a_{n-1}}{100}+\frac{b_{n-1}}{100}\right)$$

これは 1 回の操作で塩の総量が不変であることを示している．

※ここは，操作の意味からも明かであるが，このように漸化式から結論する方がよい．※

これから

$$a_n+b_n=a_{n-1}+b_{n-1}$$

つまり

$$a_n+b_n=a_0+b_0=9\quad\cdots①$$

一方，先の 2 式を辺々引いて，

$$300 \times \frac{a_n - b_n}{100} = 100 \times \frac{a_{n-1} - b_{n-1}}{100}$$

$a_0 = 3,\ b_0 = 6$ なので

$$a_n - b_n = \frac{1}{3}(a_{n-1} - b_{n-1})$$

ゆえに

$$a_n - b_n = \left(\frac{1}{3}\right)^n (a_0 - b_0) = -3\left(\frac{1}{3}\right)^n \quad \cdots ②$$

① , ② から

$$a_n = \frac{9}{2} - \frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

を得る． □

つぎに変化する量のなかで，変化しない関係を見いだす例題を考えよう．

例題 4.11

△ABC が与えられている．P を △ABC の内部の点とし，D, E, F を点 P から辺 BC, CA, AB に下ろした垂線の足とする．このとき

$$w = \frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{PD}} + \frac{\mathrm{CA}}{\mathrm{PE}} + \frac{\mathrm{AB}}{\mathrm{PF}}$$

を最小にする点 P の位置を決定せよ．

解答 頂点 A, B, C の対辺を $a,\ b,\ c$ ，線分 PD, PE, PF の長さを $x,\ y,\ z$ とする．

$$w = \frac{a}{x} + \frac{b}{y} + \frac{c}{z}$$

P は △ABC の内部をいろいろと動くのだが，そのときつねに成り立つ関係を求める．

$\dfrac{ax}{2}$ はちょうど △PBC の面積である．よって

$$\frac{ax}{2} + \frac{by}{2} + \frac{cz}{2}$$

は三角形の面積 S である．つまり

$$2S = ax + by + cz$$

は， P の取り方によらず一定である．したがって $2S = ax + by + cz$ のとき w を最小にする $(x,\ y,\ z)$ を決定し，その値になる △ABC 内部の点が存在すれば，それが求める点 P である．

ここで相加平均・相乗平均の不等式を使う．

$$\begin{aligned} 2Sw &= (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \\ &= a^2+b^2+c^2+ab\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)+bc\left(\frac{y}{z}+\frac{z}{y}\right)+ca\left(\frac{z}{x}+\frac{x}{z}\right) \\ &\geqq a^2+b^2+c^2+2ab+2bc+2ca=(a+b+c)^2 \end{aligned}$$

等号は $x = y = z$ のときに成立する．

ゆえに w の最小値は $\dfrac{(a+b+c)^2}{2S}$． $x = y = z$ となるのは △ABC の内接円の中心で，これは確かに △ABC の内部の点である． □

4.2.4　対称性の発見と活用

対称式　$f(x,\ y)=x^2y+3xy+xy^2$ のように, x と y を入れ替えても式が同一になる場合 $f(x,y)$ を x と y の **対称式** という．とくに

$$x+y,\ xy$$

を**基本対称式**という．なぜ「基本」というのか．それは 2 変数の対称式はすべて $x+y,\ xy$ を用いて書き表すことができるからである．

二変数の基本対称式は, 2 次方程式の解と係数の関係に現れる．つまり, 2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ の解を $\alpha,\ \beta$ とするとき

$$\alpha+\beta=-\frac{b}{a},\ \alpha\beta=\frac{c}{a}$$

三変数の場合 $f(x,\ y,\ z)$ の $x,\ y,\ z$ をどのように入れ替えても式がかわらない場合に対称式という．三変数の基本対称式は

$$x+y+z,\ xy+yz+zx,\ xyz$$

である．同様に, 三変数の基本対称式は, 3 次方程式の解と係数の関係に現れる．

一般に, $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の n 変数の多項式は n 個の基本対称式をもつ．

- $\sigma_1=x_1+x_2+\cdots+x_n$
- $\sigma_2=x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_2x_3+\cdots+x_{n-1}x_n$
- $\sigma_3=x_1x_2x_3+x_1x_2x_4+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n$
- $\cdots\cdots\cdots$
- $\sigma_n=x_1x_2x_3\cdots x_n$

このとき, 次の**対称式の基本定理**が成り立つ．

対称式は基本対称式の整式として, 一意に書き表せる．

この証明は青空学園のなかにある『不変式』を見てほしい．ここではこれに関する過去問題をやってみよう．

例題 4.12　［95 年上智大］

$f(x,\ y)$ を 2 変数 $x,\ y$ に関する実数を係数にもつ多項式とする．$s=x+y,\ t=xy,\ u=x-y,\ v=x^2$ とおく．このとき, 以下の問いに答えよ．

(1)　(i) $f(x,\ y)=x^2+xy+y^2$ のとき $f(x,\ y)$ を s と u を用いて表せ．

(ii) 一般に $f(x,\ y)$ は s と u との多項式で表されることを示せ．

(iii) 恒等的に $f(x,\ y)=f(-x,\ y)$ が成り立つならば $f(x,\ y)$ は y と v との多項式であることを示せ．

(iv) 恒等的に $f(x,\ y)=f(y,\ x)$ が成り立つならば $f(x,\ y)$ は s と t との多項式であることを示せ．

(2)　(i) 恒等的に $f(x,\ y)=f(x+y,\ x-y)$ が成り立つならば $f(x,\ y)=f(2x,\ 2y)$ が成り立つことを示せ．

(ii) 上の性質をもつ多項式はどのようなものか.

考え方　この問題は二変数の対称式は二つの基本対称式で書けることを示せと言っている．その部分が問題の主要な内容である．解答では二通りの方法を示したが，まずいろいろ考えてみてほしい．

解答

(1)　(i) $x,\ y$ を $s,\ u$ を用いて表すと

$$x = \frac{s+u}{2}, \quad y = \frac{s-u}{2}$$

よって

$$f(x,\ y) = \left(\frac{s+u}{2}\right)^2 + \left(\frac{s+u}{2}\right)\left(\frac{s-u}{2}\right) + \left(\frac{s-u}{2}\right)^2 = \frac{3s^2+u^2}{4}$$

(ii) $f(x,\ y) = f\left(\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{s-u}{2}\right)$ より，$f(x,\ y)$ は $\dfrac{s+u}{2},\ \dfrac{s-u}{2}$ の多項式となるから s と u との多項式で表される．

(iii)

$$f(x,\ y) = \sum_{i,\ j} a_{ij} x^i y^j$$

とおく．$f(x,\ y) = f(-x,\ y)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij} = a_{ij} \cdot (-1)^i$$

よって i が奇数のときは $a_{ij} = 0$ である．つまり $f(x,\ y)$ は $x^2,\ y$ の多項式，つまり y と v の多項式となる．

(iv) (iii) と同様において考えると $f(x,\ y) = f(y,\ x)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij} = a_{ji}$$

$$\begin{aligned}
\therefore\quad f(x,\ y) &= \sum_i a_{ii}(xy)^i + \sum_{i<j} a_{ij}(x^i y^j + x^j y^i) \\
&= \sum_i a_{ii} t^i + \sum_{i<j} a_{ij}(xy)^i (y^{j-i} + x^{j-i}) \\
&= \sum_i a_{ii} t^i + \sum_{i<j} a_{ij} t^i (x^{j-i} + y^{j-i}) \quad \cdots (**)
\end{aligned}$$

0 と自然数 n に対して $x^n + y^n$ が s と t の多項式になることを，次数 n についての数学的帰納法で示す．$x^0+y^0 = 2,\ x+y = s$ であるので $n = 0,\ 1$ で成立．$x^n+y^n,\ x^{n+1}+y^{n+1}$ が $s,\ t$ の多項式であると仮定する．

$$\begin{aligned}
x^{n+2} + y^{n+2} &= (x^{n+1} + y^{n+1})(x+y) - xy(x^n + y^n) \\
&= (x^{n+1} + y^{n+1})s - t(x^n + y^n)
\end{aligned}$$

より $x^{n+2} + y^{n+2}$ も $s,\ t$ の多項式となる．よって $x^n + y^n$ は $s,\ t$ の多項式となる．

したがって, $(**)$ により $f(x,\ y)$ は $s,\ t$ の多項式となる.

別解　$f(x,\ y)$ の各単項式の x の次数と y の次数の和をその単項式の次数とよび, その中で最大のものを $f(x,\ y)$ の次数とよぶ.
$f(x,\ y)=f(y,\ x)$ が成り立つような $f(x,\ y)$ の次数 n についての帰納法で示す.
$n=0,\ 1$ のときは明らかに成立する.
$n=1,\ \cdots,\ k$ で成立するとし, $f(x,\ y)$ を $k+1$ 次対称式とする.

$$F(x,\ y)=f(x,\ y)-f(x+y,\ 0)$$

とおく. これも $x,\ y$ の対称式である.

$$\begin{aligned} F(0,\ y) &= f(0,\ y)-f(y,\ 0) = f(y,\ 0)-f(y,\ 0) = 0 \\ F(x,\ 0) &= f(x,\ 0)-f(x,\ 0) = 0 \end{aligned}$$

よって, $F(x,\ y)$ は xy で割り切れる.
$F(x,\ y)=xyG(x,\ y)$ とおくと, $G(x,\ y)$ は対称式. そして, $G(x,\ y)$ の次数は $k-1$ 次以下である.
したがって, $G(x,\ y)$ は s と t の式である.
よって, $f(x,\ y)=xyG(x,\ y)+f(x+y,\ 0)$ も $s,\ t$ の多項式である.
$n=k+1$ でも成立し, 題意が示された.

(1)　(i) $f(x,\ y)=f(x+y,\ x-y)$ が恒等的に成り立つとき

$$\begin{aligned} f(x,\ y) &= f(x+y,\ x-y) = f((x+y)+(x-y),\ (x+y)-(x-y)) \\ &= f(2x,\ 2y) \end{aligned}$$

(ii .) (1) の (iii) と同様において考えると, $f(x,\ y)=f(2x,\ 2y)$ が恒等的に成り立つとき

$$a_{ij}=2^{i+j}a_{ij}$$

よって, $i,\ j$ の少なくとも一方が 0 でないとき, $a_{ij}=0$
したがって, $f(x,\ y)$ は定数である.　□

交代式　二つ以上の文字を含む式で, 式中に含まれるどの二文字を入れかえても, もとの式と符号だけが変わるとき, その式を**交代式**という.　とくに相異なる二文字の差をすべて掛け合わせた次のような式を**差積**という.

二文字　:　$x-y$
三文字　:　$(x-y)(y-z)(z-x)$
四文字　:　$(x-y)(x-z)(x-u)(y-z)(y-u)(z-u)$

差積によって, 交代式と対称式の関係が明白になる.

交代式＝差積 $\times$ 対称式

である. 二変数の場合に証明しよう. $f(x,\ y)$ を交代式とする.

$$f(y,\ x)=-f(x,\ y)$$

である． x に y を代入すると

$$f(y,\ y)=-f(y,\ y)$$

つまり, $f(y,\ y)=0$ である． したがって, $f(x,\ y)$ は $x-y$ を因数にもつ．

$$f(x,\ y)=(x-y)Q(x,\ y)$$

ここで x と y を入れかえる．

$$f(y,\ x)=-f(x,\ y)\ \text{かつ}\ f(y,\ x)=(y-x)Q(y,\ x)$$

これから

$$Q(x,\ y)=Q(y,\ x)$$

となり, 確かに対称式である．

いろんな計算で, 差積をくくることで見通しがよくなることが多い． これから出てくるたびに注意する． 式が出てくれば, 対称式か交代式かをまずみるようにしよう．

対称性を活用する　問題の条件，証明すべき結論にいくつかの文字が入っている場合，それらの文字の間に相互に入れ替えても変わらない，という対称性があれば．それを最大限に活用する．その場合，ひとつの文字について示したことは，他の文字についても「同様に」成り立つことはいうまでもない．

求めるべき三数 $a,\ b,\ c$ に関する条件が対称なら，$a \geqq b \geqq c$ を満たすもので求めて，それからそれらを相互に入れ替えたものが，すべて求めるものになる．

例題 4.13

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$$

となる正の整数を求めよ．

解答　この条件式は $a,\ b,\ c$ に関して対称である．まず $a \geqq b \geqq c > 0$ として求める．すると $\dfrac{1}{a} \leqq \dfrac{1}{b} \leqq \dfrac{1}{c}$ なので

$$1=\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{3}{c}$$

ゆえに $c \leqq 3$ となり，c は $1,\ 2,\ 3$ のいずれかである．場合に分けて順次決めていくと

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 3,\ 3),\ (4,\ 2,\ 2),\ (6,\ 3,\ 2)$$

これらを入れ替えたものがすべて解になる． □

例題 4.14　［98 甲南大］

a , b , c を不等式 $a>b>c>0$ を満たす実数とする．

(1) $k=0,1,2,3$ のそれぞれの場合に次式を簡単にせよ．

$$I_k=\frac{a^k}{(a-b)(a-c)}+\frac{b^k}{(b-c)(b-a)}+\frac{c^k}{(c-a)(c-b)}$$

(2) 次の不等式を証明せよ．

$$J = \frac{\sqrt{a}}{(a-b)(a-c)} + \frac{\sqrt{b}}{(b-c)(b-a)} + \frac{\sqrt{c}}{(c-a)(c-b)} < 0$$

(3) 次の不等式を証明せよ．

$$K = \frac{1}{\sqrt{a}(a-b)(a-c)} + \frac{1}{\sqrt{b}(b-c)(b-a)} + \frac{1}{\sqrt{c}(c-a)(c-b)} > 0$$

((2)，(3) では，$\sqrt{a} = A$, $\sqrt{b} = B$, $\sqrt{c} = C$ とおけ)

考え方　式の対称性と交代性をいかして，式の因子を見出すのである．大文字のものは適当な置きかえで，最初の小文字の等式が活用できるようにする．

解答

(1)

$$\begin{aligned} I_k &= \frac{a^k}{(a-b)(a-c)} + \frac{b^k}{(b-c)(b-a)} + \frac{c^k}{(c-a)(c-b)} \\ &= -\frac{a^k(b-c) + b^k(c-a) + c^k(a-b)}{(a-b)(b-c)(c-a)} \end{aligned}$$

簡単のために $f_k(a,b,c) = a^k(b-c) + b^k(c-a) + c^k(a-b)$ とおく． a と b を入れかえてみる．

$$\begin{aligned} f_k(b,a,c) &= b^k(a-c) + a^k(c-b) + c^k(b-a) \\ &= -f_k(a,b,c) \end{aligned}$$

他の文字についても同様である．つまり $f_k(a,b,c)$ は交代式である．よって，

$$f_k(a,b,c) = Q(a,b,c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

と因数分解される．

$Q(a,b,c) \neq 0$ なら右辺は 3 次以上である． $k = 0, 1$ のとき $f_k(a,b,c)$ はそれぞれ 1 次，2 次である．よってこれらの場合は $Q(a,b,c) = 0$

$$\therefore \quad I_0 = 0\ ,\ I_1 = 0$$

(i) <u>$k = 2$ のとき</u>　$f_2(a,b,c)$ は 3 次式であるから $Q(a,b,c)$ は定数．よって定数 t を用いて

$$f_2(a,b,c) = a^2(b-c) + b^2(c-a) + c^2(a-b) = t(a-b)(b-c)(c-a)$$

とおける． a^2 の係数を比較して $t = -1$

$$\therefore \quad I_2 = -\frac{-(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)} = 1$$

(ii) <u>$k=3$ のとき</u>　$f_3(a,b,c)$ は 4 次式であるから Q は 1 次の対称式，つまり定数 t を用いて $Q(a,b,c)=t(a+b+c)$ と表せる．

$$f_3(a,b,c)=a^3(b-c)+b^3(c-a)+c^3(a-b)=t(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)$$

とおける． $(a,b,c)=(3,2,1)$ を代入することにより

$$27+8(-2)+1=12=6t(-2)$$

よって $t=-1$

$$\therefore\quad I_3=-\frac{-(a+b+c)(a-b)(b-c)(c-a)}{(a-b)(b-c)(c-a)}=a+b+c$$

(2) $\sqrt{a}=A,\ \sqrt{b}=B,\ \sqrt{c}=C$ とおく．

$$\begin{aligned} J &= \frac{A}{(A^2-B^2)(A^2-C^2)}+\frac{B}{(B^2-C^2)(B^2-A^2)}+\frac{C}{(C^2-A^2)(C^2-B^2)} \\ &= -\frac{A(B^2-C^2)+B(C^2-A^2)+C(A^2-B^2)}{(A^2-B^2)(B^2-C^2)(C^2-A^2)} \end{aligned}$$

ここで分子は $A,\ B,\ C$ の 3 次の交代式である．よって定数 t を用いて

$$A(B^2-C^2)+B(C^2-A^2)+C(A^2-B^2)=t(A-B)(B-C)(C-A)$$

とおける． A^2 の係数を比較して $t=1$．よって，

$$\begin{aligned} J &= -\frac{(A-B)(B-C)(C-A)}{(A^2-B^2)(B^2-C^2)(C^2-A^2)} \\ &= -\frac{1}{(A+B)(B+C)(C+A)}<0 \end{aligned}$$

(3) 同様におくと

$$\begin{aligned} K &= \frac{1}{A(A^2-B^2)(A^2-C^2)}+\frac{1}{B(B^2-C^2)(B^2-A^2)}+\frac{1}{C(C^2-A^2)(C^2-B^2)} \\ &= -\frac{BC(B^2-C^2)+CA(C^2-A^2)+AB(A^2-B^2)}{ABC(A^2-B^2)(B^2-C^2)(C^2-A^2)} \end{aligned}$$

ここで分子は $A,\ B,\ C$ の 4 次の交代式である．よって定数 t を用いて

$$BC(B^2-C^2)+CA(C^2-A^2)+AB(A^2-B^2)=t(A+B+C)(A-B)(B-C)(C-A)$$

とおける．A^3 の係数を比較して $t=-1$．よって (2) と同様の計算をすると

$$K=\frac{A+B+C}{ABC(A+B)(B+C)(C+A)}>0$$

を得る．

□

例題 4.15　［89 京大文系］

五つの実数 $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ があり，どの a_i も他の四つの相加平均より大きくはないという．このような $a_1,\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ a_5$ をすべて求めよ．

考え方　5 文字 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 について条件は対称だ．この対称性をどのように活かすか．方法はいくつかある．一つで終わりにせずいろいろ考えてみよう．

解法 1

条件は

$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)-a_5 \geqq 0$$
$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_5)-a_4 \geqq 0$$
$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_4+a_5)-a_3 \geqq 0$$
$$\frac{1}{4}(a_1+a_3+a_4+a_5)-a_2 \geqq 0$$
$$\frac{1}{4}(a_2+a_3+a_4+a_5)-a_1 \geqq 0$$

である．

各辺を加えると

$$(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)-(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=0$$

となって，等号が成立する．0 以上の数の和が 0 になれば，すべて 0 である．したがって

$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4)=a_5$$
$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_5)=a_4$$
$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_4+a_5)=a_3$$
$$\frac{1}{4}(a_1+a_3+a_4+a_5)=a_2$$
$$\frac{1}{4}(a_2+a_3+a_4+a_5)=a_1$$

$$\therefore \quad \frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4+a_5)=\frac{5}{4}a_i \ (i=1,\ 2,\ \cdots,\ 5)$$

つまり a_i はすべて等しい．逆にすべて等しければ条件をみたすことは明らか．

$$\therefore \quad a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=k \ (k \text{ は任意の実数})$$

解法 2　条件は 5 文字 a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 について対称である．したがって

$$a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4 \leqq a_5 \quad \cdots ①$$

として一般性を失わない．① で $a_1 \leqq a_2 \leqq a_3 \leqq a_4$ のいずれかの等号が成立しないと

$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4) < a_4 \leqq a_5$$

また $a_4 < a_5$ なら

$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4) \leqq a_4 < a_5$$

いずれにせよ

$$\frac{1}{4}(a_1+a_2+a_3+a_4) \geqq a_5$$

は成立しない．したがって ① はすべて等号成立である．

逆にすべて等しければ条件をみたすことは明らか．

$$\therefore \quad a_1=a_2=a_3=a_4=a_5=k \ (k \text{ は任意の実数})$$

□

4.2.5　問題と考え方

問題

4.11　［91 関西大］　考え方 4.11　解答 5.75

$P(x)$ は x の 5 次式で，次の 2 条件：

(i)　$P(-x)=-P(x)$

(ii)　$P(x)+a$ は $(x-a)^2$ で割り切れる

を満たしている．

(1) $P(x)-a$ は $(x+a)^2$ で割り切れることを示せ．

(2) $a=1$ であるとき，$P(x)$ を求めよ．ただし，x^5 の係数は 1 とする．

4.12　［00 上智・文系］　考え方 4.12　解答 5.76

$A(x)$ は定数項が 1 である x の三次式で，ある定数 c が存在して，すべての x に対して

$$A(2x+1)=cA(x)$$

が成立している．このとき c の値と $A(x)$ を求めよ．

4.13　［01 名古屋後期］　考え方 4.13　解答 5.77

すべての x に対して

$$(x+1)f(x+1)-xf(x)=f(x+2)+2f(x-1)$$

を満たす多項式 $f(x)$ のうち最高次の係数が 1 であるものを求めよ．

4.14　［作成問題］　考え方 4.14　解答 5.78

(1) 二つの曲線 $C_1: f(x,\,y)=0$ と $C_2: g(x,\,y)=0$ がある．このとき任意の実数 k に対して

$$\text{曲線 } D: f(x,\,y)+kg(x,\,y)=0$$

は C_1 と C_2 の共有点を通ることを示せ．

(2) 2 直線 $ax+by+c=0$ と $px+qy+r=0$ は平行でないとする．2 直線の交点と，二つの直線上にない点 $(x_0,\ y_0)$ を結ぶ直線の式は

$$(ax_0+by_0+c)(px+qy+r)-(px_0+qy_0+r)(ax+by+c)=0$$

と書けることを示せ．

(3) $\triangle$ABC に円 $C: x^2+y^2-r^2=0$ が 3 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3)$ で内接している．ただし 3 点はこの順に頂点 A の対辺，頂点 B の対辺，頂点 C の対辺にあるとする．このとき 3 直線 AP_1，BP_2，CP_3 は 1 点で交わることを，(2) を用いて示せ．

4.15　［99 神戸大］　考え方 4.15　解答 5.79

次の各問いに答えよ．

(1) x の整式 $P(x)$ を $x-1$ で割った余りが 1, $x-2$ で割った余りが 2, $x-3$ で割った余りが 3 となった．
$P(x)$ を $(x-1)(x-2)(x-3)$ で割った余りを求めよ．

(2) n は 2 以上の自然数とする．$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について, 整式 $P(x)$ を $x-k$ で割った余りが k となった．
$P(x)$ を $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ で割った余りを求めよ．

4.16　［99 京都府立医大］　考え方 4.16　解答 5.80

$a<b$ は実数の定数とする． $-\infty<x<\infty$ で定義された関数 $f(x)$ は次の［ a]，［ b ］を満たすとする．

［ a ］ $y=f(x)$ のグラフは，直線 $x=a$ に関して対称である．
［ b ］ $y=f(x)$ のグラフは，直線 $x=b$ に関して対称である．

このとき，

(1) 定数関数以外で，このような関数 $f(x)$ の例を 1 つあげよ．

(2) $f(x)$ が整式であれば， $f(x)$ は定数であることを示せ．

4.17　［作成問題］　考え方 4.17　解答 5.81

四面体 ABCD の内部の点 P を取る．直線 AP と $\triangle$BCD の交点を S，直線 BP と $\triangle$ACD の交点を T，直線 CP と $\triangle$ABD の交点を U，直線 DP と $\triangle$ABC の交点を V とする．このとき

$$\frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{PS}}+\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{PT}}+\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{PU}}+\frac{\mathrm{DV}}{\mathrm{PV}}$$

の最小値と，最小値を与える点 P を決定せよ．

4.18　［既知問題］　考え方 4.18　解答 5.82

$a,\ b,\ c$ をある三角形の 3 辺とする．このとき次の不等式がなり立つことを示せ．

$$\frac{3}{2}\leqq\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

4.19　［06 阪大］　考え方 4.19　解答 5.83

放物線 $y=x^2$ 上の相異なる 3 点 P，Q，R は $\triangle$PQR が正三角形になるように動いている．

(1) P，Q，R の x 座標を $p,\ q,\ r$ とするとき，$p^2+q^2+r^2$ を $pq+qr+rp$ のみで表せ．

(2) △PQR の重心はある放物線の上にあることを示せ．

4.20　［05 掲示板］　考え方 4.20　解答 5.84
次の関係式を満たす実数 $x,\ y,\ z$ が存在するための，実数 a の条件を求めよ．

$$xy+yz+zx=1,\quad xyz=ax+y+z$$

考え方

4.11　問題 4.11　解答 5.75
$P(x)-a$ を $(x+a)^2$ で割った式の余りを文字に置いて除法の等式を立てる．その上でその式の x に $-x$ を代入する．または両辺微分する．(1) をこの方法で確認してから $P(x)$ を一般的に置き (1) を用いて係数を決定する．

4.12　問題 4.12　解答 5.76
係数比較法と代入法の両方が考えられる．代入法では少しの工夫が必要である．つまり $A(x)$ の形を推測して，その形が次数より多い x の値で成り立つことを示すのである．

4.13　問題 4.13　解答 5.77
まず次数を決定する．最高次の項が両辺一致することで次数は決まる．この最高次の項を除く部分が恒等式になるように，適当な代入によって係数を決めていく．

4.14　問題 4.14　解答 5.78
定点を通ることは，すべての x と y で成立するということである．これをいかすと，交点を実際に求めなくても交点を通る直線を決定できる．

4.15　問題 4.15　解答 5.79
（2）は (1) の一般化である．(1) から余りの形を推測する．余りの次数は $n-1$ 次以下であるが，余りの形が n 個の異なる x で成立すれば，それは恒等式である．

4.16　問題 4.16　解答 5.80
二つ以上の対称軸をもつものは三角関数である．この対称軸を二つ選び，それが $x=a$ と $x=b$ となるように拡大と移動すればよい．これで (1) が得られる．(2) は二つの対称性を用いて，無数の x の値で同じ値をとることを示せばよい．

4.17　考え方 4.17　解答 5.81
P が変化しても変化しない不動の関係式を見つけたい．この場合は体積である．長さの比を体積の比に置きかえ，逆数の和をとると一定であることがわかる．

4.18　問題 5.82　解答 5.82
これは意外に難問である．力ずくの計算では大変だ．しかし示すべき式は $a,\ b,\ c$ で対称である．ということは，大小を仮定してもよいということだ．

4.19　問題 5.83　解答 5.83

正三角形を角度でとらえるか，辺の長さでとらえるか．いずれかの方針を決めて，条件を書き出す．そのとき，対称性に注意して計算をきれいに進めよう．

4.20　問題 5.84　解答 5.84

3 つの文字の間に対称性はあるか．ない．あるのは y と z である．それなら $y+z$ と yz を x と a で表すことができる．それなら y と z が実数であるための必要十分条件を x と a で書くことができる．

4.3　帰納的定義

数列と漸化式　数学で自然数はもっとも基本的なものであるが，この自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，例えば数 a_n，関数 $f_n(x)$，行列 A_n など何らかの数学的対象が定まるとき，これを広い意味の数列という．詳しくいうときは数の場合を数列，関数の場合は関数列などという．行列の場合は行列列とはあまりいわない．

数列はどのように定められるのか．それは**直接定義**と**帰納的定義**である．直接定義とは，自然数 n に対して

$$a_n = n^2 - n,\ f_n(x) = nx^2 - (n^2+2)x - 3n$$

のように，まさに直接定めるものである．

これに対して帰納的定義は例えば次のようなものである．

$$a_1 = 1,\ a_{n+1} = 3a_n + 5$$

このように a_n に対して a_{n+1} を定める式を (二項間) 漸化式という．一般にいえば

(i) a_1 の値を定める．

(ii) 数列 $\{a_n\}$ に対して第 $n+1$ 項 a_{n+1} を，第 n 項 a_n と n を含む式 $F(a_n,\ n)$ によって

$$a_{n+1} = F(a_n,\ n)$$

で定める．

a_1 の値は与えられているので，それを順に代入していけば，数列が定まる．それは数学的帰納法によって示される．

$n = 1$ のときの値は与えられている．

$n = k$ の値が決まるとする．このとき $a_{k+1} = F(a_k,\ k)$ によって a_{k+1} の値が定まる．

したがってすべての n に対して，a_n の値が確定する．

これを漸化式による数列の**帰納的定義**という．a_n と a_{n+1} に対して a_{n+2} が定まるようなときは，初期値は $a_1,\ a_2$ が必要だ．数列を帰納的に定義する関係式が**漸化式**なのだ．

漸化式を立てて解く　数列と漸化式の関係は，文章題と方程式のようなものである．植木算や鶴亀算などの文章問題も，方程式を立てることを知れば，一般的な方法で解くことができる．数列の場合も，漸化式ができれば一般項が機械的な計算で求まることもある．少なくとも，順次代入することで必要な番号の値を知ることはできる．

漸化式は，漸化式が問題の中で与えられたときに解くだけのものだ，と考えていないだろうか．実はそうではなく，確率や場合の数を求める場合に漸化式を立てて求める，数列を求めるために漸化式を立てる，ということが大切なのだ．

状態の変化と漸化式　確率や場合の数を求める場合の漸化式について考えよう．自然数 n に対して事象が変化し，その事象の総数や確率が定まっていくような場合である．

その総数や確率の漸化式を立てるにあたって大切なことは，**起こりうるすべての場合を数列に置く**ということである．こうすれば，n のときのどの状態も 1 回試行を増やすことで，$n+1$ のときのいずれかの状態になるので，$n+1$ のときの事象が n のときの事象からどのように定まるかを，樹形図や場合分けを考え，その相互関係を求めることで必ず漸化式ができる．

漸化式を立てるのは方程式を立てるのと同じ意味をもつことである．

4.3.1　漸化式で解く

いくつか例をやってみよう．以下の例は直接計算しても，少し工夫すればできる．もちろん可能である．一度やってみてほしい．しかし以下のような解もあるのである．漸化式を立てて解く解法と，直接計算する解法を比較研究したい場合,『別解研究』「個数処理の方法」「確率」にいくつかの例がある.「個数処理の方法」では，主な解法は直接計算であるが，漸化式を立ててもできる，という例が紹介されている.「確率」でもいくつか二通りの方法で解いている．

例題 4.16

三文字 a, b, c の中から重複を許して 5 個の文字を選び，横 1 列に並べてできる文字列をワードという．文字列 bc を含まないワードの総数，すなわち b の直後に c がこないようなワードの総数を求めよ．

考え方　この問題をどのようにするか．一つの方法は場合に分けて個別に数える方法だ．

しかし n 個の文字でできた文字列 bc を含まないワードの総数を x_n とおいて，数列 $\{x_n\}$ の漸化式を立てるのだ．それをさらにどの文字から始まるかで細分するとよい．

解答　n 個の文字でできた文字列 bc を含まないワードの全体を x_n とおく．さらにそのうち，a から始まるものが a_n 個，b から始まるものが b_n 個，c から始まるものが c_n 個であるとする．

$$x_n = a_n + b_n + c_n$$

である．

$n+1$ 個の文字列において，a から始まるものと c から始まるものは，後に続く n 個の文字列が a から始まっても b から始まっても，c から始まってもよいので $a_n + b_n + c_n = x_n$ 通りある．

ところが $n+1$ 個の文字でできた文字列のうち b から始まるものは，後に続く n 個の文字列が a と b から始まるものだけで c から始まるものは除かなければならない．

したがって

$$\begin{cases} a_{n+1} = a_n + b_n + c_n = x_n \\ b_{n+1} = a_n + b_n \qquad = x_n - c_n \\ c_{n+1} = a_n + b_n + c_n = x_n \end{cases}$$

が成り立つ．$c_n = x_{n-1}$ なので，辺々加えて

$$x_{n+1} = 3x_n - x_{n-1}$$

$x_1 = 3,\ x_2 = 8$ であるから

$$\begin{aligned} x_3 &= 3 \cdot 8 - 3 = 21 \\ x_4 &= 3 \cdot 21 - 8 = 55 \\ x_5 &= 3 \cdot 55 - 21 = 144 \end{aligned}$$

と求まるのである． □

もちろんこれから一般項も求まるが，一般項を求めなくてよいときでも，樹形図などを書いて個数を求めようとするよりも，漸化式の方が正確である．

例題 4.17　［03 東大］

さいころを振り, 出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする．ただし，1 で割った余りは 0 である．さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする．以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする．

このようにして，$X_n,\ n = 1,\ 2,\ \cdots$ を定める．

(1) $X_3 = 0$ となる確率を求めよ．

(2) 各 n に対し，$X_n = 5$ となる確率を求めよ．

(3) 各 n に対し，$X_n = 1$ となる確率を求めよ．

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする．

考え方　(1) は 3 回目に余りが 0 となる確率なので，樹形図を書いて順次求めてもいけそうである．また実際不可能ではない．しかしやってみると結構たいへんである．

ここは個別の例から一般化するのではなく，先にすべての起こりうる事象の確率を数列において，その相互関係，つまり漸化式を立てよう．n 回目に，考えられるすべての余りのそれぞれになる確率を数列において，$n+1$ のときの余りが n 回のときの余りからどのように決まるかを考え漸化式を立てるのだ．するとこの試行のすべてがつかめる．

(2)(3) も一気に解ける．もし (1) を個別に考えていれば，(2)(3) 段階で改めて必要な漸化式を立てねばならない．

一般項でなくて，決まった番号の場合の数や確率を求めるときにも，漸化式を立てる．

解答

(1) 17 を 1，2，3，4，5，6 で割った余りはそれぞれ 0，1，2，1，2，5 である．

0 を 1 から 6 の数で割った余りはつねに 0,

1 を 1 で割れば余りは 0，2 から 6 の数で割った余りは 1,

2 を 1 か 2 で割れば余りは 0, 3 から 6 の数で割った余りは 2,
5 を 1 から 6 の数で割った余りは順に 0, 1, 2, 1, 0, 5 である．

$X_n = 0$ となる確率を a_n，$X_n = 1$ となる確率を b_n，$X_n = 2$ となる確率を c_n，$X_n = 5$ となる確率を d_n と置く．

上のことから

$$\begin{array}{rcl} a_{n+1} & = & a_n + \frac{1}{6}b_n + \frac{2}{6}c_n + \frac{2}{6}d_n \\ b_{n+1} & = & \frac{5}{6}b_n + \frac{2}{6}d_n \\ c_{n+1} & = & \frac{4}{6}c_n + \frac{1}{6}d_n \\ d_{n+1} & = & \frac{1}{6}d_n \end{array}$$

また．

$$a_1 = \frac{1}{6},\ b_1 = \frac{2}{6},\ c_1 = \frac{2}{6},\ d_1 = \frac{1}{6}$$

である．$n = 2$ のときの確率を上記漸化式によって計算すると

$$a_2 = \frac{14}{36},\ b_2 = \frac{12}{36},\ c_2 = \frac{9}{36},\ d_2 = \frac{1}{36}$$

求める確率は a_3 である．

$$\therefore \quad a_3 = \frac{14}{36} + \frac{1}{6} \cdot \frac{12}{36} + \frac{2}{6} \cdot \frac{9}{36} + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{36} = \frac{29}{54}$$

(2) 求める確率は d_n である．

$$d_n = \left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} d_1 = \frac{1}{6^n}$$

(3) 求める確率は b_n である．(2) から

$$b_{n+1} = \frac{5}{6}b_n + \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{6^n}$$

つまり

$$6^{n+1}b_{n+1} = 5(6^n b_n) + 2$$

これから

$$6^{n+1}b_{n+1} + \frac{1}{2} = 5\left\{6^n b_n + \frac{1}{2}\right\}$$

$$\therefore \quad 6^n b_n + \frac{1}{2} = 5^{n-1}\left\{6 \cdot \frac{2}{6} + \frac{1}{2}\right\} = \frac{1}{2}5^n$$

$$\therefore \quad b_n = \frac{1}{2}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n - \left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

□

4.3.2　マルコフ過程

nによって定まるいくつかの確率変数X_n, Y_n, Z_n, $\cdots$があり，その確率がp_n, q_n, r_n, $\cdots$であるとする．p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, $\cdots$がp_n, q_n, r_n, $\cdots$から定まるとき，確率変数の列X_n, Y_n, Z_n, $\cdots$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を**確率過程**という．

確率の漸化式が立てられかつ解けるのは，マルコフ過程といわれるものである．p_{n+1}, q_{n+1}, r_{n+1}, $\cdots$を定める p_n, q_n, r_n, $\cdots$の式

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= f(p_n,\ q_n,\ r_n,\ \cdots) \\ q_{n+1} &= g(p_n,\ q_n,\ r_n,\ \cdots) \\ r_{n+1} &= h(p_n,\ q_n,\ r_n,\ \cdots) \\ \cdots &= \cdots \end{aligned}$$

がnによらず一定であるとき，このような確率過程を**マルコフ過程**という．このマルコフ過程を定める式は連立漸化式である．例題 4.17 がすでにマルコフ過程である．

実際に高校で考えるべきものは，事象が各nに対してある一つの状態になり，その状態が有限個で各状態の値が確率変数 X_n, Y_n, Z_n, $\cdots$ となり，さらに，f, g, h, がすべて 1 次式である場合である．

このとき例えば式 f における p_n の係数は，X_n の状態が起こったという条件のもとにおいて X_{n+1} が起こる確率に他ならず，これを推移確率などという．推移確率は条件付き確率なので数学 C に属するのだが，数学 IA の入試範囲のなかでもよく出題される．

問題では，まず試行の内容をよくつかみ，これからマルコフ過程の漸化式自体を自分で作り，それを解くことで確率を求めるという型ものであることが多い．このような場合に大切なことは，n 回の試行の後に起こりうるすべての状態に対してその確率を数列におく，ということである．そのうえで，$n+1$ 回の試行の後の状態が，n 回の試行の後の状態からどのように定まるのかをつかみ，それを漸化式にする．

状態に対して確率を文字でおく場合，必要な状態を記述できればよいのでいろいろと工夫し，できるだけ簡単にしてよい．いずれにせよ例え具体的な番号に関する確率であっても，必ず一般の n に対する漸化式を立てる．これを銘記しよう．

例題 4.18

△ABC があり頂点 ABC は時計回りに並んでいる．点 P ははじめ点 A にある．サイコロを投げ 1 か 2 が出れば時計回りに隣の頂点に移り，3〜6 が出れば反時計回りに隣の頂点に移る．n 回の試行の後に P が点 A にいる確率を求めよ．

考え方　このような問題ではn 回の試行の後に P が点 A，B，C にいる確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とする．

$$\begin{cases} a_n = \dfrac{2}{3}b_{n-1} + \dfrac{1}{3}c_{n-1} \\ b_n = \dfrac{2}{3}c_{n-1} + \dfrac{1}{3}a_{n-1} \\ c_n = \dfrac{2}{3}a_{n-1} + \dfrac{1}{3}b_{n-1} \end{cases}$$

3 式加えて

$$a_n + b_n + c_n = a_{n-1} + b_{n-1} + c_{n-1}$$

これから

$$a_n + b_n + c_n = a_0 + b_0 + c_0 = 1 + 0 + 0 = 1$$

これを基本的な不変関係として，解く．解き方はいろいろあるが，ここでは a_n だけの漸化式を作って解いてみよう．3 項間漸化式になると予想して $n+2$ のところからはじめる．

解答　c_n を消去する．

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{1}{3}(1 - a_{n+1} - b_{n+1}) \\ &= -\frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}b_{n+1} + \frac{1}{3} \\ b_{n+2} &= \frac{2}{3}(1 - a_{n+1} - b_{n+1}) + \frac{1}{3}a_{n+1} \\ &= -\frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{2}{3}b_{n+1} + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

次に b_n を消去する．

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= -\frac{1}{3}a_{n+1} + \frac{1}{3}\left\{-\frac{1}{3}a_n - \frac{2}{3}b_n + \frac{2}{3}\right\} + \frac{1}{3} \\ &= -\frac{1}{3}a_{n+1} - \frac{1}{9}a_n - \frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}b_n\right) + \frac{5}{9} \end{aligned}$$

$\frac{1}{3}b_n = a_{n+1} + \frac{1}{3}a_n - \frac{1}{3}$ を代入して整理すると

$$a_{n+2} = -a_{n+1} - \frac{1}{3}a_n + \frac{7}{9}$$

となる．ここで

$$\left(\frac{1}{3}\right) = -\left(\frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right) + \frac{7}{9}$$

なので，辺々引いて

$$a_{n+2} - \frac{1}{3} = -\left(a_{n+1} - \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{3}\left(a_n - \frac{1}{3}\right)$$

簡単のため $x_n = a_n - \frac{1}{3}$ とおく．

$$x_{n+2} + x_{n+1} + \frac{1}{3}x_n = 0$$

ここで 2 次方程式 $t^2 + t + \frac{1}{3} = 0$ を解いて

$$\alpha = \frac{1}{2}\left(-1 - \frac{i}{\sqrt{3}}\right),\ \beta = \frac{1}{2}\left(-1 + \frac{i}{\sqrt{3}}\right)$$

とおく．漸化式が

$$x_{n+2} - (\alpha + \beta)x_{n+1} + \alpha\beta x_n = 0$$

となる．

$$\therefore\quad (\beta - \alpha)x_n = \beta^n(x_1 - \alpha x_0) - \alpha^n(x_1 - \beta x_0)$$

と解ける．後はこれを整理すればよい．$x_0=1-\dfrac{1}{3}$，$x_1=0-\dfrac{1}{3}$ を代入して整理する．

$$a_n=\frac{i}{3\sqrt{3}}\left\{3(\beta^n-\alpha^n)+2(\beta^{n-1}-\alpha^{n-1})\right\}+\frac{1}{3}$$

となる．

　なお $|\alpha|=|\beta|=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ なので $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\beta^n=\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$ である．これから，

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{3}\quad .$$

つまり，最初どこにいても何度も試行を重ねれば，a_n，b_n，c_n はいずれも $\dfrac{1}{3}$ に収束する．　□

4.3.3　数列を漸化式に戻す

数列と 2 次方程式　a，b は定数，α，β は 0 でない異なる定数として，数列

$$a_n=a\alpha^n+b\beta^n$$

を考える．ここで

$$\alpha+\beta=p,\ \alpha\beta=q$$

とおくと，α と β は 2 次方程式

$$t^2-pt+q=0$$

の解であるから

$$\alpha^2-p\alpha+q=0$$
$$\beta^2-p\beta+q=0$$

が成り立つ．よって

$$\alpha^{n+2}-p\alpha^{n+1}+q\alpha^n=0$$
$$\beta^{n+2}-p\beta^{n+1}+q\beta^n=0$$

が成り立つ．$a\times$ 第 1 式 $+b\times$ 第 2 式より

$$a_{n+2}-pa_{n+1}+qa_n=0$$

つまり三項間漸化式ができる．これはきわめて重要なことなので，よくおさえておきたい．

　もちろん

$$\begin{aligned}a_{n+2}&=a\alpha^{n+2}+b\beta^{n+2}\\&=(\alpha+\beta)(a\alpha^{n+1}+b\beta^{n+1})-\alpha\beta(a\alpha^n+b\beta^n)\\&=pa_{n+1}-qa_n\end{aligned}$$

と直接計算でもできるのだが，2 次方程式との関連で理解しておきたい．

　このように数列を漸化式に戻すことによって，ある種の数列の性質を帰納的に示すことができることがある．

例題 4.19　［03 東大文科］

2 次方程式 $x^2-4x+1=0$ の二つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする．$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n$$

とおく．

(1) s_1，s_2，s_3 を求めよ．また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ．

(2) s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ．

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ．

考え方　問題そのものが漸化式を求めているので，それを作りどのように活用するかを考えよう．

解答

(1) $\alpha=2+\sqrt{3},\ \beta=2-\sqrt{3},\ \alpha+\beta=4,\ \alpha\beta=1$ である．

$$\begin{aligned}
&s_1=\alpha+\beta=4\\
&s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-2=14
\end{aligned}$$

また $n \geqq 3$ のとき

$$\begin{aligned}
&\alpha^n-4\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}=\alpha^{n-2}(\alpha^2-4\alpha+1)=0\\
&\beta^n-4\beta^{n-1}+\beta^{n-2}=\beta^{n-2}(\beta^2-4\beta+1)=0
\end{aligned}$$

2 式を加えて

$$s_n-4s_{n-1}+s_{n-2}=0$$

これから

$$s_3=4s_2-s_1=4\cdot 14-4=52$$

(2) $\alpha>0,\ \beta>0$ より $s_n>0$ である．s_1，s_2 は整数で s_{n-2}，s_{n-1} が整数なら $s_n=4s_{n-1}-s_{n-2}$ も整数．数学的帰納法によって $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し s_n は整数である．

s_n の 1 の位の数を a_n とする．

$$a_1=4,\ a_2=4,\ a_3=2$$

である．$m=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し

$$a_{3m+1}=4,\ a_{3m+2}=4,\ a_{3m+3}=2 \quad \cdots ①$$

を数学的帰納法で示す．$m=0$ のときは成立する．m のとき成立するとする．

$$\begin{aligned}
&s_{3(m+1)+1}=4s_{3m+3}-s_{3m+2},\\
&\quad 4a_{3m+3}-a_{3m+2}=4 \text{ より } a_{3(m+1)+1}=4\\
&s_{3(m+1)+2}=4s_{3m+4}-s_{3m+3},\\
&\quad 4a_{3m+4}-a_{3m+3}=14 \text{ より } a_{3(m+1)+2}=4\\
&s_{3(m+1)+3}=4s_{3m+5}-s_{3m+4},\\
&\quad 4a_{3m+5}-a_{3m+4}=12 \text{ より } a_{3(m+1)+3}=2
\end{aligned}$$

$m+1$ のときも成立しすべての m で ① が示された.

$$2003 = 3 \times 667 + 2 \quad \therefore \quad a_{2003} = 4$$

(3) $0 < \beta < 1$ なので $0 < \beta^{2003} < 1$. $s_{2003} = 10h + 4$ とおくと

$$\alpha^{2003} = 10h + 4 - \beta^{2003} = 10h + 3 + (1 - \beta^{2003})$$

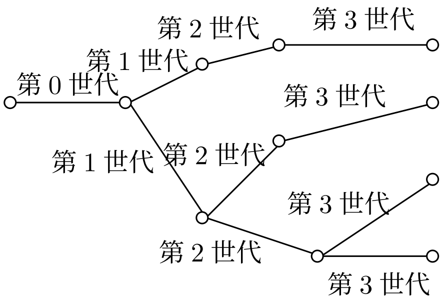
$0 < 1 - \beta^{2003} < 1$ なので α^{2003} の 1 の位は 3 である.

4.3.4 問題と考え方

問題

4.21 ［05 京大理系前期］ 考え方 4.21 解答 5.85
先頭車両から順に 1 から n まで番号のついた n 両編成の列車がある．ただし，$n \geqq 2$ とする．各車両を赤色，青色，黄色のいずれか 1 色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか.

4.22 ［84 東大文理科改題］ 考え方 4.22 解答 5.86
各世代ごとに，各個体が，他の個体とは独立に，確率 p で 1 個，確率 $1-p$ で 2 個の新しい個体を次の世代に残し，それ自身は消滅する細胞がある．ただし $0 < p < 1$ とする.



いま，第 0 世代に 1 個であった細胞が，第 n 世代に m 個となる確率を，$P_n(m)$ と書くことにしよう.
n を自然数とするとき，$P_n(1)$，$P_n(2)$，$P_n(3)$ を求めよ.

4.23 ［07 名大前期理系 4(b)］ 解答 4.23 解答 5.87
袋の中に赤と黄と青の玉が 1 個ずつ入っている.「この袋から玉を 1 個取り出して戻し，出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後，赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする.

(1) 連比 $p_3(1) : p_3(2) : p_3(3) : p_3(4)$ を求めよ.

(2) 一般の N に対し $p_N(m)$ $(1 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ.

4.24 ［05 名大理系前期］ 考え方 4.24 解答 5.88
整数に値をとる変数 x の値が，以下の規則で変化する.

(i) ある時刻で $x = m$ $(m \neq 0)$ のとき，1 秒後に $x = m+1$, $x = m-1$ である確率はともに $\dfrac{1}{2}$ である.

(ii) ある時刻で $x = 0$ のとき，1 秒後に $x = 1$ である確率は q, $x = -1$ である確率は $1-q$ である $(0 \leqq q \leqq 1)$.

$x=0$ から始めて，n 秒後 $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ に $x=m$ である確率を $p_n(m)$ とする．

(1) $p_3(1)+p_3(-1)$ を求めよ．

(2) すべての自然数 n に対し次が成り立つことを示せ．
「どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q にはよらない」

(3) $p_n(0)$ を求めよ．

4.25 ［04 阪大理系前期］ 考え方 4.25 解答 5.89

素数 $p,\ q$ に対して

$$a_n=p^n-4(-q)^n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって整数 a_n を定める．ただし，$p>2q$ とする．

(1) a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m=3$ であることを示せ．

(2) a_n がすべて 3 の倍数であるような $p,\ q$ のうちで積 pq が最小となるものを求めよ．

4.26 ［08 慶応医］ 考え方 4.26 解答 5.90

$m,\ n$ を自然数とする．xy 平面上で x 座標も y 座標も整数である点全体の集合を U で表す．今点 $(0,\ 0)$ 上に球を 1 個置き，次の操作 T を n 回繰り返し行うことにより球を U 上で動かす．

操作 T： 球が置かれている点を $(a,\ b)$ とするとき，球を $(a+1,\ b+1)$，$(a+1,\ b-1)$，$(a-1,\ b+1)$，$(a-1,\ b-1)$ のどれかの点上に確率 $\dfrac{1}{4}$ ずつで動かす．

操作 T を 1 回行った時点で球が置かれている点の座標を $(a_1,\ b_1)$ で表す．同様に，操作 T を i 回 $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ 繰り返し行った時点で球が置かれている点の座標を $(a_i,\ b_i)$ で表す．U の部分集合

$$A_n=\{(a_1,\ b_1),(a_2,\ b_2),\cdots,(a_n,\ b_n)\}$$

を考える．

(1) xy 平面上で連立不等式 $\begin{cases}|x|\leqq 1\\ |y|\leqq 1\end{cases}$ の表す領域を A とする．$A_n\subset A\cap U$ となる確率を p_n とする．p_{2m-1}，p_{2m} を求めよ．

(2) xy 平面上で不等式 $0\leqq x-y\leqq 2$ の表す領域を B とする．$A_n\subset B\cap U$ となる確率 q_n を求めよ．

(3) $A_n\subset A\cap U$ または $A_n\subset B\cap U$ となる確率を r_n とする．r_{2m-1}，r_{2m} を求めよ．

(4) 集合 A_n の要素の個数が 3 となる確率 s_n を求めよ．

考え方

4.21 問題 4.21 解答 5.85

漸化式を立てるのは，新たに加わった端の状態で場合に分け，その状態になる一つ前の段階からの推移確率を求めることで得られる．いくつもの状態がある場合，一つの状態の確率の漸化式を立てようとすると 3 項間漸化式になるときが多くある．直接それが求まるときもある．しかし一般的には，すべての状態を数列に置く方がよい．

4.22　問題 4.22　解答 5.86

ややや複雑ではあるが，漸化式を立てることで全体をつかもう．この場合，$P(m)$ に関する一般的なものは複雑である．しかしまず式をしっかり立て，その上で m が具体的なのでそのときの漸化式を具体的に考察しよう．

4.23　解答 4.23　解答 5.87

ポリアの壺といわれる確率の古典的な問題の特別な場合である．

4.24　問題 4.24　解答 5.88

(1) を考えながら全体をつかむ．この場合も漸化式を立てておくことを考える．それがあれば (1) は順次さかのぼって求めていけばよい．(2) は漸化式をもとに数学的帰納法が可能である．

4.25　問題 4.25　解答 5.89

(2) は次のことをもとに考えよう．二つの数をそれぞれ n 乗したものに，係数をかけて加えた数列は，三項間漸化式を満たす．漸化式の係数が整数であるとき，数列の整数的な性質が，はじめの 3 項で成立すればすべてで成立することが多い．

4.26　問題 4.26　解答 5.90

これは典型的なマルコフ過程の問題である．できるだけ一般的に全体を見通す漸化式を先に立てよう．それを個別化する．難しいのは，事象を分割しなければ漸化式が立てにくいときである．それを念頭において試みよう．

4.4　存在の証明

存在原理　存在することを示す問題は，一般になかなか難しい．しかし，存在問題の証明をよく勉強することは，なにより数学への理解を深めるし，じっくり勉強しておくべきテーマだ．

存在することの論証は，より基本的で単純な存在原理に帰着させて示す．高校数学で主に用いられる存在の証明方法は

(1) 直接証明：作ってみせる．構成できるものは存在する．

(2) 間接証明：鳩の巣原理．有限個のもののなかでの存在原理．

(3) 間接証明：中間値の定理．連続するもののなかでの存在原理．

等である．またそれを変型した論証もある．

問題文をよく読み，与えられた条件から，どのような存在原理に帰着させねばならないのかを考えよう．なお，一次不定方程式の整数解の存在定理と，ディリクレによる無理数を近似する有理数の存在定理は，詳しくは『数論初歩』を参考にしてほしい．

4.4.1　存在の直接証明

存在することを示すいちばんの方法は，実際に作ってみせることだ．構成できるものは存在する．これが第一の存在証明の原理である．これは直接証明である．「幽霊が存在することを示せ」といわれたら，幽霊をつれてくるのがいちばんだ．笑ってはいけない．西洋では神の存在証明というの

が長い間，問題であった．神はつれてくることができるのか，できないのか．できないとしたら，にもかかわらず存在することを示すことはできるのか．

数学の存在証明においてもこれは大切な問題だ．例えば「必要条件でしぼる」の例題 3.7 の十分性の証明を見てほしい．存在に関わる部分だけを取り出すと，

n が奇数または 4 の倍数なら $x^2-y^2=n$ には整数解が存在する．

これを証明せよということになる．これは次のように作ってみせた．

$n=2k+1,\ 4k$ とおく．すると

$$(k+1)^2-k^2=2k+1=n, \quad (k+1)^2-(k-1)^2=4k=n$$

なのでそれぞれ，$(x,\ y)=(k+1,\ k),\ (k+1,\ k-1)$ という解がある！

ある条件の下で作ってみせることができれば，その条件が存在するための十分条件であることがわかる．構成すること，これが存在証明の基本である．これをまず銘記しよう．

例題 4.20　［04 千葉大後期］

直角をはさむ 2 辺の長さがともに整数の直角三角形を「整直角三角形」という．二等辺三角形でない二つの整直角三角形を $T_1,\ T_2$ とし，それぞれの斜辺の長さを $l_1,\ l_2$ とする．このとき，これらの積 l_1l_2 を斜辺の長さにもつ整直角三角形が存在することを示せ．

考え方　これは直接作ってみせることで存在を示す．問題文中の条件を適切に使っているかよく注意しよう．

解答　$l_1,\ l_2$ が整直角三角形 $T_1,\ T_2$ の斜辺なので

$$l_1{}^2=a^2+b^2,\ l_2{}^2=c^2+d^2$$

となる正の整数 $a,\ b,\ c,\ d$ が存在する．このとき

$$\begin{aligned}(l_1l_2)^2 &= (a^2+b^2)(c^2+d^2)\\ &= a^2c^2+a^2d^2+b^2c^2+b^2d^2\\ &= (ac+bd)^2+(ad-bc)^2 \quad \cdots ①\\ &= (ac-bd)^2+(ad+bc)^2 \quad \cdots ②\end{aligned}$$

ここで $ad-bc=0$ かつ $ac-bd=0$ ならば，$ad=bc$ と $ac=bd$ の辺々をかけて

$$a^2cd=b^2cd$$

これから $a=b$ となり，T_1 が二等辺三角形でないことに反する．したがって $ad-bc$ と $ac-bd$ の少なくとも一方は 0 ではない．

よって ① または ② の少なくとも一方は次のことを示している．

0 でない二つの整数で，それらの平方の和が l_1l_2 の平方に等しいものが存在する．つまり積 l_1l_2 を斜辺の長さにもつ整直角三角形が存在することが示された．□

4.4.2　存在の間接証明－鳩の巣論法

しかしいつもこのように実際に条件を満たすものをもってくることができるとはかぎらない．また，存在はするが実際に書き出すことはできない，ということもある．つまり作ることができるかできないかはわからないが，存在することは間違いない，この論証だ．一つ例を考えよう．

大阪市には頭髪の本数が同じである二人が少なくとも一組存在する．

これを証明せよ．

人間の頭髪がどれくらいあるかはもちろん人によりけりだ．私なんかは当然少ない方だが，たとえ $1mm$ 四方に 10 本とし，頭皮を $30cm \times 30cm$ としても 90 万本，これを越えることはない．大阪市の人口は 90 万人より多い．これらの人の頭髪の本数がすべて異なると仮定すれば，小さい方から並べると最後の人は大阪市の人口より多い頭髪でなければならないが，それはあり得ない．ゆえに必ず少なくとも一組，頭髪の本数が同じ人が存在する！

これが有限個のもののなかでの存在を保証する「鳩の巣原理」である．注意すべきは「私と同じ本数の人がいる」は一般には成立しないということだ．だから誰と誰が頭髪の本数が等しいのかはわからないし，それはまた別の問題である．

例題 4.21　［89 広島大学］

次の文章は，ある条件を満たすものが存在することを証明する際に，よく使われる「鳩の巣原理」（または，抽出（ひきだ）し論法ともいう）を説明したものである．

「 m 個のものが， n 個の箱にどのように分配されても， $m > n$ であれば，2 個以上のものが入っている箱が少なくとも一つ存在する」

この原理を用いて，次の二つの命題が成り立つことを証明せよ．

(1) 1 辺の長さが 2 の正三角形の内部に，任意に 5 個の点をとったとき，その内の 2 点で，距離が 1 より小さいものが少なくとも 1 組存在する．

(2) 座標空間で，その座標がすべて整数であるような点を格子点という．座標空間に 9 個の格子点が与えられたとき，その内の 2 点で，中点がまた格子点であるものが少なくとも 1 組存在する．

考え方　これは問題文のなかの 5 とか 9 とかの数がヒントになる．(1) は正三角形を，その中の二点の距離が必ず 1 より小さくなる四つの領域にわけられればよい．(2) は中点が格子点であるために両端はどのような性質を持っていなければならないのかを考える．

解答

(1) 正三角形を各辺の中点を結んでさらに 1 辺の長さが 1 の小正三角形四つに分割する．小正三角形の各頂点はもとの正三角形の辺上にある．

$m = 5$ ， $n = 4$ で「鳩の巣原理」を適用すると，四つの小正三角形のうち少なくとも一つの小正三角形の内部または周上には二つの点がくる．かつ，点はもとの正三角形の内部に取るのであるから，いずれの点も小正三角形の頂点には来ない．

三角形の内部および周上にある二点間の距離は最大辺の長さを越えない．従ってその距離は 1 より小さい．

(2) 二点の中点が格子点であることと，二点の x, y, z 座標の和がそれぞれ偶数であることは同値である．和が偶数になるためには，その二数の偶数か奇数かが一致していればよい．(偶数, 奇数, 偶数) のような組合せは全部で $2^3 = 8$ より八通である．$m = 9$ $n = 8$ で鳩の巣原理を適用すれば，少なくとも一組 x, y, z 各座標の偶数か奇数かが一致するものができる．その二点の中点は，格子点である． □

「三角形の内部および周上にある二点間の距離は最大辺の長さを越えない」が明かでない人はさらに考えておこう．二点 P, Q が三角形の内部にあれば直線 PQ と三角形の辺の交点を R, S とする．R や S が頂点でなければ R を固定し S を辺上で動かすと，S が一方の方向に動くとき RS は増加する．ゆえに S が頂点に来たときの方が長い．R についても同様.

この論法は大変重要なものなのでいくつか演習にあげておいた．歴史上もっとも有名なものは次の定理の証明である．

定理 2

ω を与えられた無理数とする．このとき

$$|x - \omega y| < \frac{1}{y}$$

となる整数 x, y が **無数に** 存在する．

解説　この証明は『数論初歩』「ペル方程式の解の存在」[実数の近似定理] にある．それは単独で理解できることなのでぜひよく味わっておいてほしい．この定理はディリクレの定理といわれ，整数問題で鳩の巣原理がもっとも本格的に用いられる．この定理にちなんで鳩の巣原理による論法のことを「ディリクレ論法」ともいう．

証明

(i) 任意の自然数 n に対して，

$$0 < y \leqq n,\ |x - \omega y| < \frac{1}{n}$$

となる整数 (x, y) が少なくとも一組存在することを示す．

実数 $a < b$ に対して a を含み b を含まない区間を $[a, b)$ と表す．区間 $[0, 1)$ を次のように n 等分する．

$$\left[0, \frac{1}{n}\right),\ \left[\frac{1}{n}, \frac{2}{n}\right), \cdots, \left[\frac{n-1}{n}, 1\right)$$

y に $0, 1, \cdots, n$ の各値を与え，その y に対して，ωy を超えない最大の整数を x とする．

$$0 \leqq \omega y - x < 1$$

である．これらは全部で $n+1$ 個あるので，鳩の巣原理によって上の n 個のうち少なくとも一つの区間には，二つ以上の $\omega y - x$ が属する．$\omega y_1 - x_1$，$\omega y_2 - x_2$，$(x_1 \neq x_2)$ が同じ区間に属するとする．つまり

$$|(\omega y_1 - x_1) - (\omega y_2 - x_2)| < \frac{1}{n}$$

$y_1 > y_2$ とし，$x = x_1 - x_2$, $y = y_1 - y_2$ とおく．この $(x,\ y)$ に対して

$$|\omega y - x| < \frac{1}{n}$$

である．

(ii) 各自然数 n に対して $0 < y \leqq n$ で $|\omega y - x| < \dfrac{1}{n}$ となる (x, y) が存在した．n を動かすとき，これらの (x, y) のなかに相異なるものが無数にあることを示す．

もし有限個しかなかったとする．そのなかで $|\omega y - x|$ の値が最小のものを $|\omega y_0 - x_0|$ とする．それに対して，

$$\frac{1}{n} < |\omega y_0 - x_0|$$

となる n をとる．この n に対して再び，$|\omega y - x| < \dfrac{1}{n}$ となるように (x, y) を選ぶことができる．ところが

$$|\omega y - x| < \frac{1}{n} < |\omega y_0 - x_0|$$

なので，(x_0, y_0) の最小性と矛盾した．

よって相異なるものは無数にある．$\dfrac{1}{n} < \dfrac{1}{y}$ なので

$$|\omega y - x| < \frac{1}{y}$$

となる $(x,\ y)$ が無数にあることが示された． □

鳩の巣原理は次の形で用いることもある．

> 整数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ はすべて $1 \leqq a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n \leqq n$ を満たし，さらにすべて異なる．このとき，$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ は 1〜n の値を一回ずつとる．

なぜなら，もし $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ のなかに，1〜n でとらない値があったとする．その値を除く数を記した箱を用意する．箱の数は $n-1$ 個以下になる．数 $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ をその値にしたがってこれらの箱に入れる．鳩の巣原理によって同じ箱に入るものが少なくとも一組できる．これは $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ の値がすべて異なることに矛盾する．ゆえに $a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_n$ は 1〜n の値を一回ずつとる．

鳩の巣論法はこの形で一次不定方程式の解の存在の証明に用いられる．

例題 4.22　［00 大阪女子大］

(1) $4m + 6n = 7$ を満たす整数 $m,\ n$ は存在しないことを示せ．

(2) $3m + 5n = 2$ を満たすすべての整数の組 $(m,\ n)$ を求めよ．

以下，$a,\ b$ は互いに素な整数とする．

(3) k を整数とするとき，ak を b で割った余りを $r(k)$ で表す．$k,\ l$ を $b-1$ 以下の正の整数とするとき，$k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ であることを示せ．

(4) $am + bn = 1$ を満たす整数 $m,\ n$ が存在することを示せ．

考え方　この (4) で鳩の巣原理が用いられる．そのことを念頭において，ぜひいちど自分で考えてほしい．

解答

(1) $4m+6n=7$ を満たす整数 $m,\ n$ が存在したとすれば左辺は偶数であり，右辺は奇数なので矛盾する．ゆえに存在しない．

(2) $3m+5n=2$ を満たす 1 組の $(m,\ n)$ として $(-1,\ 1)$ をとる．つまり

$$3\cdot(-1)+5\cdot 1=2 \quad \cdots ①$$

ゆえに任意の解 $(m,\ n)$ に対して，$3m+5n=2$ から ① の両辺を引くことにより，

$$3(m+1)+5(n-1)=0$$

3 と 5 は互いに素なので，$m+1$ は 5 の倍数．これを整数 t を用いて $5t$ と書く．このとき

$$(m,\ n)=(-1+5t,\ 1-3t)$$

逆に任意の整数 t に対して，この形をしたものが $3m+5n=2$ を満たすことは明か．

$$\therefore \quad (m,\ n)=(-1+5t,\ 1-3t),\ t \text{ は任意の整数}$$

(3) 対偶を示す．

$$\begin{aligned} r(k)=r(l) \quad &\iff \quad ak-al=a(k-l) \text{ が } b \text{ の倍数} \\ &\qquad\quad (a \text{ と } b \text{ は互いに素なので}) \\ &\iff \quad k-l \text{ が } b \text{ の倍数} \\ &\qquad\quad -(b-2) \leqq k-l \leqq b-2 \text{ なので} \\ &\iff \quad k-l=0 \end{aligned}$$

よって $k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ であることが示された．

(4) a と b が互いに素なので，$1 \leqq k \leqq b-1$ に対して ak は b の倍数とはならない．ゆえにこのとき $1 \leqq r(k) \leqq b-1$ である．

一方 $k \neq l$ ならば $r(k) \neq r(l)$ なので $r(1),\ r(2),\ \cdots,\ r(b-1)$ はすべて異なる $b-1$ 個の整数で，すべて $1 \leqq r(k) \leqq b-1$ をみたす．

ゆえに鳩の巣原理により $r(1),\ r(2),\ \cdots,\ r(b-1)$ は $1,\ 2,\ \cdots,\ b-1$ の各値を一つずつとる．ゆえに $r(m)=1$ となる m $(1 \leqq m \leqq b-1)$ が存在する．つまり $am-1$ が b の倍数である．これを bn とおくと

$$am-1=bn$$

すなわち，$am+bn=1$ を満たす整数 $m,\ n$ が存在することが示された．　□

4.4.3 最小自然数の存在

さらにまた高校数学でやや高度な論証に用いられるのが「A を自然数の部分集合とする．A には最小の要素が存在する.」という事実である．これは自然数の性質に基づくものであり，数学的帰納法の根拠となるものであった.

自然数の部分集合に最小の要素が存在すること自体は証明なしに使ってもよい．その例は先にあげた一次不定方程式の整数解の存在定理の別証明だ．例題 4.22 の (4) は次のように (3) を用いず直接に示すことができる.

$a,\ b$ が互いに素なとき，$am+bn=1$ に解が存在することの別証明

$$J=\{am+bn\,|\,m,n\ \text{は整数}\}$$

と置く．J は整数の集合の部分集合であり，J の要素のうち正のもの全体は自然数の集合の部分集合であるから，J の要素のなかで**正で最小のものが存在する**．それを am_0+bn_0 とする.

このとき，J の任意の要素 $am+bn$ は am_0+bn_0 の倍数であることを示す．$am+bn$ を am_0+bn_0 で割り，その除法の式を

$$am+bn=(am_0+bn_0)q+r$$

とする．ただし，$am_0+bn_0>r\geqq 0$ である．$r=a(m-m_0q)+b(n-n_0q)$ であるから,

$$r\in J$$

ここでもし $r\neq 0$ なら r が am_0+bn_0 より小さい J の正の要素になる．これは am_0+bn_0 が正で最小の要素であることに反する．ゆえに $r=0$ でなければならない．つまり，J の要素はすべて am_0+bn_0 の倍数である．ところで,

$$a=a\cdot 1+b\cdot 0\in J,\quad b=a\cdot 0+b\cdot 1\in J$$

であるから，a も b も am_0+bn_0 の倍数である．ところが，$a,\ b$ は互いに素であるから，$am_0+bn_0=1$ でなければならない．つまり $am+bn=1$ に整数解 $(m,\ n)=(m_0,n_0)$ が存在した． □

このように $am+bn=1$ に整数解 が存在することが二つの方法で示された．実はさらに a や b についての数学的帰納法でも可能である．それはぜひ試みてほしい.

4.4.4 離散的写像の不動点定理

関数が有限集合から有限集合への写像である場合，その写像が一定の条件を満たすと，不動点つまり $f(x_0)=x_0$ となる x_0 が存在する．これはその条件に適するような離散的関数を図示して考えることで，存在に目安をつけ，その上で証明方法を考えるという観点で取り組んでみてほしい．関数の図示と存在証明の結合である.

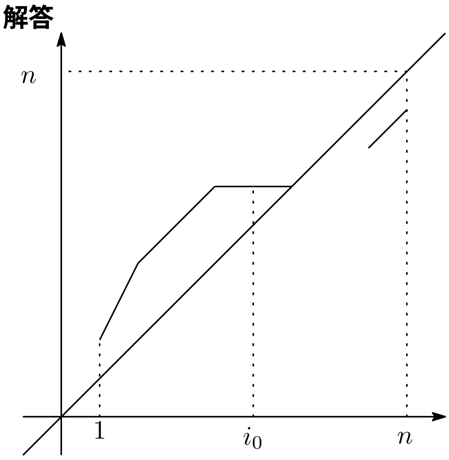
例題 4.23 ［92 神戸大］自然数 n に対して，1 から n までのすべての自然数の集合を N とする．N から N への写像 f が次の条件

$$i,\ j\in N\ \text{かつ}\ i\leqq j\ \text{ならば，つねに}\ f(i)\leqq f(j)$$

をみたすとき，$f(k)=k$ となる N の要素 k があることを示せ.

ただし，集合 A の各要素に対して集合 B の要素のいずれかを 1 つずつ対応させる規則のことを，A から B への写像という．写像は f などで表し，A の要素 a に写像 f で対応する B の要素を $f(a)$ と書く．

解答



$1 \leqq f(i) \leqq n \quad (i = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ である．
$f(1) = 1$ なら k として 1 をとればよい．そこで $f(1) > 1$ とする．$f(n) = n$ なら k として n をとればよい．そこで $f(n) < n$ とする．
このとき，$f(1) > 1$ かつ $f(n) < n$ なので $f(i) > i$ となる i の中の最大のものが存在する．それを i_0 とする．$i_0 < n$ である．
$i_0 + 1$ は $f(i) > i$ を満たさないので $f(i_0+1) \leqq i_0+1$．ところが $i \leqq j$ ならば，つねに $f(i) \leqq f(j)$ なので

$$i_0 < f(i_0) \leqq f(i_0+1) \leqq i_0+1$$

ここでもし $f(i_0+1) < i_0+1$ なら，隣りあう二つの自然数 i_0 と i_0+1 の間にさらに自然数が存在し不合理.

$$\therefore \quad f(i_0+1) = i_0+1$$

$i_0+1 \leqq n$ なので k として i_0+1 をとればよい. □

次のような別解もある．

背理法でやってみようとするのは自然な発想だ．問題をその次の段階．数学的帰納法で $f(i) > i$ を示せれば，n のところで矛盾が起こる．

別解　背理法で示す.

$1 \leqq i \leqq n$ のすべての i に対して $f(i) \neq i$ であるとする．このときすべての i について $f(i) > i$ であることを数学的帰納法で示す.

$f(1) \geqq 1$ かつ $f(1) \neq 1$ なので $f(1) > 1$ ．

$f(i) > i$ とする．$i \leqq j$ ならば，つねに $f(i) \leqq f(j)$ なので $i < f(i) \leqq f(i+1)$．したがって $i+1 \leqq f(i+1)$ であるが $i+1 \neq f(i+1)$ なので $i+1 < f(i+1)$ である．数学的帰納法によってすべての i について $f(i) > i$ となる．

ところがこのとき $n < f(n)$ なので， f が N から N への写像であることと矛盾した．ゆえに $1 \leqq i \leqq n$ のの中に少なくとも一つ $f(k) = k$ となる $i = k$ が存在する． □

4.4.5　存在の間接証明－中間値の定理

次に方程式の解の存在証明などでよく用いられるのが連続な関数の「中間値の定理」である．

区間 $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ が $x = a,\ b$ で異なる値 $f(a) = \alpha,\ f(b) = \beta$ をとるとする．α と β の中間 ($\alpha,\ \beta$ は含まない) の任意の値 γ に対して， $a < c < b$ で $\gamma = f(c)$ となる c が存在する．よく使われるのは α と β が異符号で $\gamma = 0$ にとる場合だ.

> $a \leqq x \leqq b$ で連続な関数 $f(x)$ がある．$f(a)f(b) < 0$ なら，$f(x) = 0$ の解が少なくとも一つ $a < x < b$ に存在する．

さらにこの c の存在自体は実数の連続性を土台に，関数の連続性を用いて示される．それについては『解析基礎』を参照のこと．高校数学範囲では中間値の定理は証明なしに用いてよい．

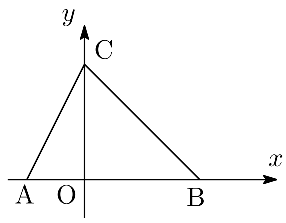
ここではこれを含めてまとめとして，三通りの方法で次の問題を解いてみる．

例題 4.24　［99 京大理系後期］

$\triangle$ABC は鋭角三角形とする．このとき，各面すべてが $\triangle$ABC と合同な四面体が存在することを示せ．

直接に示す方法ーその 1　図のように xyz 空間のなかの xy 平面上に鋭角三角形 ABC を正の数 $a,\ b,\ c$ を用いて A$(-a,\ 0)$，B$(b,\ 0)$，C$(0,\ c)$ とおく．鋭角三角形であるから

$$
\begin{aligned}
(a+b)^2 &< (a^2+c^2)+(b^2+c^2)\\
(a^2+c^2) &< (a+b)^2+(b^2+c^2)\\
(b^2+c^2) &< (a^2+c^2)+(a+b)^2
\end{aligned}
$$



$$\therefore\quad ab < c^2 \quad \cdots ①$$

点 P$(x,\ y,\ z)$ が $\triangle$ABC を底辺とする求める四面体の第 4 の頂点であるために条件を書く．

$$
\begin{cases}
(x+a)^2+y^2+z^2 = b^2+c^2 & \cdots ②\\
(x-b)^2+y^2+z^2 = a^2+c^2 & \cdots ③\\
x^2+(y-c)^2+z^2 = (a+b)^2 & \cdots ④
\end{cases}
$$

② $-$ ③ を整理して

$$2(a+b)x = 2(b^2-a^2) \quad \therefore\quad x = b-a$$

これを ③，④ に代入して

$$
\begin{cases}
y^2+z^2 = c^2\\
(y-c)^2+z^2 = 4ab
\end{cases}
$$

これから

$$y = c - \frac{2ab}{c},\quad z^2 = \frac{4ab}{c^2}(c^2-ab)$$

条件 ① から $z^2 > 0$ なので，$z = \pm\sqrt{\dfrac{4ab}{c^2}(c^2-ab)}$ と定まる．

このとき四面体 P $-$ ABC において

$$\triangle\mathrm{ABC} \equiv \triangle\mathrm{PCB} \equiv \triangle\mathrm{CPA} \equiv \triangle\mathrm{BAP}$$

であり題意を満たす四面体が存在した．　□

直接に示す方法ーその 2　$\triangle$ABC の各頂点の対辺の長さを $a,\ b,\ c$ とする．鋭角三角形なので

$$a^2+b^2 > c^2,\ b^2+c^2 > a^2,\ c^2+a^2 > b^2$$

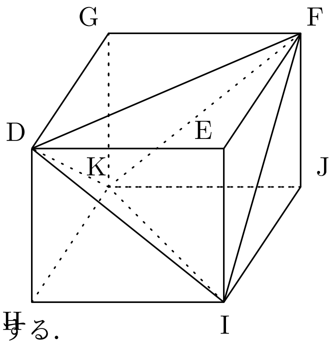
が成り立つ．そこで

$$x=\sqrt{\frac{a^2+b^2-c^2}{2}},\ y=\sqrt{\frac{b^2+c^2-a^2}{2}},\ z=\sqrt{\frac{c^2+a^2-b^2}{2}}$$

とおき，$x,\ y,\ z$ を 3 辺の長さとする直方体 DEFG − HIJK を作る．このとき三つの対角線の長さが

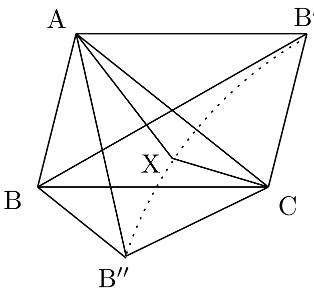
$$\sqrt{x^2+y^2}=b,\ \sqrt{y^2+z^2}=c,\ \sqrt{z^2+x^2}=a$$

となる．従って △DFIK が題意をみたす四面体である． □



間接的に示す方法　△ABC の各頂点の対辺の長さを $a,\ b,\ c$ とする．

△ABC に対して同じ平面上に図のように △AB′C と △AB″C を △CBA と合同になるようにとる．∠BCB′ $=\theta$ とすると ∠B < 90° より



$$\theta=\angle\mathrm{A}+\angle\mathrm{C}=180^\circ-\angle\mathrm{B}>90^\circ$$

$$\therefore\quad \overline{\mathrm{BB'}}^2=a^2+c^2-2ac\cos\theta>a^2+c^2>b^2$$

また四角形 BB″CA は等脚台形で ∠A が鋭角より

$$\overline{\mathrm{BB''}}<\mathrm{AC}=b$$

そこで点 X をはじめは B′ の位置にあるものとし，△ABC のある平面から起こし，AC を軸に △AXC を回転して X が B″ の位置に来るまで動かすものとする．

このとき線分 XB の長さは $\overline{\mathrm{B'B}}$ から連続的に変化して $\overline{\mathrm{B''B}}$ になる．ところが

$$\overline{\mathrm{B'B}}>b>\overline{\mathrm{B''B}}$$

であるから中間値の定理により途中で

$$\overline{\mathrm{XB}}=b$$

となる点 X = P が存在する．

このとき四面体 P − ABC において

$$\triangle\mathrm{ABC}\equiv\triangle\mathrm{PCB}\equiv\triangle\mathrm{CPA}\equiv\triangle\mathrm{BAP}$$

であり題意を満たす四面体が存在した． □

4.4.6　問題と考え方

問題

4.27　［92 京大文系後期］　考え方 4.27　解答 5.91

k は 0 または正の整数とする．方程式 $x^2-y^2=k$ の解 (a,b) で a,b がともに奇数であるものを奇数解とよぶ．

(1) $x^2-y^2=k$ が奇数解をもてば，k は 8 の倍数であることを示せ.

(2) $x^2-y^2=k$ が奇数解をもつための必要十分条件を求めよ.

4.28　［99 京大文系前期］　考え方 4.28　解答 5.92

0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする．たとえば，$C(12578)=78$, $C(6)=6$ である．n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする.

(1) x，y が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ.

(2) $C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ.

4.29　［99 名大理系］　考え方 4.29　解答 5.93

複素数平面において集合 A, B, C, D, E を次のように定義する.

$$A=\left\{z \mid \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}}\text{ は整数}\right\},\ B=\left\{z \mid \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{3}}\text{ は整数}\right\}$$
$$C=\left\{z \mid \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}i}\text{ は整数}\right\},\ D=\left\{z \mid \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{3}i}\text{ は整数}\right\}$$
$$E=(A\cap C)\cup(A\cap D)\cup(B\cap C)\cup(B\cap D)$$

集合 E から 17 個の複素数を任意に選んでその集合を F とする．F の中に，中点が E の要素になっているような 2 点が存在することを示せ.

4.30　［06 愛知教育大］　考え方 4.30　解答 5.94

A を 100 以下の自然数の集合とする．また，50 以下の自然数 k に対し，A の要素でその奇数の約数のうち最大のものが $2k-1$ となるものからなる集合を A_k とする．このとき, 次の問いに答えよ.

(1) A_4 を求めよ.

(2) A の各要素は，A_1 から A_{50} までの 50 個の集合のうちのいずれか 1 つに属することを示せ.

(3) A の部分集合 B が 51 個の要素からなるとき，$\dfrac{y}{x}$ が整数となるような B の異なる要素 x，y が存在することを示せ.

(4) 50 個の要素からなる A の部分集合 C で，その中に $\dfrac{y}{x}$ が整数となるような異なる要素 x，y が存在しないものを 1 つ求めよ.

4.31　［97 京大理系］　考え方 4.31　解答 5.95

自然数 n と n 項数列 a_k $(1\leqq k\leqq n)$ が与えられていて，次の条件 (i, ii) を満たしている.

(i) a_k $(1\leqq k\leqq n)$ はすべて正整数で，すべて 1 と $2n$ の間にある.

$$1\leqq a_k\leqq 2n$$

(ii) $s_j=\displaystyle\sum_{k=1}^{j}a_k$ とおくとき，$s_j(1\leqq j\leqq n)$ はすべて平方数である．(整数の 2 乗である数を平方数という．)

このとき

(1) $s_n = n^2$ であることを示せ.

(2) a_k $(1 \leqq k \leqq n)$ を求めよ.

4.32　［作成問題］　考え方 4.32　解答 5.96
次の不定方程式に有理数解が存在しないことを示せ.

(1) $x^2 + y^2 = 6$

(2) $3x^2 + 5y^2 = 4$

4.33　［01 東大文系］　考え方 4.33　解答 5.97
白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる．碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも一つあることを示せ.

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる．ただし，碁石が一つも残らない場合も同数とみなす.

4.34　［06 京大文系］　考え方 4.34　解答 5.98
n, k は自然数で $k \leqq n$ とする．穴のあいた $2k$ 個の白玉と $2n-2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る．このとき適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分け，どちらの組も白玉 k 個, 黒玉 $n-k$ 個からなるようにできることを示せ.

4.35　［05 信州大理系］　考え方 4.35　解答 5.99
あるマラソン選手は出発地点から 40km の地点までちょうど 2 時間で走った．このとき，途中のある 3 分間でちょうど 1km の距離を進んだことを説明せよ.

4.36　［02 京大文理後期］　考え方 4.36　解答 5.100
各面が鋭角三角形からなる四面体 ABCD において 辺 AB と辺 CD は垂直ではないとする．このとき辺 AB を含む平面 α に点 C，点 D から下ろした垂線の足をそれぞれ C$'$, D$'$ とするとき，4 点 A，B， C$'$, D$'$ がすべて相異なり，しかも同一円周上にあるように α がとれることを示せ.

4.37　［作成問題］　考え方 4.37　解答 5.101
平面 α に対し，$\triangle$ABC の各頂点 A, B, C を通り平面 α に垂直な直線の α との交点をそれぞれ A$'$, B$'$, C$'$ とする．このようにして得られた $\triangle$A$'$B$'$C$'$ を $\triangle$ABC の平面 α への正射影という.
任意の 2 つの三角形 $\triangle$ABC と $\triangle$PQR に対し，次の条件を満たす平面 α が存在することを示せ.

平面αへの正射影 $\triangle$ A$'$B$'$C$'$が $\triangle$ PQR と相似になる.

考え方

4.27　問題 4.27　解答 5.91
(1) は奇数解が存在するので，これを文字に置く．(2) は (1) が必要条件と推測し，十分性の証明を試みる．存在を示すのだから，任意の 8 の倍数 k に対して奇数解を作ってみせればよい.

4.28　問題 4.28　解答 5.92

$C(x)$ のように新しい記号が出てきたらその意味を普通の言い方に置きかえる．$C(x)=C(y)$ とは要するに x と y のあいだにどのような関係が成り立つことと同値であるか，と考えよう．(2) は不定方程式の整数解の存在証明そのもの．勉強したことを思い起こそう．

4.29　問題 4.29　解答 5.93

鳩の巣原理そのものである．同じ集合の内の中点がふたたび属することが言えるために，部屋に分ければよいのか，である．

4.30　問題 4.30　解答 5.94

これは一点鳩の巣原理が使われる．その他は整数の基本事項である．

4.31　問題 4.31　解答 5.95

いろんな示し方があるが，s_j に関して部屋割り論法が使えるようにならないか．s_n がどの範囲にはいるのか考えよう．

4.32　問題 4.32　解答 5.96

$x^2+y^2=6$ に有理数解が存在することと $X^2+Y^2=6Z^2$ に $(0,\ 0,\ 0)$ 以外の整数解が存在することが同値であることを先に示そう．

4.33　［01 東大文系］　問題 4.33　解答 5.97

問題に対して，論証に必要な道具立てを考えなければならない．いろんな方法がありうる．例題 4.23 を参考に，何らかの関数を作り大小が逆転することから，存在を示す．

4.34　［06 京大文系］　問題 4.34　解答 5.98

上記問題と同様である．

4.35　問題 4.35　解答 5.99

何か適切な関数を導入し中間値の定理で存在を示そう．

4.36　問題 4.36　解答 5.100

平面を AB の周りに 1 回転し，角がどのように変化するかを見てみよう．

4.37　問題 4.37　解答 5.101

図形の存在証明はまず座標において関係式を満たす実数解の存在から示すのが土台である．図形を空間座標において，その正射影が相似となる条件を書いてみよう．

第5章　解答

5.1　2章解答

解答 5.1　問題 2.1

条件をみたす正の実数 $(x,\ y,\ z)$ が存在したとする.

$$x^a = y^b = z^c = xyz = k$$

とおく．このとき $x = k^{\frac{1}{a}},\ y = k^{\frac{1}{b}},\ z = k^{\frac{1}{c}}$ でさらに $xyz = k$ なので

$$xyz = k^{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} = k$$

$x,\ y,\ z$ は 1 とは異なり，$a,\ b,\ c$ は正なので $k > 0,\ k \neq 1$．したがって

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} = 1$$

が必要である.

逆に $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 1$ なら，任意の 1 でない正の実数 k に対して $x = k^{\frac{1}{a}},\ y = k^{\frac{1}{b}},\ z = k^{\frac{1}{c}}$ とおけば，この $x,\ y,\ z$ は条件をみたす．したがって $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c} = 1$ が，$x,\ y,\ z$ が存在するための必要十分条件である.

$a \leqq b \leqq c$ より $\dfrac{1}{a} \geqq \dfrac{1}{b} \geqq \dfrac{1}{c}$ である.

$$\therefore\quad 1 = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{3}{a}$$

これから $a = 1,\ 2,\ 3$ でなければならない.

$a = 1$ なら $b,\ c$ は存在しない．$a = 2$ のとき

$$\frac{1}{2} = \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{2}{b}$$

これから $b = 3,\ 4$ $b = 3$ なら $c = 6$，$b = 4$ なら $c = 4$

$a = 3$ のとき

$$\frac{2}{3} = \frac{1}{b}+\frac{1}{c} \leqq \frac{2}{b}$$

これから $b = 3$，このとき $c = 3$

ゆえに求める正の整数の組 $(a,\ b,\ c)$ は

$$(3,\ 3,\ 3),\ (2,\ 4,\ 4),\ (2,\ 3,\ 6)$$

□

解答 5.2　問題 2.2

$k=1,\ 2,\ \cdots,\ 2004$ に対し，2^k が十進法で表したとき l 桁の数で，その最高位の数字が 1 であるとする．これは

$$10^{l-1} \leqq 2^k < 2 \cdot 10^{l-1}$$

となることと同値である．これから

$$l-1 \leqq k \log_{10} 2 < \log_{10} 2 + l - 1$$

つまり

$$\frac{l-1}{0.3010} \leqq k < 1 + \frac{l-1}{0.3010}$$

l を固定するとき，これをみたす整数 k はちょうど一つある．つまり桁が同じ数の中で最高位の数字が 1 であるものは一つだけある．

ただし，2^0 が含まれていないので，与えられた数のうち 1 桁の数の中に最高位の数字が 1 であるものはない．

$N = 2^{2004}$ とすると

$$\log_{10} N = 2004 \cdot 0.3010 = 603.204$$

つまり

$$10^{603} < N < 10^{604}$$

より 2^{2004} は 604 桁である．

したがって求める数は 603 である．　□

解答 5.3　問題 2.3

(1) 方程式 (i) の第一，二式，および第二，三式からそれぞれ x を消去する．

$$\begin{cases} 3y-3z=6a-3b \\ 9y-9z=3b-6c \end{cases} \iff \begin{cases} 3y-3z=6a-3b \\ 3y-3z=b-2c \end{cases}$$

これをみたす y と z が存在するための必要十分条件は

$$6a-3b=b-2c \quad \iff \quad 3a-2b+c=0 \quad \cdots①$$

方程式 (i) の第一，二式，および第二，三式からそれぞれ x を消去しているので，第二式の x が共通でありいずれから定めても $y,\ z$ に対して一意に x が定まる．

方程式 (i) の解は，実数 t を用いて次のように表されるすべての $(x,\ y,\ z)$ である．

$$(x,\ y,\ z)=(t+a+b,\ t+2a-b,\ t)$$

(2) 条件から (i) の解を (ii) に代入した

$$(t+a+b)^2+(t+2a-b)^2+t^2=1 \quad \iff \quad 3t^2+6at+5a^2-2ab+2b^2-1=0$$

は t の二次方程式として重解をもつ．その条件は

$$D/4=9a^2-3(5a^2-2ab+2b^2-1)=0 \quad \iff \quad 2a^2-2ab+2b^2=1$$

であり，重解は $t=-a$ である．つまり (i)(ii) のただ一つの共通解は

$$(x,\ y,\ z)=(b,\ a-b,\ -a)$$

このとき

$$2x^2+2xy+2y^2=2b^2+2b(a-b)+2(a-b)^2=2a^2-2ab+2b^2=1$$

である．

□

解答 5.4　問題 2.4 方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0 \quad \cdots ①$$

の解 x のとる値の範囲は，① をみたしかつ $s^2+t^2=1$ となるよう 0 以上の実数 $s,\ t$ が存在する範囲として定まる．

$s^2+t^2=1$ なので，$(s-t)^2=s^2+t^2-2st=1-2st=-1-2st+2=-(s+t)^2+2$ である．したがって ① から

$$x^4-2(s+t)x^2-(s+t)^2+2=0$$

を得る．

ここで $s+t=k$ とおく．st 平面の四分の一円 $s^2+t^2=1$ $(0\leqq s,\ t)$ と直線 $s+t=k$ が共有点をもつ k の最大値は円と直線が接するときで $\sqrt{2}$，最小値は $(1,\ 0)$ を通るときで 1．つまり k の範囲は $1\leqq k\leqq\sqrt{2}$ である．逆にこの範囲の k に対しては $s,\ t$ が存在する．

したがって解 x のとる値の範囲は,

$$x^4-2kx^2-k^2+2=0 \quad \cdots ②$$

が k の二次方程式として $1\leqq k\leqq\sqrt{2}$ に解をもつ範囲である．

② を k の二次方程式として整理すると $k^2+2x^2k-x^4-2=0$.

$$f(k)=k^2+2x^2k-x^4-2$$

とおく．$f(k)$ は軸が $k=-x^2\leqq 0$ にあり，$f(1)=-x^4+2x^2-1=-(x^2-1)^2\leqq 0$ である．

ゆえに $f(k)=0$ が $1\leqq k\leqq\sqrt{2}$ に解をもつ必要十分条件は

$$f(\sqrt{2})\geqq 0$$

である．$f(\sqrt{2})=2\sqrt{2}x^2-x^4$ なので，$0\leqq x^2\leqq 2\sqrt{2}$.

$$\therefore \quad -\sqrt[4]{8}\leqq x\leqq\sqrt[4]{8}$$

□

解答 5.5　問題 2.5

点 A を原点にして

$$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 0),\ \mathrm{D}(0,\ 3,\ 0),$$

とおく．また点 C$(a,\ b,\ c)$ とする．条件から

$$
\begin{aligned}
&|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 2\\
&\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 2\cos 60^\circ = 1\\
&\overrightarrow{\mathrm{AD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = 6\cos 60^\circ = 3
\end{aligned}
$$

である．これを成分で書いて

$$a^2+b^2+c^2=4,\ a=1,\ 3b=3$$

これから $c=\pm\sqrt{2}$ であるが，4 点の配置は xy 平面で対称であるから $c=\sqrt{2}$ としてよい．

$$\therefore\quad \mathrm{C}(1,\ 1,\ \sqrt{2})$$

次に E$(s,\ t,\ u)$ とする．条件から

$$
\begin{aligned}
s^2+t^2+u^2 &= (s-1)^2+t^2+u^2\\
&= s^2+(t-3)^2+u^2\\
&= (s-1)^2+(t-1)^2+(u-\sqrt{2})^2
\end{aligned}
$$

これから

$$s=\frac{1}{2},\ t=\frac{3}{2},\ u=0$$

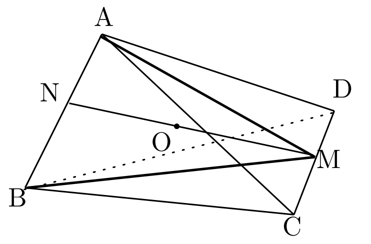
を得る．

$$\therefore\quad \mathrm{AE}=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}=\frac{\sqrt{10}}{2}$$

□

解答 5.6　問題 2.6

CD の中点を M，AB の中点を N とする．四面体を辺 AB と点 M を通る平面で切る．対称性から外接球の中心 O は三角形 ABM 上にあり，さらに OA = OB なので，直線 NM 上にある．



$$
\begin{aligned}
\mathrm{AM} &= \sqrt{\sqrt{5}^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\frac{3\sqrt{2}}{2},\\
\mathrm{NM} &= \sqrt{\left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2-\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2}=2
\end{aligned}
$$

また $\mathrm{OA}^2=\mathrm{ON}^2+\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ より

$$\mathrm{ON}=\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}$$

これから

$$\mathrm{OM}=2-\sqrt{r^2-\frac{1}{2}}$$

次に $\mathrm{OC}^2 = \mathrm{OM}^2 + \left(\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2$ より

$$r^2 = \left(2 - \sqrt{r^2 - \frac{1}{2}}\right)^2 + \frac{1}{2}$$

これを展開して

$$r^2 = 4 - 4\sqrt{r^2 - \frac{1}{2}} + r^2 - \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

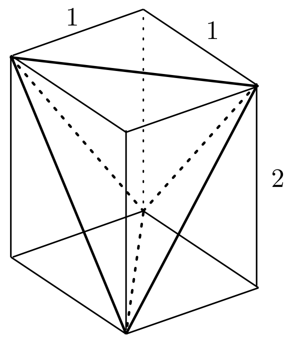
なので，$\sqrt{r^2 - \dfrac{1}{2}} = 1$ である．

$$\therefore \quad r = \sqrt{\frac{3}{2}} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$

別解

この四面体は四つの面が合同である．このような四面体は，頂点を直方体の頂点のうちの四つにとって直方体の中に埋め込むことができる．この場合は一辺 1 の正方形を底面とする高さ 2 の直方体をとり，対角線を図のようにとると，問題の四面体が得られる．このとき外接球の中心は，直方体の中心であり，したがって外接球の半径 r は，

$$r = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1^2} = \frac{\sqrt{6}}{2}$$



□

解答 5.7　問題 2.7

△ABC の 3 頂点 A，B，C の対辺の長さを a，b，c とする．また点 A の位置ベクトルを $\overrightarrow{a}$ のように表す．

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{AP}(t)} &= ut\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|} = \frac{ut}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
\overrightarrow{\mathrm{BQ}(t)} &= vt\frac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|} = \frac{vt}{a}\overrightarrow{\mathrm{BC}} \\
\overrightarrow{\mathrm{CR}(t)} &= wt\frac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|} = \frac{wt}{b}\overrightarrow{\mathrm{CA}}
\end{aligned}$$

となる．ゆえに

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{p(t)} &= \overrightarrow{a} + \frac{ut}{c}(\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \\
\overrightarrow{q(t)} &= \overrightarrow{b} + \frac{vt}{a}(\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}) \\
\overrightarrow{r(t)} &= \overrightarrow{c} + \frac{wt}{b}(\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c})
\end{aligned}$$

$\triangle$P(t)Q(t)R(t) の重心の位置ベクトルは

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{p(t)}+\overrightarrow{q(t)}+\overrightarrow{r(t)})=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\frac{t}{3}\left\{\frac{u}{c}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{v}{a}(\vec{c}-\vec{b})+\frac{w}{b}(\vec{a}-\vec{c})\right\}$$

これが t によらず一定なことであることは

$$\frac{u}{c}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{v}{a}(\vec{c}-\vec{b})+\frac{w}{b}(\vec{a}-\vec{c})=\vec{0}$$

と同値である．この式を整理すると

$$\begin{aligned}&\frac{u}{c}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{v}{a}(\vec{c}-\vec{b})+\frac{w}{b}(\vec{a}-\vec{c})\\ =\ &\frac{u}{c}(\vec{b}-\vec{a})+\frac{v}{a}(\vec{c}-\vec{a}+\vec{a}-\vec{b})+\frac{w}{b}(\vec{a}-\vec{c})\\ =\ &\left(\frac{u}{c}-\frac{v}{a}\right)(\vec{b}-\vec{a})+\left(\frac{v}{a}-\frac{w}{b}\right)(\vec{c}-\vec{a})=\vec{0}\end{aligned}$$

となる．ところが $\vec{b}-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\vec{c}-\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は平行でないので，これは

$$\frac{u}{c}-\frac{v}{a}=\frac{v}{a}-\frac{w}{b}=0$$

と同値である．つまり $\triangle$P(t)Q(t)R(t) の重心の位置が t によらず一定なことと，

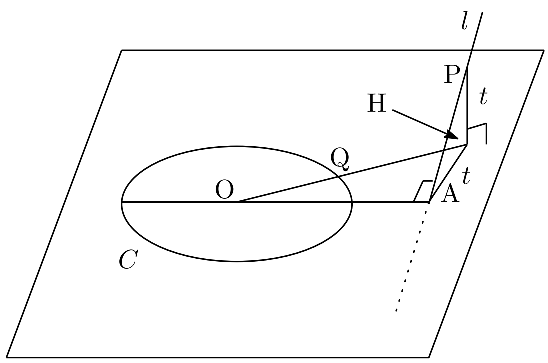
$$\frac{u}{c}=\frac{v}{a}=\frac{w}{b}\quad\cdots①$$

が同値であることが示された．

① はそれぞれの辺を頂点から頂点まで移動するのにかかる時間が等しいことを意味している．つまり，3 点が同時に次の頂点に到達することを意味している．よって題意が示された． □

解答 5.8　問題 2.8

l 上に点 P をとる． P から C を含む平面への距離を t $(t \geqq 0)$ とおく．P から垂線を平面に下ろし，その足を H とする．l の平面とのなす角が 45° なので， AH $= t$ となる．



C 上の点 Q で，点 P との距離が最小になるものは，H と円 C の中心 O を結ぶ直線が最初に C と交わる点である．

このとき

$$\mathrm{PQ}^2=\left(\sqrt{t^2+a^2}-1\right)^2+t^2=2t^2+a^2+1-2\sqrt{t^2+a^2}$$

ここで $X=\sqrt{t^2+a^2}$ とおくと

$$\mathrm{PQ}^2=2X^2-2X-a^2+1=2\left(X-\frac{1}{2}\right)^2-a^2+\frac{1}{2}$$

となる． X の変域は $a \leqq X$ である．したがって PQ^2 の最小値は次のように場合に分かれる．

(1) $0 < a \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき PQ^2 は $X = \dfrac{1}{2}$ で最小値 $-a^2 + \dfrac{1}{2}$ をとる．

(2) $\dfrac{1}{2} < a$ のとき PQ^2 は $X = a$ $(t = 0)$ で最小値 $a^2 - 2a + 1 = (a-1)^2$ をとる．

$$\therefore\quad \mathrm{PQ}\text{ の最小値} = \begin{cases} \sqrt{-a^2 + \dfrac{1}{2}} & \left(0 < a \leqq \dfrac{1}{2}\right) \\ |a-1| & \left(\dfrac{1}{2} < a\right) \end{cases}$$

□

解答 5.9　問題 2.9

(1) 交通費の総額を $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq l)$ とおく．

$$\begin{aligned} f(x) &= a \cdot 100x + b \cdot 100(l - x) \\ &= 100\{(a-b)x + bl\} \end{aligned}$$

したがって $f(x)$ を最小にする x と最小値は

$$\begin{cases} a < b \text{ のとき，} & x = l,\ \text{最小値 } f(l) = 100al \\ a = b \text{ のとき，} & 0 \leqq x \leqq l \text{ の任意の } x,\ \text{最小値} = 100bl \\ a > b \text{ のとき，} & x = 0,\ \text{最小値 } f(0) = 100bl \end{cases}$$

(2) 交通費の総額を $g(x)$ $(0 \leqq x \leqq l)$ とおく．

$$\begin{aligned} g(x) &= a \cdot 100x^3 + b \cdot 100(l-x)^3 \\ &= 100\{(ax^3 + b(l-x)^3\} \\ g'(x) &= 100\{(3ax^2 - 3b(l-x)^2\} \\ &= 300\{\sqrt{a}x + \sqrt{b}(l-x)\}\{\sqrt{a}x - \sqrt{b}(l-x)\} \\ &= 300\{\sqrt{a}x + \sqrt{b}(l-x)\}\{(\sqrt{a}+\sqrt{b})x - \sqrt{b}l\} \end{aligned}$$

$0 \leqq x \leqq l$ より $\sqrt{a}x + \sqrt{b}(l-x) > 0$ に注意する． $g(x)$ は

$$x = \frac{\sqrt{b}l}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$$

で極小かつ最小となる．最小値は

$$g\left(\frac{\sqrt{b}l}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right) = 100\left\{a\left(\frac{\sqrt{b}l}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3 + b\left(\frac{\sqrt{a}l}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^3\right\} = \frac{100abl^3}{(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

□

解答 5.10　問題 2.10

点 X に対して，0 か 1 を対応させる関数 $f(\mathrm{X})$ を次のように定める．

$$f(\mathrm{X})=\begin{cases}1 & (\mathrm{X}\text{ に表が置かれているとき})\\ 0 & (\mathrm{X}\text{ に裏が置かれているとき})\end{cases}$$

点 X に表か裏を置くことは $f(\mathrm{X})$ の値を決めることに対応するので，$f(\mathrm{A})$ の値の決め方は 2 通り．$f(\mathrm{A})$ の値を決めれば，$f(\mathrm{A})+f(\mathrm{P})+f(\mathrm{Q})+f(\mathrm{C})$ が偶数となる $f(\mathrm{C})$ の値の決め方は一通り．この偶数値を $2k$ とする．以下順に対角線上の表の個数が偶数となるように $f(\mathrm{E})$，$f(\mathrm{B})$，$f(\mathrm{D})$ の値を決める．決め方は一通り．この偶数値を $2l$，$2m$，$2n$ とする．$f(\mathrm{A})$ の値を決めれば

$$\begin{aligned}
f(\mathrm{A})+f(\mathrm{P})+f(\mathrm{Q})+f(\mathrm{C})&=2k\\
f(\mathrm{C})+f(\mathrm{R})+f(\mathrm{S})+f(\mathrm{E})&=2l\\
f(\mathrm{E})+f(\mathrm{T})+f(\mathrm{P})+f(\mathrm{B})&=2m\\
f(\mathrm{B})+f(\mathrm{Q})+f(\mathrm{R})+f(\mathrm{D})&=2n
\end{aligned}$$

と各対角線上の四点の表の個数を偶数とする点 C，E，B，D の値の決め方は一通りである．

このとき $f(\mathrm{D})+f(\mathrm{S})+f(\mathrm{T})+f(\mathrm{A})$ の値も決まっている．この値を N とする．すなわち

$$f(\mathrm{D})+f(\mathrm{S})+f(\mathrm{T})+f(\mathrm{A})=N$$

である．これら五式の両辺を加えると

$$\begin{aligned}
&2\left\{f(\mathrm{A})+f(\mathrm{B})+f(\mathrm{C})+f(\mathrm{D})+f(\mathrm{E})+f(\mathrm{P})+f(\mathrm{Q})+f(\mathrm{R})+f(\mathrm{S})+f(\mathrm{T})\right\}\\
=\;&2k+2l+2m+2n+N
\end{aligned}$$

となり，N も偶数である．したがってこのように決定された五つの頂点の値は条件を満たす．

$f(\mathrm{A})$ の値を決めれば条件を満たす他の値の決め方がただ一通り存在するので，条件を満たすような A，B，C，D，E 上へのコインの置き方は二通りある． □

解答 5.11　問題 2.11

(1)

$$\begin{aligned}
&x^2+2x+\sqrt{x^2+2x-4}=10\\
\iff\;&\sqrt{x^2+2x-4}=-x^2-2x+10\\
\iff\;&x^2+2x-4=(x^2+2x-10)^2\ \text{ かつ }\ -x^2-2x+10\geqq 0\\
\iff\;&(X-10)^2=X-4\ \text{ かつ }\ X-10\leqq 0\quad(\because\ \ X=x^2+2x\text{ とおく})\\
\iff\;&\begin{array}{l}X^2-20X-X+104\\ =X^2-21x+104=(X-13)(X-8)=0\end{array}\ \text{かつ } X\leqq 10\\
\iff\;&X=x^2+2x,\ \ X=8\quad\iff\quad x^2+2x=8\\
\iff\;&x^2+2x-8=(x+4)(x-2)=0\quad\iff\quad x=-4,\ 2
\end{aligned}$$

(2)

$$\begin{aligned}
\sqrt{2x+3}=5-\sqrt{x+1}\quad&\iff\quad 2x+3=(5-\sqrt{x+1})^2,\ 5\geqq\sqrt{x+1}\\
&\iff\quad 2x+3=25-10\sqrt{x+1}+x+1,\ 25\geqq x+1
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&\iff x-23=-10\sqrt{x+1},\ 25 \geqq x+1\\
&\iff (x-23)^2=100(x+1),\ x-23\leqq 0,\ x\leqq 24\\
&\iff x^2-146x+429=(x-3)(x-143)=0,\ x\leqq 23\\
&\iff x=3
\end{aligned}
$$

(3)

$$
\begin{aligned}
&\quad \frac{1}{x-5}+\frac{1}{x+4}=\frac{1}{x-4}+\frac{1}{x+3}\\
&\iff \frac{2x-1}{(x-5)(x+4)}=\frac{2x-1}{(x-4)(x+3)}\\
&\iff x=\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \frac{1}{(x-5)(x+4)}=\frac{1}{(x-4)(x+3)}\\
&\iff x=\frac{1}{2} \quad \text{または} \quad \begin{array}{l}(x-5)(x+4)=(x-4)(x+3)\\ (x-5)(x+4)\neq 0\\ (x-4)(x+3)\neq 0\end{array}\\
&\iff x=\frac{1}{2}
\end{aligned}
$$

(4)

$$
\begin{aligned}
&\quad \frac{x-1}{x+1}+\frac{x+5}{x+7}=\frac{x+1}{x+3}+\frac{x+3}{x+5}\\
&\iff \frac{2x^2+12x-2}{x^2+8x+7}=\frac{2x^2+12x+14}{x^2+8x+15}\\
&\iff (x^2+6x-1)(x^2+8x+15)=(x^2+6x+7)(x^2+8x+7)\\
&\qquad x\neq -1,\ -7,\ -3,\ -5\\
&\iff -x^2-8x+15x^2+90x-15=7x^2+56x+7x^2+42x+49\\
&\qquad x\neq -1,\ -7,\ -3,\ -5\\
&\iff 16x+64=0,\quad x\neq -1,\ -7,\ -3,\ -5\\
&\iff x=-4
\end{aligned}
$$

(5)

$$
\begin{aligned}
&\quad \sqrt{5-x}\leqq 3-x\\
&\iff 5-x\leqq (3-x)^2,\ 3-x\geqq 0 \quad \iff \quad 5-x\leqq x^2-6x+9,\ x\leqq 3\\
&\iff x^2-5x+4\geqq 0,\ x\leqq 3 \quad \iff \quad x\leqq 1,\ 4\leqq x,\ x\leqq 3\\
&\iff x\leqq 1
\end{aligned}
$$

(6)

$$
\sqrt{x-1}>x-3 \quad \iff \quad \left\{\begin{array}{l}0>x-3\\ x-1\geqq 0\end{array}\right. \quad \text{または} \quad \left\{\begin{array}{l}x-1>(x-3)^2\\ x-3\geqq 0\end{array}\right.
$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \quad 3 > x \geqq 1 \ \text{ または } \begin{cases} x^2 - 7x + 10 < 0 \\ x \geqq 3 \end{cases} \\
&\iff \quad 3 > x \geqq 1 \ \text{ または } \begin{cases} 2 < x < 5 \\ x \geqq 3 \end{cases} \\
&\iff \quad 5 > x \geqq 1
\end{aligned}
$$

□

解答 5.12　問題 2.12

基準点 O をとり，直線 AB 上の点 P と直線 CD 上の点 Q を

$$
\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}} = \overrightarrow{\mathrm{OC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} \end{cases}
$$

とおく．直線 PQ で直線 AB および直線 CD と直交するものが存在することは，

$$
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0
$$

となる実数 s, t が存在することと同値である．

$$
\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} - s\overrightarrow{\mathrm{AB}}
$$

なので

$$
\begin{aligned}
& \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0,\ \overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \\
\iff & \begin{cases} \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} - s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = 0 \\ \left(\overrightarrow{\mathrm{AC}} + t\overrightarrow{\mathrm{CD}} - s\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right) \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} = 0 \end{cases} \\
\iff & \begin{cases} s\left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 - t\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ s\overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} - t\left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2 = \overrightarrow{\mathrm{AC}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{CD}} \end{cases}
\end{aligned}
$$

これは， s, t に関する連立一次方程式である．この連立一次方程式が解をもてばよい．ここで直線 AB と直線 CD のなす角を θ とする．

$$
\begin{aligned}
& \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2 - \left(\overrightarrow{\mathrm{CD}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}\right)^2 \\
= & \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2 - \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2 \cos^2\theta \\
= & \left|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right|^2 \left|\overrightarrow{\mathrm{CD}}\right|^2 \sin^2\theta
\end{aligned}
$$

ところが直線 AB と直線 CD は四面体の向かい合う二辺なので，なす角 θ は 0°, 180° ではない．つまり $\sin^2\theta \neq 0$.

連立式を 2 直線の式と考えれば，平行条件が否定されたので必ず交わる．あるいは，連立一次方程式の行列の行列式が 0 でない．つまり s と t に関する連立一次方程式がただ一組の解をもつことを意味している．　□

解答 5.13　問題 2.13

(1) 円の中心を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \overrightarrow{a}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \overrightarrow{b}$ ，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \overrightarrow{c}$ とおく．$\left|\overrightarrow{a}\right| = \left|\overrightarrow{b}\right| = \left|\overrightarrow{c}\right| = 1$ なので，

$$\begin{aligned} & \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 = \left|\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}\right|^2 + \left|\overrightarrow{a} - \overrightarrow{c}\right|^2 \\ = \ & 2\left\{3 - \left(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}\right)\right\} > 8 \end{aligned}$$

ゆえに

$$\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c} + 1 < 0 \quad \cdots ①$$

となる．このとき，

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{AB}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AC}} &= (\overrightarrow{b} - \overrightarrow{a}) \cdot (\overrightarrow{c} - \overrightarrow{a}) \\ &= \overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} - \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{b} - \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{a} + \left|\overrightarrow{a}\right|^2 \\ &> 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + 2 \\ &= 2\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{c} + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 + \left|\overrightarrow{c}\right|^2 = \left|\overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right|^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

ゆえに $\angle \mathrm{A}$ は鋭角である．同様に $\angle \mathrm{B}$, $\angle \mathrm{C}$ も鋭角となり，$\triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であることが示された．

(2)

$$\begin{aligned} & 9 - \{\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2\} \\ = \ & 9 - 2\{3 - (\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c})\} \\ = \ & 3 + 2(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \\ = \ & \left|\overrightarrow{a}\right|^2 + \left|\overrightarrow{b}\right|^2 + \left|\overrightarrow{c}\right|^2 + 2(\overrightarrow{b} \cdot \overrightarrow{a} + \overrightarrow{c} \cdot \overrightarrow{b} + \overrightarrow{a} \cdot \overrightarrow{c}) \\ = \ & \left|\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c}\right|^2 \geqq 0 \end{aligned}$$

等号成立は $\overrightarrow{a} + \overrightarrow{b} + \overrightarrow{c} = 0$ つまり $\triangle \mathrm{ABC}$ の重心と外心が一致するとき．つまり $\triangle \mathrm{ABC}$ が正三角形のときである．

別解

(1) $\angle \mathrm{A} \geqq 90^\circ$ とする．この場合，余弦定理から

$$\mathrm{BC}^2 \geqq \mathrm{AB}^2 + \mathrm{CA}^2$$

となる．ゆえに，

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 \leqq 2\mathrm{BC}^2 \leqq 2 \cdot 2^2 = 8$$

対偶が示せたので $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 > 8$ なら $\angle \mathrm{A} < 90^\circ$ である．

$\angle \mathrm{B} < 90^\circ$, $\angle \mathrm{C} < 90^\circ$ も同様である．

(2) $\triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形でなければ (1) より，

$$\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 \leqq 8$$

$\triangle \mathrm{ABC}$ が鋭角三角形のときに $\mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 \leqq 9$ が成立することを示せばよい．

△ABC の外接円の半径が 1 なので，正弦定理から

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin C} = \frac{\mathrm{BC}}{\sin A} = \frac{\mathrm{CA}}{\sin B} = 2$$

よって

$$\begin{aligned}
& \mathrm{AB}^2 + \mathrm{BC}^2 + \mathrm{CA}^2 = 4(\sin^2 C + \sin^2 A + \sin^2 B) \\
= \ & 2\{2\sin^2 C + (1 - \cos 2A) + (1 - \cos 2B)\} \\
= \ & 2\{2\sin^2 C + 2 - 2\cos(A+B)\cos(A-B)\} \\
= \ & 2\{2\sin^2 C + 2 - 2\cos(180^\circ - C)\cos(A-B)\} \quad \cdots ①
\end{aligned}$$

ここで，$\angle \mathrm{C} < 90^\circ$ より $\cos C > 0$ ，さらに $0 < \cos(A-B) \leqq 1$ であるから，

$$\begin{aligned}
① \quad \leqq \quad & 2(2\sin^2 C + 2 + 2\cos C) = 4(-cos^2 C + \cos C + 2) \\
= \quad & 4\left\{-\left(\cos C - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{9}{4}\right\} \leqq 9
\end{aligned}$$

よって与不等式は成立する．等号成立は，$\cos(A-B) \leqq 1$ かつ $\cos C = \dfrac{1}{2}$，つまり △ABC が正三角形のときである． □

□

解答 5.14　問題 2.14

各頂点 A，B，C の内角を A，B，C とする．

$$0 < A,\ B,\ C,\ A+B+C = \pi$$

である．正弦定理から三辺の長さは

$$\mathrm{BC} = 2\sin A,\ \mathrm{CA} = 2\sin B,\ \mathrm{AB} = 2\sin C$$

である．△ABC の面積を二通りの方法で求める．

$$S = \frac{1}{2}\sin A \cdot \mathrm{AB} \cdot \mathrm{AC} = 2\sin A \sin B \sin C$$

一方，△ABC を，内心を頂点とし各辺を 1 辺とする三つの三角形に分割することにより，

$$S = \frac{r}{2}\cdot \mathrm{BC} + \frac{r}{2}\cdot \mathrm{CA} + \frac{r}{2}\cdot \mathrm{AB} = r(\sin A + \sin B + \sin C)$$

これから

$$r(\sin A + \sin B + \sin C) = 2\sin A \sin B \sin C$$

$\sin A > 0,\ \sin B > 0,\ \sin C > 0$ なので，

$$r = \frac{2\sin A \sin B \sin C}{\sin A + \sin B + \sin C}$$

を得る．

$$\therefore \quad r \leqq \frac{1}{2} \iff \frac{2\sin A\sin B\sin C}{\sin A+\sin B+\sin C} \leqq \frac{1}{2}$$
$$\iff 4\sin A\sin B\sin C \leqq \sin A+\sin B+\sin C$$

ここで和積，積和の公式と ① およびその類似の等式を用いて右辺を変形する．

$$\sin(A+B)=\sin(\pi-C)=\sin C,\ \sin\frac{A+B}{2}=\sin\frac{\pi-C}{2}=\cos\frac{C}{2} \quad \cdots ①$$

などが成りたつ．

$$\begin{aligned}
\sin A+\sin B+\sin C &= 2\sin\frac{A+B}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&= 2\cos\frac{C}{2}\cos\frac{A-B}{2}+2\cos\frac{A+B}{2}\cos\frac{C}{2}\\
&= 2\cos\frac{C}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}+\cos\frac{A+B}{2}\right)\\
&= 4\cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}
\end{aligned}$$

左辺では

$$\sin A\sin B\sin C=8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2}$$

であるから．不等式 $r \leqq \dfrac{1}{2}$ は

$$8\sin\frac{A}{2}\cos\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\cos\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2}\cos\frac{C}{2} \leqq \cos\frac{A}{2}\cos\frac{B}{2}\cos\frac{C}{2}$$

と同値である．$\cos\dfrac{A}{2}\cos\dfrac{B}{2}\cos\dfrac{C}{2}>0$ なので，

$$\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} \leqq \frac{1}{8}$$

と同値である．ところが

$$\begin{aligned}
\sin\frac{A}{2}\sin\frac{B}{2}\sin\frac{C}{2} &= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\cos\frac{A+B}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\\
&= \frac{1}{2}\left(\cos\frac{A-B}{2}-\sin\frac{C}{2}\right)\sin\frac{C}{2}\\
&= -\frac{1}{2}\left(\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}\right)^2+\frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2}\\
&\leqq \frac{1}{8}\cos^2\frac{A-B}{2} \leqq \frac{1}{8}
\end{aligned}$$

より，これは成立する．等号は

$$\sin\frac{C}{2}-\frac{1}{2}\cos\frac{A-B}{2}=0,\ \text{かつ}\ \cos^2\frac{A-B}{2}=1$$

つまり

$$A=B=C=\frac{\pi}{3}$$

で，△ABC が正三角形のとき成立する．

一部別解　解法のなかの不等式

$$4\sin A\sin B\sin C \leqq \sin A+\sin B+\sin C$$

の証明は次のような別解もある．

$\sin A>0,\ \sin B>0,\ \sin C>0$ なので相加平均・相乗平均の不等式から

$$\sqrt[3]{\sin A\sin B\sin C} \leqq \frac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}$$

が成り立つ．両辺 3 乗して 4 倍すると

$$4\sin A\sin B\sin C \leqq \frac{4}{27}(\sin A+\sin B+\sin C)^3$$

したがって

$$\frac{4}{27}(\sin A+\sin B+\sin C)^3 \leqq \sin A+\sin B+\sin C$$

を示せばよい．$\sin A+\sin B+\sin C>0$ なので，これは

$$\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C) \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

と同値である．これは $y=\sin x\ (0<x<\pi)$ で上に凸であることを用いて示せる．

三点 $\mathrm{P}(A,\ \sin A)$, $\mathrm{Q}(B,\ \sin B)$, $\mathrm{R}(C,\ \sin C)$ をとる．その重心 $\left(\dfrac{A+B+C}{3},\ \dfrac{\sin A+\sin B+\sin C}{3}\right)$ は △ABC の内部にある．$y=\sin x$ のグラフが対応する区間では上に凸なので，△ABC の三辺がすべて領域 $y \leqq \sin x$ にある．その結果，重心も領域 $y \leqq \sin x$ にある．これから

$$\frac{1}{3}(\sin A+\sin B+\sin C) \leqq \sin\left(\frac{A+B+C}{3}\right)=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

となる．

別解 1

△ABC の頂点の対辺の長さを $a,\ b,\ c$ とする．また内心を I とする．さらに各点の外心 O を基準点とする位置ベクトルを $\vec{a}$ のように小文字で表す．

AI は ∠BAC の二等分線なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=s\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{1}{b}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\right)$$

と表せる．同様に

$$\overrightarrow{\mathrm{BI}}=t\left(\frac{1}{c}\overrightarrow{\mathrm{BA}}+\frac{1}{a}\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)$$

これを始点を A にして書くと

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\left(1-\frac{t}{a}-\frac{t}{c}\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{t}{a}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

$$\frac{s}{c} = 1 - \frac{t}{a} - \frac{t}{c},\ \frac{s}{b} = \frac{t}{a}$$

$$\therefore\quad s = \frac{bc}{a+b+c},\ t = \frac{ac}{a+b+c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AI}} = \frac{1}{a+b+c}(b\overrightarrow{\mathrm{AB}} + c\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

よって

$$\overrightarrow{i} = \frac{1}{a+b+c}(a\overrightarrow{a} + b\overrightarrow{b} + c\overrightarrow{c})$$

次に

$$a^2 = |\overrightarrow{c} - \overrightarrow{b}|^2 = 2 - 2\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b}$$

などより

$$\begin{aligned} 2\overrightarrow{c}\cdot\overrightarrow{b} &= 2 - a^2 \\ 2\overrightarrow{b}\cdot\overrightarrow{a} &= 2 - c^2 \\ 2\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{c} &= 2 - b^2 \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} |\overrightarrow{i}|^2 &= \frac{1}{(a+b+c)^2}|a\overrightarrow{a} + b\overrightarrow{b} + c\overrightarrow{c}|^2 \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2}\{a^2 + b^2 + c^2 + ab(2 - c^2) + bc(2 - a^2) + ca(2 - b^2)\} \\ &= \frac{1}{(a+b+c)^2}\{(a+b+c)^2 - abc(a+b+c)\} \\ &= 1 - \frac{abc}{a+b+c} \end{aligned}$$

ここで正弦定理から $c = 2\sin C$ なので

$$abc = 4\left(\frac{1}{2}ab\sin C\right) = 4\triangle\mathrm{ABC}$$

一方内接円の半径が r なので

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{r}{2}(a+b+c)$$

である.

$$\therefore\quad abc = 2r(a+b+c)$$

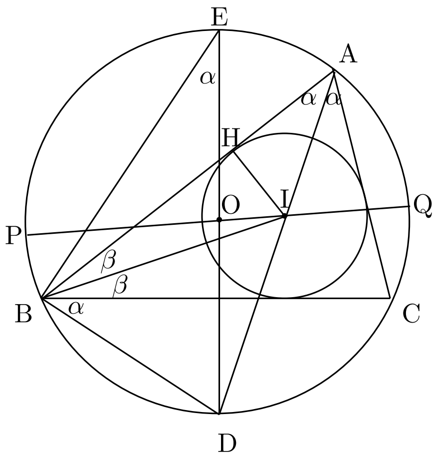
ゆえに

$$|\overrightarrow{i}|^2 = 1 - \frac{abc}{a+b+c} = 1 - 2r \geqq 0$$

$$\therefore\quad r \leqq \frac{1}{2}$$

等号成立は $|\overrightarrow{i}|^2$ より外心と内心が一致するとき，つまり正三角形のときである

別解 2　鈍角三角形や直角三角形では明らかに $r \leqq \dfrac{1}{2}$ なので，△ABC は鋭角三角形とする．内心を I, 外心を O とする．$\angle \mathrm{A} = 2\alpha$，$\angle \mathrm{B} = 2\beta$ とおく．



図のように，AI と外接円の交点を D，D を通る直径を DE とする．また内心 I から辺 AB への垂線の足を H とする．さらに内心 I を通る直径を PQ とする．
$\angle \mathrm{DBE} = \dfrac{\pi}{2}$ で $\angle \mathrm{BED} = \angle \mathrm{HAI}$ より，

$$\triangle \mathrm{BED} \backsim \triangle \mathrm{HAI}$$

この結果

$$\mathrm{BD} : \mathrm{DE} = \mathrm{HI} : \mathrm{IA}$$

よって

$$\mathrm{BD} \cdot \mathrm{IA} = 2r$$

次に図のように $\angle \mathrm{DBC} = \alpha$ なので

$$\angle \mathrm{DBI} = \alpha + \beta = \angle \mathrm{DIB}$$

より △DBI は二等辺三角形．よって BD = DI．この結果

$$2r = \mathrm{DI} \cdot \mathrm{IA}$$

一方，方べきの定理から $\mathrm{DI} \cdot \mathrm{IA} = \mathrm{PI} \cdot \mathrm{IQ}$ であるので，

$$\begin{aligned} 2r &= \mathrm{PI} \cdot \mathrm{IQ} \\ &= (\mathrm{PO} + \mathrm{OI}) \cdot (\mathrm{QO} - \mathrm{OI}) \\ &= 1 - \mathrm{OI}^2 \leqq 1 \end{aligned}$$

これから

$$r \leqq \frac{1}{2}$$

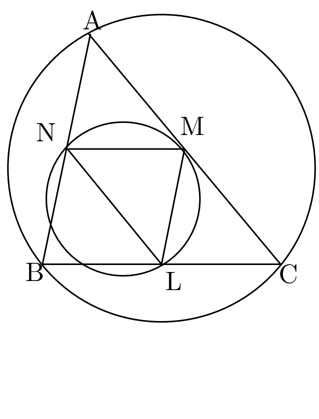
で等号成立は OI = 0，つまり △ABC の内心と外心が一致するときで正三角形のときである．　□

別解 3

三角形の内接円の半径 r とは

　　三角形の 3 辺と共有点をもつ円の半径の最小値

である．



△ABC の各辺の中点を L，M，N とする．
△LMN は △ABC と相似で，相似比は $\dfrac{1}{2}$ である．つまり三辺と共有点をもち半径 $\dfrac{1}{2}$ の円が存在する．ゆえに，内接円の半径 r は $\dfrac{1}{2}$ 以下である．

□

解答 5.15　問題 2.15

(1)

$$\begin{cases} x+2y+5z=3 & \cdots ① \\ \quad ay+2z=2 & \cdots ② \\ \quad 8y+bz=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

とする．② , ③ を満たす一組の y と z に対して，① から x がただ一つ定まる．

したがって ② , ③ を満たす y と z がただ一つ定まればよい．

② $\times b-$ ③ $\times 2$ より

$$(ab-16)y=2b-10$$

$ab-16=0$ のときは，$2b-10=0$ なら y は任意であり，$2b-10\neq 0$ なら y は存在しない．
$ab-16\neq 0$ のときは，y がただ一つに定まる．② から z もただ一つに定まる．

$$\therefore \quad ab-16\neq 0$$

このとき，$y=\dfrac{2b-10}{ab-16}$ なので順次代入して次の解を得る．

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{3ab-25a-4b+52}{ab-16},\ \frac{2b-10}{ab-16},\ \frac{5a-16}{ab-16}\right)$$

(2) (1) から無数の y が存在するのは

$$ab-16=0,\ \text{かつ}\ 2b-10=0$$

のとき．つまり $a=\dfrac{16}{5}$, $b=5$ のときである．このとき方程式 ② , ③ はともに,

$$8y+5z=5 \quad \cdots ④$$

となる．したがって，④ を満たす $(y,\ z)$ に対して，z の値を t にとると，y は

$$y=\frac{5-5t}{8}$$

と定まる．これは ④ を満たす．つまり，すべての $(y,\ z)$ は任意の数 t を用いて $\left(\dfrac{5-5t}{8},\ t\right)$ と表される．このとき

$$x=3-2\left(\frac{5-5t}{8}\right)-5t=\frac{7-15t}{4}$$

$$\therefore \quad (x,\ y,\ z)=\left(\frac{7-15t}{4},\ \frac{5-5t}{8},\ t\right),\ (t\ \text{は任意の数})$$

□

解答 5.16　問題 2.16

(1)

$$\begin{aligned} f(n) &= n^3-n+3(an^2+bn+c) \\ &= (n-1)n(n+1)+3(an^2+bn+c) \end{aligned}$$

$n-1,\ n,\ n+1$ は三つの連続した整数なので，いずれかは 3 の倍数である．ゆえにその積 $(n-1)n(n+1)$ はつねに 3 の倍数である．

よって，すべての整数 n に対して，$f(n)$ は 3 の倍数である．

(2) $g(x)$ を $g(x)=x^3+px^2+qx+r$ とおく．条件から

$$\begin{array}{ll} g(-1)=-1+p-q+r & \cdots ① \\ g(0)=r & \cdots ② \\ g(1)=1+p+q+r & \cdots ③ \end{array}$$

のいずれも 3 の倍数である．② から r が 3 の倍数なので，整数 c を用いて $r=3c$ とおく．① ＋③ から $2p+6c$ が 3 の倍数，つまり $2p$ が 3 の倍数．2 と 3 は互いに素なので，p が 3 の倍数である．整数 a を用いて $p=3a$ とおく．その結果，$q+1$ が 3 の倍数になるので，整数 b を用いて $q+1=3b$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} g(x) &= x^3+px^2+qx+r \\ &= x^3+3ax^2+(3b-1)x+3c \\ &= x^3-x+3(ax^2+bx+c) \end{aligned}$$

である．つまり $g(x)$ がある整数 $a,\ b,\ c$ を用いて，

$$g(x)=x^3-x+3(ax^2+bx+c)$$

と表されることが必要である．(1) からこのとき，すべての n に対して $g(n)$ は 3 の倍数になる．

別解

(1)(2) あわせて解くこともできる．$g(x)=x^3+px^2+qx+r$ とおく．すべての整数 n に対し $g(n)$ が 3 の倍数となることは，$g(0)$ が 3 の倍数，かつ $g(n+1)-g(n)$ が 3 の倍数であることと同値．

$$g(n+1)-g(n)=3n^2+3n+1+p(2n+1)+q$$

なので，$h(n)=1+p(2n+1)+q$ とおくと，再びこれが 3 の倍数になることと $h(0)$ が 3 の倍数，かつ $h(n+1)-h(n)$ が 3 の倍数であることと同値.

$$h(n+1)-h(n)=2p$$

よって，$g(n)$ がすべての整数 n に対して 3 の倍数になることと

$$g(0)=r,\ h(0)=p+q+1,\ h(n+1)-h(n)=2p$$

が 3 の倍数になることとが，同値である．

$r=3c,\ q=3b-1,\ p=3a$ とおけば，$g(x)=x^3-x+3(ax^2+bx+c)$ となる． □

解答 5.17　問題 2.17

(1) 与方程式は

$$(a-k)x^2+2bxy+(c-k)y^2=0 \quad \cdots ①$$

となる．① に $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解 $(x_0,\ y_0)$ が存在したとする．

$y_0 \neq 0$ とする．このとき $(a-k){x_0}^2+2bx_0y_0+(c-k){y_0}^2=0$ より

$$(a-k)\left(\frac{x_0}{y_0}\right)^2+2b\left(\frac{x_0}{y_0}\right)+(c-k)=0$$

$a-k=0$ なら $b^2 \geqq (a-k)(c-k)=0$ は成立している．

$a-k \neq 0$ のとき．2 次方程式

$$(a-k)X^2+2bX+c-k=0 \quad \cdots ②$$

に実数解 $X=\dfrac{x_0}{y_0}$ が存在したので，

$$D/4=b^2-(a-k)(c-k) \geqq 0 \quad \cdots ③$$

が成立する．$x_0 \neq 0$ のときも同様．よって③ が① に $(0,\ 0)$ 以外の解が存在するための必要条件であることが示された．

次に③ が成り立っているとする．$a-k=0$ のときは，$(x,\ y)=(1,\ 0)$ が① の解である．$a-k \neq 0$ のとき．2 次方程式② の判別式が負でないので，2 次方程式② に実数解が存在する．それを $X=X_0$ とする．このとき

$$(x,\ y)=(X_0,\ 1)$$

は① の $(0,\ 0)$ 以外の解である．

つまり③ のとき① に $(0,\ 0)$ 以外の解が存在した．したがって与方程式に $(x,\ y)=(0,\ 0)$ 以外の解が存在するためには，$b^2 \geqq (a-k)(b-k)$ が成り立つことが必要十分であることが証明された．

(2) $(x,\ y)=(0,\ 0)$ のとき任意の $p,\ q$ で成立する．$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ のとき $x^2+y^2>0$ であるから，条件は

$$p \leqq \frac{ax^2+2bxy+cy^2}{x^2+y^2} \leqq q$$

となる．ここで，$k=\dfrac{ax^2+2bxy+cy^2}{x^2+y^2}$ とおく．求める p の最大値は k の最小値であり，求める q の最小値は k の最大値である．k のとりうる値の範囲は

$$k(x^2+y^2)=ax^2+2bxy+cy^2$$

を満たす $(0,\ 0)$ 以外の $(x,\ y)$ が存在する範囲として定まる．それは (1) から

$$b^2-(a-k)(c-k) \geqq 0$$

である．これを解いて

$$\frac{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \leqq k \leqq \frac{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2}$$

$$\therefore \quad \begin{aligned} p \text{ の最大値} &= \frac{(a+c)-\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \\ q \text{ の最小値} &= \frac{(a+c)+\sqrt{(a-c)^2+4b^2}}{2} \end{aligned}$$

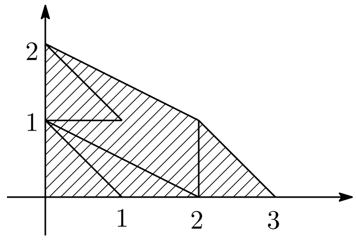
□

解答 5.18　問題 2.18

(1) 三角形 A 内の動点を P，三角形 B 内の動点を Q とする．$A+B$ はベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + \overrightarrow{\mathrm{OQ}}$$

で定まる点 R の全体である．Q を固定し P を A 内を動かすとき，点 R は三角形 A を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ 平行移動した三角形を動く．
その上で点 Q を動かすことにより，$A+B$ は三角形 A の頂点 O が三角形 B 内にあるように動かした図形の全体になることがわかる．
$b=2$ のとき $A+B$ は図の斜線部分である．その面積は



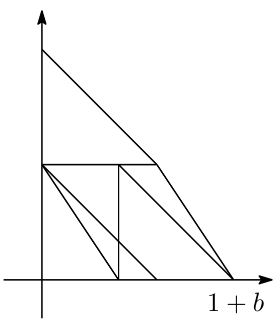
$$\frac{2(1+2)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{7}{2}$$

である．

(2) $|A| = \dfrac{1}{2}$，$|B| = \dfrac{b}{2}$ である．
$b \geqq 1$ のときは (1) と同様に

$$|A+B| = \frac{b(1+2)}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3b+1}{2}$$

$$\begin{aligned} \therefore \quad |A+B| - (\sqrt{|A|}+\sqrt{|B|})^2 &= \frac{3b+1}{2} - \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2 \\ &= \frac{3b+1}{2} - \left(\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{b}{2}\right) \\ &= b - \sqrt{b} \geqq 0 \quad (\because \quad b \geqq 1) \end{aligned}$$



また，$0 < b < 1$ のときは図のようになる．よって

$$|A+B| = \frac{1(1+2)}{2} + \frac{b}{2} = \frac{3+b}{2}$$

$$\therefore \quad |A+B| - (\sqrt{|A|}+\sqrt{|B|})^2 = \frac{3+b}{2} - \left(\sqrt{\frac{1}{2}} + \sqrt{\frac{b}{2}}\right)^2$$

$$= \frac{3+b}{2} - \left(\frac{1}{2} + 2\frac{\sqrt{b}}{2} + \frac{b}{2}\right)$$
$$= 1 - \sqrt{b} \geqq 0 \quad (\because \quad 0 < b < 1)$$

よって，すべての $b > 0$ に対して，$\sqrt{|A+B|} \geqq \sqrt{|A|} + \sqrt{|B|}$ が示せた．

□

解答 5.19　問題 2.19

(1) 条件から $(m+n-1)^2+(m-n+1) = 200$ となればよい．$14^2 = 196$ なので，$\begin{cases} m+n-1=14 \\ m-n+1=4 \end{cases}$ に整数解があればよい．これから $m = 9,\ n = 6$.

(2) 不等式 $-a < b \leqq a$，$-c < d \leqq c$ より $-c \leqq -d < c$ も成り立つので

$$-a-c < b-d < a+c \quad \cdots ①$$

である．一方，等式 $a^2 + b = c^2 + d$ から

$$(c-a)(c+a) = b-d$$

これから $b-d$ は $c+a$ の倍数である．① の範囲の $c+a$ の倍数は 0 しかない．

$$\therefore \quad b-d = 0,\ \text{その結果} \quad a^2 = c^2$$

$-a < a$，$-c < c$ なので a と c は正．よって $a = c$ が示された．

(3) 自然数 k に対し，$f(m,\ n) = k$ をみたす $m,\ n$ が 2 組存在するとし，それを $m_1,\ n_1$ と $m_2,\ n_2$ とする．

$$(m_1+n_1-1)^2 + (m_1-n_1+1) = (m_2+n_2-1)^2 + (m_2-n_2+1)$$

である．$a = m_1+n_1-1$，$b = m_1-n_1+1$，$c = m_2+n_2-1$，$d = m_2-n_2+1$ とおく．

$$-a < b \leqq a \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < m_1,\ 1 \leqq n_1$$

$m_1,\ n_1$ は自然数なのでこれは成立する．$-c < d \leqq c$ も同様に成立する．(2) から $a = c$，$b = d$ となり，これから

$$m_1+n_1 = m_2+n_2,\ m_1-n_1 = m_2-n_2$$

この 2 式を辺々の和と差をとることにより $m_1 = m_2$，$n_1 = n_2$ が成立する．

次に $f(m,\ n) = k$ をみたす $m,\ n$ の存在を示す．

$(m+n-1)^2 + (m-n+1) = 2k$ なので，$\begin{cases} m+n-1 = l \\ m-n+1 = 2k-l^2 \end{cases}$ に自然数解があるように整数 l がとれることを示せばよい．m と n について解いて

$$m = \frac{1}{2}(2k-l^2+l),\ n = \frac{1}{2}(l^2+l-2k)+1$$

( ) 内は偶数なので，m と n は整数である．

$$m \geqq 1,\ n \geqq 1 \quad \Longleftrightarrow \quad l^2 - l + 2 \leqq 2k \leqq l^2 + l$$

ここで l を $\sqrt{2k} + \dfrac{1}{2}$ を超えない最大の整数とする．つまり

$$l \leqq \sqrt{2k} + \frac{1}{2} < l + 1 \quad \Longleftrightarrow \quad l^2 - l + \frac{1}{4} \leqq 2k < l^2 + l + \frac{1}{4}$$

$2k$ が偶数なので，これは

$$l^2 - l + 2 \leqq 2k \leqq l^2 + l$$

を意味する．よって題意をみたす l が存在した．

存在の別証明

次に $f(m,\ n) = k$ をみたす $m,\ n$ の存在を k についての数学的帰納法で示す．

$k = 1$ のとき．$f(1,\ 1) = 1$ より成立．

k のとき $f(m,\ n) = k$ とし，$k+1$ のときの存在を示す．この n について．

(i) $n > 1$ のとき．

$$\begin{aligned} f(m+1,\ n-1) &= \frac{1}{2}\{(m+n-1)^2 + (m-n+3)\} \\ &= f(m,\ n) + 1 = k + 1 \end{aligned}$$

(ii) $n = 1$ のときは $f(m,\ 1) = \dfrac{1}{2}(m^2 + m) = k$ であるから

$$\begin{aligned} f(1,\ m+1) &= \frac{1}{2}\{(1+m+1-1)^2 + (1-m-1+1)\} \\ &= \frac{1}{2}(m^2 + m + 2) = k + 1 \end{aligned}$$

となり，$k+1$ のときも成立する．よってすべての自然数について $f(m,\ n) = k$ をみたす $m,\ n$ が存在し，ただ 1 組だけであることが示された．

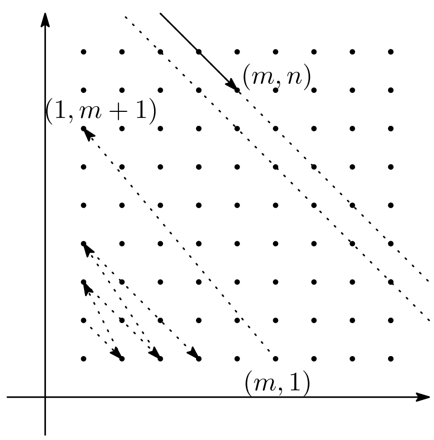
解説

(3) 後半の数学的帰納法による証明は次のことにもとづいている．

$$f(m,\ n) = \frac{1}{2}\{(m+n-1)^2 + (m-n+1)\}$$

は，第 1 象限にある格子点を図の矢線の順に数えたとき，$(m,\ n)$ が $(1,\ 1)$ からはじめて何番目かを示すものである．これをもとに，図を思い浮かべて数学的帰納法で示している．

数学的帰納法の結果，$(m,\ n)$ が $(1,\ 1)$ からはじめて $f(m,\ n)$ 番目にあることが示されている．



直接計算することもできる．$x+y=m+n-1$ の上には $m+n-2$ 個の格子点がある．したがって，$(m,\ n)$ は $(1,\ 1)$ からはじめて

$$\begin{aligned}\frac{(m+n-2)(m+n-1)}{2}+m &= \frac{(m+n-1)^2-(m+n-1)+2m}{2}\\ &= \frac{(m+n-1)^2+(m-n+1)}{2}\end{aligned}$$

となり，$f(m,\ n)$ と一致する．

□

解答 5.20　問題 2.20

関数 $y=\left|x^2-2\right|$ と $y=\left|2x^2+ax-1\right|$ のグラフの共有点の個数は

$$\left|x^2-2\right|=\left|2x^2+ax-1\right| \quad \cdots ①$$

となる実数 x の個数に等しい．① は

$$2x^2+ax-1=x^2-2\ ,\ \text{または}\quad 2x^2+ax-1=-x^2+2$$

つまり

$$ax=-x^2-1\ ,\ \text{または}\quad ax=-3x^2+3$$

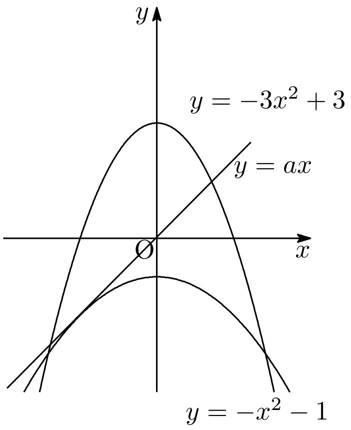
と同値である．したがって直線 $y=ax$ が 2 つの放物線 $y=-x^2-1$ または $y=-3x^2+3$ ともつ共有点の個数に等しい．2 つの放物線の交点は

$$-x^2-1=-3x^2+3$$

より $x=\pm\sqrt{2}$ で交点は $(\pm\sqrt{2},\ -3)$ である．直線 $y=ax$ がこの交点を通るのは $a=\dfrac{\mp 3}{\sqrt{2}}$ である．

またそれぞれの放物線と直線が接するのは判別式を調べて

$$\begin{aligned}&ax=-x^2-1 \iff x^2+ax+1=0\text{：判別式 } D=a^2-4=0 \text{ より } a=\pm 2\\ &ax=-3x^2+3 \iff 3x^2+ax-3=0\text{：判別式 } D=a^2+36>0 \text{ より } a \text{ なし}\end{aligned}$$

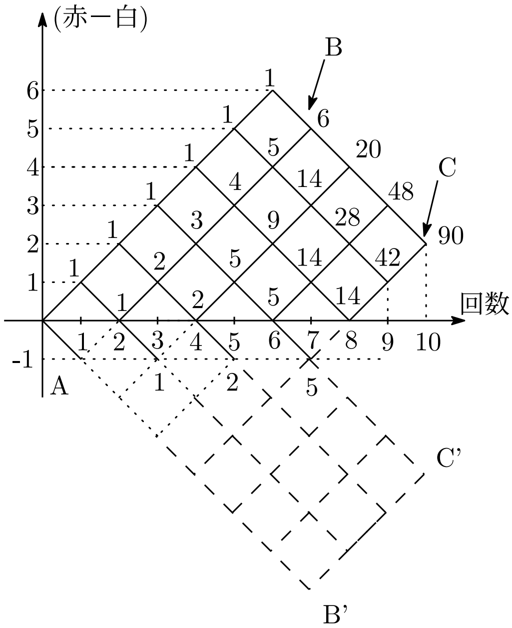


y 軸に関する対称性から $|a|$ の範囲で共有点の個数は次のように決まる．

$$\text{共有点の個数}=\begin{cases}2 & (0\leqq |a|<2)\\ 3 & (|a|=2)\\ 4 & \left(2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\\ 3 & \left(|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}\right)\\ 4 & \left(\dfrac{3}{\sqrt{2}}<|a|\right)\end{cases}$$

□

解答 5.21　問題 2.21



x 軸の 0 と自然数値を「回数」に，y 軸の 0 と自然数値を「赤の個数-白の個数」にする．赤がでれば ↗ ，白がでれば ↘ と動く．

「赤の個数-白の個数」が-1 になることなく点 $(i,\ j)$ になる場合の数，つまり，$y=-1$ 上に来ることなく原点から点 $(i,\ j)$ に至る経路の総数を $N(i,\ j)$ とする．

$$N(i-1,\ j-1)+N(i-1,\ j+1)=N(i,\ j)$$

なので順次各点に至る経路の総数を書きこんでいく．

(1) $N(3,\ -1)=1$ ．これは赤白白と取り出した場合である．この取り出し方の総数は $6\cdot4\cdot3$ ．玉 3 個の取り出し方の総数は ${}_{10}\mathrm{P}_3=10\cdot9\cdot8$ ．その確率は

$$\frac{6\cdot4\cdot3}{10\cdot9\cdot8}=\frac{1}{10}$$

(2) 同様に $N(5,\ -1)=2$ ．いずれも赤 2 回，白 3 回取り出されるので，求める確率は

$$2\times\frac{6\cdot5\cdot4\cdot3\cdot2}{10\cdot9\cdot8\cdot7\cdot6}=\frac{1}{21}$$

(3) 同様に $N(10,\ 2)=90$ で，いずれの経路でも玉はすべて取り出されるので，求める確率は

$$90\times\frac{6!\cdot4!}{10!}=\frac{3}{7}$$

注意 1　$N(i,\ j)$ は一種のカタラン数である．この観点で $N(10,\ 2)=90$ を求める．

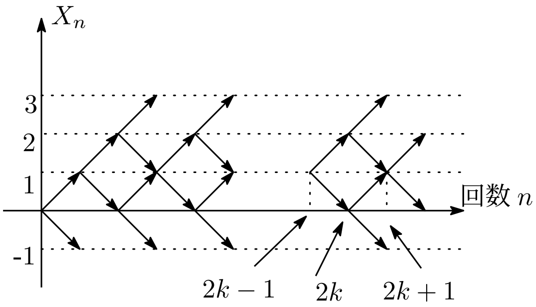
原点から点 $(10,\ 2)$ に至る経路の総数は ${}_{10}\mathrm{C}_6$ 通りある．このうち $y=-1$ 上を通る経路の数を求める．C$(10,\ 2)$ とし，$y=-1$ で折り返した点を C$'$ とする．$y=-1$ 上を通る経路は，この折り返しで原点から C$'$ に至る経路の総数と一致する．つまり ${}_{10}\mathrm{C}_7$.

$$\therefore\quad N(10,\ 2)={}_{10}\mathrm{C}_6-{}_{10}\mathrm{C}_7=90$$

注意 2　この問題では，二つの動き ↘ , ↗ の確率が，変化する．一つ一つの経路の確率も書きこんでそれを乗じてもよい．　□

解答 5.22　問題 2.22

硬貨を投げる試行は各回独立で，1 回の試行で表の出る確率と裏のでる確率は等しく $\dfrac{1}{2}$ とする．x 軸の 0 と自然数値を「回数」に，y 軸を「数直線」にして，各回の試行の後，駒がある点 X_n の座標をとる．それぞれ原点を 0 にする．このような図では表がでれば $\searrow$，裏がでれば $\nearrow$ と動き，その確率はいずれも $\dfrac{1}{2}$ である．



(1) 駒がある点 X_n は $X_0=0$ から始めて，n が 1 増えるごとに ± 1 変化する．つまり 1 回の変化量は奇数である．したがって n が奇数なら X_n も奇数, n が偶数なら X_n も偶数である．ゆえに駒が点 1 にあるのは奇数回の試行の後にかぎる．

奇数 k に対して, k 回目に硬貨を投げたあと，駒が点 1 に来るのは，最初表が出て点 1 に来て，その後，2 回ずつの試行で 1 から 1 に動くことを $\dfrac{k-1}{2}$ 回くり返すときのみである．

また n 回の試行の後に $X_n=a$ $(a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3)$ となる確率を $P(X_n=a)$ と書くことにする．

さて駒が点 1 にあるとき，その後 2 回の試行で再び駒が 1 に来る確率は

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

である．したがってその確率は $\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k-1}{2}}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}}$

$$\therefore\quad P(X_k=1)=\begin{cases} 0 & (k\ \text{偶数}) \\ \left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{k+1}{2}} & (k\ \text{奇数}) \end{cases}$$

(2)

$$E[X_k]=3\cdot P(X_k=3)+2\cdot P(X_k=2)+1\cdot P(X_k=1)+(-1)\cdot P(X_k=-1)$$

ここで

$$\begin{aligned} P(X_k=3) &= \frac{1}{2}P(X_{k-1}=2)+P(X_{k-1}=3) \\ P(X_k=2) &= \frac{1}{2}P(X_{k-1}=1) \\ P(X_k=1) &= \frac{1}{2}P(X_{k-1}=2)+\frac{1}{2}P(X_{k-1}=0) \\ P(X_k=0) &= \frac{1}{2}P(X_{k-1}=1) \\ P(X_k=-1) &= \frac{1}{2}P(X_{k-1}=0)+P(X_{k-1}=-1) \end{aligned}$$

が成り立つ．

$$\therefore\quad E[X_k] = 3\cdot P(X_k=3)+2\cdot P(X_k=2)+1\cdot P(X_k=1)+(-1)\cdot P(X_k=-1)$$

$$
\begin{aligned}
&= 3\cdot\left(\frac{1}{2}P(X_{k-1}=2)+P(X_{k-1}=3)\right)+2\cdot\left(\frac{1}{2}P(X_{k-1}=1)\right)\\
&\quad +1\cdot\left(\frac{1}{2}P(X_{k-1}=2)+\frac{1}{2}P(X_{k-1}=0)\right)\\
&\quad +(-1)\cdot\left(\frac{1}{2}P(X_{k-1}=0)+P(X_{k-1}=-1)\right)\\
&= 3\cdot P(X_{k-1}=3)+2\cdot P(X_{k-1}=2)+1\cdot P(X_{k-1}=1)+(-1)\cdot P(X_{k-1}=-1)\\
&= E[X_{k-1}]
\end{aligned}
$$

$$\therefore\quad E[X_k]=E[X_1]=1\cdot\frac{1}{2}+(-1)\frac{1}{2}=0$$

別解 1　(1) は (2) で作った関係式から求めてもよい．

$$
\begin{aligned}
P(X_{k+2}=1) &= \frac{1}{2}P(X_{k+1}=2)+\frac{1}{2}P(X_{k+1}=0)\\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P(X_k=1)\right)+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}P(X_k=1)\right)\\
&= \frac{1}{2}P(X_k=1)
\end{aligned}
$$

ここで

$$P(X_1=1)=\frac{1}{2}\quad,\quad P(X_2=1)=0$$

より，同じ結果を得る．

注意　(2) は図をもとに各 $a=-1,\ 0,\ 1,\ 2,\ 3$ に対する $X_k=a$ と $X_{k-1}=a$ の相互の関係式を作り，それをもとに期待値 $E[X_k]$ と $E[X_{k-1}]$ の漸化式を作ろうとした．やってみれば結果として $E[X_k]=E[X_{k-1}]$ になった．

なお，記号 $P(X_{k+1}=2)$ は数 B での記号であるが，定義して用いれば数 I で用いてよい．また，この解答はあくまで数 I の範囲で解いている．

数 B でならう期待値の加法性 $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$ を用いれば次のように解くこともできる．

別解 2　n 回目の試行で移動する量を r_n とおく．これは確率変数である．そして

$$X_n=0+r_1+r_2+\cdots+r_n$$

n 回目の試行を行う直前に駒がすでに -1 か 3 にある確率を p_{n-1} とおく．駒が n 回目の試行を行う直前に -1 か 3 にあれば $r_n=0$ である．

そこで

$$
\begin{aligned}
E[X_k] &= E[r_1+r_2+\cdots+r_k]\\
&= E[r_1]+E[r_2]+\cdots+E[r_k]
\end{aligned}
$$

ここで，

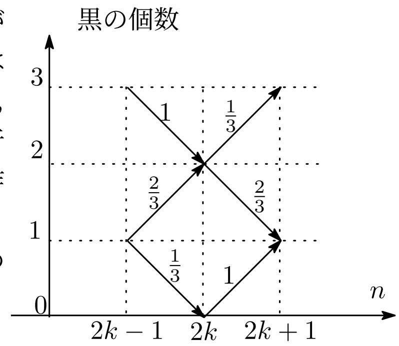
$$
\begin{aligned}
E[r_k] &= p_{k-1}\cdot 0+(1-p_{k-1})\left(1\times\frac{1}{2}+(-1)\times\frac{1}{2}\right)\\
&= 0
\end{aligned}
$$

$$\therefore \quad E[X_k] = 0$$

□

解答 5.23 問題 2.23

(1) 「白白白」から始めて，3 回の操作の詰果，色の並び方が「黒白白」となる場合,「白黒白」となる場合，または「白白黒」となる場合は同様に確からしい．したがって問題 (2) の記号を用いれば，求める確率は $\dfrac{1}{3}p_3$ である．よって，(2) から先に解く．



(2) 「白白白」から始めて，n 回の操作の緒果，黒の個数が 1 である確率が p_n である．1 回の試行で黒の個数の増減は 1 で奇数である．最初は黒の個数は 0 で偶数であったから，黒の個数は，偶数回の試行の後は偶数個で 0 個か 2 個，奇数回の試行の後は奇数個で 1 個か 3 個である．n 回の操作の緒果，黒の個数が 3 である確率を q_n とする．
$n = 2k-1$ と $n = 2k+1$ のときの p_n，q_n の漸化式を求める．図のように，個数の変化とその確率が定まる．
これから

$$\begin{aligned}
p_{2k+1} &= \left(\frac{4}{9} + \frac{1}{3}\right) p_{2k-1} + \frac{2}{3} q_{2k-1} \\
q_{2k+1} &= \frac{2}{9} p_{2k-1} + \frac{1}{3} q_{2k-1}
\end{aligned}$$

である．奇数回の試行の後は黒の個数は 1 か 3 であるから

$$p_{2k+1} + q_{2k+1} = 1$$

したがって第 1 式から

$$p_{2k+1} = \frac{7}{9} p_{2k-1} + \frac{2}{3}(1 - p_{2k-1}) = \frac{1}{9} p_{2k-1} + \frac{2}{3}$$

これから

$$p_{2k+1} - \frac{3}{4} = \frac{1}{9}\left(p_{2k-1} - \frac{3}{4}\right)$$

$p_1 = p_{2\cdot 0+1} = 1$ であるから

$$p_{2k+1} - \frac{3}{4} = \left(\frac{1}{9}\right)^k \left(p_1 - \frac{3}{4}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{9}\right)^k$$

つまり

$$p_{2k+1} = \frac{3}{4}\left(1 + \frac{1}{3^{2k+1}}\right)$$

これから (1) の解は

$$\frac{1}{3} P_3 = \frac{7}{27}$$

□

解答 5.24　問題 2.24

(1) 2 種類の数字の一つが 0 である場合．2 種の数字の選び方は 9 通り，

0 でない数字を△とする．千の桁は△のみ．他の三桁は 0 でも△でもよい．すべて△の場合のみ除く．

$$\therefore \quad 9(2^3 - 1) = 63$$

2 種とも 0 でない場合．数字の選び方は ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ (通り)．2 数を 4 つの桁に並べ，すべてがいずれかの場合を除く．

$$\therefore \quad 36(2^4 - 2) = 504$$

$$\therefore \quad 9 \times 7 + 36 \times 14 = 567 \text{ (個)}$$

(2) 同様に考える．文字の選び方は (1) と同じである，並べ方は

1 つが 0 である場合．

$$9(2^{n-1} - 1)$$

0 がない場合．

$$36(2^n - 2)$$

$$\therefore \quad 9 \times (2^{n-1} - 1) + 36 \times (2^n - 2) = 81(2^{n-1} - 1) \text{ (個)}$$

□

解答 5.25　問題 2.25

(1) 3 本のロープを A, B, C，その端を A_1，A_2，B_1，B_2，C_1，C_2 とする．

1 本の輪になる事象が起こるのは次の場合である．

6 本の端の一つを確率 1 で任意に選ぶ．それを例えば A_1 とする．残る 5 本の端のうち，確率 $\dfrac{4}{5}$ で B か C の端を選ぶ． B_1 とする．さらに残る 4 本の端の一つを確率 1 で任意に選ぶ．それが A か B の端なら C の 2 本の端を， C の端なら A か B の残る端を選ぶ．これはいずれも確率 $\dfrac{2}{3}$ である．最後に残った 2 本の端を結ぶ．このとき一つの輪ができる．

$$\therefore \quad P(3) = \frac{4}{5} \times \frac{2}{3} = \frac{8}{15}$$

(2) 4 本のロープの端を一つ任意に選ぶ．そのロープ以外のロープの端を選び結ぶ．するとこの段階で 3 本のロープになっている．

$$\therefore \quad P(4) = \frac{6}{7} \times P(3) = \frac{16}{35}$$

(3) 同様に考えると $n \geqq 2$ のとき $P(n) = \dfrac{2n-2}{2n-1} \times P(n-1)$．つまり

$$\frac{P(n)}{P(n-1)} = \frac{2n-2}{2n-1}$$

$$
\begin{aligned}
\therefore \quad & \frac{P(n)}{P(n-1)} \cdot \frac{P(n-1)}{P(n-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{P(2)}{P(1)} \\
= \quad & \frac{2n-2}{2n-1} \cdot \frac{2n-4}{2n-3} \cdot \cdots \cdot \frac{2}{3} \\
= \quad & \frac{\{2(n-1)2(n-2)\cdots 2\}^2}{(2n-1)!} = \frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!}
\end{aligned}
$$

$$\frac{P(n)}{P(n-1)} \cdot \frac{P(n-1)}{P(n-2)} \cdot \cdots \cdot \frac{P(2)}{P(1)} = \frac{P(n)}{P(1)}$$

なので

$$P(n) = \frac{4^{n-1}\{(n-1)!\}^2}{(2n-1)!}$$

これは $n=1$ のときも成立する．

□

解答 5.26　問題 2.26

(1) 明らかに $C(1)=0$, $C(2)=1$ である．$n=3$ のときは 231 と 312 の 2 通り．よって $C(3)=2$ である．$n=4$ のとき．

(i) 21 ○○のように，1 がどれかと入れ替わっているとき．他のカードの並べ方は $C(2)=1$ 通り．1 との入れ替え方は 3 通り．よってこの型は 3 通り．

(ii) 1 がどれかと入れ替わってはいないとき．1 が k 番に入ったとする．2 は 2 番以外，3 は 3 番以外，k は 1 番以外と，それぞれ 1 箇所入ってはいけない場所が指定されるので，$C(3)=2$ 通り．1 の入り方は 3 通りなので，この型は 6 通り．

よって $C(4)=9$ である．

(2) (1) と同様に，

$$
\begin{aligned}
C(5) &= 4C(3)+4C(4) = 4\times(2+9) = 44 \\
C(6) &= 5C(4)+5C(5) = 5\times(9+44) = 265
\end{aligned}
$$

(3) 同様 $n+2$ 枚のカードについて考える．(1) と同様に考える．

(i) 21 ○○のように，1 がどれかと入れ替わっているとき．他の決め方は $C(n)$ 通り．入れ替え方は $n+1$ 通り．よってこの型は $(n+1)C(n)$ 通り．

(ii) 1 がどれかと入れ替わってはいないとき．1 が k 番に入ったとする．2 は 2 番以外，3 は 3 番以外，k は 1 番以外と，それぞれ 1 箇所入ってはいけない場所が指定されるので，$C(n+1)$ 通り．1 の入り方は $n+1$ 通りなので，この型は $(n+1)C(n+1)$ 通り．

$$\therefore \quad C(n+2) = (n+1)\{C(n)+C(n+1)\}$$

参考

題意の事象の起こる確率を p_n とすると，

$$p_n = \frac{C(n)}{n!}$$

となる．そこで，(3) の結果から

$$\frac{C(n+2)}{(n+2)!} = \frac{(n+1)\{C(n)+C(n+1)\}}{(n+2)!} = \frac{1}{n+2}\cdot\frac{C(n)}{n!} + \frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{C(n+1)}{(n+1)!}$$

$$\therefore\quad p_{n+2} - p_{n+1} = \frac{1}{n+2}\left(p_n - p_{n+1}\right) = -\frac{1}{n+2}\left(p_{n+1} - p_n\right)$$

$$\therefore\quad p_{n+1} - p_n = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{(n+1)!}(p_2 - p_1) = \frac{(-1)^{n-1}\cdot 2}{(n+1)!}\cdot\frac{1}{2} = \frac{(-1)^{n-1}}{(n+1)!}$$

となる．これから

$$p_n = \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \cdots + \frac{(-1)^n}{n!}$$

となる．また，次式も成立する．

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \frac{1}{e}$$

※　これは古典的な確率論で有名な「めぐり合いの問題」である．いうまでもなく，少なくとも 1 枚 k 番目に番号 k のカードがある**めぐりあいの確率**は余事象 $1 - p_n$． □

解答 5.27　問題 2.27

(1)

$$\begin{aligned}
&\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)(a+b+c)\\
=\;& 3+\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)\\
&(\text{相加平均} \geqq \text{相乗平均}\quad\text{より})\\
\geqq\;& 3+2\sqrt{\frac{b}{a}\cdot\frac{a}{b}}+2\sqrt{\frac{c}{b}\cdot\frac{b}{c}}+2\sqrt{\frac{a}{c}\cdot\frac{c}{a}} = 9
\end{aligned}$$

等号成立は $a=b=c$ のとき．

$$\therefore\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} \geqq \frac{9}{a+b+c}\quad(\text{等号成立は } a=b=c \text{ のとき})$$

(2) 同様に

$$\begin{aligned}
&\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\sum_{k=1}^{n}x_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}x_k + \sum_{i\neq j}^{n}\frac{1}{x_i}x_j\\
=\;& n+\sum_{i<j}^{n}\left(\frac{1}{x_i}x_j+\frac{1}{x_j}x_i\right)\\
\geqq\;& n+\sum_{i<j}^{n}2\sqrt{\frac{1}{x_i}x_j\cdot\frac{1}{x_j}x_i}\\
=\;& n+2{}_n\mathrm{C}_2 = n^2
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i} \geqq \frac{n^2}{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i}\quad(\text{等号成立は } x_1=x_2=\cdots x_n \text{のとき})$$

別解

(1) t を任意の実数として

$$f(t)=\left(\sqrt{a}t-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2+\left(\sqrt{b}t-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2+\left(\sqrt{c}t-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2$$

とおく.

$$f(t)=(a+b+c)t^2-6t+(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})$$

この t の二次関数がすべての実数 t で $f(t)\geqq 0$ となるので,

$$D/4=9-(a+b+c)(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c})\leqq 0$$

$D=0$ となるのは $f(t)=0$ となる解があるとき. つまり

$$\left(\sqrt{a}t-\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^2=0,\ \left(\sqrt{b}t-\frac{1}{\sqrt{b}}\right)^2=0,\ \left(\sqrt{c}t-\frac{1}{\sqrt{c}}\right)^2=0$$

となる t が存在するときなので $a=b=c$ のときにかぎる.

$$\therefore\quad \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\geqq\frac{9}{a+b+c}\quad (\text{等号成立は } a=b=c \text{ のとき})$$

(2) 同様に

$$f(t)=\sum_{k=1}^{n}\left(\sqrt{x_k}t-\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2$$

とおく.

$$f(t)=\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)t^2-2nt+\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)$$

この t の二次関数がすべての実数 t で $f(t)\geqq 0$ となるので,

$$D/4=n^2-\left(\sum_{k=1}^{n}x_k\right)\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{x_k}\right)\leqq 0$$

$D=0$ となるのは $f(t)=0$ となる解があるとき. つまり

$$\left(\sqrt{x_k}t-\frac{1}{\sqrt{x_k}}\right)^2=0,\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

となる t が存在するとき. つまり

$$t=\frac{1}{x_k},\ k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$$

となる t があるときなので $x_1=x_2=\cdots=x_n$ のとき.

$$\therefore\quad \sum_{i=1}^{n}\frac{1}{x_i}\geqq\frac{n^2}{\sum_{i=1}^{n}x_i}\quad (\text{等号成立は } x_1=x_2=\cdots x_n \text{のとき})$$

注意　別解はコーシー・シュワルツの不等式の証明法そのものである．
$n=3$ の場合に，一般化できるような方法をさがしておくことが大切である．　□

解答 5.28　問題 2.28

(1) j 回目に出たカードの番号を x_j とする．

$k=1$ ということは $x_1=1$ のみ．その確率は N 枚中 1 のカードを引く確率．

$$\therefore \quad P_N(1)=\frac{1}{N}$$

$k=2$ ということは，$x_1=2$ または，$(x_1,\ x_2)=(1,\ 1)$．

$$\begin{aligned}\therefore \quad P_N(2) &= \frac{1}{N}+\frac{1}{N^2}\\ &= \frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)\end{aligned}$$

$k=3$ ということは，$x_1=3$，$(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$，$(1,\ 2)$ または $(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 1)$．

$$\begin{aligned}\therefore \quad P_N(3) &= \frac{1}{N}+\frac{2}{N^2}+\frac{1}{N^3}\\ &= \frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^2\end{aligned}$$

(2) $N=3$，　$k=4$ のとき

$X_2=4$ となるのは　$(x_1,\ x_2)=(3,\ 1),\ (2,\ 2),\ (1,\ 3)$ の 3 通り
$X_3=4$ となるのは　$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 2)$ などの 3 通り
$X_4=4$ となるのは　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の 1 通り

$$\therefore \quad P_3(4)=\frac{3}{3^2}+\frac{3}{3^3}+\frac{1}{3^4}=\frac{37}{81}$$

$N=3$，　$k=5$ のとき

$X_2=5$ となるのは　$(x_1,\ x_2)=(3,\ 2),\ (2,\ 3)$ の 2 通り
$X_3=5$ となるのは　$(x_1,\ x_2,\ x_3)=(1,\ 1,\ 3),\ (1,\ 2,\ 2)$ などの 6 通り
$X_4=5$ となるのは　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4)=(1,\ 1,\ 1,\ 5)$ の 4 通り
$X_5=5$ となるのは　$(x_1,\ x_2,\ x_3,\ x_4,\ x_5)=(1,\ 1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の 1 通り

$$\therefore \quad P_3(5)=\frac{2}{3^2}+\frac{6}{3^3}+\frac{4}{3^4}+\frac{1}{3^5}=\frac{121}{243}$$

(3) $X_j=k$ となる確率を求める．

$$x_1+x_2+\cdots+x_j=k$$

となる解 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_j$ $(1\leqq x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_j\leqq N)$ において $k\leqq N$ なので条件 $1\leqq x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_j\leqq N$ は必然的にみたされる．ゆえに k 個のものを j 人に (最低 1 個はもらって) 分ける分け方の総数に等しい．

$$\bigcirc^{\vee}\bigcirc^{\vee}\cdots^{\vee}\bigcirc^{\vee}\bigcirc^{\vee}\bigcirc$$

と，k 個の○を並べ，$k-1$ カ所のその間 $^{\vee}$ から $j-1$ カ所を選び，仕切を入れることで一つの分け方が定まる．ゆえにその場合の数は

$$ {}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}\ (\text{通り}) $$

である．ゆえに求める確率は

$$ \frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j} $$

である．

$$ \begin{aligned} \therefore\quad P_N(k) &= \sum_{j=1}^{k} \frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{j-1}}{N^j} \\ &= \frac{1}{N}\sum_{i=0}^{k-1} \frac{{}_{k-1}\mathrm{C}_{i}}{N^i} \\ &= \frac{1}{N}\left(1+\frac{1}{N}\right)^{k-1} \end{aligned} $$

□

解答 5.29　問題 2.29

(1) $a,\ b$ の決め方は 1 から $n-1$ のうち 2 つを選ぶ場合の数なので ${}_{n-1}\mathrm{C}_2$ 通りある．つまり，すべての試行の結果は ${}_{n-1}\mathrm{C}_2$ 通りある．

線分 OA，AB，BC の長さをそれぞれ $x,\ y,\ z$ とおく．条件を満たす $a,\ b$ の組と，

$$ x+y+z=n,\ 1 \leqq x,\ y,\ z $$

となる整数の組 $(x,\ y,\ z)$ が対応している．

$X=k$ である確率を p_k，$X \geqq k$ である確率を q_k とおく．

$$ p_k = q_k - q_{k+1} $$

である．

$X \geqq k$ となる事象の総数は

$$ x+y+z=n,\ \text{かつ}\ x \geqq k,\ y \geqq k,\ z \geqq k \quad \cdots ① $$

となる正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ の解の組の個数である．$n<3k$ のとき $q_k=0$ である．

$$ ① \iff (x-k)+(y-k)+(z-k)=n-3k,\ x-k \geqq 0,\ y-k \geqq 0,\ z-k \geqq 0 $$

である．$n \geqq 3k$ のときこのような組の個数は,

$$ {}_{n-3k+2}\mathrm{C}_2 $$

である．したがって $n \geqq 3k$ のとき

$$ q_k = \frac{{}_{n-3k+2}\mathrm{C}_2}{{}_{n-1}\mathrm{C}_2} = \frac{(n-3k+2)(n-3k+1)}{(n-1)(n-2)} $$

である．以上から，$X=2$ である確率は,

(i) $n \leqq 5$ なら 0.

(ii) $n = 6,\ 7,\ 8$ なら $q_3 = 0$ なので

$$p_2 = q_2 = \frac{(n-4)(n-5)}{(n-1)(n-2)}$$

(iii) $n \geqq 9$ のとき

$$p_2 = q_2 - q_3 = \frac{{}_{n-4}\mathrm{C}_2}{{}_{n-1}\mathrm{C}_2} - \frac{{}_{n-7}\mathrm{C}_2}{{}_{n-1}\mathrm{C}_2} = \frac{6(n-6)}{(n-1)(n-2)}$$

(2) (1) と同様に考える．$n = 3m$ とおく．

$k = m$ のときは $q_{m+1} = 0$，$X \geqq m$ となるのは $x = y = z = m$ の 1 通りなので

$$q_m = \frac{1}{{}_{n-1}\mathrm{C}_2} = \frac{2}{(n-1)(n-2)} = p_m$$

である．

$k < m$ のとき．q_k，$q_{k+1} \neq 0$ で

$$\begin{aligned} p_k &= q_k - q_{k+1} = \frac{(n-3k+2)(n-3k+1)-(n-3k-1)(n-3k-2)}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{6(n-3k)}{(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad E &= \sum_{k=1}^{m-1} kp_k + mp_m = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{6k(3m-3k)}{(n-1)(n-2)} + \frac{2m}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{18}{(n-1)(n-2)} \sum_{k=1}^{m-1} k(m-k) + \frac{2m}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{18}{(n-1)(n-2)} \left\{ \frac{m^2(m-1)}{2} - \frac{m(m-1)(2m-1)}{6} \right\} + \frac{2m}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{3m(m+1)(m-1)+2m}{(n-1)(n-2)} = \frac{m(3m^2-1)}{(n-1)(n-2)} \\ &= \frac{n(n^2-3)}{9(n-1)(n-2)} \end{aligned}$$

□

解答 5.30　問題 2.30

(1)　(i) $n = 1$ のとき

$$a_1 + (2+1)(2+2)a_2 = \frac{2(-1)^1}{2!}$$
$$1 + 12a_2 = -1$$
$$\therefore\quad a_2 = -\frac{1}{6} = -\frac{1}{3!}$$

(ii) $n=2$ のとき

$$a_2+(4+1)(4+2)a_3=\frac{2(-1)^2}{4!}$$
$$-\frac{1}{6}+30a_3=\frac{1}{12}$$
$$\therefore\quad a_3=\frac{1}{120}=\frac{1}{5!}$$

(iii) $n=3$ のとき

$$a_3+(6+1)(6+2)a_4=\frac{2(-1)^3}{6!}$$
$$-\frac{1}{6}+30a_3=\frac{1}{12}$$
$$\therefore\quad a_4=\frac{-8}{7\cdot 8\cdot 6!}=-\frac{1}{7!}$$

(2) $a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ と推測される．これを数学的帰納法で示す．

(i) $n=1$ のとき，$a_1=1$ より成立．

(ii) $n=k$ のとき，$a_k=\dfrac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}$ で成立するとする．このとき，条件式を $n=k$ で用いると

$$a_k+(2k+1)(2k+2)a_{k+1}=\frac{2(-1)^k}{(2k)!}$$

$$\begin{aligned}(2k+1)(2k+2)a_{k+1} &= \frac{2(-1)^k}{(2k)!}-\frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\\ &= \frac{(-1)^{k-1}}{(2k-1)!}\left(\frac{-2}{2k}-1\right)=\frac{(-1)^k(2k+2)}{(2k)!}\end{aligned}$$

$$\therefore\quad a_{k+1}=\frac{(-1)^k}{(2k+1)!}$$

つまり $n=k+1$ でも成立する．

(iiii) 以上から，$a_n=\dfrac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)!}$ が成立する．

□

解答 5.31　問題 2.31

(1) $n\neq 1$ のとき

$$1+n+n^2+\cdots+n^m=\frac{n^{m+1}-1}{n-1}$$

である．この和を $l(m,\ n)$ と書く．

$$l(2,\ 2)=\frac{2^3-1}{2-1}=7$$

$$\therefore\quad S(2,\ 2)=\{7\}$$

(2) 同様に

$$l(5,\ 2)=\frac{2^6-1}{2-1}=(2^3-1)(2^3+1)=7\cdot 3^2$$

$$\therefore\quad S(5,\ 2)=\{3,\ 7\}$$

(3) 同様に

$$l(3,\ 2)=\frac{2^4-1}{2-1}=15=3\cdot 5$$

$$\therefore\quad S(3,\ 2)=\{3,\ 5\}$$

(4) $l(2,\ n)=\dfrac{n^3-1}{n-1}$ であり，

$$l(5,\ n)=\frac{n^6-1}{n-1}=\frac{n^3-1}{n-1}\cdot(n^3+1)=l(2,\ n)(n^3+1)$$

なので，$l(2,\ n)$ は $l(5,\ n)$ の約数になる．ゆえに $S(2,\ n)\subseteq S(5,\ n)$ がすべての自然数 n について成り立つ．

(5)

$$\begin{aligned}l(3,\ n)&=1+n+n^2+n^3=(1+n)(1+n^2)\\ l(2,\ n)&=1+n+n^2=n(n+1)+1\end{aligned}$$

なので，$l(2,\ n)$ を $1+n,\ 1+n^2$ で割るとそれぞれ $1,\ n$ 余る．したがって $l(2,\ n)$ は $1+n,\ 1+n^2$ のいずれとも互いに素である．ゆえに $l(2,\ n)$ は $l(3,\ n)$ と互いに素．

$$\therefore\quad S(2,\ n)\cap S(3,\ n)=\emptyset$$

(6) $l(2,\ n)=1+n+n^2$ であった．

以下 k は整数とする．

$m=3k$ と表されるとき．

$$\begin{aligned}l(m,\ n)&=1+n+n^2+\cdots+n^{3k-2}+n^{3k-1}+n^{3k}\\ &=1+(1+n+n^2)n+\cdots+(1+n+n^2)n^{3k-2}\end{aligned}$$

ゆえに $l(2,\ n)$ と $l(m,\ n)$ は互いに素．

$$\therefore\quad S(2,\ n)\cap S(m,\ n)=\emptyset$$

$m=3k-1$ と表されるとき．

$$\begin{aligned}l(m,\ n)&=1+n+n^2+\cdots+n^{3k-2}+n^{3k-1}+n^{3k-1}\\ &=(1+n+n^2)+\cdots+(1+n+n^2)n^{3k-3}\end{aligned}$$

ゆえに $l(2,\ n)$ は $l(m,\ n)$ の約数．

$$\therefore\quad S(2,\ n)\subseteq S(m,\ n)$$

$m=3k-2$ と表されるとき.

$$\begin{aligned} l(m,\ n) &= 1+n+n^2+\cdots+n^{3k-2}+n^{3k-1}+n^{3k} \\ &= 1+n+(1+n+n^2)n^2+\cdots+(1+n+n^2)n^{3k-4} \end{aligned}$$

ただし $k=1$ なら $l(m,\ n)=1+n$

$1+n$ と $l(2,\ n)$ は互いに素なので，$l(2,\ n)$ と $l(m,\ n)$ は互いに素.

$$\therefore \quad S(2,\ n)\cap S(m,\ n)=\emptyset$$

ゆえに「どんな $m,\ n$ に対しても $S(2,\ n)\subseteq S(m,\ n)$ または $S(2,\ n)\cap S(m,\ n)=\emptyset$ が成り立つ」という命題は正しい.

□

5.2 3章解答

解答 5.32 問題 3.1

(1) $a\neq 0$ のとき $x=\dfrac{b}{a}$ ，$a=0,\ b=0$ のとき解不定 (すべての数)，$a=0,\ b\neq 0$ のとき解なし.

(2) $a\neq 0,\ -1$ のとき $x=\dfrac{1}{a}$ ，$a=-1$ のとき解不定 (すべての数)，$a=0$ のとき解なし.

(3) 移項して整理すると $2abx=a^2+b^2$ となる．ゆえに
$a\neq 0,\ b\neq 0$ のとき $x=\dfrac{a^2+b^2}{2ab}$ ，$a=0,\ b=0$ のとき解不定 (すべての数)，$a=0,\ b\neq 0$ または $a\neq 0,\ b=0$ のとき解なし.

(4) 移項して整理すると $(a^2+a-2)x=a^2-4a+3$ ，つまり $(a+2)(a-1)x=(a-1)(a-3)$ となる．ゆえに
$a\neq -2,\ 1$ のとき $x=\dfrac{a-3}{a+2}$ ，$a=1$ のとき解不定 (すべての数)，$a=-2$ のとき解なし.

(5) 移項して整理すると $(a^2-5a+6)x=a-2$ ，つまり $(a-2)(a-3)x=a-2$ となる．ゆえに $a\neq 2,\ 3$ のとき $x=\dfrac{1}{a-3}$ ，$a=2$ のとき解不定 (すべての数)，$a=3$ のとき解なし.

(6) 移項して整理すると $(a^2-2ab+b^2)x=a^3-b^3$ ，つまり $(a-b)^2x=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ となる．ゆえに $a\neq b$ のとき $x=\dfrac{a^2+ab+b^2}{a-b}$ ，$a=b$ のとき解不定 (すべての数).

(7) $a\neq 0$ のとき $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ ，$a=0,\ b\neq 0$ のとき $x=\dfrac{-c}{b}$ ，$a=0,\ b=0,\ c=0$ のとき解不定 (すべての数)，$a=0,\ b=0,\ c\neq 0$ のとき解なし.

□

解答 5.33 問題 3.2
以下 D は判別式を表す.

(1) $f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0,\ 0 \leqq$ 軸 $\leqq 1,\ D \geqq 0$ より,

$$b \geqq 0,\ b-2a+1 \geqq 0,\ 0 \leqq a \leqq 1,\ a^2-b \geqq 0$$

(2) $f(0) > 0,\ f(1) > 0,\ 0 <$ 軸 $< 1,\ D \geqq 0$ より,

$$b > 0,\ b-2a+1 > 0,\ 0 < a < 1,\ a^2-b \geqq 0$$

(3) 1 解が $0 < x < 1$ にある，つまり $f(0)f(1) < 0$ か，1 解が 0 で他の解が $0 \leqq x \leqq 1$ にない，または 1 解が 1 で他の解が $0 \leqq x \leqq 1$ になければよい.

$f(0) = 0$ のとき $b = 0$ で他の解は $2a$.

$f(1) = 0$ のとき $1-2a+b = 0$ で他の解は $b = 2a-1$.

ゆえに $f(0)f(1) < 0$, $b = O$ かつ, $2a < 0$ か $1 < 2a$ または $1-2a+b = 0$ かつ, $2a-1 < 0$ か $1 < 2a-1$

$$b(b-2a+1) \leqq 0\ ,\ \begin{cases} b = 0 \\ 2a < 0 \text{ か } 1 < 2a \end{cases} \text{または} \begin{cases} 1-2a+b = 0 \\ 2a-1 < 0 \text{ か } 1 < 2a-1 \end{cases}$$

(4) $f(0)f(1) < 0$ つまり $b(b-2a+1) < 0$

(5) (1) および (3) である.

ただし， $f(0)f(1) \leqq 0 \cdots ①$ または $f(0) \geqq 0,\ f(1) \geqq 0,\ 0 \leqq a \leqq 1,\ D \geqq 0 \cdots ②$ でよい. ① と ② は $f(0) = 0$ と $f(1) = 0$ の場合が二重に入っているが,「または」なのでかまわない．ゆえに

$$\begin{cases} b \leqq 0 \\ b \geqq 2a-1 \end{cases},\begin{cases} b \geqq 0 \\ b \leqq 2a-1 \end{cases} \text{または} \begin{cases} b \geqq 0,\ b \geqq 2a-1 \\ 0 \leqq a \leqq 1,\ a^2-b \geqq 0 \end{cases}$$

(6) (2)，または (4)．ゆえに

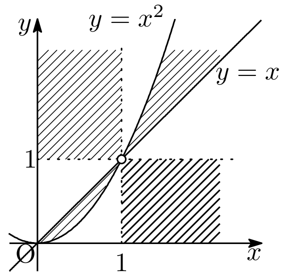
$$\begin{cases} b < 0 \\ b > 2a-1 \end{cases},\begin{cases} b > 0 \\ b < 2a-1 \end{cases} \text{または} \begin{cases} b > 0,\ b > 2a-1 \\ 0 < a < 1,\ a^2-b \geqq 0 \end{cases}$$

□

解答 5.34 問題 3.3

底の条件から $0 < x < 1,\ 1 < x$ および $0 < y < 1,\ 1 < y$. このとき $t = \log_x y$ とおく.

$$
\begin{aligned}
\log_x y + 2\log_y x \leqq 3 \quad &\iff \quad t + \frac{2}{t} \leqq 3 \\
&\iff \quad \frac{t^2 - 3t + 2}{t} \leqq 0 \\
&\iff \quad t(t-2)(t-1) \leqq 0,\ t \neq 0 \\
&\iff \quad t < 0,\ 1 \leqq t \leqq 2 \\
&\iff \quad \log_x y < 0,\ 1 \leqq \log_x y \leqq 2
\end{aligned}
$$



したがって

$$
\begin{cases}
y < 1,\ x \leqq y \leqq x^2 & (1 < x \text{ のとき}) \\
y > 1,\ x \geqq y \geqq x^2 & (0 < x, 1 \text{ のとき})
\end{cases}
$$

ただし，境界で，軸と点線，白丸は含まず，その他の $y = x^2,\ y = x$ の境界は含む．

その領域は次図のようになる． □

解答 5.35 問題 3.4

$$
\begin{aligned}
&\frac{x-b}{x+a} - \frac{x-a}{x+b} - \left(\frac{x+a}{x-b} - \frac{x+b}{x-a}\right) \\
=\ &\frac{a^2 - b^2}{(x+a)(x+b)} - \frac{b^2 - a^2}{(x-a)(x-b)} \\
=\ &\frac{2(a^2 - b^2)(x^2 + ab)}{(x^2 - a^2)(x^2 - b^2)} > 0 \quad \cdots ①
\end{aligned}
$$

このように x^2 の不等式になる．まず x^2 の不等式を解く．大きく $a,\ b$ が同符号か異符号かで場合分けする．

(i) $ab > 0$ のとき． $x^2 + ab > 0$ になる．

$a^2 - b^2 > 0$ なら① から $x^2 < b^2,\ a^2 < x^2$ ，

$a^2 - b^2 < 0$ なら① から $a^2 < x^2 < b^2$ ．

(ii) $ab < 0$ のとき．

このときは $b = -a$ のとき $a^2 = b^2$ になりうる．このとき解なし．

$a^2 - b^2 > 0$ なら $b^2 < -ab < a^2$ なので，① から $b^2 < x^2 < -ab,\ a^2 < x^2$ ，

$a^2 - b^2 < 0$ なら $a^2 < -ab < b^2$ なので，① から $x^2 < a^2,\ -ab < x^2 < b^2$ ．

ゆえに，

(i) $ab > 0$ のとき． $x^2 + ab > 0$ になる．

$a^2 - b^2 > 0$ のとき， $x < -|a|,\ -|b| < x < |b|,\ |a| < x$ ，

$a^2 - b^2 < 0$ のとき， $-|b| < x < -|a|,\ |a| < x < |b|$ ．

(ii) $ab < 0$ のとき．

$a^2 = b^2$ のとき．解なし．

$a^2 - b^2 > 0$ のとき，$x < -|a|,\ -\sqrt{-ab} < x < -|b|,\ |b| < x < \sqrt{-ab},\ |a| < x$ ，

$a^2 - b^2 < 0$ のとき，$-|b| < x < -\sqrt{-ab},\ -|a| < x < |a|,\ \sqrt{-ab} < x < |b|$ ．

$\square$

解答 5.36　問題 3.5

$$f(x) = x - 2 + 3|x-1| = \begin{cases} -2x+1 & (0 \leqq x \leqq 1) \\ 4x-5 & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

であるから，定積分の区域に 1 が入るかはいらないかで，積分計算が変わる．

$$g(x) = \begin{cases} \left|\int_0^x (-2t+1)\,dt\right| + \left|\int_x^1 (-2t+1)\,dt + \int_1^2 (4t-5)\,dt\right| & (0 \leqq x \leqq 1) \\ \left|\int_0^1 (-2t+1)\,dt + \int_1^x (4t-5)\,dt\right| + \left|\int_x^2 (4t-5)\,dt\right| & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

それぞれ絶対値内の定積分を計算すると，

$$g(x) = \begin{cases} |-x^2+x| + |x^2-x+1| & (0 \leqq x \leqq 1) \\ |2x^2-5x+3| + |-2x^2+5x-2| & (1 \leqq x \leqq 2) \end{cases}$$

ここで $0 \leqq x \leqq 1$ のとき $-x^2+x \geqq 0,\ x^2-x+1 \geqq 0$ であるから

$$|-x^2+x| + |x^2-x+1| = 1$$

$1 \leqq x \leqq 2$ のとき $-2x^2+5x-2 \geqq 0$ であるが，$2x^2-5x+3 = (2x-3)(x-1)$ なので

$$\begin{aligned} &|2x^2-5x+3| + |-2x^2+5x-2| \\ &= \begin{cases} -(2x^2-5x+3) + -2x^2+5x-2 = -4x^2+10x-5 & \left(1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\right) \\ (2x^2-5x+3) + -2x^2+5x-2 = 1 & \left(\dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 2\right) \end{cases} \end{aligned}$$

となる．あわせて

$$g(x) = \begin{cases} -4\left(x - \dfrac{5}{4}\right)^2 + \dfrac{5}{4} & \left(1 \leqq x \leqq \dfrac{3}{2}\right) \\ 1 & \left(0 \leqq x \leqq 1,\ \dfrac{3}{2} \leqq x \leqq 2\right) \end{cases}$$

したがって $g(x)$ は $x = \dfrac{5}{4}$ で最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる．　$\square$

解答 5.37　問題 3.6

(1) 辞書式の順に書き出す.

$$M(3) = \{121, 123, 131, 132, 212, 213, 231, 232, 312, 313, 321, 323\}$$

(2) 1 の位は 3 通り，k の位は $k-1$ の位とは異なる数なので 2 通り.

$$\therefore\quad 3 \cdot 2^{n-1}(\text{個})$$

(3) $a(n,\ 0) = 2 \quad (\{2323\cdots,\ 3232\cdots\})$

$a(n,\ 1)$ について．

$a(1,\ 1) = 1 \quad (\{1\})$

$a(2,\ 1) = 4 \quad (\{12, 13, 21, 31\})$

$n \geqq 3$ のとき．○で 2, 3 を置く場所を表す．1 と 1 で挟まれたところはつねに $2323\cdots$ か $3232\cdots$ の 2 通り．1 の位置で分類する．

$$\begin{array}{rcl} 1\bigcirc\cdots\bigcirc\text{型} & : & 2\text{ 通り} \\ \bigcirc\cdots\bigcirc 1\text{ 型} & : & 2\text{ 通り} \\ \bigcirc\cdots\bigcirc 1 \bigcirc\cdots\bigcirc\text{型} & : & 2^2(n-2)\text{ 通り} \end{array}$$

$$\therefore\quad a(n,\ 1) = \begin{cases} 1 & (n=1) \\ 4n-4 & (n \geqq 2) \end{cases}$$

$a(n,\ 2)$ について．同様に 1 の位置で分類する．

$$\begin{array}{lll} 1\bigcirc\cdots\bigcirc 1\text{ 型} & : 2\text{ 通り} & (n \geqq 3) \\ 1\bigcirc\cdots\bigcirc 1\bigcirc\cdots\bigcirc\text{型} & : 2^2(n-3)\text{ 通り} & (n \geqq 4) \\ \bigcirc\cdots\bigcirc 1\bigcirc\cdots\bigcirc 1\text{ 型} & : 2^2(n-3)\text{ 通り} & (n \geqq 4) \\ \bigcirc\cdots\bigcirc 1\bigcirc\cdots\bigcirc 1\bigcirc\cdots\bigcirc\text{型} & : 2^3{}_{n-3}\mathrm{C}_2\text{通り} & (n \geqq 5) \end{array}$$

$$\therefore\quad n \geqq 5 \text{ のとき}\quad a(n,\ 2) = 2 + 8(n-3) + 8_{n-3}\mathrm{C}_2 = 4n^2 - 20n + 26$$

$n = 3,\ 4$ でも適する．また明らかに

$$a(1,\ 2) = 0,\ a(2,\ 2) = 0$$

$$\therefore\quad a(n,\ 2) = \begin{cases} 0 & (n = 1,\ 2) \\ 4n^2 - 20n + 26 & (n \geqq 3) \end{cases}$$

(4) 同様に 1 の位置で分類する．

$$\begin{array}{rcl} \text{両端が 1 で間に } k-2 \text{ 個の 1 がある型} & : & 2^{k-1}{}_{n-k-1}\mathrm{C}_{k-2}\text{通り} \\ \text{一方の端のみ 1 で中に } k-1 \text{ 個の 1 がある型} & : & 2\cdot 2^{k}{}_{n-k-1}\mathrm{C}_{k-1}\text{通り} \\ \text{両端が 1 でなく間に } k \text{ 個の 1 がある型} & : & 2^{k+1}{}_{n-k-1}\mathrm{C}_{k}\text{通り} \end{array}$$

$$\begin{aligned} \therefore\quad a(n,\ k) &= 2^{k-1}{}_{n-k-1}\mathrm{C}_{k-2} + 2^{k+1}{}_{n-k-1}\mathrm{C}_{k-1} + 2^{k+1}{}_{n-k-1}\mathrm{C}_{k} \\ &= 2^{k-1}{}_{n-k-1}\mathrm{C}_{k-2} + 2^{k+1}{}_{n-k}\mathrm{C}_{k} \\ &= \frac{2^{k-1}(n-k-1)!}{(n-2k+1)!k!}\{4n^2 - 4(3k-1)n + 9k^2 - 5k\} \end{aligned}$$

□

解答 5.38　問題 3.7

(1) 各グループは自然数から成り，かつ要素は等差数列をなしている．したがって公差 d は自然数である．

グループ A に，自然数 N と $N+1$ が含まれているとする．この二数の差は 1 なので，公差は 1 である．ゆえに A には N 以上の全ての自然数が属する．

二つ以上のグループに分かれるので，他の各グループは 1 から $N-1$ までの数でできていなければならない．

これは，各グループが無限に多くの自然数を含むことに反する．

よって各グループは連続 2 整数を含むことはない．

(2) いずれかのグループは 1 を含む．グループ A に 1 が含まれるとする．すると (1) から A は 2 を含まない．2 は B に含まれる．すると 3 は B に含まれず A に含まれる．A は 1 と 3 を含み 2 は含まないので，公差は 2．同様に B は 2 と 4 を含み 3 は含まないので公差は 2．よって A は奇数，B は偶数の集合になる．

このようなグループ分けは 1 通りである．

(3) 1，3 が A に，2 が B にそれぞれ入っているので，4 は A には含まれない．もし B に含まれるとすると，B も公差は 2 となり B がすべての偶数を含むことになるり，三つのグループ分けにはならない．

よって 4 は C に含まれる．

A が 1 と 3 を含むので公差は 2 で奇数の集合になる．よって 5 は A に含まれる．

B と C はそれぞれ偶数からなる．もし 6 が C に含まれると，C の公差が 2 となり，C は 4 以上のすべての偶数を含む．これは B が無限に多くの自然数を含むことに反する．

ゆえに 6 は B に入る．

(4) 1 と 2 は別のグループになる．これを A と B とする．3 が A にはいる場合．(3) で示したように，A は奇数の集合．B と C は偶数の集合でこれら偶数の集合に連続する二つの偶数が入ることはない．よってこの場合は B は k を自然数として $2+4(k-1)=4k-2$，C は $4+4(k-1)=4k$ の形をした偶数よりなる．この場合は 1 通りである．

3 が C に含まれる場合．4 が B に入れば B はすべての偶数．5 が C に入れば C は 3 以上のすべての奇数を含むので A が有限になる．よって 5 は A に入り 7 は C. かくして A と C が $1+4(k-1)=4k-3$ と $3+4(k-1)=4k-1$ の奇数よりなる．

3 が C に含まれ，4 が A に入る場合．A は公差が 3 で $1+3(k-1)=3k-2$ の形の数よりなり，特に 7 を含む．5 が C に入れば C は 3 以上のすべての奇数を含むので A が 7 を含むことに反する．よって 5 は B に入り B は $2+3(k-1)=3k-1$ の形の数よりなる．その結果，6 は C に入り，C は $3+3(k-1)=3k$ 形の数よりなる．

ゆえに自然数全体を三つのグループに分けるときの，その分け方は次の 3 通りである．k は任意の自然数を表す．

$$\left\{\begin{array}{l}\{\ 2k-1\ \}\\ \{\ 4k-2\ \}\\ \{\ 4k\ \}\end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{l}\{\ 4k-3\ \}\\ \{\ 4k-1\ \}\\ \{\ 2k\ \}\end{array}\right.,\quad \left\{\begin{array}{l}\{\ 3k-2\ \}\\ \{\ 3k-1\ \}\\ \{\ 3k\ \}\end{array}\right.$$

□

解答 5.39　問題 3.8

(1) $y=k$ とする．$1 \leqq k \leqq n$ である．このとき，$x,\ z$ は $1 \leqq x \leqq 2k,\ 2k \leqq z \leqq 2n$ の範囲にあればよいので，それぞれ $2k$ 個，$2n-2k+1$ 個ある．求める個数は次のようになる．

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} 2k(2n-2k+1) &= 2(2n+1)\sum_{k=1}^{n} k - 4\sum_{k=1}^{n} k^2 \\ &= (2n+1)n(n+1) - \frac{2n(n+1)(2n+1)}{3} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{3}\end{aligned}$$

(2) 積 xyz が 6 の倍数であるとき，$x,\ y,\ z$ をそれぞれ 6 で割った余りを $x_0,\ y_0,\ z_0$ とすると，

$$(x,\ y,\ z) = (x_0+6i,\ y_0+6j,\ z_0+6k)$$

と表される．これから $x_0y_0z_0$ も 6 の倍数となる．

まず $1 \leqq x,\ y,\ z \leqq 6$ の範囲で，積 xyz が 6 の倍数であるものの個数を求める．

(i) $x=1,\ 5$ のとき．yz が 6 の倍数となればよい．
yz が 2 の倍数でないのは $3^2=9$ 個.
yz が 3 の倍数でないのは $4^2=16$ 個.
yz が 2 の倍数でなく 3 の倍数でもないのは $2^2=4$ 個.
yz が 6 の倍数となるのは

$$6^2-(9+16-4)=25$$

この場合は $25 \times 2 = 50$ 個.

(ii) $x=2,\ 4$ のとき．yz が 3 の倍数となればよい．
yz が 3 の倍数でないのは $4^2=16$ 個.
yz が 3 の倍数となるのは

$$6^2-16=20$$

この場合は $20 \times 2 = 40$ 個.

(iii) $x=3$ のとき．yz が偶数.

$$6^2-3^2=27$$

(iv) $x=6$ のときは 36 個.

$1 \leqq x,\ y,\ z \leqq 6$ の範囲で，積 xyz が 6 の倍数であるのは

$$50+40+27+36=153\ (個)$$

この範囲の一組の $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，

$$(x,\ y,\ z) = (x_0+6i,\ y_0+6j,\ z_0+6k) \quad ,\ 0 \leqq i,\ j,\ k \leqq n-1$$

はすべて題意を満たし，最初に確認したように題意を満たすものはこの形に書ける．

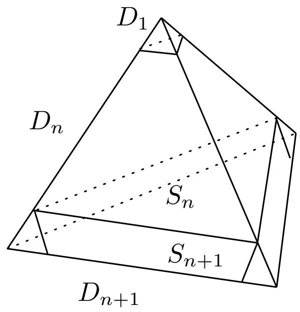
よって，積 xyz が 6 の倍数であるのは $153n^3$ 個である．

□

解答 5.40　問題 3.9

求める個数を a_n とする．

a_n は四面体の大きさには関係ない．そこで 1 辺 n の正四面体を同様の方法で n 等分した立体を D_n，その各部分の個数を a_n とする．D_n の体積は相似比から，D_1 が n^3 個分である．D_n の一つの面を S_n とし，S_n と交わる 3 つの辺を D_n の外に 1 のばし，その 3 点を頂点に含む正四面体を作る．D_n の切断面をのばし，さらに S_n の 3 つの頂点からの切断面を加えてそれぞれの方向に $n+1$ 等分した正四面体 D_{n+1} を作るものとする．

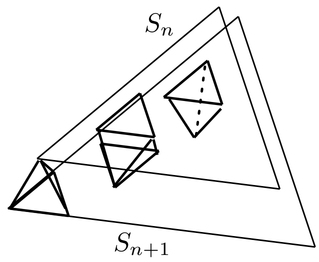


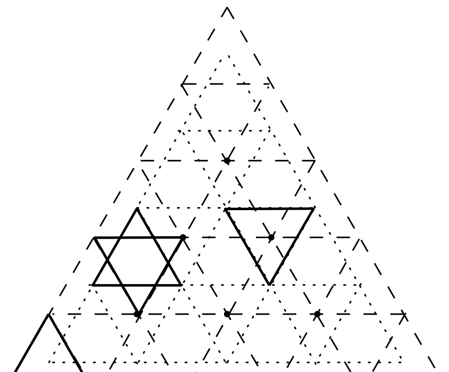
$a_{n+1} - a_n$ は，S_n と S_{n+1} の間に挟まれた場所にあってこの操作で加わった部分の個数である．
図のように 3 種類の立体が確認される．

(i) S_n 上に頂点，S_{n+1} 上に底面のある正四面体．

(ii) S_{n+1} 上に頂点，S_n 上に底面のある正四面体．

(iii) 底面が S_{n+1} と S_n の上にある正八面体．





左図は $n=4$ のとき，S_{n+1} 面を破線で，S_n 面を点線で示している．さらに太線で上記 3 立体のそれぞれの S_{n+1}，S_n 上にある面を示している．これをもとに上記三種の立体の個数を数える．

(i) S_{n+1} 上にあり，各辺が S_{n+1} の対応する各辺と平行な三角形だけある．その個数は $\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$ 個．

(ii) S_n 上にあり，各辺が S_n の対応する各辺と平行でない三角形だけある．その個数は $\dfrac{(n-1)n}{2}$ 個．

(iii) S_{n+1} 上にあり，各辺が S_{n+1} の対応する各辺と平行でない三角形だけある．その個数は $\dfrac{n(n+1)}{2}$ 個．

これ以外にないことを体積で確認する．正八面体は隣りあう面で D_1 と同じ体積の四面体を決め，これが 4 組あるので，体積は D_1 4 個分である．ゆえに (i)〜(iii) の体積の合計は，D_1 が

$$\frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2} = 3n^2 + 3n + 1 \text{（個分）}$$

これは，S_n と S_{n+1} の間に挟まれた部分の体積が D_1 の $(n+1)^3 - n^3$ 倍であることと一致する．

よって上記３つの型の立体がすべてである．

$$\therefore \quad a_{n+1} - a_n = \frac{(n+1)(n+2)}{2} + \frac{(n-1)n}{2} + \frac{n(n+1)}{2}$$

$a_1 = 1$ でこれを解いて

$$a_n = \frac{n^3 + n}{2}$$

□

解答 5.41　問題 3.10

$f(n) = 5^n + an + b$ とおく．

$f(1) = 5 + a + b$，　$f(2) = 25 + 2a + b$ がともに 16 の倍数であることが必要である．

従って $f(2) - f(1) = a + 20$ も 16 の倍数でなければならない．

$1 \leqq a \leqq 16$ より $21 \leqq a + 20 \leqq 36$．この範囲の 16 の倍数は 32 のみ．ゆえに $a + 20 = 32$ より $a = 12$ が必要．

さらにこのとき $5 + a + b = 17 + b$．同様に考え $17 + b = 32$ で，　$b = 15$ が必要である．

逆に $a = 12,\ b = 15$ のとき $n \geqq 3$ についても $f(n)$ が 16 の倍数であることを示す．

$$\begin{aligned} f(n) &= 5^n + 12n + 15 = (1+4)^n + 12n + 15 \\ &= (1 + {}_n\mathrm{C}_{n-1}4 + {}_n\mathrm{C}_{n-2}4^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_1 4^{n-1} + 4^n) + 12n + 15 \\ &= 1 + 4n + 12n + 15 + ({}_n\mathrm{C}_{n-2}4^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_1 4^{n-1} + 4^n) \\ &= 16n + 16 + ({}_n\mathrm{C}_{n-2}4^2 + \cdots + {}_n\mathrm{C}_1 4^{n-1} + 4^n) \end{aligned}$$

$n \geqq 3$ なのでかっこ内は 16 の倍数である．

従ってこの場合も $f(n)$ は 16 の倍数である．

ゆえに求める $a,\ b$ は $a = 12,\ b = 15$．

別解

$$\begin{aligned} & \text{自然数 } n \text{ に対して } f(n) \text{ が 16 の倍数} \\ \iff\ & g(n) = f(n+1) - f(n) \text{ かつ } f(1) \text{ が 16 の倍数} \\ \iff\ & h(n) = g(n+1) - g(n) \text{ かつ } g(1),\ f(1) \text{ が 16 の倍数} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{cases} f(1) = 5 + a + b \\ g(n) = 4 \cdot 5^n + a \\ g(1) = 20 + a \\ h(n) = 16 \cdot 5^n \end{cases}$$

$h(n)$ はつねに 16 の倍数になるから，

求める条件は $5 + a + b,\ 20 + a$ が 16 の倍数であることと同値である．

つまり $a = 12,\ b = 15$　□

解答 5.42　問題 3.11

$x = y = 1$ のときに成立することが必要である．

$$(1+1)^4 \leqq c^3(1^4 + 1^4) \quad \therefore \quad 8 \leqq c^3$$

つまり $2 \leqq c$ が必要である．

$c \geqq 2$ のとき $x,\ y>0$ なので

$$\begin{aligned}
& c^3(x^4+y^4)-(x+y)^4 \\
\geqq\ & 8(x^4+y^4)-(x^4+4x^3y+6x^2y^2+4xy^3+y^4) \\
=\ & (4x^4-4x^3y)+(3x^4-3x^2y^2)+(3y^4-3x^2y^2)+(4y^4-4xy^3) \\
=\ & 4x^3(x-y)+3x^2(x^2-y^2)+3y^2(y^2-x^2)+4y^3(y-x) \\
=\ & 4(x-y)(x^3-y^3)+3(x^2-y^2)^2 \\
=\ & (x-y)^2\{4(x^2+xy+y^2)+3(x+y)^2\} \geqq 0 \\
& (\text{等号は } x=y \text{ のとき})
\end{aligned}$$

となる．ゆえに $2 \leqq c$ は十分条件でもある．

したがって求める c の範囲は $2 \leqq c$.

十分性の別解 (ア)　$c \geqq 2$ のとき

$$(x+y)^4 \leqq 8(x^4+y^4)$$

を示せば $(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4)$ は成立する．ところが

$$2(x^2+y^2)-(x+y)^2=(x-y)^2 \geqq 0 \quad \therefore \quad (x+y)^2 \leqq 2(x^2+y^2)$$
$$2(x^4+y^4)-(x^2+y^2)^2=(x^2-y^2)^2 \geqq 0 \quad \therefore \quad (x^2+y^2)^2 \leqq 2(x^4+y^4)$$

これから

$$(x+y)^4 \leqq 4(x^2+y^2)^2 \leqq 8(x^4+y^4)$$

となり成立する．

十分性の別解 (イ)　$(x+y)^4 \leqq 8(x^4+y^4)$ は

$$\left(\frac{x+y}{2}\right)^4 \leqq \frac{x^4+y^4}{2}$$

と同値．$y=x^4$ が下に凸より示すこともできる．

別解 1

$x,\ y>0$ なので $t=\dfrac{y}{x}>0$ とおく．

$$(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4) \iff (1+t)^4 \leqq c^3(1+t^4)$$

である．

$$f(t)=c^3(1+t^4)-(1+t)^4$$

とおく．$t>0$ のとき常に $f(t) \geqq 0$ となる c^3 の範囲を求める．

$$f'(t)=4c^3t^3-4(1+t)^3$$

$f'(t)=0$ となるのは $1+t=\sqrt[3]{c^3}t$ のときのみ．$f'(0)<0$ なのでこのとき $f'(t)$ は負から正に変わる．ゆえに $t=\dfrac{1}{\sqrt[3]{c^3}-1}>0$ で極小かつ最小．

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[3]{c^3}-1}\right) \geqq 0$$

$$
\begin{aligned}
&\iff \quad c^3\left(1+\frac{1}{(\sqrt[3]{c^3}-1)^4}\right)-\left(\frac{\sqrt[3]{c^3}}{\sqrt[3]{c^3}-1}\right)^4 \geqq 0 \\
&\iff \quad c^3\{(\sqrt[3]{c^3}-1)^4+1) \geqq (\sqrt[3]{c^3})^4 \\
&\iff \quad (\sqrt[3]{c^3}-1)^4 \geqq \sqrt[3]{c^3}-1 \\
&\iff \quad \sqrt[3]{c^3}-1 \geqq 1 \\
&\iff \quad c^3 \geqq 8
\end{aligned}
$$

したがって求める c の範囲は $2 \leqq c$.

別解 2

数 III を用いる.

$x,\ y>0$ なので

$$
(x+y)^4 \leqq c^3(x^4+y^4) \iff \frac{(x+y)^4}{x^4+y^4} \leqq c^3
$$

である. $t=\dfrac{y}{x}>0$ として,

$$
\frac{(x+y)^4}{x^4+y^4}=\frac{(1+t)^4}{1+t^4}
$$

$t>0$ のときつねに

$$
\frac{(1+t)^4}{1+t^4} \leqq c^3
$$

となるような c^3 の範囲は, $t>0$ における $\dfrac{(1+t)^4}{1+t^4}$ の最大値以上の範囲である.

$\dfrac{(1+t)^4}{1+t^4}$ の最大値を求める. $g(t)=\dfrac{(1+t)^4}{1+t^4}$ とする.

$$
g'(t)=\frac{4(1+t)^3(1-t^3)}{(1+t^4)^2}
$$

となる. ゆえに $t=1$ のとき極大かつ最大である. 最大値 $g(1)=8$.

したがって求める c の範囲は $2 \leqq c$. □

解答 5.43　問題 3.12

$$
\begin{aligned}
\sum_{k=1}^{n}(ak^2+bk+1) &= a\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+b\frac{n(n+1)}{2}+n \\
&= n\left\{a\frac{(n+1)(2n+1)}{6}+b\frac{n+1}{2}+1\right\}
\end{aligned}
$$

であるから, 題意をみたすためには,

$$
f(n)=a\frac{(n+1)(2n+1)}{6}+b\frac{n+1}{2}+1
$$

が整数 n に対し整数であることが必要十分条件である.

必要条件を求める.

$$
\begin{aligned}
f(0)&=\frac{a}{6}+\frac{b}{2}+1=\frac{a+b}{2}-\frac{a}{3}+1 \quad \cdots ① \\
f(2)&=\frac{5a}{2}+\frac{3b}{2}+1=2a+b+1+\frac{a+b}{2} \quad \cdots ②
\end{aligned}
$$

② より $a+b$ が偶数．このとき① より a が 3 の倍数．

注意　$f(1)=a+b+1$ となって $a,\ b$ に関する条件が加わらないので，$f(2)$ を調べた．

逆に，$a+b$ が偶数, a が 3 の倍数とする．このとき

$$\begin{aligned} f(n) &= a\frac{(n+1)(2n+1)}{6}+b\frac{n+1}{2}+1 \\ &= a\frac{(n+1)(2n+1)}{2}-a\frac{(n+1)(2n+1)}{3}+b\frac{n+1}{2}+1 \\ &= \frac{a+b}{2}(n+1)+an(n+1)-\frac{a}{3}(n+1)(2n+1)+1 \end{aligned}$$

よりつねに $f(n)$ は整数になる．

条件の範囲にこの条件をみたす a は $2m$ 個とれる．

各 a に対して条件をみたす b は,

a が奇数なら　b は 1〜$6m$ の奇数だから，　$3m$ 個
a が偶数なら　b は 2〜$6m$ の偶数だから，　$3m$ 個

とれる．

よって, $6m^2$ 個の $(a,\ b)$ がある．

別解

$$f(n)=a\frac{(n+1)(2n+1)}{6}+b\frac{n+1}{2}+1$$

が整数 n に対し整数となる必要十分条件の求め方の別解．

$$g(n)=f(n+1)-f(n)=a\frac{4n+5}{6}+\frac{b}{2}$$

とおく．

$$\begin{aligned} f(n)\text{ が常に整数} &\iff f(1),\ g(n)\text{ が常に整数} \\ &\iff f(1),\ g(1),\ g(n+1)-g(n)\text{ が常に整数} \end{aligned}$$

ここで,

$$f(1)=a+b+1,\ g(1)=a+\frac{a+b}{2},\ g(n+1)-g(n)=\frac{2a}{3}$$

これらが整数であるため条件は,

$$a+b\text{ が偶数},\ a\text{ が } 3 \text{ の倍数}$$

である．　□

解答 5.44　問題 3.13

行列 $X,\ Y$ を

$$X=\begin{pmatrix} x & y \\ x & w \end{pmatrix} \qquad Y=\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$$

とおく．

$$AX-XB=\begin{pmatrix} 2x & 2y \\ x+z & y+w \end{pmatrix}-\begin{pmatrix} \alpha x & \beta y \\ \alpha z & \beta w \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} (2-\alpha)x & (2-\beta)y \\ x+(1-\alpha)z & y+(1-\beta)w \end{pmatrix}$$

である．したがって条件 $AX - XB = Y$ は

$$\begin{aligned}&(2-\alpha)x = p\\&(2-\beta)y = q\\&x + (1-\alpha)z = r\\&y + (1-\beta)w = s\end{aligned}$$

と同値である．

$p \neq 0$ である p に対して x が存在するために $\alpha \neq 2$ が必要.

$q \neq 0$ である q に対して y が存在するために $\beta \neq 2$ が必要.

これらの x と y に対し r と s を適当にとって $r - x \neq 0,\ s - y \neq 0$ としたとき z と w が存在するために $\alpha \neq 1,\ \beta \neq 1$ が必要.

よって

$$\alpha \neq 1 \text{ かつ } \alpha \neq 2, \quad \beta \neq 1 \text{ かつ } \beta \neq 2 \quad \cdots (\ast\ast)$$

が必要.

逆にこのとき任意の $p,\ q,\ r,\ s$ に対して

$$\begin{aligned}&x = \frac{p}{2-\alpha},\ y = \frac{q}{2-\beta}\\&z = \frac{1}{1-\alpha}\left(r - \frac{p}{2-\alpha}\right),\ w = \frac{1}{1-\beta}\left(s - \frac{p}{2-\beta}\right)\end{aligned}$$

ととることができ，こらから定まる X は条件 $AX - XB = Y$ を満たす．よって条件 $(\ast\ast)$ は十分条件でもある． □

解答 5.45　問題 3.14

$$x^3 + y^3 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

と因数分解される．自然数 $x,\ y$ を用いて $p^2 = x^3 + y^3$ と表せるような素数 p は

$$p^2 = (x+y)(x^2 - xy + y^2)$$

となる．$x + y > 1$ であるから,

$$\begin{cases} x + y = p \\ x^2 - xy + y^2 = p \end{cases} \cdots ① , \quad \begin{cases} x + y = p^2 \\ x^2 - xy + y^2 = 1 \end{cases} \cdots ②$$

のいずれかである．

① のとき．$p^2 = x^2 + 2xy + y^2$ なので，$p^2 - p = 3xy$．よって 2 次方程式

$$t^2 - pt + \frac{p^2 - p}{3} = 0$$

は実数解 x と y を持つ．判別式

$$D_1 = p^2 - \frac{4}{3}(p^2 - p) \geqq 0$$

が必要である．これから $0 \leqq p \leqq 4$．p は素数だから $p = 2,\ 3$ である．

$p = 2$ なら，$x + y = 2$．よって $x = y = 1$．このとき $x^2 - xy + y^2 = 1 \neq p$．解なし．

$p=3$ なら，$x+y=3$．よって $(x,\ y)=(2,\ 1),\ (1,\ 2)$．このとき $x^2-xy+y^2=3=p$．これは適切な解である．

② のとき．同様に $p^4-1=3xy$．よって 2 次方程式

$$t^2-p^2t+\frac{p^4-1}{3}=0$$

は実数解 x と y を持つ．判別式

$$D_2=p^4-\frac{4}{3}(p^4-1)\geqq 0$$

が必要である．これから $0\leqq p^4\leqq 4$．このような p はない．

以上より $p=3,\ (x,\ y)=(2,\ 1),\ (1,\ 2)$． □

解答 5.46　問題 3.15

$a^3-b^3=(a-b)(a^2+ab+b^2)$ である．ここで $u=a-b,\ v=a^2+ab+b^2$ とおく．

$u^2=a^2-2ab+b^2$ であるから $v-u^2=3ab$．つまり $a(-b)=\dfrac{u^2-v}{3}$．

したがって a と $-b$ は 2 次方程式

$$t^2-ut+\frac{u^2-v}{3}=0$$

の二つの解である．a と b は実数であることが必要なので，判別式を D とおくと

$$D=u^2-\frac{4(u^2-v)}{3}\geqq 0$$

これから $4v\geqq u^2\quad\cdots$① を得る．

$217=7\cdot 31$ で 7 と 31 は素数であるから，$7\cdot 31=uv$ となる $u,\ v$ のうち，条件 ① を満たすものは

$$(u,\ v)=(1,\ 217),\ (7,\ 31)$$

である．それぞれに対して $a(-b)$ は-72 と 6 である．

$a-b=1,\ a(-b)=-72$ のとき，$a,\ -b$ は

$$t^2-t-72=0$$

の二つの解．$\therefore\quad (a,\ -b)=(-8,\ 9),(9,\ -8)$．

$a-b=7,\ a(-b)=6$ のとき，$a,\ -b$ は

$$t^2-7t+6=0$$

の二つの解．$\therefore (a,\ -b)=(6,\ 1),(1,\ 6)$．

$$\therefore\quad (a,\ b)=(1,\ -6),\ (6,\ -1),\ (-8,\ -9),\ (9,\ 8)$$

□

解答 5.47　問題 3.16

(1) $n=1$ のとき，$a_n-4=0$ より成立.

$n=k$ のとき a_k-4 が 7 の倍数とする．これを $7l$ とおく．つまり $a_k=7l+4$.

このとき

$$a_{k+1}-4=3(7l+4)^2+4(7l+4)+3-4=7(l^2+12l)+63$$

なので $a_{k+1}-4$ が 7 で割り切れる．ゆえに一般に a_n-4 が 7 で割り切れる.

(2) $n=1$ のとき，${a_1}^2+a_1+1=16+4+1=21$ より成立.

$n=k$ のとき ${a_k}^2+a_k+1$ が 7^k の倍数とする．これを 7^km とおく．このとき

$$\begin{aligned}
{a_{k+1}}^2+a_{k+1}+1 &= (3{a_k}^2+4a_k+3)^2+(3{a_k}^2+4a_k+3)+1\\
&= \{3({a_k}^2+a_k+1)+a_k\}^2+\{3({a_k}^2+a_k+1)+a_k\}+1\\
&= (3\cdot 7^km+a_k)^2+(3\cdot 7^km+a_k)+1\\
&= 9\cdot 7^{2k}m^2+6\cdot 7^km(a_k-4)+27\cdot 7^km+7^km\\
&= 9\cdot 7^{2k}m^2+6\cdot 7^km(a_k-4)+28\cdot 7^km
\end{aligned}$$

(1) と帰納法の仮定から和の 3 項とも 7^{k+1} で割りきれる.

ゆえに，${a_n}^2+a_n+1$ が 7^n で割り切れることが示された.

(3)

$$\begin{aligned}
{a_n}^{3p}-1 &= ({a_n}^3-1)({a_n}^{3(p-1)}+{a_n}^{3(p-2)}+\cdots+1)\\
&= (a_n-1)({a_n}^2+a_n+1)({a_n}^{3(p-1)}+{a_n}^{3(p-2)}+\cdots+1)
\end{aligned}$$

ゆえに ${a_n}^{3p}-1$ は 7^n で割り切れる．つまり ${a_n}^{3p}$ を 7^n で割った余りは 1 である.

□

解答 5.48　問題 3.17

(1) t^n の係数を推測するためにいくつかの $T_n(t)$ を求める.

$$\begin{aligned}
f_1(x) &= t=T_1(t)\\
f_2(x) &= \frac{1}{2}\left(x^2+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^2-2\right\}\\
&= 2t^2-1=T_2(t)\\
f_3(x) &= \frac{1}{2}\left(x^3+\frac{1}{x^3}\right)=\frac{1}{2}\left\{\left(x+\frac{1}{x}\right)^3-3\left(x+\frac{1}{x}\right)\right\}\\
&= 4t^3-3t=T_3(t)
\end{aligned}$$

したがって $T_n(t)$ の t^n 項の係数は 2^{n-1} と推測される．そこで

$$T_n(t)\text{ は } t \text{ の整数係数の整式で, } t^n \text{ の係数は } 2^{n-1} \text{ である} \quad \cdots ①$$

ことを，n に関する数学的帰納法で示す.

(i) $n=1,\ 2$ のときは，上のように成立する.

(ii) $n=k,\ k+1$ のときに ① が成立するとする．

$$\begin{aligned} f_{k+2}(x) &= \frac{1}{2}\left(x^{k+2}+\frac{1}{x^{k+2}}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left\{\left(x^{k+1}+\frac{1}{x^{k+1}}\right)\left(x+\frac{1}{x}\right)-\left(x^{k}+\frac{1}{x^{k}}\right)\right\} \\ &= \frac{1}{2}\{4tT_{k+1}-2T_k(t)\}=2tT_{k+1}(t)-T_k(t) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad T_{k+2}(t)=2tT_{k+1}(t)-T_k(t)\quad\cdots②$$

となる．

数学的帰納法の仮定から $T_{k+1}(t),\ T_k(t)$ は整数係数の整式なので $T_{k+2}(t)$ の係数も整数である．さらに $T_{k+1}(t),\ T_k(t)$ の最高次の項の係数も帰納法の仮定から定まるのでそれを含めてこれらの多項式を書くと

$$\begin{aligned} T_{k+1}(t) &= 2^k t^{k+1}+\cdots \\ T_k(t) &= 2^{k-1}t^k+\cdots \end{aligned}$$

となる．したがって

$$\begin{aligned} T_{k+2}(t) &= 2t\{2^k t^{k+1}+\cdots\}-\{2^{k-1}t^k+\cdots\} \\ &= 2^{k+1}t^{k+2}+\cdots \end{aligned}$$

となり，$T_{k+2}(t)$ は整数係数の $k+2$ 次整式で t^{k+2} の係数は 2^{k+1} であることが示された．つまり $n=k+2$ でも ① が成立した．

(iii)　(i)(ii) より自然数 n に対して ① が成立する．

(2)

$$T_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)\quad\cdots③$$

が成り立つことを数学的帰納法で示す．

(i) $T_1(t)=t$ なので $T_1(\cos\theta)=\cos\theta$，つまり $n=1$ で成立．

$T_2(t)=2t^2-1$ なので

$$T_2(\cos\theta)=2\cos^2\theta-1=\cos 2\theta$$

つまり $n=2$ で成立．

(ii) ③ が $n=k,\ k+1$ で成立するとする．② より

$$T_{k+2}(\cos\theta)=2\cos\theta T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)$$

が成り立つ．数学的帰納法の仮定を代入してこれを計算する．

$$\begin{aligned} T_{k+2}(\cos\theta) &= 2\cos\theta T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta) \\ &= 2\cos\theta\cos\{(k+1)\theta\}-\cos k\theta \\ &= [\cos\{(k+2)\theta\}+\cos k\theta]-\cos k\theta=\cos(k+2)\theta \end{aligned}$$

したがって $n=k+2$ でも成立した．

(iii)　(i)(ii) より自然数 n に対して ③ が成立する．

$\square$

解答 5.49　問題 3.18

(1) 解と係数の関係から

$$\alpha+\beta=p\ ,\quad \alpha\beta=-q$$

$n=1,\ 2$ のとき．

$$\begin{aligned}A_1 &= \alpha+\beta=p\\ A_2 &= \alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=p^2+2q\end{aligned}$$

よりともに整数で，成立する．

$n=k,\ k+1$ で成立するとする．このとき

$$\begin{aligned}A_{k+2} &= \alpha^{k+2}+\beta^{k+2}\\ &= (\alpha+\beta)(\alpha^{k+1}+\beta^{k+1})-\alpha\beta(\alpha^k+\beta^k)=pA_{k+1}+qA_k\end{aligned}$$

となり，これも整数なので $n=k+2$ でも成立する．

ゆえにすべての正の整数 n について A_n は整数である．

(2)

$$\begin{aligned}A_{3n}-{A_n}^3 &= (\alpha^{3n}+\beta^{3n})-(\alpha^n+\beta^n)^3\\ &= -3\alpha^n\beta^n(\alpha^n+\beta^n)=-3(-q)^nA_n\end{aligned}$$

(1) から A_n は整数である．ゆえに $A_{3n}-{A_n}^3$ は 3 の倍数である．

$\square$

解答 5.50　問題 3.19

(1) $x=y$ のときは等号が成立する．

$x<y$ とする．このとき $x<px+qy<y$ である．関数 $y=\log x$ が上に凸な関数であるから，

$$p\log x+q\log y<\log(px+qy)$$

が成り立つ．これから

$$\log x^py^q<\log(px+qy)$$

関数 $y=\log x$ は単調増加なので

$$x^py^q<px+qy$$

が成立する．$x>y$ のときも同様なので，$x=y$ のときとあわせて題意の不等式が成立する．等号成立は $x=y$ のときである．

(2) (1) と同様に考え，

$$p_1\log x_1+p_2\log x_2+\cdots+p_n\log x_n \leqq \log\left(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_nx_n\right)$$

が成立することを数学的帰納法で示せばよい．

$n=2$ のときは (1) から成立．

n 個の場合に成立するとし $n+1$ 個の場合に成立することを示す．

$q=p_1+p_2+\cdots+p_n$ とおく．

$$\frac{p_1}{q}+\frac{p_2}{q}+\cdots+\frac{p_n}{q}=1$$

および，$q+p_{n+1}=1$ であることに注意する．

$$\begin{aligned}
& p_1\log x_1+p_2\log x_2+\cdots+p_n\log x_n+p_{n+1}\log x_{n+1}\\
= \ & q\left(\frac{p_1}{q}\log x_1+\frac{p_2}{q}\log x_2+\cdots+\frac{p_n}{q}\log x_n\right)+p_{n+1}\log x_{n+1}\\
& \text{数学的帰納法の仮定により}\\
\leqq \ & q\log\left(\frac{p_1}{q}x_1+\frac{p_2}{q}x_2+\cdots+\frac{p_n}{q}x_n\right)+p_{n+1}\log x_{n+1}\\
& \text{(1) から}\\
\leqq \ & \log\left\{q\left(\frac{p_1}{q}x_1+\frac{p_2}{q}x_2+\cdots+\frac{p_n}{q}x_n\right)+p_{n+1}x_{n+1}\right)\\
= \ & \log\left(p_1x_1+p_2x_2+\cdots+p_{n+1}x_{n+1}\right\}
\end{aligned}$$

ゆえに $n+1$ の場合も成立した．等号成立は $x_1=\cdots=x_n$ かつ

$$\frac{p_1}{q}x_1+\frac{p_2}{q}x_2+\cdots+\frac{p_n}{q}x_n=x_{n+1}$$

つまり $x_1=\cdots=x_{n+1}$ のとき．

よって一般の n に対して題意が示された．□

注意

$$p_i=\frac{1}{n}\quad (i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

のとき，これは相加平均と相乗平均の関係の不等式である．□

解答 5.51　問題 3.20

(1) m に関する数学的帰納法で示す．

$m=1$ のとき．

$$1^3 \leqq a_n \leqq 2^3$$

となる n は，$a_1=1,\ a_2=1+2^2=5,\ a_3=14$ より $n=1,\ 2$ と二つある．つまり $c_1=2\geqq 1$ で成立している．

$m=k$ のとき $c_k\geqq 1$ とする．つまり

$$k^3 \leqq a_n \leqq (k+1)^3$$

となる n が少なくとも一つ存在するとする．その n のなかで最大のものを N とする．したがって

$$a_N \leqq (k+1)^3 \ \cdots ① \quad \text{かつ} \ (k+1)^3 < a_{N+1} \ \cdots ②$$

である．

ここでもし $a_{N+1} \leqq (k+2)^3$ が示されたら

$$(k+1)^3 \leqq a_{N+1} \leqq (k+2)^3$$

となり，$m=k+1$ のときも $(k+1)^3 \leqq a_n \leqq (k+2)^3$ をみたす n が少なくとも一つ存在し $c_{k+1} \geqq 1$ となることが示される．

そのためには，$a_{N+1} = a_N + (N+1)^2$ かつ $a_N \leqq (k+1)^3$ なので

$$(N+1)^2 \leqq (k+2)^3 - (k+1)^3 = 3k^2+9k+7$$

を示せばよい．

ここで $a_N = \dfrac{N(N+1)(2N+1)}{6} > \dfrac{N^3}{3}$ なので

$$N^3 < 3a_N \leqq 3(k+1)^3$$

つまり $N < \sqrt[3]{3}(k+1)$．$\sqrt[3]{3} < \dfrac{3}{2}$ なので

$$N+1 < \sqrt[3]{3}(k+1)+1 = \sqrt[3]{3}k + \frac{5}{2}$$

$$\begin{aligned}
\therefore \qquad & 3k^2+9k+7-(N+1)^2 \\
\geqq \quad & 3k^2+9k+7-\left(\sqrt[3]{3}k+\frac{5}{2}\right)^2 \\
= \quad & (3-3^{\frac{2}{3}})k^2+(9-5\sqrt[3]{3})k+7-\frac{25}{4} > 0 \\
& (\because \quad 9-5\sqrt[3]{3} = 729^{\frac{1}{3}} - 375^{\frac{1}{3}} > 0)
\end{aligned}$$

ゆえに $m=k+1$ でも成立し，帰納法により題意は示された．+

(2) m に関する数学的帰納法で示す．

$m=1$ のとき．(1) から $c_1 = 2$ であるから成立している．

$m=k$ のとき $c_k \leqq 2$ とする．

$$k^3 \leqq a_n \leqq (k+1)^3$$

となる n のなかで最大のものを N とする．このとき

$$(k+2)^3 < a_{N+3}$$

をしめせば，$(k+1)^3 \leqq a_n \leqq (k+2)^3$ を満たす n は多くても $N+1$ と $N+2$ の二つであることになる．

そのためには $a_{N+3}=a_{N+1}+(N+2)^2+(N+3)^2$ で $(k+1)^3<a_{N+1}$ であるから

$$(k+2)^3-(k+1)^3<(N+2)^2+(N+3)^2 \iff 3k^2+9k+7<2N^2+10N+13$$

を示せばよい．② より

$$(k+1)^3<\frac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{6}<\frac{(N+2)(N+2)(2N+4)}{6}=\frac{(N+2)^3}{3}$$

$$\therefore \quad \sqrt[3]{3}(k+1)<N+2$$

$\frac{5}{4}<\sqrt[3]{3}$ なので

$$\sqrt[3]{3}k-\frac{3}{4}<N$$

$$\begin{aligned}
\therefore \quad & 2N^2+10N+13-(3k^2+9k+7)\\
> \ & 2\left(\sqrt[3]{3}k-\frac{3}{4}\right)^2+10\left(\sqrt[3]{3}k-\frac{3}{4}\right)+13-(3k^2+9k+7)\\
= \ & (2\cdot 3^{\frac{2}{3}}-3)k^2+(7\cdot 3^{\frac{1}{3}}-9)k-\frac{3}{8}
\end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned}
& 7\cdot 3^{\frac{1}{3}}-9-\frac{3}{8}=7\cdot 3^{\frac{1}{3}}-\frac{75}{8}\\
> \ & 7\cdot 3^{\frac{1}{3}}-\frac{77}{8}=7\left(3^{\frac{1}{3}}-\frac{11}{8}\right)
\end{aligned}$$

そこで

$$\left(\frac{11}{8}\right)^3=\frac{1331}{512}<3$$

であるから k が正の整数であるかぎり

$$2N^2+10N+13-(3k^2+9k+7)>0$$

ゆえに $m=k+1$ に対しても成立し，すべての自然数 m に対して $m\leqq 2$ である．

□

解答 5.52　問題 3.21

(1) $\beta>1,\quad 0\leqq x\leqq 1$ より

$$0\leqq \beta x<\beta$$

一般に二つの実数 $x<y$ に対して $[x]\leqq[y]$ であるから

$$0\leqq[\beta x]\leqq[\beta]$$

したがって

$$0\leqq d_1(x)\leqq[\beta]$$

n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ が示されれば上の議論を x に代えて $f_n(x)$ に対して行うことにより

$$0 \leqq [\beta f_n(x)] \leqq [\beta]$$

から

$$0 \leqq d_{n+1}(x) \leqq [\beta]\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

が成立し， $d_1(x)$ の結論とあわせて題意が示される.

n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ に対して $0 \leqq f_n(x) \leqq 1$ を数学的帰納法で示す.

$n=1$ のとき． $f_1(x) = \beta x - [\beta x]$

$$[\beta x] \leqq \beta x < [\beta x] + 1$$

$f_1(x) = \beta x - [\beta x]$ より

$$0 \leqq f_1(x) < 1$$

$n=k$ のとき $0 \leqq f_k(x) < 1$ とすれば

$$[\beta f_k(x)] \leqq \beta f_k(x) < [\beta f_k(x)] + 1$$

より同様に

$$0 \leqq f_{k+1}(x) < 1$$

ゆえに帰納法によってすべての n に対して

$$0 \leqq f_n(x) < 1$$

$$\therefore\quad 0 \leqq d_n(x) \leqq [\beta]\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

(2) 数学的帰納法で示す.

$n=1$ のとき.

$$\begin{aligned} & \beta^1 x - \sum_{k=1}^{1} \beta^{1-k} d_k(x) \\ = \quad & \beta x - d_1(x) \\ = \quad & \beta x - [\beta x] = f_1(x) \end{aligned}$$

となり，成立.

$n=j$ で成立するとする．つまり

$$f_j(x) = \beta^j x - \sum_{k=1}^{j} \beta^{j-k} d_k(x)$$

とする．このとき

$$\begin{aligned} f_{j+1}(x) \quad &= \quad f(f_j(x)) = \beta f_j(x) - [\beta f_j(x)] \\ &= \quad \beta^{j+1} x - \sum_{k=1}^{j} \beta^{j+1-k} d_k(x) - d_{j+1}(x) \\ &= \quad \beta^{j+1} x - \sum_{k=1}^{j+1} \beta^{j+1-k} d_k(x) \end{aligned}$$

ゆえに $n=j+1$ でも成立した.

したがって帰納法によりすべての $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して

$$f_n(x)=\beta^n x-\sum_{k=1}^{n}\beta^{n-k}d_k(x)$$

が成り立つ.

(3) (2) から

$$\frac{1}{\beta^n}f_n(x)=x-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(x)}{\beta^k}$$

$1<\beta,\ 0\leqq f_n(x)<1$ なので x を固定するとき

$$\therefore\quad \lim_{n\to\infty}\left|x-\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(x)}{\beta^k}\right|=\lim_{n\to\infty}f_n(x)\frac{1}{\beta^n}=0$$

注意　これは何をしているのか.　$\beta=10,\ x=\sqrt{2}-1=0.41421356\cdots$ のときどのようになっているか.

$$\begin{array}{ll}
d_1(x)=[10x]=4 & f_1(x)=10x-[10x]=0.1421356\cdots\\
d_2(x)=[10f_1(x)]=1 & f_2(x)=10f_1(x)-[10f_1(x)]=0.421356\cdots\\
d_3(x)=[10f_2(x)]=4 & f_3(x)=10f_2(x)-[10f_2(x)]=0.21356\cdots\\
d_4(x)=[10f_3(x)]=2 & f_4(x)=10f_3(x)-[10f_3(x)]=0.1356\cdots\\
\cdots & \cdots
\end{array}$$

したがって

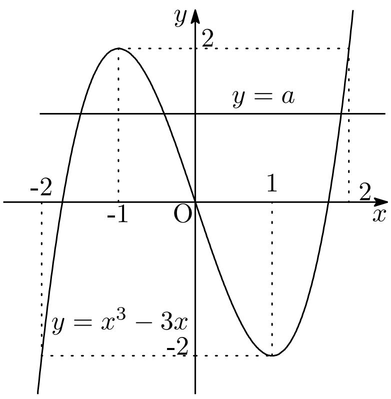
$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\frac{d_k(x)}{10^k}=\frac{4}{10}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{10^3}+\frac{2}{10^4}+\cdots=0.41421356\cdots$$

となる．つまり x の 10 進展開そのものである．これを $\beta>1$ である任意の実数 β による展開, いわば β 進展開に拡張したものである. □

解答 5.53　問題 3.22

(1)

$f_1'(x)=3x^2-3$ なので, $x=\pm1$ で極. $f_1(\pm1)=\mp2$.
また $f_1(\pm2)=\pm2$ である.
$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数は, 二つのグラフ $y=f_1(x)$ と $y=a$ の共有点の個数に等しい.
したがって



$$|a|>2 \text{ のとき 1 個},\ |a|=2 \text{ のとき 2 個},\ |a|<2 \text{ のとき 3 個}$$

(2) $f_2(x)=f_1(f_1(x))$ である．$f_1(f_1(x))=a$ を $f_1(z)=a,\ z=f_1(x)$ とおく．(1) のグラフから

(i) $|a|>2$ のとき $|z|>2$ の z が 1 個存在し，それに対して $z=f_1(x)$ となる x が 1 個存在する．

(ii) $|a|=2$ のとき $|z|=2$ の z と $|z|<2$ の z が各 1 個存在し，それに対して，$z=f_1(x)$ となる x がそれぞれ 3 個と 2 個，計 5 個存在する．

(iii) $|a|<2$ のとき $|z|<2$ の z が 3 個存在し，それぞれに対して $z=f_1(x)$ となる x が 3 個，計 9 個存在する．

(3) 1 以上の自然数 n と $|a|<2$ である任意の定数 a に対し，

$f_n(x)=a$ を満たす実数 x は 3^n 個存在し，すべて $|x|<2$ の範囲にある．
かつ異なる a に対する 3^n 個の x の値はすべて異なる．

このことを数学的帰納法で示す．

$n=1$ のときは (1) から成立．

n で成立するとする．

$f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))$ なので (2) と同様に $f_1(f_n(x))=a$ を $f_1(z)=a$，$z=f_n(x)$ と分ける．(1) から $f_1(z)=a$ となる z が $|z|<2$ の範囲に 3 個存在する．それを z_1，z_2，z_3 とする．これはすべて異なる．各 z_k $(k=1,\ 2,\ 3)$ に対して数学的帰納法の仮定によって $f_n(x)=z_k$ となる x が 3^n 個存在し，z_1，z_2，z_3 に対する x の値はすべて異なる．ゆえに $f_{n+1}(x)=f_1(f_n(x))=a$ となる x は 3^{n+1} 個存在する．

a が異なれば (1) から対応する z_1，z_2，z_3 がすべて異なるので，上のようにして定まる $f_{n+1}(x)=a$ となる 3^{n+1} 個の x の値もすべて異なる．

よって命題が $n+1$ でも成立したので，すべての n で成立する．

特に $a=0$ で成立するので (3) が示された．

別解　自然数 n に対し

$$f_n(2\cos\theta)=2\cos(3^n\theta)$$

が成立することを数学的帰納法で示す．$n=1$ のとき．

$$f_1(2\cos\theta)=8\cos^3\theta-6\cos\theta=2\cos 3\theta$$

で成立．$f_n(2\cos\theta)=2\cos(3^n\theta)$ とする．このとき

$$\begin{aligned}
f_{n+1}(2\cos\theta) &= f_n\{f_1(2\cos\theta)\} \\
&= f_n(2\cos 3\theta)=2\cos\{3^n(3\theta)\} \\
&= 2\cos(3^{n+1}\theta)
\end{aligned}$$

n のときの成立を仮定して $n+1$ のときの成立が示せたので，一般に成立する．

これを活用して，$f_n(x)=0$ となる x で $x=2\cos\theta$ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ と表されるものを求める．

$f_n(2\cos\theta)=0$ より $2\cos(3^n\theta)=0$．つまり

$$3^n\theta=\frac{(2k+1)\pi}{2}$$

θ は

$$0 \leqq \frac{(2k+1)\pi}{2 \cdot 3^n} \leqq \pi$$

の範囲でとればよい．これから

$$0 \leqq k + \frac{1}{2} \leqq 3^n$$

つまり k は $0 \leqq k \leqq 3^n - 1$ の 3^n 個とれる．

したがって $f_n(x) = 0$ を満たす x が

$$x = 2\cos\left\{\frac{(2k+1)\pi}{2 \cdot 3^n}\right\} \ (k = 0,\ 1,\ \cdots,\ 3^n - 1)$$

と 3^n 個存在した．一方 $f_n(x)$ の次数は明らかに 3^n なので，これらが $f_n(x) = 0$ を満たす x のすべてである．よって題意が示された．

□

解答 5.54　問題 3.23

$n = 1$ のとき．$f(x) = x + b$ とおく．$f(q_1) = q_1 + b$ で $f(q_1)$ が有理数なので，$b = f(q_1) - q_1$ も有理数である．

$n = m$ のとき成立するとする．

$n = m + 1$ のとき．$f(x)$ を x^{m+1} の係数が 1 である x の $m + 1$ 次式とし，相異なる $m + 1$ 個の有理数 q_1，q_2，$\cdots$，q_{m+1} に対し $f(q_1)$，$f(q_2)$，$\cdots$，$f(q_{m+1})$ がすべて有理数であるとする．

因数定理より

$$f(x) = (x - q_{m+1})Q(x) + f(q_{m+1}) \quad \cdots ①$$

となる．ここで $Q(x)$ は m 次式で x^m の係数は両辺の係数を比較して 1 である．

q_1，q_2，$\cdots$，q_{m+1} はすべて異なるので，q_1，q_2，$\cdots$，q_m に対し

$$Q(q_i) = \frac{f(q_i) - f(q_{m+1})}{q_i - q_{m+1}}$$

したがって $Q(q_1)$，$\cdots$，$Q(q_m)$ はすべて有理数である．

数学的帰納法の仮定から $Q(x)$ は有理数係数の多項式である．ゆえに ① から $f(x)$ も有理数係数の多項式である．

したがって題意が示された．□

注意　この問題は数学的帰納法を使うことなく解ける．$g(x) = f(x) - x^n$ は $n - 1$ 次式である．$g(q_1)$，$g(q_2)$，$\cdots$，$g(q_n)$ もすべて有理数である．

$n - 1$ 次式 $g(x)$ に対して n 個の x に対する値が定まれば $g(x)$ は一意に定まる．実際

$$\begin{aligned} G(x) \quad = \quad & g(q_1)\frac{(x-q_2)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)\cdots(q_1-q_n)} \\ & + g(q_2)\frac{(x-q_1)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_2-q_1)(q_2-q_3)\cdots(q_2-q_n)} \\ & + \cdots \\ & + g(q_n)\frac{(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_{n-1})}{(q_n-q_1)(q_n-q_2)\cdots(q_n-q_{n-1})} \end{aligned}$$

とおく．このとき $G(q_1)=g(q_1),\cdots,\ G(q_n)=g(q_n)$ なので恒等式の原理より $G(x)=g(x)$ ．したがって

$$\begin{aligned} f(x) &= x^n+g(x) \\ &= x^n+g(q_1)\frac{(x-q_2)(x-q_3)\cdots(x-q_n)}{(q_1-q_2)(q_1-q_3)\cdots(q_1-q_n)}+\cdots+g(q_n)\frac{(x-q_1)(x-q_2)\cdots(x-q_{n-1})}{(q_n-q_1)(q_n-q_2)\cdots(q_n-q_{n-1})} \end{aligned}$$

これから $f(x)$ が有理数係数の n 次多項式であることが示された．□

※　これが「ラグランジュの補間公式」の方法である．□

解答 5.55　問題 3.24

解 1　$a_1\geqq 0$ ならすべての項が負でなく和が 0 になるのはすべて 0 のときのみになる．ゆえに $a_1<0$ である．同様に $a_n>0$ である．したがって番号 i $(1\leqq i\leqq n-1)$ で

$$a_i<0,\quad a_{i+1}\geqq 0$$

となるものがある．このとき

$$\begin{aligned} &a_1+2a_2+\cdots+ia_i>i(a_1+a_2+\cdots+a_i) \\ &(i+1)a_{i+1}+(i+2)a_{i+2}+\cdots+na_n>(i+1)(a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n) \end{aligned}$$

であるから

$$\begin{aligned} & a_1+2a_2+\cdots+na_n \\ =\ & a_1+2a_2+\cdots+ia_i+(i+1)a_{i+1}+\cdots+na_n \\ >\ & i(a_1+a_2+\cdots+a_i)+(i+1)(a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n) \\ =\ & i(a_1+a_2+\cdots+a_i+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n)+a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n \\ =\ & a_{i+1}+a_{i+2}+\cdots+a_n>0 \end{aligned}$$

である．□

解 2　$a_1<0,\ a_n>0$ を示すことは同様．

n に関する数学的帰納法で示す．条件が成り立つので $n\geqq 2$ である．

$n=2$ のとき．$0<a_2$ であるから

$$a_1+2a_2=a_1+a_2+a_2=a_2>0$$

$n=k$ のとき成り立つとする．$n=k+1$ のとき．

$$a_1+a_2+\cdots+a_{k-1}+a_k+a_{k+1}=0$$

を満たしている．$b_k=a_k+a_{k+1}$ とおくと，

$$a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_{k-1},\ b_k$$

も和が 0 で増加数列である．数学的帰納法の仮定から

$$0<a_1+2a_2+\cdots+k-1a_{k-1}+kb_k$$

であるが，

$$\begin{aligned} & a_1+2a_2+\cdots+k-1a_{k-1}+kb_k \\ = \quad & a_1+2a_2+\cdots+k-1a_{k-1}+k(a_k+a_{k+1}) \\ < \quad & a_1+2a_2+\cdots+k-1a_{k-1}+ka_k+(k+1)a_{k+1} \end{aligned}$$

なので，$n=k+1$ のときも命題が成立する．よって $n \geqq 2$ で成立する． □

解答 5.56　問題 3.25
(1) 次数 n のとき，任意の正の実数 a_0，a_1，$\cdots$，a_n に対して

$$a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0=0 \quad \cdots ①$$

が正の解をただ一つもつことを数学的帰納法で示す．
$n=1$ のとき．① は

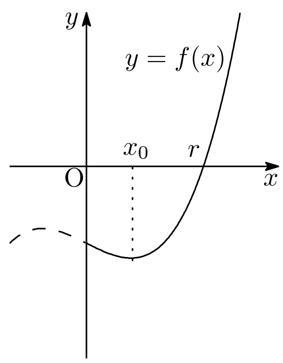
$$a_1x-a_0=0$$

であるから，$x=\dfrac{a_0}{a_1}>0$ は確かにただ一つの正の解である．
$n=k-1$ $(k \geqq 2)$ のとき成立するとする．
$n=k$ のとき．

$$f(x)=a_nx^n-a_{n-1}x^{n-1}-\cdots-a_1x-a_0$$

と置く．

$$f'(x)=na_nx^{n-1}-(n-1)a_{n-1}x^{n-2}-\cdots-a_1$$



ここで係数

$$na_n,\ (n-1)a_{n-1},\ \cdots,\ a_1$$

はすべて正なので，帰納法の仮定によって $f'(x)=0$ は正の解をただ一つもつ．
それを x_0 とする．$f'(0)=-a_1<0$ なので $f'(x)$ は $x=x_0$ で負から正に変わる．つまり $f(x)$ は $x=x_0$ で極小である．
$f(0)=-a_0<0$ なので $f(x)=0$ はただ一つ正の解 r をもつ．
(2) 一般に複素数 α，β に関して不等式

$$|\alpha|-|\beta| \leqq |\alpha-\beta| \leqq |\alpha|+|\beta|$$

が成立する．ゆえに

$$\begin{aligned} |f(\alpha)| \quad = \quad & |a_n\alpha^n-a_{n-1}\alpha^{n-1}-\cdots-a_1\alpha-a_0| \\ \geqq \quad & |a_n\alpha^n|-|a_{n-1}\alpha^{n-1}+\cdots+a_1\alpha+a_0| \\ \geqq \quad & |a_n\alpha^n|-|a_{n-1}\alpha^{n-1}|-\cdots-|a_1\alpha|-|a_0| \\ = \quad & f(|\alpha|) \end{aligned}$$

したがって $|\alpha|>r$ である複素数 α に対しては (1) から $f(|\alpha|)>0$ なので $f(\alpha)=0$ となることはあり得ない．

よって① の他の解 α はすべて $|\alpha| \leqq r$ をみたす.

(3)

$$g(x) = (x-1)(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0)$$

とおく.

$$\begin{aligned} g(x) &= (x-1)(A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0) \\ &= A_n x^{n+1} - (A_n - A_{n-1})x^n - \cdots - (A_2 - A_1)x - A_0 \end{aligned}$$

この係数

$$A_n,\ A_n - A_{n-1},\ \cdots,\ A_2 - A_1,\ A_0$$

はすべて正なので, $g(x)$ は次数 $n+1$ で (1) の条件を満たす.

$g(x) = 0$ は $x = 1$ を解にもつので, (2) から $g(x) = 0$ の $x = 1$ 以外の解 α はすべて $|\alpha| \leqq 1$ をみたす. つまり

$$A_n x^n + A_{n-1}x^{n-1} + \cdots + A_1 x + A_0 = 0$$

の解はすべて $|\alpha| \leqq 1$ を満たす. □

注意　実は $|\alpha| < 1$ が成り立つ. 数学的帰納法の部分に的を絞ったので問題は $|\alpha| \leqq 1$ にしてあるが, ぜひこの証明も考えてほしい. □

解答 5.57　問題 3.26

(1) $\sqrt{3}$ が有理数であるとする.

$$\sqrt{3} = \frac{p}{q}\ \ p,\ q \text{ は互いに素な整数}$$

とおく.

$$3q^2 = p^2$$

より p は 3 の倍数である. $p = 3p'$ とおく.

$$3q^2 = (3p')^2 \quad \Rightarrow q^2 = 3p'^2$$

これから q も 3 の倍数になり, $p,\ q$ は互いに素 の仮定と矛盾した.

よって, $\sqrt{3}$ は有理数でない. つまり $\sqrt{3}$ は無理数である.

(2) 三つの有理点 A, B, C で △ABC が正三角形であるものが存在したとする.

このとき二つのベクトル

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_1,\ y_1)\ , \quad \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (x_2,\ y_2)$$

の各成分は有理数である.

△ABC の面積を考えると

$$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 \sin 60^\circ = \frac{1}{2}|x_1 y_2 - x_2 y_1|$$

つまり

$$\frac{\sqrt{3}}{2}(x_1^2 + y_1^2) = |x_1 y_2 - x_2 y_1| \quad \Rightarrow \quad \sqrt{3} = \frac{2(x_1 y_2 - x_2 y_1)}{x_1^2 + y_1^2}$$

右辺は有理数であるからこれは $\sqrt{3}$ が無理数であることと矛盾した.

よって 3 頂点が有理点である正三角形は存在しない.

別解　(2) は次のように tan で示すこともできる．

設定は同様とする．直線 AB，直線 AC が x 軸の正の方向となす角をそれぞれ α, β とする．いずれかが y 軸と平行なときは，辺長が有理数の正三角形の高さは無理数であることから，矛盾が出る．

いずれも y 軸とは平行でないとする．

$$\tan\alpha = \frac{y_1}{x_1},\ \tan\beta = \frac{y_2}{x_2}$$

である．

一方

$$|\beta - \alpha| = \frac{\pi}{3}$$

より，

$$\sqrt{3} = \tan(\beta - \alpha) = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{1 + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{\dfrac{y_2}{x_2} - \dfrac{y_1}{x_1}}{1 + \dfrac{y_1 y_2}{x_1 x_2}}$$

となって，無理数＝有理数の等式となり矛盾である．

よって存在しない．　□

解答 5.58　　問題 3.27

(1) 直線 AB の傾きは $\dfrac{b^2 - a^2}{b - a} = b + a$，同様に直線 AC の傾きは $c + a$ である．各直線が x 軸の正の方向となす角を α, β とすれば

$$\tan\alpha = b + a,\ \tan\beta = c + a$$

である．このとき

$$\begin{aligned} \tan\angle\mathrm{BAC} &= \tan 60^\circ = \sqrt{3} \\ |\tan(\beta - \alpha)| &= \left|\frac{\tan\alpha - \tan\beta}{1 + \tan\alpha\tan\beta}\right| \\ &= \frac{c - b}{1 + (b + a)(c + a)} \end{aligned}$$

である．$\sqrt{3}$ が無理数で，$\dfrac{c - b}{1 + (b + a)(c + a)}$ は有理数であるからどのような a, b, c に対してもこれが一致することはない．つまり $\angle\mathrm{BAC} = 60^\circ$ となることはない．

(2) $\angle\mathrm{BAC} = 45^\circ$ なので

$$\tan\angle\mathrm{BAC} = 1$$

である．$a = -3$ であるから

$$1 = \frac{c - b}{1 + (b - 3)(c - 3)}$$

でなければならない．これから

$$bc - 3b - 3c + 10 = c - b$$

つまり

$$bc - 2b - 4c = -10 \quad \iff \quad (b-4)(c-2) = -2$$

$$(b-4,\ c-2) = (\pm 2,\ \mp 1),\ (\pm 1,\ \mp 2)$$

つまり

$$(b,\ c) = (6,\ 1),\ (2,\ 3),\ (5,\ 0),\ (3,\ 4)$$

$b < c$ なので $(b,\ c) = (2,\ 3),\ (3,\ 4)$ である．

□

解答 5.59　問題 3.28

$x^n + 2y^n = 4z^n$ にすべてが 0 ではない 1 組の解 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ があるとする．この 3 数の最大公約数を d とし，$x_0 = dx_0',\ y_0 = dy_0',\ z_0 = dz_0'$ とする．すると

$$x_0^n + 2y_0^n = 4z_0^n \quad \iff \quad {x_0'}^n + 2{y_0'}^n = 4{z_0'}^n$$

である．よってすべてが 0 ではない 1 組の解があれば，最大公約数が 1 の解がある．

最大公約数が 1 の 1 組の解を $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ とする．

$x_0^n = 4z_0^n - 2y_0^n$ より x_0 は偶数． $x_0 = 2x_0'$ とおく．このとき

$$2^n {x_0'}^n + 2y_0^n = 4z_0^n \quad \iff \quad 2^{n-1}{x_0'}^n + y_0^n = 2z_0^n$$

で $n \geqq 3$ より y_0 も偶数． $y_0 = 2y_0'$ とおく．同様にこれから

$$2^{n-2}{x_0'}^n + 2^{n-1}{y_0'}^n = z_0^n$$

を得る．$n \geqq 3$ より z_0 も偶数．

ところがこれは $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が最大公約数が 1 の解であることと矛盾する．

よって，n が 3 以上の整数のとき，

$$x^n + 2y^n = 4z^n$$

を満たす整数 $x,\ y,\ z$ は $x = y = z = 0$ 以外に存在しない．

別解次のようにしてもよい．

$x^2 + 2y^2 = 4z^2$ にすべてが 0 ではない 1 組の解 $(x_0,\ y_0,\ z_0)$ があるとする．冒頭と同様にして，$x_0,\ y_0$ は 2 の倍数である．$x_0 = 2x_1,\ y_0 = 2y_1$ とおく．

$$(2x_1)^2 + 2(2y_1)^2 = 3{z_0}^2$$

より z_0 も 2 の倍数である．$z_0 = 2z_1$ とおく．このとき再び

$${x_1}^2 + 2{y_1}^2 = 4{z_1}^2$$

と，はじめの式と同じ式になる．したがって $x_1,\ y_1,\ z_1$ が再び 3 の倍数となり，この操作は限りなく続けることができる．

つまり $x_0,\ y_0,\ z_0$ は 2 で何度でも割れる．このような数は 0 以外になく．$x_0 = y_0 = z_0 = 0$ となり．$(x_0,\ y_0,\ z_0)$ が「すべてが 0」ではない 1 組の解であったことに反した．□

解答 5.60　問題 3.29

(1) $z^9 = -1$ である．また $\bar{z} = \cos 20^\circ - i \sin 20^\circ = \dfrac{1}{z}$ である．
$z^9 + 1 = (z^3+1)(z^6 - z^3 + 1)$ で $z^3 \neq -1$ なので

$$z^6 - z^3 + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad z^3 - 1 + \frac{1}{z^3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \left(z + \frac{1}{z}\right)^3 - 3\left(z + \frac{1}{z}\right) - 1 = 0$$

つまり α は $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$ を満たすので

$$x^3 - 3x - 1 = 0$$

の解である．

注意　ド・モアブルの定理を習っていないときは，三倍角の公式でもよい．

$\alpha = z + \bar{z} = 2\cos 20^\circ$ である．三倍角の公式から

$$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$$

より

$$\frac{1}{2} = 4\left(\frac{\alpha}{2}\right)^3 - 3\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

これから $\alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0$ が導かれる．

(2) $f(x) = x^3 - 3x - 1$ とおく．$f'(x) = 3x^2 - 3$ より $f'(x) = 0$ の解は $x = \pm 1$

$$f(1) \cdot f(-1) = (-3)(1) < 0$$

であるから，　$f(x) = 0$ は異なる 3 実数解を持つ．

有理数解 $x = \dfrac{p}{q}$ $(p,\ q$ は互いに素な整数$)$ を持つとする．

$$\left(\frac{p}{q}\right)^3 - 3\left(\frac{p}{q}\right) - 1 = 0$$

より

$$p^3 - 3pq^2 - q^3 = 0$$

これから

$$p^3 = 3pq^2 + q^3 = q(3pq + q^2),\ q^3 = p(p^2 - 3q^2)$$

$p,\ q$ は互いに素な整数 なので $p = q = 1$ ．しかし $x = 1$ は明らかに解でない．よって有理数の解はない．

(3) α が二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ $(a,\ b,\ c$ 有理数$)$ の解とする．$a \neq 0$ なので a で割ることにより $x^2 + bx + c = 0$ $(b,\ c$ 有理数$)$ の解とできる．

$$\begin{cases} \alpha^3 - 3\alpha - 1 = 0 \\ \alpha^2 + b\alpha + c = 0 \end{cases}$$

$$x^3 - 3x - 1 = (x^2 + bx + c)(x - b) + (b^2 - c - 3)x + bc - 1$$

より

$$(b^2-c-3)\alpha+bc-1=0$$

つまり

$$\alpha=\frac{bc-1}{b^2-c-3},\ \text{または}\ b^2-c-3=0\ \text{かつ}\ bc-1=0$$

第 1 の場合 α は有理数であり得ないことに反する.
第 2 の場合 $c=\dfrac{1}{b}$ より $b^2-\dfrac{1}{b}-3=0$. つまり

$$b^3-3b-1=0$$

b が $x^3-3x-1=0$ の解である．ところが $x^3-3x-1=0$ は有理数の解を持ち得ないのであるから, b が有理数であることと矛盾した.

よって有理数を係数とする二次方程式で, α を解とするものは存在しないことが示された.

□

解答 5.61　問題 3.30

(1) $\log_5 3>0$ が有理数であると仮定し

$$\log_5 3=\frac{a}{b}\ (a,\ b\ \text{は自然数})$$

とおく．このとき

$$5^{\frac{a}{b}}=3 \quad\Longleftrightarrow\quad 5^a=3^b$$

5 と 3 がともに素数であるからこれはあり得ない (素因数分解の一意性).

(2) 有理数 r が負なら $\log_{10} r$ が定義されないので r は正である．$r=\dfrac{i}{j}$ ($i,\ j$ は互いに素な自然数) とおく.

(i) $r=1$ のとき．$r=10^0$ より成立.

(ii) $r>1$ のとき．$\log_{10} r=\dfrac{s}{t}$ ($s,\ t$ は互いに素な自然数) とおく.

$$\log_{10} r=\frac{s}{t} \quad\Longleftrightarrow\quad 10^{\frac{s}{t}}=r=\frac{i}{j}$$

より

$$10^s=\frac{i^t}{j^t}$$

左辺は整数で i^t と j^t も互いに素なので, $j=1$.
左辺の素因数は 2 と 5 のみで 2 と 5 が同数 (s 個ずつ) 入っている.
ゆえに i も素因数は 2 と 5 のみで, t 乗して 2 と 5 が同数になるので, i 自身 2 と 5 が同数入っていなければならない.
つまり i は 10 のべき乗で 10^q と表せる.

(iii) $r<1$ のとき．$\dfrac{1}{r}>1$ で $\log_{10} r$ が有理数なら $\log_{10}\dfrac{1}{r}=-\log_{10} r$ も有理数である．

ゆえに $\dfrac{1}{r}=10^q$ と表せる．

つまり $r=10^{-q}$ と表せる．

ゆえに $r=10^q$ $(q=0,\ \pm1,\ \pm2,\ \cdots)$ に限ることが示された．

(3) $\log_{10}(1+3+3^2+\cdots+3^n)$ が有理数と仮定する．(2) の論証から $1+3+3^2+\cdots+3^n>1$ は 10^q $(q=1,\ 2,\ \cdots)$ に限る．

$$1+3+3^2+\cdots+3^n=\frac{3^{n+1}-1}{3-1}$$

より

$$3^{n+1}=2\cdot10^q+1=2\cdot(10^q-1)+3$$

n が自然数なので 3^{n+1} は 9 の倍数である．

一方右辺は (10^q-1) が 9 の倍数なので 9 で割ると 3 余る．

両辺 9 でわった余りが異なるのでこの等式は成り立たない．

ゆえに 任意の正の整数 n に対して，$\log_{10}(1+3+3^2+\cdots+3^n)$ は無理数であることが示された．

□

解答 5.62　問題 3.31

$\tan 1^\circ$ が有理数であると仮定する．

まず $\tan n^\circ$　$(1\leqq n\leqq 89)$ が有理数となることを数学的帰納法で示す．

$n=1$ のときは仮定から有理数である．

$n=k$ のとき有理数であるとする．このとき

$$\tan(k+1)^\circ=\frac{\tan 1^\circ+\tan k^\circ}{1-\tan 1^\circ\tan k^\circ}$$

より $\tan(k+1)^\circ$ も有理数である．

したがって $\tan n^\circ$　$(1\leqq n\leqq 89)$ が有理数である．

次に $\tan 60^\circ=\sqrt{3}$ で，これが有理数となったので

$$\sqrt{3}=\frac{q}{p}$$

と分数に表される．このとき

$$3p^2=q^2$$

である．平方数の因数分解における各素因数の個数は偶数個なので，左辺の因数分解において素因数 3 は奇数個あり，右辺は偶数個ある．

これは矛盾である．

よって $\tan 1^\circ$ は無理数である．□

解答 5.63　問題 3.32

(1) $a_m > 0$ であることを数学的帰納法で示す.

定義より $a_1 = 1 > 0$．$a_{m-1} > 0$ とする．$f(x) > 0$ より

$$a_m = \int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx > 0$$

ゆえに $m \geqq 1$ に対して $a_m > 0$ である．このとき $m \geqq 2$ に対して $f(x) < 1$ なので

$$a_m = \int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx < \int_0^{a_{m-1}} 1\,dx = a_{m-1}$$

よって $a_1 > a_2 > \cdots > a_{m-1} > a_m > \cdots$ となることが示された.

(2) $\dfrac{1}{2002} > a_m$ となる m が存在しないと仮定する．つまりつねに $\dfrac{1}{2002} \leqq a_m$ が成り立つとする．これから

$$\frac{1}{2002} \leqq \lim_{m\to\infty} a_m \quad \cdots ①$$

次に α を $0 < \alpha < \dfrac{1}{2002}$ に一つとる．仮定から各 m に対して $\alpha < a_m$ である．$f(x)$ は連続関数であるから $\alpha \leqq x \leqq 1$ における最大値が存在する．それを M とする．$x > 0$ で $0 < f(x) < 1$ なので $0 < M < 1$ である.

$$\int_\alpha^{a_{m-1}} f(x)\,dx \leqq \int_\alpha^{a_{m-1}} M\,dx = M(a_{m-1} - \alpha)$$

であるが

$$\begin{aligned}\int_\alpha^{a_{m-1}} f(x)\,dx &= \int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx - \int_0^{\alpha} f(x)\,dx \\ &> \int_0^{a_{m-1}} f(x)\,dx - \int_0^{\alpha} 1\,dx = a_m - \alpha\end{aligned}$$

なので

$$a_m - \alpha < M(a_{m-1} - \alpha)$$

これから

$$a_m - \alpha < M^{m-1}(a_1 - \alpha)$$

$0 < M < 1$ であるから

$$\lim_{m\to\infty}(a_m - \alpha) = 0$$

よって

$$\lim_{m\to\infty} a_m = \alpha < \frac{1}{2002} \quad \cdots ②$$

② は ① と矛盾する．したがって $\dfrac{1}{2002} > a_m$ となる m が存在することが示された.

$\square$

解答 5.64　問題 3.33

「$|z| > \dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない」という命題の対偶は「$w = z^2 - 2z$ となる z は，$|z| \leqq \dfrac{5}{4}$ を満たす」である．この命題が成立するような w とは，つまり z の 2 次方程式

$$z^2 - 2z - w = 0$$

の 2 解がともに $|z| \leqq \dfrac{5}{4}$ を満たすような w ということである．

つまり一定の条件を満たす 2 次方程式の (複素) 定数 w の集合が T なのである．

さて，ひとつの複素数 w に対して $z^2 - 2z - w = 0$ となる z は二つある．

$$z = 1 \pm \sqrt{1+w} \text{ (ただし}\sqrt{1+w}\text{ は 2 乗して } 1+w \text{ となる複素数のひとつを表す.)}$$

それを α と β とする．解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = 2,\ \alpha\beta = -w$$

w が T に属することと，この α と β がさらに

$$|\alpha| \leqq \frac{5}{4},\ \text{かつ}\ |\beta| \leqq \frac{5}{4}$$

を満たすことが同値である．

ゆえに T に属する w に対しては

$$|w| = |\alpha\beta| \leqq \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4}$$

が成り立つ．

ここで等号が成立する α と β が存在することを示す．

$$|\alpha| = \frac{5}{4},\ \text{かつ}\ |\beta| = |2-\alpha| = \frac{5}{4}$$

$\alpha = x + iy$ とおくと

$$x^2 + y^2 = \frac{25}{16},\ \text{かつ}\ (x-2)^2 + y^2 = \frac{25}{16}$$

辺々引いて $-4x + 4 = 0$．よって $x = 1$，$y = \pm\dfrac{3}{4}$．つまり

$$\alpha = 1 \pm \frac{3i}{4},\ \beta = 1 \mp \frac{3i}{4} \text{ (複号同順)}$$

よって $|w|$ の最大値は $\dfrac{25}{16}$ で，このとき

$$w = -\alpha\beta = -\left(1 + \frac{3i}{4}\right)\left(1 - \frac{3i}{4}\right) = -\frac{25}{16}$$

である． □

5.3 4章解答

解答 5.65 問題 4.1

解 1

$$\begin{cases} mx - y + 4m + 21 = 0 & \cdots ① \\ x + my + 3m - 14 = 0 & \cdots ② \end{cases}$$

を $x,\ y$ の連立方程式と見て解く.

$$\begin{cases} m(x+4) - (y+3) + 24 = 0 \\ (x+4) + m(y+3) - 18 = 0 \end{cases}$$

であるから

$$x + 4 = \frac{-24m + 18}{m^2+1},\ y + 3 = \frac{18m + 24}{m^2+1}$$

したがって,

$$3(x+4) + 4(y+3) = \frac{150}{m^2+1} \quad \text{は 0 にならない.}$$

$$-4(x+4) + 3(y+3) = \frac{150m}{m^2+1}$$

$$\therefore \quad m = \frac{-4(x+4) + 3(y+3)}{3(x+4) + 4(y+3)}$$

これを最初の式に代入して

$$(x-5)^2 + (y-9)^2 = 15^2 \quad \text{ただし点 } (-4,\ -3) \text{ を除く}$$

解 2

条件式 ① から $x + 4 \neq 0$ のとき, $m = \dfrac{y-21}{x+4}$.

これを ② に代入して

$$(y+3) \cdot \frac{y-21}{x+4} = -x + 14$$

$$\therefore \quad (x+4)(x-14) + (y+3)(y-21) = 0$$

$x+4=0$ のとき, ① から $y = 21$. この x と y を② に代入すると, m の値が存在する. $(-4,\ 21)$ は軌跡の点.

$x+4=0$ のとき, ② から $(y+3)m = 18$. $y = -3$ のときに限り m が存在しない. つまりいかなる, m をもってしても $(-4,\ -3)$ は解になり得ない. $(-4,\ -3)$ は除外点. □

解答 5.66 問題 4.2

$\mathrm{P}(1,\ t)$, $\mathrm{Q}(X,\ Y)$ とする. 条件 1. 2. から $k < 0$ を用いて

$$(X,\ Y) = k(1,\ t)$$

とおける. 条件 3. から

$$\sqrt{X^2+Y^2} \cdot \sqrt{1+t^2} = 1 \quad \Rightarrow |k|(1+t^2) = 1$$

$k<0$ より $k=-\dfrac{1}{1+t^2}$ なので,

$$X=-\frac{1}{1+t^2},\ Y=-\frac{t}{1+t^2}$$

これから $X \neq 0$ で, $t=\dfrac{Y}{X}$. これを 2 式のいずれかに代入して整理すると

$$X^2+X+Y^2=0,\ X \neq 0$$

求める軌跡は

$$x^2+x+y^2=0,\quad (x,\ y)=(0,\ 0) \text{ を除く}.$$

□

解答 5.67 問題 4.3

(1) $\mathrm{A}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{B}(x_2,\ y_2)$ とする. A, B における接線は

$$\begin{cases} x_1x+y_1y=1 \\ x_2x+y_2y=1 \end{cases}$$

これが, いずれも $\mathrm{P}(a,\ b)$ を通るので

$$\begin{cases} x_1a+y_1b=1 \\ x_2a+y_2b=1 \end{cases} \quad \cdots ①$$

条件 ① は直線 $ax+by=1$ が A, B を通ることを示している. したがって, 直線 AB の式は

$$ax+by=1$$

一方 ① の 2 式を引くことにより,

$$a(x_1-x_2)+b(y_1-y_2)=0 \quad \cdots ②$$

また

$$x_1{}^2+y_1{}^2=1,\quad x_2{}^2+y_2{}^2=1$$

の辺々を引いて

$$(x_1-x_2)(x_1+x_2)+(y_1-y_2)(y_1+y_2)=0 \quad \cdots ③$$

②, ③ から

$$-b\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right)+a\left(\frac{y_1+y_2}{2}\right)=0$$

ゆえに AB の中点 Q は直線 $y=\dfrac{b}{a}x$ 上にある.

したがって Q は 2 直線, $ax+by=1$ と $y=\dfrac{b}{a}x$ の交点である.

これから

$$ax+b\left(\frac{b}{a}x\right)=1,\quad \therefore\quad x=\frac{a}{a^2+b^2}$$

$$\therefore \quad \mathrm{Q}\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

別解

$\triangle$OQA と $\triangle$OAP は相似である．

$$\therefore \quad \mathrm{OQ}:\mathrm{OA}=\mathrm{OA}:\mathrm{OP}$$

つまり

$$\mathrm{OQ}\cdot\mathrm{OP}=1 \quad \cdots④$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

とおける．④ に代入して

$$k=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}$$
$$\therefore \quad \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$
$$\therefore \quad \mathrm{Q}\left(\frac{a}{a^2+b^2},\ \frac{b}{a^2+b^2}\right)$$

(2) 点 Q $(X,\ Y)$ とおく．

$$X=\frac{a}{a^2+b^2},\quad Y=\frac{b}{a^2+b^2}$$

ここで

$$X^2+Y^2=\frac{a^2}{(a^2+b^2)^2}+\frac{b^2}{(a^2+b^2)^2}=\frac{1}{a^2+b^2}$$
$$\therefore \quad a=\frac{X}{X^2+Y^2},\quad b=\frac{Y}{X^2+Y^2}$$

$\mathrm{P}(a,\ b)$ が円 $(x-3)^2+y^2=1$ 上を動くので

$$\left(\frac{X}{X^2+Y^2}-3\right)^2+\left(\frac{Y}{X^2+Y^2}\right)^2=1$$

ここで $\mathrm{Q}=(0,\ 0)$ のときは A, B での接線は平行になるので $\mathrm{Q}\neq(0,\ 0)$．つまり $X^2+Y^2\neq 0$．これに注意して整理すると

$$X^2-\frac{3}{4}X+Y^2=-\frac{1}{8}$$

求める軌跡は次の円である．

$$\left(x-\frac{3}{8}\right)^2+y^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2$$

□

解答 5.68　問題 4.4

条件式を逆に解く． $x<0,\,y<0$ のとき 2 式の分母はともに 0 でないので,

$$x'=\frac{-5x-6y+7}{x+3y-5},\ y'=\frac{2x-3y-1}{x+3y-5}$$
$$\iff \quad (x+3y-5)x'=-5x-6y+7,\ (x+3y-5)y'=2x-3y-1$$

この 2 式を $x,\ y$ の連立方程式として整理すると，

$$\begin{cases} (x'+5)x+3(x'+2)y=5x'+7 & \cdots ① \\ (y'-2)x+3(y'+1)y=5y'-1 & \cdots ② \end{cases}$$

$$① \times (y'+1) - ② \times (x'+2) \text{ より}$$
$$(x'+y'+3)x = 2x'-y'+3$$
$$① \times (y'-2) - ② \times (x'+5) \text{ より}$$
$$(x'+y'+3)y = x'+2y'+1$$

$x<0, y<0$ より $x'+y'+3 \neq 0$ のとき x', y' の満たすべき条件は

$$\begin{cases} (x'+y'+3)(2x'-y'+3)<0 \\ (x'+y'+3)(x'+2y'+1)<0 \end{cases}$$

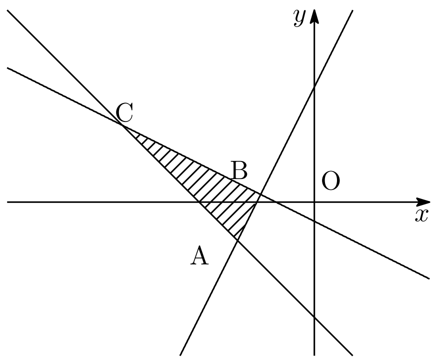
$x'+y'+3=0$ のとき② 式に $y'=-x'-3$ を代入して整理すると

$$(x'+5)x+3(x'+2)y=5x'+16$$

となり，① と両立しない．よって $x'+y'+3=0$ となる $x,\ y$ は存在しない．3 直線の交点を A, B, C とすると，

$$\mathrm{A}(-2,\ -1),\ \mathrm{B}\left(-\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}\right),\ \mathrm{C}(-5,\ 2)$$

より求める領域は図のようになる．



$\mathrm{A}(-2,\ -1)$

$\mathrm{B}\left(-\frac{7}{5},\ \frac{1}{5}\right)$

$\mathrm{C}(-5,\ 2)$

境界は含まない

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left(\frac{3}{5},\ \frac{6}{5}\right),\ \overrightarrow{\mathrm{AC}} = (-3,\ 3)$$

より，面積は

$$\frac{1}{2}\left|\frac{3}{5}\cdot 3 - \frac{6}{5}\cdot(-3)\right| = \frac{27}{10}$$

□

解答 5.69　問題 4.5

$t=\cos\theta\ (-1\leqq t\leqq 1)$ とおくと, 与式は $y=tx-(2t^2-1)$ となる.

$$
\begin{aligned}
&(X,\ Y) \text{ が通過領域の点である.}\\
\iff\ & -1\leqq t_0\leqq 1 \text{ なる } t_0 \text{ で } Y=t_0X-2{t_0}^2+1 \text{ となるものがある.}\\
\iff\ & 2t^2-Xt+Y-1=0 \text{ が } -1\leqq t\leqq 1 \text{ に解をもつ.}\\
\iff\ & f(t)=2t^2-Xt+Y-1=2\Big(t-\frac{X}{4}\Big)^2-\frac{X^2}{8}+Y-1 \text{ とおくと}
\end{aligned}
$$

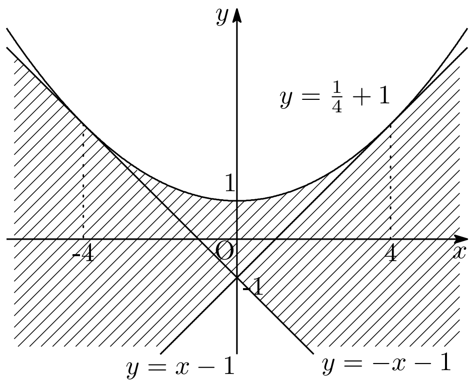
(i) $f(-1)f(1)\leqq 0$

(ii) $D=X^2-8(Y-1)\geqq 0,\ -1\leqq \dfrac{X}{4}\leqq 1,\ f(-1)\geqq 0,\ f(1)\geqq 0$

$\begin{cases} f(-1)=X+Y+1\\ f(1)=-X+Y+1\end{cases}$ より, 通過範囲は

$$
\text{(i)}\ \begin{cases} y\geqq -x-1\\ y\leqq x-1\end{cases},\ \begin{cases} y\leqq -x-1\\ y\geqq x-1\end{cases}\qquad \text{(ii)}\ \begin{cases} y\leqq \dfrac{1}{8}x^2+1\\ y\geqq -x-1\\ y\geqq x-1\\ -4\leqq x\leqq 4\end{cases}
$$

ここで, $y=\dfrac{1}{8}x^2+1$ と $y=\pm x-1$ は, $\dfrac{1}{8}x^2+1=\pm x-1$ より, $(x\mp 4)^2=0$ となるので, 接する.
□



注意　最初の考察で t_0 を用いた行は，実際の解答には書かなくてもよい．また $X,\ Y$ を用いているところも，はじめから，固定された点 $(x,\ y)$ と座標系の $x,\ y$ をあえて混同して， $x,\ y$ のままでよい.

したがって,

「点 $(x,\ y)$ が求める通過領域にあることと，二次方程式 $2t^2-xt+y-1=0$ が $-1\leqq t\leqq 1$ に解をもつことは同値である.」

のような論述でよい.

解答 5.70　　問題 4.6

直線 AB の式は

$$
\begin{aligned}
y &= \frac{-2-(-2t)}{\dfrac{2(t^2+t+1)}{3(t+1)}-\dfrac{2t}{3}}\left(x-\frac{2t}{3}\right)-2t\\
&= 3(t^2-1)x-2t^3 \quad (0\leqq t\leqq 1)
\end{aligned}
$$

点 $(X,\ Y)$ が通過領域にあるのは， t についての方程式

$$2t^3 - 3Xt^2 + Y + 3X = 0$$

が $0 \leqq t \leqq 1$ に解をもつことと同値である．

$$f(t) = 2t^3 - 3Xt^2 + Y + 3X$$

とおく． $f'(t) = 6t^2 - 6Xt = 6t(t - X)$ である．したがって，その条件は

$$\begin{cases} X \leqq 0 \text{ のとき } 0 \leqq t \leqq 1 \text{ で単調増加なので} & f(0) \leqq 0,\ f(1) \geqq 0 \\ 0 < X < 1 \text{ のとき } t = X \text{ で極小なので} & f(X) \leqq 0 \text{ かつ，} f(0) \geqq 0 \text{ または } f(1) \geqq 0 \\ 1 \leqq X \text{ のとき } 0 \leqq t \leqq 1 \text{ で単調減少なので} & f(0) \geqq 0,\ f(1) \leqq 0 \end{cases}$$

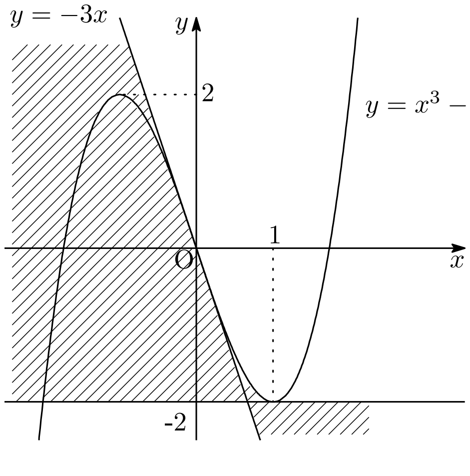
これから $(X,\ Y)$ が通過領域の点であるための必要十分条件は

$$\begin{cases} X \leqq 0, 3X + Y \leqq 0, Y + 2 \geqq 0 \\ Y - X^3 + 3X \leqq 0, 3X + Y \geqq 0 \text{ または } Y + 2 \geqq 0 \\ 1 \leqq X, 3X + Y \geqq 0, Y + 2 \leqq 0 \end{cases}$$

よって求める領域は

$$\begin{cases} x \leqq 0, y \leqq -3x, y \geqq -2 \\ 0 < x < 1,\ y \leqq x^3 - 3x, y \geqq -3x \text{ または } y \geqq -2 \\ 1 \leqq x, y \geqq -3x, y \leqq -2 \end{cases}$$

それを図示する． □



解答 5.71　問題 4.7

$y' = 3x^2 - 3a^2$ で $a > 0$ であるから $x = -a$ で極大， $x = a$ で極小である．

したがって点 $(x,\ y)$ が求める領域の点であることは，

$$y = x^3 - 3a^2x + a^2,\ -a < x < a,\ 0 < a < 1$$

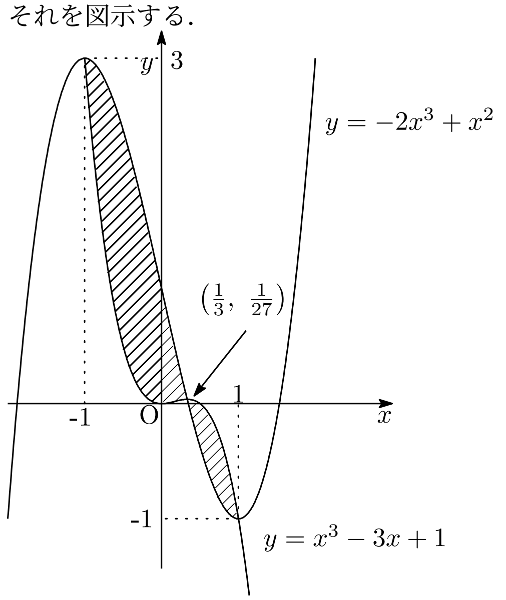
を満たす a が存在することと同値である．すなわち

$$a^2(1 - 3x) + x^3 - y = 0,\ x^2 < a^2 < 1$$

となる a が存在すればよい．

$$\begin{cases} 1-3x=0 \text{ のとき} \quad y=\dfrac{1}{27}\text{のときのみ．} & \therefore \quad \left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{27}\right)\text{は適} \\ 1-3x>0 \text{ のとき} \quad a^2=\dfrac{x^3-y}{3x-1} & \therefore \quad x^2(3x-1)<x^3-y<3x-1 \\ 1-3x<0 \text{ のとき} \quad \text{同様に} & \therefore \quad x^2(3x-1)>x^3-y>3x-1 \end{cases}$$

それを図示する．



□

解答 5.72　問題 4.8

(1) $\theta=\dfrac{\pi}{4}$ より $x=\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ y=1-t^2+\dfrac{t}{\sqrt{2}}$．点 Q は x 軸との交点なので $y=0$ のときである．このとき

$$t^2-\frac{t}{\sqrt{2}}-1=(t-\sqrt{2})\left(t+\frac{1}{\sqrt{2}}\right)=0$$

$x \geqq 0$ より $t=\sqrt{2}$ で，このとき $x=1$

(2) 点 $(x,\ y)$ が C が通過する範囲の点であることは，

$$x=t\cos\theta,\ y=1-t^2+t\sin\theta$$

をみたす実数 $t,\ \theta\ (0 \leqq \theta < 2\pi)$ が存在することと同値である．

$t=0$ のときは $x=0,\ y=1$ で条件を満たす．$t \neq 0$ のときは

$$\cos\theta=\frac{x}{t},\ \sin\theta=\frac{y-1+t^2}{t}$$

これを満たす θ が存在することと，t が関係式

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2+\left(\frac{y-1+t^2}{t}\right)^2=1$$

をみたすことが同値．これを整理して

$$t^4+(2y-3)t^2+x^2+y^2-2y+1=0 \quad \cdots ①$$

これは $t=0$ のとき $x=0,\ y=1$ を含む．

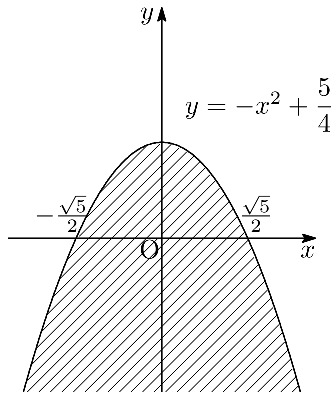
ゆえに ① をみたす実数 t が存在する条件が，点 $(x,\ y)$ の満たすべき条件である，

$s=t^2$ とし，$f(s)=s^2+(2y-3)s+x^2+y^2-2y+1$ とする．s の二次方程式 $f(s)=0$ が負でない解をもてばよい．

判別式 $D=(2y-3)^2-4(x^2+y^2-2y+1)\geqq 0$ が必要で，これから $y\leqq -x^2+\dfrac{5}{4}$ を得る．

このとき $y\leqq\dfrac{5}{4}$ なので，軸 $s=-\dfrac{2y-3}{2}>0$．ゆえに正の解が存在する．

つまり求める必要十分条件が $y\leqq -x^2+\dfrac{5}{4}$ である．



(3) Q の x 座標の最大値は (2) から $\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ である．$x=\dfrac{\sqrt{5}}{2},\ y=0$ のとき．① は

$$t^4-3t^2+\frac{9}{4}=\left(t^2-\frac{3}{2}\right)^2=0$$

となる．これから $t=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}$．このとき

$$\begin{cases}\dfrac{\sqrt{5}}{2}=\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\cos\theta\\[2mm] 0=1-\dfrac{3}{2}\pm\sqrt{\dfrac{3}{2}}\sin\theta\end{cases}$$

$$\therefore\quad \tan\theta=\frac{1}{2}\div\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

□

解答 5.73 問題 4.9

(1) 二つの放物線 $y=f(x)$ と $y=g(x)$ が二つの共有点をもつことは，それらの曲線の方程式を連立させて y を消去した

$$x^2-3=-2(x-a)^2+\frac{a^2}{3} \quad \cdots ①$$

が，相異なる二つの実数解をもつことと同値である．① を整理して

$$3x^2-4ax+\frac{5a^2}{3}-3=0$$

したがって

$$D/4=4a^2-5a^2+9>0$$

これから

$$-3 < a < 3$$

(2) ① の二つの解を $\alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とする．解と係数の関係から

$$\alpha + \beta = \frac{4a}{3},\ \alpha\beta = \frac{1}{3}\left(\frac{5a^2}{3} - 3\right)$$

C_a の面積を S_a とすると

$$\begin{aligned} S_a &= \int_\alpha^\beta \left\{-2(x-a)^2 + \frac{a^2}{3} - x^2 + 3\right\} dx \\ &= \int_\alpha^\beta -3(x-\alpha)(x-\beta)\, dx \\ &= \frac{(\beta-\alpha)^3}{2} \end{aligned}$$

ここで

$$\begin{aligned} (\beta-\alpha)^2 &= (\beta+\alpha)^2 - 4\alpha\beta \\ &= \left(\frac{4a}{3}\right)^2 - \frac{4}{3}\left(\frac{5a^2}{3} - 3\right) \\ &= \frac{4}{9}(9-a^2) \end{aligned}$$

$$\therefore\quad S_a = \frac{1}{2}\left(\frac{4}{9}(9-a^2)\right)^{\frac{3}{2}} = \frac{4}{27}(9-a^2)^{\frac{3}{2}}$$

(3) a が (1) で求めた範囲を動くとき，点 $(X,\ Y)$ が，少なくとも 1 つの C_a に属するための必要十分条件は

$$X^2 - 3 \leqq Y \leqq -2(X-a)^2 + \frac{a^2}{3},\ -3 < a < 3$$

となる a が存在することである．

$Y \leqq -2(X-a)^2 + \dfrac{a^2}{3}$ は

$$\frac{5a^2}{3} - 4Xa + 2X^2 + Y \leqq 0$$

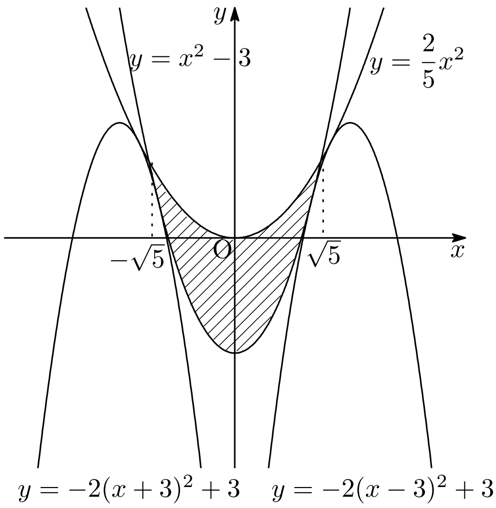
である．ここで $h(a) = \dfrac{5a^2}{3} - 4Xa + 2X^2 + Y$ とおく．

$-3 < a < 3$ の範囲で $h(a) \leqq 0$ となる a が存在する条件は，軸 $a = \dfrac{6X}{5}$ で場合に分けて

$$\begin{cases} h(-3) < 0 & \left(\dfrac{6X}{5} \leqq -3\right) \\ h\left(\dfrac{6X}{5}\right) \leqq 0 & \left(-3 < \dfrac{6X}{5} < 3\right) \\ h(3) < 0 & \left(3 \leqq \dfrac{6X}{5}\right) \end{cases}$$

これから変数を x と y にして

$$\begin{cases} y < -2(x+3)^2+3 & \left(x \leqq -\dfrac{5}{2}\right) \\ y \leqq \dfrac{2}{5}x^2 & \left(-\dfrac{5}{2} < x < \dfrac{5}{2}\right) \\ y < -2(x-3)^2+3 & \left(\dfrac{5}{2} \leqq x\right) \end{cases}$$



これと $x^2 - 3 \leqq y$ の共通領域が，条件を満たす点の集合である．
$y = -2(x \pm 3)^2 + 3$ と $y = \dfrac{2}{5}x^2$ は $x = \mp\dfrac{5}{2}$ で接し，$y = \dfrac{2}{5}x^2$ と $y = x^2 - 3$ は $x = \pm\sqrt{5}$ で交わる．また $y = -2(x \pm 3)^2 + 3$ と $y = x^2 - 3$ は $x = \pm 2$ で接する．このことに注意して図示すると右のようになる．
ゆえにその面積は

$$\int_{-\sqrt{5}}^{\sqrt{5}} \left(\frac{2}{5}x^2 - x^2 + 3\right) dx = \frac{3}{5} \cdot \frac{(2\sqrt{5})^3}{6} = 4\sqrt{5}$$

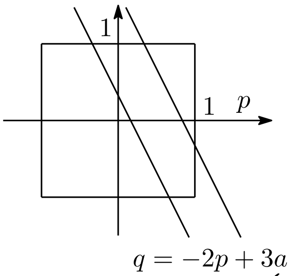
□

解答 5.74　問題 4.10
(1)
$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく．線分 PQ を 1 : 2 に内分する点 R の座標を $(a,\ b)$ とする．このとき，

$$a = \frac{2p+q}{3},\ b = \frac{2p^2+q^2}{3}$$

である．p を $-p$ に，q を $-q$ に置きかえると a は $-a$ になり，b は変化しない．よって領域 D は y 軸に関して対称であり，a を $0 \leqq a \leqq 1$ の範囲で固定して考えればよい．
q を消去して

$$b = \frac{1}{3}\left\{2p^2 + (3a-2p)^2\right\} = 2(p-a)^2 + a^2$$



ここで pq 平面に直線 $q = -2p + 3a$ と領域 $-1 \leqq p \leqq 1$，$-1 \leqq q \leqq 1$ を図示して p の変域を求める．
直線 $q = -2p + 3a$ と領域 $-1 \leqq p \leqq 1$，$-1 \leqq q \leqq 1$ の共有部分が p の変域を与える．$q = \pm 1$ のとき $p = \dfrac{\mp 1 + 3a}{2}$ なので，図から

$$\begin{cases} \dfrac{-1+3a}{2} \leqq p \leqq \dfrac{1+3a}{2} & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3} \text{のとき}\right) \\ \dfrac{-1+3a}{2} < p \leqq 1 & \left(\dfrac{1}{3} < a \leqq 1 \text{ のとき}\right) \end{cases}$$

となる．p がこの変域を動くときの p の 2 次関数 $b=2(p-a)^2+a^2$ の値域が，a を固定したとき点 (a,b) が D に属するための b の条件である．

軸 $p=a$ は条件 $0 \leqq a \leqq 1$ によってつねに p の変域の内にある．よって b の最小値はつねに a^2 である．また p の変域の中点はそれぞれ $\dfrac{3a}{2}$，$\dfrac{3a+1}{2}$ であり，a はこれより小さいので，最大値は変域の右端でとる．

$$\begin{cases} a^2 \leqq b \leqq 2\left(\dfrac{3a+1}{2}-a\right)^2+a^2=\dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2} & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}\text{のとき}\right) \\ a^2 \leqq b \leqq 2(1-a)^2+a^2=3a^2-4a+2 & \left(\dfrac{1}{3} < a \leqq 1\text{ のとき}\right) \end{cases}$$

である．対称性を考え $-1 \leqq a \leqq 1$ における b の条件は次のようになる．

これから b の条件を a で表すと，

$$\begin{cases} a^2 \leqq b \leqq 3a^2+4a+2 & \left(-1 \leqq a < -\dfrac{1}{3}\right) \\ a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2-a+\dfrac{1}{2} & \left(-\dfrac{1}{3} \leqq a < 0\right) \\ a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2+a+\dfrac{1}{2} & \left(0 \leqq a \leqq \dfrac{1}{3}\right) \\ a^2 \leqq b \leqq 3a^2-4a+2 & \left(\dfrac{1}{3} < a \leqq 1\right) \end{cases}$$

(2)

これを満たす $(a,\ b)$ の集合が D である．

これを図示すればよい．$y=3x^2 \pm 4x+2$ と $y=\dfrac{3}{2}x^2 \mp x+\dfrac{1}{2}$ は

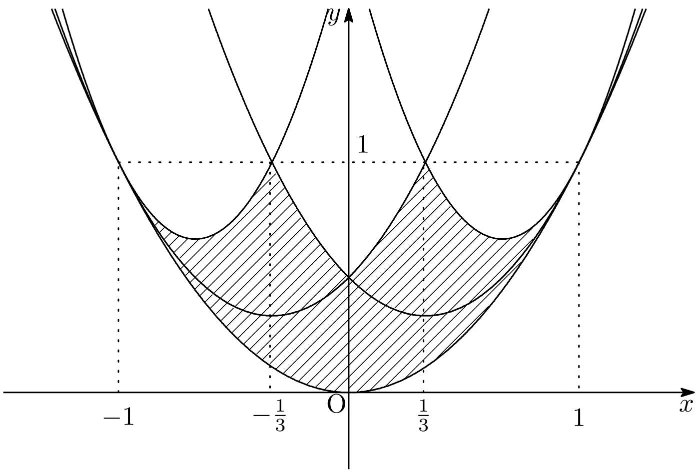
$$3x^2 \pm 4x+2=\frac{3}{2}x^2 \mp x+\frac{1}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad (3x \pm 1)(x \pm 3)=0$$

から $x=\mp\dfrac{1}{3}$ で交わる．また $y=3x^2 \pm 4x+2$ と $y=\dfrac{3}{2}x^2 \pm x+\dfrac{1}{2}$ の $y=x^2$ との位置関係は

$$\begin{aligned} 3x^2 \pm 4x+2=x^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad 2(x \pm 1)^2=0 \\ \frac{3}{2}x^2 \pm x+\frac{1}{2}=x^2 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{2}(x \pm 1)^2=0 \end{aligned}$$

よりともに $x=\mp 1$ で接する．

以上をもとに図示すると次のようになる．



$\square$

解答 5.75　問題 4.11

(1)

$$P(x)-a=(x+a)^2Q(x)+px+q$$

とおく．x に $-x$ を代入する．

$$P(-x)-a=(-x+a)^2Q(-x)-px+q$$

$P(-x)=-P(x)$ より両辺を (-1) で割って

$$P(x)+a=(x-a)^2\{-Q(-x)\}+px-q$$

第二の条件から $px-q=0$．ゆえに $p=q=0$．したがって $P(x)-a$ は $(x+a)^2$ で割り切れることが示された．

(2) $P(x)=x^5+ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$ とおく．第一の条件から

$$P(x)=-(-x^5+ax^4-bx^3+cx^2-dx+e)=x^5-ax^4+bx^3-cx^2+dx-e$$

ゆえに $a=-a,\ c=-c,\ e=-e$ よりこれらは 0．このとき $P(x)+1=x^5+bx^3+dx+1$．これを $(x-1)^2$ で割ると余りは $(3b+d+5)x-2b-3$．

この余りが 0 なので，$3b+d+5=0,\ -2b-3=0$ より $b=-\dfrac{3}{2},\ c=-\dfrac{1}{2}$．

$$\therefore\quad P(x)=x^5-\frac{3}{2}x^3-\frac{1}{2}x$$

(1) の別解　$P(x)+a$ が $(x-a)^2$ で割りきれるので

$$P(a)+a=P'(a)=0$$

次に $P(x)=-P(-x)$ の両辺を x で微分して

$$P'(x)=P'(-x)$$

あわせて

$$P(-a)-a=-\{P(a)+a\}=0,\ P'(-a)=P'(a)=0$$

なので $P(x)+a$ は $(x+a)^2$ で割りきれる．

注意

(1) 整式 $f(x)$ を整式 $g(x)$ で割ったとき，商が $Q(x)$ で余りが $R(x)$ であるときの除法の式

$$f(x)=g(x)Q(x)+R(x)$$

は x の恒等式である．

(2) 恒等式は微分しても恒等式である．

$\square$

解答 5.76　問題 4.12

$A(x)=px^3+qx^2+rx+1$ とおく．このとき

$$\begin{aligned} A(2x+1) &= 8px^3+4(3p+q)x^2+2(3p+2q+r)x+p+q+r+1 \\ &= c(px^3+qx^2+rx+1) \end{aligned}$$

係数を比較して

$$\begin{cases} 8p=cp \\ 4(3p+q)=cq \\ 2(3p+2q+r)=cr \\ p+q+r+1=c \end{cases}$$

第一式から $p\neq 0$ に注意して $c=8$．このとき第二式以下は $p,\ q,\ r$ の連立方程式になるのでこれを解いて， $p=1,\ q=3,\ r=3$ を得る．

$$\therefore\quad A(x)=x^3+3x^2+3x+1=(x+1)^3,\qquad c=8$$

別解　$A(0)=1$ であり，条件式の最高次の項の係数比較から $c=8$ である．

$x=-1$ を代入して $A(-1)=8A(-1)$．これから $A(-1)=0$．同様に

$$A(1)=cA(0)=8,\ A(3)=cA(1)=8^2=4^3$$

したがって

$$A(-1)=\{(-1)+1\}^3,\ A(0)=(0+1)^3,\ A(1)=(1+1)^3,\ A(3)=(3+1)^3$$

が成立し，$A(x)=(x+1)^3$ が $x=-1,\ 0,\ 1,\ 3$ で成立した．$A(x)$ は 3 次式なので，これは恒等式である．

$$\therefore\quad A(x)=(x+1)^3$$

$\square$

解答 5.77　問題 4.13

$f(x)$ が定数なら $f(x)=1$ であるがこれは題意をみたさない．

$f(x)$ を n 次式とし，$f(x)=x^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_0$ とおく．

$$\begin{aligned} & (x+1)f(x+1)-xf(x) \\ =\ & (x+1)^{n+1}+a_{n-1}(x+1)^n+\cdots+a_0(x+1)-(x^{n+1}+a_{n-1}x^n+\cdots+a_0x) \\ =\ & (n+1)x^n+[n-1\text{ 次以下の項}] \\ & f(x+2)+2f(x-1) \\ =\ & 3x^n+[n-1\text{ 次以下の項}] \end{aligned}$$

ゆえに $n=2$ である．

$f(x)=x^2+bx+c$ とおく．条件式に $x=0,\ 1$ を代入すると

$$\begin{cases} f(1)=f(2)+2f(-1) \\ 2f(2)-f(1)=f(3)+2f(0) \end{cases}$$
$$\iff \begin{cases} 1+b+c=(4+2b+c)+2(1-b+c) \\ 2(4+2b+c)-(1+b+c)=(9+3b+c)+2c \end{cases}$$
$$\iff b=3,\ c=-1$$

が必要である．

問題の条件式は両辺二次式であるが，二次の項が一致するように次数を定めたので，それを除くと一次式である．したがって $n=2$ の下では，$x=0,\ 1$ で条件式が成立すれば恒等的に成立する．つまり $b=3,\ c=-1$ は十分条件である．

$$\therefore\quad f(x)=x^2+3x-1$$

□

解答 5.78　問題 4.14

(1) C_1 と C_2 の共有点を $(\alpha,\ \beta)$ とする．

$$f(\alpha,\ \beta)=0,\ g(\alpha,\ \beta)=0$$

である．従って任意の k に対して

$$f(\alpha,\ \beta)+kg(\alpha,\ \beta)=0$$

つまり，曲線 D は C_1 と C_2 の共有点を通る．

(2) 2 直線 $ax+by+c=0$ と $px+qy+r=0$ の交点を通る直線を

$$ax+by+c+k(px+qy+r)=0$$

とおく．これが $(x_0,\ y_0)$ を通るので，

$$ax_0+by_0+c+k(px_0+qy_0+r)=0$$

$px_0+qy_0+r\neq 0$ なので，$\quad k=-\dfrac{ax_0+by_0+c}{px_0+qy_0+r}$ である．これから求める直線の式は

$$(ax_0+by_0+c)(px+qy+r)-(px_0+qy_0+r)(ax+by+c)=0$$

(3) 3 接点 $\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2,\ \mathrm{P}_3$ での接線は

$$\begin{cases} \mathrm{P}_1\text{での接線：}x_1x+y_1y-r^2=0 \\ \mathrm{P}_2\text{での接線：}x_2x+y_2y-r^2=0 \\ \mathrm{P}_3\text{での接線：}x_3x+y_3y-r^2=0 \end{cases}$$

従って 3 直線の三つの交点と対応する対辺の接点を結ぶ式は (2) より，

$$\begin{cases} (x_1x_3+y_1y_3-r^2)(x_2x+y_2y-r^2)-(x_2x_3+y_2y_3-r^2)(x_1x+y_1y-r^2)=0\ \cdots① \\ (x_3x_2+y_3y_2-r^2)(x_1x+y_1y-r^2)-(x_1x_2+y_1y_2-r^2)(x_3x+y_3y-r^2)=0\ \cdots② \\ (x_2x_1+y_2y_1-r^2)(x_3x+y_3y-r^2)-(x_3x_1+y_3y_1-r^2)(x_2x+y_2y-r^2)=0\ \cdots③ \end{cases}$$

ところが,

$$[\text{式①の左辺}] + [\text{式②の左辺}] + [\text{式③の左辺}] = 0$$

なので 式① と 式② を満たす点は 式③ も満たす．つまり 2 直線の交点を第 3 の直線も通るので，3 直線は 1 点で交わる．

$\square$

解答 5.79　問題 4.15

(1) (1) は (2) を解けばよい．

(2) $P(x)$ を $(x-1)(x-2)\cdots(x-n)$ で割った商を $Q(x)$，余りを $R(x)$ とする．

$$P(x) = Q(x)(x-1)(x-2)\cdots(x-n) + R(x)$$

$P(x)$ を $x-k$ で割った余りが k なので

$$P(k) = Q(k)(k-1)(k-2)\cdots(k-n) + R(k) = R(k) = k$$

つまり $R(k) = k$ が $k = 1, 2, \cdots, n$ について成り立つ．

これは左辺が $n-1$ 次の整式 $R(x)$ について $R(x) = x$ が，n 個の異なる x の値 $x = k$ ($k = 1, 2, \cdots, n$) で成立することを示している．

ゆえにこれは恒等式である．つまり求める余りは x である．

$\square$

解答 5.80　問題 4.16

(1) 一般に関数 $y = f(x)$ のグラフを $x = a$ で対称に変換したグラフの関数は $y = f(2a - x)$ である．

$f(x) = \cos\left(\dfrac{x-a}{b-a}\pi\right)$ とする．

$f(x)$ は $-\infty < x < \infty$ で定義され,

$$\begin{aligned} f(2a-x) &= \cos\left(\frac{2a-x-a}{b-a}\pi\right) \\ &= \cos\left(-\frac{x-a}{b-a}\pi\right) \\ &= f(x) \\ f(2b-x) &= \cos\left(\frac{2b-x-a}{b-a}\pi\right) \\ &= \cos\left\{\left(2+\frac{a-x}{b-a}\right)\pi\right\} \\ &= f(x) \end{aligned}$$

より $y = f(x)$ は $x = a,\ x = b$ に関して対称である．したがって条件をみたしている．

(2) 題意より

$$f(2a-x)=f(x),\ f(2b-x)=f(x)$$

が成り立つ．ところがこのとき任意の実数 x_0 に対し

$$\begin{aligned} f(x_0) &= f(2a-x_0) \\ &= f(2b-(2a-x_0))=f(2b-2a+x_0) \end{aligned}$$

が成り立つ．よって

$$f(x_0)=\cdots f(2kb-2ka+x_0)\ (k=1,\ 2,\ \cdots)$$

となる．$a<b$ よりこれは

$$f(x_0)=f(x) \quad \cdots ①$$

を満たす x の値が無数にあることを意味する．

$f(x)$ が整式であるから，① は恒等式である．つまり $f(x)$ は定数である．

□

解答 5.81　問題 4.17

$V(\mathrm{ABCD})$ で四面体 ABCD の体積を表す．

四面体 ABCD と四面体 PBCD は，ともに底面が △BCD であり，頂点 A からと頂点 P から底面への x 垂線の足の長さの比は AS : PS に等しい．

$$\therefore \quad \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{PS}}=\frac{V(\mathrm{ABCD})}{V(\mathrm{PBCD})}$$

ここで $v=V(\mathrm{ABCD})$ とおきさらに.

$$x=V(\mathrm{PBCD}),\ y=V(\mathrm{PACD}),\ z=V(\mathrm{PABD}),\ w=V(\mathrm{PABC})$$

とおく.

$$\begin{aligned} & \frac{\mathrm{AS}}{\mathrm{PS}}+\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{PT}}+\frac{\mathrm{CU}}{\mathrm{PU}}+\frac{\mathrm{DV}}{\mathrm{PV}} \\ =& \frac{v}{x}+\frac{v}{y}+\frac{v}{z}+\frac{v}{w} \\ =& v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right) \end{aligned}$$

である.

四面体 ABCD は 4 つの四面体 PBCD，PACD，PABD，PABC に分割されるので

$$x+y+z+w=v$$

が成り立つ.

ここで相加相乗平均の関係より

$$\begin{aligned}
& v\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right) \\
= \quad & (x+y+z+w)\cdot\left(\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}+\frac{1}{w}\right) \\
= \quad & 4+\left(\frac{y}{x}+\frac{x}{y}\right)+\left(\frac{z}{y}+\frac{y}{z}\right)+\left(\frac{w}{z}+\frac{z}{w}\right)+\left(\frac{x}{w}+\frac{w}{x}\right) \\
\geqq \quad & 4+2\sqrt{\frac{y}{x}\cdot\frac{x}{y}}+2\sqrt{\frac{z}{y}\cdot\frac{y}{z}}+2\sqrt{\frac{w}{z}\cdot\frac{z}{w}}+2\sqrt{\frac{x}{w}\cdot\frac{w}{x}}=12
\end{aligned}$$

等号成立は $x=y=z=w=\dfrac{v}{4}$ のとき.

これを実現する点 P は適当な基準点 O によって次式で定まる点である.

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right) \quad \cdots ①$$

実際このとき

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{4}\left(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$$

となり $\overrightarrow{\mathrm{AS}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと，S は △BCD 上の点なので，

$$\frac{k}{4}+\frac{k}{4}+\frac{k}{4}=1$$

つまり $k=\dfrac{4}{3}$．したがって点 P は線分 AS を $3:1$ に内分する点である．つまり，$\mathrm{AS}:\mathrm{PS}=4:1$ であるから $x=\dfrac{v}{4}$ である．y, z, w についても同様なので，この点 P のとき確かに等号が成立する．

最小値は 12 で最小値を与える点 P は ① で定まる点 (四面体 ABCD の重心) である．

□

解答 5.82　問題 4.18

示すべき式は a, b, c で対称である．ゆえに $a \leqq b \leqq c$ として一般性を失わない．

この場合，三角形の成立条件は $c<a+b$ である．つまり $\dfrac{c}{a+b}<1$．また，

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a} \leqq \frac{a}{a+c}+\frac{c}{c+a}=1$$

であるから

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}<2$$

が示された．

一方

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}+3 \\
= \quad & \frac{a+b+c}{b+c}+\frac{a+b+c}{c+a}+\frac{a+b+c}{a+b}=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)
\end{aligned}$$

である．ところが，コシー・シュワルツの不等式から

$$\begin{aligned}
& 2(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \\
= \;& \{(a+b)+(b+c)+(c+a)\}\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right) \\
\geqq \;& (1+1+1)^2=9
\end{aligned}$$

したがって

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)\geqq\frac{9}{2}$$

つまり

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqq\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

等号成立は $a=b=c$ のとき．

別解

$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{a}{b+c}+\dfrac{b}{c+a}+\dfrac{c}{a+b}$ は次のように力ずくでもできる．

$$\begin{aligned}
& \frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}-\frac{3}{2} \\
= \;& \frac{2a(c+a)(a+b)+2b(b+c)(a+b)+2c(b+c)(c+a)-3(a+b)(b+c)(c+a)}{2(a+b)(b+c)(c+a)}
\end{aligned}$$

で，この分子は

$$\begin{aligned}
& 2a(c+a)(a+b)+2b(b+c)(a+b)+2c(b+c)(c+a)-3(a+b)(b+c)(c+a) \\
= \;& 2a^3+2b^3+2c^3+6abc+2(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2) \\
& \quad -3(a^2b+ab^2+b^2c+bc^2+c^2a+ca^2+2abc) \\
= \;& a^2(a-b)+a^2(a-c)+b^2(b-c)+b^2(b-a)+c^2(c-a)+c^2(c-b) \\
= \;& (a-b)^2(a+b)+(b-c)^2(b+c)+(c-a)^2(c+a)\geqq 0
\end{aligned}$$

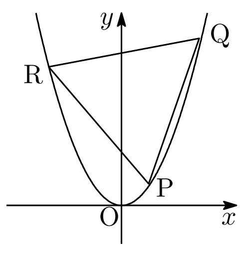
□

解答 5.83　問題 4.19

【解法 1】

(1) 辺 PQ の傾きは

$$\frac{p^2-q^2}{p-q}=p+q$$



である． PQ が x 軸の正の方向となす角を α とする．

$$p+q=\tan\alpha$$

である．左回りに P，Q，R をとると，QR がが x 軸の正の方向となす角は $\alpha-\dfrac{\pi}{3}$ である．

$$\therefore\quad q+r=\tan\left(\alpha-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\tan\alpha-\tan\dfrac{\pi}{3}}{1+\tan\alpha\tan\dfrac{\pi}{3}}=\frac{p+q-\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}(p+q)}$$

$$\therefore \qquad q+r+\sqrt{3}(p+q)(q+r)=p+q-\sqrt{3}$$

これから

$$\sqrt{3}(p+q)(q+r)=p-r-\sqrt{3}$$

他の辺の関係も同じなので，

$$\begin{aligned}\sqrt{3}(q+r)(r+p)&=q-p-\sqrt{3}\\ \sqrt{3}(r+p)(p+q)&=r-q-\sqrt{3}\end{aligned}$$

これら 3 式を辺々加える．

$$\begin{aligned}&\sqrt{3}\{p^2+q^2+r^2+3(pq+qr+rp)\}=-3\sqrt{3}\\ \therefore\quad &p^2+q^2+r^2=-3(pq+qr+rp)-3\end{aligned}$$

(2) 重心の座標を $(X,\ Y)$ とおく．

$$X=\frac{p+q+r}{3},\ Y=\frac{p^2+q^2+r^2}{3}$$

となる．

$$pq+qr+rp=\frac{(p+q+r)^2-(p^2+q^2+r^2)}{2}=\frac{(3X)^2-(3Y)}{2}$$

なので，(1) の結果に代入して，

$$3Y=\frac{-3\{(3X)^2-(3Y)\}}{2}-3$$

これから

$$Y=9X^2+2$$

となり，△PQR の重心は放物線 $y=9x^2+2$ の上にある．

【解法 2】

(1) 正三角形の 1 辺を a とする．

$$(p-q)^2+(p^2-q^2)^2=a^2 \tag{5.1}$$

$$(q-r)^2+(q^2-r^2)^2=a^2 \tag{5.2}$$

$$(r-p)^2+(r^2-p^2)^2=a^2 \tag{5.3}$$

(5.1) − (5.2) より

$$\begin{aligned}&p^2-r^2-2pq+2qr+p^4-r^4-2p^2q^2+2q^2r^2\\ =\quad&(p-r)\{p+r-2q+(p+r)(p^2+r^2-2q^2)\}=0\end{aligned}$$

$p-r\neq 0$ なので

$$p+r-2q+(p+r)(p^2+r^2-2q^2)=0 \tag{5.4}$$

$$\text{同様に}\qquad q+p-2r+(q+p)(q^2+p^2-2r^2)=0 \tag{5.5}$$

(5.4) − (5.5) より

$$\begin{aligned}
& 3r-3q+p^3+pr^2-2pq^2+p^2r-2q^2r+r^3 \\
& \qquad -(q^3-2pr^2+pq^2+p^2q-2qr^2+p^3) \\
=\ & 3(r-q)+3p(r^2-q^2)+p^2(r-q)+2qr(r-q)+r^3-q^3 \\
=\ & (r-q)\{3+3p(r+q)+p^2+2qr+r^2+rq+q^2\}=0
\end{aligned}$$

$r-q \neq 0$ なので

$$\begin{aligned}
& 3+3p(r+q)+p^2+2qr+r^2+rq+q^2 \\
=\ & p^2+q^2+r^2+3(pq+qr+rp)+3=0 \\
\therefore\ & p^2+q^2+r^2=-3(pq+qr+rp)-3
\end{aligned}$$

(2)【解法 1】と同じ. □

解答 5.84 問題 4.20

条件は y と z に関して対称である.

$$x(y+z)+yz=1,\quad xyz=ax+(y+z)$$

$p=y+z,\ q=yz$ とおくと

$$xp+q=1 \quad \cdots ①,\quad -p+xq=ax \quad \cdots ②$$

これを p と q の連立 1 次方程式として解く. ① $\times x-$ ②, および ① $+$ ② $\times x$ から

$$(x^2+1)p=x-ax,\ (1+x^2)q=1+ax^2$$

x は実数なので $x^2+1 \neq 0$. ゆえに

$$p=\frac{x-ax}{x^2+1},\ q=\frac{1+ax^2}{x^2+1}$$

y と z は 2 次方程式

$$t^2-pt+q=0$$

の 2 つの解. これが共に実数になるために, 判別式を D とすると

$$\begin{aligned}
D=p^2-4q &= \left(\frac{x-ax}{x^2+1}\right)^2-4\left(\frac{1+ax^2}{x^2+1}\right) \\
&= \frac{(x-ax)^2-4(1+ax^2)(x^2+1)}{(x^2+1)^2} \\
&= \frac{-4ax^4+(a^2-6a-3)x^2-4}{(x^2+1)^2} \geqq 0
\end{aligned}$$

つまり

$$4ax^4-(a^2-6a-3)x^2+4 \leqq 0 \quad \cdots ③$$

y と z で実数となるものが存在するためには ③ を満たす実数 x が存在すればよい.

これは x^2 に関する 2 次不等式である．$x^2=X$ とおき

$$f(X)=4aX^2-(a^2-6a-3)X+4$$

とする．$X \geqq 0$ かつ $f(X) \leqq 0$ となる X が存在する条件を求めればよい．

$f(0)=4>0$ なので，$a<0$ は条件を満たす．

$a=0$ のときは，$f(X)=3X+4$．$X \geqq 0$ ではつねに $f(X)>0$ なので条件を満たさない．

$a>0$ のとき．軸 >0．判別式 $D' \geqq 0$ が条件である．これから

$$\frac{a^2-6a-3}{8a}>0, \iff a<3-2\sqrt{3},\ 3+2\sqrt{3}<a$$

また

$$D'=(a^2-6a-3)^2-64a=(a-1)^3(a-9) \geqq 0$$

あわせて，$9 \leqq a$ である．

したがって実数 x，y，z が存在するための実数 a の条件は

$$a<0,\ \text{または}\ 9 \leqq a$$

である． □

解答 5.85　問題 4.21

解 1

n 両編成で隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方が a_n 通りあるとする．そのうち，n 番目の列車が赤色である塗り方が x_n 通り，n 番目の列車が青色である塗り方が y_n 通り，n 番目の列車が黄色である塗り方が z_n 通りとする．

$n+1$ 番目の列車を赤色にできるために n 番目の列車の色はいずれでもよく，$n+1$ 番目の列車を青色か黄色にできるために n 番目の列車は赤色でなければならない．

$$\therefore \quad \begin{cases} x_{n+1}=x_n+y_n+z_n \\ y_{n+1}=x_n \\ z_{n+1}=x_n \end{cases}$$

これから

$$x_{n+2}=x_{n+1}+y_{n+1}+z_{n+1}=x_{n+1}+2x_n \quad \cdots ①$$

① は

$$\begin{aligned} x_{n+2}+x_{n+1} &= 2(x_{n+1}+x_n) \\ x_{n+2}-2x_{n+1} &= -(x_{n+1}-2x_n) \end{aligned}$$

と変形できる．ゆえに

$$\begin{aligned} x_{n+1}+x_n &= 2^{n-2}(x_3+x_2) \\ x_{n+1}-2x_n &= (-1)^{n-2}(x_3-2x_2) \end{aligned}$$

$$3x_n=2^{n-2}(x_3+x_2)-(-1)^{n-2}(x_3-2x_2)$$

である．ここで，$x_2=3$, $y_2=z_2=1$ なので，$x_3=5$ となる．

$$x_n=\frac{2^{n+1}+(-1)^n}{3}$$

$a_n=x_n+y_n+z_n=x_{n+1}$ なので，

$$a_n=\frac{2^{n+2}-(-1)^n}{3}$$

解 2

n 両編成で隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方が a_n 通りあるとする．

$n+2$ 両編成の場合の色の塗り方を次のように場合に分ける，

(i) $n+2$ 番目の列車が赤色である場合．このときは $n+1$ 以下の車両の塗り方は，条件を満たす範囲で任意なので a_{n+1} 通りある，

(ii) $n+2$ 番目の列車が青色であるである場合．このときは $n+1$ 番の列車は赤でなければならず，n 以下の車両の塗り方は，条件を満たす範囲で任意なので a_n 通りある，

(iii) $n+2$ 番目の列車が黄色であるである場合．このときは $n+1$ 番の列車は赤でなければならず，n 以下の車両の塗り方は，条件を満たす範囲で任意なので a_n 通りある，

これらの総計が a_{n+2} である．ゆえに

$$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$$

(以下，漸化式を解くのは解 1 と同じ．) □

解答 5.86　問題 4.22

第 $n+1$ 世代に m 個となるのは，n 世代に $m-r$ 個で，そのうちの r 個が 2 個に分裂する場合である．ここで $r \leqq m-r$ より $0 \leqq r \leqq \left[\dfrac{m}{2}\right]$ の範囲である．ただし，実数 x に対して $[x]$ は x を超えない最大の整数を表す．したがって次の漸化式が成り立つ．

$$P_{n+1}(m)=\sum_{r=0}^{[\frac{m}{2}]} {}_{m-r}\mathrm{C}_r(1-p)^r p^{m-2r}P_n(m-r) \quad \cdots ①$$

$m=1$ のとき．① の和は $r=0$ だけだから次式となる．

$$\begin{aligned} P_{n+1}(1) &= pP_n(1) \\ \therefore\ P_n(1) &= p^nP_0(1)=p^n \end{aligned}$$

$m=2$ のとき．① の和は $r=0,\ 1$ をわたるから

$$P_{n+1}(2)=p^2P_n(2)+(1-p)P_n(1)=p^2P_n(2)+(1-p)p^n$$

である．これから

$$\frac{P_{n+1}(2)}{(p^2)^{n+1}}=\frac{P_n(2)}{(p^2)^n}+\frac{1-p}{p^{n+2}}$$

$P_0(2)=0$ なので

$$\begin{aligned}\frac{P_n(2)}{(p^2)^n} &= \frac{P_0(2)}{(p^2)^0}+\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1-p}{p^{k+2}}=\frac{1-p}{p^2}\cdot\frac{\dfrac{1}{p^n}-1}{\dfrac{1}{p}-1}=\frac{\dfrac{1}{p^n}-1}{p}\\ \therefore\ P_n(2) &= \frac{p^n-p^{2n}}{p}=p^{n-1}-p^{2n-1}\end{aligned}$$

$m=3$ のとき．① の和は $r=0,\ 1$ をわたるから

$$\begin{aligned}P_{n+1}(3) &= p^3P_n(3)+2(1-p)pP_n(2)\\ &= p^3P_n(3)+2(1-p)p\left(p^{n-1}-p^{2n-1}\right)\end{aligned}$$

である．これから

$$\frac{P_{n+1}(3)}{(p^3)^{n+1}}=\frac{P_n(3)}{(p^3)^n}+2(1-p)\left(\frac{1}{p^{2n+3}}-\frac{1}{p^{n+3}}\right)$$

$P_0(3)=0$ なので

$$\begin{aligned}\frac{P_n(3)}{(p^3)^n} &= \frac{P_0(3)}{(p^3)^0}+2(1-p)\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{p^{2k+3}}-\frac{1}{p^{k+3}}\right)=\frac{2(1-p)}{p^3}\left(\frac{\dfrac{1}{p^{2n}}-1}{\dfrac{1}{p^2}-1}-\frac{\dfrac{1}{p^n}-1}{\dfrac{1}{p}-1}\right)\\ \therefore\ P_n(3) &= \frac{2(1-p)}{p^3}\left(\frac{p^{n+2}-p^{3n+2}}{1-p^2}-\frac{p^{2n+1}-p^{3n+1}}{1-p}\right)\\ &= \frac{2}{p^3}\cdot\frac{p^{n+2}-p^{3n+2}-(1+p)(p^{2n+1}-p^{3n+1})}{1+p}=\frac{2p^{n-1}(1-p^{n-1})(1-p^n)}{1+p}\end{aligned}$$

□

解答 5.87　問題 4.23

(1) 定義から $p_N(m)$ は次の性質をもっている．

(i) 明らかに $p_N(0)=0,\ p_N(m)=0\ (N+2\leqq m)$ である．

(ii) $m=N+1$ となるのは，赤玉をとり続ける場合なので，

$$p_N(N+1)=\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}\cdot\frac{3}{5}\cdots\frac{N}{N+2}=\frac{2}{(N+2)(N+1)}$$

(iii) $m=1$ となるのは，赤玉以外をとり続ける場合なので，

$$p_N(1)=\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdots\frac{N+1}{N+2}=\frac{2}{N+2}$$

(iv) $2\leqq m\leqq N$ のとき．N 回目に m となるのは，$N-1$ 回目に m で N 回目に赤以外をとるか，$N-1$ 回目に $m-1$ で N 回目に赤を取る場合なので，

$$p_N(m)=p_{N-1}(m)\cdot\frac{N+2-m}{N+2}+p_{N-1}(m-1)\cdot\frac{m-1}{N+2}\qquad\cdots①$$

(v) すべての結果は $1 \leqq m \leqq N+1$ の範囲にあるので，

$$p_N(1)+p_N(2)+\cdots+p_N(N+1)=1$$

よって

$$\begin{aligned}
p_3(1) &= \frac{2}{5}=\frac{4}{10}\\
p_3(2) &= p_2(2)\cdot\frac{3}{5}+p_2(1)\cdot\frac{1}{5}\\
&= \left(\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}\right)\cdot\frac{3}{5}+\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{5}=\frac{3}{10}\\
p_3(4) &= \frac{2}{5\cdot 4}=\frac{1}{10}\\
p_3(3) &= 1-(p_3(1)+p_3(2)+p_3(4))=\frac{2}{10}
\end{aligned}$$

$$\therefore\quad p_3(1):p_3(2):p_3(3):p_3(4)=4:3:2:1$$

(2) (1) から次のように推測される．

$$\begin{aligned}
&p_N(1):p_N(2):\cdots:p_N(m):\cdots:p_N(N+1)\\
=\ & N+1:N:\cdots:N+2-m:\cdots:1
\end{aligned}$$

つまり，自然数 N に対して $1 \leqq m \leqq N+1$ のすべての m で

$$p_N(m)=\frac{N+2-m}{N+1+N+\cdots+1}=\frac{2(N+2-m)}{(N+1)(N+2)}\ (1 \leqq m \leqq N+1) \quad \cdots ②$$

が成立すると推測される．これを N に関する数学的帰納法で示す．

$m=1,\ N+1$ のときは (1) で確認したように成立している．したがって $N=1$ のときは成立している．

$N=k$ のとき $1 \leqq m \leqq k+1$ の範囲の m で成立しているとする．

$N=k+1$ のとき，$2 \leqq m \leqq k+1$ で示せばよい．① と帰納法の仮定から

$$\begin{aligned}
p_{k+1}(m) &= p_k(m)\cdot\frac{k+3-m}{k+3}+p_k(m-1)\cdot\frac{m-1}{k+3}\\
&= \frac{2(k+2-m)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{k+3-m}{k+3}+\frac{2(k+3-m)}{(k+1)(k+2)}\cdot\frac{m-1}{k+3}\\
&= \frac{2(k+3-m)\{(k+2-m)+(m-1)\}}{(k+1)(k+2)(k+3)}=\frac{2(k+3-m)}{(k+2)(k+3)}
\end{aligned}$$

$N=k+1$ でも ② が成立し，すべての N で ② が成立することが示された．

参考　N 回目に赤玉が出る確率を q_N とおく．

$$\begin{aligned}
q_{N+1} &= \sum_{m=1}^{N+1} p_N(m)\frac{m}{N+3}\\
&= \sum_{m=1}^{N+1}\frac{2(N+2-m)}{(N+1)(N+2)}\cdot\frac{m}{N+3}
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{(N+2)(N+1)(N+2)-\dfrac{(N+1)(N+2)(2N+3)}{3}}{(N+1)(N+2)(N+3)} \\
&= \frac{1}{3}
\end{aligned}
$$

別解

② を次のように直接計算してもよい．

それぞれの玉を区別する．N 回の試行で玉の選び方の総数は

$$3\cdot 4\cdot\cdots\cdots(n+2)=\frac{(N+2)!}{2}\ (\text{通り})$$

このうち赤が m 個である選び方の総数を求める．赤を $m-1$ 回選べばよい．

赤をどこで選ぶかが

$${}_N\mathrm{C}_{m-1}\ (\text{通り})$$

その一つ一つに対して，選び方は

赤のところでの選び方　$1\cdot 2\cdot\cdots\cdot(m-1)=(m-1)!$

その他の色での選び方　$2\cdot 3\cdot\cdots\cdot\{N-(m-1)+1\}=(N-m+2)!$

したがって

$$p_N(m)=\frac{2\cdot(m-1)!\cdot(N-m+2)!}{(N+2)!}\cdot\frac{N!}{(N-m+1)!(m-1)!}=\frac{2(N+2-m)}{(N+1)(N+2)}$$

□

解答 5.88　問題 4.24

(1) $m\neq\pm 1$ のとき，

$$p_n(\pm m)=\frac{1}{2}p_{n-1}(\pm m-1)+\frac{1}{2}p_{n-1}(\pm m+1)\quad\cdots ①$$

$m=\pm 1$ のとき，

$$
\left.
\begin{aligned}
p_n(1)&=qp_{n-1}(0)+\frac{1}{2}p_{n-1}(2)\\
p_n(-1)&=\frac{1}{2}p_{n-1}(-2)+(1-q)p_{n-1}(0)
\end{aligned}
\right.\quad\cdots ②
$$

なので

$$
\begin{aligned}
p_3(1)+p_3(-1) &= qp_2(0)+\frac{1}{2}p_2(2)+\frac{1}{2}p_2(-2)+(1-q)p_2(0)\\
&= \frac{1}{2}\{p_2(2)+p_2(-2)\}+p_2(0)
\end{aligned}
$$

ここで

$$
\begin{aligned}
p_2(2) &= \frac{1}{2}p_1(1)+\frac{1}{2}p_1(3)\\
p_2(-2) &= \frac{1}{2}p_1(-3)+\frac{1}{2}p_1(-1)\\
p_2(0) &= \frac{1}{2}p_1(-1)+\frac{1}{2}p_1(1)
\end{aligned}
$$

さらに

$$\begin{aligned} p_1(1) &= qp_0(0)+\frac{1}{2}p_0(2)=q \\ p_1(-1) &= (1-q)p_0(0)+\frac{1}{2}p_0(-2)=1-q \\ p_1(3) &= p_1(-3)=0 \end{aligned}$$

であるから

$$p_2(2)=\frac{q}{2},\ p_2(-2)=\frac{1-q}{2},\ p_2(0)=\frac{1}{2}$$

$$\therefore\quad p_3(1)+p_3(-1)=\frac{1}{4}+\frac{1}{2}=\frac{3}{4}$$

(2) 命題「どんな整数 m についても $p_n(m)+p_n(-m)$ は q にはよらない」を n についての数学的帰納法で示す.

$f_n(m)=p_n(m)+p_n(-m)$ とおく. $f_n(m)=f_n(-m)$ であり, $m=0$ なら $f_n(0)=2p_n(0)$ である.

$n=0$ のとき.

$$f_0(m)=\begin{cases} 2 & (m=0) \\ 0 & (m\neq 0) \end{cases}$$

より成立.

$n-1$ のとき成立するとする.

① より $m\neq 1$ なら

$$f_n(m)=\frac{1}{2}f_{n-1}(m-1)+\frac{1}{2}f_{n-1}(m+1)\quad \cdots ③$$

また $m=\pm 1$ のときは ② より

$$\begin{aligned} f_n(\pm 1) &= p_n(1)+p_n(-1) \\ &= qp_{n-1}(0)+\frac{1}{2}p_{n-1}(2)+\frac{1}{2}p_{n-1}(-2)+(1-q)p_{n-1}(0) \\ &= \frac{1}{2}f_{n-1}(2)+qp_{n-1}(0)+(1-q)p_{n-1}(0) \\ &= p_{n-1}(0)+\frac{1}{2}f_{n-1}(2)=\frac{1}{2}f_{n-1}(0)+\frac{1}{2}f_{n-1}(2) \end{aligned}$$

整数 $m=\pm 1$ に対しても ③ が成立する.

数学的帰納法の仮定から $f_{n-1}(m-1)$, $f_{n-1}(m+1)$ は q によらないので, n のときも q によらないことが示された.

よって $n \geqq 0$ に対してつねに命題が成立することが示された.

(3) (2) から $0\leqq q\leqq 1$ の範囲のいかなる q に対しても

$$p_n(0)=\frac{1}{2}p_n(0)+\frac{1}{2}p_n(0)=\frac{1}{2}f_n(0)$$

は同一の値をとる．$q=\dfrac{1}{2}$ として求めてもよい．

n 秒後に 0 であるのは，1 秒間に $+1$ 変化する場合と -1 変化する場合とが同数であるとき，そしてそのときにかぎる．

ゆえに n が奇数なら $p_n(0)=0$.

n が偶数なら $+1$ の変化と -1 の変化が $\dfrac{n}{2}$ 回ずつ起こればいいので

$$p_n(0)={}_n\mathrm{C}_{\frac{n}{2}}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

□

解答 5.89　問題 4.25

(1)

$$\begin{aligned} a_1 &= p+4q \\ a_2 &= p^2-4q^2=(p-2q)(p+2q) \end{aligned}$$

$p+4q=p+2q+2q$ なので $p+4q$ と $p+2q$ に公約数があれば，それは $2q$ の約数でもある．それが 2 なら $p+2q$ が偶数となり結果 p が偶数．よって $p=2$．これは $p>2q$ と矛盾．ゆえに a_1 と a_2 の公約数は $p+4q$ と $p-2q$ の公約数から得られる．ところが

$$p+4q=p-2q+6q$$

なので $p+4q$ と $p-2q$ の公約数は $6q$ の約数でもある．それが q なら p も q の倍数になり条件と矛盾．またそれが偶数なら上と同様の議論により $p=2$ で条件と矛盾．

ゆえに a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，それは $m=3$ である．

(2) p と $-q$ は方程式 $t^2-(p-q)t-pq=0$ の 2 解．したがって

$$\begin{aligned} 0 &= p^n\{p^2-(p-q)p-pq\}=p^{n+2}-(p-q)p^{n+1}-(pq)p^n \\ 0 &= (-q)^n\{(-q)^2-(p-q)(-q)-pq\}=(-q)^{n+2}-(p-q)(-q)^{n+1}-(pq)(-q)^n \end{aligned}$$

第 1 式-4 ×第 2 式より

$$a_{n+2}-(p-q)a_{n+1}-pqa_n=0$$

これから a_n と a_{n+1} が 3 の倍数なら a_{n+2} も 3 の倍数になる．数学的帰納法によって，a_n がすべて 3 の倍数であるためには，a_1，a_2 が 3 の倍数であればよい．必要性は明らかなので，これが必要十分条件である．

そのためには (1) から $p+4q$ と $p-2q$ が 3 の倍数でなければならない．

$$p+4q=p+q+3q,\ p-2q=p+q-3q$$

なので，結局 $p+q$ が 3 の倍数であることが必要十分条件である．

$p>2q$ から $p+q>3q$．これを満たす p，q で積 pq が最小のものは，まず q を最小に取り $q=2$．$p+2>6$ の 3 の倍数で最小は $p+2=9$．ゆえに $p=7$，$q=2$ が求めるものである．

□

解答 5.90　問題 4.26

$m,\ n$ を自然数とする．xy 平面上で x 座標も y 座標も整数である点全体の集合を U で表す．今点 $(0,\ 0)$ 上に球を 1 個置き，次の操作 T を n 回繰り返し行うことにより球を U 上で動かす．

操作 T： 球が置かれている点を $(a,\ b)$ とするとき，球を $(a+1,\ b+1)$，$(a+1,\ b-1)$，$(a-1,\ b+1)$，$(a-1,\ b-1)$ のどれかの点上に確率 $\dfrac{1}{4}$ ずつで動かす．

操作 T を 1 回行った時点で球が置かれている点の座標を $(a_1,\ b_1)$ で表す．同様に，操作 T を i 回 $(i=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n)$ 繰り返し行った時点で球が置かれている点の座標を $(a_i,\ b_i)$ で表す．U の部分集合

$$A_n = \{(a_1,\ b_1), (a_2,\ b_2), \cdots, (a_n,\ b_n)\}$$

を考える．

(1) xy 平面上で連立不等式 $\begin{cases} |x| \leqq 1 \\ |y| \leqq 1 \end{cases}$ の表す領域を A とする．$A_n \subset A \cap U$ となる確率を p_n とする．$p_{2m-1},\ p_{2m}$ を求めよ．

(2) xy 平面上で不等式 $0 \leqq x-y \leqq 2$ の表す領域を B とする．$A_n \subset B \cap U$ となる確率 q_n を求めよ．

(3) $A_n \subset A \cap U$ または $A_n \subset B \cap U$ となる確率を r_n とする．$r_{2m-1},\ r_{2m}$ を求めよ．

(4) 集合 A_n の要素の個数が 3 となる確率 s_n を求めよ．

□

解答 5.91　問題 4.27

(1) $x^2-y^2=k$ の奇数解を整数 $m,\ n$ を用いて $(2m-1,\ 2n-1)$ とおく．このとき

$$k=(2m-1)^2-(2n-1)^2=4(m-n)(m+n-1)$$

ところが $m-n$ と $m+n$ の偶数，奇数は一致する．ゆえに $m-n$ と $m+n-1$ は偶数，奇数が逆になり，積 $(m-n)(m+n-1)$ はつねに偶数，つまり k は 8 の倍数．

(2) 逆に k が 8 の倍数であるとする． $k=8l$ とおく．このとき

$$(2l+1)^2-(2l-1)^2=8l=k$$

となる．つまり $(2l+1,\ 2l-1)$ は確かに $x^2-y^2=k$ の奇数解である．

ゆえに求める必要十分条件は k が 8 の倍数であることである．

注意　後半の十分性の証明が典型的な「妖怪をつれてくる」方式，つまり作ってみせる方式である．□

解答 5.92　問題 4.28

(1) $x \geqq y$ としてよい．$C(nx) = C(ny)$ より $nx - ny = n(x-y) = 100l$ (l は整数) と置ける．n と 100 が互いに素なので，$x - y = 100l'$ (l'は整数) である．
よって $C(x) = C(y)$ である．

(2) (1) より，集合 $\{C(0), C(n), C(2n), \cdots, C(99n)\}$ の要素はすべて異なる．よってこの集合は 100 個の要素からなり，$\{0, 1, \cdots, 99\}$ と一致する．つまり，$C(0)$ から $C(99n)$ のどれかは 1 である．
つまり，$C(nx) = 1$ となる 0 以上の整数 x が存在する．

$\square$

解答 5.93　問題 4.29

$z = x + iy$ とおく．

$$\frac{z+\bar{z}}{\sqrt{2}} = \frac{2x}{\sqrt{2}},\ \frac{z+\bar{z}}{\sqrt{3}} = \frac{2x}{\sqrt{3}},\ \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{2}i} = \frac{2y}{\sqrt{2}},\ \frac{z-\bar{z}}{\sqrt{3}i} = \frac{2y}{\sqrt{3}},$$

ゆえに，それぞれの集合は

$$A = \left\{ z \mid x = \frac{\sqrt{2}}{2}n\ ,\ n\ \text{整数} \right\}$$
$$B = \left\{ z \mid x = \frac{\sqrt{3}}{2}n\ ,\ n\ \text{整数} \right\}$$
$$C = \left\{ z \mid y = \frac{\sqrt{2}}{2}n\ ,\ n\ \text{整数} \right\}$$
$$D = \left\{ z \mid y = \frac{\sqrt{3}}{2}n\ ,\ n\ \text{整数} \right\}$$

となる．

したがって各共通集合は

$$A \cap C = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}n + i\frac{\sqrt{2}}{2}m \mid m,\ n\ \text{整数} \right\}$$
$$A \cap D = \left\{ \frac{\sqrt{2}}{2}n + i\frac{\sqrt{3}}{2}m \mid m,\ n\ \text{整数} \right\}$$
$$B \cap C = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}n + i\frac{\sqrt{2}}{2}m \mid m,\ n\ \text{整数} \right\}$$
$$B \cap D = \left\{ \frac{\sqrt{3}}{2}n + i\frac{\sqrt{3}}{2}m \mid m,\ n\ \text{整数} \right\}$$

となる．

中点が E の要素になっているためには，その 2 点がともにこの四つの共通集合のなかの同じ集合の要素であって，しかも実部と虚部の n と m がそれぞれともに偶数か，ともに奇数かのときである．

この違いは合計 16 通りである．したがって，17 個の複素数よりなる集合 F の中には．四つの共通集合のなかの同じ集合に属し，しかも実部と虚部の n と m の偶数奇数がそれぞれ同じである二つの要素がある．

この 2 点の中点は再び E の要素になっている．$\square$

解答 5.94　問題 4.30

(1) A_4 は，奇数の約数のうち最大のものが $2\cdot 4-1=7$ となるものからなる集合である．ゆえに

$$A_4=\{7,\ 14,\ 28,\ 56\}$$

(2) A の各要素 x は $x=2^l\cdot m$ (l：非負整数, m：奇数) と一通りに表される．$m=2k-1$ と表すと $1\leqq k\leqq 50$ である．そして $x\in A_k$ なので，x は A_1 から A_{50} までの 50 個の集合のうちのいずれか 1 つに属する．

(3) A の部分集合 B が 51 個の要素からなるので，B の要素で少なくとも一組 x と y が同じ A_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 50)$ に属するような k が存在する．$x<y$ とすると，$x=2^l(2k-1)$, $y=2^{l'}(2k-1)$ $(l<l')$ と表される．このとき $\dfrac{y}{x}=2^{l'-l}$ となり整数である．

(4)

$$C=\{\ 51,\ 52,\ \cdots,\ 100\}$$

とおくと，C のにんいの要素 x と y $(x<y)$ について，

$$1<\frac{y}{x}<2$$

なので，このなかに互いに整数倍のものはない．

□

解答 5.95　問題 4.31

(1) $a_k>0$ $(1\leqq k\leqq n)$ なので

$$1\leqq s_1<s_2<\cdots<s_n$$

ここで $s_n=m^2$ とおく．s_{n-1} は m^2 より小さい平方数なので，$s_{n-1}\leqq(m-1)^2$．ゆえに

$$a_n=s_n-s_{n-1}\geqq m^2-(m-1)^2=2m-1$$

$1\leqq a_n\leqq 2n$ より $2m-1\leqq 2n$．つまり $2m\leqq 2n+1$ であるが，偶数奇数を考え $2m\leqq 2n$, つまり $m\leqq n$．

したがって $s_n=m^2\leqq n^2$ となる．つまり

$$1\leqq s_1<s_2<\cdots<s_n\leqq n^2$$

ところが 1 から n^2 の間の平方数はちょうど n 個であるから，$s_1,\ s_2,\ \cdots,\ s_n$ が $1,\ 2^2,\ \cdots,\ n^2$ に一致しなければならない．

$$s_k=k^2\quad(1\leqq k\leqq n)$$

とくに $s_n=n^2$

(2) (1) から $a_k=s_k-s_{k-1}=2k-1$ $(1\leqq k\leqq n)$ となる．

□

解答 5.96　問題 4.32

(1) 有理数解 $x=\dfrac{p}{q},\ y=\dfrac{r}{s}$ があるとする．ここで各分数は既約であるとする．

したがって,

$$(ps)^2+(qr)^2=6(qs)^2 \quad \cdots ①$$

① は不定方程式

$$X^2+Y^2=6Z^2$$

が整数解 $X=ps,\ Y=qr,\ Z=qs$ をもつことを示している．

$$\alpha=ps,\ \beta=qr,\ \gamma=qs$$

とし, $\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の最大公約数を d とする．

$$\alpha=d\alpha',\ \beta=d\beta',\ \gamma=d\gamma'$$

そして

$$\alpha'^2+\beta'^2=6\gamma'^2 \quad \cdots ②$$

一般に，整数 n に対して, $n=3k+e,\ e=0,\ 1,\ 2$ とおくと, $n^2=9k^2+6ke+e^2$ であるから, n^2 を 3 で割った余りは, n が 3 の倍数なら 0，その他の場合は 1 である．

よって，② の左辺も 3 の倍数になるのは, $\alpha',\ \beta'$ がともに 3 の倍数のときにかぎる. $\alpha'=3\alpha'',\ \beta'=3\beta''$ とおき ② に代入して, 両辺を 3 で約すると, $2\gamma'^2$ が 3 の倍数になる．

つまり γ' も 3 の倍数となり，$\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ が互いに素なことに矛盾した．

よって, 有理数解は存在しない．

(2) 有理数解 $x=\dfrac{p}{q},\ y=\dfrac{r}{s}$ があるとする．ここで各分数は既約であるとする．

したがって,

$$3(ps)^2+5(qr)^2=4(qs)^2 \quad \cdots ③$$

③ より,

$$3(ps)^2+3(qr)^2=4(qs)^2-2(qr)^2=2\{2(qs)^2-(qr)^2\}$$

よって, $2(qs)^2-(qr)^2$ が 3 の倍数である．
つまり, $(qr)^2$ を 3 で割った余りは偶数である．
ところが，(1) で示したように $(qr)^2$ を 3 で割った余りは 0 か 1 であるから, qr が 3 の倍数となり，qs も 3 の倍数となる．

③ から, $3(ps)^2$ が 9 の倍数になるので, ps も 3 の倍数.

$p,\ q,\ r,\ s$ のいずれの組合せでも，このようになる場合，もとの分数の既約性と矛盾する．

別解

有理数解 $x=\dfrac{p}{q},\ y=\dfrac{r}{s}$ があるとする. 代入し分母を払うと,

$$3(ps)^2+5(qr)^2=4(qs)^2$$

となる．これは

$$3X^2 + 5Y^2 = 4Z^2$$

が整数解 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ をもつことを意味している．最大公約数で約しても同じ関係式をみたすので, 整数解 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ で最大公約数が 1 のものがあるとしてよい.

整数 a を 5 で割った余りが 0, 1, 2, 3, 4 のとき, a^2 を 5 で割った余りはそれぞれ, 0, 1, 4, 4, 1 である．このことに注意して,

$$3\alpha^2 + 5\beta^2 = 4\gamma^2$$

の両辺を 5 で割った余りを考える.

左辺：α^2 を 5 で割った余りが 0, 1, 4 のときそれぞれ, 0, 3, 2

右辺：γ^2 を 5 で割った余りが 0, 1, 4 のときそれぞれ, 0, 4, 1

したがって, 等号が成立するときは, $\alpha,\ \gamma$ がともに 5 の倍数のときに限る.

$$\alpha = 5 \cdot \alpha', \quad \gamma = 5 \cdot \gamma'$$

とおく.

$$3 \cdot 5{\alpha'}^2 + \beta^2 = 4 \cdot 5{\gamma'}^2$$

より β も 5 の倍数.
これは整数解 $(\alpha,\ \beta,\ \gamma)$ の最大公約数が 1 であることと矛盾した.

よって, 整数解はない．したがって, 元の方程式に有理数解はない.

□

解答 5.97　問題 4.33

順列の n 番目までにある白の個数を $W(n)$，黒の個数を $B(n)$ とする.
左端が黒の場合，その黒石が条件を満たす (全て取り除かれる).
左端は白とする.

$$W(361) = 180,\ B(361) = 181,\ W(1) = 1,\ B(1) = 0$$

したがって $n = 361$ から 1 ずつ減じていくと最初に

$$W(n+1) < B(n+1) \quad \text{であるが} \quad W(n) \geqq B(n)$$

となる番号 n がある．それを $n = n_0$ とする.
このとき $n_0 + 1$ 番目におかれているのは黒石である．なぜならそれが白なら

$$W(n_0) = W(n_0+1) - 1,\ B(n_0+1) = B(n_0)$$

となり

$$W(n_0) \geqq B(n_0)$$

とはなり得ないからである.
また $n_0 + 1$ 番目が黒石のとき

$$W(n_0) = W(n_0+1),\ B(n_0) = B(n_0+1) - 1$$

で，これらは整数値なので

$$W(n_0) = B(n_0)$$

である．ゆえに $n_0 + 1$ 番目の黒石が題意を満たす石である． □

解答 5.98 問題 4.34

輪の表裏と玉を区別して考える．玉に 1 から $2n$ まで順に番号をつける．i 番の玉から数えて，その玉を含め左回りに並んだ n 個の玉のうちにある白玉の個数を $W(i)$ とおく．白玉の合計は $2k$ 個で，i が 1 変化するとき $W(i)$ は変化しないか，しても ± 1 個である．つまり

$$\begin{cases} W(i) + W(i+n) = 2k \ (i = 1,\ 2,\ \cdots) & \cdots ① \\ W(i+1) - W(i) = 0,\ \pm 1 & \cdots ② \end{cases}$$

である．

$W(i) = k$ なら，$i - 1(i = 1$ のときは $2n)$ 番と i 番のあいだ，および $i + n - 1$ 番と $i + n$ 番のあいだの 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分ければ，どちらの組も白玉 k 個, 黒玉 $n - k$ 個からなる．よって $W(i) = k$ となる番号 i が存在することを示せばよい．

もし $W(1) = k$ なら $i = 1$ が条件を満たす．

$W(1) > k$ とする．① から

$$W(1+n) = 2k - W(1) < k$$

であるから，番号を 1 から $1 + n$ まで順に変化させていくと，

$$W(i_0) > k,\ W(i_0 + 1) \leqq k$$

となる i_0 が存在する．ところが ② なので，

$$W(i_0 + 1) = k$$

である．

$W(1) < k$ のときも同様である． □

解答 5.99 問題 4.35

この選手は，平均すれば 1km を 3 分間で走っている．

40km のコースの $x$km から $x + 1$km の間を $f(x)$ 分で走るとする．選手の走る速さは位置および時間に対し連続的に変化するので，$f(x)$ は x の連続関数である．

$f(0) = 3$ なら区間 0km から 1km の区間が条件を満たす．

$f(0) < 3$ とする．もし $f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(39)$ のいずれもが 3 以下ならば，

$$f(0) + f(1) + f(2) + \cdots + f(39) < 120$$

となり，このコースを 2 時間で走ることはできない．

ゆえに $f(1),\ f(2),\ \cdots,\ f(39)$ のうち少なくとも一つは 3 より大きい．それを $f(x_1)$ とする．すると

$$f(0) < 3,\ かつ\ f(x_1) > 3$$

で，$f(x)$ が連続関数なので，中間値の定理によって，$0 < \alpha < x_1$ の範囲の α で

$$f(\alpha) = 3$$

となるものが存在する．つまり αkm から $\alpha+1$km の連続する 1km の区間をちょうど 3 分で走り抜ける．

$f(0)>3$ の場合も同様である． □

解答 5.100　問題 4.36

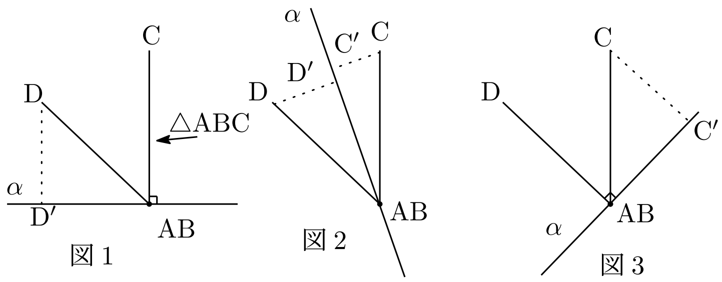


図 1　図 2　図 3

三つの図は線分 AB の方から見たものである．

はじめ α を図 1 のように $\triangle$ABC と垂直であるようにおく．このとき $\triangle$ABC が鋭角三角形なので，点 C$'$ は線分 AB 上にある．

$$\angle \mathrm{AC'B}=180^\circ,\ \angle \mathrm{AD'B}<180^\circ$$

α を図 2 のように C$'$, D$'$ が線分 AB に関して同じ側にあるように連続的に動かす．

そして図 3 のように $\triangle$ABD と α が垂直であるところまで動かす．同様にして

$$\angle \mathrm{AC'B}<180^\circ,\ \angle \mathrm{AD'B}=180^\circ$$

α を連続的に変化させると，$\triangle$ABC とのなす角も連続して変化する．

したがって中間値の定理によって α が図の範囲を動くとき途中で

$$\angle \mathrm{AC'B}=\angle \mathrm{AD'B}$$

となるときがある．このとき円周角が等しく四点は同一円周上にある．

また辺 AB と辺 CD が垂直ではないので C$'\neq$ D$'$ である．したがって四点 A，B， C$'$, D$'$ はすべて異なっている．

別解

α を動かす範囲をもう少し狭めてもできる．α を $\triangle$ABC が α 上にあるところから $\triangle$ABD が α 上にあるようになるまで，上と同じく C$'$, D$'$ が線分 AB に関して同じ側にあるように連続的に動かす．

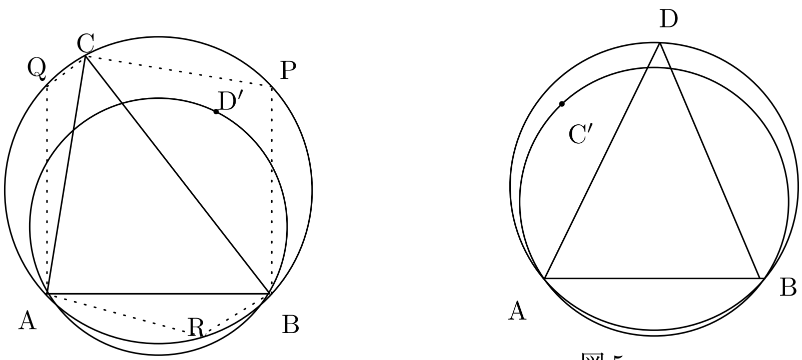


図 4　図 5

$\triangle$ABC が α 上にあるとき， D$'$ はどこにあるか．

ここで，$\triangle$ABC の外接円をかき，$\triangle$ABC の各頂点からその頂点を共有する辺に垂直な直線を引くと，それらは 2 本ずつ外接円周上で交わる．例えば AR と BR について，$\angle\mathrm{CAR} = \angle\mathrm{CBR} = \dfrac{\pi}{2}$ なので，$\angle\mathrm{ACB} + \angle\mathrm{ARB} = \pi$ となり，四点 A，C，B，R は同一円周上にあるからである．他も同様.

D$'$ は六角形 AQCPBR の内部にあり，したがって $\triangle$ABC の外接円の内部にある．

円弧 AD$'$B は $\triangle$ABC の外接円の内部に含まれる．

$\triangle$ABD が α 上にあるようになったときは，逆に円弧 AC$'$B が $\triangle$ABD の外接円の内部に含まれる．

α の動きに対して二つの円は連続的に変化するから，途中で二つの円が一致するときがある．

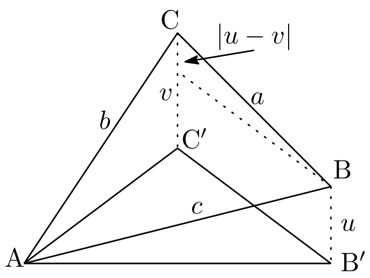
つまり，四点が同一円周上にあるときが存在する． □

解答 5.101　問題 4.37

$\triangle$ABC と $\triangle$PQR の 3 辺をそれぞれ a，b，c と p，q，r とする．三角形の成立条件から

$$\begin{cases} a+b>c \\ b+c>a \\ c+a>b \end{cases},\quad \begin{cases} p+q>r \\ q+r>p \\ r+p>q \end{cases}$$

が成立している．



平行移動して点 A は平面 α 上にあるとしてよい．そして線分 BB$'$，CC$'$ の長さをそれぞれ u，v とする．このとき $\triangle$A$'$B$'$C$'$ の各辺は

$$\sqrt{a^2-(u-v)^2},\ \sqrt{b^2-v^2},\ \sqrt{c^2-u^2}$$

となる．したがって $\triangle$A$'$B$'$C$'$ と $\triangle$PQR が相似になることは

$$\frac{\sqrt{a^2-(u-v)^2}}{p} = \frac{\sqrt{b^2-v^2}}{q} = \frac{\sqrt{c^2-u^2}}{r}$$

となることと同値である．各辺を平方してその式の値を k とおく．つまり

$$\begin{cases} a^2-(u-v)^2 = kp^2 \quad \cdots ① \\ b^2-v^2 = kq^2 \quad \cdots ② \\ c^2-u^2 = kr^2 \quad \cdots ③ \end{cases}$$

である．さて，u と v の値を与えれば平面 α が定まる．したがって $\triangle$A$'$B$'$C$'$ が $\triangle$PQR と相似になるような平面 α が存在することは，① , ② , ③ を満たす実数 u，v と正数 k が存在すること同値である．② ＋③ －① より

$$2uv = k(p^2-q^2-r^2)-(a^2-b^2-c^2) \quad \cdots ④$$

一方 ②，③ より

$$b^2 - kq^2 = v^2,\ c^2 - kr^2 = u^2 \quad \cdots ⑤$$

である．u と v が実数なので，

$$0 < k \leqq \frac{b^2}{q^2},\ 0 < k \leqq \frac{c^2}{r^2} \quad \cdots ⑥$$

④ を平方し ⑤ によって $u^2,\ v^2$ を消去すると k の 2 次方程式．

$$\{k(p^2 - q^2 - r^2) - (a^2 - b^2 - c^2)\}^2 - 4(b^2 - kq^2)(c^2 - kr^2) = 0 \quad \cdots ⑦$$

が得られる．この左辺を k の 2 次式として $f(k)$ とおく．⑦ に ⑥ を満たす k が存在すれば，⑤ から正負を除いて u と v が定まる．④ となるように u と v の正負を定めれば，題意を満たす u と v が得られる．

$$\begin{aligned}
f(k) &= \{k(p^2 - q^2 - r^2) - (a^2 - b^2 - c^2)\}^2 - 4(b^2 - kq^2)(c^2 - kr^2) \\
&= \{(p^2 - q^2 - r^2)^2 - 4q^2r^2\}k^2 \\
&\qquad -2\{(p^2 - q^2 - r^2)(a^2 - b^2 - c^2) - 2(q^2c^2 + r^2b^2)\}k + (a^2 - b^2 - c^2)^2 - 4b^2c^2 \\
&= -(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r)k^2 \\
&\qquad -2\{(p^2 - q^2 - r^2)(a^2 - b^2 - c^2) - 2(q^2c^2 + r^2b^2)\}k \\
&\qquad\qquad -(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)
\end{aligned}$$

三角形の成立条件から

$$-(p+q+r)(-p+q+r)(p-q+r)(p+q-r) < 0$$
$$-(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c) < 0$$

である．つまり $f(k)$ は上に凸でかつ $f(0) < 0$ である．一方 $f(k)$ の定義式から

$$f\left(\frac{b^2}{q^2}\right) \geqq 0,\ f\left(\frac{c^2}{r^2}\right) \geqq 0$$

である．したがって確かに ⑥ を満たす ⑦ の正の解 k が存在する．つまり平面 α で，α への正射影 $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ が $\triangle\mathrm{PQR}$ と相似になるものが存在することが示された． □