1　　　　　　　　　　　　　　　　［熊本大］

r を正の実数とする。数列$\{a_n\}$を $a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi} e^{-rx}\left|\sin x\right|dx$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定めるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a_{n+1}-a_n$ を求めよ。

(2)　$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を r を用いて表せ。

(4)　(3)で求めた r の式を $f(r)$ とおく。$\displaystyle\lim_{r\to+0} rf(r)$ を求めよ。

2 ［新潟大］

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\ \ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad (n\ \text{が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad (n\ \text{が}\ 3\ \text{以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1) 関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

３　　　　［京都府医大］

n を 1 以上の整数とし

$$f_n(x)=\frac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\frac{1}{(2+x)^n}\quad (|x|<2)$$

とおく。これについて,

$$I_1=\int_0^1 f_1(x)\,dx,\ \ I_n=\int_0^1 (1-x)^{n-1}f_n(x)\,dx\quad (n\geqq 2)$$

とおく。

(1)　$f_n(x)$ の導関数 $f_n{}'(x)$ を $f_{n+1}(x)$ を用いて表せ。

(2)　n が奇数のとき $I_n=\dfrac{1}{2^{n-1}n}+I_{n+1}$, n が偶数のとき $I_n=I_{n+1}$ であることを証明せよ。

(3)　$0\leqq I_n\leqq\dfrac{2}{n}$ であることを証明せよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}=\log 3$ であることを証明せよ。

1　　［熊本大］

(1)　$a_n=\displaystyle\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$ に対し，$n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$ で $\sin x$ の符号は不変なので，

$$a_{n+1}-a_n=\int_0^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|dx-\int_0^{n\pi}e^{-rx}|\sin x|dx$$
$$=\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}|\sin x|dx=\left|\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}e^{-rx}\sin x\,dx\right|$$

ここで，$(e^{-rx}\sin x)'=-re^{-rx}\sin x+e^{-rx}\cos x$ ………①

$(e^{-rx}\cos x)'=-re^{-rx}\cos x-e^{-rx}\sin x$ ………②

①×r＋②より，$-(r^2+1)e^{-rx}\sin x=\left\{e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\right\}'$ となり，

$$a_{n+1}-a_n=\left|-\frac{1}{r^2+1}\Big[e^{-rx}(r\sin x+\cos x)\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-(n+1)\pi r}\cos(n+1)\pi-e^{-n\pi r}\cos n\pi\right|$$
$$=\frac{1}{r^2+1}\left|e^{-n\pi r}e^{-\pi r}(-1)^{n+1}-e^{-n\pi r}(-1)^n\right|$$
$$=\frac{e^{-n\pi r}|(-1)^n|}{r^2+1}\left|-e^{-\pi r}-1\right|=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}e^{-n\pi r}$$

(2)　(1)より，$a_1=\displaystyle\int_0^{\pi}e^{-rx}|\sin x|dx=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}$ となり，$n\geqq2$ で，

$$a_n=a_1+\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\sum_{k=1}^{n-1}e^{-k\pi r}=\frac{e^{-\pi r}+1}{r^2+1}\left\{1+\frac{e^{-\pi r}(1-e^{-(n-1)\pi r})}{1-e^{-\pi r}}\right\}$$
$$=\frac{(1+e^{-\pi r})(1-e^{-n\pi r})}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$$

なお，この式は $n=1$ のときも成立している。

(3)　$r>0$ から，$n\to\infty$ のとき $e^{-n\pi r}\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$

(4)　$f(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{(r^2+1)(1-e^{-\pi r})}$ より，$rf(r)=\dfrac{1+e^{-\pi r}}{r^2+1}\cdot\dfrac{r}{1-e^{-\pi r}}$

ここで，$g(r)=e^{-\pi r}$ とおくと，$g'(r)=-\pi e^{-\pi r}$ となり，

$$\lim_{r\to+0}\frac{1-e^{-\pi r}}{r}=-\lim_{r\to+0}\frac{g(r)-g(0)}{r}=-g'(0)=\pi$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+0}rf(r)=\frac{1+1}{1}\cdot\frac{1}{\pi}=\frac{2}{\pi}$ である。

［解　説］

定積分と数列を融合した超頻出の有名問題です。このタイプの部分積分は計算ミスを犯しやすいので，いつも①②のような式を先に立式しています。

２　　　　［新潟大］

(1) $f_1(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ から，条件より，$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x\Big(1-\dfrac{t^2}{2}\Big)dt=x-\dfrac{x^3}{6}$

$$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)\,dt=1-\int_0^x\Big(t-\frac{t^3}{6}\Big)dt=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

(2) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，$g(x)=f_1(x)-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}=1-\dfrac{x^2}{2}-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}$ とおくと，

$$g'(x)=-x+\sin x+\frac{x^3}{3!}$$

すると，$x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq\sin x$ より $g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)\geqq g(0)=0$

また，$h(x)=\dfrac{x^4}{4!}-f_1(x)+\cos x=\dfrac{x^4}{4!}-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{x^3}{3!}+x-\sin x$$

$\sin x\leqq x$ より $h'(x)\geqq 0$ となり，$h(x)\geqq h(0)=0$

以上より，$0\leqq x\leqq 1$ において，$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3) $0\leqq x\leqq 1$ のとき，不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ ……(＊)が，すべての自然数 m に対して成り立つことを，数学的帰納法により証明する。

(i) $m=1$ のとき　(2)より，成り立っている。

(ii) $m=l$ のとき　$-\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}\leqq f_{2l-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}$ の成立を仮定すると，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l-1}(t)-\cos t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}\leqq f_{2l}(x)-\sin x\leqq\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}$ となり，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l}(t)-\sin t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq 1-f_{2l+1}(x)+\cos x-1\leqq\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$ となり，

$$-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq f_{2l+1}(x)-\cos x\leqq\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$$

すると，$m=l+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，自然数 m に対して(＊)は成り立っている。

(4) (＊)に $x=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると，

$$-\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}\leqq f_{2m-1}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}$$

すると，$0 < \dfrac{\pi}{6} < 1$から，$m \to \infty$のとき，$f_{2m-1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right) - \dfrac{\sqrt{3}}{2} \to 0$となるので，

$$\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解　説］

定積分と不等式，加えて極限を問うものです。記述量は多いですが，方針に迷いが生ずることはないでしょう。

3　　［京都府医大］

(1)　n を自然数とし，$f_n(x)=\dfrac{1}{(2-x)^n}+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{(2+x)^n}$　$(|x|<2)$ に対して，

$$f_n{}'(x)=\frac{n}{(2-x)^{n+1}}-(-1)^{n-1}\frac{n}{(2+x)^{n+1}}$$
$$=n\Big\{\frac{1}{(2-x)^{n+1}}+(-1)^n\frac{1}{(2+x)^{n+1}}\Big\}=nf_{n+1}(x)$$

(2)　(1)の結論を利用すると，

$$I_n=\int_0^1(1-x)^{n-1}f_n(x)\,dx=-\frac{1}{n}\Big[(1-x)^nf_n(x)\Big]_0^1+\frac{1}{n}\int_0^1(1-x)^nf_n{}'(x)\,dx$$
$$=\frac{1}{n}f_n(0)+\frac{1}{n}\int_0^1(1-x)^n nf_{n+1}(x)\,dx=\frac{1}{n}f_n(0)+I_{n+1}$$

ここで，$f_n(0)=\dfrac{1}{2^n}+(-1)^{n-1}\dfrac{1}{2^n}=\dfrac{1}{2^n}\{1+(-1)^{n-1}\}$ となるので，

(i)　n が奇数のとき　$f_n(0)=\dfrac{2}{2^n}=\dfrac{1}{2^{n-1}}$ より，$I_n=\dfrac{1}{2^{n-1}n}+I_{n+1}$

(ii)　n が偶数のとき　$f_n(0)=0$ より，$I_n=I_{n+1}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$f_{n+1}(x)=\dfrac{(2+x)^{n+1}+(-1)^n(2-x)^{n+1}}{(2-x)^{n+1}(2+x)^{n+1}}$

$2+x\geqq 2-x>0$ から $f_{n+1}(x)\geqq 0$ となるので，(1)から $f_n(x)$ は単調に増加し，

$$f_n(0)=\frac{2^n+(-1)^{n-1}\cdot 2^n}{2^n\cdot 2^n}=\frac{1+(-1)^{n-1}}{2^n}\geqq 0$$
$$f_n(1)=\frac{3^n+(-1)^{n-1}\cdot 1^n}{1^n\cdot 3^n}=\frac{3^n+(-1)^{n-1}}{3^n}=1-\Big(-\frac{1}{3}\Big)^n\leqq 2$$

これより，$0\leqq f_n(x)\leqq 2$ となり，

$$0\leqq I_n\leqq 2\int_0^1(1-x)^{n-1}\,dx=-\frac{2}{n}\Big[(1-x)^n\Big]_0^1=\frac{2}{n}$$

(4)　まず，$I_1=\displaystyle\int_0^1 f_1(x)\,dx=\int_0^1\Big(\frac{1}{2-x}+\frac{1}{2+x}\Big)dx=\Big[\log\Big|\frac{2+x}{2-x}\Big|\Big]_0^1=\log 3$

また，(2)より，l を自然数として，n が奇数$(n=2l-1)$のとき，

$$I_{2l+1}=I_{2l}=I_{2l-1}-\frac{1}{2^{2l-2}(2l-1)}=I_{2l-1}-\frac{1}{4^{l-1}(2l-1)}$$

$l\geqq 2$ のとき，$I_{2l-1}=I_1-\displaystyle\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}=\log 3-\sum_{k=1}^{l-1}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}=\log 3-\lim_{l\to\infty}I_{2l-1}$$

すると，(3)から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}I_n=0$ なので，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{4^{k-1}(2k-1)}=\log 3$ である。

［解 説］

定積分と漸化式が絡み，さらに極限へと繋ぐよくあるタイプの問題です。(3)において，前の設問の結果と利用するのか，それとも独立に解くのか迷いますが，次の(4)をみると，後者であることがわかります。