《2018 入試対策》

北海道大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された北海道大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2013 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 北大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\quad(-2\leqq x\leqq 4)$とおく。

(1)　関数$y=f(x)$のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標α，β $(\alpha<\beta)$の値も求めよ。

(2)　(1)のα，βに対して，定積分$\displaystyle\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx$の値を求めよ。　[2016]

2　$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x\quad(0\leqq x\leqq 2\pi)$とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$とおき，$f(x)$をtの関数で表せ。

(2)　tの取りうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$の最大値と最小値，およびそのときのxの値を求めよ。　[2013]

3　実数 x に対して$k\leqq x<k+1$を満たす整数 k を$[x]$で表す。たとえば，$[2]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[-2.1]=-3$である。

(1)　$n^2-5n+5<0$を満たす整数nをすべて求めよ。

(2)　$[x]^2-5[x]+5<0$を満たす実数xの範囲を求めよ。

(3)　xは(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-5[x]+5=0$を満たすxをすべて求めよ。　[2011]

4　$\gamma=1+\sqrt{3}i$とする。ただし，i は虚数単位である。実数 a，b に対して多項式$P(x)$を，$P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8(\sqrt{3}+1)x+16$で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$P(\gamma)=0$となるようにaとbを定めよ。

(2)　(1)で定めた a と b に対して，$P(x)=0$となる複素数 x でγ以外のものをすべて求めよ。　[2009]

5　bは実数とし，cは0でない実数とする。2次方程式$x^2+bx+c=0$の解をα，βとおく。

(1)　α，βはともに0でないことを示せ。

(2)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$または$\dfrac{\beta}{\alpha}$が実数rに等しいとき，b^2をcとrを用いて表せ。　[2006]

6　正の実数 a に対し，$x=a+\dfrac{1}{a}$，$y=a-\dfrac{1}{a}$ とおく。このとき x^8-y^8 が最小となる a の値と，その最小値を求めよ。　[2004]

7　関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。$f(x)=x^2+ax+b$，$g(x)=x+c$
ただし, a, b, c は定数とする。

(1)　$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ となるための a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2)　(1)の条件のもとで，$0\leqq x\leqq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。　[2002]

8　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフを書け。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，x の関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x を求めよ。　[2001]

9　正の数 a に対し，関数 $y=x^2-ax$ $\left(\dfrac{a}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5a}{6}\right)$ のグラフを C とする。長方形 T で，一辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ。ただし，長方形の周の長さとは, 4 辺の長さの和のことをいう。

(2)　長方形 T の面積の最大値を, a を用いて表せ。　[1998]

■ 微分と積分

1　a，b を実数とし，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\dfrac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\displaystyle\int_{-1}^{1}f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(0)$ の値を a を用いて表せ。

(2)　関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつとする。このような a，b が満たす条件を求めよ。また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。　[2017]

2 $a,\ b,\ c$ を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある。

(1) P における C の接線の方程式を求めよ。

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。 [2016]

3 2 つの放物線 $C_1: y=x^2$，$C_2: y=-(x-1)^2$ がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を l とする。

(1) l の方程式を a で表せ。

(2) C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) C_2 と l が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。 [2015]

4 2 つの放物線 $C_1: y=-x^2+\dfrac{3}{2}$，$C_2: y=(x-a)^2+a\quad(a>0)$ がある。点 $\mathrm{P}_1\left(p,\ -p^2+\dfrac{3}{2}\right)$ における C_1 の接線を l_1 とする。

(1) C_1 と C_2 が共有点をもたないための a に関する条件を求めよ。

(2) l_1 と平行な C_2 の接線 l_2 の方程式と，l_2 と C_2 の接点 P_2 の座標を $a,\ p$ を用いて表せ。

(3) C_1 と C_2 が共有点をもたないとする。(2)で求めた P_2 と P_1 を結ぶ線分が l_1 と垂直になるとき，p を求めよ。 [2014]

5 実数 t が $0\leqq t<8$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ を考える。

(1) 点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。

(2) (1)での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。 [2013]

6 $-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta)=4\cos 2\theta\sin\theta+3\sqrt{2}\cos 2\theta-4\sin\theta$ を考える。

(1) $x=\sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2) $f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。 [2012]

7　xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(a+3,\ b)$，$\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ がある。不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D, 不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域を E とする。

(1)　点 C が領域 D に含まれ, 点 A と点 B が領域 E に含まれるような $a,\ b$ の条件を連立不等式で表せ。

(2)　(1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ。

(3)　(2)で求めた領域 F の面積を求めよ。　[2012]

8　a を正の実数, b と c を実数とし, 2 点 $\mathrm{P}(-1,\ 3)$，$\mathrm{Q}(1,\ 4)$ を通る放物線 $y = ax^2 + bx + c$ を C とおく。C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1)　b の値を求め, c を a で表せ。

(2)　l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3)　放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。　[2011]

9　a を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$，$C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

(2)　2 つの放物線 C_1，C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

10　xy 平面において, 放物線 $y = -x^2 + 6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ, $(a,\ 0)$ と $(a,\ -a^2 + 6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える。ただし, $0 < a < 3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

(2)　$S(a)$ の値が最大となる a の値を求め, 関数 $S(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

11　$a > 0$, $b \geqq 0$, $0 < p < 1$ とし, 関数 $y = ax - bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通るとする。このグラフの $0 \leqq x \leqq p$ に対応する部分を C で表す。

(1)　b を a と p を用いて表せ。

(2)　a が範囲 $p \leqq a \leqq 1$ を動くとき, C 上の点 $(x,\ y)$ の動く領域を D とする。

(i)　x を固定して y の動く範囲を求めよ。

(ii)　D を図示せよ。

(3)　D の面積 S を p で表し, $\dfrac{1}{2} \leqq p \leqq \dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ。

[2007]

12　実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①を考える。

(1)　関数 $f(x)=4x^3-12x^2+9x$ の極値を求めて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　方程式①の実数解の中で，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つであるための p の条件を求めよ。　[2006]

13　次の問いに答えよ。

(1)　x についての 2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k (x^2-2kx-3k^2+1)\,dx$ の最小値と最大値を求めよ。　[2005]

14　a を正の実数とし，関数 $F(x)=\int_x^{x+a} \left| |t|-1 \right| dt$ を考える。

(1)　$F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに，$F'(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2)　$0<a<2$ のとき，$F(x)$ の極大値および極小値と，それらを与える x の値を求めよ。

(3)　$a>2$ のとき，$F(x)$ の極小値と，それを与える x の値を求めよ。　[2004]

15　実数 $a,\ b,\ c$ に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2},\quad \int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$$

を満たす実数 $p,\ q$ が存在するための $a,\ b,\ c$ の条件と，そのときの $p,\ q$ を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。　[2003]

16　3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ がある。$x=a$ における曲線 $y=f(x)$ の接線が接点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 以外の点 Q で $y=f(x)$ のグラフと交わっているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 Q の x 座標 b を a と p で表せ。

(2)　$x=c$ における $y=f(x)$ の接線が点 P を通るような実数 c のうち $c \neq a$ なるものを a と p で表せ。

(3)　$\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}$ の値を求めよ。　[2000]

17　$0<a<1$ とする。曲線 $y=1-x^2$ と $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし, A から x 軸に下ろした垂線の足を B とする。また, 原点を O とし, 線分 OB と線分 AB と曲線 $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　点 B の座標を求めよ。

(2)　面積 S を, a を用いて表せ。

(3)　面積 S を最大にする a の値を求めよ。　[1999]

■ 図形と式

1　a, b を実数とし, xy 平面上の 3 直線を

$$l: x+y=0,\ l_1: ax+y=2a+2,\ l_2: bx+y=2b+2$$

で定める。

(1)　直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2)　l, l_1, l_2 によって三角形がつくられるための a, b の条件を求めよ。

(3)　a, b は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような a, b の範囲を求め, それを ab 平面上に図示せよ。　[2011]

2　実数 $t>0$ に対して, 座標平面上に点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$, 点 $\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$, 点 $\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ をとる。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ。

(2)　(1)で求めた値を t_0 とする。$0<t<t_0$ のとき, 三角形△PQR の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。　[2009]

3　a を定数とする。xy 平面上の点の集合 $X(a)$, L を次のように定める。

$$X(a)=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ (x-a)^2+y^2 \leqq \frac{(a+1)^2}{4}\right\}$$

$$L=\{(x,\ y) \mid y=x-1\}$$

(1)　$X(a)\cap L=\phi$ となるような a の値の範囲を求めよ。(ただし ϕ は空集合を表す)

(2)　いかなる実数 a に対しても $\mathrm{P}\notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め, xy 平面上に図示せよ。　[2008]

4 $a,\ b$ を実数とする。方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち, すべての解の絶対値が 1 以下であるとする。

(1) この条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体を ab 平面上に図示せよ。

(2) $a+2b$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

5 xy 平面上の放物線 $A: y=x^2$, $B: y=-(x-a)^2+b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1>x_2)$ で交わるとする。

(1) $x_1-x_2=2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

(2) $x_1-x_2=2$ を満たしながら $a,\ b$ が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。 [2003]

6 a, b を $2b<3a<6b$ を満たす正の定数とする。

(1) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x+3y\leqq 12,\ 3x+y\leqq 12,\ a(x-3)+b(y-2)\leqq 0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

(2) 実数 x, y が(1)の連立不等式を満たすとき, $x+y$ の最大値を a, b を用いて表せ。

[2002]

7 (1) 次の不等式の表す領域 D を図示せよ。$|x|\leqq y\leqq -\frac{1}{2}x^2+3$

(2) 点 A を $\left(-\frac{7}{2},\ 0\right)$ とし, 点 B を直線 AB が $y=-\frac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき, 三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3) 領域 D の点 $(x,\ y)$ について, $\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。 [2000]

8 次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$$x-y<0,\ x+y<2,\ ax+(2a+3)y<1$$

[1998]

■ 図形と計量

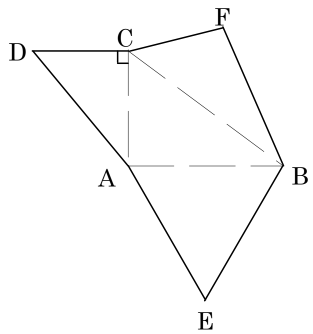
1 直角三角形 ABC において，$\angle C = \dfrac{\pi}{2}$，$AB = 1$ であるとする。$\angle B = \theta$ とおく。点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし，点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす。AE と CD の交点を F とする。

(1) $\dfrac{DE}{AC}$ を θ で表せ。

(2) $\triangle FEC$ の面積を θ で表せ。 [2010]

2 図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$AB = 4$，$AC = 3$，$BC = 5$，$\angle ACD = 90°$ で，$\triangle ABE$ は正三角形である。このとき，V の体積を求めよ。

[2009]



3 方程式 $x^2 + y^2 - 4y + 2 = 0$ で定義される円 C を考える。

(1) 点 $A(-\sqrt{2},\ 0)$ と $O(0,\ 0)$ を通り中心の座標が $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$ および $\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$ である 2 つの円は，どちらも円 C に接することを示せ。

(2) 点 P が円 C 上を動くとき，$\cos\angle APO$ の最大値と最小値を求めよ。 [2007]

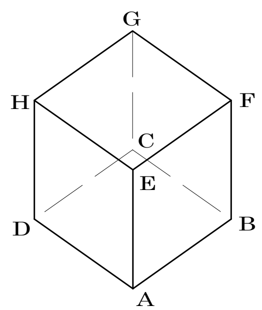
4 半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。 [2005]

5 1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある。3 点 A, C, F を含む平面と直線 BH の交点を P, P から面 ABCD に下ろした垂線の足を Q とする。

(1) 長方形 DBFH を描き，三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ。さらに，線分 BP, PQ の長さを求めよ。

(2) 四面体 ABCF に内接する球の中心を O とする。点 O は線分 BP 上にあることを示せ。

(3) 四面体 ABCF に内接する球の半径を求めよ。 [2004]



6　1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC を底面とする四面体 PABC を考える。$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}=2$ とする。

(1)　四面体 PABC の体積を求めよ。

(2)　辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F が $\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$，$\cos\angle\mathrm{EPF}=\dfrac{4}{5}$ を満たすとき，長さ AE を求めよ。　[2003]

7　面積 1 の三角形 ABC の各辺の長さをそれぞれ $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とする。さらに，C から直線 AB へ下ろした垂線の足 D が線分 AB 上にあるとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{AD}=x$ とするとき，$a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ を，x を用いて表せ。

(2)　$a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ を最小にする x を求めよ。また，そのときの $\angle\mathrm{BAC}$ の大きさを求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1　平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上を 2 点 P，Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$|\vec{a}|=r$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする。ただし，$0<r<1$ とする。

(1)　$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ。

(2)　直線 OA 上の点 B で，$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P，Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また，このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ。　[2017]

2　$\triangle\mathrm{ABC}$ が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1)　$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2)　(1)の β の値をすべて求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の外接円の中心を O とする。$\triangle\mathrm{ABC}$ が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s, t を求めよ。　[2016]

3 平面において，一直線上にない 3 点 O，A，B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ に垂直であるとする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を示せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を α とする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が $\pi-\alpha$ であることを示せ。

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ を示せ。 [2015]

4 △ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して，BC を $(p+1):p$ に外分する点を D とし，線分 AD と △ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OX}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。 [2014]

5 空間ベクトル $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を考える。$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ で，$\vec{b}$ は xy 平面上にあり，その y 成分は正とする。また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とおく。

(1) $|p|<1$ であることを示せ。また，p を用いて $\vec{b}$ の成分表示をかけ。

(2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ は相異なり，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$ を満たすとする。$\vec{c}$ の z 成分が正のとき，p を用いて $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の成分表示をかけ。

(3) 上の条件に加えて $\vec{c}\cdot\vec{d}=p$ であるとき p の値を求めよ。 [2013]

6 $m>0$，$n>0$，$0<x<1$ とする。△OAB の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P，辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする。また，線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S，線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，m, n, x で表せ。

(2) 3 点 O, S, T が一直線上にあるとき，x を m, n で表せ。 [2012]

7 空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-\sin 3t,\ \cos 3t,\ -1)$$

によって与えられている。ただし，$-180^\circ\leqq t\leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。 [2006]

8 正の数 a に対し，空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$ を考える。$\angle\mathrm{OPQ}=60^\circ$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) A から 3 点 O, P, Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1 自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 $a,\ n,\ k$ に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a\geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。 [2017]

2 x, y を自然数とする。

(1) $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2) $\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。 [2016]

3 p は 0 でない実数とし，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定まる数列 $\{a_n\}$ がある。

(1) $b_n=p^na_n$ とする。b_{n+1} を b_n , n, p で表せ。

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2015]

4 次の条件で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) 以下が成立するように，実数 $s, t\ (s>t)$ を定めよ。

$$\begin{cases} a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n) \\ a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n) \end{cases}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2) 一般項 a_n を求めよ。 [2014]

5　$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を，次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\underbrace{\{a_1\}}_{\text{第1群}},\ \underbrace{\{a_2,\ a_3,\ a_4\}}_{\text{第2群}},\ \underbrace{\{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\}}_{\text{第3群}},\ \cdots\cdots$$

k を自然数として，以下の問いに答えよ。

(1)　第 k 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ。

(3)　$(k^2+1)S_k \leqq \dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。　[2010]

6　座標平面上の点 $(a,\ b)$ で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ。$y=3x^2-6x$ で表される放物線を C とする。n を自然数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(n,\ 3n^2-6n)$ をとる。原点を $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とする。C と線分 OP で囲まれる図形を D とする。ただし，D は境界を含むとする。$0\leqq k\leqq n$ を満たす整数 k に対して，直線 $x=k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を $f(k)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(k)$ を求めよ。

(2)　D に含まれる格子点の総数を求めよ。

(3)　$f(k)$ が最大になるような k を求めよ。　[2009]

7　k を実数とし，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で数列 $\{a_n\}$ を定める。

(1)　$k=2$ のとき，一般項 a_n を求めよ。

(2)　すべての n について，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$ を満たす α，β に対して，$\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=1$ が成り立つことを示せ。

(3)　(2)において，異なる実数 α と β が存在するための k の条件を求め，そのときの α と β の値を求めよ。　[2008]

8　2 次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。すべての自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。　[2005]

9 xy 平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える。ただし, a, b, c は定数で $a\neq 0$ とする。この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ での接線が x 軸と交点をもつとき, その交点を $(f(p),\ 0)$ とする。

(1) $f(p)$ が p の 1 次関数になるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ。

(2) $x_1=p$, $x_2=f(x_1)$, $x_3=f(x_2)$, $\cdots$, $x_n=f(x_{n-1})$ とおくとき, (1)で求めた条件の下で x_n $(n\geqq 2)$ を求めよ。 [2001]

10 $\dfrac{1}{x}$ の小数部分が $\dfrac{x}{2}$ に等しくなるような正の数 x をすべて求めよ。ただし, 正の数 a の小数部分とは, a をこえない最大の整数 n との差 $a-n$ のことをいう。たとえば, 3 の小数部分は 0 であり, 3.14 の小数部分は 0.14 である。 [1998]

■ 確率

1 正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は, 1 秒ごとに, 隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか, もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が, n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし, $0<a<1$ とし, n は自然数とする。

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 確率 p_n を求めよ。 [2017]

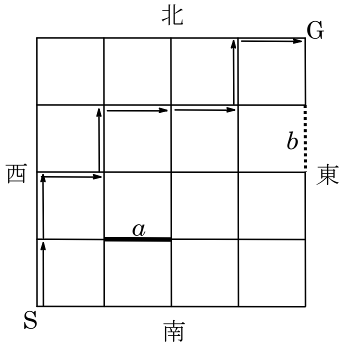
2 ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い, 4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。

[2015]

3　図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

4　次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i)　X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii)　X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii)　X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv)　X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(0,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。　[2013]

5　A と B の 2 チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合で A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。A が B より先に k 勝する確率を P_k とおく。

(1)　P_2 を p と q で表せ。

(2)　P_3 を p と q で表せ。

(3)　$\dfrac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_3<P_2$ であることを示せ。　[2012]

6　n を 2 以上の自然数, q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉, 1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を, 1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに, 小さい番号から順に白玉は q 個ずつ, 赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば, 1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し, 次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし, n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　s_2 を求めよ。

(2)　s_3 と a_3 を求めよ。

(3)　s_4 と a_4 を求めよ。　[2011]

7　1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

(1)　出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。

(2)　出る目の最小値が 1 で, かつ最大値が 6 である確率を求めよ。　[2008]

8　数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1, a_2, …, a_n を考える。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし, $j=1,\ 2,\ 3$ とする。

　(i)　$A_n(1)$, $A_n(2)$ を求めよ。

　(ii)　$n \geqq 2$ のとき, $A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$, $A_{n-1}(2)$, $A_{n-1}(3)$ で表し, $A_n(3)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき, 条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。　[2007]

9　1 つのさいころを投げ続けて, 同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1)　ちょうど 3 回目に終了する確率を求めよ。

(2)　3 回目以内（3 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(3)　ちょうど r 回目に終了する確率を求めよ。ただし $r \geqq 2$ とする。　[2006]

10　袋の中に赤，青，黄，緑の 4 色の球が 1 個ずつ合計 4 個入っている。袋から球を 1 個取り出してその色を記録し袋に戻す試行を，くり返し 4 回行う。こうして記録された相異なる色の数を X とし，X の値が k である確率を P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とする。

(1)　確率 P_3 と P_4 を求めよ。

(2)　X の期待値 E を求めよ。　[2005]

11　ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1)　$P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2)　$P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3)　$P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ。　[2004]

12　点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

13　(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち，1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。　[2002]

14　A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または 4 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\frac{1}{2}$ である。

(1)　A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ。

(2)　A が 2 連勝して終了する確率を求めよ。　[2001]

15　1 から 4 までの番号を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を抜き取り，番号を記録してもとに戻す。これを n 回繰り返したとき，記録された n 個の数の積が 3 の倍数である確率を a_n，4 の倍数である確率を b_n とおく。

(1)　a_n と b_n を求めよ。

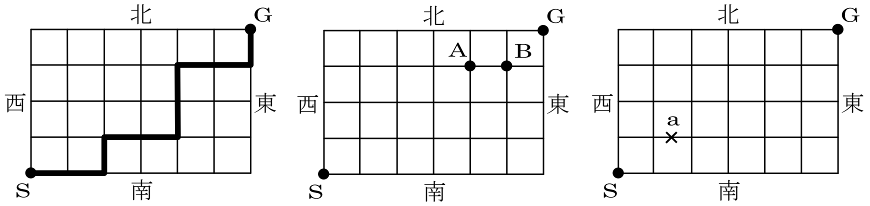
(2)　$n \geqq 2$ のとき，$b_n > a_n$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。　[2000]

16　図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

(3)　図 3 の a の部分が通行止めのとき，S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



（図1）　（図2）　（図3）

[1999]

■ 論証

1 次の命題の真偽を述べ，その理由を説明せよ。ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1) $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(2) x が実数であるとき，x^2+x が有理数ならば，x は有理数である。

(3) x，y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である。

[1999]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10\quad(-2\leqq x\leqq 4)$ とおく。

(1)　関数 $y=f(x)$ のグラフをかけ。グラフと x 軸との 2 つの交点の x 座標 α, β $(\alpha<\beta)$ の値も求めよ。

(2)　(1)の α, β に対して，定積分 $\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$-2\leqq x\leqq 4$ において，$f(x)=|x(x-2)|+|(x-1)(x-4)|+3x-10$ に対して，

(i)　$-2\leqq x<0$ のとき

$$f(x)=x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=2x^2-4x-6=2(x-1)^2-8$$

(ii)　$0\leqq x<1$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)+(x-1)(x-4)+3x-10=-6$$

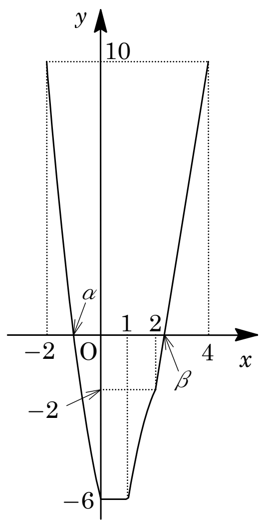
(iii)　$1\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=-x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10$$
$$=-2x^2+10x-14=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{3}{2}$$

(iv)　$2\leqq x<4$ のとき

$$f(x)=x(x-2)-(x-1)(x-4)+3x-10=6x-14$$

(i)～(iv)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



また，$-2\leqq x<0$ における x 軸との交点 $x=\alpha$ は，$2x^2-4x-6=0$ から $\alpha=-1$ となり，$2\leqq x<4$ における x 軸との交点 $x=\beta$ は，$6x-14=0$ から $\beta=\dfrac{7}{3}$ である。

(2)　$I=\displaystyle\int_\alpha^\beta f(x)\,dx$ とおくと，I は $y=f(x)$ のグラフと x 軸ではさまれた領域の面積の符号を変えた数値となり，

$$I=\int_{-1}^0(2x^2-4x-6)\,dx-1\cdot 6+\int_1^2(-2x^2+10x-14)\,dx-\frac{1}{2}\left(\frac{7}{3}-2\right)\cdot 2$$
$$=\left[\frac{2}{3}x^3-2x^2-6x\right]_{-1}^0-6+\left[-\frac{2}{3}x^3+5x^2-14x\right]_1^2-\frac{1}{3}$$
$$=\frac{2}{3}+2-6-6-\frac{2}{3}\cdot 7+5\cdot 3-14-\frac{1}{3}=-\frac{40}{3}$$

コメント

場合分けをして，絶対値つきの関数のグラフをかく問題です。なお，(2)については，計算を少し簡単にするために，長方形や三角形は符号付きの面積を対応させています。

問　題

$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x$　$(0\leqq x\leqq 2\pi)$ とする。

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおき，$f(x)$ を t の関数で表せ。

(2)　t の取りうる値の範囲を求めよ。

(3)　$f(x)$ の最大値と最小値，およびそのときの x の値を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$t=\sin x+\cos x$ とおくと，$t^2=1+2\sin x\cos x$ から $\sin x\cos x=\dfrac{1}{2}(t^2-1)$ となり，

$$f(x)=\sqrt{2}\sin x\cos x+\sin x+\cos x=\frac{\sqrt{2}}{2}(t^2-1)+t=\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+t-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 2\pi$ において，$t=\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)$ より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　$f(x)=g(t)$ とおくと，(1)より，$g(t)=\dfrac{\sqrt{2}}{2}\left(t+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)^2-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$

すると，$t=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は最小値 $-\dfrac{3}{4}\sqrt{2}$ をとる。

このとき，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ から，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=-\dfrac{1}{2}$ となり，

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{7}{6}\pi,\ \frac{11}{6}\pi,\quad x=\frac{11}{12}\pi,\ \frac{19}{12}\pi$$

また，$t=\sqrt{2}$ のとき，$g(t)$ すなわち $f(x)$ は最大値 $\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$ をとる。

このとき，$\sqrt{2}\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sqrt{2}$ から，$\sin\left(x+\dfrac{\pi}{4}\right)=1$ となり，

$$x+\frac{\pi}{4}=\frac{\pi}{2},\quad x=\frac{\pi}{4}$$

コメント

三角関数の基本の確認です。

問　題

実数 x に対して $k \leqq x < k+1$ を満たす整数 k を $[\,x\,]$ で表す。たとえば，$[\,2\,]=2$，$\left[\dfrac{5}{2}\right]=2$，$[\,-2.1\,]=-3$ である。

(1) $n^2-5n+5<0$ を満たす整数 n をすべて求めよ。

(2) $[\,x\,]^2-5[\,x\,]+5<0$ を満たす実数 x の範囲を求めよ。

(3) x は(2)で求めた範囲にあるものとする。$x^2-5[\,x\,]+5=0$ を満たす x をすべて求めよ。 [2011]

解答例

(1) $n^2-5n+5<0$ ……①より，$\dfrac{5-\sqrt{5}}{2}<n<\dfrac{5+\sqrt{5}}{2}$ となり，$2<\sqrt{5}<3$ から，

$$1<\frac{5-\sqrt{5}}{2}<\frac{3}{2},\ \ \frac{7}{2}<\frac{5+\sqrt{5}}{2}<4$$

よって，①を満たす整数 n は，$n=2,\ 3$

(2) $[\,x\,]=n$ とおくと，$[\,x\,]^2-5[\,x\,]+5<0$ は①と一致するので, (1)より，$[\,x\,]=2,\ 3$

よって，$2\leqq x<4$

(3) $2\leqq x<4$ のとき，$x^2-5[\,x\,]+5=0$ ……②に対して，

(i) $[\,x\,]=2\ (2\leqq x<3)$ のとき

②より，$x^2-10+5=0$ となり，$2\leqq x<3$ から，$x=\sqrt{5}$

(ii) $[\,x\,]=3\ (3\leqq x<4)$ のとき

②より，$x^2-15+5=0$ となり，$3\leqq x<4$ から，$x=\sqrt{10}$

(i)(ii)より，$x=\sqrt{5},\ \sqrt{10}$

コメント

ガウス記号を題材としていますが，内容は与えられた定義の理解を問うものです。

問　題

$\gamma=1+\sqrt{3}i$ とする。ただし, i は虚数単位である。実数 a, b に対して多項式 $P(x)$ を, $P(x)=x^4+ax^3+bx^2-8(\sqrt{3}+1)x+16$ で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $P(\gamma)=0$ となるように a と b を定めよ。

(2) (1)で定めた a と b に対して, $P(x)=0$ となる複素数 x で γ 以外のものをすべて求めよ。 [2009]

解答例

(1) 実数係数の方程式 $P(x)=0$ の解の 1 つが $\gamma=1+\sqrt{3}i$ より, $\overline{\gamma}=1-\sqrt{3}i$ も解となり

$$\gamma+\overline{\gamma}=2,\ \gamma\overline{\gamma}=4$$

これより, $P(x)$ を x^2-2x+4 で割ると,

$$P(x)=(x^2-2x+4)\{x^2+(a+2)x+2a+b\}+(2b-8\sqrt{3}-16)x-8a-4b+16$$

すると, 余りが 0 になることより,

$$2b-8\sqrt{3}-16=0\cdots\cdots\cdots①,\ -8a-4b+16=0\cdots\cdots\cdots②$$

①より, $b=8+4\sqrt{3}$

②に代入して, $a=\dfrac{1}{2}(4-b)=-2-2\sqrt{3}$

(2) (1)より, $P(x)=(x^2-2x+4)(x^2-2\sqrt{3}x+4)$ となり, $P(x)=0$ の $x\neq\gamma$ の解は,

$$x=1-\sqrt{3}i,\ x=\sqrt{3}\pm i$$

コメント

複素数と方程式の基本問題ですので, 計算ミスが致命傷になります。

問　題

b は実数とし，c は 0 でない実数とする。2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ の解を α，β とおく。

(1)　α，β はともに 0 でないことを示せ。

(2)　$\dfrac{\alpha}{\beta}$ または $\dfrac{\beta}{\alpha}$ が実数 r に等しいとき，b^2 を c と r を用いて表せ。　[2006]

解答例

(1)　2 次方程式 $x^2+bx+c=0$ に対し，解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta=-b\cdots\cdots\cdots①,\ \ \alpha\beta=c\cdots\cdots\cdots②$$

$c\neq 0$ なので，②から α，β はともに 0 ではない。

(2)　(i)　$\dfrac{\alpha}{\beta}=r$ のとき

$\alpha=\beta r$ より，①，②に代入して，

$$\beta(r+1)=-b\cdots\cdots\cdots③,\ \ \beta^2r=c\cdots\cdots\cdots④$$

$r\neq -1$ のとき，③より $\beta=\dfrac{-b}{r+1}$ となり，④に代入すると，

$$\frac{b^2}{(r+1)^2}r=c,\ \ b^2=\frac{(r+1)^2}{r}c\cdots\cdots\cdots⑤$$

$r=-1$ のとき，③より $b=0$ となるが，この場合は⑤に含まれる。

(ii)　$\dfrac{\beta}{\alpha}=r$ のとき

(i)と同様にすると，α，β に関する対称性より，⑤を導くことができる。

(i)(ii)より，$b^2=\dfrac{(r+1)^2}{r}c$

コメント

2 次方程式の解と係数の関係についての問題です。式変形がやや煩雑です。

問　題

正の実数 a に対し，$x = a + \dfrac{1}{a}$，$y = a - \dfrac{1}{a}$ とおく。このとき $x^8 - y^8$ が最小となる a の値と，その最小値を求めよ。　[2004]

解答例

$x = a + \dfrac{1}{a}$，$y = a - \dfrac{1}{a}$ より，$x + y = 2a$，$x - y = \dfrac{2}{a}$，$xy = a^2 - \dfrac{1}{a^2}$ となり，

$$x^2 - y^2 = 2a \cdot \frac{2}{a} = 4,\quad x^2 + y^2 = (2a)^2 - 2\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right) = 2a^2 + \frac{2}{a^2}$$

さて，$x^8 - y^8 = (x^4 - y^4)(x^4 + y^4) = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2)(x^4 + y^4)$ なので，

$$x^4 + y^4 = (x^2 - y^2)^2 + 2x^2y^2 = 4^2 + 2\left(a^2 - \frac{1}{a^2}\right)^2 = 2a^4 + \frac{2}{a^4} + 12$$

よって，$x^8 - y^8 = 4\left(2a^2 + \dfrac{2}{a^2}\right)\left(2a^4 + \dfrac{2}{a^4} + 12\right) = 16\left(a^2 + \dfrac{1}{a^2}\right)\left(a^4 + \dfrac{1}{a^4} + 6\right)$

$$= 16\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)\left\{\left(a^2 + \frac{1}{a^2}\right)^2 + 4\right\}$$

ここで，$t = a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ とおくと，$t \geqq 2\sqrt{a^2 \cdot \dfrac{1}{a^2}} = 2$ となり，等号は $a^2 = \dfrac{1}{a^2}$ すなわち $a^4 = 1$, $a > 0$ から $a = 1$ のときに成立する。

そこで，$f(t) = 16t(t^2 + 4) = 16(t^3 + 4t)$ とおくと，$f'(t) = 16(3t^2 + 4) > 0$ なので，

$$f(t) \geqq f(2) = 256 \quad (t \geqq 2)$$

以上より，$x^8 - y^8$ は $a = 1$ のとき最小値 256 をとる。

コメント

$a^2 + \dfrac{1}{a^2}$ を 1 つの文字として置き換えればよいことは，計算を進めていくうちにわかってきます。そうすると，相加平均・相乗平均の出番です。

問　題

関数 $f(x)$, $g(x)$ を次のように定める。$f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x+c$

ただし, a, b, c は定数とする。

(1) $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ となるための a, b, c の満たす条件を求めよ。

(2) (1)の条件のもとで, $0\leqq x\leqq 1$ における 2 つの関数のグラフの共有点の個数を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $f(x)=x^2+ax+b$, $g(x)=x+c$ に対して, $\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx$ より,

$$\int_0^1 (x^2+ax+b)\,dx=\int_0^1 (x+c)\,dx\,,\ \left[\frac{x^3}{3}+\frac{ax^2}{2}+bx\right]_0^1=\left[\frac{x^2}{2}+cx\right]_0^1$$

よって, $\frac{1}{3}+\frac{a}{2}+b=\frac{1}{2}+c$ より, $c=\frac{a}{2}+b-\frac{1}{6}$

(2) $f(x)=g(x)$ とすると, $x^2+(a-1)x+b-c=0$

(1)より, $x^2+(a-1)x-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=0$ ………(＊)

さて, 2 つの関数 $f(x)$, $g(x)$ のグラフの共有点の個数は, (＊)の実数解の個数に一致する。よって, $h(x)=x^2+(a-1)x-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}$ とおき, $0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)=0$ の実数解の個数を求める。

ここで, $h(0)=-\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{3}\right)$, $h(1)=\frac{1}{2}a+\frac{1}{6}=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{3}\right)$ であり, さらに, $h\left(\frac{1}{2}\right)=-\frac{1}{12}<0$ に注目すると,

(i) $a>\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)<0$, $h(1)>0$ より, $0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 1 個の実数解をもつ。

よって, $f(x)$, $g(x)$ のグラフは 1 個の共有点をもつ。

(ii) $-\frac{1}{3}\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)\geqq 0$, $h(1)\geqq 0$ より, $0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 2 個の実数解をもつ。

よって, $f(x)$, $g(x)$ のグラフは 2 個の共有点をもつ。

(iii) $a<-\frac{1}{3}$ のとき

$h(0)>0$, $h(1)<0$ より, $0\leqq x\leqq 1$ において $h(x)=0$ は 1 個の実数解をもつ。

よって, $f(x)$, $g(x)$ のグラフは 1 個の共有点をもつ。

コメント

$h\left(\frac{1}{2}\right)<0$ であることが発見できれば, 場合分けの繁雑さが軽減できます。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフを書け。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ のとき，x の関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ の最小値とそれを与える x を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ に対して，

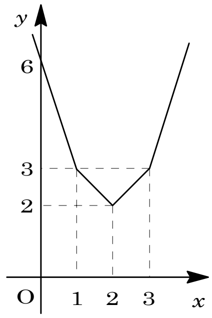
(i)　$x<1$ のとき　$y=-(x-1)-(x-2)-(x-3)=-3x+6$

(ii)　$1\leqq x<2$ のとき　$y=(x-1)-(x-2)-(x-3)=-x+4$

(iii)　$2\leqq x<3$ のとき　$y=(x-1)+(x-2)-(x-3)=x$

(iv)　$x\geqq 3$ のとき　$y=(x-1)+(x-2)+(x-3)=3x-6$

以上まとめると，関数 $y=|x-1|+|x-2|+|x-3|$ のグラフは右図の折れ線のようになる。



(2)　(1)と同様に考えると，関数 $y=\displaystyle\sum_{k=1}^{2n+1}|x-k|$ のグラフは，連続な折れ線となり，$n\leqq x<n+1$ のとき傾き -1，$n+1\leqq x<n+2$ のとき傾き 1 なので，この折れ線の傾きが負から正に変わるのは，$x=n+1$ の前後である。

よって，最小値を与える x は $x=n+1$ であり，その値は，

$$\sum_{k=1}^{2n+1}|n+1-k|=\sum_{k=1}^{n}(n+1-k)+0+\sum_{k=n+2}^{2n+1}(k-n-1)=\sum_{k=1}^{n}k+\sum_{k=1}^{n}k$$
$$=\frac{1}{2}n(n+1)\times 2=n(n+1)$$

コメント

有名問題です。(2)の解は，(1)から類推するものでしょうが，どの程度まで書けばよいのか迷います。

問　題

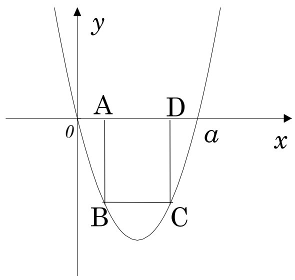
正の数 a に対し，関数 $y=x^2-ax$ $\left(\dfrac{a}{6}\leqq x\leqq\dfrac{5a}{6}\right)$ のグラフを C とする。長方形 T で，一辺が x 軸に含まれ，その対辺の両端が C 上にあるものをすべて考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 長方形 T の周の長さの最大値を，a を用いて表せ。ただし，長方形の周の長さとは, 4 辺の長さの和のことをいう。

(2) 長方形 T の面積の最大値を, a を用いて表せ。 [1998]

解答例

(1) 放物線 C の軸が $x=\dfrac{a}{2}$ から，$0<t\leqq\dfrac{a}{3}$ として，長方形の左側の辺を $x=\dfrac{a}{2}-t$，右側の辺を $x=\dfrac{a}{2}+t$ と表すと，



$$\mathrm{AD}=2t$$
$$\mathrm{AB}=-\left\{\left(\frac{a}{2}-t\right)^2-a\left(\frac{a}{2}-t\right)\right\}=-t^2+\frac{a^2}{4}$$

周の長さ l は,

$$l=2\cdot 2t+2\left(-t^2+\frac{a^2}{4}\right)=-2t^2+4t+\frac{a^2}{2}=-2(t-1)^2+2+\frac{a^2}{2}$$

(i) $1\leqq\dfrac{a}{3}$ $(a\geqq 3)$ のとき　$t=1$ のとき l は最大で，最大値は $2+\dfrac{a^2}{2}$

(ii) $\dfrac{a}{3}<1$ $(0<a<3)$ のとき　$t=\dfrac{a}{3}$ のとき l は最大で，最大値は $\dfrac{5}{18}a^2+\dfrac{4}{3}a$

(2) 長方形の面積を S とすると,

$$S=2t\left(-t^2+\frac{a^2}{4}\right)=-2t^3+\frac{a^2}{2}t$$
$$S'=-6t^2+\frac{a^2}{2}=-6\left(t-\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)\left(t+\frac{\sqrt{3}}{6}a\right)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

$t=\dfrac{\sqrt{3}}{6}a$ のとき S は最大で，最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{18}a^3$

コメント

放物線の軸に関する対称性を利用して変数を設定するところが，本問の唯一のポイントです。これによって(2)の計算量はぐっと減ります。

問　題

a, b を実数とし，関数 $f(x)$ が，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1}f(t)dt$ を満たすとする。

(1)　$f(0)$ の値を a を用いて表せ。

(2)　関数 $f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつとする。このような a, b が満たす条件を求めよ。また，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面上に図示せよ。　[2017]

解答例

(1)　$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\int_{-1}^{1}f(t)dt$ に対して，$f(0)=c$ とおくと，

$$c=\int_{-1}^{1}f(t)dt\ \cdots\cdots\cdots①,\quad f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+c\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②から，

$$c=\int_{-1}^{1}\left\{\frac{1}{3}t^3-at^2+(a^2-b)t+c\right\}dt=2\int_{0}^{1}(-at^2+c)dt=-\frac{2}{3}a+2c$$

よって，$c=\frac{2}{3}a$ となり，$f(0)=\frac{2}{3}a$ である。

(2)　(1)より，$f(x)=\frac{1}{3}x^3-ax^2+(a^2-b)x+\frac{2}{3}a$ となり，

$$f'(x)=x^2-2ax+(a^2-b)=(x-a)^2-b$$

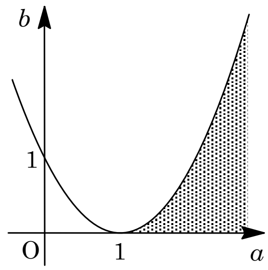
ここで，$f(x)$ が $x>1$ の範囲で極大値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもち，これを $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$ とおくと，右表より $1<\alpha<\beta$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，求める条件は，$a>1$ かつ $-b<0$ かつ $f'(1)=1-2a+a^2-b>0$ となり，

$$a>1,\ 0<b<(a-1)^2$$

そして，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ の存在範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。



コメント

(1)はおきかえ型の積分方程式，(2)は極値の条件を求めるもので，ともに基本的で頻出の題材です。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ とおく。曲線 $C: y=f(x)$ 上に異なる 2 点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$，$\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ がある。

(1) P における C の接線の方程式を求めよ。

(2) P における C の接線と Q における C の接線が平行になるための条件を $s,\ t,\ a$ の関係式として求めよ。

(3) (2)の条件のもとで，線分 PQ の中点が C 上にあることを示せ。 [2016]

解答例

(1) $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=3x^2+2ax+b$ となり，$C: y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{P}(s,\ f(s))$ における接線の方程式は,

$$y-(s^3+as^2+bs+c)=(3s^2+2as+b)(x-s)$$

$$y=(3s^2+2as+b)x-2s^3-as^2+c$$

(2) P における C の接線と $\mathrm{Q}(t,\ f(t))$ における C の接線が平行より，$f'(s)=f'(t)$

$$3s^2+2as+b=3t^2+2at+b,\ \ 3(s^2-t^2)+2a(s-t)=0$$

$s\neq t$ から，$3(s+t)+2a=0$ ………(＊)

(3) 線分 PQ の中点を $\mathrm{M}(u,\ v)$ とおくと，(＊)から，$u=\dfrac{1}{2}(s+t)=-\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}a=-\dfrac{a}{3}$

$$v=\frac{1}{2}\{(s^3+as^2+bs+c)+(t^3+at^2+bt+c)\}$$

$$=\frac{1}{2}\{(s+t)^3-3st(s+t)+a(s+t)^2-2ast+b(s+t)+2c\}$$

$$=\frac{1}{2}\Big(-\frac{8}{27}a^3+3st\cdot\frac{2}{3}a+a\cdot\frac{4}{9}a^2-2ast-b\cdot\frac{2}{3}a+2c\Big)=\frac{2}{27}a^3-\frac{1}{3}ab+c$$

また，$f(u)=u^3+au^2+bu+c=-\dfrac{a^3}{27}+a\cdot\dfrac{a^2}{9}-\dfrac{1}{3}ab+c=\dfrac{2}{27}a^3-\dfrac{1}{3}ab+c$

よって，$v=f(u)$ より，線分 PQ の中点 $\mathrm{M}(u,\ v)$ は C 上にある。

コメント

3 次曲線の接線について，基本を確認する問題です。

問　題

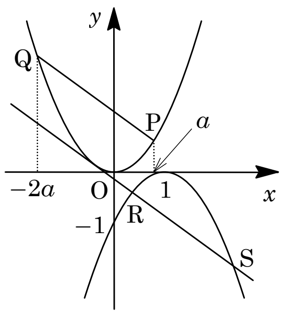
2 つの放物線 $C_1: y = x^2$，$C_2: y = -(x-1)^2$ がある。a は 0 でない実数とし，C_1 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線と平行な C_1 の接線を l とする。

(1) l の方程式を a で表せ。

(2) C_2 と l が異なる 2 つの共有点をもつような a の値の範囲を求めよ。

(3) C_2 と l が異なる 2 つの共有点 R, S をもつとする。線分 PQ の長さと線分 RS の長さが等しくなるとき，a の値を求めよ。 [2015]

解答例



(1) $C_1: y = x^2 \cdots\cdots$①，$C_2: y = -(x-1)^2 \cdots\cdots$②に対し，$C_1$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ a^2)$，$\mathrm{Q}(-2a,\ 4a^2)$ を通る直線の傾きは，

$$\frac{a^2 - 4a^2}{a + 2a} = -a$$

①から $y' = 2x$ なので，C_1 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線の傾きは $2t$ となり，接線 l について，

$$2t = -a,\ t = -\frac{a}{2}$$

これより，接線 l との方程式は，$y - \dfrac{a^2}{4} = -a\left(x + \dfrac{a}{2}\right)$，$y = -ax - \dfrac{a^2}{4} \cdots\cdots\cdots$③

(2) ②③を連立すると，$-(x-1)^2 = -ax - \dfrac{a^2}{4}$ となり，

$$x^2 - (a+2)x - \frac{a^2}{4} + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

C_2 と l は異なる 2 つの共有点をもつので，$D = (a+2)^2 - 4\left(-\dfrac{a^2}{4} + 1\right) > 0$ から，

$$2a^2 + 4a > 0,\ a(a+2) > 0$$

よって，$a < -2$，$0 < a$ となる。

(3) ④の 2 つの解 $x = \dfrac{a + 2 \pm \sqrt{2a^2 + 4a}}{2}$ を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，これは，それぞれ交点 R, S の x 座標である。

条件より，線分 PQ と線分 RS は平行であり，さらに $\mathrm{PQ} = \mathrm{RS}$ なので，

$$|a - (-2a)| = \beta - \alpha,\ 3|a| = \sqrt{2a^2 + 4a},\ 9a^2 = 2a^2 + 4a$$

よって，$a \neq 0$ から，$a = \dfrac{4}{7}$ である。

コメント

頻出タイプの微分の問題です。(3)では x 座標の差だけ考えればよいので，計算量が少なくてすみました。

問　題

2 つの放物線　$C_1 : y = -x^2 + \dfrac{3}{2}$，$C_2 : y = (x-a)^2 + a$　$(a > 0)$ がある。点 $\mathrm{P_1}\left(p,\ -p^2 + \dfrac{3}{2}\right)$における$C_1$の接線を$l_1$とする。

(1)　C_1とC_2が共有点をもたないためのaに関する条件を求めよ。

(2)　l_1と平行なC_2の接線l_2の方程式と，l_2とC_2の接点$\mathrm{P_2}$の座標をa, pを用いて表せ。

(3)　C_1とC_2が共有点をもたないとする。(2)で求めた$\mathrm{P_2}$と$\mathrm{P_1}$を結ぶ線分がl_1と垂直になるとき，pを求めよ。　[2014]

解答例

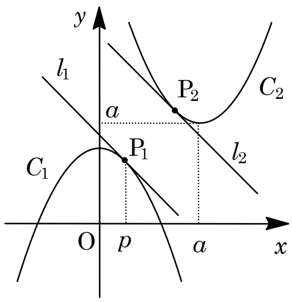
(1)　$C_1 : y = -x^2 + \dfrac{3}{2}$……①，$C_2 : y = (x-a)^2 + a$……②を連立すると，

$$-x^2 + \frac{3}{2} = (x-a)^2 + a,\ 4x^2 - 4ax + 2a^2 + 2a - 3 = 0$$

C_1とC_2が共有点をもたないことより，$D/4 = 4a^2 - 4(2a^2 + 2a - 3) < 0$

$$a^2 + 2a - 3 > 0,\ (a+3)(a-1) > 0$$

$a > 0$より，$a > 1$である。



(2)　①より$y' = -2x$となり，点$\mathrm{P_1}\left(p,\ -p^2 + \dfrac{3}{2}\right)$における$C_1$の接線$l_1$の傾きは$-2p$である。そこで，$l_1$と平行な$C_2$の接線$l_2$の方程式を$y = -2px + k$……③とおく。

②③を連立すると，$(x-a)^2 + a = -2px + k$となり，

$$x^2 - 2(a-p)x + a^2 + a - k = 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

④が重解をもつことより，$D/4 = (a-p)^2 - (a^2 + a - k) = 0$

$$-2ap + p^2 - a + k = 0,\ k = -p^2 + 2ap + a$$

よって，$l_2 : y = -2px - p^2 + 2ap + a$である。

また，l_2とC_2の接点$\mathrm{P_2}$のx座標は，④の重解なので，

$$x = a - p,\ y = (a - p - a)^2 + a = p^2 + a$$

これより，$\mathrm{P_2}(a-p,\ a+p^2)$となる。

(3)　(2)より，$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} = \left(a - p - p,\ a + p^2 + p^2 - \dfrac{3}{2}\right) = \left(a - 2p,\ a + 2p^2 - \dfrac{3}{2}\right)$

また，l_1の方向ベクトルを$\vec{u} = (1,\ -2p)$とすると，条件より$\overrightarrow{\mathrm{P_1P_2}} \cdot \vec{u} = 0$となり，

$$a - 2p - 2p\left(a + 2p^2 - \frac{3}{2}\right) = 0,\ a + p - 4p^3 - 2ap = 0$$

すると，$(1-2p)a + p(1-2p)(1+2p) = 0$，$(1-2p)(2p^2 + p + a) = 0$………⑤

ここで，(1)から$a > 1$のとき，$2p^2 + p + a = 0$の判別式$D = 1 - 8a < 0$となるので，$2p^2 + p + a = 0$は実数解をもたない。

よって，⑤より，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

放物線と接線を題材にした基本問題です。(2)では重解条件を利用しましたが，まず接点 P_2 を設定する方法でも構いません。

問　題

実数 t が $0 \leqq t < 8$ を満たすとき，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ を考える。

(1)　点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引けることを示せ。

(2)　(1)での 2 本の接線の接点を Q および R とする。線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。　[2013]

解答例

(1)　$y=x^2$ に対して $y'=2x$ となるので，接点を $(u,\ u^2)$ とすると，接線の方程式は，

$$y-u^2=2u(x-u),\quad y=2ux-u^2$$

ここで，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ を通ることより，

$$t^3-8t^2+15t-56=2ut-u^2,\quad u^2-2tu+t^3-8t^2+15t-56=0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

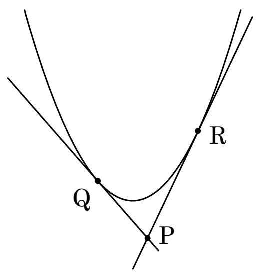
$(*)$の判別式を D とすると，

$$D/4=t^2-(t^3-8t^2+15t-56)=-t^3+9t^2-15t+56=-(t-8)(t^2-t+7)$$

ここで，$0 \leqq t < 8$ で，$t^2-t+7=\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{27}{4}>0$ から，$D>0$ となり，$(*)$は異なる 2 実数解をもつ。

すなわち，点 P から放物線 $y=x^2$ に 2 本の異なる接線が引ける。

(2)　$(*)$の解は，$u=t\pm\sqrt{-(t-8)(t^2-t+7)}$ となり，これを $u=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ とおく。



すると，接線の方程式は，

$$y=2\alpha x-\alpha^2,\quad y=2\beta x-\beta^2$$

この交点は，$2\alpha x-\alpha^2=2\beta x-\beta^2$ から，

$$x=\frac{\beta^2-\alpha^2}{2(\beta-\alpha)}=\frac{\alpha+\beta}{2}$$

よって，線分 PQ, PR と放物線 $y=x^2$ で囲まれた領域の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x^2-2\alpha x+\alpha^2)dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x^2-2\beta x+\beta^2)dx$$

$$=\int_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_{\alpha}^{\frac{\alpha+\beta}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{\beta-\alpha}{2}\right)^3-\frac{1}{3}\left(\frac{\alpha-\beta}{2}\right)^3=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3$$

$$=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{-(t-8)(t^2-t+7)}\right)^3=\frac{2}{3}\left\{-(t-8)(t^2-t+7)\right\}^{\frac{3}{2}}$$

コメント

センター試験でも出題されている超頻出の問題です。ただ，点 P の座標の設定が $\mathrm{P}(t,\ t^3-8t^2+15t-56)$ となって訳あり風ですが，この意味は不明です。なお，$D/4$ の因数分解は，与えられた条件から推測して行っています。

問　題

$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ で定義された関数 $f(\theta) = 4\cos 2\theta \sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ を考える。

(1)　$x = \sin\theta$ とおく。$f(\theta)$ を x で表せ。

(2)　$f(\theta)$ の最大値と最小値，およびそのときの θ の値を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　条件より，$f(\theta) = 4\cos 2\theta\sin\theta + 3\sqrt{2}\cos 2\theta - 4\sin\theta$ なので，

$$f(\theta) = 4(1-2\sin^2\theta)\sin\theta + 3\sqrt{2}(1-2\sin^2\theta) - 4\sin\theta$$
$$= -8\sin^3\theta - 6\sqrt{2}\sin^2\theta + 3\sqrt{2}$$

ここで，$x = \sin\theta$ とおくと，$f(\theta) = -8x^3 - 6\sqrt{2}x^2 + 3\sqrt{2}$

(2)　$-\frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}$ より $-1 \leqq x \leqq 1$ となり，$f(\theta) = g(x)$ とおくと，

$$g'(x) = -24x^2 - 12\sqrt{2}x$$
$$= -12x(2x + \sqrt{2})$$

すると，$g(x)$ の値の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$g(x)$		$\searrow$	$2\sqrt{2}$	$\nearrow$	$3\sqrt{2}$	$\searrow$	

ここで，$g(-1) = 8 - 3\sqrt{2}$ であり，$8 - 3\sqrt{2} < 3\sqrt{2}$ から $f(\theta) = g(x)$ の最大値は $3\sqrt{2}$ である。このとき，$x = \sin\theta = 0$ から $\theta = 0$ となる。

また，$g(1) = -8 - 3\sqrt{2}$ であり，$f(\theta) = g(x)$ の最小値は $-8 - 3\sqrt{2}$ である。このとき，$x = \sin\theta = 1$ から $\theta = \frac{\pi}{2}$ となる。

コメント

微分の応用の基本問題です。計算ミスをすると致命傷になります。

問　題

xy 平面上に 3 点 $\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(a+3,\ b)$, $\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ がある。不等式 $y \geqq x^2$ の表す領域を D, 不等式 $y \leqq x^2$ の表す領域を E とする。

(1) 点 C が領域 D に含まれ, 点 A と点 B が領域 E に含まれるような a, b の条件を連立不等式で表せ。

(2) (1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の領域 F を ab 平面上に図示せよ。

(3) (2)で求めた領域 F の面積を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $\mathrm{C}(a+1,\ b+2)$ が領域 $D : y \geqq x^2$ に含まれることより,

$$b+2 \geqq (a+1)^2,\ b \geqq (a+1)^2-2 \cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{A}(a,\ b)$, $\mathrm{B}(a+3,\ b)$ が領域 $E : y \leqq x^2$ に含まれることより,

$$b \leqq a^2 \cdots\cdots\cdots②,\ b \leqq (a+3)^2 \cdots\cdots\cdots③$$

したがって, 求める a, b の条件は, ①②③である。

(2) ①②の境界線の交点は,

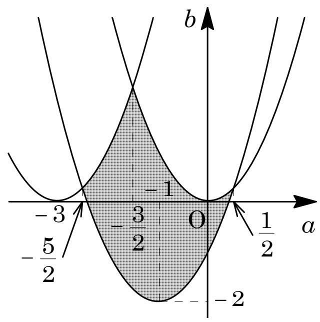
$$(a+1)^2-2 = a^2,\ 2a-1 = 0$$

よって, $a = \dfrac{1}{2}$ から, 点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

また, ①③の境界線の交点は,

$$(a+1)^2-2 = (a+3)^2,\ 4a+10 = 0$$

よって, $a = -\dfrac{5}{2}$ から, 点 $\left(-\dfrac{5}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$



以上より, ①②③で表される領域 F は右図の網点部となる。ただし, 境界線は領域に含む。

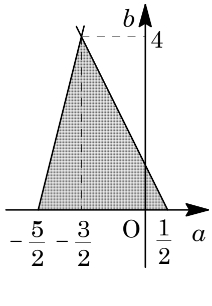
(3) 領域 F の面積を S とすると,

$$S = \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} \{(a+3)^2-(a+1)^2+2\}da + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} \{a^2-(a+1)^2+2\}da$$

$$= \int_{-\frac{5}{2}}^{-\frac{3}{2}} (4a+10)da + \int_{-\frac{3}{2}}^{\frac{1}{2}} (-2a+1)da$$

すると, S は右図の網点部の面積となり,

$$S = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}+\frac{5}{2}\right)\cdot 4 = 6$$



コメント

積分と面積の基本問題です。積分値の計算は, 三角形の面積を対応させていますが, 普通に計算しても構いません。

問　題

a を正の実数，b と c を実数とし，2 点 P$(-1,\ 3)$，Q$(1,\ 4)$ を通る放物線 $y=ax^2+bx+c$ を C とおく。C 上の 2 点 P, Q における C の接線をそれぞれ l_1，l_2 とする。

(1) b の値を求め，c を a で表せ。

(2) l_1 と l_2 の交点の座標を a で表せ。

(3) 放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれる図形の面積が 1 に等しくなるような a の値を求めよ。　[2011]

解答例

(1) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ が，2 点 P$(-1,\ 3)$，Q$(1,\ 4)$ を通るので，

$$a-b+c=3\cdots\cdots\cdots①,\quad a+b+c=4\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b=\dfrac{1}{2}$ となり，また $a+c=\dfrac{7}{2}$ から，$c=\dfrac{7}{2}-a$

(2) (1)より，$y=ax^2+\dfrac{1}{2}x+\dfrac{7}{2}-a$ となり，$y'=2ax+\dfrac{1}{2}$

点 P における C の接線 l_1 は，

$$y-3=\left(-2a+\frac{1}{2}\right)(x+1),\quad y=\left(-2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

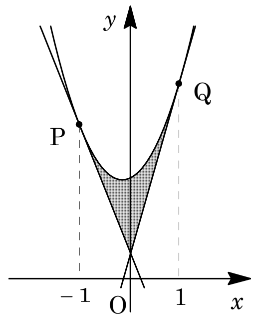
点 Q における C の接線 l_2 は，

$$y-4=\left(2a+\frac{1}{2}\right)(x-1),\quad y=\left(2a+\frac{1}{2}\right)x-2a+\frac{7}{2}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$x=0$，$y=-2a+\dfrac{7}{2}$

よって，l_1 と l_2 の交点の座標は，$\left(0,\ -2a+\dfrac{7}{2}\right)$ である。

(3) 放物線 C と接線 l_1 は $x=-1$ で接し，C と l_2 は $x=1$ で接していることに留意すると，放物線 C と接線 l_1，l_2 で囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\int_{-1}^{0}a(x+1)^2dx+\int_{0}^{1}a(x-1)^2dx$$
$$=\frac{a}{3}\Big[(x+1)^3\Big]_{-1}^{0}+\frac{a}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_{0}^{1}$$
$$=\frac{a}{3}+\frac{a}{3}=\frac{2}{3}a$$

すると，条件から $\dfrac{2}{3}a=1$ より，$a=\dfrac{3}{2}$ である。

コメント

放物線と接線に関する典型題の 1 つです。計算も複雑ではありません。

問　題

a を正の実数とし, 2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ を考える。

(1)　C_1 と C_2 の両方に接する直線 l の方程式を求めよ。

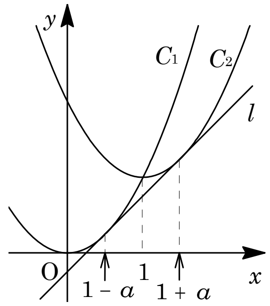
(2)　2 つの放物線 C_1, C_2 と直線 l で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　放物線 $C_1 : y = x^2$ ……①, $C_2 : y = x^2 - 4ax + 4a$ ……②に対して,

①より, $y' = 2x$ となり, 接点 $(t,\ t^2)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$y - t^2 = 2t(x - t),\quad y = 2tx - t^2 \text{ ………③}$$



②③を連立して, $x^2 - 4ax + 4a = 2tx - t^2$

$$x^2 - 2(2a + t)x + 4a + t^2 = 0 \text{ ………④}$$

放物線②と接線③が接することより, ④は重解をもち,

$$D/4 = (2a + t)^2 - (4a + t^2) = 0,\quad a^2 + at - a = 0$$

$a > 0$ から, $a + t - 1 = 0$, $t = 1 - a$ ………⑤

③に代入すると, 接線 l の方程式は,

$$y = 2(1 - a)x - (1 - a)^2$$

(2)　④の重解は, ⑤より, $x = 2a + t = 2a + 1 - a = 1 + a$

また, ①と②の交点は, $x^2 = x^2 - 4ax + 4a$ より, $x = 1$

よって, C_1, C_2 と l で囲まれた図形の面積 S は,

$$S = \int_{1-a}^{1} \{x - (1 - a)\}^2 dx + \int_{1}^{1+a} \{x - (1 + a)\}^2 dx$$

$$= \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 - a)\}^3\Big]_{1-a}^{1} + \frac{1}{3}\Big[\{x - (1 + a)\}^3\Big]_{1}^{1+a}$$

$$= \frac{1}{3}a^3 + \frac{1}{3}a^3 = \frac{2}{3}a^3$$

コメント

よく見かける構図で, 過去に多数の大学で出題されてきた頻出問題です。

問　題

xy 平面において，放物線 $y=-x^2+6x$ と x 軸で囲まれた図形に含まれ，$(a,\ 0)$ と $(a,\ -a^2+6a)$ を結ぶ線分を 1 辺とする長方形を考える。ただし，$0<a<3$ とする。このような長方形の面積の最大値を $S(a)$ とする。

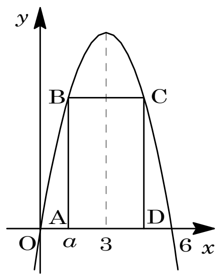
(1)　$S(a)$ を a の式で表せ。

(2)　$S(a)$ の値が最大となる a の値を求め，関数 $S(a)$ のグラフをかけ。　[2008]

解答例

(1)　$0<a<3$ のとき，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ と $\mathrm{B}(a,\ -a^2+6a)$ とおくと，題意を満たす長方形 ABCD の面積が最大となる場合を考える。

すると，放物線 $y=-x^2+6x$ の軸の方程式が $x=3$ より，$\mathrm{C}(6-a,\ -(6-a)^2+6(6-a))$，$\mathrm{D}(6-a,\ 0)$ のときであり，長方形 ABCD の面積 $S(a)$ は，



$$S(a)=2(3-a)(-a^2+6a)=2a^3-18a^2+36a$$

(2)　(1)より，$S'(a)=6(a^2-6a+6)$

$S'(a)=0$ とすると，$0<a<3$ から，

$$a=3-\sqrt{3}$$

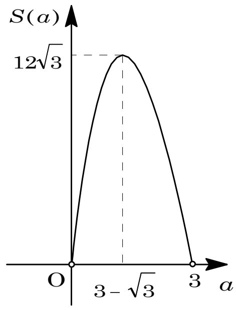
よって，$0<a<3$ における $S(a)$ の増減は，右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$3-\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$S'(a)$		$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$		$\searrow$	

これより，$a=3-\sqrt{3}$ のとき，$S(a)$ の値は最大となり，最大値は，

$$S(3-\sqrt{3})=2\sqrt{3}(3-\sqrt{3})(3+\sqrt{3})=12\sqrt{3}$$

以上より，関数 $S(a)$ のグラフを描くと，右図のようになる。ただし，白丸は除く。



コメント

教科書の例題に採用されているような問題です。ただ，冒頭の記述は，やや雑すぎるかもしれません。

問　題

$a>0$, $b\geqq 0$, $0<p<1$ とし，関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通るとする。このグラフの $0\leqq x\leqq p$ に対応する部分を C で表す。

(1)　b を a と p を用いて表せ。

(2)　a が範囲 $p\leqq a\leqq 1$ を動くとき，C 上の点 $(x,\ y)$ の動く領域を D とする。

　(i)　x を固定して y の動く範囲を求めよ。

　(ii)　D を図示せよ。

(3)　D の面積 S を p で表し，$\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3}{4}$ の範囲で S の最大値と最小値を求めよ。

[2007]

解答例

(1)　関数 $y=ax-bx^2$ のグラフは定点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ を通ることより，$p^2=ap-bp^2$

　$0<p<1$ から，$p=a-bp$ となり，$b=\dfrac{a}{p}-1$ である。

(2)　(1)より，$y=ax-\left(\dfrac{a}{p}-1\right)x^2=a\left(x-\dfrac{x^2}{p}\right)+x^2$ ………(＊)

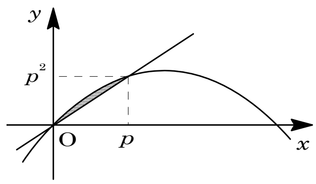
　(i)　$0<p<1$, $0\leqq x\leqq p$ から，$x-\dfrac{x^2}{p}=\dfrac{x(p-x)}{p}\geqq 0$ となり，(＊)は a について増加関数であるので，$p\leqq a\leqq 1$ のとき，

$$p\left(x-\frac{x^2}{p}\right)+x^2\leqq y\leqq\left(x-\frac{x^2}{p}\right)+x^2,\quad px\leqq y\leqq\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x$$

　(ii)　D の境界線 $y=px$，$y=\left(1-\dfrac{1}{p}\right)x^2+x$ の交点は，

$$px=\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x,\quad \frac{p-1}{p}x^2+(1-p)x=0$$

　よって，$x=0,\ p$ となり，領域 D は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(3)　D の面積 S は，

$$S=\int_0^p\left\{\left(1-\frac{1}{p}\right)x^2+x-px\right\}dx=\left(1-\frac{1}{p}\right)\int_0^p x(x-p)\,dx$$

$$=\left(1-\frac{1}{p}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)p^3=\frac{1}{6}(p^2-p^3)$$

$$S'=\frac{1}{6}(2p-3p^2)=\frac{1}{6}p(2-3p)$$

　$\dfrac{1}{2}\leqq p\leqq\dfrac{3}{4}$ において，S の増減は右表のようになり，S の最大値は $\dfrac{2}{81}$，最小値は $\dfrac{1}{48}$ である。

p	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
S'		$+$	0	$-$	
S	$\frac{1}{48}$	↗	$\frac{2}{81}$	↘	$\frac{3}{128}$

コメント

微積分についての標準的な問題で，題意に従って計算を進めれば，結論に至ります。

問　題

実数 p に対して 3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①を考える。

(1)　関数 $f(x)=4x^3-12x^2+9x$ の極値を求めて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　方程式①の実数解の中で，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つであるための p の条件を求めよ。　[2006]

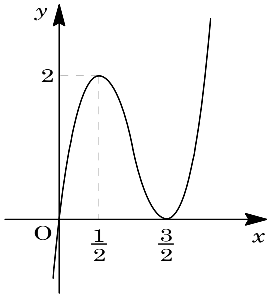
解答例

(1)　$f(x)=4x^3-12x^2+9x$ に対して，

$$f'(x)=12x^2-24x+9$$
$$=3(2x-1)(2x-3)$$

x	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$

増減表より，極大値 2 $\left(x=\frac{1}{2}\right)$，極小値 0 $\left(x=\frac{3}{2}\right)$となり，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　3 次方程式 $4x^3-12x^2+9x-p=0$ ……①は，$f(x)=p$ と表せる。

すると，方程式①の実数解は，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=p$ との共有点の x 座標となる。

ここで，(1)のグラフを利用すると，$f(1)=1$ から，方程式①の実数解の中で，$0\leqq x\leqq 1$ の範囲にあるものがただ 1 つである p の条件は，$0\leqq p<1$ となる。ただし，重解は解の個数が 2 であるとする。

コメント

方程式の解の個数を数えるとき，重解は一般的に 1 つとは数えません。上の解はこの立場で記しました。もし，重解を 1 つとして数えるならば，$p=2$ も答に加える必要があります。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　x についての 2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつような実数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた k の範囲で $F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)\,dx$ の最小値と最大値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　2 次方程式 $x^2-2kx-3k^2+1=0$ が虚数解をもつことから，

$$D/4=k^2-(-3k^2+1)=4k^2-1<0$$

よって，$(2k-1)(2k+1)<0$ から，$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$

(2)　$F(k)=\int_0^k(x^2-2kx-3k^2+1)\,dx=\left[\frac{x^3}{3}-kx^2-3k^2x+x\right]_0^k=-\frac{11}{3}k^3+k$ より，

$$F'(k)=-11k^2+1$$

$-\frac{1}{2}<k<\frac{1}{2}$ における $F(k)$ の増減は右表のようになり，最小値は $-\frac{2}{33}\sqrt{11}\ \left(x=-\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$，

k	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{11}}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$F'(k)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$F(k)$	$-\frac{1}{24}$	$\searrow$	$-\frac{2}{33}\sqrt{11}$	$\nearrow$	$\frac{2}{33}\sqrt{11}$	$\searrow$	$\frac{1}{24}$

最大値は $\frac{2}{33}\sqrt{11}\ \left(x=\frac{1}{\sqrt{11}}\right)$ である。

コメント

ミスが致命傷の計算問題です。

問　題

a を正の実数とし，関数 $F(x)=\int_x^{x+a}\big||t|-1\big|dt$ を考える。

(1)　$F(x)$ の導関数 $F'(x)$ を求めよ。さらに，$F'(x)=0$ となる x の値をすべて求めよ。

(2)　$0<a<2$ のとき，$F(x)$ の極大値および極小値と，それらを与える x の値を求めよ。

(3)　$a>2$ のとき，$F(x)$ の極小値と，それを与える x の値を求めよ。　　[2004]

解答例

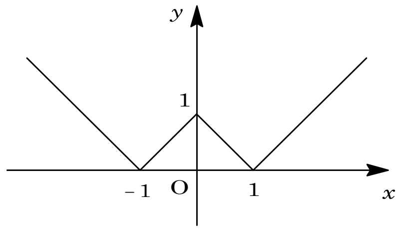
(1)　$f(x)=\big||x|-1\big|$ とおき，$f(-x)=f(x)$ に注意して場合分けをすると，

(i)　$x\leqq -1$ のとき　$f(x)=-x-1$

(ii)　$-1\leqq x\leqq 0$ のとき　$f(x)=x+1$

(iii)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　$f(x)=-x+1$

(iv)　$x\geqq 1$ のとき　$f(x)=x-1$



よって，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

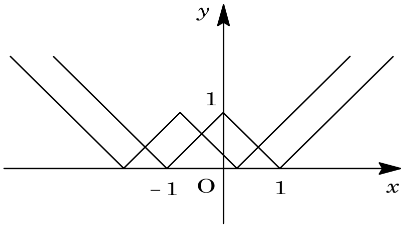
$F(x)=\int_x^{x+a}\big||t|-1\big|dt=\int_x^{x+a}f(t)dt$ より，

$$F'(x)=f(x+a)-f(x)=\big||x+a|-1\big|-\big||x|-1\big|$$

また，$F'(x)=0$ とおくと，$f(x+a)=f(a)$ となり，$y=f(x+a)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に $-a$ だけ平行移動すると得られるので，

(i)　$0<a<2$ のとき

$F'(x)=0$ となる x は，右図の 2 つのグラフの交点より，



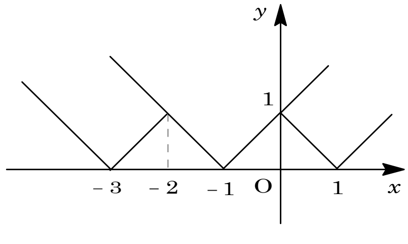
$$-x+1=(x+a)-1,\ x=\frac{-a+2}{2}$$

$$x+1=-(x+a)+1,\ x=-\frac{a}{2}$$

$$-x-1=(x+a)+1,\ x=-\frac{a+2}{2}$$

(ii)　$a=2$ のとき

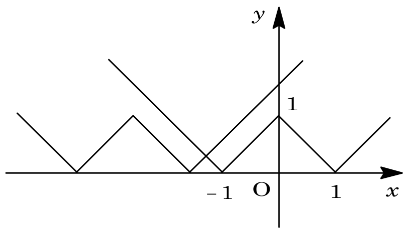
$F'(x)=0$ となる x は，右図の 2 つのグラフの共有点より，$-2\leqq x\leqq 0$ を満たすすべての実数である。



(iii) $a>2$ のとき

$F'(x)=0$ となる x は，右図 2 つのグラフの交点より，

$$-x-1=(x+a)-1,\ x=-\frac{a}{2}$$

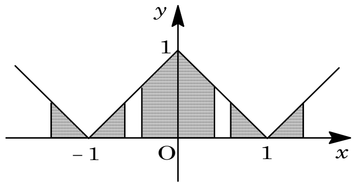


(2) $0<a<2$ のとき，(1)より $F(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{a+2}{2}$	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$	$\frac{-a+2}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると，$x=-\frac{a}{2}$ のとき極大値をとり，$x=-\frac{a+2}{2}$，$\frac{-a+2}{2}$ のとき極小値をとる。

極大値と極小値は，右図において，$y=f(x)$ のグラフと x 軸にはさまれた網点部の面積を計算することから，



$$F\left(-\frac{a+2}{2}\right)=\int_{-\frac{a+2}{2}}^{\frac{a-2}{2}}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times 2=\frac{a^2}{4}$$

$$F\left(-\frac{a}{2}\right)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)\,dt=\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{a}{2}\right)^2\right\}\times 2=a-\frac{a^2}{4}$$

$$F\left(\frac{-a+2}{2}\right)=\int_{\frac{-a+2}{2}}^{\frac{a+2}{2}}f(t)\,dt=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}\right)^2\times 2=\frac{a^2}{4}$$

よって，極大値 $a-\frac{a^2}{4}$ $\left(x=-\frac{a}{2}\right)$，極小値 $\frac{a^2}{4}$ $\left(x=-\frac{a+2}{2},\ \frac{-a+2}{2}\right)$ である。

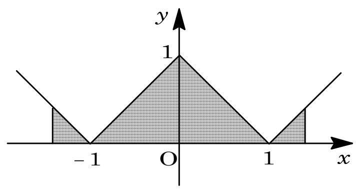
(3) $a>2$ のとき，(1)より，$F(x)$ の増減は右表のようになり，$x=-\frac{a}{2}$ のとき極小値をとる。

x	$\cdots$	$-\frac{a}{2}$	$\cdots$
$F'(x)$	$-$	0	$+$
$F(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

(2)と同様に，極小値は，$y=f(x)$ のグラフと x 軸にはさまれた網点部の面積を計算することから，

$$F\left(-\frac{a}{2}\right)=\int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}}f(t)\,dt$$

$$=\left\{\frac{1}{2}\cdot 1^2+\frac{1}{2}\left(\frac{a}{2}-1\right)^2\right\}\times 2=\frac{a^2}{4}-a+2$$



よって，極小値 $\frac{a^2}{4}-a+2$ $\left(x=-\frac{a}{2}\right)$ である。

コメント

時間のかかる繁雑な問題です。しかし，方針決定に迷うような難問ではありません。

問　題

実数 a, b, c に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とおく。このとき次の 2 つの等式

$$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2},\ \int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$$

を満たす実数 $p,\ q$ が存在するための $a,\ b,\ c$ の条件と，そのときの $p,\ q$ を求めよ。ただし，$f'(x)$ は $f(x)$ の導関数である。　[2003]

解答例

$f'(x)(px+q)=(2ax+b)(px+q)=2apx^2+(2aq+bp)x+bq$ なので，

$\int_0^1 f'(x)(px+q)\,dx=\frac{1}{2}$ より，$\int_0^1 \left\{2apx^2+(2aq+bp)x+bq\right\}dx=\frac{1}{2}$………①

$\int_{-1}^1 f'(x)(px+q)\,dx=0$ より，$\int_{-1}^1 \left\{2apx^2+(2aq+bp)x+bq\right\}dx=0$ となり，

$$\int_0^1 (2apx^2+bq)\,dx=0\text{………②}$$

①②より，$\int_0^1 (2aq+bp)x\,dx=\frac{1}{2}$………③

②より，$\frac{2}{3}ap+bq=0$，$2ap+3bq=0$………④

③より，$\frac{1}{2}(2aq+bp)=\frac{1}{2}$，$bp+2aq=1$………⑤

④⑤より，$(3b^2-4a^2)p=3b$……⑥，$(4a^2-3b^2)q=2a$……⑦

(i)　$4a^2-3b^2=0$ のとき

⑥⑦より，$a=b=0$ となるが，これは⑤を満たさない。

(ii)　$4a^2-3b^2\neq 0$ のとき

⑥より $p=\dfrac{3b}{3b^2-4a^2}$，⑦より $q=\dfrac{2a}{4a^2-3b^2}$ となる。

(i)(ii)より，実数 p, q が存在するための条件は，$4a^2-3b^2\neq 0$ であり，

$$p=\frac{3b}{3b^2-4a^2},\ q=\frac{2a}{4a^2-3b^2}$$

コメント

定積分の計算問題の様相を示していますが，実質的には，連立方程式の処理技術がポイントとなっています。

問　題

3 次関数 $f(x)=x^3+px^2+qx$ がある。$x=a$ における曲線 $y=f(x)$ の接線が接点 $\mathrm{P}(a,\ f(a))$ 以外の点 Q で $y=f(x)$ のグラフと交わっているとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の x 座標 b を a と p で表せ。

(2) $x=c$ における $y=f(x)$ の接線が点 P を通るような実数 c のうち $c\neq a$ なるものを a と p で表せ。

(3) $\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}$ の値を求めよ。 [2000]

解答例

(1) 点 P における接線を $y=mx+n$ とおくと，条件より，

$$f(x)-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)$$

$$x^3+px^2+(q-m)x-n=(x-a)^2(x-b)$$

x^2 の係数を比べて，$p=-b-2a$，$b=-2a-p$

(2) $x=c$ における $y=f(x)$ の接線を $y=kx+l$ とおくと，(1)と同様にして，

$$f(x)-(kx+l)=(x-c)^2(x-a)$$

x^2 の係数を比べて，$p=-a-2c$，$c=-\dfrac{a+p}{2}$

(3) $f'(x)=3x^2+2px+q$ なので，

$$\begin{aligned}f'(b)-f'(a)&=(3b^2+2pb+q)-(3a^2+2pa+q)\\&=3(-2a-p)^2+2p(-2a-p)-3a^2-2pa\\&=9a^2+6ap+p^2=(3a+p)^2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}f'(a)-f'(c)&=(3a^2+2pa+q)-(3c^2+2pc+q)\\&=3a^2+2pa-3\left(-\frac{a+p}{2}\right)^2-2p\left(-\frac{a+p}{2}\right)\\&=\frac{1}{4}(9a^2+6ap+p^2)=\frac{1}{4}(3a+p)^2\end{aligned}$$

以上より，$\dfrac{f'(b)-f'(a)}{f'(a)-f'(c)}=4$

コメント

接線の方程式が不要なときは，上記の(1)(2)のように解いたほうが，省エネですみます。

問　題

$0<a<1$ とする。曲線 $y=1-x^2$ と $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ の第 1 象限内での交点を A とし，A から x 軸に下ろした垂線の足を B とする。また，原点を O とし，線分 OB と線分 AB と曲線 $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ とで囲まれた図形の面積を S とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 B の座標を求めよ。

(2) 面積 S を, a を用いて表せ。

(3) 面積 S を最大にする a の値を求めよ。 [1999]

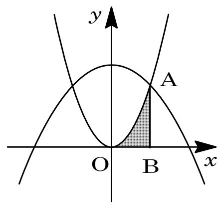
解答例

(1) $y=1-x^2$ ………①, $y=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$ ………②

①②より，$1-x^2=\left(\dfrac{1}{a^2}-1\right)x^2$

$\dfrac{1}{a^2}x^2=1$ となるので，$x=\pm a$

$a>0$ より，$\mathrm{B}(a,\ 0)$



(2) $S=\displaystyle\int_0^a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)x^2dx=\left(\frac{1}{a^2}-1\right)\cdot\frac{a^3}{3}=\frac{1}{3}(a-a^3)$

(3) $S'=\dfrac{1}{3}(1-3a^2)$

右の増減表より，$a=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，

S は最大値をとる。

a	0	…	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	…	1
S'		＋	0	－	
S		↗		↘	

コメント

センター試験のレベルよりも基本的です。注意するのは計算ミスだけです。

問　題

$a,\ b$ を実数とし, xy 平面上の 3 直線を

$$l : x+y=0\ ,\ \ l_1 : ax+y=2a+2\ ,\ \ l_2 : bx+y=2b+2$$

で定める。

(1) 直線 l_1 は a の値によらない 1 点 P を通る。P の座標を求めよ。

(2) l, l_1, l_2 によって三角形がつくられるための $a,\ b$ の条件を求めよ。

(3) $a,\ b$ は(2)で求めた条件を満たすものとする。点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にあるような $a,\ b$ の範囲を求め, それを ab 平面上に図示せよ。 [2011]

解答例

(1) 直線 $l_1 : ax+y=2a+2$ は, $y=-a(x-2)+2$ より, どんな a の値に対しても, 点 $(2,\ 2)$ を通る。よって, $\mathrm{P}(2,\ 2)$ である。

(2) 直線 $l_2 : bx+y=2b+2$ は, $y=-b(x-2)+2$ より, どんな b の値に対しても, 点 $\mathrm{P}(2,\ 2)$ を通るので, l_1, l_2 の交点は $\mathrm{P}(2,\ 2)$ である。すると, 直線 $l : x+y=0$ は点 P を通らないことから, 3 直線 l, l_1, l_2 が同一点で交わる場合はない。

そこで, 3 直線 l, l_1, l_2 によって三角形がつくられるための条件は,

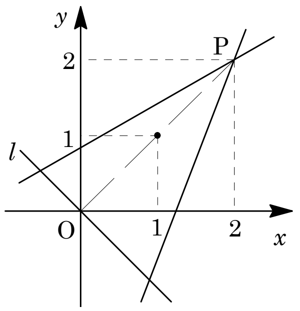
(i) l と l_1 が平行でないとき　$-a\neq-1$ より, $a\neq1$

(ii) l と l_2 が平行でないとき　$-b\neq-1$ より, $b\neq1$

(iii) l_1 と l_2 が平行でないとき　$-a\neq-b$ より, $a\neq b$

(i)～(iii)より, 求める $a,\ b$ の条件は,

$$a\neq1,\ \ b\neq1,\ \ a\neq b$$



(3) (2)のとき, 点 $(1,\ 1)$ が(2)の三角形の内部にある条件は, 図より, l と l_1 の交点, l と l_2 の交点が, 一方は第 2 象限, もう一方は第 4 象限に位置することである。

l と l_1 の交点は, $ax-x=2a+2$ から, $x=\dfrac{2a+2}{a-1}$

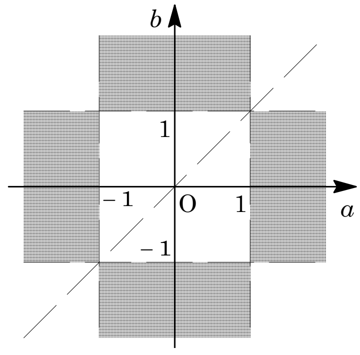
l と l_2 の交点は, $bx-x=2b+2$ から, $x=\dfrac{2b+2}{b-1}$

よって, 求める条件は, $\dfrac{2a+2}{a-1}\cdot\dfrac{2b+2}{b-1}<0$

両辺に $(a-1)^2(b-1)^2$ をかけると,

$$(a+1)(a-1)(b+1)(b-1)<0$$

この領域を ab 平面上に図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。



コメント

定点を通過する直線についての基本的な問題です。なお，(3)において，分数不等式を変形するときに，分母を 2 乗した式を両辺にかけるという技法は必須です。

問　題

実数 $t>0$ に対して，座標平面上に点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$，点 $\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$，点 $\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ をとる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) P, Q, R が一直線上にあるような t の値を求めよ。

(2) (1)で求めた値を t_0 とする。$0<t<t_0$ のとき，三角形△PQR の面積 $S(t)$ の最大値とそのときの t の値を求めよ。 [2009]

解答例

(1) 3 点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(2t,\ 1-4t^2)$，$\mathrm{R}(-t,\ 1-t^2)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(t,\ 1-4t^2),\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=(-2t,\ 1-t^2)$$

P, Q, R が一直線上にある条件は, k を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=k\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$

$$(-2t,\ 1-t^2)=k(t,\ 1-4t^2)$$

よって，$-2t=kt$ ……①，$1-t^2=k(1-4t^2)$ ……②

①より, $t>0$ なので，$k=-2$

②に代入して，$1-t^2=-2(1-4t^2)$ となり, $t>0$ から $t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(2) $0<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，△PQR の面積 $S(t)$ は, (1)より,

$$S(t)=\frac{1}{2}\left|t(1-t^2)-(1-4t^2)(-2t)\right|=\frac{1}{2}\left|-9t^3+3t\right|$$

ここで，$f(t)=-9t^3+3t$ とおくと,

$$f'(t)=-27t^2+3=-3(3t+1)(3t-1)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$S(t)=\dfrac{1}{2}|f(t)|$ から，$S(t)$ は $t=\dfrac{1}{3}$ のとき，最大値 $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{1}{3}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$	0	$\nearrow$	$\frac{2}{3}$	$\searrow$	0

コメント

図形と式の基本問題です。なお，三角形の面積 $S(t)$ は，公式を用いて立式しています。

問　題

a を定数とする。xy 平面上の点の集合 $X(a)$, L を次のように定める。

$$X(a)=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ (x-a)^2+y^2 \leqq \frac{(a+1)^2}{4}\right\}$$

$$L=\{(x,\ y)\mid y=x-1\}$$

(1)　$X(a)\cap L=\phi$ となるような a の値の範囲を求めよ。（ただし，ϕ は空集合を表す）

(2)　いかなる実数 a に対しても $\mathrm{P}\notin X(a)$ となるような点 P の集合を求め，xy 平面上に図示せよ。　[2008]

解答例

(1)　$X(a)=\left\{(x,\ y)\ \middle|\ (x-a)^2+y^2 \leqq \frac{(a+1)^2}{4}\right\}$，$L=\{(x,\ y)\mid y=x-1\}$ に対し，

(i)　$a+1=0$ $(a=-1)$ のとき

$X(a)=\{(x,\ y)\mid(x+1)^2+y^2\leqq 0\}$ より，集合 $X(a)$ は $(x,\ y)=(-1,\ 0)$ のみとなる。よって，$X(a)\cap L=\phi$ を満たす。

(ii)　$a+1\neq 0$ $(a\neq -1)$ のとき

$X(a)\cap L=\phi$ となる条件は，円 $(x-a)^2+y^2\leqq\frac{(a+1)^2}{4}$ ……①と直線 $y=x-1$ すなわち $x-y-1=0$ ……②が共有点をもたないことである。

そこで，円①の中心は $(a,\ 0)$，半径 $\frac{|a+1|}{2}$ より，

$$\frac{|a-1|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}>\frac{|a+1|}{2},\ \ \sqrt{2}|a-1|>|a+1|$$

両辺を 2 乗して，$2(a-1)^2>(a+1)^2$，$a^2-6a+1>0$

$$a<3-2\sqrt{2},\ \ 3+2\sqrt{2}<a\quad(a\neq -1)$$

(i)(ii)より，$a<3-2\sqrt{2}$，$3+2\sqrt{2}<a$

(2)　$\mathrm{P}(x,\ y)$ としたとき，$\mathrm{P}\notin X(a)$ である条件は，どんな a に対しても，

$$(x-a)^2+y^2>\frac{(a+1)^2}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③より，$4x^2+4y^2-8ax+3a^2-2a-1>0$ となり，a についてまとめ直すと，

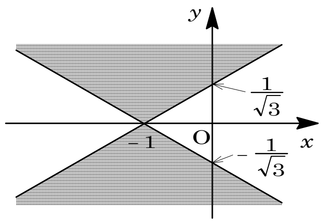
$$3a^2-2(4x+1)a+4x^2+4y^2-1>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

④がつねに成り立つ条件は，$D/4=(4x+1)^2-3(4x^2+4y^2-1)<0$ であり，

$$x^2+2x+1-3y^2<0,\ \ (x+1)^2-3y^2<0$$

$$(x+1-\sqrt{3}y)(x+1+\sqrt{3}y)<0$$

よって，題意を満たす点 P の集合を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



コメント

集合の記号を用いて記述された問題文のために，一見，近寄りがたい雰囲気がありますが，内容は，集合と領域についての標準的なものです。

問　題

a，b を実数とする。方程式 $x^2+ax+b=0$ が実数解をもち，すべての解の絶対値が 1 以下であるとする。

(1)　この条件を満たす点 $(a,\ b)$ 全体を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a+2b$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=x^2+ax+b$ とおくと，$f(x)=0$ の実数解の絶対値が 1 以下より，

$$D=a^2-4b\geqq 0\,,\ b\leqq\frac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots①$$

$$-1\leqq-\frac{a}{2}\leqq 1\,,\ -2\leqq a\leqq 2\cdots\cdots\cdots②$$

$$f(-1)=1-a+b\geqq 0\,,\ b\geqq a-1\cdots\cdots\cdots③$$

$$f(1)=1+a+b\geqq 0\,,\ b\geqq -a-1\cdots\cdots\cdots④$$

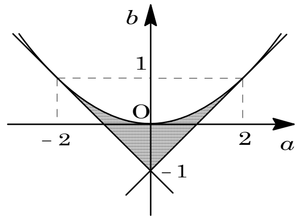
ここで，①と③の境界線の共有点の a 座標は，

$$\frac{a^2}{4}=a-1\,,\ (a-2)^2=0$$

よって，$a=2$ で接する。

同様に，①と④の境界線は $a=-2$ で接する。

以上より，①～④を満たす点 $(a,\ b)$ は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$a+2b=k$ とおくと，$b=-\frac{1}{2}a+\frac{k}{2}$ となり，ab 平面上で傾き $-\frac{1}{2}$，切片 $\frac{k}{2}$ の直線を表す。この直線が，(1)の領域と共有点をもつ k の範囲を求める。

すると，$(a,\ b)=(2,\ 1)$ のとき k は最大となり，最大値は $k=a+2b=4$，また $(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき k は最小となり，最小値は $k=a+2b=-2$ である。

コメント

領域と最大・最小を組み合わせた典型問題です。

問　題

xy 平面上の放物線 $A: y = x^2$，$B: y = -(x-a)^2 + b$ は異なる 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ $(x_1 > x_2)$ で交わるとする。

(1)　$x_1 - x_2 = 2$ が成り立つとき, b を a で表せ。

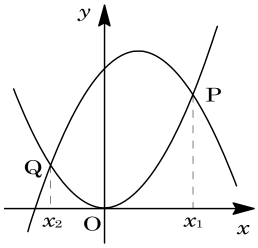
(2)　$x_1 - x_2 = 2$ を満たしながら a, b が変化するとき, 直線 PQ の通過する領域を求め, 図示せよ。　[2003]

解答例

(1)　$A: y = x^2$ ……①, $B: y = -(x-a)^2 + b$ ……②の交点は,

$$x^2 = -(x-a)^2 + b,\ 2x^2 - 2ax + a^2 - b = 0 \cdots\cdots ③$$

よって, $D/4 = a^2 - 2(a^2 - b) = -a^2 + 2b > 0$ のもとで, ③の解が x_1, x_2 $(x_1 > x_2)$ より,



$$x_1 = \frac{a + \sqrt{-a^2 + 2b}}{2},\ x_2 = \frac{a - \sqrt{-a^2 + 2b}}{2} \cdots\cdots ④$$

条件より, $x_1 - x_2 = 2$ なので, $\sqrt{-a^2 + 2b} = 2$

$$-a^2 + 2b = 4,\ b = \frac{1}{2}a^2 + 2 \cdots\cdots ⑤$$

(2)　$\mathrm{P}(x_1,\ x_1^2)$, $\mathrm{Q}(x_2,\ x_2^2)$ から, 直線 PQ は, 傾きが $\dfrac{x_1^2 - x_2^2}{x_1 - x_2} = x_1 + x_2$ なので,

$$y - x_1^2 = (x_1 + x_2)(x - x_1),\ y = (x_1 + x_2)x - x_1x_2$$

④⑤より, $x_1 + x_2 = a$, $x_1x_2 = \dfrac{a^2 - b}{2} = \dfrac{a^2 - 4}{4}$

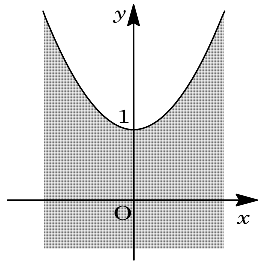
よって, 直線 PQ は, $y = ax - \dfrac{a^2 - 4}{4}$ ……⑥となる。

ここで, 直線 PQ が通過する領域は, ⑥を a についての方程式としてみたとき, 実数解をもつ条件として表される。

$$4y = 4ax - a^2 + 4,\ a^2 - 4xa + 4y - 4 = 0$$

よって, $D/4 = 4x^2 - (4y - 4) \geqq 0$ から, $y \leqq x^2 + 1$

この領域を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



コメント

有名な直線の通過領域の問題です。a の範囲に制限がないため, 実数解条件だけで一件落着です。

問　題

$a,\ b$ を $2b<3a<6b$ を満たす正の定数とする。

(1)　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$x+3y\leqq 12,\ 3x+y\leqq 12,\ a(x-3)+b(y-2)\leqq 0,\ x\geqq 0,\ y\geqq 0$$

(2)　実数 $x,\ y$ が(1)の連立不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値を $a,\ b$ を用いて表せ。

[2002]

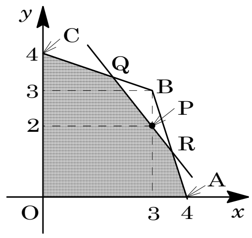
解答例

(1)　$x+3y\leqq 12$ ……①，$3x+y\leqq 12$ ……②，$x\geqq 0$ ……③，$y\geqq 0$ ……④としたとき，①②③④の満たす領域は，4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(3,\ 3)$，$\mathrm{C}(0,\ 4)$ を頂点とする四角形の内部または周上である。

ここで，$a(x-3)+b(y-2)\leqq 0$ ……⑤の表す領域は，点 $\mathrm{P}(3,\ 2)$ を通る直線 $a(x-3)+b(y-2)=0$ ……⑤′を境界として，原点を含む側である。

また，条件より，$0<2b<3a<6b$ なので，

$$\frac{2}{3}<\frac{a}{b}<2,\ -2<-\frac{a}{b}<-\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，直線 PC の傾きは $-\dfrac{2}{3}$，直線 PA の傾きは -2 なので，⑥より直線⑤′は線分 BC, BA とともに交わる。

以上より，求める領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含む。

(2)　⑤′と線分 BC : $x+3y=12$ ……①′との交点 Q は，

①′より $x=12-3y$ として，⑤′に代入すると，$a(9-3y)+b(y-2)=0$

$$y=\frac{9a-2b}{3a-b},\ x=12-3\cdot\frac{9a-2b}{3a-b}=\frac{9a-6b}{3a-b}$$

また，⑤′と線分 BA : $3x+y=12$ ……②′との交点 R は，

②′より $y=12-3x$ として，⑤′に代入すると，$a(x-3)+b(10-3x)=0$

$$x=\frac{3a-10b}{a-3b},\ y=12-3\cdot\frac{3a-10b}{a-3b}=\frac{3a-6b}{a-3b}$$

したがって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{9a-6b}{3a-b},\ \dfrac{9a-2b}{3a-b}\right)$，$\mathrm{R}\left(\dfrac{3a-10b}{a-3b},\ \dfrac{3a-6b}{a-3b}\right)$

さて，$x+y=k$ とおき，直線 $y=-x+k$ が(1)の領域と共有点をもつような k の最大値を，図を利用して求める。

(i)　$-2<-\dfrac{a}{b}<-1$ $(b<a<2b)$ のとき

点 Q を通るとき，k は最大値 $\dfrac{9a-6b}{3a-b}+\dfrac{9a-2b}{3a-b}=\dfrac{18a-8b}{3a-b}$ をとる。

(ii)　$-1 \leqq -\dfrac{a}{b} < -\dfrac{2}{3}\ \left(\dfrac{2}{3}b < a \leqq b\right)$のとき

点 R を通るとき, k は最大値$\dfrac{3a-10b}{a-3b}+\dfrac{3a-6b}{a-3b}=\dfrac{6a-16b}{a-3b}$をとる。

コメント

東工大で 98 年に同じような問題が出ていますが, 本問は $0<2b<3a<6b$ という条件のおかげで, 場合分けがずいぶん簡単になりました。

問　題

(1)　次の不等式の表す領域 D を図示せよ。$|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$

(2)　点 A を $\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ とし，点 B を直線 AB が $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ に接するような領域 D の点とする。点 P が D を動くとき，三角形 ABP の面積の最大値を求めよ。

(3)　領域 D の点 $(x,\ y)$ について，$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}$ がとる値の範囲を求めよ。　[2000]

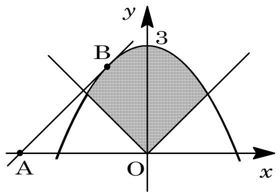
解答例

(1)　$y=|x|$ と $y=-\dfrac{1}{2}x^2+3$ ……①を連立して，$y=-\dfrac{1}{2}y^2+3$，$y^2+2y-6=0$

$y \geqq 0$ より $y=-1+\sqrt{7}$ となり，このとき $x=\pm(-1+\sqrt{7})$

よって，2 交点 $\left(\pm(-1+\sqrt{7}),\ -1+\sqrt{7}\right)$ となる。

これより，不等式 $|x| \leqq y \leqq -\dfrac{1}{2}x^2+3$ の表す領域 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　点 $\mathrm{A}\left(-\dfrac{7}{2},\ 0\right)$ を通る直線は，$y=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ………②

①②が接する条件は，$-\dfrac{1}{2}x^2+3=m\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$，$x^2+2mx+7m-6=0$ ………③

$$D/4=m^2-(7m-6)=0,\ m=1,\ 6$$

ここで，接点の x 座標は③より $x=-m$ となるので，$m=1$ である。

このとき，$\mathrm{B}\left(-1,\ \dfrac{5}{2}\right)$ となり，$\mathrm{AB}=\sqrt{\left(-1+\dfrac{7}{2}\right)^2+\left(\dfrac{5}{2}\right)^2}=\dfrac{5\sqrt{2}}{2}$

さて，直線 AB と直線 $y=x$ は平行なので，点 P が $y=x$ 上にあるとき，△ABP の面積は最大となる。

直線 AB と直線 $y=x$ との距離は，$\dfrac{7}{2}\cos 45^\circ=\dfrac{7\sqrt{2}}{4}$ より，△ABP の面積の最大値は，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{5\sqrt{2}}{2}\cdot\dfrac{7\sqrt{2}}{4}=\dfrac{35}{8}$ である。

(3)　$\dfrac{y}{x+\frac{7}{2}}=k$ とおくと，$y=k\left(x+\dfrac{7}{2}\right)$ ……④となり，点 A を通り傾き k の直線を表す。すると，k のとる範囲は，④と領域 D が共有点をもつ条件より求まるので，(2)から $0 \leqq k \leqq 1$ となる。

コメント

(2)が(3)の誘導となっており，(3)では計算の必要がありません。

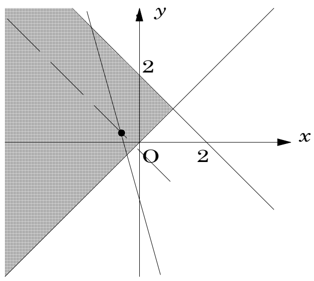
問　題

次の連立不等式の表す領域が三角形の内部になるような定数 a の値の範囲を求めよ。

$x-y<0,\ x+y<2,\ ax+(2a+3)y<1$ [1998]

解答例

$$\begin{cases} x-y<0\cdots\cdots\cdots① \\ x+y<2\cdots\cdots\cdots② \\ ax+(2a+3)y<1\cdots\cdots\cdots③ \end{cases}$$



①かつ②の表す領域は右図の網点部。

③の表す領域の境界線は $ax+(2a+3)y=1\cdots\cdots④$

a について整理して，$a(x+2y)+(3y-1)=0$

よって④は，$x+2y=0$ かつ $3y-1=0$，すなわち $(x,\ y)=\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$をつねに通過する。

また，③に $(x,\ y)=(0,\ 0)$ を代入すると，つねに成立することより，③の表す領域は，定点$\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$を通過する直線を境界とし，原点を含む側である。

ここで，直線 $x-y=0$ と④との交点は，

$$(3a+3)x=1,\ x=\frac{1}{3(a+1)}\quad (a\neq -1)$$

また，点$\left(-\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$を通り，直線 $x+y=2$ と平行な直線 $y=-\left(x+\dfrac{2}{3}\right)+\dfrac{1}{3}=-x-\dfrac{1}{3}$ と直線 $x-y=0$ との交点は，

$$-x-\frac{1}{3}=x,\ x=-\frac{1}{6}$$

以上より，①②③が三角形の内部を表す条件は，

$$\frac{1}{3(a+1)}<-\frac{1}{6}$$

$a+1<0\ \ (a<-1)$ で，$2>-(a+1)$，$a>-3$

よって，$-3<a<-1$

コメント

③の領域については，境界線④が定点を通過することを利用し，原点を含むか否かで決定しました。また，④の傾きを求めて図から処理してもよいのですが，不等式の計算がたいへんです。そのため，直線 $y=x$ との交点の範囲をもとにして解を書きました。

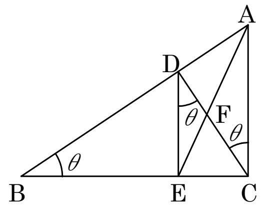
問　題

直角三角形 ABC において，$\angle C = \dfrac{\pi}{2}$，$AB = 1$ であるとする。$\angle B = \theta$ とおく。点 C から辺 AB に垂線 CD を下ろし，点 D から辺 BC に垂線 DE を下ろす。AE と CD の交点を F とする。

(1) $\dfrac{DE}{AC}$ を θ で表せ。

(2) $\triangle FEC$ の面積を θ で表せ。 [2010]

解答例



(1) 条件より，$AC = AB\sin\theta = \sin\theta$ となり，

$$CD = AC\cos\theta = \sin\theta\cos\theta$$
$$DE = CD\cos\theta = \cos^2\theta\sin\theta$$

よって，$\dfrac{DE}{AC} = \cos^2\theta$

(2) DE // AC より, (1)から,

$$EF : FA = DE : AC = \cos^2\theta : 1$$

よって，$\triangle FEC = \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 1}\triangle AEC \cdots\cdots\cdots ①$

ここで，$EC = CD\sin\theta = \sin^2\theta\cos\theta$ から，

$$\triangle AEC = \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos\theta\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\triangle FEC = \dfrac{\cos^2\theta}{\cos^2\theta + 1}\cdot\dfrac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta = \dfrac{\sin^3\theta\cos^3\theta}{2(\cos^2\theta + 1)}$

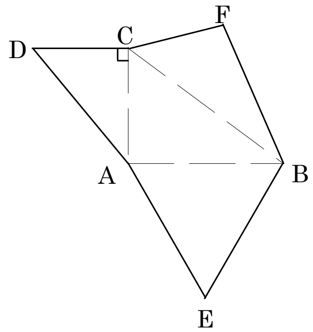
コメント

三角比の基本題です。自然な流れで解を作っています。

問　題

図はある三角錐 V の展開図である。ここで，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ で，$\triangle\mathrm{ABE}$ は正三角形である。このとき, Vの体積を求めよ。

[2009]



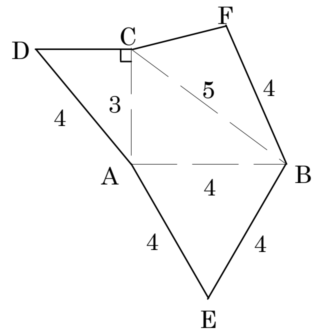
解答例

右図において，$\mathrm{AB}=4$，$\mathrm{AC}=3$，$\mathrm{BC}=5$より，

$$\angle\mathrm{BAC}=90^\circ$$

また，$\angle\mathrm{ACD}=90^\circ$ より，

$$\mathrm{CD}=\mathrm{CF}=\sqrt{4^2-3^2}=\sqrt{7}$$



さて，三角錐 V の底面$\triangle\mathrm{ABC}$ を xy 平面上にとり，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 3,\ 0)$とする。さらに, Vのもう１つの頂点を$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ $(z>0)$ とおく。

すると，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=4$，$\mathrm{PC}=\sqrt{7}$ から，

$$x^2+y^2+z^2=16\cdots\cdots\cdots①,\ (x-4)^2+y^2+z^2=16\cdots\cdots\cdots②$$

$$x^2+(y-3)^2+z^2=7\cdots\cdots\cdots③$$

①②より，$8x-16=0$，$x=2\cdots\cdots\cdots④$

②③より，$-4x+3y=1$となり，④を代入すると，$y=3\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると，$z^3=3$となり, $z>0$ から$z=\sqrt{3}$ である。

以上より，三角錐 Vの体積は,

$$\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot 4\right)\cdot\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

コメント

底面が直角三角形であることに着目し，座標系を設定して処理しています。この解法がいちばん確実でしょう。

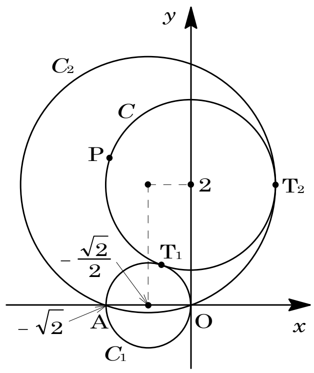
問　題

方程式$x^2+y^2-4y+2=0$で定義される円Cを考える。

(1)　点$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$と$\mathrm{O}(0,\ 0)$を通り中心の座標が$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$および$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$である2つの円は，どちらも円$C$に接することを示せ。

(2)　点Pが円C上を動くとき，$\cos\angle\mathrm{APO}$の最大値と最小値を求めよ。　　[2007]

解答例



(1)　$C : x^2+y^2-4y+2=0$より，$x^2+(y-2)^2=2$

これより，円Cは中心$(0,\ 2)$，半径$r=\sqrt{2}$となる。

さて，中心$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 0\right)$で，$\mathrm{A}(-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{O}(0,\ 0)$を通る円を$C_1$とすると，その半径は$r_1=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$である。

すると, CとC_1の中心間距離は,

$$d_1=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\sqrt{\frac{9}{2}}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

また，半径の和は，$r+r_1=\sqrt{2}+\dfrac{\sqrt{2}}{2}=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}$

よって，$d_1=r+r_1$となり, 2円CとC_1は外接する。

次に，中心$\left(-\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ 2\right)$で, 2点A, Oを通る円を$C_2$とすると，その半径は,

$$r_2=\sqrt{\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)^2+2^2}=\frac{3}{2}\sqrt{2}$$

すると，CとC_2の中心間距離は$d_2=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，半径の差は$r_2-r=\dfrac{3}{2}\sqrt{2}-\sqrt{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$となり，$d_2=r_2-r$より，円$C$は円$C_2$に内接する。

(2)　CとC_1，CとC_2の接点をT_1，T_2とおくと，この接点以外は，C上の点Pは円C_1の外部，円C_2の内部にあり，

$$\angle\mathrm{AT_2O}\leqq\angle\mathrm{APO}\leqq\angle\mathrm{AT_1O}$$

$$\cos\angle\mathrm{AT_1O}\leqq\cos\angle\mathrm{APO}\leqq\cos\angle\mathrm{AT_2O}$$

さて, AOはC_1の直径なので$\angle\mathrm{AT_1O}=90^\circ$となり，$\cos\angle\mathrm{AT_1O}=0$

また，C_2の中心をBとおくと，$\angle\mathrm{AT_2O}=\dfrac{1}{2}\angle\mathrm{ABO}$より,

$$\cos\angle\mathrm{AT_2O}=\frac{2}{r_2}=\frac{2}{\frac{3}{2}\sqrt{2}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APO}$の最小値は0，最大値は$\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$である。

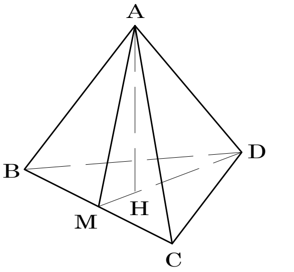
コメント

(1)の巧みな誘導により，(2)は図形的に解くことができます。この設問を，誘導を無視して押し通そうとすると，計算の海に溺れてしまいます。

問　題

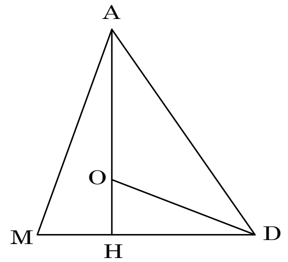
半径 1 の球に内接する正四面体の 1 辺の長さを求めよ。 [2005]

解答例



半径 1 の球に内接する正四面体 ABCD において，点 A から面 BCD に下ろした垂線の足を H とすると，対称性から H は△BCD の重心となり，また球の中心 O は線分 AH 上にある。

さて，辺 BC の中点を M とし，3 点 A, M, D を含む平面で，正四面体 ABCD を切断したとき，その切り口は右図のようになる。



ここで，正四面体の 1 辺の長さを x とすると，

$$\mathrm{AD} = x\,,\ \ \mathrm{AM} = \mathrm{DM} = \frac{\sqrt{3}}{2}x$$

$\mathrm{MH} : \mathrm{HD} = 1 : 2$ より，$\cos\angle\mathrm{AMH} = \dfrac{1}{3}$ となり，

$$\mathrm{AH} = \mathrm{AM}\sin\angle\mathrm{AMH} = \frac{\sqrt{3}}{2}x\sqrt{1-\frac{1}{9}} = \frac{\sqrt{6}}{3}x$$

また，$\mathrm{HD} = \dfrac{2}{3}\mathrm{DM} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}x$ なので，△OHD に三平方の定理を適用すると，

$$\left(\frac{\sqrt{6}}{3}x-1\right)^2+\left(\frac{\sqrt{3}}{3}x\right)^2 = 1\,,\ \ x^2-\frac{2}{3}\sqrt{6}\,x = 0$$

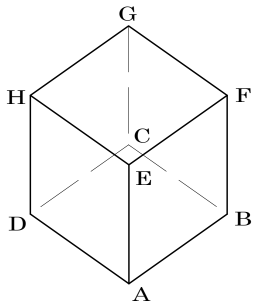
$x>0$ より，$x = \dfrac{2}{3}\sqrt{6}$ となる。

コメント

参考書などの例題に，そっくりそのまま載っている有名問題です。

問　題

1 辺の長さが 1 の立方体 ABCD-EFGH がある。3 点 A, C, F を含む平面と直線 BH の交点を P，P から面 ABCD に下ろした垂線の足を Q とする。



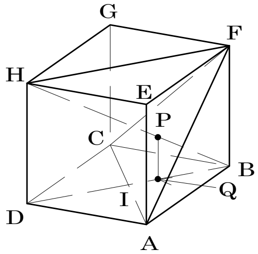
(1)　長方形 DBFH を描き，三角形 ACF との交線と点 P を図示せよ。さらに，線分 BP, PQ の長さを求めよ。

(2)　四面体 ABCF に内接する球の中心を O とする。点 O は線分 BP 上にあることを示せ。

(3)　四面体 ABCF に内接する球の半径を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　長方形 DBFH は，$HD = FB = 1$，$HF = DB = \sqrt{2}$ であり，正方形 ABCD の対角線の交点を I とおくと，長方形 DBFH と三角形 ACF の交線は FI となる。



さて，$\triangle HPF \backsim \triangle BPI$ より，

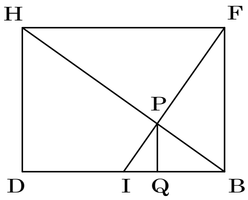
$$BP : HP = BI : HF = 1 : 2$$

よって，$BP = \dfrac{1}{3}BH = \dfrac{1}{3}\sqrt{(\sqrt{2})^2 + 1^2} = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$

また，$\triangle BPQ \backsim \triangle BHD$ より，

$$PQ : HD = BP : BH = 1 : 3$$

よって，$PQ = \dfrac{1}{3}HD = \dfrac{1}{3}$



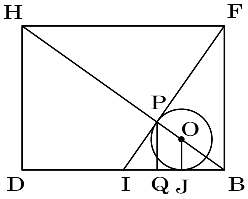
(2)　点 I は AC の中点で，$FP : PI = 2 : 1$ より，P は正三角形 AFC の重心である。

すると，四面体 ABCF は $BA = BC = BF = 1$ であるので，対称性から，内接球の中心 O は線分 BP 上にある。

(3)　点 O から正方形 ABCD に下ろした垂線の足を J とし，内接球の半径を r とすると，$BO : BP = OJ : PQ$ より，

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - r\right) : \frac{\sqrt{3}}{3} = r : \frac{1}{3},\quad \sqrt{3}r = \frac{\sqrt{3}}{3} - r$$

よって，$r = \dfrac{\sqrt{3}}{3(1+\sqrt{3})} = \dfrac{3-\sqrt{3}}{6}$



コメント

(2)は(3)の誘導ですので，簡単に記述しました。直観的すぎるかもしれません。

問　題

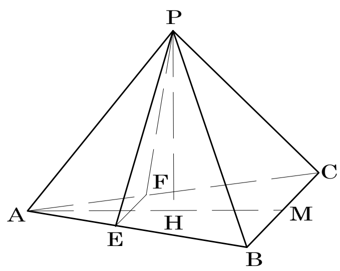
1 辺の長さが 3 の正三角形 ABC を底面とする四面体 PABC を考える。$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}=2$とする。

(1)　四面体 PABC の体積を求めよ。

(2)　辺 AB 上の点 E と辺 AC 上の点 F が $\mathrm{AE}=\mathrm{AF}$，$\cos\angle\mathrm{EPF}=\dfrac{4}{5}$を満たすとき，長さ AE を求めよ。　[2003]

解答例

(1) まず，△ABC は正三角形で，$\mathrm{PA}=\mathrm{PB}=\mathrm{PC}$より，点 P から△ABC に下ろした垂線の足 H は，△ABC の重心となる。



そこで, BC の中点を M とすると,

$$\mathrm{AM}=3\sin 60^\circ=\frac{3}{2}\sqrt{3}\,,\ \ \mathrm{AH}=\frac{2}{3}\mathrm{AM}=\sqrt{3}$$

よって，$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{PA}^2-\mathrm{AH}^2}=\sqrt{4-3}=1$

すると，四面体 PABC の体積 V は,

$$V=\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 3\cdot\frac{3}{2}\sqrt{3}\right)\cdot 1=\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

(2)　$\mathrm{AE}=\mathrm{AF}=x$ とすると, $\mathrm{EF}\,/\!/\,\mathrm{BC}$ より $\mathrm{EF}=x$ となる。

△PAB に余弦定理を適用して，$\cos\angle\mathrm{PAB}=\dfrac{4+9-4}{2\cdot 2\cdot 3}=\dfrac{3}{4}$ より，

$$\mathrm{PE}^2=4+x^2-2\cdot 2\cdot x\cdot\frac{3}{4}=x^2-3x+4$$

同様にして，$\mathrm{PF}^2=x^2-3x+4$ となり，また$\cos\angle\mathrm{EPF}=\dfrac{4}{5}$なので，△PEF に余弦定理を適用すると,

$$x^2=(x^2-3x+4)+(x^2-3x+4)-2(x^2-3x+4)\cdot\frac{4}{5}$$

$$3x^2+6x-8=0\,,\ \ x=\frac{-3\pm\sqrt{33}}{3}$$

よって, $0<x\leqq 3$ より，$\mathrm{AE}=\dfrac{-3+\sqrt{33}}{3}$

コメント

空間図形への三角比の応用を題材とした基本問題です。断面に注目して，余弦定理を適用していきます。

問　題

面積 1 の三角形 ABC の各辺の長さをそれぞれ $AB=2$, $BC=a$, $CA=b$ とする。さらに, C から直線 AB へ下ろした垂線の足 D が線分 AB 上にあるとする。このとき, 次の問いに答えよ。

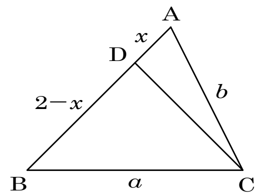
(1)　$AD=x$ とするとき, $a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ を, x を用いて表せ。

(2)　$a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2$ を最小にする x を求めよ。また, そのときの $\angle BAC$ の大きさを求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$AD=x$ とすると, $BD=2-x$

$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot CD=1$ より, $CD=1$



三平方の定理より,

$x^2+1=b^2$ ………①

$(2-x)^2+1=a^2$ ………②

すると, ①②より,

$$a^2+(2\sqrt{3}-1)b^2=(2-x)^2+1+(2\sqrt{3}-1)(x^2+1)$$
$$=2\sqrt{3}x^2-4x+2\sqrt{3}+4$$

(2)　(1)より, $2\sqrt{3}x^2-4x+2\sqrt{3}+4=2\sqrt{3}\left(x-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^2+\frac{4}{3}\sqrt{3}+4$

$0<x<2$ より, $x=\frac{1}{\sqrt{3}}$ のとき最小値をとる。

このとき, ①より $b^2=\frac{1}{3}+1=\frac{4}{3}$, $b=\frac{2}{\sqrt{3}}$ であり, $\cos\angle BAC=\frac{x}{b}=\frac{1}{2}$ なので, $\angle BAC=60°$ となる。

コメント

一見, 難しそうな図形問題ですが, 必要な知識は三平方の定理だけでした。

問　題

平面上の点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。円 C の内部に点 A がある。円 C の周上を 2 点 P, Q が条件 $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を満たしながら動く。線分 PQ の中点を R とする。また, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $|\vec{a}|=r$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\vec{q}$ とする。ただし, $0<r<1$ とする。

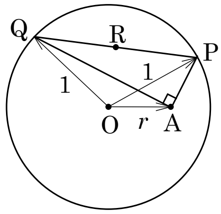
(1) $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2$ を内積 $\vec{p}\cdot\vec{q}$ を用いて表せ。

(2) 直線 OA 上の点 B で, $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定であるものを求めよ。また, このときの $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ の値を r を用いて表せ。 [2017]

解答例

(1) 線分 PQ の中点が R より,

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{AP}}+\overrightarrow{\mathrm{AQ}})=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}-2\vec{a})$$



これより, $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}-2\vec{a}|^2$ となり, $|\vec{p}|=1$, $|\vec{q}|=1$, $|\vec{a}|=r$ に注意すると,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{4}(1+1+4r^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}-4\vec{a}\cdot\vec{p}-4\vec{a}\cdot\vec{q})$$

$$=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})+r^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q}\cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ より $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=0$ となり, $(\vec{p}-\vec{a})\cdot(\vec{q}-\vec{a})=0$ から,

$$\vec{p}\cdot\vec{q}-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q}+r^2=0,\ r^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q}=-\vec{p}\cdot\vec{q}\cdots\cdots\cdots ②$$

①②より, $|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|^2=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-\vec{p}\cdot\vec{q}=\frac{1}{2}(1-\vec{p}\cdot\vec{q})\cdots\cdots\cdots ③$

(2) 点 B は直線 OA 上にあるので, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=k\vec{a}$ （k は定数）とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{BR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{q}-2k\vec{a})$$

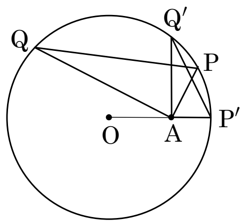
これより, $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\frac{1}{4}|\vec{p}+\vec{q}-2k\vec{a}|^2$ となり, ②から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\frac{1}{4}(1+1+4k^2r^2+2\vec{p}\cdot\vec{q}-4k\vec{a}\cdot\vec{p}-4k\vec{a}\cdot\vec{q})$$

$$=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})+k(r^2-\vec{a}\cdot\vec{p}-\vec{a}\cdot\vec{q})+(k^2-k)r^2$$

$$=\frac{1}{2}(1+\vec{p}\cdot\vec{q})-k\vec{p}\cdot\vec{q}+(k^2-k)r^2=\frac{1}{2}+(k^2-k)r^2+\frac{1}{2}(1-2k)\vec{p}\cdot\vec{q}$$

ここで, 点 A は点 O と異なるので, 2 点 P, Q の位置により線分 PQ の長さ, すなわち $2|\overrightarrow{\mathrm{AR}}|$ の大きさが異なる。すると, ③から $\vec{p}\cdot\vec{q}$ の値も異なる。



これより, $|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2$ が 2 点 P, Q の位置によらず一定である条件は, $1-2k=0$ すなわち $k=\frac{1}{2}$ である。

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{1}{2}\vec{a}$ となるので，点 B は線分 OA の中点となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BR}}|^2=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{2}\right)r^2=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}r^2$$

コメント

平面ベクトルの図形への応用問題です。(1)は普通に解いたのですが，(2)の途中で，△APQ の外接円の直径が PQ，半径が AR ということに気付き，ほとんど計算不要で③が導けました。解答例は書き直していませんが。

問　題

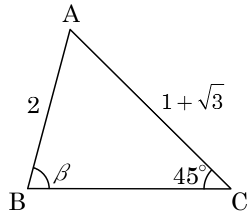
$\triangle$ABC が，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1+\sqrt{3}$，$\angle\mathrm{ACB}=45^\circ$ を満たすとする。

(1)　$\beta=\angle\mathrm{ABC}$ とおくとき，$\sin\beta$ および $\cos 2\beta$ の値を求めよ。

(2)　(1)の β の値をすべて求めよ。

(3)　$\triangle$ABC の外接円の中心を O とする。$\triangle$ABC が鋭角三角形であるとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を満たす実数 s, t を求めよ。　[2016]

解答例



(1)　$\triangle$ABC に正弦定理を適用して，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{\sin\beta}=\dfrac{2}{\sin 45^\circ}$ から，

$$\sin\beta=\frac{1+\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}=\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}$$

$$\cos 2\beta=1-2\sin^2\beta=1-2\left(\frac{\sqrt{2}+\sqrt{6}}{4}\right)^2$$

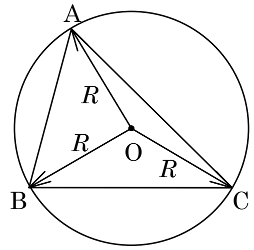
$$=1-\frac{2+\sqrt{3}}{2}=-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$2<1+\sqrt{3}$ より $45^\circ<\beta$ であり，しかも $\beta<180^\circ-45^\circ=135^\circ$ から，

$$45^\circ<\beta<135^\circ,\quad 90^\circ<2\beta<270^\circ$$

すると，$(*)$から $2\beta=150^\circ$，210° なので，$\beta=75^\circ$，105°

(3)　$\triangle$ABC は鋭角三角形なので，$\beta=75^\circ$ である。



また，O は$\triangle$ABC の外接円の中心より，

$$\angle\mathrm{AOB}=2\times 45^\circ=90^\circ,\quad \angle\mathrm{AOC}=2\beta=150^\circ$$

$$\angle\mathrm{BOC}=360^\circ-90^\circ-150^\circ=120^\circ$$

さらに，外接円の半径を R とすると，正弦定理より，

$$\frac{2}{\sin 45^\circ}=2R,\quad R=\frac{2}{\sqrt{2}}=\sqrt{2}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\sqrt{2}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(\sqrt{2})^2\cos 90^\circ=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos 150^\circ=-\sqrt{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\sqrt{2})^2\cos 120^\circ=-1$$

さて，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2s,\quad \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot(s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}})=2t$$

よって，$2s=-\sqrt{3}$，$2t=-1$ となり，$s=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$t=-\dfrac{1}{2}$

コメント

三角比とベクトルの融合問題です。(3)では，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ に注目して，内積の値で処理をしました。他にも，ベクトルの大きさに注目する方法が考えられます。

問　題

平面において，一直線上にない 3 点 O, A, B がある。O を通り直線 OA と垂直な直線上に O と異なる点 P をとる。O を通り直線 OB と垂直な直線上に O と異なる点 Q をとる。ベクトル$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$は$\overrightarrow{AB}$に垂直であるとする。

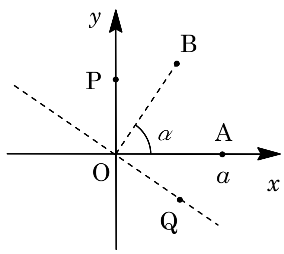
(1) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}$を示せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OB}$のなす角をαとする。ただし，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$とする。このときベクトル$\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$のなす角が$\pi-\alpha$であることを示せ。

(3) $\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$を示せ。　[2015]

解答例

(1) まず，$a>0$，$r>0$，$0<\alpha<\pi$として，xy 平面上で，$\overrightarrow{OA}=(a,\ 0)$，$\overrightarrow{OB}=r(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$とおく。



すると，条件より，$p\neq0$，$q\neq0$として，

$$\overrightarrow{OP}=(0,\ p),\ \overrightarrow{OQ}=q(\sin\alpha,\ -\cos\alpha)$$

さらに，$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}$と$\overrightarrow{AB}$が垂直なので，

$$(\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ})\cdot\overrightarrow{AB}=0$$

ここで，$\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{OQ}=(q\sin\alpha,\ p-q\cos\alpha)$，$\overrightarrow{AB}=(r\cos\alpha-a,\ r\sin\alpha)$から，

$$q\sin\alpha(r\cos\alpha-a)+(p-q\cos\alpha)r\sin\alpha=0$$

$\sin\alpha>0$より，$q(r\cos\alpha-a)+r(p-q\cos\alpha)=0$，$pr-aq=0$………(＊)

さて，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=pr\sin\alpha$，$\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}=aq\sin\alpha$なので，(＊)から，

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OQ}\cdot\overrightarrow{OA}$$

(2) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$のなす角を$\beta\ (0<\beta<\pi)$とおくと，$\cos\beta=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OQ}}{|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OQ}|}=\dfrac{-pq\cos\alpha}{|p||q|}$

ここで，(＊)からpとqは同符号なので，$|p||q|=|pq|=pq$となり，

$$\cos\beta=\frac{-pq\cos\alpha}{pq}=-\cos\alpha=\cos(\pi-\alpha)$$

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$より，$\dfrac{\pi}{2}<\pi-\alpha<\pi$となるので，$\beta=\pi-\alpha$である。

(3) (＊)より，$pr=aq$となり，$r|p|=a|q|$である。

よって，$|\overrightarrow{OB}||\overrightarrow{OP}|=|\overrightarrow{OA}||\overrightarrow{OQ}|$から，$\dfrac{|\overrightarrow{OP}|}{|\overrightarrow{OA}|}=\dfrac{|\overrightarrow{OQ}|}{|\overrightarrow{OB}|}$となる。

コメント

まず, 2 つの垂直関係から, 座標の設定という方法を考えました。しかし, (1)を解くと, その考え方を採用するほどでもないことがわかり, それで押し通そうとも思ったのですが, (3)で暗雲が漂いはじめました。ということで, リセットして……。

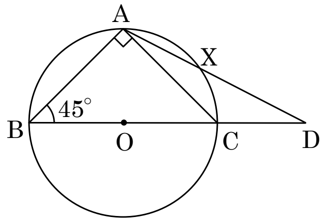
問　題

$\triangle$ABC を線分 BC を斜辺とする直角二等辺三角形とし，その外接円の中心を O とする。正の実数 p に対して，BC を$(p+1):p$に外分する点を D とし，線分 AD と $\triangle$ABC の外接円との交点で A と異なる点を X とする。

(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。

(2) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OX}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$p$ を用いて表せ。 [2014]

解答例



(1) 条件より，$\mathrm{BC}:\mathrm{CD}=1:p$から，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=p\overrightarrow{\mathrm{BC}}$となる。

また，点 O は辺 BC の中点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=(1+p)\overrightarrow{\mathrm{OC}}-p\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$
$$=(1+p)\overrightarrow{\mathrm{OC}}+p\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

(2) まず，$\mathrm{BC}=1$としても一般性を失うことはない。

このとき，条件より，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，$\mathrm{CD}=p$となり，方べきの定理から，

$$\mathrm{DA}\cdot\mathrm{DX}=p(p+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，$\mathrm{DX}=k\mathrm{DA}$とおくと，①より，$k\mathrm{DA}^2=p(p+1)\cdots\cdots\cdots②$

また，$\triangle$ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DA}^2=\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)^2+(1+p)^2-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+p)\cos 45^\circ$$
$$=\frac{1}{2}+1+2p+p^2-(1+p)=\frac{1}{2}(2p^2+2p+1)\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$k=\dfrac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}$となり，$\mathrm{DX}:\mathrm{XA}=k:1-k$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OX}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\Big\{1-\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\Big\}(2p+1)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$
$$=\frac{2p(p+1)}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2p+1}{2p^2+2p+1}\overrightarrow{\mathrm{OC}}$$

コメント

ベクトルの図形への応用問題です。点 O を原点とし，BC を x 軸，OA を y 軸として座標系を設定する方法も考えられます。確実ですが，計算量は多くなるでしょう。

問　題

空間ベクトル $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$ を考える。$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ で，$\vec{b}$ は xy 平面上にあり，その y 成分は正とする。また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とおく。

(1) $|p|<1$ であることを示せ。また，p を用いて $\vec{b}$ の成分表示をかけ。

(2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ は相異なり，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$ を満たすとする。$\vec{c}$ の z 成分が正のとき，p を用いて $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の成分表示をかけ。

(3) 上の条件に加えて $\vec{c}\cdot\vec{d}=p$ であるとき p の値を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}$ は xy 平面上の単位ベクトルで，その y 成分は正から，$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とおくと，$0<\theta<\pi$ となり，

$$p=\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta=\cos\theta,\ |p|=|\cos\theta|<1$$

すると，$\vec{b}=(\cos\theta,\ \sin\theta,\ 0)$ とおくことができ，$\sin\theta=\sqrt{1-p^2}$ から，

$$\vec{b}=\left(p,\ \sqrt{1-p^2},\ 0\right)$$

(2) $\vec{c}=(x,\ y,\ z)$，$\vec{d}=(u,\ v,\ w)$ とおくと，$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=p$ より，

$$x=u=p\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$ より，$px+y\sqrt{1-p^2}=pu+v\sqrt{1-p^2}=p\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$p^2+y\sqrt{1-p^2}=p^2+v\sqrt{1-p^2}=p$ となり，

$$y=v=\frac{p-p^2}{\sqrt{1-p^2}}=\frac{p(1-p)}{\sqrt{(1-p)(1+p)}}=\frac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}}\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$|\vec{c}|=1$ より，①③から，$p^2+\dfrac{p^2(1-p)}{1+p}+z^2=1$

$$z^2=1-p^2-\frac{p^2(1-p)}{1+p}=\frac{(1-p)(1+2p+p^2-p^2)}{1+p}=\frac{(1-p)(1+2p)}{1+p}$$

$z>0$ より，$z=\dfrac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}$ である。

また，$|\vec{d}|=1$ で $\vec{c}\neq\vec{d}$ より，$w=-\dfrac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}$ となり，

$$\vec{c}=\left(p,\ \frac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}},\ \frac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}\right)$$

$$\vec{d}=\left(p,\ \frac{p\sqrt{1-p}}{\sqrt{1+p}},\ -\frac{\sqrt{(1-p)(1+2p)}}{\sqrt{1+p}}\right)$$

(3)　$\vec{c}\cdot\vec{d}=p$ より，$p^2+\dfrac{p^2(1-p)}{1+p}-\dfrac{(1-p)(1+2p)}{1+p}=p$ となり，

$$\frac{p^2(1+p)+p^2(1-p)-(1-p)(1+2p)}{1+p}=p$$

よって，$4p^2-p-1=p+p^2$ から，$3p^2-2p-1=0$

すると，$(3p+1)(p-1)=0$ となり，$|p|<1$ から，$p=-\dfrac{1}{3}$

コメント

計算はやや複雑ですが，内容は連立方程式を解くだけです。

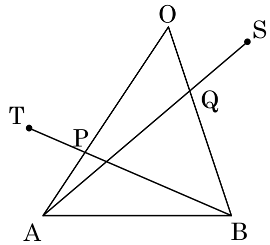
問　題

$m>0$, $n>0$, $0<x<1$ とする。△OAB の辺 OA を $m:n$ に内分する点を P, 辺 OB を $n:m$ に内分する点を Q とする。また, 線分 AQ を $1:x$ に外分する点を S, 線分 BP を $1:x$ に外分する点を T とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, m, n, x で表せ。

(2) 3 点 O, S, T が一直線上にあるとき, x を m, n で表せ。　[2012]

解答例



(1) 条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{m}{m+n}\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{n}{m+n}\vec{b}$

線分 AQ を $1:x$ に外分する点が S より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{-x\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{1-x}=\frac{-x}{1-x}\vec{a}+\frac{n}{(1-x)(m+n)}\vec{b}$$

(2) 線分 BP を $1:x$ に外分する点が T より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{-x\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{1-x}=\frac{m}{(1-x)(m+n)}\vec{a}-\frac{x}{1-x}\vec{b}$$

3 点 O, S, T が一直線上にある条件は, k を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=k\overrightarrow{\mathrm{OT}}$ から,

$$\frac{-x}{1-x}\vec{a}+\frac{n}{(1-x)(m+n)}\vec{b}=\frac{km}{(1-x)(m+n)}\vec{a}-\frac{kx}{1-x}\vec{b}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$ は 1 次独立なので,

$$\frac{-x}{1-x}=\frac{km}{(1-x)(m+n)}\cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{n}{(1-x)(m+n)}=-\frac{kx}{1-x}\cdots\cdots\cdots②$$

①より $-x(m+n)=km$ となり, $k=\dfrac{-x(m+n)}{m}\cdots\cdots\cdots③$

②より $n=-kx(m+n)$ となり, ③を代入すると,

$$n=\frac{x^2(m+n)^2}{m},\quad x^2=\frac{mn}{(m+n)^2}$$

よって, $x=\dfrac{\sqrt{mn}}{m+n}$ となる。なお, この値は $0<x<1$ を満たしている。

コメント

平面ベクトルの基本問題です。最後の $0<x<1$ については触れているだけですが, これを示すには, 相加平均と相乗平均の関係を用いると簡明です。

問　題

空間の 2 点 P, Q の原点 O を基点とする位置ベクトルが

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\cos t,\ 2\sin t,\ 1),\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(-\sin 3t,\ \cos 3t,\ -1)$$

によって与えられている。ただし，$-180^\circ \leqq t \leqq 180^\circ$ とする。

(1) 点 P と点 Q の距離が最小となる t と，そのときの点 P の座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角が 0° 以上 90° 以下となる t の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1) $\mathrm{P}(2\cos t,\ 2\sin t,\ 1)$，$\mathrm{Q}(-\sin 3t,\ \cos 3t,\ -1)$ より，

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &=(2\cos t+\sin 3t)^2+(2\sin t-\cos 3t)^2+(1+1)^2\\ &=4+1+4(\cos t\sin 3t-\sin t\cos 3t)+2^2=9+4\sin 2t\end{aligned}$$

さて，$-180^\circ \leqq t \leqq 180^\circ$ より，$-360^\circ \leqq 2t \leqq 360^\circ$ である。

すると，$2t=-90^\circ,\ 270^\circ$　$(t=-45^\circ,\ 135^\circ)$ のとき，$\sin 2t=-1$ となり，PQ^2 は最小となる。

よって，PQ が最小となるのは，$t=-45^\circ$，$t=135^\circ$ のときであり，このとき点 P の座標は，それぞれ $\mathrm{P}(\sqrt{2},\ -\sqrt{2},\ 1)$，$\mathrm{P}(-\sqrt{2},\ \sqrt{2},\ 1)$ である。

(2) 条件 $0^\circ \leqq \angle\mathrm{POQ} \leqq 90^\circ$ から，$\cos\angle\mathrm{POQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=-2\cos t\sin 3t+2\sin t\cos 3t-1=-2\sin 2t-1\geqq 0$$

すると，$\sin 2t \leqq -\dfrac{1}{2}$ の解は，$-360^\circ \leqq 2t \leqq 360^\circ$ から，

$$-150^\circ \leqq 2t \leqq -30^\circ,\ 210^\circ \leqq 2t \leqq 330^\circ$$

よって，$-75^\circ \leqq t \leqq -15^\circ$，$105^\circ \leqq t \leqq 165^\circ$

コメント

空間ベクトルを題材としていますが，内容は三角関数の式変形です。

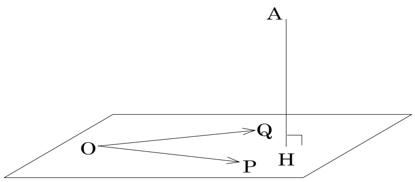
問　題

正の数 a に対し，空間内の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$ を考える。$\angle\mathrm{OPQ}=60^\circ$ が成り立つとき，次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) A から 3 点 O, P, Q を通る平面に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。 [1998]

解答例



(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\sqrt{2}a,\ 0,\ 0)$，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\sqrt{2}a,\ \sqrt{5}a,\ 1)$，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos 60^\circ$ より，

$$4a^2=2\sqrt{2}a\cdot\sqrt{2a^2+5a^2+1}\cdot\frac{1}{2}$$

$a>0$ より，$4a=\sqrt{2}\cdot\sqrt{7a^2+1}$

まとめて，$2a^2-2=0$，$a=1$

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)$，

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)$

H は平面 OPQ 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ （s, t は定数）……①とおくと，

$\overrightarrow{\mathrm{AH}}=s\overrightarrow{\mathrm{OP}}+t\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}$

直線 AH は平面 OPQ と直交するので，

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$ ……②かつ $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AH}}=0$ ……③

②より，$s|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$8s+4t=0$，$2s+t=0$ ………④

③より，$s\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}+t|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$，$4s+8t-1=0$ ………⑤

④⑤より，$s=-\dfrac{1}{12}$，$t=\dfrac{1}{6}$

よって，①より $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=-\dfrac{1}{12}(2\sqrt{2},\ 0,\ 0)+\dfrac{1}{6}(\sqrt{2},\ \sqrt{5},\ 1)=\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$

すなわち，$\mathrm{H}\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}}{6},\ \dfrac{1}{6}\right)$ となる。

コメント

(2)は平面の媒介変数表示を用いて解きましたが，平面の方程式を利用すると少し計算が少なくてすみます。

問　題

自然数の 2 乗となる数を平方数という。

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ が成り立つとき，$a \geqq k^2+2k-1$ が成り立つことを示せ。

(2) $n(n+1)+7$ が平方数となるような自然数 n をすべて求めよ。 [2017]

解答例

(1) 自然数 a, n, k に対して，$n(n+1)+a=(n+k)^2$ ……①のとき，

$$a=(n+k)^2-n(n+1)=2kn+k^2-n=k^2+(2k-1)n$$

ここで，$n \geqq 1$，$2k-1 \geqq 1$ より，$(2k-1)n \geqq 2k-1$ となり，

$$a \geqq k^2+2k-1 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2) n が自然数で $n(n+1)+7$ が平方数のとき，$n(n+1)+7>n^2$ より，①から，

$$n(n+1)+7=(n+k)^2 \quad (k \text{ は自然数}) \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，②から，$7 \geqq k^2+2k-1$ となり，$k^2+2k-8 \leqq 0$

$$(k+4)(k-2) \leqq 0,\ -4 \leqq k \leqq 2$$

k は自然数から，$k=1$，2 となる。

(i) $k=1$ のとき　③から，$n(n+1)+7=(n+1)^2$ となり，$n=6$

(ii) $k=2$ のとき　③から，$n(n+1)+7=(n+2)^2$ となり，$n=1$

(i)(ii)より，$n=1$，6 である。

コメント

整数問題ですが，(1)の誘導が強力なため，基本的な内容になっています。

問　題

$x,\ y$ を自然数とする。

(1)　$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるような x をすべて求めよ。

(2)　$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数であるような組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。　[2016]

解答例

(1)　自然数 x に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数であるためには，$\dfrac{3x}{x^2+2}\geqq 1$ が必要である。

$$3x\geqq x^2+2,\ \ x^2-3x+2\leqq 0,\ \ (x-1)(x-2)\leqq 0$$

よって，$1\leqq x\leqq 2$ となり，$x=1$ または $x=2$ である。

(i)　$x=1$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{3}{1+2}=1$ となり適する。

(ii)　$x=2$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{6}{4+2}=1$ となり適する。

(i)(ii)より，求める x は，$x=1,\ 2$ である。

(2)　自然数 $x,\ y$ に対し，$\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}$ が自然数である条件は,

(i)　$y=1$ のとき

$\dfrac{1}{y}=1$ から $\dfrac{3x}{x^2+2}$ が自然数となることより，(1)の結果から $x=1,\ 2$

(ii)　$y\geqq 2$ のとき

$0<\dfrac{1}{y}\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，(i)より $x\neq 1$，$x\neq 2$ なので，$x\geqq 3$ である。

すると，(1)の結果から $0<\dfrac{3x}{x^2+2}<1$ となり，$0<\dfrac{3x}{x^2+2}+\dfrac{1}{y}<\dfrac{3}{2}$ から,

$$\frac{3x}{x^2+2}+\frac{1}{y}=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$から，$\dfrac{1}{y}=1-\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+2}$，$y=\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}$

ここで，$y\geqq 2$ から $\dfrac{x^2+2}{x^2-3x+2}\geqq 2$ となり，$x^2-3x+2=(x-1)(x-2)>0$ より,

$$x^2+2\geqq 2(x^2-3x+2),\ \ x^2-6x+2\leqq 0$$

よって，$3-\sqrt{7}\leqq x\leqq 3+\sqrt{7}$ となり，$x=3$ または $x=4$ または $x=5$

(ii-i)　$x=3$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{9}{11}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{2}{11}$ であるので不適。

(ii-ii)　$x=4$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{12}{18}=\dfrac{2}{3}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{1}{3}$ であるので $y=3$。

(ii-iii)　$x=5$ のとき　$\dfrac{3x}{x^2+2}=\dfrac{15}{27}=\dfrac{5}{9}$ となり，$(*)$より $\dfrac{1}{y}=\dfrac{4}{9}$ であるので不適。

(i)(ii)より，求める$(x,\ y)$は，$(x,\ y)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (4,\ 3)$である。

コメント

値を絞り込むタイプの整数問題です。一見，難問そうに見える(2)では，(1)での考察がたいへん役立っています。なお，記述は省きましたが，方針を立てるとき，xに具体的な数値を入れて計算をしています。

問　題

p は 0 でない実数とし，$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定まる数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$b_n=p^na_n$ とする。b_{n+1} を b_n , n, p で表せ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=\dfrac{1}{p}a_n-(-1)^{n+1}$ に対して，両辺× p^{n+1} とすると，

$$p^{n+1}a_{n+1}=p^na_n-(-p)^{n+1}$$

ここで，$b_n=p^na_n$ とおくと，$b_{n+1}=b_n-(-p)^{n+1}$

(2)　(i)　$-p=1$ $(p=-1)$ のとき

(1)より，$b_{n+1}=b_n-1$ となり，$b_n=b_1-(n-1)=-1\cdot 1-n+1=-n$ となり，

$$a_n=\frac{b_n}{(-1)^n}=-\frac{n}{(-1)^n}=-n(-1)^n$$

(ii)　$-p\neq 1$ $(p\neq -1)$ のとき

(1)より，$n\geqq 2$ で，$b_n=b_1-\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k+1}=p\cdot 1-\sum_{k=1}^{n-1}(-p)^{k+1}$ となり，

$$b_n=p-\frac{p^2\{1-(-p)^{n-1}\}}{1+p}=\frac{p+p^2-p^2+(-p)^{n+1}}{1+p}=\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}$$

この式は，$n=1$ のときも成立し，a_n は，

$$a_n=\frac{b_n}{p^n}=\frac{1}{p^n}\cdot\frac{p+(-p)^{n+1}}{1+p}=\frac{1-(-p)^n}{p^{n-1}(1+p)}$$

コメント

誘導つきで漸化式を解く問題です。$p=-1$ のときの場合分けに要注意です。

問　題

次の条件で定められる数列$\{a_n\}$を考える。

$$a_1=1,\ a_2=1,\ a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　以下が成立するように，実数$s,\ t\,(s>t)$を定めよ。

$$\begin{cases} a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n) \\ a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n) \end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(2)　一般項a_nを求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$a_1=1$，$a_2=1$，$a_{n+2}=a_{n+1}+3a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$……①で定められる数列$\{a_n\}$に対し，条件より，$s>t$として，

$$a_{n+2}-sa_{n+1}=t(a_{n+1}-sa_n)\cdots\cdots②,\quad a_{n+2}-ta_{n+1}=s(a_{n+1}-ta_n)\cdots\cdots③$$

②③はいずれも，$a_{n+2}=(s+t)a_{n+1}-sta_n$となり，①から，

$$s+t=1,\quad st=-3$$

すると，$s,\ t$は2次方程式$x^2-x-3=0$の解$x=\dfrac{1\pm\sqrt{13}}{2}$となり，

$$s=\frac{1+\sqrt{13}}{2},\quad t=\frac{1-\sqrt{13}}{2}$$

(2)　②より，$a_{n+1}-sa_n=(a_2-sa_1)t^{n-1}$となり，$a_2-sa_1=1-\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}=\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}$

$$a_{n+1}-sa_n=\frac{1-\sqrt{13}}{2}t^{n-1}=t^n\cdots\cdots\cdots④$$

③より，$a_{n+1}-ta_n=(a_2-ta_1)s^{n-1}$となり，$a_2-ta_1=1-\dfrac{1-\sqrt{13}}{2}=\dfrac{1+\sqrt{13}}{2}$

$$a_{n+1}-ta_n=\frac{1+\sqrt{13}}{2}s^{n-1}=s^n\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$(s-t)a_n=s^n-t^n$となり，

$$a_n=\frac{1}{s-t}(s^n-t^n)=\frac{1}{\sqrt{13}}\left\{\left(\frac{1+\sqrt{13}}{2}\right)^n-\left(\frac{1-\sqrt{13}}{2}\right)^n\right\}$$

コメント

隣接3項間型の漸化式を解く有名問題ですが，誘導があるために，たとえば$s>t$を満たす$s,\ t$の組が1組だけを示すことも要求されているのかどうか，この設問の流れでは不要ではないか，などと考え込んでしまいます。

問　題

$a_n=\dfrac{1}{n(n+1)}$ を第 n 項とする数列を，次のように奇数個ずつの群に分ける。

$$\underbrace{\{a_1\}}_{第1群},\ \underbrace{\{a_2,\ a_3,\ a_4\}}_{第2群},\ \underbrace{\{a_5,\ a_6,\ a_7,\ a_8,\ a_9\}}_{第3群},\ \cdots\cdots$$

k を自然数として，以下の問いに答えよ。

(1)　第 k 群の最初の項を求めよ。

(2)　第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k を求めよ。

(3)　$(k^2+1)S_k \leqq \dfrac{1}{100}$ を満たす最小の自然数 k を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　まず，第 k 項の末項までの項数は，$1+3+5+\cdots+(2k-1)=k^2$

これより，第 k 群の初項は，$(k-1)^2+1=k^2-2k+2$ 項目となるので，

$$a_{k^2-2k+2}=\frac{1}{(k^2-2k+2)(k^2-2k+3)}$$

(2)　第 k 群の初項は a_{k^2-2k+2}，第 k 群の末項は a_{k^2} より，第 k 群に含まれるすべての項の和 S_k は，

$$S_k=\sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}a_n=\sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}\frac{1}{n(n+1)}=\sum_{n=k^2-2k+2}^{k^2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)$$

$$=\frac{1}{k^2-2k+2}-\frac{1}{k^2+1}=\frac{2k-1}{(k^2-2k+2)(k^2+1)}$$

(3)　$(k^2+1)S_k \leqq \dfrac{1}{100}$ より，$\dfrac{2k-1}{k^2-2k+2} \leqq \dfrac{1}{100}$ となり，

$$k^2-202k+102 \geqq 0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(k)=k^2-202k+102$ とおくと，$f(k)=(k-101)^2-101^2+102$ より，

$$f(202)=f(0)=102>0,\ f(201)=f(1)=-99<0$$

よって，(∗)を満たす最小の自然数 k は，$k=202$ である。

コメント

(1)と(2)は群数列の基本題です。(3)は結論を予想し，2 次関数 $f(k)$ のグラフの軸が $k=101$ であることに注目して解いています。

問　題

座標平面上の点$(a,\ b)$で a と b のどちらも整数となるものを格子点と呼ぶ。$y=3x^2-6x$ で表される放物線を C とする。n を自然数とし，C 上の点 $\mathrm{P}(n,\ 3n^2-6n)$をとる。原点を$\mathrm{O}(0,\ 0)$とする。C と線分 OP で囲まれる図形を D とする。ただし，D は境界を含むとする。$0\leqq k\leqq n$ を満たす整数 k に対して，直線 $x=k$ 上にあり D に含まれる格子点の個数を$f(k)$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

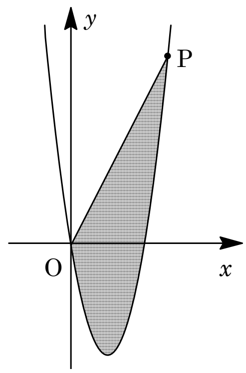
(1)　$f(k)$を求めよ。

(2)　Dに含まれる格子点の総数を求めよ。

(3)　$f(k)$が最大になるようなkを求めよ。　[2009]

解答例

(1)　直線OP : $y=(3n-6)x$ より，$C : y=3x^2-6x$ と OP に囲まれた領域Dに含まれる$x=k$上の格子点の個数$f(k)$は，



$$f(k)=(3n-6)k-(3k^2-6k)+1$$
$$=-3k^2+3nk+1$$

(2)　Dに含まれる格子点の総数Nは，

$$N=\sum_{k=0}^{n}(-3k^2+3nk+1)$$
$$=-3\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+3n\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+(n+1)$$
$$=\frac{1}{2}(n+1)\{-n(2n+1)+3n^2+2\}=\frac{1}{2}(n+1)(n^2-n+2)$$

(3)　(1)より，$f(k)=-3\left(k-\frac{n}{2}\right)^2+\frac{3}{4}n^2+1$ となり，n が整数から，

(i)　n が偶数のとき

$f(k)$は，$k=\frac{n}{2}$ で最大となる。

(ii)　n が奇数のとき

$f(k)$は，$k=\frac{n-1}{2}$，$\frac{n+1}{2}$ で最大となる。

コメント

格子点の個数を数える基本問題です。場合分けは発生しませんので，正確な計算力がすべてです。

問　題

k を実数とし，$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n$ ($n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots$) で数列$\{a_n\}$を定める。

(1)　$k=2$のとき，一般項a_nを求めよ。

(2)　すべての n について，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$を満たす$\alpha$，$\beta$に対して，$\alpha+\beta=k$，$\alpha\beta=1$が成り立つことを示せ。

(3)　(2)において，異なる実数αとβが存在するための k の条件を求め，そのときのαとβの値を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$a_1=0$，$a_2=1$，$a_{n+2}=ka_{n+1}-a_n\cdots\cdots$①に対し，$k=2$のとき，

$$a_{n+2}=2a_{n+1}-a_n,\quad a_{n+2}-a_{n+1}=a_{n+1}-a_n$$

よって，$a_{n+1}-a_n=a_2-a_1=1$

すると，数列$\{a_n\}$は公差 1 の等差数列となるので，

$$a_n=a_1+(n-1)=n-1$$

(2)　条件より，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$

$$a_{n+2}=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$ka_{n+1}-a_n=(\alpha+\beta)a_{n+1}-\alpha\beta a_n\cdots\cdots\cdots$③

すべての n について，③が成立する条件を求める。

まず，$n=1$のとき成立することより，$k=\alpha+\beta$

このとき，③は$a_n=\alpha\beta a_n$となり，$n=2$のとき成立することより，$1=\alpha\beta$

逆に，$k=\alpha+\beta$，$1=\alpha\beta$のとき，どんな n に対しても，明らかに③は成立する。

よって，すべての n について，$a_{n+2}-\beta a_{n+1}=\alpha(a_{n+1}-\beta a_n)$が成り立つ条件は，

$$\alpha+\beta=k,\quad \alpha\beta=1$$

(3)　異なる実数αとβが存在する条件は，(2)からα，βが 2 次方程式$x^2-kx+1=0$の 2 つの解より，

$$D=k^2-4>0$$

よって，$k<-2$，$2<k$となり，このとき，

$$(\alpha,\ \beta)=\Big(\frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2},\ \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}\Big),\ \Big(\frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2},\ \frac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}\Big)$$

コメント

(2)では，必要条件を求め，十分性を確認するというスタイルで記述しましたが，これが，出題者の意図に沿うものかどうかは不明です。

問　題

2 次の整式 $f(x)=x^2+ax+b$ を考える。すべての自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ が成り立つような $f(x)$ を求めよ。 [2005]

解答例

$f(x)=x^2+ax+b$ のとき，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f(k)=\dfrac{1}{3}f(n)$ より，

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(k^2+ak+b)=\frac{1}{3}(n^2+an+b)$$

これより，$\dfrac{1}{6}(n+1)(2n+1)+\dfrac{1}{2}a(n+1)+b=\dfrac{1}{3}(n^2+an+b)$ となり，

$$(a+3)n+(3a+4b+1)=0$$

すべての自然数 n に対して成立することより，

$$a+3=0,\ 3a+4b+1=0$$

よって，$a=-3$，$b=2$ から，$f(x)=x^2-3x+2$

コメント

数列の和の公式を確認するための問題です。

問　題

xy 平面上の曲線 $y=a(x-b)^2+c$ を考える。ただし，a，b，c は定数で $a \neq 0$ とする。この曲線上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ での接線が x 軸と交点をもつとき，その交点を $(f(p),\ 0)$ とする。

(1)　$f(p)$ が p の 1 次関数になるための a, b, c に対する必要十分条件を求めよ。

(2)　$x_1=p$，$x_2=f(x_1)$，$x_3=f(x_2)$，$\cdots$，$x_n=f(x_{n-1})$ とおくとき，(1)で求めた条件の下で $x_n\ (n \geqq 2)$ を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$y=a(x-b)^2+c$ に対して，$y'=2a(x-b)$

点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線は，$q=a(p-b)^2+c$ から，

$$y-a(p-b)^2-c=2a(p-b)(x-p)$$

x 軸との交点は，$y=0$ を代入して，

$$-a(p-b)^2-c=2a(p-b)(x-p)$$

$p=b$ のときは交点が存在しないので，$p \neq b$ として，

$$x=p-\frac{1}{2}(p-b)-\frac{c}{2a(p-b)}=\frac{1}{2}p+\frac{1}{2}b-\frac{c}{2a(p-b)}$$

よって，$f(p)=\dfrac{1}{2}p+\dfrac{1}{2}b-\dfrac{c}{2a(p-b)}$

すると，$f(p)$ が p の 1 次関数になる条件は，$b \neq p$ かつ $c=0$ である。

(2)　(1)から，$x_n=f(x_{n-1})=\dfrac{1}{2}x_{n-1}+\dfrac{1}{2}b$ より，$x_n-b=\dfrac{1}{2}(x_{n-1}-b)$

$$x_n-b=(x_1-b)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=(p-b)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$x_n=b+(p-b)\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$

コメント

接線の x 切片の条件を問う基本問題です。(2)の漸化式もよく知られたタイプです。

問　題

$\dfrac{1}{x}$の小数部分が$\dfrac{x}{2}$に等しくなるような正の数 x をすべて求めよ。ただし，正の数 a の小数部分とは，a をこえない最大の整数 n との差$a-n$のことをいう。たとえば，3 の小数部分は 0 であり, 3.14 の小数部分は 0.14 である。 [1998]

解答例

n を 0 以上の整数として，$n \leqq \dfrac{1}{x} < n+1$……①とすると，小数部分は$\dfrac{1}{x}-n$。

条件より，$\dfrac{1}{x}-n=\dfrac{x}{2}$，$x^2+2nx-2=0$

$x>0$ より，$x=-n+\sqrt{n^2+2}$

すると，$\dfrac{1}{x}=\dfrac{1}{-n+\sqrt{n^2+2}}=\dfrac{n+\sqrt{n^2+2}}{2}$

①に代入して，$n \leqq \dfrac{n+\sqrt{n^2+2}}{2} < n+1$，$2n \leqq n+\sqrt{n^2+2} < 2(n+1)$

$$n \leqq \sqrt{n^2+2} < n+2 \cdots\cdots\cdots②$$

②の左側の不等式はつねに成立する。

②の右側の不等式は，$n^2+2 < n^2+4n+4$ となり，つねに成立する。

以上より，求める x は，$x=-n+\sqrt{n^2+2}$ （n は 0 以上の整数）

コメント

与えられた条件から，整数の n についての連立不等式を立てて解いてみました。この不等式によって，n の値の範囲が限定されるかとも思ったのですが，実は解は無数に存在しました。

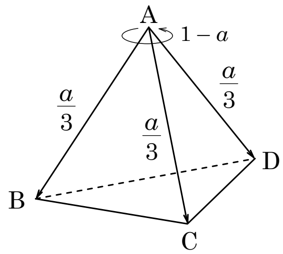
問　題

正四面体 ABCD の頂点を移動する点 P がある。点 P は，1 秒ごとに，隣の 3 頂点のいずれかに等しい確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るか，もとの頂点に確率 $1-a$ で留まる。初め頂点 A にいた点 P が，n 秒後に頂点 A にいる確率を p_n とする。ただし，$0<a<1$ とし，n は自然数とする。

(1) 数列 $\{p_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2) 確率 p_n を求めよ。 [2017]

解答例



(1) 点 P が $n+1$ 秒後に頂点 A にいるのは，n 秒後に頂点 A にいて確率 $1-a$ で留まるか，n 秒後に頂点 A 以外にいて確率 $\dfrac{a}{3}$ で移るかのいずれかである。

すると，点 P が n 秒後に頂点 A にいる確率 p_n について，

$$p_{n+1}=(1-a)p_n+\frac{a}{3}(1-p_n)=\left(1-\frac{4}{3}a\right)p_n+\frac{a}{3}$$

なお，点 P は初め頂点 A にいたことより，$p_1=1-a$ となる。

(2) (1)の漸化式を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\left(1-\dfrac{4}{3}a\right)\left(p_n-\dfrac{1}{4}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{4}=\left(p_1-\frac{1}{4}\right)\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{4}-a\right)\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n-1}=\frac{3}{4}\left(1-\frac{4}{3}a\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{3}{4}\left(1-\dfrac{4}{3}a\right)^{n}+\dfrac{1}{4}$ である。

コメント

確率と漸化式についての頻出問題です。計算も穏やかです。

問　題

ジョーカーを除く 1 組 52 枚のトランプのカードを 1 列に並べる試行を考える。

(1) 番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶ確率を求めよ。

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率を求めよ。

[2015]

解答例

(1) 52 枚のカードを 1 列に並べる $52!$ 通りが同様に確からしいとする。

番号 7 のカードが 4 枚連続して並ぶのは，この 4 枚の 7 を 1 枚とみなして考えると，その位置が ${}_{49}\mathrm{C}_1$ 通り，7 のカードの並び方が $4!$ 通り，7 以外のカードの並び方が $(52-4)!=48!$ 通りより，その確率は，

$$\frac{{}_{49}\mathrm{C}_1\cdot 4!\cdot 48!}{52!}=\frac{1}{13\cdot 17\cdot 25}=\frac{1}{5525}$$

(2) 番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合うのは，この隣り合う 2 枚の 7 を 1 枚とみなして考えると，その位置が ${}_{50}\mathrm{C}_2$ 通り，7 のカードの並び方が $4!$ 通り，7 以外のカードの並び方が $(52-4)!=48!$ 通りより，その確率は，

$$\frac{{}_{50}\mathrm{C}_2\cdot 4!\cdot 48!}{52!}=\frac{25}{13\cdot 17\cdot 25}=\frac{25}{5525}$$

すると，番号 7 のカードが 2 枚ずつ隣り合い，4 枚連続しては並ばない確率は，

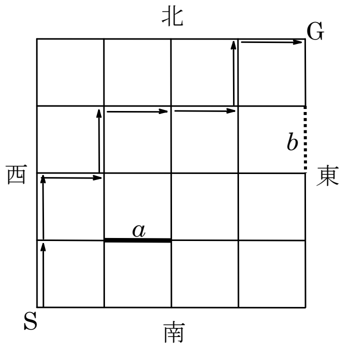
$$\frac{25}{5525}-\frac{1}{5525}=\frac{24}{5525}$$

コメント

確率の標準的な問題です。(1)を利用する方法で(2)の解答例を記しました。

問　題

図のような格子状の道路がある。S 地点から出発して，東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。ただし太い実線で描かれた区間 a を通り抜けるのに 1 分，点線で描かれた区間 b を通り抜けるのに 8 分，それ以外の各区間を通り抜けるのに 2 分かかるものとする。たとえば，図の矢印に沿った経路では S を出発し G に到達するまでに 16 分かかる。



(1)　a を通り抜ける経路は何通りあるか。

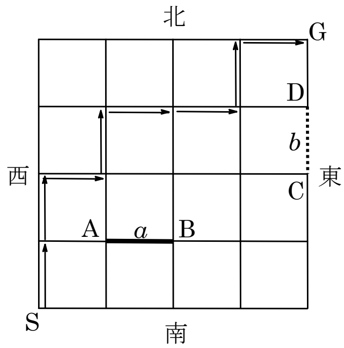
(2)　a を通り抜けずに b を通り抜ける経路は何通りあるか。

(3)　すべての経路から任意に 1 つ選んだとき，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　まず，右図のように区間 a の両端を A と B，区間 b の両端を C と D とする。

すると，区間 a を通り抜ける経路は，S→A→B→G となり，その数は，$2\times1\times\dfrac{5!}{2!3!}=20$ である。



(2)　区間 a, b を通り抜ける経路 S→A→B→C→D→G は，$2\times1\times\dfrac{3!}{2!}\times1\times1=6$ 通りあり，区間 b を通り抜ける経路 S→C→D→G は，$\dfrac{6!}{4!2!}\times1\times1=15$ 通りある。

よって，区間 a を通り抜けずに b を通り抜ける経路数は，$15-6=9$ である。

(3)　まず，S→G の全経路数は，$\dfrac{8!}{4!4!}=70$ である。以下，区間 a, b を通り抜けるかどうかで場合分けをする。

(i)　区間 a, b をともに通り抜けるとき

かかる時間は $1+8+2\times6=21$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{6}{70}$ である。

(ii)　区間 a を通り抜けずに，b を通り抜けるとき

かかる時間は $8+2\times7=22$ 分で，その確率は，(2)より $\dfrac{9}{70}$ である。

(iii)　区間 a を通り抜け，b を通り抜けないとき

かかる時間は $1+2\times7=15$ 分で，その確率は，(1)(2)より $\dfrac{20-6}{70}=\dfrac{14}{70}$ である。

(iv) 区間 a, b をともに通り抜けないとき

かかる時間は $2\times8=16$ 分で，その確率は，$1-\left(\dfrac{6}{70}+\dfrac{9}{70}+\dfrac{14}{70}\right)=\dfrac{41}{70}$ である。

(i)～(iv)より，S 地点から G 地点に到達するのにかかる時間の期待値 E は,

$$E=21\times\frac{6}{70}+22\times\frac{9}{70}+15\times\frac{14}{70}+16\times\frac{41}{70}=17\ （分）$$

コメント

センターレベルの確率の問題です。ベン図を描いてミスを防ぐのも一案です。

問　題

次の規則に従って座標平面を動く点 P がある。2 個のサイコロを同時に投げて出た目の積を X とする。

(i)　X が 4 の倍数ならば，点 P は x 軸方向に -1 動く。

(ii)　X を 4 で割った余りが 1 ならば，点 P は y 軸方向に -1 動く。

(iii)　X を 4 で割った余りが 2 ならば，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

(iv)　X を 4 で割った余りが 3 ならば，点 P は y 軸方向に $+1$ 動く。

たとえば，2 と 5 が出た場合には $2\times5=10$ を 4 で割った余りが 2 であるから，点 P は x 軸方向に $+1$ 動く。

以下のいずれの問題でも，点 P は原点 $(0,\ 0)$ を出発点とする。

(1)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(1,\ 0)$ にある確率を求めよ。

(2)　2 個のサイコロを 1 回投げて，点 P が $(0,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　2 個のサイコロを 3 回投げて，点 P が $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　2 個のサイコロの目と，出た目の積 X を 4 で割った余りの対応は，右表のようになる。

	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	0	1	2
2	2	0	2	0	2	0
3	3	2	1	0	3	2
4	0	0	0	0	0	0
5	1	2	3	0	1	2
6	2	0	2	0	2	0

すると，1 回投げて点 P が $(1,\ 0)$ にあるのは，右表で 2 の場合より，その確率は，

$$\frac{12}{36}=\frac{1}{3}$$

(2)　1 回投げて点 P が $(0,\ 1)$ にあるのは，右表で 3 の場合より，その確率は，

$$\frac{4}{36}=\frac{1}{9}$$

(3)　3 回投げて点 P が $(2,\ 1)$ にあるのは，右上の表で 2 が 2 回で 3 が 1 回の場合である。(1)の結果を利用すると，その確率は，

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{9}=\frac{1}{27}$$

コメント

センター試験を解くときのように表を作りました。これが一番確実でしょう。

問　題

AとBの2チームが試合を行い，どちらかが先に k 勝するまで試合をくり返す。各試合でAが勝つ確率を p，Bが勝つ確率を q とし，$p+q=1$ とする。AがBより先に k 勝する確率を P_k とおく。

(1)　P_2 を p と q で表せ。

(2)　P_3 を p と q で表せ。

(3)　$\frac{1}{2}<q<1$ のとき，$P_3<P_2$ であることを示せ。　[2012]

解答例

(1)　AがBより先に2勝する場合は，Aが2連勝のとき，またはAが1勝1敗で3試合目にAが勝つときより，その確率 P_2 は，

$$P_2=p^2+{}_2\mathrm{C}_1pq\cdot p=p^2+2p^2q=p^2(1+2q)$$

(2)　AがBより先に3勝する場合は，Aが3連勝のとき，またはAが2勝1敗で4試合目にAが勝つとき，またはAが2勝2敗で5試合目にAが勝つときである。

すると，その確率 P_3 は，

$$P_3=p^3+{}_3\mathrm{C}_2p^2q\cdot p+{}_4\mathrm{C}_2p^2q^2\cdot p=p^3+3p^3q+6p^3q^2=p^3(1+3q+6q^2)$$

(3)　$p+q=1$ から，$p=1-q$ となり，

$$P_2-P_3=p^2(1+2q)-p^3(1+3q+6q^2)=p^2\{1+2q-(1-q)(1+3q+6q^2)\}$$
$$=p^2(6q^3-3q^2)=3p^2q^2(2q-1)$$

すると，$\frac{1}{2}<q<1$ から $P_2-P_3>0$ となり，$P_3<P_2$ である。

コメント

確率の基本問題です。問題文の設定から，文系風にアレンジした跡が読み取れます。

問　題

n を 2 以上の自然数，q と r を自然数とする。1 から nq までの番号がついた nq 個の白玉，1 から nr までの番号がついた nr 個の赤玉を用意する。これら白玉と赤玉を，1 番から n 番まで番号づけられた n 個の箱それぞれに，小さい番号から順に白玉は q 個ずつ，赤玉は r 個ずつ配分しておく。たとえば，1 番の箱には番号 1 から q の白玉と番号 1 から r の赤玉が入っている。これら $n(q+r)$ 個の玉を n 個の箱に以下のように再配分する。1 番の箱から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移し，次に 2 番の箱から 1 個の玉を取り出して 3 番の箱に移す。同様の操作を順次繰り返し最後に n 番の箱に 1 個の玉を移して終了する。このようにして実現され得る再配分の総数を s_n とし，n 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分の総数を a_n とする。

(1)　s_2 を求めよ。

(2)　s_3 と a_3 を求めよ。

(3)　s_4 と a_4 を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　1 番の箱には，q 個の白玉と r 個の赤玉が入っている。この $q+r$ 個の玉の中から 1 個の玉を取り出して 2 番の箱に移す再配分の総数 s_2 は，$s_2=q+r$ である。

(2)　(1)より，1 番の箱から 2 番の箱には $q+r$ 通りの移動方法があり，次に 2 番の箱から 3 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法がある。これより，再配分の総数 s_3 は，

$$s_3=(q+r)(q+r+1)$$

また，3 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分には，1 番の箱から 2 番に赤玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合と，1 番の箱から 2 番に白玉を移し 2 番から 3 番に白玉を移す場合がある。その総数 a_3 は，

$$a_3=r\times q+q(q+1)=q(q+r+1)$$

(3)　(2)と同様にして，1 番の箱から 2 番の箱には $q+r$ 通りの移動方法，次に 2 番の箱から 3 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法，さらに 3 番の箱から 4 番の箱には $q+r+1$ 通りの移動方法がある。これより，再配分の総数 s_4 は，

$$s_4=(q+r)(q+r+1)^2$$

また，4 番の箱の白玉が $q+1$ 個であるような再配分には，1 番の箱から 2 番，2 番の箱から 3 番，3 番の箱から 4 番に移る玉で場合分けをすると，

(i)　赤玉→赤玉→白玉のとき　$r(r+1)q$ 通りの移動方法

(ii)　赤玉→白玉→白玉のとき　$rq(q+1)$ 通りの移動方法

(iii)　白玉→赤玉→白玉のとき　$qrq=q^2r$ 通りの移動方法

(iv)　白玉→白玉→白玉のとき　$q(q+1)^2$ 通りの移動方法

(i)〜(iv)より，再配分の総数を a_4 は，

$$\begin{aligned} a_4 &= r(r+1)q + rq(q+1) + q^2r + q(q+1)^2 \\ &= q(r^2 + r + rq + r + qr + q^2 + 2q + 1) = q(q+r+1)^2 \end{aligned}$$

コメント

場合の数の問題というよりは，読解力を試すものです。我慢強く，問題文をていねいに読まなくてはいけません。

問　題

1 から 6 までの目が等しい確率で出るさいころを 4 回投げる試行を考える。

(1)　出る目の最小値が 1 である確率を求めよ。

(2)　出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 である確率を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　出る目の最小値が 1 である事象を X とし，この確率を $P(X)$ とおく。

$\overline{X}$ は，出る目がすべて 2 以上である事象を表すので，

$$P(\overline{X}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

よって，$P(X) = 1 - P(\overline{X}) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 = \frac{671}{1296}$

(2)　出る目の最大値が 6 である事象を Y とし，この確率を $P(Y)$ とおく。

$\overline{Y}$ は，出る目がすべて 5 以下である事象を表すので，

$$P(\overline{Y}) = \left(\frac{5}{6}\right)^4$$

さて，出る目の最小値が 1 で，かつ最大値が 6 である事象は $X \cap Y$ より，

$$P(X \cap Y) = 1 - P(\overline{X \cap Y}) = 1 - P(\overline{X} \cup \overline{Y})$$
$$= 1 - \{P(\overline{X}) + P(\overline{Y}) - P(\overline{X} \cap \overline{Y})\}$$

ここで，$\overline{X} \cap \overline{Y}$ は，出る目がすべて 2 以上 5 以下である事象を表すので，

$$P(\overline{X} \cap \overline{Y}) = \left(\frac{4}{6}\right)^4$$

よって，$P(X \cap Y) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 - \left(\frac{5}{6}\right)^4 + \left(\frac{4}{6}\right)^4 = \frac{151}{648}$

コメント

類題が多くの参考書に掲載されている有名な頻出問題です。

問　題

数 1, 2, 3 を重複を許して n 個並べてできる数列 a_1，a_2，…，a_n を考える。

(1)　条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = j$ を満たす数列が $A_n(j)$ 通りあるとする。ただし，$j=1$，2，3 とする。

(i)　$A_n(1)$，$A_n(2)$ を求めよ。

(ii)　$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3)$ を $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ で表し，$A_n(3)$ を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，条件 $a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ かつ $a_{n-1} > a_n$ を満たす数列は何通りあるか。 [2007]

解答例

(1)　(i)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 1$ となるのは，$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = 1$ の場合だけより，

$$A_n(1) = 1$$

また，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 2$ となるのは，$a_1 = 1$ のとき ${}_{n-1}\mathrm{C}_1 = n-1$ 通り，$a_1 = 2$ のとき 1 通りより，

$$A_n(2) = (n-1) + 1 = n$$

(ii)　$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n = 3$ のとき，a_{n-1} は，$a_{n-1} = 1$，$a_{n-1} = 2$，$a_{n-1} = 3$ のいずれかであり，その場合の数はそれぞれ $A_{n-1}(1)$，$A_{n-1}(2)$，$A_{n-1}(3)$ より，

$$A_n(3) = A_{n-1}(1) + A_{n-1}(2) + A_{n-1}(3)$$

(i)より，$A_n(3) = 1 + (n-1) + A_{n-1}(3) = A_{n-1}(3) + n$

よって，$n \geqq 2$ のとき，$A_n(3) = A_1(3) + \displaystyle\sum_{k=2}^{n} k = 1 + \sum_{k=2}^{n} k = \frac{1}{2}n(n+1)$

(2)　$a_{n-1} > a_n$ より，$a_{n-1} = 2$，3 である。

(i)　$a_{n-1} = 2$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(2)$ 通り，また $a_n = 1$ より，この場合は，$A_{n-1}(2) \times 1 = n-1$ 通りある。

(ii)　$a_{n-1} = 3$ のとき

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ を満たす数列が $A_{n-1}(3)$ 通り，また $a_n = 1$，2 より，この場合は，$A_{n-1}(3) \times 2 = \dfrac{1}{2}(n-1)n \times 2 = (n-1)n$ 通りある。

(i)(ii)より，条件を満たす数列の数は，

$$(n-1) + (n-1)n = (n-1)(n+1)$$

コメント

漸化式を立てるという誘導がついていますが，場合の数の有名問題です。不等号に等号のついていないタイプが，2002 年に神戸大で出題されています。

問　題

1 つのさいころを投げ続けて，同じ目が 2 回連続して出たら終了するものとする。

(1)　ちょうど 3 回目に終了する確率を求めよ。

(2)　3 回目以内（3 回目も含む）に終了する確率を求めよ。

(3)　ちょうど r 回目に終了する確率を求めよ。ただし $r\geqq 2$ とする。　[2006]

解答例

(1) ちょうど 3 回目に終了する場合は，1 回目は任意の目，2 回目は 1 回目と異なる目，3 回目は 2 回目と同じ目が出るときである。その確率は，

$$\frac{6\times5\times1}{6^3}=\frac{5}{36}$$

(2)　2 回目に終了する場合は, 2 回同じ目が出る場合で，その確率は,

$$\frac{6\times1}{6^2}=\frac{1}{6}$$

よって, 3 回目以内に終了する確率は, (1)と合わせて,

$$\frac{1}{6}+\frac{5}{36}=\frac{11}{36}$$

(3)　ちょうど r 回目に終了する場合は，$r\geqq 3$ のとき，1 回目が任意の目，2 回目から $r-1$ 回目までは，その前の回の目と異なる目が出て，r 回目に $r-1$ 回目と同じ目が出るときである。その確率は,

$$\frac{6\times5^{r-2}\times1}{6^r}=\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{r-2}$$

この式に $r=2$ をあてはめると $\frac{1}{6}$ となり，成立している。

よって，求める確率は, $r\geqq 2$ において，$\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^{r-2}$ である。

コメント

センターレベルの基本的な確率計算の問題です。

問　題

袋の中に赤，青，黄，緑の 4 色の球が 1 個ずつ合計 4 個入っている。袋から球を 1 個取り出してその色を記録し袋に戻す試行を，くり返し 4 回行う。こうして記録された相異なる色の数を X とし，X の値が k である確率を P_k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4)$ とする。

(1)　確率 P_3 と P_4 を求めよ。

(2)　X の期待値 E を求めよ。 [2005]

解答例

(1)　$X=3$ となる場合は，3 色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_3$ 通り，その中で 2 回取り出す球の選び方が 3 通りずつ，そして取り出す順序が $\dfrac{4!}{2!}=12$ 通りより，その確率 P_3 は，

$$P_3=\frac{{}_4\mathrm{C}_3\times3\times12}{4^4}=\frac{9}{16}$$

また，$X=4$ となる場合は，各色の球を 1 回ずつ取り出し，その取り出す順序が $4!$ 通りより，その確率 P_4 は，

$$P_4=\frac{4!}{4^4}=\frac{3}{32}$$

(2)　$X=1$ となる場合は，1 色の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りより，その確率 P_1 は，

$$P_1=\frac{{}_4\mathrm{C}_1}{4^4}=\frac{1}{64}$$

また，$X=2$ となる確率 P_2 は，

$$P_2=1-(P_1+P_3+P_4)=\frac{21}{64}$$

以上より，X の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{1}{64}+2\times\frac{21}{64}+3\times\frac{9}{16}+4\times\frac{3}{32}=\frac{175}{64}$$

コメント

場合分けが必要で，いちばん求めにくい P_2 は，余事象の確率として計算しました。

問　題

ある人がサイコロを振る試行によって，部屋 A, B を移動する。サイコロの目の数が 1, 3 のときに限り部屋を移る。また各試行の結果，部屋 A にいる場合はその人の持ち点に 1 点を加え，部屋 B にいる場合は 1 点を減らす。持ち点は負になることもあるとする。第 n 試行の結果，部屋 A, B にいる確率をそれぞれ $P_A(n)$，$P_B(n)$ と表す。最初にその人は部屋 A にいるものとし(つまり，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ とする)，持ち点は 1 とする。

(1) $P_A(1)$，$P_A(2)$，$P_A(3)$ および $P_B(1)$，$P_B(2)$，$P_B(3)$ を求めよ。また，第 3 試行の結果，その人が得る持ち点の期待値 $E(3)$ を求めよ。

(2) $P_A(n+1)$，$P_B(n+1)$ を $P_A(n)$，$P_B(n)$ を用いて表せ。

(3) $P_A(n)$，$P_B(n)$ を n を用いて表せ。 [2004]

解答例

(1) 部屋を移動する確率は $\dfrac{1}{3}$，移動しない確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

まず，条件より，$P_A(0)=1$，$P_B(0)=0$ なので，

$$P_A(1)=\frac{2}{3}P_A(0)+\frac{1}{3}P_B(0)=\frac{2}{3},\quad P_B(1)=\frac{1}{3}P_A(0)+\frac{2}{3}P_B(0)=\frac{1}{3}$$

$$P_A(2)=\frac{2}{3}P_A(1)+\frac{1}{3}P_B(1)=\frac{5}{9},\quad P_B(2)=\frac{1}{3}P_A(1)+\frac{2}{3}P_B(1)=\frac{4}{9}$$

$$P_A(3)=\frac{2}{3}P_A(2)+\frac{1}{3}P_B(2)=\frac{14}{27},\quad P_B(3)=\frac{1}{3}P_A(2)+\frac{2}{3}P_B(2)=\frac{13}{27}$$

また，第 3 試行の結果，持ち点は，4，2，0，-2 の場合がある。

(i) 持ち点が 4 の場合　部屋が AAAA となるときで，その確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^3=\dfrac{8}{27}$

(ii) 持ち点が 2 の場合　部屋を AAAB, AABA, ABAA と移るときで，その確率は，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{8}{27}$$

(iii) 持ち点が 0 の場合　部屋を AABB, ABAB, ABBA と移るときで，その確率は，

$$\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{7}{27}$$

(iv) 持ち点が -2 の場合　部屋を ABBB と移るときで，その確率は $\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{4}{27}$

よって，持ち点の期待値 $E(3)$ は，

$$E(3)=4\times\frac{8}{27}+2\times\frac{8}{27}+0\times\frac{7}{27}+(-2)\times\frac{4}{27}=\frac{40}{27}$$

(2) (1)と同様にして，

$$P_A(n+1)=\frac{2}{3}P_A(n)+\frac{1}{3}P_B(n),\quad P_B(n+1)=\frac{1}{3}P_A(n)+\frac{2}{3}P_B(n)$$

(3)　(2)より，$P_A(n+1)+P_B(n+1)=P_A(n)+P_B(n)$ となり，

$$P_A(n)+P_B(n)=P_A(0)+P_B(0)=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$P_A(n+1)-P_B(n+1)=\dfrac{1}{3}\{P_A(n)-P_B(n)\}$ より，

$$P_A(n)-P_B(n)=\{P_A(0)-P_B(0)\}\left(\frac{1}{3}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$P_A(n)=\dfrac{1}{2}\left\{1+\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$，$P_B(n)=\dfrac{1}{2}\left\{1-\left(\dfrac{1}{3}\right)^n\right\}$

コメント

(1)の $E(3)$ を求める設問が，この問題の中では宙に浮いた状態です。

問　題

点 P は数直線上を原点 O を出発点として，確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$で正の向きに 1 進み，または負の向きに 1 進むとする。n 回移動したときの P の座標を $X(n)$ で表す。

(1)　$X(8)=2$ となる確率を求めよ。

(2)　$|X(7)|$ の期待値を求めよ。

(3)　P が 6 回目の移動が終わった時点で，一度も O に戻っていない確率を求めよ。

[2003]

解答例

(1)　$X(8)=2$ となるのは，8 回の移動のうち，正の向きに 5 回，負の向きに 3 回進んだときなので，その確率は ${}_8C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{32}$ である。

(2)　正の向きに a 回，負の向きに b 回進んだとき，$X(7)=k$ となったとすると，$a+b=7$，$a-b=k$ より，k は奇数となる。

また，正の向きに進む確率と負の向きに進む確率は同じなので，$X(7)=k$ となる確率と $X(7)=-k$ となる確率は等しい。

(i)　$|X(7)|=1$ のとき　正の向きに 4 回，負の向きに 3 回進むと $X(7)=1$ となることより，$|X(7)|=1$ の確率は ${}_7C_4\left(\frac{1}{2}\right)^4\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{35}{64}$ となる。

(ii)　$|X(7)|=3$ のとき　正の向きに 5 回，負の向きに 2 回進むと $X(7)=3$ となることより，$|X(7)|=3$ の確率は ${}_7C_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^2\times 2=\frac{21}{64}$ となる。

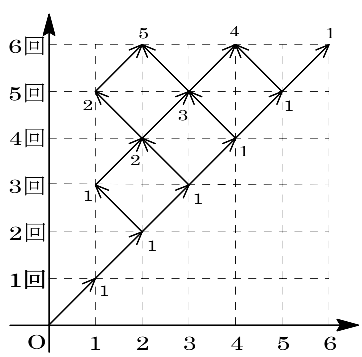
(iii)　$|X(7)|=5$ のとき　正の向きに 6 回，負の向きに 1 回進むと $X(7)=5$ となることより，$|X(7)|=5$ の確率は ${}_7C_6\left(\frac{1}{2}\right)^6\left(\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{7}{64}$ となる。

(iv)　$|X(7)|=7$ のとき　正の向きに 7 回進むと $X(7)=7$ となることより，$|X(7)|=7$ の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^7\times 2=\frac{1}{64}$ となる。

(i)～(iv)より，$|X(7)|$ の期待値は，$1\times\frac{35}{64}+3\times\frac{21}{64}+5\times\frac{7}{64}+7\times\frac{1}{64}=\frac{35}{16}$ である。

(3)　1 回目が正の向きに進んだとき，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合について，横軸に P の座標，縦軸に移動回数，グラフの中の数字をその点に到達したときの条件を満たす場合の数とすると，右図のようになる。

すると，6 回目までの移動で一度も O に戻っていない場合は，$5+4+1=10$ 通りある。



また，1 回目に負の向きに進んだときも同様となるので，求める確率は，$10\times\left(\frac{1}{2}\right)^6\times 2=\frac{5}{16}$である。

コメント

(3)は，上のようなグラフを書いて場合の数を数えると，もれや重複が防げます。

問　題

(1)　1000 から 9999 までの 4 桁の自然数のうち，1000 や 1212 のようにちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。

(2)　n 桁の自然数のうち，ちょうど 2 種類の数字から成り立っているものの個数を求めよ。 [2002]

解答例

(1)　4 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^4 - 2 = 14$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $36\times 14 = 504$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は，千の位が 0 でないことに注意すると，$1\times 2^3 - 1 = 7$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $9\times 7 = 63$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は，$504 + 63 = 567$ である。

(2)　(1)と同様に，n 桁の自然数が数字 0 を含んでいるかどうかで場合分けをする。

(i)　数字 0 を含んでいないとき

2 つの数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_2 = 36$ 通りで，この 2 種類の数字をともに含んだ並べ方が $2^n - 2$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $36(2^n - 2)$ 個ある。

(ii)　数字 0 を含んでいるとき

0 以外の数字の選び方が ${}_9\mathrm{C}_1 = 9$ 通りで，この数字と 0 をともに含んだ並べ方は，最高位が 0 でないことに注意すると，$1\times 2^{n-1} - 1 = 2^{n-1} - 1$ 通りである。これより，4 桁の自然数は $9(2^{n-1} - 1)$ 個ある。

(i)(ii)より，求める自然数の個数は，

$$36(2^n - 2) + 9(2^{n-1} - 1) = 81(2^{n-1} - 1)$$

コメント

(1)の一般化が(2)ですが，全く同じ考え方で解をつくることができます。

問　題

A, B, C の 3 人が次のように勝負をくり返す。1 回目には A と B の間で硬貨投げにより勝敗を決める。2 回目以降には，直前の回の勝者と参加しなかった残りの 1 人との間で，やはり硬貨投げにより勝敗を決める。この勝負をくり返し，誰かが 2 連勝するか，または 4 回目の勝負を終えたとき，終了する。ただし，硬貨投げで勝つ確率は各々 $\dfrac{1}{2}$ である。

(1) A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率を求めよ。

(2) A が 2 連勝して終了する確率を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 誰も 2 連勝せずに 4 回目で終了するのは，勝者が順に，ACBA または BCAB の場合なので，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)\times 2=\frac{1}{8}$$

よって, A, B, C のうちの誰かが 2 連勝して終了する確率は,

$$1-\frac{1}{8}=\frac{7}{8}$$

(2) A が 2 連勝して終了するのは, AA または BCAA の場合なので，その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

コメント

(1)は A が 2 連勝，B が 2 連勝，C が 2 連勝と場合分けをしようかと思いましたが，(2)の設問をみて，余事象で考えることにしました。

問　題

1 から 4 までの番号を 1 つずつ書いた 4 枚のカードがある。この中から 1 枚を抜き取り, 番号を記録してもとに戻す。これを n 回繰り返したとき, 記録された n 個の数の積が 3 の倍数である確率を a_n , 4 の倍数である確率を b_n とおく。

(1)　a_n と b_n を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき, $b_n > a_n$ を数学的帰納法を用いて証明せよ。　[2000]

解答例

(1)　n 個の数の積が 3 の倍数である事象を A とすると,

$$a_n = P(A) = 1 - P(\overline{A}) = 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n$$

次に, n 個の数の積が 2 の倍数である事象を C とすると,

$$P(C) = 1 - P(\overline{C}) = 1 - \left(\frac{2}{4}\right)^n = 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

また, n 個の数の積が 4 の倍数である事象を B とすると, 積事象 $\overline{B} \cap C$ は, n 個の数の積が 2 の倍数であるが, 4 の倍数ではない事象を表し, この場合は 2 を 1 回抜き, それ以外は 1 または 3 を抜くときなので,

$$P(\overline{B} \cap C) = {}_n\mathrm{C}_1 \frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^{n-1} = \frac{n}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

したがって, $b_n = P(B) = P(C) - P(\overline{B} \cap C) = 1 - \left(1 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n$

(2)　$b_n > a_n \iff 1 - \left(1 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n > 1 - \left(\frac{3}{4}\right)^n \iff \left(1 + \frac{n}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n < \left(\frac{3}{4}\right)^n$ ………(*)

(i)　$n = 2$ のとき

$\left(1 + \frac{2}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2} = \frac{8}{16}$, $\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{9}{16}$ より(*)は成立し, $b_2 > a_2$ となる。

(ii)　$n = k$ のとき

$b_k > a_k$ すなわち $\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k < \left(\frac{3}{4}\right)^k$ が成り立つと仮定すると,

$$\left(\frac{3}{4}\right)^{k+1} - \left(1 + \frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1} > \frac{3}{4}\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^k - \left(1 + \frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}$$

$$= 3\left(1 + \frac{k}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} - 2\left(1 + \frac{k+1}{2}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} = \frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{k+2} = k\left(\frac{1}{2}\right)^{k+3} > 0$$

よって, $n = k+1$ のとき(*)は成立するので, $b_{k+1} > a_{k+1}$ となる。

(i)(ii)より, $n \geqq 2$ のとき, $b_n > a_n$ である。

コメント

類題を毎年のように見かける超頻出問題です。余事象で考えるのがポイントです。

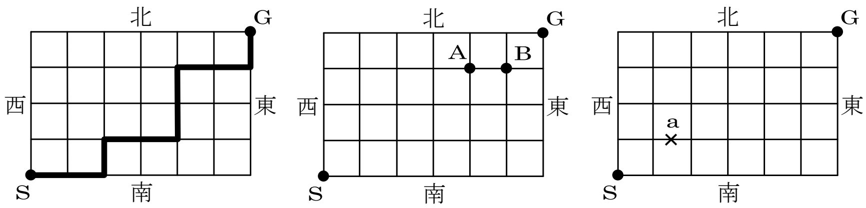
問　題

図のような碁盤の目状の道路がある。S 地点を出発して，道路上を東または北に進んで G 地点に到達する経路を考える。（図 1 の太線はそのような経路の一例である。）

(1)　S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。

(2)　S 地点から G 地点に至る経路のうち，図 2 の A 地点と B 地点をともに通る経路は何通りあるか。

(3)　図 3 の a の部分が通行止めのとき, S 地点から G 地点に至る経路は何通りあるか。



（図1）　（図2）　（図3）

[1999]

解答例

(1)　東方向に 1 区画進むのを→，北方向に 1 区画進むのを↑で表すと，S 地点から G 地点に至る 1 つの経路は，→を 6 個，↑を 4 個を 1 列に並べる順列に対応するので，求める経路の数は，

$$\frac{10!}{6!4!} = 210 \text{通り}$$

(2)　(1)と同様に考えて，S 地点から A 地点へは $\dfrac{7!}{4!3!} = 35$ 通り，A 地点から B 地点へは 1 通り, B 地点から G 地点へは 2 通りより，求める経路の数は，

$$35 \times 1 \times 2 = 70 \text{通り}$$

(3)　a の部分を通る場合は，(2)の A 地点と B 地点をともに通る場合と対等なので，その経路の数は, 70 通りとなる。

よって, a の部分を通らない経路の数は，$210 - 70 = 140$ 通り

コメント

有名な経路問題です。複雑な仕掛けはまったくありませんでした。

問　題

次の命題の真偽を述べ，その理由を説明せよ。ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{5}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることを用いてもよい。

(1)　$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(2)　x が実数であるとき，x^2+x が有理数ならば, x は有理数である。

(3)　x, y がともに無理数ならば，$x+y$，x^2+y^2 のうち少なくとも一方は無理数である。　[1999]

解答例

(1)　命題は真である。理由は以下の通り。

$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ が無理数でない，すなわち有理数であるとすると，p，q を自然数として，$\sqrt{2}+\sqrt{3}=\dfrac{q}{p}$ と表せる。

$$p(\sqrt{2}+\sqrt{3})=q,\ \ p^2(5+2\sqrt{6})=q^2,\ \ \sqrt{6}=\frac{q^2-5p^2}{2p^2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$は左辺が無理数，右辺が有理数なので，成立しない。

よって，$\sqrt{2}+\sqrt{3}$ は無理数である。

(2)　命題は偽である。反例は以下の通り。

$x=\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ とすると x は無理数であるが，このとき，

$$x^2+x=x(x+1)=\left(\sqrt{2}-\frac{1}{2}\right)\left(\sqrt{2}+\frac{1}{2}\right)=2-\frac{1}{4}=\frac{7}{4}$$

したがって，x^2+x は有理数である。

(3)　命題は偽である。反例は以下の通り。

$x=1+\sqrt{2}$，$y=1-\sqrt{2}$ とすると, x, y はともに無理数であるが，このとき，

$$x+y=2,\ \ x^2+y^2=6$$

したがって，$x+y$，x^2+y^2 はともに無理数ではない。

コメント

(2)と(3)では，$\sqrt{2}-\dfrac{1}{2}$ とか $1\pm\sqrt{2}$ が無理数であることは証明していません。念には念を入れて答案を作るのであれば，これも(1)と同じように示した方がよいでしょう。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆