７　　［熊本大］

$s>0$，$t>0$ とする。複素数平面上の $\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ を表す点をそれぞれ A, B, C とする。さらに，点 D を直線 AC に関して点 B と反対側にとり，△ACD が正三角形になるようにする。点 D の表す複素数を z とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　z を s, t を用いて表せ。

(2)　α，β，γ が等式 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ を満たすとき，γ と z をそれぞれ求めよ。

(3)　(2)で求めた γ と z に対して，直線 AC と直線 BD の交点を F とし，$\angle\mathrm{DFC}=\theta$ とする。このとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

$\boxed{8}$ ［東北大］

α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，(＊)を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。

$\boxed{9}$　　　　［京都大］

w を 0 でない複素数，x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

10　　［東京大］

複素数平面上の原点以外の点 z に対して，$w=\dfrac{1}{z}$ とする。

(1)　α を 0 でない複素数とし，点 α と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線を L とする。点 z が直線 L 上を動くとき，点 w の軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものを β とする。点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を点 z が動くときの点 w の軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。

$\boxed{11}$ ［北海道大］

　複素数平面上に 3 点 O, A, B を頂点とする△OAB がある。ただし, O は原点とする。△OAB の外心を P とする。3 点 A, B, P が表す複素数を, それぞれ α , β , z とするとき, $\alpha\beta = z$ が成り立つとする。

(1) 複素数 α の満たすべき条件を求め, 点 A(α) が描く図形を複素数平面上に図示せよ。

(2) 点 P(z) の存在範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。

12　　［東京工大］

実数 a, b, c に対して $F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$，$f(x)=x^2+cx+1$ とおく。また，複素数平面内の単位円周から 2 点 1, -1 を除いたものを T とする。

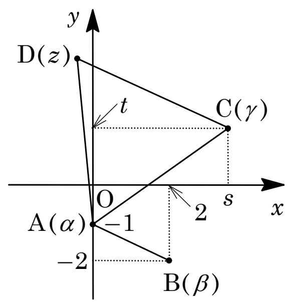
(1)　$f(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を c を用いて表せ。

(2)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるならば，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ を満たす実数 c_1，c_2 が存在することを示せ。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件を a, b を用いて表し，それを満たす点 $(a,\ b)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

7　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

(1)　$\alpha=-i$，$\beta=2-2i$，$\gamma=s+ti$ $(s>0,\ t>0)$ に対し，複素数平面上に $\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$ をとる。



ここで，$\triangle\mathrm{ACD}$ が正三角形で，点 D が直線 AC に関して B と反対側にあることより，$\mathrm{D}(z)$ は $\mathrm{C}(\gamma)$ を $\mathrm{A}(\alpha)$ のまわりに $\dfrac{\pi}{3}$ だけ回転した点となり，

$$z-\alpha=\left(\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}\right)(\gamma-\alpha)$$

$$z=-i+\frac{1}{2}(1+\sqrt{3}i)\{s+(t+1)i\}=-i+\frac{1}{2}\{s-\sqrt{3}t-\sqrt{3}+(\sqrt{3}s+t+1)i\}$$

$$=\frac{1}{2}(s-\sqrt{3}t-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(\sqrt{3}s+t-1)i\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　与えられた条件 $4(\beta-\alpha)^2+(\gamma-\alpha)^2-2(\beta-\alpha)(\gamma-\alpha)=0$ より，

$$4+\left(\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}\right)^2-2\cdot\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=0,\quad \frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1\pm\sqrt{3}i$$

ここで，AC は AB を正の向きに回転したものなので，$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}=1+\sqrt{3}i$ となり，

$$\gamma=\alpha+(1+\sqrt{3}i)(\beta-\alpha)=-i+(1+\sqrt{3}i)(2-i)=2+\sqrt{3}+(-2+2\sqrt{3})i$$

すると，$s=2+\sqrt{3}$，$t=-2+2\sqrt{3}$ となるので，$(*)$から，

$$z=\frac{1}{2}(2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}-6-\sqrt{3})+\frac{1}{2}(2\sqrt{3}+3-2+2\sqrt{3}-1)i$$

$$=-2+\sqrt{3}+2\sqrt{3}i$$

(3)　まず，xy 平面を対応させて，$\mathrm{A}(0,\ -1)$，$\mathrm{B}(2,\ -2)$，$\mathrm{C}(2+\sqrt{3},\ -2+2\sqrt{3})$，$\mathrm{D}(-2+\sqrt{3},\ 2\sqrt{3})$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(2+\sqrt{3},\ -1+2\sqrt{3}),\quad \overrightarrow{\mathrm{BD}}=(-4+\sqrt{3},\ 2+2\sqrt{3})$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{BD}}$ のなす角が θ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{(2+\sqrt{3})^2+(-1+2\sqrt{3})^2}=2\sqrt{5}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|=\sqrt{(-4+\sqrt{3})^2+(2+2\sqrt{3})^2}=\sqrt{35}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=(2+\sqrt{3})(-4+\sqrt{3})+(-1+2\sqrt{3})(2+2\sqrt{3})=5$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{5}{2\sqrt{5}\cdot\sqrt{35}}=\dfrac{1}{2\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{14}$ である。

［解 説］

複素数平面に関する標準的な問題です。(3)は慣れ親しんでいる xy 平面を対応させ，ベクトルの内積を利用しています。

8　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大］

(1)　$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)に対して，共役複素数をとると，

$$\overline{z}z+\overline{\alpha}\,\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0\ \cdots\cdots\cdots(＊＊)$$

(＊)と(＊＊)の両辺の差をとると，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ ………①

(2)　γ は実数なので $\gamma=\overline{\gamma}$ となり，①より，

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0,\ (\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②から $(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$ となり，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である。

そこで，k を実数として，$(\alpha-\overline{\beta})z=k$ ……③とおく。

(i)　$\alpha-\overline{\beta}=0$ のとき

(＊)から，$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ となるので，

$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+\gamma=0,\ |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

ここで，γ は負の実数なので $|\beta|^2-\gamma>0$ となり，$|z+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$

すると，複素数平面上で，点 z は点 $-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の点となり，無数に存在する。これより，z がちょうど 2 個あることに反する。

(ii)　$\alpha-\overline{\beta}\neq0$ のとき

③から，$z=\dfrac{k}{\alpha-\overline{\beta}}=\dfrac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)$ となり，(＊)に代入すると，

$$\frac{k^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\alpha\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)+\beta\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\alpha-\overline{\beta})+\gamma=0$$

$$k^2+k\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+k\beta(\alpha-\overline{\beta})+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|\neq0$ から $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ なので，$k^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$ となり，$-\gamma>0$，$|\alpha-\overline{\beta}|>0$ より，

$$k=\pm\sqrt{-\gamma}\,|\alpha-\overline{\beta}|$$

そして，この値を $k=k_1,\ k_2\ (k_1<k_2)$ とおくと，$z=\dfrac{k_1}{\alpha-\overline{\beta}},\ \dfrac{k_2}{\alpha-\overline{\beta}}$ となる。

(i)(ii)より，z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha-\overline{\beta}\neq0$ である。

［解　説］

複素数に関する標準的な問題です。(1)で導いた式が(2)へのスムーズな誘導になっています。

9　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［京都大］

(1)　$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ ……①に対し，$|w|=R\ (R>1)$ のとき，θ を任意の実数として，

$$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x+yi=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ となり，

$$x+yi=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $\cos\theta=\dfrac{R}{R^2+1}x$，④より $\sin\theta=\dfrac{R}{R^2-1}y$ なので，

$$\left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑤で表される楕円である。

(2)　$\arg w=\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，r を正の実数として，

$$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

(1)と同様にすると，①⑥より，$x+yi=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$ となり，

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より $r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$，⑧より $r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$ となり，

$$2r=\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑨,\quad \frac{2}{r}=\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

すると，⑨⑩より，

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=4,\quad \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで，$r>0$ から，$r+\dfrac{1}{r}\geqq 2\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=2$，また $r-\dfrac{1}{r}$ は任意の値をとる。

すると，$\cos\alpha>0$，$\sin\alpha>0$ で，⑦から $x\geqq 2\cos\alpha$，⑧から y は任意の値をとる。

以上より，点 $(x,\ y)$ の軌跡は，⑪で表される双曲線である。ただし，$x\geqq 2\cos\alpha$ の部分である。

［解　説］

複素数と軌跡に関する標準的な問題です。なお，(2)では x に限界があり，軌跡は双曲線の右の枝になります。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1)　条件より，$z \neq 0$ のとき $w = \dfrac{1}{z}$ から，$z = \dfrac{1}{w}\ (w \neq 0)$………①

さて，点 z が点 $\alpha\ (\alpha \neq 0)$ と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線 L 上を動くとき，

$$|z| = |z-\alpha|\text{………②}$$

①を②に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w}\right| = \left|\dfrac{1}{w}-\alpha\right|$，$\dfrac{1}{|w|} = \dfrac{|1-\alpha w|}{|w|}$ となり，

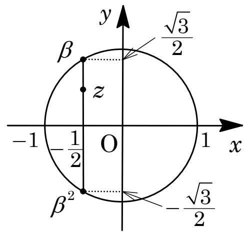
$$|1-\alpha w| = 1,\ |-\alpha|\left|w-\frac{1}{\alpha}\right| = 1,\ \left|w-\frac{1}{\alpha}\right| = \frac{1}{|\alpha|}$$

よって，点 w の軌跡は，中心 $\dfrac{1}{\alpha}$ で半径 $\dfrac{1}{|\alpha|}$ の円である。ただし，$w \neq 0$ より，原点は除く。

(2)　$x^3 = 1$ の解は，$(x-1)(x^2+x+1) = 0$ より，$x = 1,\ \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}i}{2}$ である。

すると，条件より，$\beta = \dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta^2 = \dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となる。

ここで，点 β と点 β^2 を結ぶ直線は，(1)で $\alpha = -1$ として表すことができるので，点 z が点 β と点 β^2 を結ぶ線分上を動くとき，



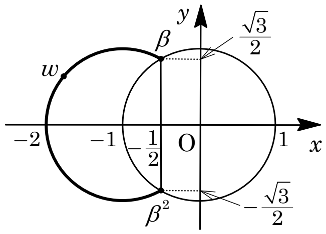
$$|z| = |z+1|\text{………③},\ |z| \leqq 1\text{………④}$$

①③より，$|w+1| = 1\ (w \neq 0)$………⑤

①④より，$\left|\dfrac{1}{w}\right| \leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{|w|} \leqq 1$ から，$|w| \geqq 1$………⑥

⑤⑥より，点 w の軌跡は，点 -1 を中心とする半径 1 の円周上で，原点を中心とする半径 1 の円の外部または周上の部分となる。

図示すると，右図の太線の弧である。ただし，両端点 β，β^2 は含む。



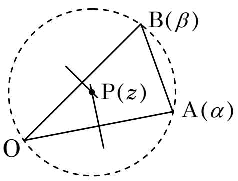
［解 説］

複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。直線や円の絶対値による表現方法が問われています。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［北海道大］

(1)　原点 O, 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, 点 $\mathrm{B}(\beta)$ を頂点とする△OAB について,

$$\alpha \neq 0,\ \beta \neq 0,\ \alpha \neq \beta \cdots\cdots\cdots ①$$



このとき, 点 $\mathrm{P}(z)$ は△OAB の外心なので, 辺 OA および辺 OB の垂直二等分線の交点となり,

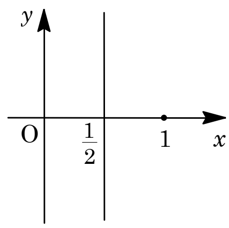
$$|z| = |z-\alpha| \cdots\cdots\cdots ②,\ |z| = |z-\beta| \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $z=\alpha\beta$ を②に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta-\alpha|$ となり, ①から $|\alpha| \neq 0$ より,

$$|\alpha||\beta| = |\alpha||\beta-1|,\ |\beta| = |\beta-1| \cdots\cdots\cdots ④$$

同様に, $z=\alpha\beta$ を③に代入すると, $|\alpha\beta| = |\alpha\beta-\beta|$ となり, ①から $|\beta| \neq 0$ より,

$$|\alpha||\beta| = |\alpha-1||\beta|,\ |\alpha| = |\alpha-1| \cdots\cdots\cdots ⑤$$



④⑤より, 点 $\mathrm{A}(\alpha)$, 点 $\mathrm{B}(\beta)$ は, ともに原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線上にある。ただし, ①から $\alpha \neq \beta$ である。

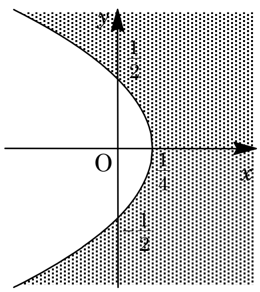
以上より, α の満たすべき条件は $|\alpha| = |\alpha-1|$ であり, 点 $\mathrm{A}(\alpha)$ の描く図形は右図の直線である。

(2)　(1)より, $\alpha = \dfrac{1}{2} + ai$, $\beta = \dfrac{1}{2} + bi$　$(a \neq b)$ とおくことができ,

$$z = \alpha\beta = \left(\frac{1}{2}+ai\right)\left(\frac{1}{2}+bi\right) = \left(\frac{1}{4}-ab\right) + \frac{1}{2}(a+b)i$$

ここで, $z = x+yi$ とおくと, $x = \dfrac{1}{4} - ab$, $y = \dfrac{1}{2}(a+b)$ となり,

$$a+b = 2y \cdots\cdots\cdots ⑥,\ ab = \frac{1}{4} - x \cdots\cdots\cdots ⑦$$



⑥⑦より, a, b $(a \neq b)$ は, t についての 2 次方程式 $t^2 - 2yt + \left(\dfrac{1}{4} - x\right) = 0$ の異なる実数解となり, その条件は,

$$D/4 = y^2 - \left(\frac{1}{4} - x\right) > 0,\ y^2 > -\left(x - \frac{1}{4}\right)$$

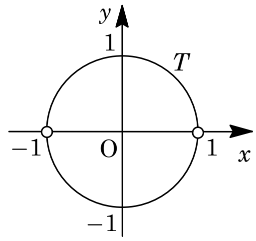
よって, 点 $\mathrm{P}(z)$ の存在範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。

［解　説］

複素数と図形に領域が絡んだ問題です。(1)は共役複素数を用いた形で, $\alpha + \overline{\alpha} = 1$ を結論としてもよいでしょう。なお, O, A, B が一直線上にないということについては, (1)の結果から満たしていることがわかります。

$\boxed{12}$ ［東京工大］

(1)　$f(x)=x^2+cx+1$ (c は実数)に対して，$f(x)=0$ の解がすべて T 上にある条件は, 2 つの解がともに虚数で，しかも絶対値が 1 ということである。



そこで，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$ とおくと，解と係数の関係から $\alpha\overline{\alpha}=1$ ($|\alpha|^2=1$) となり，$|\alpha|=1$ は満たされている。

よって，求める条件は，解が虚数すなわち $D=c^2-4<0$ から $-2<c<2$ である。

(2)　$F(x)=x^4+ax^3+bx^2+ax+1$ (a, b は実数)に対して，$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるとき，4 つの解はすべて虚数で，しかも絶対値が 1 である。これより，解を $x=\alpha$，$\overline{\alpha}$，β，$\overline{\beta}$ とおき，$F(x)$ の x^4 の係数が 1 であることに注意すると，

$$F(x)=(x-\alpha)(x-\overline{\alpha})(x-\beta)(x-\overline{\beta})$$
$$=\{x^2-(\alpha+\overline{\alpha})x+\alpha\overline{\alpha}\}\{x^2-(\beta+\overline{\beta})x+\beta\overline{\beta}\}$$

ここで，$\alpha\overline{\alpha}=|\alpha|^2=1$，$\beta\overline{\beta}=|\beta|^2=1$ で，また $\alpha+\overline{\alpha}$，$\beta+\overline{\beta}$ はともに実数なので，それぞれ $-c_1$，$-c_2$ とおくと，$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)$ と表せる。

(3)　$F(x)=0$ の解がすべて T 上にあるための必要十分条件は, (1)(2)から,

$$F(x)=(x^2+c_1x+1)(x^2+c_2x+1)\quad(-2<c_1<2,\ -2<c_2<2)$$

すると，$F(x)=x^4+(c_1+c_2)x^3+(c_1c_2+2)x^2+(c_1+c_2)x+1$ となり，

$$c_1+c_2=a\cdots\cdots\text{①},\ c_1c_2+2=b\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，c_1，c_2 は 2 次方程式 $t^2-at+(b-2)=0\cdots\cdots$③の 2 つの解となる。

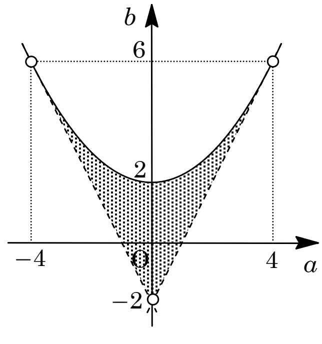
ここで，③の左辺を $g(t)$ とおき変形すると，$g(t)=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+b-2$ となり，$g(t)=0$ の解がともに $-2<t<2$ から，求める条件は，

$$-\frac{a^2}{4}+b-2\leqq 0\cdots\cdots\text{④},\ -2<\frac{a}{2}<2\cdots\cdots\text{⑤},\ g(-2)=2+2a+b>0\cdots\cdots\text{⑥}$$
$$g(2)=2-2a+b>0\cdots\cdots\text{⑦}$$

④～⑦をまとめると，$b\leqq\dfrac{a^2}{4}+2$，$-4<a<4$

$$b>-2a-2,\ b>2a-2$$

点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界線のみ領域に含む。



［解　説］

複素数と方程式の標準的な問題です。丁寧な誘導のため，結論に至る流れはスムーズです。