$\boxed{2}$ ［金沢大］

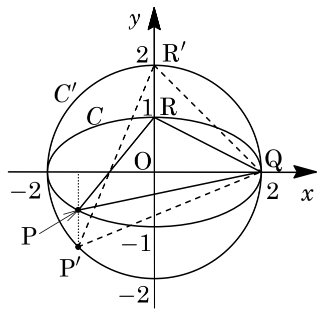
曲線 $C: x^2+4y^2=4$ 上を動く点 P と，C 上の定点 Q(2, 0)，R(0, 1) がある。次の問いに答えよ。

(1) △PQR の面積の最大値と，そのときの P の座標を求めよ。

(2) (1)で求めた点 P に対して直線 PQ を考える。曲線 C によって囲まれた図形を直線 PQ で 2 つに分けたとき，直線 PQ の下方にある部分の面積を求めよ。

$\boxed{2}$ ［金沢大］

(1)　まず，楕円$C: x^2+4y^2=4$を y 軸方向に 2 倍拡大して，円$C': x^2+y^2=4$をつくるとする。



このとき，点 P はP'，点$\mathrm{R}(0,\ 1)$は$\mathrm{R}'(0,\ 2)$に対応し，点$\mathrm{Q}(2,\ 0)$の位置は変わらない。

すると，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{P'QR'}$ より，$\triangle\mathrm{PQR}$ の面積が最大になるのは，$\triangle\mathrm{P'QR'}$の面積が最大のときである。

このときの点P'の座標は，直線$y=x$に関する対称性から，$\mathrm{P}'\left(2\cos\dfrac{5}{4}\pi,\ 2\sin\dfrac{5}{4}\pi\right)$すなわち$\mathrm{P}'(-\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$である。また最大値は,

$$\triangle\mathrm{P'QR'}=\frac{1}{2}\cdot2\cdot2+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}+\frac{1}{2}\cdot2\cdot\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}$$

よって，$\triangle\mathrm{PQR}$は$\mathrm{P}\left(-\sqrt{2},\ -\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$のときに最大となり，最大値は,

$$\frac{1}{2}(2+2\sqrt{2})=1+\sqrt{2}$$

(2)　(1)と同様にして，円C'の内側で直線$\mathrm{P'Q}$の下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\frac{3}{4}\pi-\frac{1}{2}\cdot2^2\cdot\sin\frac{3}{4}\pi=\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}$$

よって，楕円 C の内側で直線 PQ の下方にある部分の面積は,

$$\frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\pi-\sqrt{2}\right)=\frac{3}{4}\pi-\frac{\sqrt{2}}{2}$$

［解 説］

楕円を円に変換して処理する解法を採用しました。そうすると，計算はほとんど不要といってよいぐらいの解答例になります。

© 電送数学舎 2016