《2018 入試対策》

東京大学

理系数学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された東京大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 東大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

$$C: y = x^2 + k,\quad D: x = y^2 + k$$

(1) 直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2) 傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。 [2017]

2 正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。 [2015]

3 座標平面の原点を O で表す。線分 $y = \sqrt{3}x$ $(0 \leqq x \leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y = -\sqrt{3}x$ $(-2 \leqq x \leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0 \leqq s \leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2) D を図示せよ。 [2014]

4 座標平面において，点 P$(0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0 < a < 1$ を満たす実数とし，直線 $y = a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1) △PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2) a が $0 < a < 1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。 [2011]

5 座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y = x^2$ 上の 2 点 Q$(\alpha,\ \alpha^2)$，R$(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 G$(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。 [2011]

6 座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2\ (-1 \leqq x \leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を $1:2$ に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときは $\mathrm{R}=\mathrm{P}$ とする。

(1) a を $-1 \leqq a \leqq 1$ を満たす実数とするとき，点 $(a,\ b)$ が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) D を図示せよ。 [2007]

7 O を原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m : y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで, $p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ 上の，第 1 象限の点 Q に移り, y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限の点 R に移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような $\theta\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 l に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。 [2006]

8 xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

9 2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$，$y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。 [2002]

10 座標平面上を運動する 3 点 P, Q, R があり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P}: x=\cos t,\ y=\sin t \qquad \mathrm{Q}: x=1-vt,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{R}: x=1-vt,\ y=1$$

ただし，v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) 点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。

(2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。 [2000]

■ 図形と計量

1　C を半径 1 の円周とし，A を C 上の 1 点とする。3 点 P，Q，R が A を時刻 $t=0$ に出発し，C 上を各々一定の速さで，P，Q は反時計回りに，R は時計回りに，時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは，それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって，Q は C をちょうど一周する)。ただし，m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

[2010]

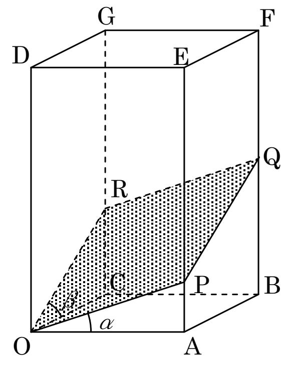
2　半径 r の球面上に 4 点 A，B，C，D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$AB=\sqrt{3}$，$AC=AD=BC=BD=CD=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

■ ベクトル

1　a を $1<a<3$ を満たす実数とし，座標空間内の 4 点 $P_1(1,\ 0,\ 1)$，$P_2(1,\ 1,\ 1)$，$P_3(1,\ 0,\ 3)$，$Q(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 P_1Q，P_2Q，P_3Q と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $R_1R_2R_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。 [2016]

2　1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle AOP$ を α，$\angle COR$ を β とおく。



(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。 [2014]

3　$\triangle$ABC において$\angle$BAC$=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

(1)　$\angle$APB，$\angle$APC を求めよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。　[2013]

4　四面体 OABC において，4 つの面はすべて合同であり，OA$=3$，OB$=\sqrt{7}$，AB$=2$ であるとする。また，3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

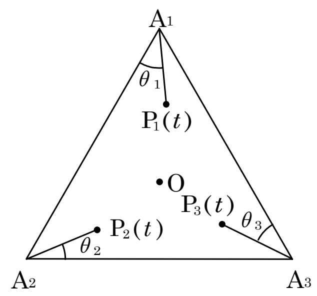
(1)　点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2)　$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t，Q_t とおく。2 点 P_t，Q_t を通り，平面 L に垂直な平面を M とするとき，平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3)　t が $0<t<1$ の範囲を動くとき，$S(t)$ の最大値を求めよ。　[2010]

5　平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする 1 辺の長さが 1000 の正三角形$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$がある。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$の内部に 3 点 $\mathrm{B_1}$，$\mathrm{B_2}$，$\mathrm{B_3}$を，$d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n)=1$　$(n=1,\ 2,\ 3)$ となるようにとる。また，

$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$
$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$



とおく。$n=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれに対して，時刻 0 に A_n を出発をし，$\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え，時刻 t におけるその位置を $\mathrm{P}_n(t)$ と表すことにする。

(1)　ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t),\ \mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル $\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と，ベクトル $\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2)　角度 θ_1，θ_2，θ_3 を $\theta_1=\angle\mathrm{B_1A_1A_2}$，$\theta_2=\angle\mathrm{B_2A_2A_3}$，$\theta_3=\angle\mathrm{B_3A_3A_1}$ によって定義する。α を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで，$\theta_1+\theta_2$ の値のとる範囲を α を用いて表せ。

(3)　時刻 t_1，t_2，t_3 のそれぞれにおいて，次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\ \mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_3}(t_2),\ \mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_1}(t_3),\ \mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

このとき，時刻 $T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ。　[2009]

6　O を原点とする座標平面上の 4 点 $\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$，$\mathrm{P_4}$ で，条件

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n-1}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\quad(n=2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$ が曲線 $xy=1$ 上にあるとき，$\mathrm{P_3}$ はこの曲線上にはないことを示せ。

(2)　$\mathrm{P_1}$，$\mathrm{P_2}$，$\mathrm{P_3}$ が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき，$\mathrm{P_4}$ もこの円周上にあることを示せ。

[2006]

7　xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し, OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき PQ≦AR であるような点 P の動く範囲 V を求め，V の体積は 10 より小さいことを示せ。　[2002]

8　xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の 2 条件を満たしているものとする。

(a)　A, B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる。

(b)　A, B は一点 P のみを共有し, P はそれぞれの円周上にある。

このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし, 円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。 [1999]

■ 整数と数列

1　$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n \geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。 [2017]

2　k を正の整数とし, 10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，$\cdots$，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k \neq 0$ とする。

(1)　次の不等式を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{n}-10^k < 0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot10^{k-1}$ 以上の整数ならば, 次の不等式を満たす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k \leqq \sqrt{m}-p < 0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r \leqq x < r+1$ を満たす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ を満たす正の整数 s は存在しないことを示せ。 [2016]

3　数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が n によらないことを示せ。

(2)　すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

(3)　数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。　[2015]

4　m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

[2015]

5　r を 0 以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りをb_nとする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1)　自然数 n に対し，b_{n+2}は$b_{n+1}(b_n+1)$を p で割った余りと一致することを示せ。

(2)　$r=2$，$p=17$の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3)　ある 2 つの相異なる自然数 n, m に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$が成り立つことを示せ。

(4)　a_2，a_3，a_4，$\cdots$に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。　[2014]

6　次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件(a), (b)をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。　[2013]

7　n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1)　連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2)　連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。　[2012]

8　実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。　[2011]

9　p，q を 2 つの正の整数とする。整数 a，b，c で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような a，b，c を $[a,\ b\ ;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;c]$ に対して，$w([a,\ b\ ;c]) = p-q-(a+b)$ とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\ ;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p=q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。　[2011]

$\boxed{10}$ 自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1) m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

(3) m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。 [2009]

$\boxed{11}$ 自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9} = \overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば，$\boxed{1}=1$，$\boxed{2}=11$，$\boxed{3}=111$ である。

(1) m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2) n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。 [2008]

$\boxed{12}$ 次の条件を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2 = xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ で，$y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組 $(a,\ b,\ c)$ が条件(A)を満たすとする。このとき，組 $(b,\ c,\ z)$ が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組 $(x,\ y,\ z)$ は，無数に存在することを示せ。 [2006]

$\boxed{13}$ $x>0$ に対し，$f(x) = \dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1) $n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて $f^{(n)}(x) = \dfrac{a_n + b_n \log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2) $h_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。 [2005]

$\boxed{14}$ 3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。 [2005]

15 自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1) 10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し, 10 の位の数を a, 1 の位の数を b とおいたとき, $a+b$ が偶数となるならば, b は 0 または 4 であることを示せ。

(2) 10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し, 1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数, および 1 の位の数の 4 つがすべて同じ数となるならば, その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。 [2004]

16 2 次方程式 $x^2-4x-1=0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α, 小さいものを β とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し, $s_n=\alpha^n+\beta^n$ とおく。

(1) s_1, s_2, s_3 を求めよ。また, $n \geqq 3$ に対し, s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2) β^3 以下の最大の整数を求めよ。

(3) α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。 [2003]

17 n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1) 数列 a_n, b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は, $a_{n+1}=a_n+b_n$, $b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2) $n=1,\ 2,\ 3\cdots$ に対して, a_n, b_n はともに正の整数で, 互いに素であることを証明せよ。 [2002]

18 N を正の整数とする。$2N$ 個の項からなる数列 $\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$ を $\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$ という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列は b_1 を初項とし, b_i の次に a_i, a_i の次に b_{i+1} がくるようなものになる。また, 数列 $\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2N\}$ をシャッフルしたときに得られる数列において, 数 k が現れる位置を $f(k)$ で表す。たとえば, $N=3$ のとき, $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$ をシャッフルすると, $\{4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3\}$ となるので, $f(1)=2$, $f(2)=4$, $f(3)=6$, $f(4)=1$, $f(5)=3$, $f(6)=5$ である。

(1) 数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$ を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1 \leqq k \leqq 2N$ を満たす任意の整数 k に対し, $f(k)-2k$ は $2N+1$ で割り切れることを示せ。

(3) n を正の整数とし, $N=2^{n-1}$ のときを考える。数列 $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ を $2n$ 回シャッフルすると, $\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$ にもどることを証明せよ。 [2002]

19　次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字は互いに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない」

ただし，S の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は S に含まれるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2)　小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。　[2000]

20　(1)　k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき，$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2)　以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件 ： $0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

[1999]

21　実数 a に対して $k\leqq a<k+1$ をみたす整数 k を $[\,a\,]$ で表す。n を正の整数として，$f(x)=\dfrac{x^2(2\cdot 3^3\cdot n-x)}{2^5\cdot 3^3\cdot n^2}$ とおく。$36n+1$ 個の整数 $[f(0)]$，$[f(1)]$，$[f(2)]$，…，$[f(36n)]$ のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。　[1998]

■ 確率

1　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。　[2017]

2　A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。　[2016]

3　どの目も出る確率が $\frac{1}{6}$ のさいころを 1 つ用意し，次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ，出た目が 1，2，3 のときは文字列 AA を書き，4 のときは文字 B を，5 のときは文字 C を，6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ，同じ規則に従って，AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，さいころを 5 回投げ，その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると，得られる文字列は，AACDAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は D，5 番目の文字は A である。

(1)　n を正の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。[2015]

4 a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。　[2014]

5 A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

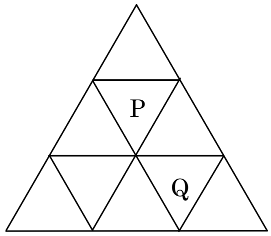
そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1)　A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}p(n)$ を求めよ。　[2013]

6 図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。

[2012]



7 2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#) 箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

(1) $m \geqq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2) n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。

(3) n を自然数とするとき，$P_{4n}(6)$ を求めよ。 [2010]

8 スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\frac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A) 1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B) 1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C) 1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ, L にあればその玉を R に入れる。

(1) L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2) L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3) L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\frac{P_3}{P_1}$ を求めよ。 [2009]

9　白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。　[2008]

10　表が出る確率が p，裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし，$0<p<1$ とする。この硬貨を投げて，次のルール(R)の下で，ブロック積みゲームを行う。

(R)
- ①　ブロックの高さは，最初は 0 とする。
- ②　硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ，裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1)　n 回硬貨を投げたとき，最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2)　(1)で，最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3)　ルール(R)の下で，n 回硬貨投げを独立に 2 度行い，それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち，高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし，最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。[2007]

11　コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく, p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。　[2006]

12　N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, …, N が書かれたカードを 1 枚ずつ, 計 N 枚用意し, 甲, 乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は, そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は, $b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iii)　$a+b\leqq N$ の場合は, 乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iv)　$a+b\geqq c$ の場合は, 乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし, それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で, 甲にとってどちらの選択が有利であるかを, a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし, 各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

13　片面を白色に, もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ, 次の操作をくり返し行う。

さいころを振り, 出た目が 1, 2 であれば左端の板を裏返し, 3, 4 であればまん中の板を裏返し, 5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば, 最初, 板の表の色の並び方が「白白白」であったとし, 1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば, 色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば, 色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて, 3 回の操作の結果, 色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて, n 回の操作の結果, 色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意 : さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

14　さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1)　X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

15　コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

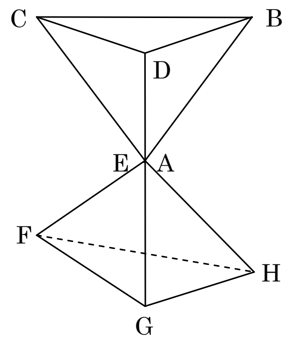
(2)　X_n を求めよ。

(3)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。　[2001]

16　p を $0<p<1$ を満たす実数とする。

(1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2)　(1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。　[1999]



■ 論証

1 n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式 $(1+x)^k P(x)$ の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。 [2007]

2 円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。 [2003]

3 容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーはない。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ 1 つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを 1 つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを 1 つ選ぶ。

(c) 次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1) $x < \dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2) $x > \dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。 [2001]

4 (1) 一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2) (1)で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta) = \sin\alpha\cos\beta + \cos\alpha\sin\beta$$

$$\cos(\alpha+\beta) = \cos\alpha\cos\beta - \sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。 [1999]

■ 複素数

1　複素数平面上の原点以外の点zに対して，$w=\dfrac{1}{z}$とする。

(1)　αを 0 でない複素数とし，点αと原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線をLとする。点zが直線L上を動くとき，点wの軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものをβとする。点βと点β^2を結ぶ線分上を点zが動くときの点wの軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。　[2017]

2　zを複素数とする。複素数平面上の 3 点$\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$が鋭角三角形をなすようなzの範囲を求め，図示せよ。　[2016]

3　$|z|>\dfrac{5}{4}$となるどのような複素数zに対しても$w=z^2-2z$とは表されない複素数w全体の集合をTとする。すなわち，$T=\left\{w \mid w=z^2-2z \text{ ならば} |z|\leqq\dfrac{5}{4}\right\}$とする。このとき, Tに属する複素数wで絶対値$|w|$が最大になるようなwの値を求めよ。

[2005]

4　O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A，$7+7i$を表す点を B とする。ただし，iは虚数単位である。正の実数tに対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$を表す点 P をとる。

(1)　$\angle\mathrm{APB}$を求めよ。

(2)　線分 OP の長さが最大になるtを求めよ。　[2003]

5　複素数平面上の点a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$を

$$a_1=1,\ a_2=i,\ a_{n+2}=a_{n+1}+a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$とおく。ただし，$i$は虚数単位である。

(1)　3 点b_1，b_2，b_3を通る円Cの中心と半径を求めよ。

(2)　すべての点$b_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$は円Cの周上にあることを示せ。　[2001]

6　複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点$P(\alpha)$，$Q(\beta)$を考える。$P(\alpha)$，$Q(\beta)$を通る直線をl，原点からlに引いた垂線とlの交点を$R(w)$とする。ただし，複素数γが表す点 C を$C(\gamma)$とかく。このとき，「$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$が中心$A\left(\dfrac{1}{2}\right)$，半径$\dfrac{1}{2}$の円周上にあることである」を示せ。　[2000]

7　複素数z_n（$n=1,\ 2,\ \cdots$）を，$z_1=1$，$z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$によって定める。ただし，iは虚数単位である。

(1)　すべての自然数nについて，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$が成り立つことを示せ。

(2)　実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$を満たすz_nの個数を$f(r)$とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$を求めよ。　[1999]

■ 曲線

1　$AB=AC$，$BC=2$の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。　[2000]

■ 極限

1　$p,\ q$は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$を満たすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式$1+x\leqq e^x$がすべての実数xに対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1)　$0<x<1$のとき，$0<f(x)<1$であることを示せ。

(2)　x_0は$0<x_0<1$を満たす実数とする。数列$\{x_n\}$の各項x_n（$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$）を，$x_n=f(x_{n-1})$によって順次定める。$p>q$であるとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$となることを示せ。

(3)　$p<q$であるとき，$c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数cが存在することを示せ。

[2014]

2　n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，…，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

①　$\angle \mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}\ (1 \leqq k \leqq n)$，$\angle \mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle \mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1\ (2 \leqq k \leqq n)$

②　線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。　[2007]

3　$a_1 = \dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n > 2n$ となることを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} na_n$ を求めよ。　[2006]

4　関数 $f(x)$ を $f(x) = \dfrac{1}{2}x\left\{1+e^{-2(x-1)}\right\}$ とする。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$x > \dfrac{1}{2}$ ならば $0 \leqq f'(x) < \dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2)　x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}\ (n=0,\ 1,\ \cdots)$ を，$x_{n+1} = f(x_n)$ によって定める。$x_0 > \dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} x_n = 1$ であることを示せ。　[2005]

5　$a>0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0 \leqq x \leqq a$ を n 等分する点の集合 $\left\{0,\ \dfrac{a}{n},\ \cdots,\ \dfrac{n-1}{n}a,\ a\right\}$ の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0) = c \\ \dfrac{f_n((k+1)h) - f_n(kh)}{h} = \{1 - f_n(kh)\} f_n((k+1)h)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1) \end{cases}$$

ただし，$h = \dfrac{a}{n}$，$c>0$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$p_k = \dfrac{1}{f_n(kh)}\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とおいて p_k を求めよ。

(2)　$g(a) = \displaystyle\lim_{n\to\infty} f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3)　$c = 2,\ 1,\ \dfrac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y = g(x)$ の $x>0$ でのグラフを書け。

[2000]

6　n を正の整数とする。連立不等式

$$x+y+z \leqq n,\ -x+y-z \leqq n,\ x-y-z \leqq n,\ -x-y+z \leqq n$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。　[1998]

7　xy 平面に 2 つの円 $C_0 : x^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$，$C_1 : (x-1)^2+\left(y-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ をとり，C_2 を x 軸と C_0，C_1 に接する円とする。さらに，$n=2,\ 3, \cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}，C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。C_n の半径を r_n，C_n と x 軸の接点を $(x_n,\ 0)$ として，$q_n=\dfrac{1}{\sqrt{2r_n}}$，$p_n=q_nx_n$ とおく。

(1)　q_n は整数であることを示せ。

(2)　p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

(3)　α を $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式 $|x_{n+1}-\alpha|<\dfrac{2}{3}|x_n-\alpha|$ を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。　[1998]

8　θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。xy 平面にベクトル $\vec{a}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\vec{b}=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ をとり，点 P_n，Q_n，$n=1,\ 2, \cdots$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=(1,\ 0)$，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}=\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}-(\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}}=4\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}-(\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}=(x_n,\ y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を求めよ。　[1998]

■ 微分法

1　実数 $a,\ b$ に対して，$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$ とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数 $g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$ を考える。

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための $a,\ b$ についての条件を求めよ。また，条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。　[2017]

2 eを自然対数の底，すなわち$e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$とする。すべての正の実数$x$に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

[2016]

3 aを実数とし，$x>0$で定義された関数$f(x)$，$g(x)$を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\quad g(x)=\sin x+ax$$

このとき$y=f(x)$のグラフと$y=g(x)$のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど3つもつようなaをすべて求めよ。[2013]

4 次の連立不等式で定まる座標平面上の領域Dを考える。

$$x^2+(y-1)^2\leqq 1,\quad x\geqq\frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，Lが最大値をとるとき，x軸とlのなす角θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$の余弦$\cos\theta$を求めよ。[2012]

5 3辺の長さがaとbとcの直方体を，長さがbの1辺を回転軸として$90°$回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体をVとする。

(1) Vの体積をa, b, cを用いて表せ。

(2) $a+b+c=1$のとき，Vの体積のとりうる値の範囲を求めよ。[2010]

6 (1) 実数xが$-1<x<1$，$x\neq 0$を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2) 次の不等式を示せ。$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ [2009]

7 放物線$y=x^2$上に2点P, Qがある。線分PQの中点のy座標をhとする。

(1) 線分PQの長さLと傾きmで，hを表せ。

(2) Lを固定したとき，hがとりうる値の最小値を求めよ。[2008]

8 関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x,\ \ f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x),\ \ f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に, $n\geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば, 関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) a を実数とする。$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) n を 3 以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。 [2004]

9 a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ をとる。関数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。 [2002]

10 実数 $t>1$ に対し, xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{P}(1,\ 1)$, $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$ を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし, 線分 OP, OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき, $c(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)}$ とおくと, 関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。 [2001]

11 a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。 [1998]

■ 積分法

1 n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\ のとき),\ g(x)=0\ (|x|>1\ のとき)$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。$p\leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q$

(2) 関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\ のとき),\ h(x)=0\ (|x|>1\ のとき)$$

このとき，次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$　[2015]

2 u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線 $C_1: y=-x^2+1$，$C_2: y=(x-u)^2+u$ を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により，$a\leqq u\leqq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a\leqq u\leqq b$ を満たすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。ただし，共有点が 1 点のときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。$2|x_1y_2-x_2y_1|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分 $I=\displaystyle\int_a^b f(u)du$ を求めよ。[2014]

3 L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1) $u(t)$，$v(t)$ を求めよ。

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分 $f(a)=\displaystyle\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。[2011]

4　(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1 \frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$ [2010]

5　以下の問いに答えよ。

(1)　$0<x<a$ を満たす実数 x, a に対し，次を示せ。$\dfrac{2x}{a}<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$

(2)　(1)を利用して，次を示せ。$0.68<\log 2<0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。 [2007]

6　$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ $(x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)$ $(-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。 [2006]

7　a, b, c を実数とし，$a\neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1)=-1$，$f(1)=1$

(B)　$-1\leqq x\leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x)\leqq 3x^2-1$

このとき，積分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}(f'(x))^2dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。 [2003]

8　O を原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$，$k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$，をとる。また，$z$ 軸上 $z\geqq 0$ の部分に，点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$ を求めよ。 [2002]

9　次の等式を満たす関数 $f(x)$ $(0 \leqq x \leqq 2\pi)$ がただ 1 つ定まるための実数 a, b の条件を求めよ。また，そのときの $f(x)$ を決定せよ。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$

ただし，$f(x)$ は区間 $0 \leqq x \leqq 2\pi$ で連続な関数とする。 [2001]

10　$\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx > 8$ であることを示せ。ただし，$\pi = 3.14\cdots$ は円周率，$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。 [1999]

■ 積分の応用

1　点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$ に対して，$\angle\mathrm{AOP}$ を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

(1)　点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。 [2017]

2　座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件(a), (b)を満たしながら動く。

(a)　点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる領域を K とする。K と不等式 $z \geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。 [2016]

3　a を正の実数とし，p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてもよい。

(1)　a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2)　この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3)　(2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。 [2015]

4 座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。　[2013]

5 座標平面上で 2 つの不等式 $y\geqq \dfrac{1}{2}x^2$，$\dfrac{x^2}{4}+4y^2\leqq \dfrac{1}{8}$ によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2)　$\dfrac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。　[2012]

6 (1)　$x,\ y$ を実数とし，$x>0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ が成り立つ。

V の体積を求めよ。　[2011]

7 O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\dfrac{1}{2}x+\sqrt{\dfrac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　$\mathrm{P}_i\ (i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ $\mathrm{H}_i\ (i=1,\ 2)$ とする。このとき $\triangle\mathrm{OP}_1\mathrm{H}_1$ と $\triangle\mathrm{OP}_2\mathrm{H}_2$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{O}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。　[2010]

8 a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\}$$
$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸のまわりに $180°$ 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。 [2009]

9 (1) 正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2) 正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心を G_1，G_2 とする。G_1，G_2 を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。 [2008]

10 座標平面において，媒介変数 t を用いて，$x=\cos 2t$，$y=t\sin t$ $(0\leqq t\leqq 2\pi)$ と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。 [2008]

11 r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2\leqq r^2,\ y^2+z^2\geqq r^2,\ z^2+x^2\leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。 [2005]

12 半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の 1 点を P とする。点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。 [2004]

13　r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を A, 点 $\mathrm{P}(r,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし, 球 A と球 B の和集合とは, 球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1)　V を r の関数として表し, そのグラフの概形をかけ。

(2)　$V=8$ となるとき, r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

　注意 : 円周率 π は $3.14<\pi<3.15$ を満たす。　[2004]

14　xyz 空間において, 平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし, 点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。次に, 平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H, 平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

　$0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数 t に対し, 平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき, $S(t)$ を θ で表せ。

(2)　C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。　[2003]

15　xyz 空間に 5 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 0)$, $\mathrm{C}(-1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{D}(1,\ -1,\ 0)$, $\mathrm{P}(0,\ 0,\ 3)$ をとる。四角錐 PABCD の $x^2+y^2\geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

[1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

k を実数とし，座標平面上で次の 2 つの放物線 C, D の共通接線について考える。

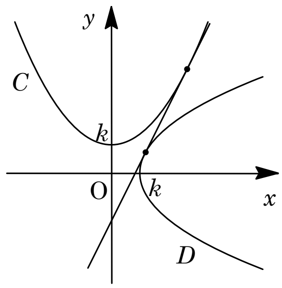
$$C: y = x^2 + k,\quad D: x = y^2 + k$$

(1)　直線 $y = ax + b$ が共通接線であるとき，a を用いて k と b を表せ。ただし $a \neq -1$ とする。

(2)　傾きが 2 の共通接線が存在するように k の値を定める。このとき，共通接線が 3 本存在することを示し，それらの傾きと y 切片を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　放物線 $C: y = x^2 + k$ ……①，$D: x = y^2 + k$ ……②に対して，共通接線を $y = ax + b$ $(a \neq -1)$ ……③とする。



①③を連立すると，$x^2 + k = ax + b$ となり，

$$x^2 - ax + k - b = 0$$

重解をもつので，$D = a^2 - 4(k - b) = 0$ となり，

$$4b = 4k - a^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

②③を連立すると，$y = a(y^2 + k) + b$ となり，

$$ay^2 - y + ak + b = 0$$

ここで，$a = 0$ とすると，③は x 軸に平行になり D には接しない。

よって，$a \neq 0$ で重解をもつので，$D = 1 - 4a(ak + b) = 0$ となり，

$$1 - 4a^2k - 4ab = 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④⑤より，$1 - 4a^2k - a(4k - a^2) = 0$，$4a(a+1)k - (a^3 + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑥$

$a \neq -1$ から，$k = \dfrac{a^3 + 1}{4a(a+1)} = \dfrac{(a+1)(a^2 - a + 1)}{4a(a+1)} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a}$

④から，$b = k - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{a^2 - a + 1}{4a} - \dfrac{a^2}{4} = \dfrac{-a^3 + a^2 - a + 1}{4a}$

(2)　$a = 2$ のとき，(1)より，$k = \dfrac{4 - 2 + 1}{8} = \dfrac{3}{8}$ となる。

このとき，C と D の共通接線を $y = mx + n$ とおくと，④⑥より，

$$4n = \frac{3}{2} - m^2 \cdots\cdots\cdots ⑦,\quad \frac{3}{2}m(m+1) - (m^3 + 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑧より，$3m(m+1) - 2(m+1)(m^2 - m + 1) = 0$ となり，

$$(m+1)(2m^2 - 5m + 2) = 0,\quad (m+1)(m-2)(2m-1) = 0$$

よって，$m = -1,\ 2,\ \dfrac{1}{2}$ となり，共通接線は 3 本存在する。

$m=-1$ のとき⑦より $n=\dfrac{1}{8}$, $m=2$ のとき⑦より $n=-\dfrac{5}{8}$, $m=\dfrac{1}{2}$ のとき⑦より $n=\dfrac{5}{16}$ となるので, 共通接線の傾きと y 切片の組 $(m,\ n)$ は,

$$(m,\ n)=\left(-1,\ \frac{1}{8}\right),\ \left(2,\ -\frac{5}{8}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{5}{16}\right)$$

コメント

放物線 C と D は直線 $y=x$ について対称です。このことから, (2)で共通接線が 3 本あれば, その傾きは 2 と $\dfrac{1}{2}$ と -1 であることがわかります。なお, 混乱を防ぐために, 共通接線を $y=mx+n$ と設定しています。

問　題

正の実数 a に対して，座標平面上で次の放物線を考える。$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$

a が正の実数全体を動くとき，C の通過する領域を図示せよ。　[2015]

解答例

a が正の実数全体を動くとき，$C: y = ax^2 + \dfrac{1-4a^2}{4a}$ ……①の通過領域は，①を a の方程式とみたとき，少なくとも 1 つの正の解が存在する $(x,\ y)$ の条件として表せ，

$$4ay = 4a^2x^2 + 1 - 4a^2,\ 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1 = 0 \cdots\cdots②$$

(i)　$x^2-1=0$ $(x=\pm1)$ のとき

②は $-4ya+1=0$ となり，$a>0$ を解にもつ条件は，$-4y<0$ すなわち $y>0$。

(ii)　$x^2-1\neq0$ $(x\neq\pm1)$ のとき

②の左辺を，$f(a) = 4(x^2-1)a^2 - 4ya + 1$ とおき，$f(0) = 1 > 0$ に着目する。

(ii-i)　$x^2-1>0$ $(x<-1,\ 1<x)$ のとき

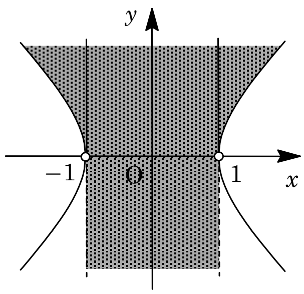
$a>0$ を解にもつ条件は，$D/4 = 4y^2 - 4(x^2-1) \geqq 0$ かつ $a = \dfrac{y}{2(x^2-1)} > 0$ より，

$$x^2 - y^2 \leqq 1,\ y > 0$$

(ii-ii)　$x^2-1<0$ $(-1<x<1)$ のとき

$f(0)>0$ より，②はつねに $a>0$ の解をもつ。

以上まとめると，放物線 C の通過する領域は右図の網点部である。ただし，実線の境界は領域に含み，破線の境界は領域に含まない。



コメント

x を固定して y のとり得る範囲を求めるか，または方程式が実数解をもつ条件としてとらえるかという 2 つの方法があります。上の解では $f(a)=0$ の定数項 1 に注目して，後者の解法を採用しました。

問　題

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-2\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $0\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

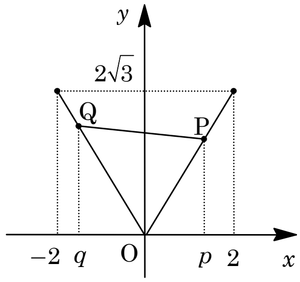
(2) D を図示せよ。　[2014]

解答例

(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\cdots\cdots\text{①}$$

ただし，$-2\leqq q\leqq 0$ より $-2\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $1\leqq p\leqq 2$ である。



ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

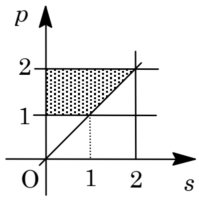
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$　$(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\text{②}$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\text{③}$

ただし，$0\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$1\leqq p\leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i)　$0\leqq s\leqq 1$ のとき

右上図より，$1\leqq p\leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2}\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq 2$ から，

$$f(1)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii)　$1\leqq s\leqq 2$ のとき

右上図より，$s\leqq p\leqq 2$ となり，$2\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{5}{2}$ から，

$f(s) \leqq f(p) \leqq f(2)$，$\sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$

(i)(ii)より，D に入るような t の範囲は，③から $t=f(p)$ なので，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9) \quad (0 \leqq s \leqq 1)$$

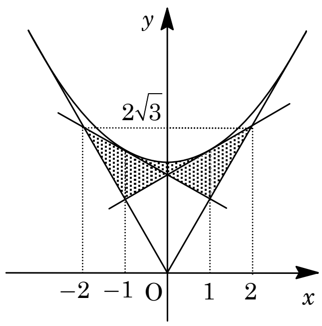
$$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(s+4) \quad (1 \leqq s \leqq 2)$$

(2)　$-2 \leqq s \leqq 0$ のときは，y 軸に関する対称性を考え，(1)と同様にすると，

$$\frac{\sqrt{3}}{3}(s+4) \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9) \quad (-1 \leqq s \leqq 0)$$

$$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \frac{\sqrt{3}}{3}(-s+4) \quad (-2 \leqq s \leqq -1)$$

そこで，放物線 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s^2+9)$ と直線 $t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(-s+4)$ は，それぞれ $s=1$，$s=-1$ で接することに注意して点 $(s,\ t)$ を含む領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

線分の通過領域の頻出問題です。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる $p=\dfrac{s+3}{2}$ も書き込んでおくのも，1 つの方法です。

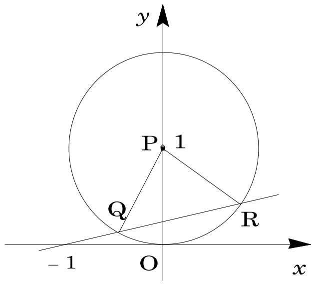
問　題

座標平面において，点 P(0, 1) を中心とする半径 1 の円を C とする。a を $0<a<1$ を満たす実数とし，直線 $y=a(x+1)$ と C との交点を Q, R とする。

(1)　△PQR の面積 $S(a)$ を求めよ。

(2)　a が $0<a<1$ の範囲を動くとき，$S(a)$ が最大となる a を求めよ。　[2011]

解答例



(1)　$0<a<1$ のとき，点 P(0, 1) から直線 $y=a(x+1)$，すなわち $ax-y+a=0$ に下ろした垂線の長さ h は，

$$h=\frac{|-1+a|}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$\mathrm{QR}=2\sqrt{1-h^2}$ となるので，△PQR の面積 $S(a)$ は，(＊)から，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1-h^2}\cdot h=\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}\sqrt{1-\frac{(1-a)^2}{a^2+1}}$$

$$=\frac{\sqrt{2a}(1-a)}{a^2+1}$$

(2)　(1)より，$S(a)=h\sqrt{1-h^2}=\sqrt{h^2-h^4}$

ここで，$0<h<1$ として，$f(h)=h^2-h^4$ とおくと，

$$f'(h)=2h-4h^3=2h(1-2h^2)$$

すると，$f(h)$ の増減は右表のようになり，

h	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1
$f'(h)$	0	＋	0	－	
$f(h)$		↗		↘	

$f(h)$ は $h=\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき最大値をとり，このとき $S(a)$ も最大となる。

すなわち，$S(a)$ が最大となる a は，(＊)から，$\frac{1-a}{\sqrt{a^2+1}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$ であり，

$$2(1-a)^2=a^2+1,\quad a^2-4a+1=0$$

$0<a<1$ から，$a=2-\sqrt{3}$

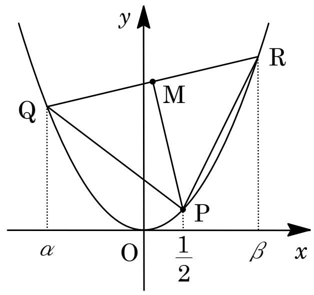
コメント

円と直線に関する基本問題です。なお，(2)の $f(h)$ は複 2 次式ですので，微分するまでもありませんでした。

問　題

座標平面上の 1 点$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$をとる。放物線$y=x^2$上の 2 点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を，3 点 P，Q，R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心$\mathrm{G}(X,\ Y)$の軌跡を求めよ。　[2011]

解答例



点$\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$となり，$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$\mathrm{QR}\perp\mathrm{PM}$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を$\mathrm{G}(X,\ Y)$とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\quad Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より$\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}\cdots\cdots④$，③より$\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2,\quad \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑥$

ところで，α，βは，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，βを解とするtに関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\frac{1}{4}>\frac{1}{2}\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2$，$Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots⑧$

⑥⑧より，△PQR の重心 G の軌跡は，

$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\ \cdots\cdots\cdots ⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\ \cdots\cdots\cdots ⑧'$$

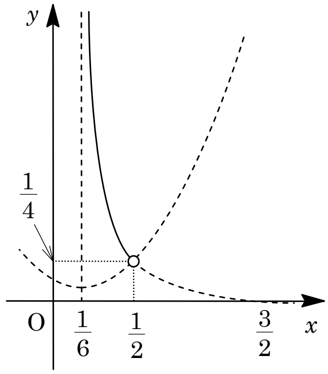
さらに，曲線⑥′と領域⑧′の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$

この方程式の実数解は $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ は除く。



コメント

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。

問　題

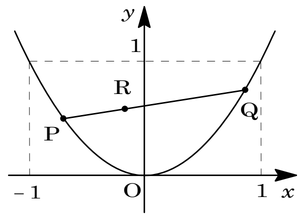
座標平面上の 2 点 P, Q が，曲線 $y=x^2$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ 上を自由に動くとき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R が動く範囲を D とする。ただし，$\mathrm{P}=\mathrm{Q}$ のときは$\mathrm{R}=\mathrm{P}$とする。

(1) a を$-1\leqq a\leqq 1$を満たす実数とするとき，点$(a,\ b)$が D に属するための b の条件を a を用いて表せ。

(2) Dを図示せよ。　[2007]

解答例

(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$とおき，線分 PQ を$1:2$に内分する点 R の動く範囲 D に点$(a,\ b)$が属することより，



$$a=\frac{2p+q}{3}\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b=\frac{2p^2+q^2}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$q=3a-2p$ ……③となり，②に代入すると，

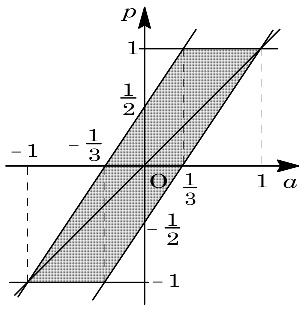
よって，$2p^2+(3a-2p)^2=3b$

$$b=2p^2-4ap+3a^2=2(p-a)^2+a^2$$

そこで，$f(p)=2(p-a)^2+a^2$ とおき，$-1\leqq p\leqq 1$ ……④，$-1\leqq q\leqq 1$ ……⑤のもとで，$f(p)$のとり得る値の範囲を求める。

③⑤から，$-1\leqq 3a-2p\leqq 1$ となり，

$$\frac{3a-1}{2}\leqq p\leqq\frac{3a+1}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑥$$



さて，④⑥を ap 平面上に図示すると，右図の網点部になる。

ここで，$-1\leqq a\leqq 1$から，$f(p)$は最小値$f(a)=a^2$をとり，また最大値の候補としては，

$$f(-1)=3a^2+4a+2,\quad f(1)=3a^2-4a+2$$

$$f\Big(\frac{3a-1}{2}\Big)=\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2},\quad f\Big(\frac{3a+1}{2}\Big)=\frac{3}{2}a^2+a+\frac{1}{2}$$

これより, a の値で場合分けをして，$f(p)$のとり得る値の範囲を求めると，

(i) $-1\leqq a\leqq -\frac{1}{3}$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f(-1)$ より，$a^2\leqq b\leqq 3a^2+4a+2$

(ii) $-\frac{1}{3}\leqq a\leqq 0$ のとき

$f(a)\leqq f(p)\leqq f\Big(\frac{3a-1}{2}\Big)$より，$a^2\leqq b\leqq\frac{3}{2}a^2-a+\frac{1}{2}$

(iii) $0\leqq a\leqq\frac{1}{3}$ のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f\left(\dfrac{3a+1}{2}\right)$より，$a^2 \leqq b \leqq \dfrac{3}{2}a^2 + a + \dfrac{1}{2}$

(iv) $\dfrac{1}{3} \leqq a \leqq 1$のとき

$f(a) \leqq f(p) \leqq f(1)$ より，$a^2 \leqq b \leqq 3a^2 - 4a + 2$

(2) $a < -1$，$1 < a$のときは，右上図より，④⑥を満たすpは存在しない。

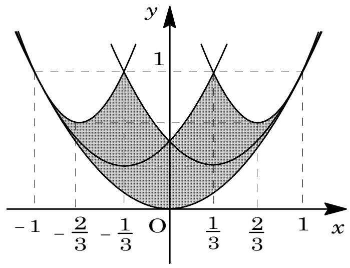
よって，(1)から，Dを表す不等式は，

$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 + 4x + 2 \left(-1 \leqq x \leqq -\frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 - x + \frac{1}{2} \left(-\frac{1}{3} \leqq x \leqq 0\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq \frac{3}{2}x^2 + x + \frac{1}{2} \left(0 \leqq x \leqq \frac{1}{3}\right)$$

$$x^2 \leqq y \leqq 3x^2 - 4x + 2 \left(\frac{1}{3} \leqq x \leqq 1\right)$$



以上より，D は右図の網点部のようになる。ただし，境界は領域に含む。

コメント

東大で頻出するタイプの問題です。(1)の誘導がなくても完答できるようにしたいところです。なお，(1)では，いったん考え方を整理するために，ap 平面上で方針を確認しています。

問　題

O を原点とする座標平面上に，y 軸上の点 $\mathrm{P}(0,\ p)$ と，直線 $m：y=(\tan\theta)x$ が与えられている。ここで，$p>1$，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。

いま，傾きが α の直線 l を対称軸とする対称移動を行うと，原点 O は直線 $y=1$ 上の，第 1 象限の点 Q に移り，y 軸上の点 P は直線 m 上の，第 1 象限の点 R に移った。

(1) このとき，$\tan\theta$ を α と p で表せ。

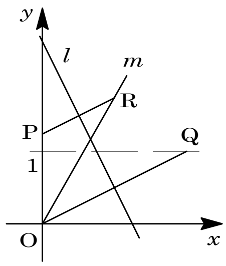
(2) 次の条件を満たす点 P が存在することを示し，そのときの p の値を求めよ。

条件：どのような θ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ に対しても，原点を通り直線 l に垂直な直線は $y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ となる。　[2006]

解答例

(1) $\mathrm{R}(r,\ r\tan\theta)$ とおくと，PR と l が垂直より，$\dfrac{r\tan\theta-p}{r}\cdot\alpha=-1$ となり，

$$r(\alpha\tan\theta+1)=p\alpha\ ,\ \ r=\frac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}\cdots\cdots\cdots①$$



また，$\mathrm{Q}(q,\ 1)$ とおくと，OQ と l が垂直より，

$$\frac{1}{q}\cdot\alpha=-1\ ,\ \ q=-\alpha\cdots\cdots\cdots②$$

また，PR の中点$\left(\dfrac{r}{2},\ \dfrac{r\tan\theta+p}{2}\right)$と OQ の中点$\left(\dfrac{q}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$を結ぶ直線が l となり，その傾きが α から，

$$\frac{r\tan+p}{2}-\frac{1}{2}=\alpha\left(\frac{r}{2}-\frac{q}{2}\right),\ \ r(\tan\theta-\alpha)=-\alpha q-p+1$$

①②を代入して，$\dfrac{p\alpha}{\alpha\tan\theta+1}(\tan\theta-\alpha)=\alpha^2-p+1$

$$p\alpha\tan\theta-p\alpha^2=\alpha(\alpha^2-p+1)\tan\theta+(\alpha^2-p+1)$$

よって，$-\alpha(\alpha^2-2p+1)\tan\theta=p\alpha^2+\alpha^2-p+1$ から，

$$\tan\theta=\frac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}\cdots\cdots\cdots③$$

(2) 直線 OQ の方程式が，$y=\left(\tan\dfrac{\theta}{3}\right)x$ より，$1=q\tan\dfrac{\theta}{3}$

②より，$1=-\alpha\tan\dfrac{\theta}{3}$，$\tan\dfrac{\theta}{3}=-\dfrac{1}{\alpha}$

すると，$\tan\dfrac{2}{3}\theta=\dfrac{2\tan\dfrac{\theta}{3}}{1-\tan^2\dfrac{\theta}{3}}=\dfrac{-\dfrac{2}{\alpha}}{1-\dfrac{1}{\alpha^2}}=\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}$ から，

$$\tan\theta=\frac{\tan\dfrac{\theta}{3}+\tan\dfrac{2\theta}{3}}{1-\tan\dfrac{\theta}{3}\tan\dfrac{2\theta}{3}}=\frac{-\dfrac{1}{\alpha}+\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}{1-\left(-\dfrac{1}{\alpha}\right)\cdot\dfrac{-2\alpha}{\alpha^2-1}}=\frac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{p\alpha^2+\alpha^2-p+1}{-\alpha(\alpha^2-2p+1)}=\dfrac{-3\alpha^2+1}{\alpha^3-3\alpha}$

$$(\alpha^2-3)(p\alpha^2+\alpha^2-p+1)=(3\alpha^2-1)(\alpha^2-2p+1)$$

まとめて，$(p-2)\alpha^4+2(p-2)\alpha^2+(p-2)=0$，$(p-2)(\alpha^4+2\alpha^2+1)=0$

よって，$p=2$のとき，どのようなαに対しても成立するので，条件を満たす点 P は存在する。

コメント

(1)はいろいろな解法が考えられますが，いずれを採用しても，計算量はかなり多めです。

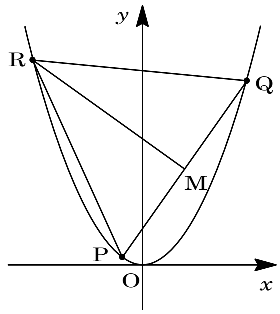
問　題

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

解答例



$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2},\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，$p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$なので,

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{a^2}{3}\right)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$である。

ここで，△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形より，$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ}$，$\mathrm{RM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので,

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp2a+a^2)$$

まとめると，$5a^2\mp18a=0$ となり, $a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

コメント

複素数平面上での回転では，計算が複雑になってしまい，方向転換をしました。

問　題

2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$， $y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような一般角 θ の範囲を求めよ。 [2002]

解答例

$y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta\cdots\cdots①$, $y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta\cdots\cdots②$に対して,

$$2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2+4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta=0\cdots\cdots\cdots③$$

①と②が相異なる 2 点で交わる条件は, ③が異なる 2 実数解をもつことなので,

$$D/4=-4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta+2\sin\theta)>0,\ \ 2\sqrt{3}(1-\sin^2\theta)+\sin\theta<0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta-\sin\theta-2\sqrt{3}>0,\ \ (\sqrt{3}\sin\theta-2)(2\sin\theta+\sqrt{3})>0$$

$\sqrt{3}\sin\theta-2<0$ より， $2\sin\theta+\sqrt{3}<0$， $\sin\theta<-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって, n を整数として， $2n\pi+\dfrac{4}{3}\pi<\theta<2n\pi+\dfrac{5}{3}\pi$

コメント

あまりにも簡単すぎて不気味です。

問　題

座標平面上を運動する 3 点 P, Q, R があり，時刻 t における座標が次で与えられている。

$$\mathrm{P}: x=\cos t,\ y=\sin t \qquad \mathrm{Q}: x=1-vt,\ y=\frac{\sqrt{3}}{2} \qquad \mathrm{R}: x=1-vt,\ y=1$$

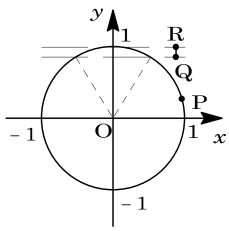
ただし，v は正の定数である。この運動において，以下のそれぞれの場合に v のとりうる値の範囲を求めよ。

(1) 点 P と線分 QR が時刻 0 から 2π までの間ではぶつからない。

(2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる。 [2000]

解答例

(1) 点 P は原点が中心の単位円周上の動点であり，また線分 QR は $x=1-vt\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq y\leqq 1\right)$ と表せる。

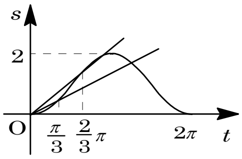


ここで，$0\leqq t\leqq 2\pi$ のとき，点 P と線分 QR がぶつかるのは，$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ において，$\cos t=1-vt$ ……①となる t が存在するときである。

①より，$1-\cos t=vt$ と変形して，

$s=1-\cos t$ ……②，$s=vt$ ……③

そして，$\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ において①が解をもつ条件は，②と③のグラフがこの区間で共有点をもつ条件に等しい。



そこで，③が点$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$を通るとき $v=\dfrac{3}{2\pi}$ となり，③が点$\left(\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{3}{2}\right)$を通るとき $v=\dfrac{9}{4\pi}$ となるので，右図から $0\leqq t\leqq 2\pi$ で点 P と線分 QR がぶつかる条件は，$\dfrac{3}{2\pi}\leqq v\leqq\dfrac{9}{4\pi}$ となる。

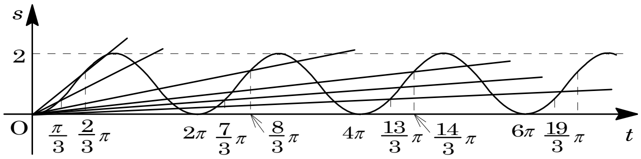
したがって，ぶつからない条件は，$0<v<\dfrac{3}{2\pi}$，$\dfrac{9}{4\pi}<v$ である。

(2) 点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかる条件は，n を 0 以上の整数として，$2n\pi+\dfrac{\pi}{3}\leqq t\leqq 2n\pi+\dfrac{2}{3}\pi$ において，①の成立する t がただ 1 つ存在することである。

このとき，点 P と線分 QR がぶつかる条件は，(1)と同様にして，

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\left(2n+\frac{1}{3}\right)\pi}\leqq v\leqq\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{\left(2n+\frac{2}{3}\right)\pi},\quad \frac{3}{(12n+2)\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{(12n+4)\pi}$$

さて，$a_n=\dfrac{3}{(12n+2)\pi}$，$b_n=\dfrac{9}{(12n+4)\pi}$とおき，区間$a_n\leqq v\leqq b_n$を$I_n$と表すと，求める条件は，ただ 1 つの区間$I_n$だけに含まれる$v$の条件となる。



まず，数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$は減少数列であり，$n\geqq 1$のとき，

$$b_{n+2}-a_n=\frac{9}{(12n+28)\pi}-\frac{3}{(12n+2)\pi}=\frac{3}{4\pi}\cdot\frac{12n-11}{(3n+7)(6n+1)}>0$$

よって，$n\geqq 1$ のとき，$a_{n+2}<a_{n+1}<a_n<b_{n+2}<b_{n+1}<b_n$となる。これより，区間$I_{n+1}$にある任意の$v$は区間$I_n$または$I_{n+2}$に必ず含まれる。すなわち，$n\geqq 2$ のI_nに含まれるvはただ 1 つの区間に含まれるという条件に適さない。

すると，ただ 1 つの区間だけに含まれる v は，$n\leqq 1$ のI_nに含まれるので，$n=0$，1，2 のときの区間I_nを調べると，

$$I_0:\frac{3}{2\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{4\pi},\ \ I_1:\frac{3}{14\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{16\pi},\ \ I_2:\frac{3}{36\pi}\leqq v\leqq\frac{9}{28\pi}$$

これより，ただ 1 つの区間だけに含まれる v，すなわち点 P と線分 QR がただ一度だけぶつかるvの範囲は，$\dfrac{3}{2\pi}\leqq v\leqq\dfrac{9}{4\pi}$，$\dfrac{9}{28\pi}<v\leqq\dfrac{9}{16\pi}$となる。

コメント

人工衛星が宇宙空間に漂う障害物にぶつかるという趣きの問題でした。ところが，特に(2)の解は書きにくく，時間とエネルギーを費やしてしまいます。グラフから明らかとしては乱暴すぎるので，もう少し丁寧に書こうと心掛けると，深みにはまっていくという感じです。

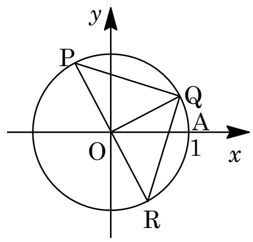
問　題

C を半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は $1\leqq m\leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。 [2010]

解答例

$A(1,\ 0)$ のとき, P, Q, R の速さがそれぞれ m, 1, 2 であり, P, Q が反時計回りに, R が時計回りに動くことより, 時刻 t での位置は,

$$P(\cos mt,\ \sin mt),\ Q(\cos t,\ \sin t),\ R(\cos 2t,\ -\sin 2t)$$



さて, △PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形であるので, PR の中点は原点であり, しかも $\overrightarrow{OR}$ と $\overrightarrow{OQ}$ は垂直である。

ここで, PR の中点は, $\left(\dfrac{\cos mt+\cos 2t}{2},\ \dfrac{\sin mt-\sin 2t}{2}\right)$ から,

$$\cos mt=-\cos 2t\ \cdots\cdots\text{①},\quad \sin mt=\sin 2t\ \cdots\cdots\text{②}$$

また, $\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$ より, $\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=0$ となり, $\cos 3t=0\ \cdots\cdots$③

③から, $0\leqq t\leqq 2\pi$ より, $3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$ となり,

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

そこで, k を整数とするとき, ①②より,

(i)　$t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$\cos\dfrac{m}{6}\pi=-\cos\dfrac{\pi}{3}=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{m}{6}\pi=\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より,

$\dfrac{m}{6}\pi=\dfrac{2}{3}\pi+2k\pi$, $m=4+12k$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4$

(ii)　$t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$\cos\dfrac{m}{2}\pi=-\cos\pi=1$, $\sin\dfrac{m}{2}\pi=\sin\pi=0$ より, $\dfrac{m}{2}\pi=2k\pi$, $m=4k$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4,\ 8$

(iii)　$t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$\cos\dfrac{5m}{6}\pi=-\cos\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{1}{2}$, $\sin\dfrac{5m}{6}\pi=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より,

$$\frac{5}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{5}\Big(\frac{4}{3}+2k\Big)=\frac{8+12k}{5}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(iv) $t=\dfrac{7}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{7m}{6}\pi=-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ \sin\frac{7m}{6}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より，}$$

$$\frac{7}{6}m\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{7}\Big(\frac{2}{3}+2k\Big)=\frac{4+12k}{7}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(v) $t=\dfrac{3}{2}\pi$ のとき

$$\cos\frac{3m}{2}\pi=-\cos 3\pi=1,\ \ \sin\frac{3m}{2}\pi=\sin 3\pi=0\ \text{より，}\ \frac{3}{2}m\pi=2k\pi\,,\ \ m=\frac{4}{3}k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4,\ 8$

(vi) $t=\dfrac{11}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{11m}{6}\pi=-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ \sin\frac{11m}{6}\pi=\sin\frac{11}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より，}$$

$$\frac{11}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{11}\Big(\frac{4}{3}+2k\Big)=\frac{8+12k}{11}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

コメント

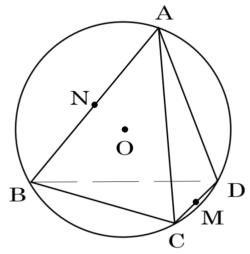
t の値はすぐに求まるのですが，t の各々の値に対して，m の値を 1 つずつチェックしながら求めていくと，予想以上に計算時間がかかります。

問　題

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$AB=\sqrt{3}$，$AC=AD=BC=BD=CD=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

解答例



球面の中心を O, CD の中点を M, AB の中点を N とすると，対称性から，中心 O は△ABM 上にある。

まず，$AM=BM=2\sin 60°=\sqrt{3}$ より，△ABM は正三角形となる。

$$OA=OB=r,\ \ OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\sqrt{r^2-1}$$

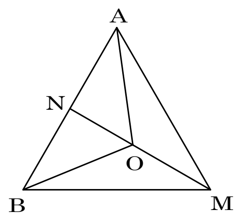
また，$MN=\sqrt{3}\sin 60°=\dfrac{3}{2}$ より，

$$ON=\frac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}$$

△ONA に対して，$r^2=\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$r^2=\frac{9}{4}-3\sqrt{r^2-1}+r^2-1+\frac{3}{4}$$

よって，$3\sqrt{r^2-1}=2$ より，$r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$



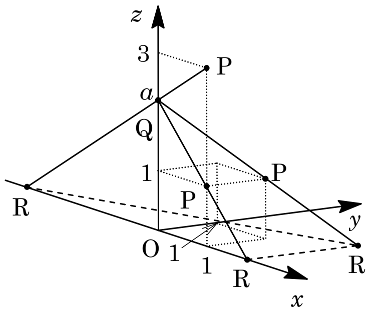
コメント

三角比の空間図形への応用問題です。正四面体ではないものの，対称性から，どの切断面を考えればよいのかは，自然に決まります。

問　題

a を $1<a<3$ を満たす実数とし，座標空間内の 4 点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ を考える。直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$，$\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点をそれぞれ R_1，R_2，R_3 として，三角形 $\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を最小にする a と，そのときの $S(a)$ の値を求めよ。　[2016]

解答例



$1<a<3$ のとき，点 $\mathrm{P}_1(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0,\ 3)$，$\mathrm{Q}(0,\ 0,\ a)$ に対し，まず直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点 R_1 は，線分 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}$ を $1:a$ に外分する点より，$\mathrm{R}_1\left(\dfrac{a}{a-1},\ 0,\ 0\right)$ となる。

また，直線 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点 R_2 は，線分 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}$ を $1:a$ に外分する点より，$\mathrm{R}_2\left(\dfrac{a}{a-1},\ \dfrac{a}{a-1},\ 0\right)$ となる。

さらに，直線 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ と xy 平面の交点 R_3 は，線分 $\mathrm{P}_3\mathrm{Q}$ を $3:a$ に外分する点より，$\mathrm{R}_3\left(-\dfrac{a}{3-a},\ 0,\ 0\right)$ となる。

すると，$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\perp\mathrm{R}_1\mathrm{R}_3$ で，$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2=\dfrac{a}{a-1}$，$\mathrm{R}_1\mathrm{R}_3=\dfrac{a}{a-1}+\dfrac{a}{3-a}$ から，$\triangle\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ の面積を $S(a)$ は，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a}{a-1}\left(\frac{a}{a-1}+\frac{a}{3-a}\right)=\frac{a}{2(a-1)}\cdot\frac{2a}{(a-1)(3-a)}=\frac{a^2}{(a-1)^2(3-a)}$$

$$\begin{aligned}S'(a)&=\frac{2a(a-1)^2(3-a)-a^2\{2(a-1)(3-a)-(a-1)^2\}}{(a-1)^4(3-a)^2}\\&=\frac{2a(a-1)(3-a)-a^2\{2(3-a)-(a-1)\}}{(a-1)^3(3-a)^2}\\&=\frac{a(a^2+a-6)}{(a-1)^3(3-a)^2}\\&=\frac{a(a-2)(a+3)}{(a-1)^3(3-a)^2}\end{aligned}$$

これより，$S(a)$ の増減は右表のようになり，$a=2$ のとき最小値 $S(2)=4$ をとる。

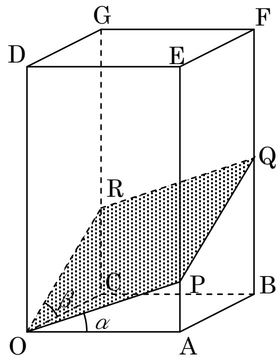
a	1	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$	4	$\nearrow$	

コメント

空間座標に関する問題です。$\triangle\mathrm{R}_1\mathrm{R}_2\mathrm{R}_3$ が直角三角形なので，その面積は立式しやすく，また後半の最小値を求める計算も複雑ではありません。

問　題

1 辺の長さが 1 の正方形を底面とする四角柱 OABC - DEFG を考える。3 点 P, Q, R を，それぞれ辺 AE, 辺 BF, 辺 CG 上に，4 点 O, P, Q, R が同一平面上にあるようにとる。四角形 OPQR の面積を S とおく。また，$\angle$AOP を α，$\angle$COR を β とおく。

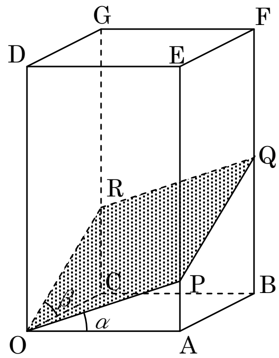


(1)　S を $\tan\alpha$ と $\tan\beta$ を用いて表せ。

(2)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$，$S=\dfrac{7}{6}$ であるとき，$\tan\alpha+\tan\beta$ の値を求めよ。さらに，$\alpha\leqq\beta$ のとき，$\tan\alpha$ の値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　O を原点とし, OA, OC, OD をそれぞれ x 軸, y 軸, z 軸の正の部分とすると，A$(1,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$ となる。



条件より，AP $=\tan\alpha$，CR $=\tan\beta$ なので,

$$\mathrm{P}(1,\ 0,\ \tan\alpha),\ \mathrm{R}(0,\ 1,\ \tan\beta)$$

さて，OP // RQ，OR // PQ から，四角形 OPQR は平行四辺形となり，その面積 S は,

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}})^2}$$

$$=\sqrt{(1+\tan^2\alpha)(1+\tan^2\beta)-(\tan\alpha\tan\beta)^2}$$

$$=\sqrt{1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta}$$

(2)　条件より，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\tan(\alpha+\beta)=1$ となり,

$$\frac{\tan\alpha+\tan\beta}{1-\tan\alpha\tan\beta}=1,\ \tan\alpha+\tan\beta=1-\tan\alpha\tan\beta\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$S=\dfrac{7}{6}$ なので, (1)から，$1+\tan^2\alpha+\tan^2\beta=\dfrac{49}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\tan\alpha\tan\beta=\frac{13}{36}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(\tan\alpha+\tan\beta)^2-2\{1-(\tan\alpha+\tan\beta)\}=\dfrac{13}{36}$ となり,

$$(\tan\alpha+\tan\beta)^2+2(\tan\alpha+\tan\beta)-\frac{85}{36}=0$$

$$\left(\tan\alpha+\tan\beta+\frac{17}{6}\right)\left(\tan\alpha+\tan\beta-\frac{5}{6}\right)=0$$

$\tan\alpha+\tan\beta>0$ より，$\tan\alpha+\tan\beta=\dfrac{5}{6}\ \cdots\cdots\cdots③$

①③より，$\tan\alpha\tan\beta=1-\dfrac{5}{6}=\dfrac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots④$

すると，③④から，$\tan\alpha$ と $\tan\beta$ は 2 次方程式 $x^2-\dfrac{5}{6}x+\dfrac{1}{6}=0$ の 2 つの解となり，$\left(x-\dfrac{1}{2}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=0$ から，$x=\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$ である。

さらに，$\alpha\leqq\beta$ から，$\tan\alpha\leqq\tan\beta$ なので，$\tan\alpha=\dfrac{1}{3}$ である。

コメント

空間ベクトルの図形への応用問題です。誘導が丁寧な構成となっています。なお，図から「四角柱は直方体」として解いています。

問　題

$\triangle$ABC において$\angle \mathrm{BAC}=90^\circ$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle$ABC の内部の点 P が，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|}=\vec{0}$ を満たすとする。

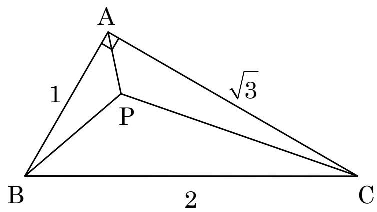
(1) $\angle$APB，$\angle$APC を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|$ を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=b$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=c$ とおくと，

$$\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=\vec{0}\cdots\cdots\cdots①$$



①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}$

両辺の大きさをとって，$\left|\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=\left|-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}\right|$

$$\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|=1,\ \left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\right|^2+2\frac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}+\left|\frac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}\right|^2=1,\ 1+\frac{2ab\cos\angle\mathrm{APB}}{ab}+1=1$$

よって，$\cos\angle\mathrm{APB}=-\dfrac{1}{2}$ より，$\angle\mathrm{APB}=120^\circ$

また，①より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}}{a}+\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}}{c}=-\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{b}$ とすると，同様にして，$\angle\mathrm{APC}=120^\circ$

(2) (1)より，$\angle\mathrm{BPC}=120^\circ$ となり，$\triangle$APB, $\triangle$BPC, $\triangle$CPA に余弦定理を適用して，

$$a^2+b^2+ab=1\cdots\cdots②,\ b^2+c^2+bc=4\cdots\cdots③,\ c^2+a^2+ca=3\cdots\cdots④$$

②より，$(a-b)(a^2+b^2+ab)=a-b$，$a^3-b^3=a-b\cdots\cdots\cdots⑤$

③④より，同様にすると，

$$b^3-c^3=4(b-c)\cdots\cdots\cdots⑥,\ c^3-a^3=3(c-a)\cdots\cdots\cdots⑦$$

⑤＋⑥＋⑦より，$-2a+3b-c=0$，$c=-2a+3b\cdots\cdots\cdots⑧$

③－④より，$b^2-a^2+c(b-a)=1\cdots\cdots\cdots⑨$

⑧⑨より，$b^2-a^2+(-2a+3b)(b-a)=1$，$a^2+4b^2-5ab=1\cdots\cdots\cdots⑩$

②⑩より，$3b^2-6ab=0$，$b=2a\cdots\cdots\cdots⑪$

②に代入すると，$7a^2=1$ から，$a=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$ となり，⑪⑧より，

$$b=\frac{2}{\sqrt{7}},\ c=-\frac{2}{\sqrt{7}}+\frac{6}{\sqrt{7}}=\frac{4}{\sqrt{7}}$$

以上より，$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\dfrac{1}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PB}}|=\dfrac{2}{\sqrt{7}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{PC}}|=\dfrac{4}{\sqrt{7}}$ である。

コメント

(2)は，余弦定理から得られた連立方程式を解くという方針を立てました。

問　題

四面体 OABC において, 4 つの面はすべて合同であり, $\mathrm{OA}=3$, $\mathrm{OB}=\sqrt{7}$, $\mathrm{AB}=2$ であるとする。また, 3 点 O, A, B を含む平面を L とする。

(1) 点 C から平面 L におろした垂線の足を H とおく。$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

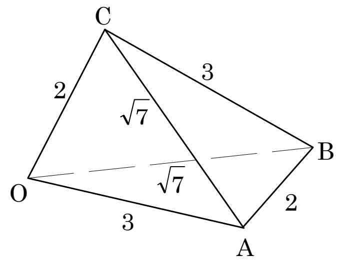
(2) $0<t<1$ を満たす実数 t に対して, 線分 OA, OB 各々を $t:1-t$ に内分する点をそれぞれ P_t, Q_t とおく。2 点 P_t, Q_t を通り, 平面 L に垂直な平面を M とするとき, 平面 M による四面体 OABC の切り口の面積 $S(t)$ を求めよ。

(3) t が $0<t<1$ の範囲を動くとき, $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2010]

解答例

(1) 四面体 OABC の 4 つの面がすべて合同より,

$$\mathrm{OA}=\mathrm{CB}=3,\ \mathrm{OB}=\mathrm{CA}=\sqrt{7},\ \mathrm{AB}=\mathrm{OC}=2$$



まず, 3 点 O, A, B を含む平面 L を xy 平面として座標系を設定する。

ここで, △OAB に余弦定理を適用して,

$$\cos\angle\mathrm{OAB}=\frac{9+4-7}{2\cdot3\cdot2}=\frac{1}{2}$$

これより, $\angle\mathrm{OAB}=60^\circ$ となる。そこで, $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{A}(3,\ 0,\ 0)$ とおくと, $\mathrm{B}(2,\ \sqrt{3},\ 0)$ である。

さらに, $z>0$ として, $\mathrm{C}(x,\ y,\ z)$ とおくと,

$$x^2+y^2+z^2=4\cdots\cdots\text{①},\ (x-3)^2+y^2+z^2=7\cdots\cdots\text{②}$$

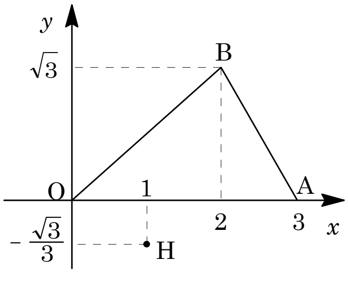
$$(x-2)^2+(y-\sqrt{3})^2+z^2=9\cdots\cdots\text{③}$$

①②より, $-6x+9+4=7$, $x=1$

①③より, $-4x+4-2\sqrt{3}y+3+4=9$ となり, $x=1$ を代入すると, $y=-\dfrac{\sqrt{3}}{3}$

これらの値を①に代入して, $1+\dfrac{1}{3}+z^2=4$, $z=\dfrac{2}{3}\sqrt{6}$

よって, $\mathrm{C}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ \dfrac{2}{3}\sqrt{6}\right)$ となり, C より L におろした垂線の足 H は, $\mathrm{H}\left(1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{3},\ 0\right)$ となる。



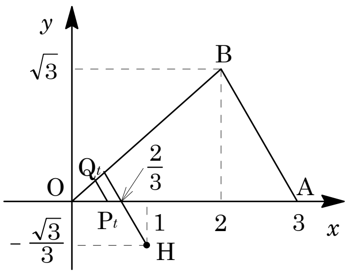
そこで, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+l\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくと,

$$3k+2l=1,\ \sqrt{3}l=-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

よって, $l=-\dfrac{1}{3}$, $k=\dfrac{5}{9}$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{9}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$

(2)　直線$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t$が点Hを通るとき，P_tのx座標は，$x=1-\dfrac{\sqrt{3}}{3}\tan 30^\circ=\dfrac{2}{3}$

これより，$\mathrm{P}_t\left(\dfrac{2}{3},\ 0,\ 0\right)$となり，$\mathrm{OP}_t:\mathrm{P}_t\mathrm{A}=t:1-t$から，$t=\dfrac{2}{3}\times\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{9}$となる。



このとき，$\mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}=\dfrac{2}{9}\mathrm{AB}=\dfrac{4}{9}$から，

$$\triangle \mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}\mathrm{C}=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{9}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6}=\frac{4}{27}\sqrt{6}$$

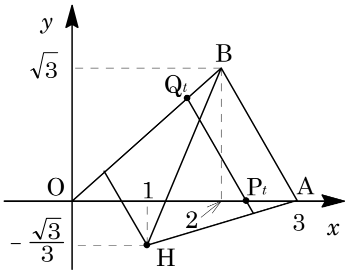
さて，2点P_t，Q_tを通り，平面Lに垂直な平面Mによる四面体の切り口を，P_t，Q_tの位置で場合分けをして考える。

(i)　$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$のとき

平面Mと直線OCとの交点をR_tとおくと，切り口は三角形$\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$となる。

この三角形は，$\triangle \mathrm{P}_{\frac{2}{9}}\mathrm{Q}_{\frac{2}{9}}\mathrm{C}$に相似であり，その相似比は，$t:\dfrac{2}{9}=9t:2$であることより，その面積$S(t)$は，$S(t)=\left(\dfrac{9t}{2}\right)^2\cdot\dfrac{4}{27}\sqrt{6}=3\sqrt{6}t^2$

(ii)　$\dfrac{2}{9}<t<1$のとき



平面Mと直線CA, CBとの交点を，それぞれS_t，T_tとおくと，切り口は台形$\mathrm{S}_t\mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{T}_t$となり，これは，$\triangle \mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$から$\triangle \mathrm{S}_t\mathrm{T}_t\mathrm{R}_t$を除いた図形である。

また，$\triangle \mathrm{S}_t\mathrm{T}_t\mathrm{R}_t$は，$t=1$のときの$\triangle \mathrm{P}_t\mathrm{Q}_t\mathrm{R}_t$，すなわち$\triangle \mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1=3\sqrt{6}$に相似であり，その相似比は，$t-\dfrac{2}{9}:1-\dfrac{2}{9}=9t-2:7$である。これから，その面積$S(t)$は，$S(t)=3\sqrt{6}t^2-\left(\dfrac{9t-2}{7}\right)^2\cdot 3\sqrt{6}=-\dfrac{12\sqrt{6}}{49}(8t^2-9t+1)$

(3)　(2)より，$S(t)$は$0<t<1$で連続であり，$0<t\leqq\dfrac{2}{9}$のとき単調に増加する。

また，$\dfrac{2}{9}<t<1$のとき，

$$S(t)=-\frac{12\sqrt{6}}{49}\left\{8\left(t-\frac{9}{16}\right)^2-\frac{49}{32}\right\}=-\frac{96\sqrt{6}}{49}\left(t-\frac{9}{16}\right)^2+\frac{3}{8}\sqrt{6}$$

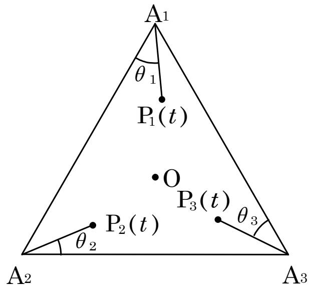
よって，$S(t)$は$t=\dfrac{9}{16}$のとき最大値$\dfrac{3}{8}\sqrt{6}$をとる。

コメント

$\angle\mathrm{OAB}=60^\circ$に注目して，座標系を設定しました。なお，(ii)においても，OCの延長と平面Mとの交点をR_tとしています。

問　題

平面上の 2 点 P, Q の距離を $d(\mathrm{P},\ \mathrm{Q})$ と表すことにする。平面上に点 O を中心とする 1 辺の長さが 1000 の正三角形$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$がある。$\triangle \mathrm{A_1A_2A_3}$の内部に 3 点$\mathrm{B_1}$, $\mathrm{B_2}$, $\mathrm{B_3}$を, $d(\mathrm{A}_n,\ \mathrm{B}_n)=1$ $(n=1,\ 2,\ 3)$ となるようにとる。また,



$$\overrightarrow{a_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}},\ \overrightarrow{a_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}},\ \overrightarrow{a_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3A_1}}$$
$$\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}},\ \overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}},\ \overrightarrow{e_3}=\overrightarrow{\mathrm{A_3B_3}}$$

とおく。$n=1,\ 2,\ 3$ のそれぞれに対して, 時刻 0 にA_nを出発をし, $\overrightarrow{e_n}$ の向きに速さ 1 で直進する点を考え, 時刻 t におけるその位置を$\mathrm{P}_n(t)$と表すことにする。

(1) ある時刻 t で $d(\mathrm{P_1}(t),\ \mathrm{P_2}(t))\leqq 1$ が成立した。ベクトル$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と, ベクトル$\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度を θ とおく。このとき $|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$ となることを示せ。

(2) 角度θ_1, θ_2, θ_3を$\theta_1=\angle\mathrm{B_1A_1A_2}$, $\theta_2=\angle\mathrm{B_2A_2A_3}$, $\theta_3=\angle\mathrm{B_3A_3A_1}$によって定義する。$\alpha$ を $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす実数とする。(1)と同じ仮定のもとで, $\theta_1+\theta_2$ の値のとる範囲を α を用いて表せ。

(3) 時刻t_1, t_2, t_3のそれぞれにおいて, 次が成立した。

$$d(\mathrm{P_2}(t_1),\ \mathrm{P_3}(t_1))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_3}(t_2),\ \mathrm{P_1}(t_2))\leqq 1,\ d(\mathrm{P_1}(t_3),\ \mathrm{P_2}(t_3))\leqq 1$$

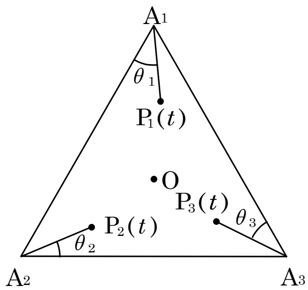
このとき, 時刻 $T=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ において同時に

$$d(\mathrm{P_1}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_2}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3,\ d(\mathrm{P_3}(T),\ \mathrm{O})\leqq 3$$

が成立することを示せ。 [2009]

解答例

(1) $\mathrm{A_1P_1}(t)=\mathrm{A_2P_2}(t)=t$ より,



$$\overrightarrow{\mathrm{A_1P_1}(t)}=t\overrightarrow{\mathrm{A_1B_1}}=t\overrightarrow{e_1}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_2P_2}(t)}=\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+t\overrightarrow{\mathrm{A_2B_2}}=\overrightarrow{a_1}+t\overrightarrow{e_2}$$

これより, $\overrightarrow{\mathrm{P_1}(t)\mathrm{P_2}(t)}=\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})$

条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{P_1}(t)\mathrm{P_2}(t)}|\leqq 1$ なので,

$$|\overrightarrow{a_1}-t(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})|^2\leqq 1$$
$$|\overrightarrow{a_1}|^2-2t\overrightarrow{a_1}\cdot(\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2})+t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\leqq 1$$

$\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}$ と $\overrightarrow{a_1}$ とのなす角度が θ より,

$$t^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2-2t|\overrightarrow{a_1}||\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|\cos\theta+|\overrightarrow{a_1}|^2-1\leqq 0\ \cdots\cdots\cdots ①$$

①を満たす $t>0$ が存在する条件は, $\cos\theta>0$ のもとで,

$$D/4=|\overrightarrow{a_1}|^2|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2\cos^2\theta-|\overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}|^2(|\overrightarrow{a_1}|^2-1)\geqq 0$$

$$|\overrightarrow{a_1}|^2(\cos^2\theta-1)+1\geqq 0,\ \sin^2\theta\leqq\frac{1}{|\overrightarrow{a_1}|^2}=\frac{1}{1000^2}$$

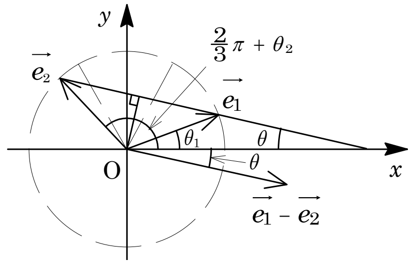
よって，$|\sin\theta|\leqq\dfrac{1}{1000}$……②となる。

(2)　まず，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\sin\alpha=\dfrac{1}{1000}$ を満たす α を用いると，②の不等式の解は，

$0\leqq\theta\leqq\alpha$………③

さて，$\theta_1=\angle B_1A_1A_2$，また $\theta_2=\angle B_2A_2A_3$ より $\angle B_2A_2A_1=\dfrac{\pi}{3}-\theta_2$ となる。そこで，$\overrightarrow{a_1}$ を x 軸の正の向きとしてとると，

(i)　$\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\geqq\theta_1\left(\theta_1+\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$のとき

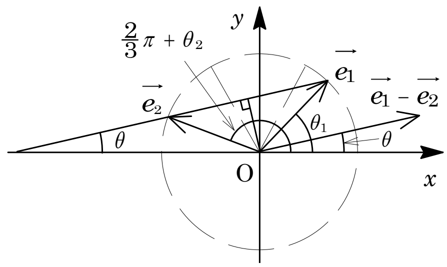


右図より，$\dfrac{1}{2}\left(\theta_1+\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2\right)=\dfrac{\pi}{2}-\theta$

$$\theta_1+\frac{2}{3}\pi+\theta_2=\pi-2\theta$$

よって，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}-2\theta$

(ii)　$\dfrac{\pi}{3}-\theta_2\leqq\theta_1\left(\theta_1+\theta_2\geqq\dfrac{\pi}{3}\right)$のとき



右図より，$\dfrac{1}{2}\left(\theta_1+\dfrac{2}{3}\pi+\theta_2\right)=\dfrac{\pi}{2}+\theta$

$$\theta_1+\frac{2}{3}\pi+\theta_2=\pi+2\theta$$

よって，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}+2\theta$

(i)(ii)より，$\theta_1+\theta_2=\dfrac{\pi}{3}\pm 2\theta$………④

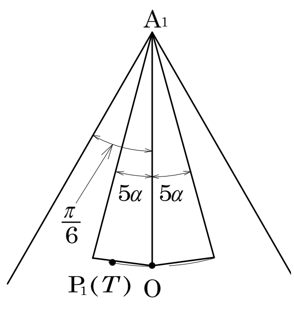
以上より，③④から，$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_1+\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$………⑤

(3)　条件より，(2)の結果を用いると，⑤と同様に，

$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_2+\theta_3\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$………⑥，$\dfrac{\pi}{3}-2\alpha\leqq\theta_3+\theta_1\leqq\dfrac{\pi}{3}+2\alpha$………⑦

⑤⑥⑦より，$\dfrac{\pi-6\alpha}{2}\leqq\theta_1+\theta_2+\theta_3\leqq\dfrac{\pi+6\alpha}{2}$ となり，⑥と合わせると，

$$\frac{\pi}{6}-5\alpha\leqq\theta_1\leqq\frac{\pi}{6}+5\alpha$$



ここで，$\triangle A_1A_2A_3$ に正弦定理を適用すると，

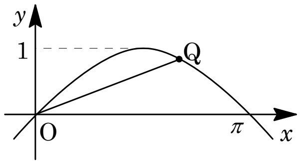
$$\frac{1000}{\sin\frac{\pi}{3}}=2A_1O,\ A_1O=\frac{1000}{\sqrt{3}}$$

また，$A_1P_1(T)=\dfrac{1000}{\sqrt{3}}$ より，$P_1(T)$ は，中心 A_1，半径 A_1O，中心角 $2\times 5\alpha$ の扇形の弧上にあることより，

$$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O}) \leqq \frac{1000}{\sqrt{3}}\cdot 2\sin\frac{5\alpha}{2} = \frac{2000}{\sqrt{3}}\sin\frac{5\alpha}{2}$$

さて，$0<x<\pi$ において，関数 $f(x)=\dfrac{\sin x}{x}$ を定義する。

すると，$f(x)$ は，右図の $y=\sin x$ のグラフにおいて線分 OQ の傾きを表すことより，単調に減少する。



$$\frac{\sin\alpha}{\alpha} > \frac{\sin\frac{5\alpha}{2}}{\frac{5\alpha}{2}},\quad \frac{5}{2}\sin\alpha > \sin\frac{5\alpha}{2}$$

よって，$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O}) < \dfrac{2000}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{5}{2}\sin\alpha = \dfrac{5000}{\sqrt{3}}\cdot\dfrac{1}{1000} = \dfrac{5}{\sqrt{3}} < 3$

以上より，$d(\mathrm{P}_1(T),\ \mathrm{O}) \leqq 3$ が成立し，同様にすると，$d(\mathrm{P}_2(T),\ \mathrm{O}) \leqq 3$，$d(\mathrm{P}_3(T),\ \mathrm{O}) \leqq 3$ も成り立つ。

コメント

図形の総合問題ですが，前期日程とは思えないほどの質と量です。特に(3)の設問は，アバウトに評価すると結論が示せず，ずいぶん時間がかかりました。この箇所は，やや雑な書き方になっています。なお，(1)の結論式についている絶対値は，必要不可欠ではありません。

問　題

O を原点とする座標平面上の 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 で，条件

$$\overrightarrow{OP_{n-1}}+\overrightarrow{OP_{n+1}}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_n}\quad(n=2,\ 3)$$

を満たすものを考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあるとき，P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2)　P_1，P_2，P_3 が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき，P_4 もこの円周上にあることを示せ。

[2006]

解答例

(1)　まず，P_1，P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあることより，t，s を実数として，$\overrightarrow{OP_1}=\left(t,\ \frac{1}{t}\right)$，$\overrightarrow{OP_2}=\left(s,\ \frac{1}{s}\right)$とおくことができるので，条件より，

$$\overrightarrow{OP_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\frac{3}{2}\left(s,\ \frac{1}{s}\right)-\left(t,\ \frac{1}{t}\right)=\left(\frac{3}{2}s-t,\ \frac{3}{2s}-\frac{1}{t}\right)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{OP_3}=(x,\ y)$とおくと，

$$xy=\left(\frac{3}{2}s-t\right)\left(\frac{3}{2s}-\frac{1}{t}\right)=\frac{9}{4}-\frac{3s}{2t}-\frac{3t}{2s}+1=\frac{13}{4}-\left(\frac{3s}{2t}+\frac{3t}{2s}\right)$$

さて，$xy=1$ とおくと，$\frac{13}{4}-\left(\frac{3s}{2t}+\frac{3t}{2s}\right)=1$，$\frac{s}{t}+\frac{t}{s}=\frac{3}{2}$

$$2s^2+2t^2-3st=0,\ \frac{3}{2}(s-t)^2+\frac{1}{2}(s^2+t^2)=0\cdots\cdots\cdots②$$

$s\neq0$，$t\neq0$ より，②を満たす s，t は存在しないので P_3 は曲線 $xy=1$ 上にはない。

(2)　P_1，P_2 が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるので，α，β を実数として，

$$\overrightarrow{OP_1}=(\cos\alpha,\ \sin\alpha),\ \overrightarrow{OP_2}=(\cos\beta,\ \sin\beta)$$

すると，$\overrightarrow{OP_3}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_2}-\overrightarrow{OP_1}=\left(\frac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha,\ \frac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)$

P_3 も円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるので，$\left(\frac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)^2=1$

$$\frac{9}{4}-3\cos\beta\cos\alpha-3\sin\beta\sin\alpha+1=1,\ \cos(\beta-\alpha)=\frac{3}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

条件より，$\overrightarrow{OP_4}=\frac{3}{2}\overrightarrow{OP_3}-\overrightarrow{OP_2}$ なので，

$$\overrightarrow{OP_4}=\frac{3}{2}\left(\frac{3}{2}\cos\beta-\cos\alpha,\ \frac{3}{2}\sin\beta-\sin\alpha\right)-(\cos\beta,\ \sin\beta)$$
$$=\left(\frac{5}{4}\cos\beta-\frac{3}{2}\cos\alpha,\ \frac{5}{4}\sin\beta-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)$$

ここで，$\overrightarrow{OP_4}=(x,\ y)$とおくと，③より，

$$x^2+y^2=\left(\frac{5}{4}\cos\beta-\frac{3}{2}\cos\alpha\right)^2+\left(\frac{5}{4}\sin\beta-\frac{3}{2}\sin\alpha\right)^2$$
$$=\frac{25}{16}+\frac{9}{4}-\frac{15}{4}(\cos\beta\cos\alpha+\sin\beta\sin\alpha)=\frac{61}{16}-\frac{15}{4}\cos(\beta-\alpha)$$

$$= \frac{61}{16} - \frac{15}{4} \times \frac{3}{4} = 1$$

よって，P_4 も円周 $x^2 + y^2 = 1$ 上にある。

コメント

(1)，(2)とも，曲線を媒介変数表示し，題意に沿って立式しました。実戦的には，この方法が一番です。

問　題

xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面を S とする。S の外側にある点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し, OP を直径とする球面と S との交わりとして得られる円を含む平面を L とする。点 P と点 A から平面 L へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき PQ≦AR であるような点 P の動く範囲 V を求め, V の体積は 10 より小さいことを示せ。　[2002]

解答例

原点を中心とし，点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ -1)$ を通る球面 S の方程式は,

$$x^2+y^2+z^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ としたとき, OP を直径とする球面の方程式は,

$$x(x-x_0)+y(y-y_0)+z(z-z_0)=0$$

$$x^2+y^2+z^2-x_0x-y_0y-z_0z=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②の交線である円を含む平面 L は, ①－②より，$x_0x+y_0y+z_0z-1=0$

すると，$\mathrm{PQ}=\dfrac{|x_0^2+y_0^2+z_0^2-1|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$，$\mathrm{AR}=\dfrac{|-z_0-1|}{\sqrt{x_0^2+y_0^2+z_0^2}}$

条件より, PQ≦AR なので, $|x_0^2+y_0^2+z_0^2-1|\leqq|-z_0-1|$

$$(x_0^2+y_0^2+z_0^2-1)^2-(-z_0-1)^2\leqq 0$$

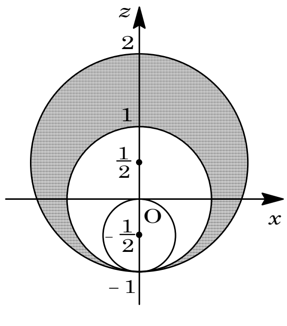
$$(x_0^2+y_0^2+z_0^2-z_0-2)(x_0^2+y_0^2+z_0^2+z_0)\leqq 0$$

すると，点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ の動く範囲を表す不等式は

$$(x^2+y^2+z^2-z-2)(x^2+y^2+z^2+z)\leqq 0$$

$$\left\{x^2+y^2+\left(z-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{9}{4}\right\}\left\{x^2+y^2+\left(z+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\right\}\leqq 0$$

したがって，点 P の動く範囲 V は，球面 S の外側で，点 $\left(0,\ 0,\ \frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{3}{2}$ の球から，点 $\left(0,\ 0,\ -\frac{1}{2}\right)$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の球を取り除いたものである。xz 平面による断面は右図の網点部となり，これを利用すると，V の体積は,



$$\frac{4}{3}\pi\left(\frac{3}{2}\right)^3-\frac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\frac{19}{6}\pi<\frac{19}{6}\times 3.15=9.975<10$$

コメント

空間図形の方程式を利用して解きました。これが普通の解法だと思うのですが。

問　題

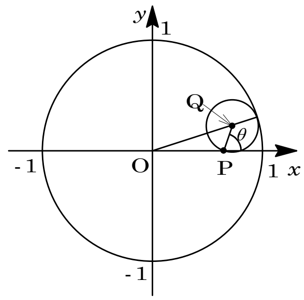
xyz 空間において xy 平面上に円板 A があり xz 平面上に円板 B があって以下の 2 条件を満たしているものとする。

(a)　A, B は原点からの距離が 1 以下の領域に含まれる。

(b)　A, B は一点 P のみを共有し, P はそれぞれの円周上にある。

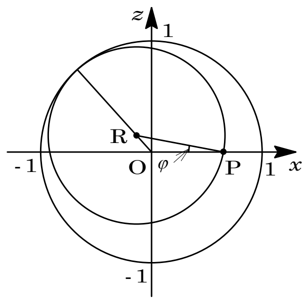
このような円板 A と B の半径の和の最大値を求めよ。ただし, 円板とは円の内部と円周をあわせたものを意味する。　[1999]

解答例



条件(b)より点 P は xy 平面と xz 平面の交線である x 軸上にある。そこで, $\mathrm{P}(k,\ 0,\ 0)$ とおくと, 対称性から $0\leqq k<1$ とすることができる。

A の中心を $\mathrm{Q}(x_1,\ y_1,\ 0)$, B の中心を $\mathrm{R}(x_2,\ 0,\ z_2)$ とおくと, 対称性より $y_1\geqq 0$, $z_2\geqq 0$ とすることができ, さらに A と B は 1 点のみを共有することから, 一般性を失うことなく, $x_2\leqq k\leqq x_1$ としてもよい。



さて, A の半径を r_1, B の半径を r_2 とすると, r_1, r_2 が最大となるのは, 円板 A, B が半径 1 の円に内接する場合である。

まず, 角 θ を図のように設定すると $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり, $\triangle$OPQ に余弦定理を適用し,

$$(1-r_1)^2=r_1{}^2+k^2-2r_1k\cos(\pi-\theta)$$

$$2r_1(1+k\cos\theta)=1-k^2,\ \ r_1=\frac{1-k^2}{2(1+k\cos\theta)}$$

すると, $\cos\theta=0$ のとき r_1 は最大値 $r_{1\max}=\dfrac{1-k^2}{2}$ をとる。

また, 角 φ を図のように設定すると $0\leqq\varphi\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり, $\triangle$OPR に余弦定理を適用し,

$$(1-r_2)^2=r_2{}^2+k^2-2r_2k\cos\varphi$$

$$2r_2(1-k\cos\varphi)=1-k^2,\ \ r_2=\frac{1-k^2}{2(1-k\cos\varphi)}$$

すると, $\cos\varphi=1$ のとき r_2 は最大値 $r_{2\max}=\dfrac{1-k^2}{2(1-k)}=\dfrac{1+k}{2}$ をとる。

よって, r_1+r_2 の最大値は,

$$r_{1\max}+r_{2\max}=\frac{1-k^2}{2}+\frac{1+k}{2}=-\frac{k^2}{2}+\frac{k}{2}+1=-\frac{1}{2}\left(k-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{8}$$

これより，$k=\dfrac{1}{2}$ のとき，r_1+r_2 は最大値 $\dfrac{9}{8}$ をとる。

コメント

空間における円の配置の問題ですが，立式する前にいろいろ状況を設定しなくてはいけません。ここが，ややこしいところです。

問　題

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず, (1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\ \ (b_{n+1}',\ b_n' \text{は自然数})$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

コメント

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば，昨年は神戸大・理で類題が出ています。

問　題

k を正の整数とし，10 進法で表された小数点以下 k 桁の実数

$$0.a_1a_2\cdots a_k=\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}$$

を 1 つとる。ここで，a_1，a_2，…，a_k は 0 から 9 までの整数で，$a_k\neq 0$ とする。

(1)　次の不等式を満たす正の整数 n をすべて求めよ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{n}-10^k<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(2)　p が $5\cdot 10^{k-1}$ 以上の整数ならば，次の不等式を満たす正の整数 m が存在することを示せ。

$$0.a_1a_2\cdots a_k\leqq\sqrt{m}-p<0.a_1a_2\cdots a_k+10^{-k}$$

(3)　実数 x に対し，$r\leqq x<r+1$ を満たす整数 r を $[x]$ で表す。$\sqrt{s}-[\sqrt{s}]=0.a_1a_2\cdots a_k$ を満たす正の整数 s は存在しないことを示せ。　[2016]

解答例

(1)　$\alpha=0.a_1a_2\cdots a_k=\dfrac{a_1}{10}+\dfrac{a_2}{10^2}+\cdots+\dfrac{a_k}{10^k}$ $(a_k\neq 0)$ とおくと，$0<\alpha<1$ である。

さて，条件より，$\alpha\leqq\sqrt{n}-10^k<\alpha+10^{-k}$，$10^k+\alpha\leqq\sqrt{n}<10^k+\alpha+10^{-k}$ となり，

$$(10^k+\alpha)^2\leqq n<(10^k+\alpha+10^{-k})^2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$(10^k+\alpha)^2=10^{2k}+2\alpha\cdot 10^k+\alpha^2$ となり，$0<\alpha^2<1$ で，

$$2\alpha\cdot 10^k=2\Big(\frac{a_1}{10}+\frac{a_2}{10^2}+\cdots+\frac{a_k}{10^k}\Big)\cdot 10^k=2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)$$

すると，①から，$n\geqq 10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+1\cdots\cdots\cdots②$

また，$(10^k+\alpha+10^{-k})^2=10^{2k}+2(\alpha+10^{-k})\cdot 10^k+(\alpha+10^{-k})^2$

ここで，$0<\alpha+10^{-k}\leqq 1$ より，$0<(\alpha+10^{-k})^2\leqq 1$ であり，

$$2(\alpha+10^{-k})\cdot 10^k=2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+2$$

すると，①から，$n<10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+3\cdots\cdots\cdots③$

よって，②③から，求める正の整数 n は，

$$n=10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+1$$
$$n=10^{2k}+2(10^{k-1}a_1+10^{k-2}a_2+\cdots+a_k)+2$$

(2)　条件より，$\alpha\leqq\sqrt{m}-p<\alpha+10^{-k}$ から $(p+\alpha)^2\leqq m<(p+\alpha+10^{-k})^2\cdots\cdots\cdots④$

ここで，$d=(p+\alpha+10^{-k})^2-(p+\alpha)^2$ とおくと，$p\geqq 5\cdot 10^{k-1}$ なので，

$$d=2(p+\alpha)\cdot 10^{-k}+10^{-2k}\geqq 2\cdot 5\cdot 10^{k-1}\cdot 10^{-k}+2\alpha\cdot 10^{-k}+10^{-2k}>1$$

よって，④を満たす正の整数 m が存在する。

(3)　$\sqrt{s}=[\sqrt{s}]+\alpha$　(ただし α は $0<\alpha<1$ を満たす有限小数)……⑤と仮定する。

(i)　s が平方数のとき　$\sqrt{s}=[\sqrt{s}]$ となり，$\alpha=0$ から⑤は成立しない。

(ii) s が平方数でないとき　α は $0<\alpha<1$ を満たす有限小数なので $\sqrt{s}$ は有理数となり，p, q を互いに素な自然数として，$\sqrt{s}=\dfrac{q}{p}$ $(p \geqq 2)$ と表すことができる。

すると，$q^2=sp^2$ となり，p，q が互いに素より $p^2=1$ すなわち $p=1$ であるが，これは $p \geqq 2$ に反するので，⑤は成立しない。

(i)(ii)より，$\sqrt{s}=[\sqrt{s}]+\alpha$ を満たす正の整数 s は存在しない。

コメント

有限小数が題材となっている整数問題です。(3)では，$\sqrt{s}$ は整数か無理数ということから 2 つに場合分けをしましたが，記述を少し変えると，必須というわけではありません。ただ，(1), (2)との直接的な関係はなさそうですが。

問　題

数列$\{p_n\}$を次のように定める。

$$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) $\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$が$n$によらないことを示せ。

(2) すべての$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$に対し，$p_{n+1}+p_{n-1}$をp_nのみを使って表せ。

(3) 数列$\{q_n\}$を次のように定める。

$$q_1=1,\ q_2=1,\ q_{n+2}=q_{n+1}+q_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$p_n=q_{2n-1}$を示せ。 [2015]

解答例

(1) $p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=\dfrac{{p_{n+1}}^2+1}{p_n}$に対して，$a_n=\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}$とおくと，

$$\begin{aligned}a_{n+1}&=\frac{{p_{n+2}}^2+{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+2}p_{n+1}}=\frac{p_{n+2}}{p_{n+1}}+\frac{p_{n+1}}{p_{n+2}}+\frac{1}{p_{n+2}p_{n+1}}\\&=\frac{{p_{n+1}}^2+1}{p_{n+1}p_n}+\frac{p_{n+1}p_n}{{p_{n+1}}^2+1}+\frac{p_n}{p_{n+1}({p_{n+1}}^2+1)}\\&=\frac{({p_{n+1}}^2+1)^2+{p_{n+1}}^2{p_n}^2+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n({p_{n+1}}^2+1)}=\frac{({p_{n+1}}^2+1)+{p_n}^2}{p_{n+1}p_n}=a_n\end{aligned}$$

これより，$a_n=a_1=\dfrac{2^2+1^2+1}{2\cdot1}=3$となり，$\dfrac{{p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1}{p_{n+1}p_n}=3$………①

(2) すべての自然数 n に対し，$0<p_n<p_{n+1}$であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$のとき　$p_1=1,\ p_2=2$より成立する。

(ii) $n=k$のとき　$0<p_k<p_{k+1}$すなわち$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$と仮定すると，

条件式より，$p_{k+2}=\dfrac{{p_{k+1}}^2+1}{p_k}>\dfrac{{p_{k+1}}^2}{p_k}$から，$\dfrac{p_{k+2}}{p_{k+1}}>\dfrac{p_{k+1}}{p_k}>1$となる。

(i)(ii)より，$0<p_n<p_{n+1}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$である。

さて，①より，${p_{n+1}}^2+{p_n}^2+1=3p_{n+1}p_n$………②

$${p_n}^2+{p_{n-1}}^2+1=3p_np_{n-1}\ (n\geqq2)\text{………③}$$

②－③より，${p_{n+1}}^2-{p_{n-1}}^2=3p_n(p_{n+1}-p_{n-1})$

すると，$p_{n-1}<p_n<p_{n+1}$より，$p_{n+1}-p_{n-1}>0$なので，

$$p_{n+1}+p_{n-1}=3p_n\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(3) (2)より，$p_1=1,\ p_2=2,\ p_{n+2}=3p_{n+1}-p_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

ここで，$q_1=1$，$q_2=1$，$q_{n+2}=q_{n+1}+q_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる q_n に対して，$p_n=q_{2n-1}$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　$p_1=q_1$，$q_3=q_2+q_1=2$ から $p_2=q_3$ となり成立する。

(ii)　$n=k,\ k+1$ のとき　$p_k=q_{2k-1}$，$p_{k+1}=q_{2k+1}$ と仮定する。

このとき，$p_{k+2}=3p_{k+1}-p_k=3q_{2k+1}-q_{2k-1}$ となり，

$$\begin{aligned} q_{2k+3}&=q_{2k+2}+q_{2k+1}=q_{2k+1}+q_{2k}+q_{2k+1}=2q_{2k+1}+q_{2k}\\ &=2q_{2k+1}+(q_{2k+1}-q_{2k-1})=3q_{2k+1}-q_{2k-1} \end{aligned}$$

(i)(ii)より，$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$p_n=q_{2n-1}$ が成り立つ。

コメント

複雑な漸化式ですが，誘導に従うと道筋が見えてくるタイプです。

問　題

m を 2015 以下の正の整数とする。${}_{2015}\mathrm{C}_m$ が偶数となる最小の m を求めよ。

[2015]

解答例

m を 2015 以下の正の整数とするとき,

$${}_{2015}\mathrm{C}_m = \frac{{}_{2015}\mathrm{P}_m}{m!} = \frac{2015}{1}\cdot\frac{2014}{2}\cdot\frac{2013}{3}\cdot\frac{2012}{4}\cdot\cdots\cdot\frac{2016-m}{m}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$が偶数になる最小の m の値は,「m が偶数かつ $\dfrac{2016-m}{m}=\dfrac{2016}{m}-1$ が初めて偶数」となる値である。すなわち「m が偶数かつ $\dfrac{2016}{m}$ が初めて奇数」となる値である。

すると, $2016=2^5\times 63$ より, 求める m の値は, $m=2^5=32$ である。

コメント

まず, 実験をして, $(*)$の分子と分母の素因数 2 の個数に注目しました。たとえば, $(2014,\ 2)\to(1,\ 1)$, $(2012,\ 4)\to(2,\ 2)$, $(2010,\ 6)\to(1,\ 1)$, $(2008,\ 8)\to(3,\ 3)$ という具合です。すると, これらの分数は約分すると, すべて奇数となります。その状態が破綻する最小の m を探すという手順で考えたわけです。16 列の表を作って直接的に示した方が明快だったかもしれませんが……。

問　題

r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r\,,\ a_2 = r+1\,,\ a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0\,,\ b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。

(4) a_2，a_3，a_4，…に p で割り切れる数が現れないとする。このとき，a_1 も p で割り切れないことを示せ。 [2014]

解答例

(1) b_n は a_n を素数 p で割った余りなので，商を q_n とすると $a_n = p\cdot q_n + b_n$ となり，

$$a_{n+1}(a_n+1) = (p\cdot q_{n+1} + b_{n+1})(p\cdot q_n + b_n + 1)$$
$$= p(p\cdot q_n q_{n+1} + q_{n+1}b_n + q_{n+1} + q_n b_{n+1}) + b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2} = a_{n+1}(a_n+1)$ なので，a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

(2) $r=2$，$p=17$ のとき，$a_1 = r = 2$ より $b_1 = 2$，$a_2 = r+1 = 3$ より $b_2 = 3$

以下，(1)の結論から，b_3 は $b_2(b_1+1) = 9$ を 17 で割った余りより $b_3 = 9$ である。

b_4 は $b_3(b_2+1) = 36$ を 17 で割った余りより $b_4 = 2$ である。

b_5 は $b_4(b_3+1) = 20$ を 17 で割った余りより $b_5 = 3$ である。

すると，$b_4 = b_1$，$b_5 = b_2$ から，帰納的に，$b_6 = b_3 = 9$，$b_7 = b_4 = 2$，$b_8 = b_5 = 3$，$b_9 = b_6 = 9$，$b_{10} = b_7 = 2$ となる。

(3) まず，$b_{n+2} = b_{m+2}$ より，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りに等しい。すなわち，k を整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1) - b_{m+1}(b_m+1) = pk$$

ここで，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$ より，$b_{n+1}(b_n+1) - b_{n+1}(b_m+1) = pk$

$$b_{n+1}(b_n - b_m) = pk$$

$0 < b_{n+1} < p$ より，b_{n+1} は p の倍数でないので，$b_n - b_m$ が p の倍数となる。

すると，$0 \leqq b_n < p$，$0 \leqq b_m < p$ から，$-p < b_n - b_m < p$ となり，$b_n - b_m = 0$ である。すなわち，$b_n = b_m$ が成り立つ。

(4) a_2，a_3，a_4，…は，すべて p で割り切れないことより，

$1 \leqq b_2 \leqq p-1$，$1 \leqq b_3 \leqq p-1$，$1 \leqq b_4 \leqq p-1$，……

すると，2 つの相異なる 2 以上の自然数 k，l に対して，$(b_k,\ b_l)$ の組の数は高々 $(p-1)^2$ 通りにすぎないので，これより，$b_{n+1} = b_{m+1} > 0$，$b_{n+2} = b_{m+2} > 0$ を満たす自然数 $n, m\,(n < m)$ が存在することになる。

(3)の結論を用いると $b_n = b_m > 0$ となり，帰納的に $b_1 = b_{m-n+1} > 0$，すなわち a_1 も p で割り切れない。

コメント

漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)が後続の設問への誘導として利いています。なお，(3)までの文理共通題に，(4)として，鳩の巣原理を利用する設問が追加されています。

問　題

次の命題 P を証明したい。

命題 P　次の条件(a), (b)をともに満たす自然数（1 以上の整数）A が存在する。

(a)　A は連続する 3 つの自然数の積である。

(b)　A を 10 進法で表したとき，1 が連続して 99 回以上現れるところがある。

以下の問いに答えよ。

(1)　y を自然数とする。このとき不等式

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2$$

が成り立つような正の実数 x の範囲を求めよ。

(2)　命題 P を証明せよ。　[2013]

解答例

(1)　x が正の実数，y が自然数のとき，$P=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-(x^3+3yx^2)$ とおくと，

$$P=(x+y)^3-(x+y)-(x^3+3yx^2)=3xy^2+y^3-x-y$$
$$=(3y^2-1)x+y^3-y$$

$x>0$，$3y^2-1>0$，$y^3-y\geqq 0$ より，$P>0$ はつねに成立する。

次に，$Q=(x+y-1)(x+y)(x+y+1)-\{x^3+(3y+1)x^2\}$ とおくと，

$$Q=(x+y)^3-(x+y)-x^3-(3y+1)x^2=3xy^2+y^3-x-y-x^2$$
$$=-x^2+(3y^2-1)x+y^3-y$$

$Q<0$ であることより，$x^2-(3y^2-1)x-(y^3-y)>0$

$x>0$，$-(y^3-y)\leqq 0$ より，$x>\dfrac{3y^2-1+\sqrt{9y^4+4y^3-6y^2-4y+1}}{2}$ ………①

よって，$P>0$ かつ $Q<0$ を満たす正の実数 x の範囲は①である。

(2)　(1)より，①のもとで，

$$x^3+3yx^2<(x+y-1)(x+y)(x+y+1)<x^3+(3y+1)x^2 \text{ ………②}$$

さて，1 が連続して 99 回現れる 99 桁の整数 $m=1+10+10^2+\cdots+10^{98}$ は，9 の倍数であるので，y を自然数として $m=3y$ とおくことができる。

そこで，n を十分に大きな整数として，$x=10^n$ とおくと，①を満たし，

$$x^3+3yx^2=10^{3n}+m\cdot 10^{2n}=(10^n+m)\cdot 10^{2n}$$
$$x^3+(3y+1)x^2=10^{3n}+(m+1)\cdot 10^{2n}=(10^n+m+1)\cdot 10^{2n}$$

このとき，$(10^n+m)\cdot 10^{2n}$ は 1 が連続して 99 回現れ，また $(10^n+m+1)\cdot 10^{2n}$ は 1 が連続して 98 回現れた次に 2 が 1 回現れる。

すると，②より，与えられた条件(a), (b)をともに満たす連続する 3 つの自然数の

積$(x+y-1)(x+y)(x+y+1)$で表される自然数が存在する。

コメント

2008 年に雰囲気の似た問題がありますが，考えにくさについては，各段の相違があります。とらえどころのない難問です。なお，(2)では，与えられた不等式をみて，xの値として，10, 100, 1000, …と考えていきました。

問　題

n を 2 以上の整数とする。自然数（1 以上の整数）の n 乗になる数を n 乗数と呼ぶことにする。以下の問いに答えよ。

(1) 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。

(2) 連続する n 個の自然数の積は n 乗数でないことを示せ。 [2012]

解答例

(1) k, l, n を, $k \geqq 1$, $l \geqq 1$, $n \geqq 2$ を満たす整数として，$k(k+1) = l^n$ ……①と仮定すると, k, $k+1$ のいずれも l^n の約数となる。

さて，$(k+1)-k=1$ より, k, $k+1$ は互いに素なので, a, b を正の整数として,

$$k = a^n,\ \ k+1 = b^n$$

k を消去すると,

$$b^n - a^n = 1,\ (b-a)(b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1}) = 1$$

すると，$b-a>0$ から，$b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1} = 1$ ………②

ところが，$b^{n-1} + ab^{n-2} + \cdots + a^{n-1} \geqq n \geqq 2$ となり, ②は成立しない。すなわち, ①を満たす k, l, n は存在しない。

よって, 連続する 2 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(2) k, l, n を, $k \geqq 1$, $l \geqq 1$, $n \geqq 3$ を満たす整数として, 次式を仮定すると,

$$k(k+1)(k+2)\cdots(k+n-1) = l^n \text{ ………③}$$

ここで, $k < k+1 < k+2 < \cdots < k+n-1$ から,

$$k^n < l^n < (k+n-1)^n,\ \ k < l < k+n-1$$

これより, l は $k+1$，$k+2$，…，$k+n-2$ のいずれかと等しくなる。

そこで, p を $1 \leqq p \leqq n-2$ を満たす整数として，$l = k+p$ とおくと，③は,

$$k(k+1)\cdots(k+p)\cdots(k+n-1) = (k+p)^n$$

$$k(k+1)\cdots(k+p-1)(k+p+1)\cdots(k+n-1) = (k+p)^{n-1} \text{ ………④}$$

ところが，$k+p+1$ は $k+p$ と互いに素であり，$(k+p)^{n-1}$ の約数とはならないので, ④は成立しない。すなわち, ③を満たす k, l, n は存在しない。

よって, $n \geqq 3$ のとき, 連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

(1)より，$n=2$ のときも合わせて, 連続する n 個の自然数の積は n 乗数ではない。

コメント

(2)は, (1)との関連から数学的帰納法による証明と思い込みましたが，うまくいきません。そのため, 軌道修正にたいへんな時間を費やしてしまいました。

問　題

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

(3)　a が有理数であるとする。a を整数 p と自然数 q を用いて $a = \dfrac{p}{q}$ と表すとき，q 以上のすべての自然数 n に対して，$a_n = 0$ であることを示せ。　[2011]

解答例

(1)　$a = \sqrt{2}$ のとき，$1 < \sqrt{2} < 2$ より，$a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2} - 1$

$$a_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle = \sqrt{2}-1$$

すると，帰納的に，$a_n = \sqrt{2} - 1$ である。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ である条件を求めると，まず $n=1,\ 2$ に対して成立する必要があるので，

$$a_1 = \langle a \rangle = a \cdots\cdots\cdots ①,\quad a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = a \cdots\cdots\cdots ②$$

逆に，①②が成立すると，任意の自然数 n に対して，帰納的に $a_n = a$ が成り立つ。

さて，$a \geqq \dfrac{1}{3}$ のとき，①より $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ であり，$1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ となる。

(i)　$1 < \dfrac{1}{a} < 2$ $\left(\dfrac{1}{2} < a < 1\right)$ のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 1$ となるので，②より，$\dfrac{1}{a} - 1 = a$，$a^2 + a - 1 = 0$

$\dfrac{1}{2} < a < 1$ から，$a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\dfrac{1}{a} = 2$ $\left(a = \dfrac{1}{2}\right)$ のとき　$a_2 = \langle 2 \rangle = 0$ となり，$a_n = a$ に反する。

(iii)　$2 < \dfrac{1}{a} < 3$ $\left(\dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 2$ となるので，②より，$\dfrac{1}{a} - 2 = a$，$a^2 + 2a - 1 = 0$

$\dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2}$ から，$a = -1 + \sqrt{2}$

(iv) $\dfrac{1}{a}=3\left(a=\dfrac{1}{3}\right)$のとき　$a_2=\langle 3\rangle=0$ となり，$a_n=a$ に反する。

(i)～(iv)より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

(3)　p を整数, q を自然数として，有理数 $a=\dfrac{p}{q}$ とおく。

まず, p を q で割り，その余りを r_1 とすると，

$$a_1=\left\langle\frac{p}{q}\right\rangle=\frac{r_1}{q}\quad(0\leqq r_1<q)$$

ここで，$r_1=0$ のときは $a_1=0$ となり，以下, $n\geqq 2$ で $a_n=0$ である。

次に，$r_1\neq 0$ のときは, q を r_1 で割り，その余りを r_2 とすると，

$$a_2=\left\langle\frac{q}{r_1}\right\rangle=\frac{r_2}{r_1}\quad(0\leqq r_2<r_1)$$

ここで，$r_2=0$ のときは $a_2=0$ となり，以下, $n\geqq 3$ で $a_n=0$ である。

さらに，$r_2\neq 0$ のときは，r_1 を r_2 で割り，その余りを r_3 とすると，

$$a_3=\left\langle\frac{r_1}{r_2}\right\rangle=\frac{r_3}{r_2}\quad(0\leqq r_3<r_2)$$

余りが 0 でないとき，同様に，この操作を繰り返すと，得られる数列$\{r_n\}$は,

$$q>r_1>r_2>r_3>\cdots\geqq 0$$

すなわち，単調に減少する整数の数列が得られる。

すると，ある整数 $n=n_0\leqq q$ において，$r_{n_0}=0$ となる。これより，$a_{n_0}=0$ となり，以下，$n\geqq n_0+1$ で $a_n=0$ である。

したがって, q 以上の自然数 n に対して，$a_n=0$ となる。

コメント

実数の小数部分が題材です。記号の意味を把握し，具体的な問題に適用する力が問われています。なお，(1)は(2)のヒントです。(3)では，正の整数が減少していくと，いつかは 0 になるという事実を利用しています。

問　題

$p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件 $-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\ ;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\ ;c]$ に対して，$w([a,\ b\ ;c]) = p-q-(a+b)$ とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\ ;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\ ;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

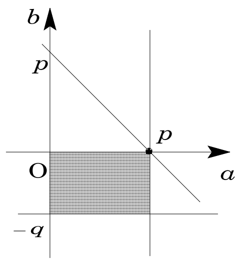
以下，$p = q$ の場合を考える。

(2)　s を整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\ ;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。

(3)　$(p,\ p)$ パターンの総数を求めよ。　　[2011]

解答例

(1)　正の整数 $p,\ q$，整数 $a,\ b,\ c$ に対して，$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ とする。

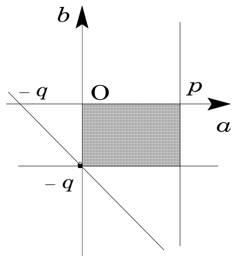


まず，$w([a,\ b\ ;c]) = -q$ ……①であるとき，

$$p-q-(a+b) = -q\ ,\ a+b = p$$

よって，①を満たす $a,\ b$ は，$(a,\ b) = (p,\ 0)$ のみである。

すると，$0 \leqq c \leqq p$ を満たす c は $p+1$ 個存在するので，①となるものの個数は $p+1$ である。



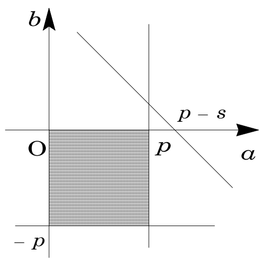
次に，$w([a,\ b\ ;c]) = p$ ……②であるとき，

$$p-q-(a+b) = p\ ,\ a+b = -q$$

よって，②を満たす $a,\ b$ は，$(a,\ b) = (0,\ -q)$ のみである。

すると，$-q \leqq c \leqq 0$ を満たす c は $q+1$ 個存在するので，②となるものの個数は $q+1$ である。

(2)　s を整数とし，$q = p$ のときを考える。



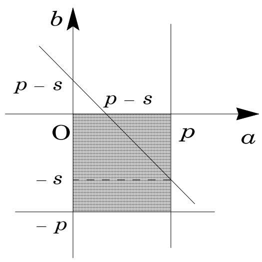
$w([a,\ b\ ;c]) = -p+s$ ……③に対して，

$$p-p-(a+b) = -p+s\ ,\ a+b = p-s$$

(i)　$p-s > p\ (s < 0)$ のとき

③を満たす $a,\ b$ は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(ii)　$0 \leqq p-s \leqq p\ (0 \leqq s \leqq p)$ のとき



③を満たす $a,\ b$ は $(a,\ b) = (p-s,\ 0)$，$(p-s+1,\ -1)$，$(p-s+2,\ -2)$，…，$(p,\ -s)$ である。

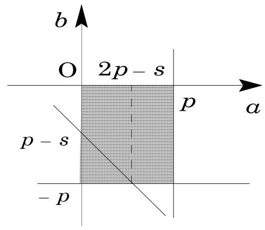
すると，$b \leqq c \leqq a$ を満たす c は，それぞれ $p-s+1$ 個，

$p-s+3$ 個，$p-s+5$ 個，…，$p+s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2}\times(s+1)=(p+1)(s+1)$$

よって，③となるものの個数は，$(p+1)(s+1)$ である。

(iii) $-p\leqq p-s<0$ $(p<s\leqq 2p)$ のとき



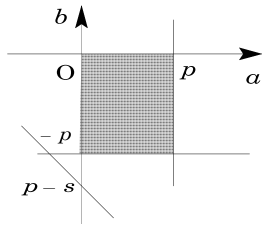
③を満たす a，b は $(a,\ b)=(0,\ p-s)$，$(1,\ p-s-1)$，$(2,\ p-s-2)$，…，$(2p-s,\ -p)$ である。

すると，$b\leqq c\leqq a$ を満たす c は，それぞれ $-p+s+1$ 個，$-p+s+3$ 個，$-p+s+5$ 個，…，$3p-s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(-p+s+1)+(3p-s+1)}{2}\times(2p-s+1)=(p+1)(2p-s+1)$$

よって，③となるものの個数は，$(p+1)(2p-s+1)$ である。

(iv) $p-s<-p$ $(s>2p)$ のとき



③を満たす a，b は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(3) $(p,\ p)$ パターンの総数は, (2)より,

$$\sum_{s=0}^{p}(p+1)(s+1)+\sum_{s=p+1}^{2p}(p+1)(2p-s+1)$$

$$=(p+1)\cdot\frac{1+(p+1)}{2}\cdot(p+1)+(p+1)\cdot\frac{p+1}{2}\cdot p$$

$$=\frac{1}{2}(p+1)^2(p+2)+\frac{1}{2}p(p+1)^2=(p+1)^3$$

コメント

読解力が要求される問題です。上の解答例では，与えられた条件を満たす場合の数を，格子点の個数に対応させて考えています。なお, (3)は(2)の結果を利用しましたが, 直接的には，$\displaystyle\sum_{b=-p}^{0}\left(\sum_{a=0}^{p}(a-b+1)\right)$ を計算すると求められます。

問　題

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。

(3)　m が偶数のとき d_m は 1 または 2 であることを示せ。　[2009]

解答例

(1)　$m \geqq 2$ のとき，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて自然数であり，$m \geqq 3$ では，$2 \leqq k \leqq m-1$ において，

$${}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!}$$

ここで，m が素数のとき，m は $k!\,(k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ では割り切れないので，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて m の倍数となる。

すると，${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であることから，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，$d_m = m$ である。なお，$m=2$ のときは，${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ となり，$d_m = m$ を満たしている。

(2)　自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，数学的帰納法よって示す。

(i)　$k=1$ のとき　$k^1 - k = 0$ は，明らかに d_m で割り切れる。

(ii)　$k=l$ のとき　$l^m - l$ が d_m で割り切れると仮定すると，

$$\begin{aligned}(l+1)^m-(l+1) &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1\,l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\,l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\,l^2 + ({}_m\mathrm{C}_{m-1}-1)l\\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1\,l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\,l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\,l^2 + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\,l\end{aligned}$$

(1)より，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は d_m で割り切れるので，$(l+1)^m-(l+1)$ は d_m で割り切れる。

(i)(ii)より，すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れる。

(3)　(2)より，(ii)の証明の式において，$l+1=0\ (l=-1)$ とおくと，m が偶数から，

$$0 = 1-(-1) - {}_m\mathrm{C}_1 + {}_m\mathrm{C}_2 - \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2} - {}_m\mathrm{C}_{m-1}$$

$${}_m\mathrm{C}_1 - {}_m\mathrm{C}_2 + \cdots - {}_m\mathrm{C}_{m-2} + {}_m\mathrm{C}_{m-1} = 2$$

すると，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，2 の約数となる。

さらに，$d_2 = 2$，$d_6 = 1$ から，d_m は 1 または 2 である。

コメント

(2)までは標準的な問題です。ただ，(3)は，上記のように 5 行程度で書けてしまいますが，思いつくまでに，制限時間をかなり超えてしまいました。

問　題

自然数 n に対し，$\dfrac{10^n-1}{9}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ を $\boxed{n}$ で表す。たとえば，$\boxed{1}=1$，$\boxed{2}=11$，$\boxed{3}=111$ である。

(1)　m を 0 以上の整数とする。$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示せ。

(2)　n が 27 で割り切れることが，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるための必要十分条件であることを示せ。　[2008]

解答例

(1)　$\boxed{3^m}=\dfrac{10^{3^m}-1}{9}$ は，3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れないことを示す。

(i)　$m=0$ のとき

$\boxed{3^0}=\dfrac{10^{3^0}-1}{9}=\dfrac{10-1}{9}=1$ は，$3^0=1$ で割り切れるが，$3^1=3$ では割り切れない。

(ii)　$m=k$ のとき

$\boxed{3^k}=\dfrac{10^{3^k}-1}{9}$ は，3^k で割り切れるが，3^{k+1} では割り切れないと仮定すると，

$$\boxed{3^{k+1}}=\frac{10^{3^{k+1}}-1}{9}=\frac{10^{3^k\cdot 3}-1}{9}=\frac{(10^{3^k})^3-1}{9}=\frac{(10^{3^k}-1)\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}}{9}$$
$$=\boxed{3^k}\{(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1\}$$

ここで，$a=(10^{3^k})^2+10^{3^k}+1=100^{3^k}+10^{3^k}+1=(100^{3^k}-1)+(10^{3^k}-1)+3$ とおくと，$100^{3^k}-1$，$10^{3^k}-1$ はともに 9 の倍数であり，これより a は 3 の倍数ではあるが，3^2 の倍数ではない。

したがって，$\boxed{3^{k+1}}$ は 3^{k+1} で割り切れるが，3^{k+2} では割り切れない。

(i)(ii)より，$\boxed{3^m}$ は 3^m で割り切れるが，3^{m+1} では割り切れない。

(2)　n が 27 で割り切れるとき，$n=27l$　$(l=1,\ 2,\ \cdots)$ と表せ，

$$\boxed{n}=\frac{10^n-1}{9}=\frac{10^{27l}-1}{9}=\frac{10^{27}-1}{9}\{(10^{27})^{l-1}+(10^{27})^{l-2}+\cdots+10^{27}+1\}$$
$$=\boxed{27}\{(10^{27})^{l-1}+(10^{27})^{l-2}+\cdots+10^{27}+1\}$$

$27=3^3$ なので，(1)より，$\boxed{27}$ は 27 で割り切れ，$\boxed{n}$ も 27 で割り切れる。

逆に，$\boxed{n}$ が 27 で割り切れるとき，$\boxed{n}=\overbrace{111\cdots111}^{n\text{個}}$ が 9 で割り切れるすなわち各位の数の和 n が 9 の倍数となることが必要より，$n=9k$　$(k=1,\ 2,\ \cdots)$ とおくと，

$$\boxed{n}=\frac{10^{9k}-1}{9}=\frac{10^9-1}{9}\{(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1\}$$
$$=\boxed{9}\{(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1\}$$

$9=3^2$ なので, (1)より, $\boxed{9}$ は 9 で割り切れるが, 27 では割り切れない。

すると, $b=(10^9)^{k-1}+(10^9)^{k-2}+\cdots+10^9+1$ とおくと, b が 3 で割り切れなくてはいけない。一方, b を十進法で表したとき, 各位の数は 1 と 0 のみであり, また 1 の個数は k より, 各位の数の和は k となる。

よって, k は 3 の倍数となり, $n=9k$ から n は 27 で割り切れる。

コメント

3 の倍数や 9 の倍数は, 各位の数の和が 3 の倍数や 9 の倍数かどうかで判断できますが, この点を利用する問題です。

問　題

次の条件を満たす組$(x,\ y,\ z)$を考える。

条件(A)：x, y, z は正の整数で，$x^2+y^2+z^2=xyz$ および $x \leqq y \leqq z$ を満たす。

以下の問いに答えよ。

(1) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$で, $y \leqq 3$ となるものをすべて求めよ。

(2) 組$(a,\ b,\ c)$が条件(A)を満たすとする。このとき，組$(b,\ c,\ z)$が条件(A)を満たすような z が存在することを示せ。

(3) 条件(A)を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在することを示せ。 [2006]

解答例

(1) $x^2+y^2+z^2=xyz$ $(1 \leqq x \leqq y \leqq z)$ ……①において, $y \leqq 3$ より，$y=1,\ 2,\ 3$

(i) $y=1$ のとき　$x=1$ より，$1+1+z^2=z$，$z^2-z+2=0$

$D=1-8=-7<0$ より解なし。

(ii) $y=2$ のとき　$x^2+4+z^2=2xz$，$z^2-2xz+x^2+4=0$

$x=1,\ 2$ のいずれの場合も，$D/4=x^2-(x^2+4)=-4<0$ より解なし。

(iii) $y=3$ のとき　$x^2+9+z^2=3xz$，$z^2-3xz+x^2+9=0$

このとき, $1 \leqq x \leqq 3$ かつ $D=9x^2-4(x^2+9)=5x^2-36 \geqq 0$ から，$x=3$ となり,

$z^2-9z+18=0$，$(z-3)(z-6)=0$，$z=3,\ 6$

(i)～(iii)より，$(x,\ y,\ z)=(3,\ 3,\ 3)$，$(3,\ 3,\ 6)$

(2) $(x,\ y,\ z)=(a,\ b,\ c)$が①を満たすので,

$$a^2+b^2+c^2=abc \quad (1 \leqq a \leqq b \leqq c) \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$z=-a+bc$ とすると, z は整数で,

$$\begin{aligned} b^2+c^2+z^2-bcz &= b^2+c^2+(-a+bc)^2-bc(-a+bc) \\ &= a^2+b^2+c^2-abc=0 \end{aligned}$$

(1)より, $b \geqq 3$ であり,

$$z-c=-a+bc-c=c(b-1)-a \geqq 2c-a=c+(c-a)>0$$

よって，$b^2+c^2+z^2=bcz$ $(1 \leqq b \leqq c \leqq z)$ となる整数 z が存在する。

(3) 数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$，$\{c_n\}$を，次の漸化式で定義する。

$$a_1=3,\ b_1=3,\ c_1=3$$

$$a_{n+1}=b_n,\ b_{n+1}=c_n,\ c_{n+1}=-a_n+b_nc_n \quad (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

すると, (2)より，すべての自然数 n に対して,

$$a_n{}^2+b_n{}^2+c_n{}^2=a_nb_nc_n \quad (1 \leqq a_n \leqq b_n \leqq c_n)$$

さらに，$c_{n+1}-c_n=-a_n+b_nc_n-c_n \geqq 2c_n-a_n>0$ から，すべての$(a_n,\ b_n,\ c_n)$は異なるので，①を満たす組$(x,\ y,\ z)$は，無数に存在する。

コメント

(1)と(2)の誘導によって，(3)の証明がスムーズに行えます。なお，(1)については，最初，すべての場合をチェックしましたが，解なしのケースがほとんどなので，作り直した解です。また，(2)では，z を $z=-a+bc$ として設定していますが，これは②と $b^2+c^2+z^2=bcz$ の両辺の差をとって見つけています。

問　題

$x>0$ に対し，$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ とする。

(1)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対し，$f(x)$ の第 n 次導関数は，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を用いて $f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを示し，a_n，b_n に関する漸化式を求めよ。

(2)　$h_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおく。h_n を用いて a_n，b_n の一般項を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{\log x}{x}$ に対し，数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ が存在し，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表されることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

$f'(x)=\dfrac{1-\log x}{x^2}$ より，$a_1=1$，$b_1=-1$ である。

(ii)　$n=k$ のとき

ある a_k，b_k に対して，$f^{(k)}(x)=\dfrac{a_k+b_k\log x}{x^{k+1}}$ と仮定する。

$$f^{(k+1)}(x)=\frac{b_kx^{-1}x^{k+1}-(a_k+b_k\log x)(k+1)x^k}{x^{2(k+1)}}$$

$$=\frac{b_k-(k+1)(a_k+b_k\log x)}{x^{k+2}}=\frac{\{-(k+1)a_k+b_k\}-(k+1)b_k\log x}{x^{k+2}}$$

ここで，$a_{k+1}=-(k+1)a_k+b_k$，$b_{k+1}=-(k+1)b_k$ とおくと，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$f^{(n)}(x)=\dfrac{a_n+b_n\log x}{x^{n+1}}$ と表される。

したがって，a_n，b_n に関する漸化式は，$a_1=1$，$b_1=-1$ で，

$$a_{n+1}=-(n+1)a_n+b_n\cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=-(n+1)b_n\cdots\cdots\cdots②$$

(2)　②より，$\dfrac{b_{n+1}}{(n+1)!}=-\dfrac{b_n}{n!}$ と変形すると，

$$\frac{b_n}{n!}=\frac{b_1}{1!}(-1)^{n-1}=(-1)^n,\quad b_n=(-1)^n n!$$

①に代入すると，$a_{n+1}=-(n+1)a_n+(-1)^n n!$

両辺を $(-1)^{n+1}(n+1)!$ で割って，

$$\frac{a_{n+1}}{(-1)^{n+1}(n+1)!}=\frac{a_n}{(-1)^n n!}-\frac{1}{n+1}$$

$n\geqq 2$ において，

$$\frac{a_n}{(-1)^n n!}=\frac{a_1}{(-1)^1\cdot 1!}-\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{k+1}=-1-\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}=-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}=-h_n$$

よって，$a_n=-(-1)^n n!h_n$

$n=1$をあてはめると，$a_1=-(-1)\cdot 1!\cdot 1=1$となり，$n=1$のときも成立する。

コメント

b_nの一般項はパタン通りに求められますが，a_nの一般項を求めることも考えて，2つの漸化式に同様の変形を加えました。

問　題

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

[2005]

解答例

$a^2-a=a(a-1)$ であり，条件より, a は奇数，$a-1$ は偶数となる。

ここで, a と $a-1$ の公約数を g とし, b, c を正の整数とすると,

$$a=gb\cdots\cdots\cdots①,\ \ a-1=gc\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$g(b-c)=1$

よって, g は 1 の正の約数から $g=1$ となり, a と $a-1$ は互いに素である。

さて，$10000=2^4\times5^4$ なので，a^2-a が 10000 で割り切れるとき，偶数 $a-1$ は 2^4 という約数をもち, k を整数として,

$$a-1=2^4\times k\cdots\cdots\cdots③$$

すると, $3\leqq a\leqq9999$ より，$2\leqq2^4\times k\leqq9998$ となり，$1\leqq k\leqq624$ である。

よって, k が 5^4 を約数としてもつことはない。

また, k が約数として，5^i $(i=1,\ 2,\ 3)$ をもつと仮定すると, a はそれぞれ 5^{4-i} という約数をもつことになり, a と $a-1$ が互いに素であることに反する。

以上より, l を奇数として,

$$a=5^4\times l\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$5^4\times l-1=2^4\times k$，$625l-16k=1\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤を満たす 1 つの $(l,\ k)$ は，$(l,\ k)=(1,\ 39)$ なので,

$$625\times1-16\times39=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$625(l-1)-16(k-39)=0$，$625(l-1)=16(k-39)$

625 と 16 は互いに素なので, n を整数として,

$$l-1=16n,\ \ l=16n+1$$

④から，$a=5^4(16n+1)=625(16n+1)$

そこで, $3\leqq a\leqq9999$ より, $0<16n+1<16$ となり，$n=0$ のみ満たされる。

よって，求める a は，$a=625$ である。

コメント

当然ですが，a と $a-1$ は互いに素です。この事実と a の範囲に制限があることが，本問を解くうえでのポイントとなっています。

問　題

自然数の 2 乗になる数を平方数という。以下の問いに答えよ。

(1)　10 進法で表して 3 桁以上の平方数に対し，10 の位の数を a，1 の位の数を b とおいたとき，$a+b$ が偶数となるならば, b は 0 または 4 であることを示せ。

(2)　10 進法で表して 5 桁以上の平方数に対し，1000 の位の数，100 の位の数，10 の位の数，および 1 の位の数の 4 つがすべて同じ数となるならば，その平方数は 10000 で割り切れることを示せ。 [2004]

解答例

(1)　p，q を $p\geqq 1$，$0\leqq q\leqq 9$ である整数として，3 桁以上の平方数を $(10p+q)^2$ とおく。

$$(10p+q)^2=p^2\times 100+2pq\times 10+q^2$$

すると，q^2 の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 1 の位の数 b となる。また，$2pq$ とくり上がりの数の和の 1 の位が $(10p+q)^2$ の 10 の位の数 a である。

さて，$2pq$ は偶数なので，$a+b$ が偶数となるのは，右表より，$q=0$，$q=2$，$q=8$ の場合のみであり，このとき, b は 0 または 4 である。

q	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
q^2 の 1 の位	0	1	4	9	6	5	6	9	4	1
くり上がり	0	0	0	0	1	2	3	4	6	8

(2)　p，q，r を $p\geqq 1$，$0\leqq q\leqq 9$，$0\leqq r\leqq 9$ である整数として，5 桁以上の平方数を $(100p+10q+r)^2$ とおくと，条件より，10 の位の数と 1 の位の数が同じ数となるので，その和は偶数である。

よって，$(100p+10q+r)^2$ の 1 の位の数は, (1)より 0 または 4 である。

(i)　1 の位の数が 0 のとき　1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 0 なので，この平方数は 10000 で割り切れる。

(ii)　1 の位の数が 4 のとき　1000 の位の数, 100 の位の数, 10 の位の数もすべて 4 である。このとき, (1)より $r=2$ または $r=8$ である。

(ii-i)　$r=2$ のとき　$(100p+10q+2)^2=4(50p+5q+1)^2$

n を自然数として，$(100p+10q+2)^2=10000n+4444$ と仮定すると，

$$(50p+5q+1)^2=2500n+1111$$

これより，$(50p+5q+1)^2$ の 10 の位の数と 1 の位の数は，ともに 1 である。

すると，平方数の 10 の位の数と 1 の位の数の和は偶数となるが, (1)で示したように，この場合はありえない。

(ii-ii)　$r=8$ のとき　$(100p+10q+8)^2=4(50p+5q+4)^2$

n を自然数として，$(100p+10q+8)^2=10000n+4444$ と仮定すると，

$$(50p+5q+4)^2=2500n+1111$$

(i)と同様に，この場合もありえない。

(i)(ii)より，$(100p+10q+r)^2$ は 10000 で割り切れる。

コメント

わかってしまえばそれまでですが，道に迷いながら，論理を詰めていくには，かなりのエネルギーが必要となります。

問　題

2 次方程式$x^2-4x-1=0$の 2 つの実数解のうち大きいものをα，小さいものをβとする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3を求めよ。また, $n\geqq 3$に対し，s_nをs_{n-1}とs_{n-2}で表せ。

(2)　β^3以下の最大の整数を求めよ。

(3)　α^{2003}以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$x^2-4x-1=0$の解は$x=2\pm\sqrt{5}$で，$\alpha>\beta$から$\alpha=2+\sqrt{5}$，$\beta=2-\sqrt{5}$となる。

$$s_1=\alpha+\beta=4$$
$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16+2=18$$
$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64+12=76$$

また，α，βは$x^2-4x-1=0$の解なので，$\alpha^2-4\alpha-1=0$となり，

$$\alpha^2=4\alpha+1\ ,\quad \alpha^n=4\alpha^{n-1}+\alpha^{n-2}$$

同様にして，$\beta^n=4\beta^{n-1}+\beta^{n-2}$なので，

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})+(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=4s_{n-1}+s_{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$-1<\beta<0$なので$-1<\beta^3<0$となる。

よって，β^3以下の最大の整数は-1である。

(3)　(1)よりs_1，s_2がともに正の整数なので, $(*)$から帰納的にs_nは正の整数である。

さて, 数列$\{s_n\}$の 1 の位の数をa_nとすると, (1)より$a_1=4$，$a_2=8$である。

$(*)$からs_nの 1 の位のみ計算すると，$4\times8+4=36$から$a_3=6$，$4\times6+8=32$から$a_4=2$，$4\times2+6=14$から$a_5=4$，$4\times4+2=18$から$a_6=8$となる。

これから, $(*)$を用いると，数列$\{a_n\}$は, 4, 8, 6, 2, 4, 8, …と周期 4 の周期数列であることが帰納的にわかる。

したがって，$2003=4\times500+3$から，s_{2003}の 1 の位の数はs_3の 1 の位の数と等しく, 6 である。

また，$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$であり, (2)と同様にして$-1<\beta^{2003}<0$より，$\alpha^{2003}$以下の最大の整数の 1 の位の数は 6 となる。

コメント

$(*)$を用いてオーソドックスに周期性の説明を行おうとすると，たいへん時間がかかりそうでした。a_1とa_2の特性について調べるのが，一筋縄ではいかないからです。そのため，1 の位だけを計算して，周期性が現れたところで，それ以降は「帰納的に」と書いているわけです。

問　題

nは正の整数とする。x^{n+1}をx^2-x-1で割った余りをa_nx+b_nとおく。

(1)　数列a_n，b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$に対して，a_n，b_nはともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　[2002]

解答例

(1)　x^{n+1}をx^2-x-1で割った商を$q(x)$とすると，条件より，

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)q(x)+a_nx+b_n$$

すると，
$$\begin{aligned}x^{n+2}&=(x^2-x-1)xq(x)+a_nx^2+b_nx\\&=(x^2-x-1)xq(x)+a_n(x^2-x-1)+a_nx+a_n+b_nx\\&=(x^2-x-1)\{xq(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n\end{aligned}$$

x^{n+2}をx^2-x-1で割った余りが$a_{n+1}x+b_{n+1}$なので，

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\ b_{n+1}=a_n$$

(2)　a_n，b_nがともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$のとき

$x^2=(x^2-x-1)\cdot1+x+1$より，$a_1=b_1=1$となり，a_1，b_1はともに正の整数で，互いに素である。

(ii)　$n=k$のとき

a_k，b_kがともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

(1)より，$a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$なので，a_{k+1}，b_{k+1}はともに正の整数である。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1}に2以上の公約数が存在するとしたとき，

$$a_k=b_{k+1},\ b_k=a_{k+1}-a_k=a_{k+1}-b_{k+1}$$

これより，a_k，b_kにも 2 以上の公約数が存在することになり，a_k，b_kが互いに素であることに反する。

よって，a_{k+1}，b_{k+1}は互いに素である。

(i)(ii)より，a_n，b_nはともに正の整数で，互いに素である。

コメント

互いに素であることの証明も，最大公約数を設定してゴチャゴチャ計算するまでもありませんでした。

問　題

Nを正の整数とする。$2N$個の項からなる数列
$\{a_1,\ a_2,\ \cdots,\ a_N,\ b_1,\ b_2,\ \cdots,\ b_N\}$を$\{b_1,\ a_1,\ b_2,\ a_2,\ \cdots,\ b_N,\ a_N\}$という数列に並べ替える操作を「シャッフル」と呼ぶことにする。並べ替えた数列はb_1を初項とし，b_iの次にa_i，a_iの次にb_{i+1}がくるようなものになる。また，数列$\{1,\ 2,\ \cdots,\ 2N\}$をシャッフルしたときに得られる数列において，数kが現れる位置を$f(k)$で表す。たとえば，$N=3$のとき，$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6\}$をシャッフルすると，$\{4,\ 1,\ 5,\ 2,\ 6,\ 3\}$となるので，$f(1)=2$，$f(2)=4$，$f(3)=6$，$f(4)=1$，$f(5)=3$，$f(6)=5$である。

(1) 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$を 3 回シャッフルしたときに得られる数列を求めよ。

(2) $1\leqq k\leqq 2N$を満たす任意の整数kに対し，$f(k)-2k$は$2N+1$で割り切れることを示せ。

(3) nを正の整数とし，$N=2^{n-1}$のときを考える。数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$を$2n$回シャッフルすると，$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2N\}$にもどることを証明せよ。　[2002]

解答例

(1) 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8\}$は, 1 回シャッフルすると，

$$\{5,\ 1,\ 6,\ 2,\ 7,\ 3,\ 8,\ 4\}$$

2 回シャッフルすると，$\{7,\ 5,\ 3,\ 1,\ 8,\ 6,\ 4,\ 2\}$

3 回シャッフルすると，$\{8,\ 7,\ 6,\ 5,\ 4,\ 3,\ 2,\ 1\}$

(2) 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N,\ N+1,\ N+2,\ N+3,\ \cdots,\ 2N\}$をシャッフルすると，$\{N+1,\ 1,\ N+2,\ 2,\ N+3,\ 3,\ \cdots,\ 2N,\ N\}$となる。

$1\leqq k\leqq N$に対して，数列前半$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ N\}$の$k$番目の数は，シャッフルすると$2k$番目になるので，$f(k)=2k$である。

よって，$f(k)-2k=0$となり，$2N+1$で割り切れる。

$N+1\leqq k\leqq 2N$に対して，数列後半$\{N+1,\ N+2,\ N+3,\ \cdots,\ 2N\}$の$k-N$番目の数は，シャッフルすると$2(k-N)-1$番目になるので，$f(k)=2(k-N)-1$である。

よって，$f(k)-2k=-2N-1$となり，$2N+1$で割り切れる。

(3) (2)より，$f(k)$と$2k$は$2N+1$で割ったとき余りが等しくなるので，これを次のように表す。

$$f(k)\equiv 2k \pmod{2N+1}$$

さて，$N=2^{n-1}$のとき，数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$を 1 回シャッフルすると，

$1 \leqq k \leqq 2^n$ を満たす任意の k に対して,

$$f(k) \equiv 2k \pmod{2^n+1}$$

2 回シャッフルすると,

$$f(f(k)) \equiv 2f(k) \equiv 2(2k) = 2^2 k \pmod{2^n+1}$$

3 回シャッフルすると,

$$f(f(f(k))) \equiv 2^2 f(k) \equiv 2^2(2k) = 2^3 k \pmod{2^n+1}$$

同様にして, $2n$ 回シャッフルしたとき, $f^{2n}(k)$ と表すと,

$$f^{2n}(k) \equiv 2^{2n} k \pmod{2^n+1}$$

ここで, $2^{2n}k - k = (2^n+1)(2^n-1)k$ となるので, $2^{2n}k - k \equiv 0 \pmod{2^n+1}$

したがって, $f^{2n}(k) \equiv k \pmod{2^n+1}$ となり, $1 \leqq k \leqq 2^n$ から $f^{2n}(k) = k$ である。すなわち, 数列$\{1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ 2^n\}$は $2n$ 回シャッフルするともとにもどる。

コメント

1 から 2^n までの数に対して, 2^n+1 で割った余りに注目するところが, (3)のポイントです。(2)がその誘導となっています。

問　題

次の条件を満たす正の整数全体の集合を S とおく。

「各けたの数字は互いに異なり，どの 2 つのけたの数字の和も 9 にならない」

ただし，S の要素は 10 進法で表す。また，1 けたの正の整数は S に含まれるとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) S の要素でちょうど 4 けたのものは何個あるか。

(2) 小さい方から数えて 2000 番目の S の要素を求めよ。 [2000]

解答例

(1) 和が 9 になる 2 つの数の組は，$0+9$，$1+8$，$2+7$，$3+6$，$4+5$ である。

4 けたの数で条件を満たすのは，千の位の決め方が 9 通り，その各々の場合に対して，百の位は千の位の数および千の位の数との和が 9 になる数を除いて 8 通りずつとなる。

同様に考えて，十の位の数は 6 通りずつ，一の位の数は 4 通りずつとなるので，求める 4 けたの S の要素の個数は，$9\times8\times6\times4=1728$ 個となる。

(2) 1 けたの数は 9 個で, (1)と同様に考えて, 2 けたの数は $9\times8=72$ 個, 3 けたの数は $9\times8\times6=432$ 個となる。以上，合わせて，$9+72+432=513$ 個である。

すると, (1)より 4 けたの数が 1728 個あるので, 2000 番目の数は 4 けたとなる。

そこで，小さい数から数えて，千の位が 1〜7 の数は，$7\times8\times6\times4=1344$ 個で，合わせて，$513+1344=1857$ 個となる。

さらに，千の位が 8 で，百の位が 0, 2, 3, 4, 5, 6 の数は $6\times6\times4=144$ 個で，合わせて，$1857+144=2001$ 個となる。

したがって，2000 番目は，千の位が 8，百の位が 6 の数で大きい方から 2 番目の数となり, 8695 である。

コメント

あっさりした問題です。(2)は見込みを立てて数えあげていく問題ですが，1 けたの正の整数のことをうっかり忘れると，大きな被害を被ります。

問　題

(1)　k を自然数とする。m を $m=2^k$ とおくとき，$0<n<m$ を満たすすべての整数 n について，二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は偶数であることを示せ。

(2)　以下の条件を満たす自然数 m をすべて求めよ。

条件 ： $0\leqq n\leqq m$ を満たすすべての整数 n について二項係数 ${}_m\mathrm{C}_n$ は奇数である。

[1999]

解答例

(1)　$1\leqq n\leqq 2^k-1$ として，

$$ {}_{2^k}\mathrm{C}_n=\frac{(2^k)!}{n!(2^k-n)!}=\frac{2^k\cdot(2^k-1)!}{n\cdot(n-1)!(2^k-n)!}=\frac{2^k}{n}\,{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1} $$

よって，$n\,{}_{2^k}\mathrm{C}_n=2^k\,{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………①

$0\leqq n-1\leqq 2^k-2$ より，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ は自然数となるので，①の右辺は 2^k の倍数である。すると，左辺も 2^k の倍数となるが，$1\leqq n\leqq 2^k-1$ なので ${}_{2^k}\mathrm{C}_n$ は偶数である。

(2)　一般的に ${}_m\mathrm{C}_n={}_{m-1}\mathrm{C}_n+{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ （$1\leqq n\leqq m-1$）………②

②より，${}_{m-1}\mathrm{C}_n={}_m\mathrm{C}_n-{}_{m-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………③

③において $m=2^k$ とすると，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_n={}_{2^k}\mathrm{C}_n-{}_{2^k-1}\mathrm{C}_{n-1}$ ………④

まず，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_0=1$ は奇数で，また(1)より ${}_{2^k}\mathrm{C}_n$ $(1\leqq n\leqq 2^k-1)$ は偶数なので，④の漸化式を用いると，帰納的に ${}_{2^k-1}\mathrm{C}_1$，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_2,\cdots$，${}_{2^k-1}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて奇数となる。

すなわち $m=2^k-1$ （k は自然数）のとき ${}_m\mathrm{C}_n$ $(0\leqq n\leqq m)$ はすべて奇数となる。

次に，②において $m=2^k+1$ とすると，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_n={}_{2^k}\mathrm{C}_n+{}_{2^k}\mathrm{C}_{n-1}$ ………⑤

(1)より ${}_{2^k}\mathrm{C}_n$ $(1\leqq n\leqq 2^k-1)$ は偶数なので，⑤の漸化式を用いると，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_2$，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_3,\cdots$，${}_{2^k+1}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて偶数となる。

同様にすると，帰納的に ${}_{2^k+2}\mathrm{C}_n$ $(3\leqq n\leqq 2^k-1)$，${}_{2^k+3}\mathrm{C}_n$ $(4\leqq n\leqq 2^k-1)$，……，${}_{2^{k+1}-3}\mathrm{C}_n$ $(2^k-2\leqq n\leqq 2^k-1)$，${}_{2^{k+1}-2}\mathrm{C}_{2^k-1}$ はすべて偶数となる。

すなわち，$m\neq 2^k-1$ （k は自然数）のとき，${}_m\mathrm{C}_n$ $(0\leqq n\leqq m)$ のうち少なくとも一つは偶数である。

以上より，${}_m\mathrm{C}_n$ $(0\leqq n\leqq m)$ がすべて奇数であるのは，$m=2^k-1$ （k は自然数）のときだけである。

コメント

エンツェンスベルガー『数の悪魔』の中に，偶数だけ明るく，奇数は暗くなっている悪魔の作ったパスカルの三角形が出ています。上の解は，この図のイメージをもとに書いています。

問　題

実数 a に対して $k \leqq a < k+1$ をみたす整数 k を $[\,a\,]$ で表す。n を正の整数として，$f(x) = \dfrac{x^2(2\cdot 3^3 \cdot n - x)}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2}$ とおく。$36n+1$ 個の整数 $[f(0)]$，$[f(1)]$，$[f(2)]$，$\cdots$，$[f(36n)]$ のうち相異なるものの個数を n を用いて表せ。　[1998]

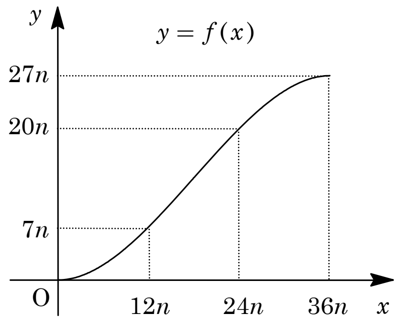
解答例

$f(x) = \dfrac{2\cdot 3^3 \cdot n \cdot x^2 - x^3}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2}$ より，$f'(x) = \dfrac{2^2 \cdot 3^3 \cdot n \cdot x - 3x^2}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2} = \dfrac{-x(x-36n)}{2^5 \cdot 3^2 \cdot n^2}$

$0 \leqq x \leqq 36n$ において，$f'(x) \geqq 0$ より，$f(x)$ はこの区間で単調増加

$f''(x) = \dfrac{2^2 \cdot 3^3 \cdot n - 6x}{2^5 \cdot 3^3 \cdot n^2} = \dfrac{18n - x}{2^4 \cdot 3^2 \cdot n^2}$ から，

$y = f(x)$ のグラフは，$0 < x < 18n$ で $f''(x) > 0$ より下に凸，$18n < x < 36n$ で $f''(x) < 0$ より上に凸。

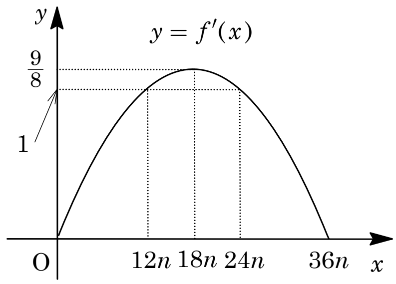


ここで，$f'(x) = \dfrac{-(x-18n)^2}{2^5 \cdot 3^2 \cdot n^2} + \dfrac{9}{8}$ より，

$f'(x) = 1$ とすると，$-x^2 + 36nx = 2^5 \cdot 3^2 \cdot n^2$

$(x-12n)(x-24n) = 0$，$x = 12n$，$x = 24n$

また，$f(12n) = 7n$，$f(24n) = 20n$



以上より，連続する 2 つの整数値に対する $f(x)$ の値の差は，$0 \leqq x \leqq 12n$ と $24n \leqq x \leqq 36n$ では 1 より小で，$12n \leqq x \leqq 24n$ では 1 より大となる。

すると，$[f(0)]$，$[f(1)]$，……，$[f(12n)]$ のうちで相異なるものの個数は，$7n+1$ 個。$[f(12n+1)]$，$[f(12n+2)]$，……，$[f(24n-1)]$ のうちで相異なるものの個数は，$24n - 12n - 1 = 12n - 1$ 個。$[f(24n)]$，$[f(24n+1)]$，……，$[f(36n)]$ のうちで相異なるものの個数は，$27n - 20n + 1 = 7n + 1$ 個

合わせて，$(7n+1) + (12n-1) + (7n+1) = 26n + 1$ 個

コメント

$y = f(x)$ のグラフは $0 \leqq x \leqq 36n$ で単調増加だったのですが，$f'(18n) = \dfrac{9}{8} > 1$ となったため，軌道の修正を図ったのが上の解です。イメージ的には，1 辺の長さ 1 の正方形を設定して，と の 2 つの場合，整数 k に対して，何に着目すれば $[f(k)]$ の異なる値の個数が求まるかを考えたわけです。

問　題

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に，点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき，その 1 秒後の点 P の位置は，隣接する格子点 $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ のいずれかであり，また，これらの点に移動する確率は，それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　点 P が，最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。

(2)　点 P が，最初から 6 秒後に原点 O にある確率を求めよ。　　[2017]

解答例

(1)　点 P が $(m,\ n)$ にあるとき，1 秒後に $(m+1,\ n)$，$(m,\ n+1)$，$(m-1,\ n)$，$(m,\ n-1)$ に移る事象を，それぞれ $A,\ B,\ C,\ D$ とする。そして，6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り，A, B, C, D がそれぞれ a 回，b 回，c 回，d 回起こったとすると，

$$a+b+c+d=6\cdots\cdots\cdots①,\ \ b-d=a-c\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+d=3$，$b+c=3$

つまり，A または D が 3 回，B または C が 3 回起こったことより，その確率は，

$$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

(2)　(1)と同様に設定して，6 秒後に O から O に移る条件は，

$$a+b+c+d=6\cdots\cdots\cdots③,\ \ a-c=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ b-d=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$a+b=3$，$c=a$，$d=b$

これより，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，

$$(0,\ 3,\ 0,\ 3),\ (1,\ 2,\ 1,\ 2),\ (2,\ 1,\ 2,\ 1),\ (3,\ 0,\ 3,\ 0)$$

すると，求める確率は，

$$\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^6+\frac{6!}{3!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^6=400\cdot\frac{1}{4^6}=\frac{25}{256}$$

コメント

ランダムウォークのついての標準的な問題です。なお，(1)でも(2)と同じように，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組を求めて，確率を計算しても構いません。

問　題

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝したとき，A の最後の対戦相手が B である条件付き確率を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　n 試合目 $(n \geqq 2)$ で A が優勝する場合，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。そこで，各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと，

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で，n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で，n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより，n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると，

$$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \ (n \text{ が } 3 \text{ の倍数でないとき}),\ \ p(n) = 0 \ (n \text{ が } 3 \text{ の倍数のとき})$$

(2)　l を正の整数とするとき，(1)より，

(i)　n を 3 で割った余りが 2 $(n = 3l-1)$ のとき　$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 $(n = 3l+1)$ のとき　$p(n) = \left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii)　n を 3 で割った余りが 0 $(n = 3l)$ のとき　$p(n) = 0$

さて，m を正の整数とするとき，総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m，そのとき A の最後の対戦相手が B である確率 $P_m{}'$ とすると，$m \geqq 2$ のとき，

$$P_m = \sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1} + \sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1} + 0 = 2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^{l} + \frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}$$

$$= 2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}$$

$$=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^m\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$

$$P_m{}'=\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}=\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{1}{14}-\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$

ここで，$m=1$ をあてはめると，$P_1=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{4}$，$P_1{}'=\frac{1}{14}-\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^3=0$ となり，ともに成立している。

したがって, A が優勝したとき, A の最後の対戦相手が B である条件付き確率は,

$$\frac{P_m{}'}{P_m}=\frac{\frac{1}{14}-\frac{4}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}=\frac{1-8\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}{5-12\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}}=\frac{2^{3m}-8}{5\cdot 2^{3m}-12}$$

コメント

巴戦を題材にした有名問題です。現行課程で復活した条件付き確率が絡んでいます。

問　題

どの目も出る確率が$\dfrac{1}{6}$のさいころを 1 つ用意し, 次のように左から順に文字を書く。さいころを投げ, 出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 AA を書き, 4 のときは文字 B を, 5 のときは文字 C を, 6 のときは文字 D を書く。さらに繰り返しさいころを投げ, 同じ規則に従って, AA, B, C, D をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば, さいころを 5 回投げ, その出た目が順に 2, 5, 6, 3, 4 であったとすると, 得られる文字列は, AACDAAB となる。このとき, 左から 4 番目の文字は D, 5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回さいころを投げ, 文字列を作るとき, 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回さいころを投げ, 文字列を作るとき, 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で, かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。[2015]

解答例

(1) まず, 文字列 AA について, 左右を区別し A_1A_2 とする。

さて, さいころを投げ, 出た目が 1, 2, 3 のときは文字列 A_1A_2, 4 のときは文字 B, 5 のときは文字 C, 6 のときは文字 D を, すでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして, n 回さいころを投げ, 文字列の左から n 番目の文字が A_1, A_2 の確率をそれぞれ p_n, q_n, そして B または C または D である確率を r_n とおく。

すると, $p_1=r_1=\dfrac{1}{2}$, $q_1=0$ で,

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ q_{n+1}=p_n\cdots\cdots\cdots②$$

①より, $p_{n+1}=\dfrac{1}{2}(q_n+r_n)=\dfrac{1}{2}(1-p_n)=-\dfrac{1}{2}p_n+\dfrac{1}{2}$ となり,

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right),\ \ p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって, $p_n=\dfrac{1}{3}+\dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり, ②より, $n\geqq 2$ において,

$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なお, この式は, $n=1$ のときも満たしている。

以上より, 文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 p_n+q_n は,

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき, 文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で, かつ n 番目の文字が B となるのは, 文字列が A_2B となる場合より, その確率は,

$$q_{n-1}\times\frac{1}{6}=\frac{1}{6}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=\frac{1}{18}+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

コメント

直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったんAA の文字列について左側と右側を区別し, B または C または D をまとめ, 3 つの状態に分けて考えたわけです。

問　題

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m}p_n$ を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　はじめ袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているので，1 回目に取り出した球が赤球である確率 p_1 は，$p_1=\dfrac{1}{a+3}$ である。

次に，2 回目に取り出した球が赤球であるのは，1 回目に取り出した球が白球のときだけなので，その確率 p_2 は，$p_2=\dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1}=\dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$ である。

(2)　n を自然数として，$n+1$ 回目に取り出した球が赤球であるのは，n 回目に取り出した球が白球のときだけなので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{a+1}(1-p_n),\quad p_{n+1}=-\frac{1}{a+1}p_n+\frac{1}{a+1}$$

変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{a+2}=-\dfrac{1}{a+1}\Big(p_n-\dfrac{1}{a+2}\Big)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{a+2}=\Big(p_1-\frac{1}{a+2}\Big)\Big(-\frac{1}{a+1}\Big)^{n-1}=-\frac{1}{(a+3)(a+2)}\Big(-\frac{1}{a+1}\Big)^{n-1}$$

よって，$p_n=-\dfrac{1}{(a+3)(a+2)}\Big(-\dfrac{1}{a+1}\Big)^{n-1}+\dfrac{1}{a+2}$ である。

(3)　(2)より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{m} p_n = -\frac{1}{(a+3)(a+2)}\cdot\frac{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m}{1+\frac{1}{a+1}}+\frac{m}{a+2}$

$$= -\frac{a+1}{(a+3)(a+2)^2}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}+\frac{m}{a+2}$$

ここで，$a \geqq 1$ より，$-\frac{1}{2} \leqq -\frac{1}{a+1} < 0$ となるので，

$$\lim_{m\to\infty}\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m} p_n = \lim_{m\to\infty}\left[\frac{-1}{m}\cdot\frac{a+1}{(a+3)(a+2)^2}\left\{1-\left(-\frac{1}{a+1}\right)^m\right\}+\frac{1}{a+2}\right] = \frac{1}{a+2}$$

コメント

確率と漸化式についての頻出題です。与えられた条件が扱いやすいので，すんなりと立式できます。なお，(2)までは文理共通です。

問　題

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

(1)　A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p(n)$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　A が n 回目にコインを投げ，それが 2 回目の表である場合を考える。

(i)　B が得点を獲得せず，A が勝利するとき

まず，A が 1 点目を獲得するのは 1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-1$回目のいずれかであり，2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は偶数となり 1 点目の獲得回の選び方が$\dfrac{n}{2}$通りより，この確率は，

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(ii)　A, B の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

A, B の順に 1 点ずつを獲得するのは，1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-2$ 回目から 2 回を選び，前を A が 1 点目を獲得する回，後を B が 1 点目を獲得する回に対応させる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は奇数となり 1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は，

$${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

これは，$n=1,\ 3$ のときも成立している。

(iii)　B, A の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

B, A の順に 1 点ずつを獲得するのは, 2 回目, 4 回目, 6 回目, …, $n-1$ 回目から 2 回を選び, 前を B が 1 点目を獲得する回, 後を A が 1 点目を獲得する回に対応させる。また, A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると n は奇数となり 1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は,

$$ {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} $$

これは, $n=1$, 3 のときも成立している。

以上より, A の勝利となる確率 $p(n)$ は, n を偶奇に分けて,

$$p(n)=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad(n\text{ が偶数})$$

$$p(n)=2\times(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\quad(n\text{ が奇数})$$

(2) k を自然数とすると, (1)より，$p(2k)=2k\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=k\left(\frac{1}{4}\right)^k$

$$p(2k-1)=(2k-2)(2k-4)\left(\frac{1}{2}\right)^{2k+1}=2(k-1)(k-2)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

さて，$S_n=\sum_{k=1}^{n}p(k)$ とおくと,

$$S_{2n}=\sum_{k=1}^{n}\{p(2k)+p(2k-1)\}=\sum_{k=1}^{n}(2k^2-5k+4)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

ここで, a, b, c を定数として, 次式が成り立つようにこれらの値を求める。

$$(2k^2-5k+4)\left(\frac{1}{4}\right)^k=\{a(k+1)^2+b(k+1)+c\}\left(\frac{1}{4}\right)^{k+1}-(ak^2+bk+c)\left(\frac{1}{4}\right)^k$$

係数を比較すると,

$$a-4a=8\,,\ 2a+b-4b=-20\,,\ a+b+c-4c=16$$

これより，$a=-\frac{8}{3}$，$b=\frac{44}{9}$，$c=-\frac{124}{27}$ となり,

$$S_{2n}=\{a(n+1)^2+b(n+1)+c\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1}-(a+b+c)\left(\frac{1}{4}\right)^1$$

$$\to-\frac{1}{4}(a+b+c)=-\frac{1}{4}\left(-\frac{8}{3}+\frac{44}{9}-\frac{124}{27}\right)=\frac{16}{27}\quad(n\to\infty)$$

$$S_{2n+1}=S_{2n}+p(2n+1)=S_{2n}+2n(2n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n+3}\to\frac{16}{27}\quad(n\to\infty)$$

以上より，$\sum_{n=1}^{\infty}p(n)=\frac{16}{27}$ である。

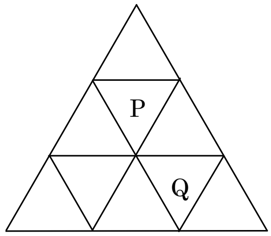
コメント

問題の設定状況を把握するのにたいへん時間がかかってしまい, 難度がかなり高く感じられました。また, (2)はいろいろな解法があるものの, どれをとっても計算量が半端ではありません。

問　題

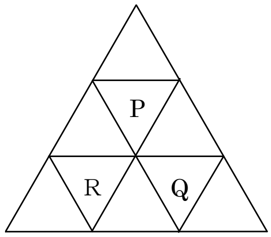
図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。

[2012]



解答例

まず，部屋 R を右図のように決め，球が n 秒後に P, Q, R にある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。



さて，球は P より出発し，1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後には P, Q, R 以外の部屋，偶数秒後には P, Q, R のいずれかの部屋にある。

これより，k を 1 以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\cdots\cdots\cdots①,\quad p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が $2k$ 秒後に部屋 P, Q, R のいずれかにあり，$2k+2$ 秒後に部屋 Q に移動する確率は，

(i)　部屋 P にあるとき　P→Q と移動する確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(ii)　部屋 Q にあるとき　Q→Q と移動する確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}\times1=\dfrac{2}{3}$

(iii) 部屋 R にあるとき　R→Q と移動する確率は，$\dfrac{1}{3}\times\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\dfrac{1}{6}p_{2k}+\dfrac{2}{3}q_{2k}+\dfrac{1}{6}r_{2k}\cdots\cdots\cdots③$

また，Q, R の対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$ なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\cdots\cdots\cdots④,\quad q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\dfrac{1}{6}(1-2q_{2k})+\dfrac{5}{6}q_{2k}=\dfrac{1}{2}q_{2k}+\dfrac{1}{6}$ となり，$q_0=0$ に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\Big(q_{2k}-\frac{1}{3}\Big),\quad q_{2k}-\frac{1}{3}=\Big(q_0-\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^k=-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k$$

よって，$q_{2k}=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^k\cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥から，n が奇数のとき $q_n=0$，n が偶数のとき $q_n=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\Big(\dfrac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}}$ となる。

コメント

確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

問　題

2 つの箱 L と R, ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率$\frac{1}{2}$で出るコイン 1 枚を用意する。xを 0 以上 30 以下の整数とする。L にx個, R に$30-x$個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$個のボールを移す。ただし, $0 \leqq z \leqq 15$のとき$K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$のとき$K(z)=30-z$とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を$P_m(x)$とする。たとえば$P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$となる。以下の問(1), (2), (3)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$のとき, xに対してうまくyを選び, $P_m(x)$を$P_{m-1}(y)$で表せ。

(2)　nを自然数とするとき, $P_{2n}(10)$を求めよ。

(3)　nを自然数とするとき, $P_{4n}(6)$を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　箱 L, R に入っているボールの個数が, それぞれz, $30-z$であるとき, 操作(#)を行うと, コインの表, 裏の出方によって, 箱 L に入っているボールの個数は次のように変化する。

(i)　$0 \leqq z \leqq 15$のとき

表が出ると$z \to z+z=2z$, 裏が出ると$z \to z-z=0$

(ii)　$16 \leqq z \leqq 30$のとき

表が出ると$z \to z+(30-z)=30$, 裏が出ると$z \to z-(30-z)=2z-30$

これより, $z=0$のとき操作(#)を行っても, 箱 L のボールの個数には変化がない。同様に, $z=30$のとき操作(#)を行っても, 箱 L のボールの個数には変化がない。

さて, m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を$P_m(x)$とすると, コインの表, 裏の出る確率が, ともに$\frac{1}{2}$であることより,

(i)　$0 \leqq x \leqq 15$のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$

(ii)　$16 \leqq x \leqq 30$のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\frac{1}{2}$

(2)　(1)より, $P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)$, $P_{2n-1}(20)=\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{2}$となり,

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{4}$$

これより, $P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\frac{1}{3}\right\}$となり,

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，$P_{2n}(10)=\dfrac{1}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{4}\right)^n$

(3)　(2)と同様にして，

$$P_{4n}(6)=\frac{1}{2}P_{4n-1}(12)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}P_{4n-2}(24)=\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-3}(18)+\frac{1}{2}\right\}$$
$$=\frac{1}{8}\left\{\frac{1}{2}P_{4n-4}(6)+\frac{1}{2}\right\}+\frac{1}{8}=\frac{1}{16}P_{4n-4}(6)+\frac{3}{16}$$

これより，$P_{4n}(6)-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{16}\left\{P_{4n-4}(6)-\dfrac{1}{5}\right\}$となり，$P_4(6)=\dfrac{1}{8}\cdot\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{3}{16}$から，

$$P_{4n}(6)-\frac{1}{5}=\left\{P_4(6)-\frac{1}{5}\right\}\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=\left(\frac{3}{16}-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^n$$

よって，$P_{4n}(6)=\dfrac{1}{5}-\dfrac{1}{5}\left(\dfrac{1}{16}\right)^n$

コメント

まとめると，上のような解になりますが，ここまで至る道は平坦なものではありません。最も要求されるのは，具体例を考えながら，題意を把握する読解力です。

問　題

スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率$\dfrac{1}{4}$で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ, L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\dfrac{P_3}{P_1}$ を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　まず，操作(A)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，いずれかの色の玉が 2 回出て，他の色の玉は 1 回ずつ出る場合より，その確率は,

$$ {}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{4^3} $$

また，同様に，操作(B)を 5 回行い，R に 4 色すべての玉が入っている確率も$\dfrac{15}{4^3}$から，操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行ったとき，L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 は,

$$ P_1=\frac{15}{4^3}\times\frac{15}{4^3}=\frac{225}{4096} $$

(2)　操作(C)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っているのは，操作(A)を 5 回行い，L に 4 色すべての玉が入っている場合より，その確率 P_2 は,

$$ P_2=\frac{15}{4^3}=\frac{15}{64} $$

(3)　操作(C)を 10 回行い，L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは，操作(A)を 10 回行い, 4 色すべての玉が少なくとも 2 回ずつ出る場合である。

(i)　いずれかの色の玉が 4 回出て，他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$$ {}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8} $$

(ii)　2 つの色の玉が 3 回ずつ出て，他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$${}_4\mathrm{C}_2\cdot\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}$$

(i)(ii)より，$P_3=\dfrac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}+\dfrac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}=\dfrac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}$ となり，

$$\frac{P_3}{P_1}=\frac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}\cdot\frac{4^6}{3^2\cdot5^2}=\frac{63}{16}$$

コメント

どういう訳か，最初は余事象で考えようとして深みにはまってしまいました。考え直した普通の解を上に記しました。なお，(2)は(3)の誘導でしょうが，不安になってしまう設問です。

問　題

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち k 枚のカードを手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの k 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{k}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

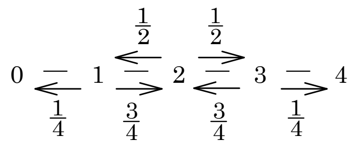
以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　最初に白 2 枚，黒 2 枚，合計 4 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　最初に白 3 枚，黒 3 枚，合計 6 枚のカードをもっているとき，操作(A)を n 回繰り返した後に初めて, 6 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　操作(A)を n 回繰り返した後，白が 1 枚または 3 枚の確率を a_n，白が 2 枚の確率を b_n とおくと，



$$a_{n+1}=b_n\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b_{n+1}=\dfrac{3}{4}b_{n-1}$

ここで，条件より，$b_0=1$，$b_1=0$ なので,

(i)　n が奇数のとき，$b_n=0$

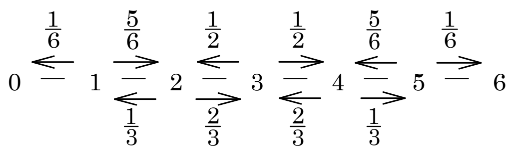
(ii)　n が偶数のとき，$b_n=b_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて，操作(A)を n 回繰り返した後, n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は, $n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{4}a_{n-1}=\dfrac{1}{4}b_{n-2}$ から,

(i)　n が奇数のとき，$\dfrac{1}{4}b_{n-2}=0$（$n=1$ のときも成立している）

(ii)　n が偶数のとき，$\dfrac{1}{4}b_{n-2}=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後，白が 1 枚または 5 枚の確率を a_n，白が 2 枚または 4 枚の確率を b_n，白が 3 枚の確率を c_n とおくと，



$$a_{n+1}=\frac{1}{3}b_n\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{5}{6}a_n+c_n\ \cdots\cdots\cdots②,\quad c_{n+1}=\frac{2}{3}b_n\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③を②に代入すると，$b_{n+1}=\dfrac{5}{18}b_{n-1}+\dfrac{2}{3}b_{n-1}=\dfrac{17}{18}b_{n-1}$

ここで，条件より，$b_0=0$，$b_1=1$ なので,

(i)　n が偶数のとき，$b_n = 0$

(ii)　n が奇数のとき，$b_n = b_1\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}} = \left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

さて，操作(A)を n 回繰り返した後, n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は, $n \geqq 2$ のとき，$\frac{1}{6}a_{n-1} = \frac{1}{18}b_{n-2}$ から,

(i)　n が偶数のとき，$\frac{1}{18}b_{n-2} = 0$

(ii)　n が奇数のとき，$\frac{1}{18}b_{n-2} = \frac{1}{18}\left(\frac{17}{18}\right)^{\frac{n-3}{2}}$　($n \geqq 3$)

なお，$n = 1$ のとき, 4 枚とも同じ色になる確率は, 0 である。

コメント

(2)も(1)と同じ方法で解いています。

問　題

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率 p_m を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。[2007]

解答例

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となるのは, 最初 $n-m-1$ 回は任意, 次の 1 回が裏で, その後 m 回続けて表が出る場合より, その確率 p_m は,

$$p_m=(1-p)p^m \quad (0\leqq m<n)$$

ただし, $m=n$ のとき, $p_m=p^m$ である。

(2) 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は, (1)より,

(i) $0\leqq m<n$ のとき $\quad q_m=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k=(1-p)\cdot\dfrac{1-p^{m+1}}{1-p}=1-p^{m+1}$

(ii) $m=n$ のとき $\quad q_m=\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k+p^m=(1-p)\cdot\dfrac{1-p^m}{1-p}+p^m=1$

(3) 2 度のゲームにおいて, 高い方のブロックの高さが m であるのは, 1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下, または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m, または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は, (1)(2)より,

(i) $0\leqq m<n$ のとき

$$\begin{aligned}r_m&=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+p_m^{\ 2}=p_m(2q_{m-1}+p_m)\\&=(1-p)p^m(2-2p^m+p^m-p^{m+1})=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})\end{aligned}$$

(ii) $m=n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+p_m^{\ 2}=2p^m(1-p^m)+p^{2m}=2p^m-p^{2m}$$

コメント

過去を清算できるタイプですが, $m=n$ の場合は特別に考えなくてはいけません。

問　題

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　$n\geqq 3$ のとき，P_n を p と n で表せ。　[2006]

解答例

(1)　×が 3 個出る前に○が 2 個出る場合は，×○○，××○○，×○×○のいずれかなので，その確率 P_2 は，

$$P_2=(1-p)p+p(1-p)p+(1-p)^3=(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=(1-p)(1-p+2p^2)$$

(2)　×が 3 個出る前に○が n 個出る場合は，

(i)　最初の×の後，○が続けて n 個出るとき

このときの確率は，$(1-p)p^{n-1}$ である。

(ii)　最初×が 2 個出た後，○が続けて n 個出るとき

このときの確率は，$p(1-p)p^{n-1}=(1-p)p^n$ である。

(iii)　最初の×の後，○が続けて k 個，次に×さらに○が続けて $n-k$ 個出るとき

このときの確率は，$1\leqq k\leqq n-1$ として，

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2p^{n-k-1}=(1-p)^3p^{n-2}$$

(i)〜(iii)より，×が 3 個出る前に○が n 個出る確率 P_n は，

$$P_n=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-1}(1+p)+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{p(1+p)+(n-1)(1-p)^2\}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{np^2-(2n-3)p+n-1\}$$

コメント

(1)で具体例を練習し，(2)で一般化する問題です。注意深く考えていけば，完答できます。

問　題

N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, …, N が書かれたカードを 1 枚ずつ, 計 N 枚用意し, 甲, 乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は, そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は, $b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iii)　$a+b\leqq N$ の場合は, 乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iv)　$a+b\geqq c$ の場合は, 乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし, それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で, 甲にとってどちらの選択が有利であるかを, a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし, 各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

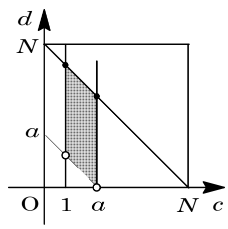
解答例

(1)　まず, $b=0$ のとき, $a+b>N$ となることはありえないので, 乙が勝つのは次の 2 通りとなる。

(i)　$c>a$ のとき　$a<c\leqq N$ より, 条件を満たす整数 c は $N-a$ 個存在するので, このときの乙の勝つ確率は, $\dfrac{N-a}{N}$ である。

(ii)　$c\leqq a$ かつ $a<c+d\leqq N$ のとき

条件を満たす整数 $(c,\ d)$ は, 右図の網点部の格子点が対応し, その個数が $a(N-a)$ より, このときの乙の勝つ確率は, $\dfrac{a(N-a)}{N^2}$ である。



(i)(ii)より, 乙が勝つ確率は, $\dfrac{N-a}{N}+\dfrac{a(N-a)}{N^2}=\dfrac{N^2-a^2}{N^2}$

よって, 甲が勝つ確率は, $1-\dfrac{N^2-a^2}{N^2}=\dfrac{a^2}{N^2}$ である。

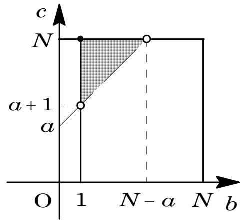
(2)　$b \geqq 1$ のとき，乙が勝つ場合は次の 3 通りである。

(i)　$a+b>N$ のとき

$N-a<b \leqq N$ より，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{N-(N-a)}{N}=\dfrac{a}{N}$ である。

(ii)　$a+b \leqq N$ かつ $a+b<c$ のとき

条件を満たす整数$(b,\ c)$は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は，



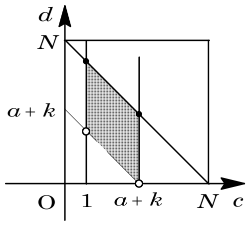
$$1+2+\cdots\cdots+(N-a-1)=\frac{1}{2}(N-a-1)(N-a)$$

よって，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}$

(iii)　$a+b \leqq N$ かつ $a+b \geqq c$ かつ $a+b<c+d \leqq N$ のとき

まず b を固定し，$b=k\ (1 \leqq k \leqq N-a)$ における乙の勝つ確率を p_k とおく。

条件を満たす整数$(c,\ d)$は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は$(a+k)(N-a-k)$となるので，



$$p_k=\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}$$

ここで，甲が数字 k の書かれたカードを引く確率はつねに $\dfrac{1}{N}$ なので，このとき乙の勝つ確率 P は，

$$P=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}p_k=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}=\frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N-a}(a+k)(N-a-k)$$

ここで，$a+k=l$ とおくと，

$$P=\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l(N-l)=\frac{1}{N^2}\sum_{l=a+1}^{N}l-\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l^2$$

$$=\frac{(N+a+1)(N-a)}{2N^2}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

(i)(ii)(iii)より，乙が勝つ確率は，

$$\frac{a}{N}+\frac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}+P$$

$$=\frac{a}{N}+\frac{N-a}{N}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

$$=1-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

よって，甲が勝つ確率は，$\dfrac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$ である。

コメント

問題文で乙の勝つ場合が設定されているので，(1)(2)とも乙が勝つ事象の余事象として，甲の勝つ確率を求めました。格子点の個数を対応させ，朴訥に解いてみました。

問　題

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

解答例

(1)　正方形の 3 枚の板を，左から A，B，C とする。3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となるのは 3 つの場合があり，確率はそれぞれ次のようになる。

(i)　A を 3 回裏返す場合　$\left(\frac{1}{3}\right)^3=\frac{1}{27}$

(ii)　A を 1 回裏返し B を 2 回裏返す場合　${}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(iii)　A を 1 回裏返し C を 2 回裏返す場合　${}_3C_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^2=\frac{1}{9}$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\frac{1}{27}+\frac{1}{9}+\frac{1}{9}=\frac{7}{27}$ である。

(2)　3 枚の板の両端の色に注目して，n 回の操作の結果，A と C の板が「白・白」となる確率を p_n，「白・黒」または「黒・白」となる確率を q_n，「黒・黒」となる確率を r_n おく。このとき，$p_1=\frac{1}{3}$，$q_1=\frac{2}{3}$，$r_1=0$ である。

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$p_n+q_n+r_n=1$ より，②から，$q_{n+1}=\frac{2}{3}(1-q_n)+\frac{1}{3}q_n=-\frac{1}{3}q_n+\frac{2}{3}$

$$q_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(q_n-\frac{1}{2}\right),\ \ q_n-\frac{1}{2}=\left(\frac{2}{3}-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$q_n=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots③$

①③より，$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{3}\left\{\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\right\}=\frac{1}{3}p_n-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots④$

④を満たす１つの数列を，α，βを定数として，$p_n=\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\beta$とおくと，

$$\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}+\beta=\frac{1}{3}\left\{\alpha\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\beta\right\}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{6}\cdots\cdots\cdots⑤$$

すると，$-\frac{1}{3}\alpha=\frac{1}{3}\alpha-\frac{1}{6}$，$\beta=\frac{1}{3}\beta+\frac{1}{6}$より，$\alpha=\beta=\frac{1}{4}$となる。

④⑤より，$p_{n+1}-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n+1}-\frac{1}{4}=\frac{1}{3}\left\{p_n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}\right\}$

$$p_n-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n-\frac{1}{4}=\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{12}-\frac{1}{4}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

以上より，求める両端が白の確率は，$p_n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$

コメント

確率の計算に，漸化式を利用する頻出問題です。なお，漸化式の解き方の詳細については，サイトの「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

さいころを n 回振り，第 1 回目から第 n 回目までに出たさいころの目の数 n 個の積を X_n とする。

(1)　X_n が 5 で割り切れる確率を求めよ。

(2)　X_n が 4 で割り切れる確率を求めよ。

(3)　X_n が 20 で割り切れる確率を p_n とおく。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)$ を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

解答例

(1)　X_n が 5 で割り切れる事象を A とすると，$\overline{A}$ は X_n が 5 で割り切れない，すなわち第 1 回目から第 n 回目まで 5 以外の目が出る事象を表すので，$P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ となる。

よって，$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$

(2)　X_n が 4 で割り切れる事象を B とすると，$\overline{B}$ は X_n が 4 で割り切れない事象を表し，第 1 回目から第 n 回目まで奇数の目が n 回出るか，奇数の目が $n-1$ 回出て残り 1 回が 2 または 6 の目が出る場合を意味する。

$$P(\overline{B})=\left(\frac{1}{2}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$P(B)=1-P(\overline{B})=1-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$

(3)　X_n が 20 で割り切れる事象は $A\cap B$ なので，

$$\begin{aligned}p_n&=P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})\\&=1-\left\{P(\overline{A})+P(\overline{B})-P(\overline{A}\cap\overline{B})\right\}=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})\end{aligned}$$

さて，$\overline{A}\cap\overline{B}$ は X_n が 5 でも 4 でも割り切れない事象を表し，第 1 回目から第 n 回目まで 1 または 3 の目が n 回出るか，1 または 3 の目が $n-1$ 回出て残り 1 回が 2 または 6 の目が出る場合を意味する。

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{1}{3}\right)^n+{}_n\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，
$$\begin{aligned}p_n&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{2}\right)^n-\frac{n}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{3}\right)^n+\frac{n}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}\\&=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n+(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}1-p_n&=\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{1}{2}\right)^n-(1+n)\left(\frac{1}{3}\right)^n\\&=\left(\frac{5}{6}\right)^n\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}\end{aligned}$$

$$\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\frac{1}{n}\log\left(\frac{5}{6}\right)^n+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

$$=\log\frac{5}{6}+\frac{1}{n}\log\left\{1+\left(1+\frac{2}{3}n\right)\left(\frac{3}{5}\right)^n-(1+n)\left(\frac{2}{5}\right)^n\right\}$$

ここで，一般的に$-1<r<1$のとき$\lim_{n\to\infty}r^n=0$，$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$なので，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(1-p_n)=\log\frac{5}{6}$$

コメント

有名問題です。最後の$\lim_{n\to\infty}nr^n=0$は，証明を省略して使っています。

問　題

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2)　X_n を求めよ。

(3)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りについての a の値の平均を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　最初，2 点 A, B はともに原点にあるので，n 回の試行の後，2 点 A, B の距離は 1 以下である。すなわち，$a=b$ または $a=b\pm1$ となる。

ここで，n 回の試行の後，$a=b$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表，裏のいずれでも $a\neq b$ となる。また，n 回の試行の後，$a=b+1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが裏のとき $a=b$ となり，n 回の試行の後，$a=b-1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表のとき $a=b$ となる。

条件より，n 回の試行の後 $a=b$ となる場合の数が X_n，$a\neq b$ となる場合の数が 2^n-X_n より，$X_{n+1}=2^n-X_n$ となる。

(2)　1 回目の試行の後, A, B の位置は $(a,\ b)=(1,\ 0),\ (0,\ 1)$ より $X_1=0$ となる。

(1)より，$X_{n+1}-\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}=-\left(X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n\right)$

$$X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n=\left(X_1-\frac{1}{3}\cdot2^1\right)(-1)^{n-1}=-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}=\frac{2}{3}(-1)^n$$

よって，$X_n=\frac{1}{3}\cdot2^n+\frac{2}{3}(-1)^n$

(3)　n 回の試行の後，$a=b$ となる確率を p_n とすると，$p_n=\dfrac{X_n}{2^n}=\dfrac{1}{3}+\dfrac{2}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n$

すると，$a=b+1$，$a=b-1$ となる確率は, A と B の動きが対等なので，それぞれ $\frac{1}{2}(1-p_n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n$ となる。

ここで，n 回コインを投げたときの a の平均を E_n とおくと，$n+1$ 回目に表が出

た場合はつねにAを1動かし，$n+1$回目に裏が出た場合はn回目に$a=b-1$であればAを1動かし，$a=b$または$a=b+1$であれば動かさないので,

$$E_{n+1}=\frac{1}{2}(E_n+1)+\frac{1}{2}\left\{\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n\right)(E_n+1)+\left(p_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n\right)E_n\right\}$$

$$=\frac{1}{2}(E_n+1)+\frac{1}{2}\left(E_n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}p_n\right)=E_n+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}p_n$$

$$=E_n+\frac{3}{4}-\frac{1}{4}\left\{\frac{1}{3}+\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n\right\}=E_n+\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$$

ここで，$E_1=\frac{1}{2}\times 1+\frac{1}{2}\times 0=\frac{1}{2}$なので, $n\geqq 2$において,

$$E_n=\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n-1}\left\{\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^k\right\}=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}(n-1)-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

$$=\frac{2}{3}n+\frac{1}{9}\left(-\frac{1}{2}\right)^n-\frac{1}{9}$$（この値は$n=1$のときも満たす）

コメント

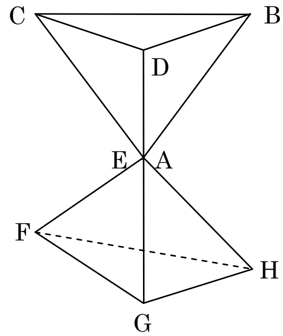
コインの表裏がどんな出方をしても，A, Bの距離の差は，つねに1以下です。この点を見つけるのがポイントとなっています。なお, (1)(2)は文理共通です。

問　題

p を $0<p<1$ を満たす実数とする。

(1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 p で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2)　(1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のようにに頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。　[1999]



解答例

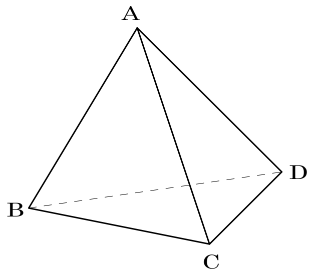
(1)　辺 AB が電流を通すかどうかで場合分けをする。

(i)　辺 AB が電流を通すとき

点 A から B に電流が流れる確率は p である。

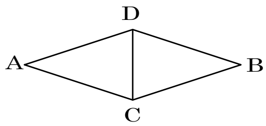
(ii)　辺 AB が電流を通さないとき

点 A から B に電流が流れない確率は $1-p$ である。



(ii-i)　辺 CD が電流を通さないとき

辺 CD が電流を通さない確率は $1-p$ で，そのとき点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD と DB がともに電流を通すか，または辺 AC と CB がともに電流を通す場合である。その確率は，



$$(1-p)(p^2+p^2-p^4)=p^2(1-p)(2-p^2)$$

(ii-ii)　辺 CD が電流を通すとき

辺 CD が電流を通す確率は p で，そのとき点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD, AC の少なくとも一方が電流を通し，しかも辺 DB, CB の少なくとも一方が電流を通す場合である。その確率は，

$$p\left\{(p+p-p^2)\times(p+p-p^2)\right\}=p^3(2-p)^2$$

(ii-i)(ii-ii)より，点 A から B に電流が流れる確率は，

$$(1-p)\left\{p^2(1-p)(2-p^2)+p^3(2-p)^2\right\}=p^2(1-p)(2p^3-5p^2+2p+2)$$

(i)(ii)より，求める点 A から B に電流が流れる確率は，

$$p+p^2(1-p)(2p^3-5p^2+2p+2)=-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p$$

(2)　(1)より点 B から A に電流が流れる確率は $-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p$ で，同様に考えると，点 E から F に電流が流れる確率も同じである。

よって，点 B から F に電流が流れる確率は$(-2p^6+7p^5-7p^4+2p^2+p)^2$となる。

コメント

点 A から B に電流が流れる確率を求めようか，それとも流れない確率を求めようかと迷ってしまいました。結局，前者の方で解を考えましたが，辺 AB の状態，さらに辺 CD の状態で場合分けが必要でした。

問　題

n と k を正の整数とし，$P(x)$ を次数が n 以上の整式とする。整式$(1+x)^k P(x)$の n 次以下の項の係数がすべて整数ならば，$P(x)$ の n 次以下の項の係数は，すべて整数であることを示せ。ただし，定数項については，項それ自身を係数とみなす。

[2007]

解答例

まず，$(1+x)^k$ を二項展開すると，

$$(1+x)^k = {}_k\mathrm{C}_0 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + {}_k\mathrm{C}_k x^k = 1 + {}_k\mathrm{C}_1 x + {}_k\mathrm{C}_2 x^2 + \cdots + x^k$$

また, $m \geqq n$ として，整式$P(x)$の次数を m とおき，

$$P(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \cdots + a_n x^n + \cdots + a_m x^m$$

これより，$(1+x)^k P(x)$は, $m+k$ 次の整式となり，

$$(1+x)^k P(x) = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \cdots + b_n x^n + \cdots + b_{m+k} x^{m+k}$$

係数を比べると，

$$b_0 = a_0,\ b_1 = a_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ b_2 = a_2 + a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$b_n = a_n + a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 + a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 + \cdots + a_0\,{}_k\mathrm{C}_n \cdots\cdots\cdots(*)$$

ただし, $k < i$ のとき ${}_k\mathrm{C}_i = 0$ とする。

ここで，$(1+x)^k P(x)$の n 次以下の項の係数b_0，b_1，b_2，…，b_n がすべて整数であるとき, $(*)$より，

$$a_0 = b_0,\ a_1 = b_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_1,\ a_2 = b_2 - a_1\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_0\,{}_k\mathrm{C}_2,\ \cdots\cdots,$$

$$a_n = b_n - a_{n-1}\,{}_k\mathrm{C}_1 - a_{n-2}\,{}_k\mathrm{C}_2 - \cdots - a_0\,{}_k\mathrm{C}_n$$

これより，a_0，a_1，a_2，…，a_n はすべて整数となる。

よって，$P(x)$ の n 次以下の項の係数はすべて整数である。

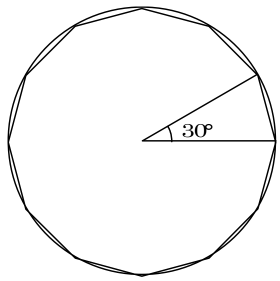
コメント

上の解では簡単に記していますが，証明の構図は「a_0 が整数→ a_1 が整数→ a_2 が整数→ … → a_n が整数」です。

問　題

円周率が 3.05 より大きいことを証明せよ。　[2003]

解答例



半径 1 の円に正十二角形を内接させ，正十二角形の 1 辺の長さを l をすると，余弦定理より，

$$l^2=1^2+1^2-2\cdot1\cdot1\cdot\cos30^\circ=2-\sqrt{3}\ ,\ \ l=\sqrt{2-\sqrt{3}}$$

さて，明らかに正十二角形の周の長さは，円周の長さ 2π より短いので，

$$12l<2\pi\ ,\ \ 6\sqrt{2-\sqrt{3}}<\pi\ ,\ \ 36(2-\sqrt{3})<\pi^2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$1.73^2<3<1.74^2$ から $1.73<\sqrt{3}<1.74$ となるので，

$$36(2-\sqrt{3})>9.36>9.3025=3.05^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より $\pi^2>3.05^2$ となり，円周率 π は 3.05 より大きい。

コメント

1 年ほど前，「円周率が 3 ならば円と正六角形は同じなると塾の先生が言っていた」と子供が話していたことを思い出しました。正八角形を用いても証明はたぶんできるだろうという気がしましたが，安全策をとり正十二角形を用いました。

問　題

容量 1 リットルの m 個のビーカー（ガラス容器）に水が入っている。$m \geqq 4$ で空のビーカーはない。入っている水の総量は 1 リットルである。また x リットルの水が入っているビーカーがただ 1 つあり，その他のビーカーには x リットル未満の水しか入っていない。このとき，水の入っているビーカーが 2 個になるまで，次の(a)から(c)までの操作を，順に繰り返し行う。

(a) 入っている水の量が最も少ないビーカーを 1 つ選ぶ。

(b) さらに，残りのビーカーの中から，入っている水の量が最も少ないものを 1 つ選ぶ。

(c) 次に，(a)で選んだビーカーの水を(b)で選んだビーカーにすべて移し，空になったビーカーを取り除く。

この操作の過程で，入っている水の量が最も少ないビーカーの選び方が一通りに決まらないときは，そのうちのいずれも選ばれる可能性があるものとする。

(1) $x<\dfrac{1}{3}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えていることを証明せよ。

(2) $x>\dfrac{2}{5}$ のとき，最初に x リットルの水の入っていたビーカーは，最後まで x リットルの水が入ったままで残ることを証明せよ。　[2001]

解答例

(1) 最初に x リットルの水が入っているビーカーを X_1 とし，最後に 2 個のビーカーが残ったとき，そのうちの 1 つが X_1 で水の量が $x(=x_1)$ リットルのままであると仮定する。

この仮定のもとで，ビーカーが 3 個残ったとき，ビーカーを X_1，X_2，X_3 とする。ここで，X_1 の水の量は x_1 リットルであり，X_2，X_3 の水の量をそれぞれ x_2，x_3 $(x_2 \geqq x_3)$ リットルとおくと，$x_1+x_2+x_3=1$ となる。

すると，$x_1<\dfrac{1}{3}$ より $x_2+x_3>\dfrac{2}{3}$ となり，しかも $x_2 \geqq x_3$ から $2x_2>\dfrac{2}{3}$，$x_2>\dfrac{1}{3}$ であり，このとき最後の操作を行う。

(i) $x_2>x_1>x_3$ のとき

X_3 の水を X_1 に入れ，X_1 の水の量は x リットルより大となる。

(ii) $x_2>x_1=x_3$ のとき

X_1 は取り除かれるか，または X_3 の水を X_1 に入れ，X_1 の水の量は x リットルより大となる。

(iii) $x_2 \geqq x_3 > x_1$ のとき　X_1 は取り除かれる。

以上より，ビーカー X_1 は操作の途中で空になって取り除かれるか，または最後まで残って水の量が増えている。

(2) (1)と同様にして，$m=4$ のとき，4 個のビーカーの水の量を $x = x_1 > x_2 \geqq x_3 \geqq x_4$ とし，題意の操作を行った後，$x_3 + x_4 \geqq x > x_2$ となるとする。

このとき，$1 - x = x_2 + x_3 + x_4 \leqq 3x_2$ より，$x_2 \geqq \dfrac{1-x}{3}$

$$x_3 + x_4 = 1 - x - x_2 \leqq 1 - x - \frac{1-x}{3} = 2 \cdot \frac{1-x}{3}$$

すると，$x - (x_3 + x_4) \geqq x - 2 \cdot \dfrac{1-x}{3} = \dfrac{5x-2}{3}$

ところが，$x > \dfrac{2}{5}$ より $x - (x_3 + x_4) > 0$ となるので，$x_3 + x_4 \geqq x$ となる場合はありえない。よって，残った 3 個のビーカーで水量が最大なのは X_1 である。

同様にして，$m \geqq 5$ のとき，5 個以上のビーカーが残っており，水量が次の関係を満たすときを考える。

$$x = x_1 > x_2 \geqq x_3 \geqq \cdots \geqq x_k \geqq x_{k+1} \ (k \geqq 4)$$

このとき，題意の操作を行った後，$x_k + x_{k+1} \geqq x > \dfrac{2}{5}$ となるとする。

すると，$2x_k \geqq x_k + x_{k+1} > \dfrac{2}{5}$ から $x_k > \dfrac{1}{5}$，すなわち $x_i > \dfrac{1}{5}$ $(2 \leqq i \leqq k)$ より，

$$1 = x + x_2 + x_3 + \cdots + x_k + x_{k+1} > \frac{2}{5} + \frac{1}{5}(k-1) + x_{k+1} = \frac{1}{5}(k+1) + x_{k+1}$$

$k \geqq 4$ より，上式は成立しない。

よって，題意の操作をくり返したとき，残ったビーカーの水量の最大なのは，つねに X_1 である。

以上より，3 個のビーカーが残っているとき X_1 の水量は最大となり，題意の操作を行ってビーカーが 2 個になったとき，ビーカー X_1 は x リットルの水が入ったままで残る。

コメント

考えたとおりに書いた冗長な解ですが，あえてシェイプアップをしていません。しかし，この程度にまとめるのにも，ずいぶん時間がかかってしまいました。

問　題

(1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$, $\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2)　(1)で述べた定義にもとづき，一般角 α, β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

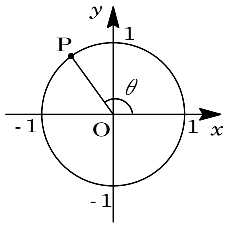
$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。　[1999]

解答例

(1)　単位円周上の点を $\mathrm{P}(x,\ y)$ とし，動径 OP に対して x 軸の正の部分から反時計まわりに測った角を θ とする。

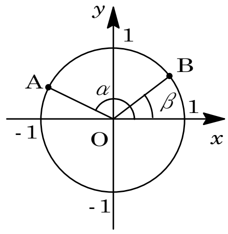
このとき，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$



(2)　単位円周上の 2 点 A, B について, OA, OB に対して x 軸の正の部分から反時計まわりに測った角をそれぞれ α，β とすると，$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$ となる。

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$ より $\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$



このとき, 2 点 A, B を O を中心として時計まわりに β だけ回転すると，点 A は点 $\mathrm{A}'\big(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta)\big)$，点 B は点 $\mathrm{B}'(1,\ 0)$ にうつる。

$$\begin{aligned}\mathrm{A}'\mathrm{B}'^2&=\{\cos(\alpha-\beta)-1\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}=\mathrm{A}'\mathrm{B}'$ より，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta\cdots\cdots\cdots$①

①において β を $-\beta$ に置き換えると

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，単位円周上の点を $\mathrm{Q}(x',\ y')$ とし，動径 OQ に対して x 軸の正の部分から時計まわりに測った角を θ とすると，$x'=\cos(-\theta)$，$y'=\sin(-\theta)$

ここで，点 Q は(1)の点 P と x 軸対称となるので，$x'=x$，$y'=-y$

よって，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$ となり，②より，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

①において α を $90°-\alpha$ に置き換えると

$$\cos\big(90°-(\alpha+\beta)\big)=\cos(90°-\alpha)\cos\beta+\sin(90°-\alpha)\sin\beta\cdots\cdots\cdots③$$

さらに，単位円周上の点を $\mathrm{R}(x'',\ y'')$ とし，動径 OR に対して y 軸の正の部分から時計まわりに測った角を θ とすると，$x''=\cos(90°-\theta)$，$y''=\sin(90°-\theta)$

点 R は(1)の点 P と直線 $y=x$ について対称となるので，$x''=y$，$y''=x$

よって，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ となり，③より，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

コメント

この問題で，三角関数の公式の証明が 30 年前に京大で出たのを思い出しました。

問　題

複素数平面上の原点以外の点zに対して，$w=\dfrac{1}{z}$とする。

(1)　αを 0 でない複素数とし，点αと原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線をLとする。点zが直線L上を動くとき，点wの軌跡は円から 1 点を除いたものになる。この円の中心と半径を求めよ。

(2)　1 の 3 乗根のうち，虚部が正であるものをβとする。点βと点β^2を結ぶ線分上を点zが動くときの点wの軌跡を求め，複素数平面上に図示せよ。　[2017]

解答例

(1)　条件より，$z\neq 0$のとき$w=\dfrac{1}{z}$から，$z=\dfrac{1}{w}\ (w\neq 0)$………①

さて，点zが点$\alpha\ (\alpha\neq 0)$と原点 O を結ぶ線分の垂直二等分線L上を動くとき，

$$|z|=|z-\alpha|\text{………②}$$

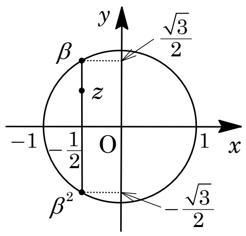
①を②に代入すると，$\left|\dfrac{1}{w}\right|=\left|\dfrac{1}{w}-\alpha\right|$，$\dfrac{1}{|w|}=\dfrac{|1-\alpha w|}{|w|}$となり，

$$|1-\alpha w|=1,\ |-\alpha|\left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=1,\ \left|w-\frac{1}{\alpha}\right|=\frac{1}{|\alpha|}$$

よって，点wの軌跡は，中心$\dfrac{1}{\alpha}$で半径$\dfrac{1}{|\alpha|}$の円である。ただし，$w\neq 0$より，原点は除く。

(2)　$x^3=1$の解は，$(x-1)(x^2+x+1)=0$より，$x=1$，$\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$である。

すると，条件より，$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，$\beta^2=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$となる。



ここで，点βと点β^2を結ぶ直線は，(1)で$\alpha=-1$として表すことができるので，点zが点βと点β^2を結ぶ線分上を動くとき，

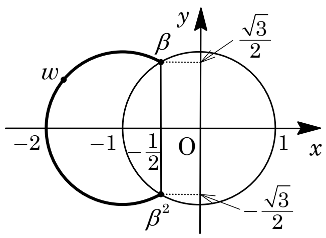
$$|z|=|z+1|\text{………③},\ |z|\leqq 1\text{………④}$$

①③より，$|w+1|=1\ (w\neq 0)$………⑤

①④より，$\left|\dfrac{1}{w}\right|\leqq 1$となり，$\dfrac{1}{|w|}\leqq 1$から，$|w|\geqq 1$………⑥

⑤⑥より，点wの軌跡は，点-1を中心とする半径 1 の円周上で，原点を中心とする半径 1 の円の外部または周上の部分となる。

図示すると，右図の太線の弧である。ただし，両端点β，β^2は含む。



コメント

　複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。直線や円の絶対値による表現方法が問われています。

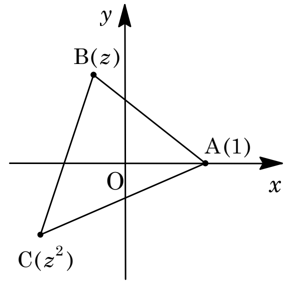
問　題

z を複素数とする。複素数平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ が鋭角三角形をなすような z の範囲を求め，図示せよ。 [2016]

解答例

3 点 $\mathrm{A}(1)$，$\mathrm{B}(z)$，$\mathrm{C}(z^2)$ に対し，$\triangle\mathrm{ABC}$ は鋭角三角形より，まず $z\neq 1$ かつ $z^2\neq z$ かつ $z^2\neq 1$ より，

$$z\neq 0,\ z\neq \pm 1$$



さて，$\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-1}{z-1}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg(z+1)<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\{z-(-1)\}<\frac{\pi}{2}$$

すると，z は点 -1 を通り実軸に垂直な直線の右側にある。

次に，$\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z^2-z}{1-z}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg(-z)<\dfrac{\pi}{2}$

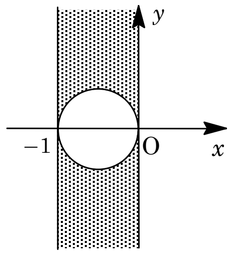
すると，$-z$ は虚軸の右側にあるので，z は虚軸の左側にある。

さらに，$\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}<\arg\dfrac{z-z^2}{1-z^2}<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$-\frac{\pi}{2}<\arg\frac{z}{1+z}<\frac{\pi}{2},\ -\frac{\pi}{2}<\arg\frac{0-z}{-1-z}<\frac{\pi}{2}$$

すると，z は原点と点 -1 を直径とする円の外部にある。

以上より，z の存在範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



コメント

複素数平面についての問題です。鋭角三角形という条件を，偏角の言葉に翻訳して処理をしました。なお，余弦定理を利用する方法も考えられます。

問　題

$|z| > \dfrac{5}{4}$ となるどのような複素数 z に対しても $w = z^2 - 2z$ とは表されない複素数 w 全体の集合を T とする。すなわち，$T = \left\{ w \mid w = z^2 - 2z \text{ ならば } |z| \leqq \dfrac{5}{4} \right\}$ とする。このとき, T に属する複素数 w で絶対値 $|w|$ が最大になるような w の値を求めよ。

[2005]

解答例

2 次方程式 $z^2 - 2z - w = 0$ の解を $z = \alpha$，β とすると，解と係数の関係から，

$$\alpha + \beta = 2 \cdots\cdots\cdots ①，\ \alpha\beta = -w \cdots\cdots\cdots ②$$

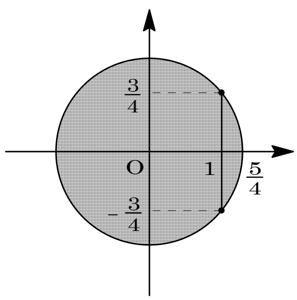
①より，$\dfrac{\alpha + \beta}{2} = 1 \cdots\cdots\cdots ③$

よって, 2 点 α，β を結ぶ線分の中点は，点 1 である。

また，条件より，$|\alpha| \leqq \dfrac{5}{4}$，$|\beta| \leqq \dfrac{5}{4}$ なので，②から，

$$|w| = |-\alpha\beta| = |\alpha||\beta| \leqq \frac{5}{4} \cdot \frac{5}{4} = \frac{25}{16}$$

すると，$|w|$ が最大になるのは，$|\alpha| = |\beta| = \dfrac{5}{4}$ の場合である。そこで，図から，③を満たす α，β は，



$$\alpha = 1 \pm \frac{3}{4}i，\ \beta = 1 \mp \frac{3}{4}i \ （複号同順）$$

このとき，$w = -\alpha\beta = -\left(1 \pm \dfrac{3}{4}i\right)\left(1 \mp \dfrac{3}{4}i\right) = -\dfrac{25}{16}$

コメント

意味のつかみにくい問題文ですが，$z^2 - 2z - w = 0$ の解がともに $|z| \leqq \dfrac{5}{4}$ である条件を求めるという設問に一致します。図に依存した直観的な解法を記しました。

問　題

O を原点とする複素数平面上で 6 を表す点を A, $7+7i$ を表す点を B とする。ただし，i は虚数単位である。正の実数 t に対し，$\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ を表す点 P をとる。

(1)　∠APB を求めよ。

(2)　線分 OP の長さが最大になる t を求めよ。　[2003]

解答例

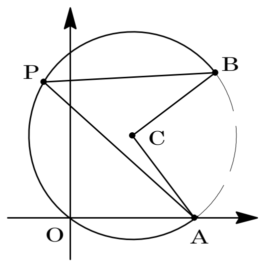
(1)　点 P(z) とし，$z=\dfrac{14(t-3)}{(1-i)t-7}$ とおくと，

$$\frac{(7+7i)-z}{6-z}=\frac{(7+7i)\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}{6\{(t-7)-ti\}-14(t-3)}=\frac{-7-49i}{-8t-6ti}$$
$$=\frac{7+49i}{8t+6ti}=\frac{(7+49i)(8-6i)}{t(8+6i)(8-6i)}=\frac{7+7i}{2t}$$

$t>0$ より，$\arg\dfrac{(7+7i)-z}{6-z}=\arg\dfrac{7}{2t}(1+i)=45^\circ$

よって，$\angle\mathrm{APB}=45^\circ$

(2)　(1)より，点 P は∠APB が一定より，2 点 A, B を通る円周上にある。さらに，PA から PB を測った角が 45° なので，点 P は，右図の実線部に存在する。



この円の中心を C(w) とおくと，$\angle\mathrm{ACB}=2\angle\mathrm{APB}=90^\circ$ より，点 C を中心に A を 90° 回転すると B になるので，

$$(7+7i)-w=i(6-w),\ (1-i)w=7+i$$
$$w=\frac{7+i}{1-i}=3+4i$$

さて，$\mathrm{OC}=|w|=5$，円の半径 $\mathrm{AC}=|w-6|=|-3+4i|=5$ より，線分 OP の長さが最大になる点 P の位置は, OC の延長と円との交点であり，$z=2w=6+8i$ の場合である。

$$\frac{14(t-3)}{(1-i)t-7}=6+8i,\ 14(t-3)=(6+8i)(t-7-ti),\ (t-28)i=0$$

よって, OP が最大になるのは $t=28$ のときである。

コメント

誘導に従っていくと，一見，複雑そうに見える点 P の動きがよくわかってきます。なお, 計算量も適当なものです。

問　題

複素数平面上の点a_1，a_2，$\cdots$，a_n，$\cdots$を

$$a_1 = 1,\ a_2 = i,\ a_{n+2} = a_{n+1} + a_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

により定め，$b_n = \dfrac{a_{n+1}}{a_n}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$とおく。ただし，$i$は虚数単位である。

(1)　3 点b_1，b_2，b_3を通る円Cの中心と半径を求めよ。

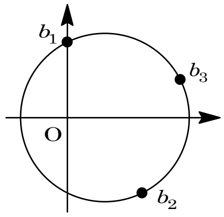
(2)　すべての点$b_n\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$は円$C$の周上にあることを示せ。　[2001]

解答例

(1)　$a_{n+2} = a_{n+1} + a_n$より，$\dfrac{a_{n+2}}{a_{n+1}} = 1 + \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$，$b_{n+1} = 1 + \dfrac{1}{b_n}$ ………①

まず，$b_1 = \dfrac{a_2}{a_1} = i$なので，①より，

$$b_2 = 1 + \frac{1}{i} = 1 - i,\ b_3 = 1 + \frac{1}{1-i} = \frac{3}{2} + \frac{1}{2}i$$



3 点b_1，b_2，b_3を通る円Cの中心を$x + yi$とおくと，

$$|x + yi - i| = |x + yi - (1 - i)| = \left|x + yi - \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2}i\right)\right|$$

$$|x + (y-1)i| = |(x-1) + (y+1)i| = \left|\left(x - \frac{3}{2}\right) + \left(y - \frac{1}{2}\right)i\right|$$

よって，$x^2 + (y-1)^2 = (x-1)^2 + (y+1)^2$ ………②

$$x^2 + (y-1)^2 = \left(x - \frac{3}{2}\right)^2 + \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 \text{ ………③}$$

②より$2x - 4y = 1$，③より$6x - 2y = 3$なので，$(x,\ y) = \left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$となり，円$C$の中心は点$\dfrac{1}{2}$，半径は$\left|\dfrac{1}{2} - i\right| = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 1} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$である。

(2)　すべての点b_nが円Cの周上にあることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n = 1$のとき　点b_1は明らかに円Cの周上にある。

(ii)　$n = k$のとき　点b_kが円Cの周上にあると仮定する。

$$\left|b_k - \frac{1}{2}\right| = \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ ………④}$$

このとき，①より$b_{k+1} = 1 + \dfrac{1}{b_k}$なので，$b_k = \dfrac{1}{b_{k+1} - 1}$

④に代入して，$\left|\dfrac{1}{b_{k+1} - 1} - \dfrac{1}{2}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\left|\dfrac{3 - b_{k+1}}{2(b_{k+1} - 1)}\right| = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$，$\dfrac{|3 - b_{k+1}|}{2|b_{k+1} - 1|} = \dfrac{\sqrt{5}}{2}$

$$|b_{k+1} - 3| = \sqrt{5}|b_{k+1} - 1|,\ |b_{k+1} - 1| : |b_{k+1} - 3| = 1 : \sqrt{5}$$

ここで，2 点 1，3 を結ぶ線分を$1 : \sqrt{5}$に内分する点をz_1，$1 : \sqrt{5}$に外分する点をz_2とすると，点b_{k+1}は 2 点z_1，z_2を直径の両端とする円周上にある。

$$z_1=\frac{\sqrt{5}\cdot 1+1\cdot 3}{\sqrt{5}+1}=\frac{3+\sqrt{5}}{1+\sqrt{5}}=\frac{1+\sqrt{5}}{2}，\ z_2=\frac{\sqrt{5}\cdot 1-1\cdot 3}{\sqrt{5}-1}=\frac{-3+\sqrt{5}}{-1+\sqrt{5}}=\frac{1-\sqrt{5}}{2}$$

すると円の中心は$\dfrac{z_1+z_2}{2}=\dfrac{1}{2}$，半径は$\dfrac{1}{2}|z_1-z_2|=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$となり，円 C に一致する。

(i)(ii)より，すべての点b_nは円Cの周上にある。

コメント

複素数平面上における円を題材とした問題です。それに加えて漸化式がスパイスとしてよく効いています。

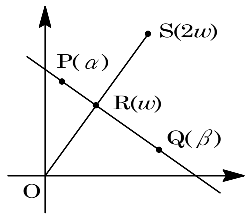
問　題

複素数平面上の原点以外の相異なる 2 点$P(\alpha)$，$Q(\beta)$を考える。$P(\alpha)$，$Q(\beta)$を通る直線を l，原点から l に引いた垂線と l の交点を$R(w)$とする。ただし，複素数γが表す点 C を$C(\gamma)$とかく。このとき，「$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$が中心$A\left(\frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{2}$の円周上にあることである」を示せ。　[2000]

解答例

$S(2w)$とすると，条件より，

$|\alpha|=|\alpha-2w|$ ………①，$|\beta|=|\beta-2w|$ ………②



まず，$w=\alpha\beta\neq 0$のとき，

①より，$|\alpha|=|\alpha-2\alpha\beta|$，$|\alpha|=|\alpha||1-2\beta|$

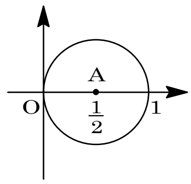
$|\alpha|\neq 0$なので，$|1-2\beta|=1$，$\left|\beta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ………③

②より，$|\beta|=|\beta-2\alpha\beta|$，$|\beta|=|\beta||1-2\alpha|$

$|\beta|\neq 0$なので，$|1-2\alpha|=1$，$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$ ………④

③④より，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$は中心$A\left(\frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{2}$の円周上にある。

逆に，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$が中心$A\left(\frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{2}$の円周上にあるとき，この円周上の異なる 2 点 P, Q を結んだ直線 l は, P, Q がともに原点以外の点なので，直線 l は原点を通らない。すると，



$$\left|\alpha-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2},\ \left|\beta-\frac{1}{2}\right|=\frac{1}{2}$$

これより，$|\beta|=|\beta-2\alpha\beta|$，$|\alpha|=|\alpha-2\alpha\beta|$

①②より，$|\alpha-2w|=|\alpha-2\alpha\beta|$ ………⑤，$|\beta-2w|=|\beta-2\alpha\beta|$ ………⑥

ここで，$T(2\alpha\beta)$とし，$w\neq\alpha\beta$とすると，⑤⑥より 2 点$P(\alpha)$，$Q(\beta)$は線分 TS の垂直二等分線上にある。ところが直線 PQ は線分 OS の垂直二等分線より，T は O と一致する。すなわち，$\alpha\beta=0$となる。

これは$\alpha\neq 0$，$\beta\neq 0$に反するので，$w=\alpha\beta$となる。

以上より，$w=\alpha\beta$であるための必要十分条件は，$P(\alpha)$，$Q(\beta)$が中心$A\left(\frac{1}{2}\right)$，半径$\frac{1}{2}$の円周上にあることである。

コメント

複素数平面上で，直線の方程式は線分の垂直二等分線の形で表現できます。なお，後半の逆の証明の際，直線 l が原点を通るときと通らないときに場合分けをしていたのですが，前者の場合はありえないことが，図を書くとわかりました。

問　題

複素数 z_n （$n=1,\ 2,\ \cdots$）を，$z_1=1$，$z_{n+1}=(3+4i)z_n+1$ によって定める。ただし，i は虚数単位である。

(1) すべての自然数 n について，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$ が成り立つことを示せ。

(2) 実数 $r>0$ に対して，$|z_n|\leqq r$ を満たす z_n の個数を $f(r)$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}$ を求めよ。 [1999]

解答例

(1) $r_n=|z_n|$ とおくと，$r_1=|z_1|=1$

$$r_{n+1}=|z_{n+1}|=|(3+4i)z_n+1|\leqq|3+4i||z_n|+1=5r_n+1\cdots\cdots\cdots①$$

$$r_{n+1}=|z_{n+1}|=|(3+4i)z_n+1|\geqq\big||3+4i||z_n|-1\big|=|5r_n-1|\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$r_{n+1}+\dfrac{1}{4}\leqq5\left(r_n+\dfrac{1}{4}\right)$，$r_n+\dfrac{1}{4}\leqq\left(r_1+\dfrac{1}{4}\right)5^{n-1}=\dfrac{5^n}{4}$ から，$r_n<\dfrac{5^n}{4}$

また，$r_1=1$ なので，②より帰納的に $r_n\geqq1$

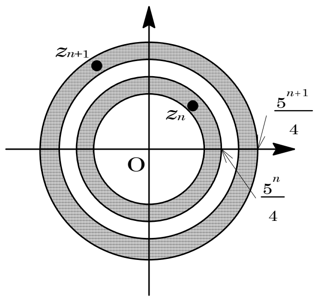
すると②は，$r_{n+1}\geqq5r_n-1$，$r_{n+1}-\dfrac{1}{4}\geqq5\left(r_n-\dfrac{1}{4}\right)$

$r_n-\dfrac{1}{4}\geqq\left(r_1-\dfrac{1}{4}\right)5^{n-1}=\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}$ から，$r_n>\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}$

以上より，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$

(2) (1)より，$\dfrac{3\times5^{n-1}}{4}<|z_n|<\dfrac{5^n}{4}$，$\dfrac{3\times5^n}{4}<|z_{n+1}|<\dfrac{5^{n+1}}{4}$

ここで $\dfrac{5^n}{4}<\dfrac{3\times5^n}{4}$ より，z_n，z_{n+1} の存在領域は右図のようになる。



すると $\dfrac{5^n}{4}\leqq r\leqq\dfrac{5^{n+1}}{4}$ のとき，$f(r)=n,\ n+1$

よって，$n\log5-\log4\leqq\log r\leqq(n+1)\log5-\log4$ のとき，$n\leqq f(r)\leqq n+1$

$$\frac{n}{(n+1)\log5-\log4}\leqq\frac{f(r)}{\log r}\leqq\frac{n+1}{n\log5-\log4}$$

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log5-\frac{1}{n}\log4}\leqq\frac{f(r)}{\log r}\leqq\frac{1+\frac{1}{n}}{\log5-\frac{1}{n}\log4}$$

$r\to+\infty$ のとき，$n\to\infty$ となるので，

$$\frac{1}{\left(1+\frac{1}{n}\right)\log 5-\frac{1}{n}\log 4}\to\frac{1}{\log 5},\quad \frac{1+\frac{1}{n}}{\log 5-\frac{1}{n}\log 4}\to\frac{1}{\log 5}$$

よって，$\displaystyle\lim_{r\to+\infty}\frac{f(r)}{\log r}=\frac{1}{\log 5}$

コメント

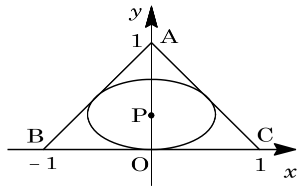
(1)は最初与えられた漸化式を解いたのですが，複雑な式になったので止めました。次に数学的帰納法で証明と考えたのですが，第 2 段階がうまくいきません。しかしそのとき，証明に用いた三角不等式を漸化式に適用という方針を思いつきました。

問　題

$AB=AC$，$BC=2$ の直角二等辺三角形 ABC の各辺に接し，ひとつの軸が辺 BC に平行な楕円の面積の最大値を求めよ。　　[2000]

解答例

$\triangle ABC$ は $\angle A=90^\circ$ の直角二等辺三角形で，斜辺 $BC=2$ より $AB=AC=\sqrt{2}$ となる。ここで BC の中点を原点とする座標系を右図のように設定する。



楕円の中心を $P(0,\ b)$ とおくと，x 軸に接することより，その方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，直線 AC $:x+y=1\cdots\cdots②$となり，楕円①と直線 AC が接するとき，y 軸に関する対称性から，楕円①は直線 AB とも接する。

さて，このとき図形を y 軸方向に$\dfrac{a}{b}$倍すると，点 $A(0,\ 1)$，$P(0,\ b)$は，それぞれ点$\left(0,\ \dfrac{a}{b}\right)$，$(0,\ a)$に移り，楕円①は$x^2+(y-a)^2=a^2\cdots\cdots③$，直線②は$x+\dfrac{by}{a}=1$，すなわち$ax+by-a=0\cdots\cdots④$となる。

円③と直線④が接する条件は，③の中心$(0,\ a)$と④の距離が③の半径 a に等しいことより，

$$\frac{|ba-a|}{\sqrt{a^2+b^2}}=a,\ \ a|b-1|=a\sqrt{a^2+b^2}$$

よって，$(b-1)^2=a^2+b^2$，$b=\dfrac{1-a^2}{2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

このとき，楕円の面積 S は，⑤より，$S=\pi ab=\pi a\cdot\dfrac{1-a^2}{2}=\dfrac{\pi}{2}(-a^3+a)$

ここで，$0<a<1$ で $f(a)=-a^3+a$ とおくと，

$$f'(a)=-3a^2+1$$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		＋	0	－	
$f(a)$		↗	$\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$	↘	

右表より，$f(a)$は最大値$\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$をとり，このとき S は最大値$\dfrac{\pi}{2}\cdot\dfrac{2}{9}\sqrt{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{9}\pi$をとる。

コメント

楕円を円に変換して，接する条件を考えてみましたが，ここまでやるほどの問題ではありませんでした。

問　題

p, q は実数の定数で，$0<p<1$，$q>0$ を満たすとする。関数

$$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$$

を考える。以下の問いに答えよ。必要であれば，不等式$1+x\leqq e^x$ がすべての実数 x に対して成り立つことを証明なしに用いてよい。

(1)　$0<x<1$ のとき，$0<f(x)<1$ であることを示せ。

(2)　x_0 は $0<x_0<1$ を満たす実数とする。数列$\{x_n\}$の各項 x_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を，$x_n=f(x_{n-1})$ によって順次定める。$p>q$ であるとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ となることを示せ。

(3)　$p<q$ であるとき，$c=f(c)$，$0<c<1$ を満たす実数 c が存在することを示せ。

[2014]

解答例

(1)　$0<p<1$，$q>0$ である定数 p, q に対して，$f(x)=(1-p)x+(1-x)(1-e^{-qx})$

$0<x<1$ のとき，$(1-p)x>0$，$(1-x)(1-e^{-qx})>0$ より $f(x)>0$ となり，

$$1-f(x)=1-(1-p)x-(1-x)(1-e^{-qx})=px+(1-x)e^{-qx}>0$$

よって，$0<f(x)<1$ である。

(2)　$0<x_0<1$，$x_n=f(x_{n-1})$ で定められる数列$\{x_n\}$に対して，(1)より $0<f(x_0)<1$ すると，$0<x_1<1$ となり，帰納的に$0<x_n<1$ である。

さて，$\displaystyle\frac{x_n}{x_{n-1}}=\frac{(1-p)x_{n-1}+(1-x_{n-1})(1-e^{-qx_{n-1}})}{x_{n-1}}=1-p+\left(\frac{1}{x_{n-1}}-1\right)(1-e^{-qx_{n-1}})$

ここで，条件より，$1-qx_{n-1}\leqq e^{-qx_{n-1}}$ より，$1-e^{-qx_{n-1}}\leqq qx_{n-1}$ となり，

$$0<\frac{x_n}{x_{n-1}}\leqq 1-p+\left(\frac{1}{x_{n-1}}-1\right)\cdot qx_{n-1}=1-p+q-qx_{n-1}<1-p+q$$

これより，$0<x_n<(1-p+q)x_{n-1}$ から，$n\geqq 1$ で，$0<x_n<x_0(1-p+q)^n$

すると，$1>p>q>0$ より $0<1-p+q<1$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=0$ である。

(3)　$g(x)=f(x)-x=-px+(1-x)(1-e^{-qx})$ とおくと，$g(0)=0$，$g(1)=-p<0$

$$g'(x)=-p-(1-e^{-qx})+(1-x)\cdot qe^{-qx}$$

すると，$g'(0)=-p+q$ となり，$p<q$ のとき，$g'(0)>0$ から，十分に小さい正の数 h をとると，$g(h)>g(0)=0$ である。

したがって，$g(x)$ は連続関数なので，$0<h<c<1$ を満たすある実数 c に対して $g(c)=0$ すなわち $c=f(c)$ となる。

コメント

初めは, (1)は $f(x)$ を微分することによって増減を知らべ, (2)は平均値の定理の応用と考え計算を進めましたが，沈没寸前になりました。そこで，微分する代わりに与えられた不等式$1+x\leqq e^x$ を用いるように方針転換をした解答例です。

問　題

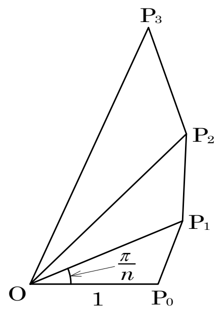
n を 2 以上の整数とする。平面上に $n+2$ 個の点 O，P_0，P_1，…，P_n があり，次の 2 つの条件を満たしている。

① $\angle\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k = \dfrac{\pi}{n}\ (1 \leqq k \leqq n)$，$\angle\mathrm{OP}_{k-1}\mathrm{P}_k = \angle\mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1\ (2 \leqq k \leqq n)$

② 線分 OP_0 の長さは 1，線分 OP_1 の長さは $1+\dfrac{1}{n}$ である。

線分 $\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k$ の長さを a_k とし，$s_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ とおくとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} s_n$ を求めよ。　[2007]

解答例



$1 \leqq k \leqq n$ を満たす k に対し，$\triangle\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{OP}_k$ はすべて相似となり，

$\mathrm{P}_{k-1}\mathrm{P}_k = a_k$ とおくと，

$$a_{k+1} = \left(1+\frac{1}{n}\right)a_k$$

これより，$a_k = a_1\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{k-1}$ となり，

$$s_n = \sum_{k=1}^{n} a_k = a_1\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{k-1} = a_1\cdot\frac{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1}{1+\frac{1}{n}-1}$$

$$= a_1 n\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

ここで，$\triangle\mathrm{OP}_0\mathrm{P}_1$ に余弦定理を適用すると，

$$a_1^{\ 2} = 1^2 + \left(1+\frac{1}{n}\right)^2 - 2\cdot1\cdot\left(1+\frac{1}{n}\right)\cos\frac{\pi}{n} = 2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+\frac{1}{n^2}$$

よって，$a_1 = \sqrt{2\left(1+\dfrac{1}{n}\right)\left(1-\cos\dfrac{\pi}{n}\right)+\dfrac{1}{n^2}}$ から，

$$\lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty}\sqrt{2n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1-\cos\frac{\pi}{n}\right)+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{4n^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\sin^2\frac{\pi}{2n}+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\sqrt{\pi^2\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(\frac{2n}{\pi}\sin\frac{\pi}{2n}\right)^2+1}\left\{\left(1+\frac{1}{n}\right)^n - 1\right\}$$

$$= \sqrt{\pi^2+1}\,(e-1)$$

コメント

図形と数列の極限の融合問題です。基本事項の確認が主となっており，落とすことはできません。

問　題

$a_1=\dfrac{1}{2}$ とし，数列 $\{a_n\}$ を漸化式 $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 各 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し $b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおく。$n>1$ のとき，$b_n>2n$ となることを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n$ を求めよ。　[2006]

解答例

(1) $a_1=\dfrac{1}{2}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{(1+a_n)^2}$ より，帰納的に $a_n>0$ である。

さて，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{(1+a_n)^2}{a_n}=\dfrac{1}{a_n}+2+a_n\cdots\cdots(*)$ から，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$ とおくと，

$$b_{n+1}=b_n+2+\frac{1}{b_n}$$

以下，数学的帰納法を用いて，$n>1$ のとき $b_n>2n$ となることを示す。

(i)　$n=2$ のとき

$b_2=b_1+2+\dfrac{1}{b_1}=2+2+\dfrac{1}{2}=\dfrac{9}{2}>2\times2$ となり，$n=2$ のとき成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$b_k>2k$ と仮定すると，$b_{k+1}=b_k+2+\dfrac{1}{b_k}>b_k+2>2(k+1)$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$n>1$ のとき $b_n>2n$ である。

(2) (1)より，$n\geqq2$ において $b_n=\dfrac{1}{a_n}>2n$ より，$a_n<\dfrac{1}{2n}$ となるので，

$$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\frac{1}{2}+\frac{1}{2\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+\cdots+\frac{1}{2n}<\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\int_1^n\frac{1}{x}dx$$

よって，$a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n<\dfrac{1}{2}\left(1+\left[\ \log x\ \right]_1^n\right)=\dfrac{1}{2}(1+\log n)$ となり，

$$0<\frac{1}{n}(a_1+a_2+a_3+\cdots+a_n)<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{\log n}{n}\right)$$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log n}{n}=0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}(a_1+a_2+\cdots+a_n)=0$

(3) $(*)$より，$a_n=\dfrac{1}{a_{n+1}}-\dfrac{1}{a_n}-2$ なので，

$$\sum_{k=1}^{n}a_k=\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{a_{k+1}}-\frac{1}{a_k}-2\right)=\frac{1}{a_{n+1}}-\frac{1}{a_1}-2n=\frac{1}{a_{n+1}}-2n-2$$

よって，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k+2n+2$ より，$\dfrac{1}{na_{n+1}}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\dfrac{2}{n}$

すると, (2)より, $n\to\infty$ のとき，$\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k+2+\dfrac{2}{n}\to 2$ となるので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{na_{n+1}}=2,\quad \lim_{n\to\infty}na_{n+1}=\frac{1}{2}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}na_n=\lim_{n\to\infty}(n+1)a_{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{n+1}{n}\cdot na_{n+1}=\frac{1}{2}$

コメント

適切な誘導のついている数列と微積分の総合問題で，演習すべき 1 題です。

問　題

関数 $f(x)$ を $f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ とする。ただし, e は自然対数の底である。

(1)　$x>\dfrac{1}{2}$ ならば $0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ であることを示せ。

(2)　x_0 を正の数とするとき，数列 $\{x_n\}$ $(n=0,\ 1,\ \cdots)$ を，$x_{n+1}=f(x_n)$ によって定める。$x_0>\dfrac{1}{2}$ であれば，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ であることを示せ。　[2005]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{2}x\{1+e^{-2(x-1)}\}$ に対して,

$$f'(x)=\frac{1}{2}\{1+e^{-2(x-1)}\}+\frac{1}{2}x\cdot(-2)e^{-2(x-1)}=\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{2}-x\right)e^{-2(x-1)}$$

$$f''(x)=-e^{-2(x-1)}+\left(\frac{1}{2}-x\right)(-2)e^{-2(x-1)}$$

$$=2(x-1)e^{-2(x-1)}$$

よって，$x>\dfrac{1}{2}$ における $f'(x)$ の増減は右表のようになり，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f'(x)=\dfrac{1}{2}$ から，$0\leqq f'(x)<\dfrac{1}{2}$ である。

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$
$f''(x)$		$-$	0	$+$
$f'(x)$	$\frac{1}{2}$	$\searrow$	0	$\nearrow$

(2)　(1)より，$f'(x)\geqq 0$ なので，$x>\dfrac{1}{2}$ で $f(x)$ は単調に増加する。

$x_0>\dfrac{1}{2}$ から $x_1=f(x_0)>f\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{4}(1+e)>\dfrac{1}{2}$ となり，帰納的に，$x_n>\dfrac{1}{2}$ である。

さて，$x_n\neq 1$ のとき，c_n を 1 と x_n の間の数として，平均値の定理より，

$$\frac{f(x_n)-f(1)}{x_n-1}=f'(c_n),\quad f(x_n)-f(1)=f'(c_n)(x_n-1)$$

そこで，$x_{n+1}=f(x_n)$，$1=f(1)$ から，

$$|x_{n+1}-1|=|f(x_n)-f(1)|=|f'(c_n)||x_n-1|$$

$x_n>\dfrac{1}{2}$ より $c_n>\dfrac{1}{2}$ となるので, (1)より $|f'(c_n)|<\dfrac{1}{2}$ であり,

$$|x_{n+1}-1|<\frac{1}{2}|x_n-1|$$

$x_n=1$ のときは，$x_{n+1}=f(1)=1$ なので，このときも含めて,

$$|x_{n+1}-1|\leqq\frac{1}{2}|x_n-1|$$

よって，$|x_n-1|\leqq|x_0-1|\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$

これより, $n\to\infty$ のとき，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\to 0$ より $|x_n-1|\to 0$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$

コメント

数列の極限を求めるときに，平均値の定理を利用する典型的な問題です。

問　題

$a>0$ とする。正の整数 n に対して，区間 $0 \leqq x \leqq a$ を n 等分する点の集合 $\left\{0,\ \frac{a}{n},\ \cdots,\ \frac{n-1}{n}a,\ a\right\}$ の上で定義された関数 $f_n(x)$ があり，次の方程式を満たす。

$$\begin{cases} f_n(0)=c \\ \dfrac{f_n((k+1)h)-f_n(kh)}{h}=\{1-f_n(kh)\}f_n((k+1)h)\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n-1) \end{cases}$$

ただし，$h=\frac{a}{n}$，$c>0$ である。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}\ (k=0,\ 1,\ \cdots,\ n)$ とおいて p_k を求めよ。

(2)　$g(a)=\displaystyle\lim_{n\to\infty}f_n(a)$ とおく。$g(a)$ を求めよ。

(3)　$c=2,\ 1,\ \frac{1}{4}$ それぞれの場合について，$y=g(x)$ の $x>0$ でのグラフを書け。

[2000]

解答例

(1)　条件より，$f_n((k+1)h)-f_n(kh)=h\{1-f_n(kh)\}f_n((k+1)h)$

$p_k=\dfrac{1}{f_n(kh)}$ なので，$\dfrac{1}{p_{k+1}}-\dfrac{1}{p_k}=h\left(1-\dfrac{1}{p_k}\right)\cdot\dfrac{1}{p_{k+1}}$

変形して，$p_{k+1}=(1-h)p_k+h$，$p_{k+1}-1=(1-h)(p_k-1)$

$$p_k-1=(p_0-1)(1-h)^k=\left(\frac{1}{f_n(0)}-1\right)(1-h)^k=\left(\frac{1}{c}-1\right)(1-h)^k$$

よって，$p_k=1+\left(\frac{1}{c}-1\right)(1-h)^k$

(2)　$h=\frac{a}{n}$ より，$f_n(a)=f_n(nh)=\dfrac{1}{p_n}$

(1)より，$p_n=1+\left(\frac{1}{c}-1\right)\left(1-\frac{a}{n}\right)^n=1+\left(\frac{1}{c}-1\right)\left\{\left(1-\frac{a}{n}\right)^{-\frac{n}{a}}\right\}^{-a}$ なので，

$$g(a)=\lim_{n\to\infty}f_n(a)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{p_n}=\frac{1}{1+\left(\frac{1}{c}-1\right)e^{-a}}$$

(3)　(2)より，$g(x)=\dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{c}-1\right)e^{-x}}$

$c=2$ のとき，$g(x)=\dfrac{2}{2-e^{-x}}$

$$g'(x)=-\frac{2e^{-x}}{(2-e^{-x})^2},\quad g''(x)=\frac{2e^{-x}(2+e^{-x})}{(2-e^{-x})^3}$$

x	0	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$-$	
$g''(x)$		$+$	
$g(x)$	2	↘	1

$c=1$ のとき，$g(x)=1$

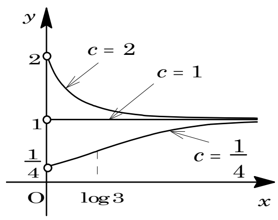
$c=\dfrac{1}{4}$ のとき，$g(x)=\dfrac{1}{1+3e^{-x}}$

$$g'(x)=\frac{3e^{-x}}{(1+3e^{-x})^2}$$

$$g''(x)=\frac{3e^{-x}(3e^{-x}-1)}{(1+3e^{-x})^3}$$

x	0	$\cdots$	$\log 3$	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$		$+$	
$g''(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$\frac{1}{4}$	$\nearrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	1

以上より，$c=2$，$c=1$，$c=\dfrac{1}{4}$ のときの $y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。ただし，y 軸上の点は除く。



コメント

点の集合の上で定義された関数という設定に身構えてしまいますが，内容的には基本事項の積み重ねでした。

問　題

n を正の整数とする。連立不等式

$$x+y+z\leqq n,\ -x+y-z\leqq n,\ x-y-z\leqq n,\ -x-y+z\leqq n$$

をみたす xyz 空間の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ で, x, y, z がすべて整数であるものの個数を $f(n)$ とおく。極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}$ を求めよ。 [1998]

解答例

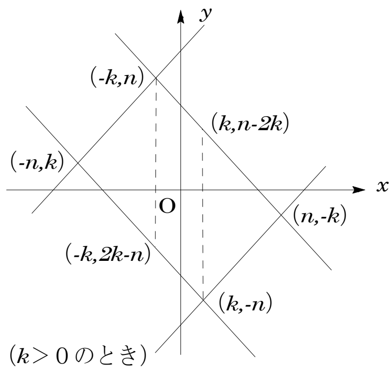
$z=k$ での切り口を考える。

$x+y+k\leqq n$ より, $y\leqq -x+n-k$

$-x+y-k\leqq n$ より, $y\leqq x+n+k$

$x-y-k\leqq n$ より, $y\geqq x-(n+k)$

$-x-y+k\leqq n$ より, $y\geqq -x-(n-k)$



切り口の存在する条件は,

$n-k\geqq -(n-k)$ かつ $n+k\geqq -(n+k)$

より, $-n\leqq k\leqq n$

境界線の交点は,

$y=-x+n-k$ かつ $y=x+n+k$ より, $(x,\ y)=(-k,\ n)$

$y=-x+n-k$ かつ $y=x-(n+k)$ より, $(x,\ y)=(n,\ -k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x+n+k$ より, $(x,\ y)=(-n,\ k)$

$y=-x-(n-k)$ かつ $y=x-(n+k)$ より, $(x,\ y)=(k,\ -n)$

$z=k$ 上での格子点の個数を $f_k(n)$ とすると,

$$\begin{aligned} f_k(n)&=2\{1+3+5+\cdots\cdots+(2n-2k+1)\}+(2n-2k+1)(2k-1)\\ &=2\cdot\frac{1+(2n-2k+1)}{2}\cdot(n-k+1)+(2n-2k+1)(2k-1)\\ &=2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)\end{aligned}$$

以上より,

$$f(n)=\sum_{k=-n}^{n}f_k(n)=\sum_{k=-n}^{n}\left[\,2(n-k+1)^2+\{2(n-k+1)-1\}(2k-1)\,\right]$$

ここで, $n-k+1=l$ とおくと,

$$\begin{aligned} f(n)&=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{2l^2+(2l-1)(2n+1-2l)\right\}=\sum_{l=1}^{2n+1}\left\{-2l^2+4(n+1)l-(2n+1)\right\}\\ &=-\frac{2}{3}(2n+1)(n+1)(4n+3)+4(n+1)^2(2n+1)-(2n+1)^2\\ &=\frac{1}{3}(2n+1)(4n^2+4n+3)\end{aligned}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{f(n)}{n^3}=\frac{1}{3}\lim_{n\to\infty}\left(2+\frac{1}{n}\right)\left(4+\frac{4}{n}+\frac{3}{n^2}\right)=\frac{8}{3}$$

コメント

4 平面で囲まれた領域にある格子点の個数を求める頻出問題です。

問　題

xy 平面に 2 つの円 $C_0 : x^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$，$C_1 : (x-1)^2+\left(y-\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}$ をとり，C_2 を x 軸と C_0，C_1 に接する円とする。さらに，$n=2,\ 3,\cdots$ に対して C_{n+1} を x 軸と C_{n-1}，C_n に接する円で C_{n-2} とは異なるものとする。C_n の半径を r_n，C_n と x 軸の接点を $(x_n,\ 0)$ として，$q_n=\dfrac{1}{\sqrt{2r_n}}$，$p_n=q_nx_n$ とおく。

(1)　q_n は整数であることを示せ。

(2)　p_n も整数で，p_n と q_n は互いに素であることを示せ。

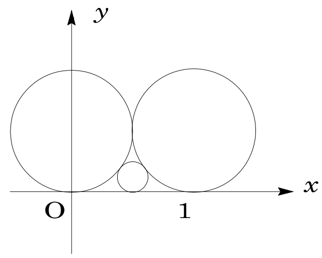
(3)　α を $\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ をみたす正の数として，不等式 $\left|x_{n+1}-\alpha\right|<\dfrac{2}{3}\left|x_n-\alpha\right|$ を示し，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$ を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　円 C_{n-1} と円 C_n が外接することより，

$$\left|r_{n-1}-r_n\right|^2+\left|x_n-x_{n-1}\right|^2=\left(r_{n-1}+r_n\right)^2$$

$$(x_n-x_{n-1})^2=4r_nr_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots①$$

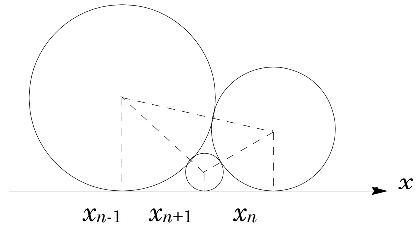


同様にして，

$$(x_{n+1}-x_{n-1})^2=4r_{n+1}r_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$(x_{n+1}-x_n)^2=4r_{n+1}r_n\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　n が奇数のときは，$x_{n-1}<x_{n+1}<x_n$



①より，$x_n-x_{n-1}=2\sqrt{r_nr_{n-1}}$　$\cdots\cdots\cdots①'$

②より，$x_{n+1}-x_{n-1}=2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}$　$\cdots\cdots②'$

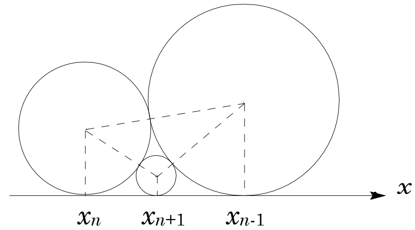
③より，$x_{n+1}-x_n=-2\sqrt{r_{n+1}r_n}$　$\cdots\cdots\cdots③'$

①$'$＋③$'$＝②$'$ より，

$$2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}=2\sqrt{r_nr_{n-1}}-2\sqrt{r_{n+1}r_n}$$

$$\frac{1}{\sqrt{r_{n+1}}}=\frac{1}{\sqrt{r_n}}+\frac{1}{\sqrt{r_{n-1}}}$$，よって，$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$

(ii)　n が偶数のときは，$x_n<x_{n+1}<x_{n-1}$



①より，$x_n-x_{n-1}=-2\sqrt{r_nr_{n-1}}$　$\cdots\cdots\cdots①''$

②より，$x_{n+1}-x_{n-1}=-2\sqrt{r_{n+1}r_{n-1}}$　$\cdots②''$

③より，$x_{n+1}-x_n=2\sqrt{r_{n+1}r_n}$　$\cdots\cdots\cdots③''$

①$''$＋③$''$＝②$''$ より，$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}$

(i)(ii)のいずれの場合も，$q_{n+1}=q_n+q_{n-1}\cdots④$

ここで，$r_1=\dfrac{1}{2}$，$r_2=\dfrac{1}{8}$ から，$q_1=\dfrac{1}{\sqrt{2r_1}}=1$，$q_2=\dfrac{1}{\sqrt{2r_2}}=2$

すると④から，帰納的に q_n はすべて整数となる。

(2) (i) n が奇数のとき，③′より $x_{n+1}-x_n=-\dfrac{1}{q_nq_{n+1}}$

$q_nq_{n+1}(x_{n+1}-x_n)=-1$，$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=-1$ ………⑤

(ii) n が偶数のとき，③″より同様にして，$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=1$…………⑤′

⑤⑤′をまとめて，$p_{n+1}q_n-p_nq_{n+1}=(-1)^n$ ……………⑥

すると，$p_nq_{n-1}-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}$……………⑦

④を⑥に代入して，$p_{n+1}q_n-p_nq_n-p_nq_{n-1}=(-1)^n$ ……………⑧

⑦＋⑧より，$p_{n+1}q_n-p_nq_n-p_{n-1}q_n=(-1)^{n-1}+(-1)^n$

$(p_{n+1}-p_n-p_{n-1})q_n=0$，$q_n\neq 0$ から $p_{n+1}=p_n+p_{n-1}$ ………⑨

ここで $p_1=q_1x_1=1\cdot 1=1$，$p_2=q_2x_2=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$

すると⑨から，帰納的に p_n はすべて整数となる。

また，p_n と q_n が互いに素でないとすると，k_n を 2 以上の整数として，

$p_n=k_np_n'$，$q_n=k_nq_n'$，$p_{n+1}=k_{n+1}p_{n+1}'$，$q_{n+1}=k_{n+1}q_{n+1}'$

⑥に代入すると，$k_nk_{n+1}(p_{n+1}'q_n'-p_n'q_{n+1}')=(-1)^n$……………⑩

$p_{n+1}'q_n'-p_n'q_{n+1}'$ は整数で，k_nk_{n+1} は 4 以上の整数なので，⑩は不成立。

よって，p_n と q_n は互いに素である。

(3) $p_1=p_2=1$，$q_1=1$，$q_2=2$ と，④⑨より，$p_{n+1}=q_n$，$p_n=q_{n-1}$

これより，$x_{n+1}=\dfrac{p_{n+1}}{q_{n+1}}=\dfrac{q_n}{q_{n+1}}$，$q_n=x_{n+1}q_{n+1}$……………⑪

$x_n=\dfrac{p_n}{q_n}=\dfrac{q_{n-1}}{q_n}$，$q_{n-1}=x_nq_n=x_nx_{n+1}q_{n+1}$……………⑫

⑪⑫を④に代入すると，$q_{n+1}=x_{n+1}q_{n+1}+x_nx_{n+1}q_{n+1}$

$q_{n+1}\neq 0$ から，$(1+x_n)x_{n+1}=1$，$x_{n+1}=\dfrac{1}{1+x_n}$

条件より，$\alpha=\dfrac{1}{1+\alpha}$ $(\alpha>0)$ とすると，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

$$|x_{n+1}-\alpha|=\left|\frac{1}{1+x_n}-\frac{1}{1+\alpha}\right|=\frac{1}{(1+x_n)(1+\alpha)}|\alpha-x_n|=\frac{\alpha}{1+x_n}|\alpha-x_n|$$

$\dfrac{\alpha}{1+x_n}<\alpha<\dfrac{2}{3}$ より，$|x_{n+1}-\alpha|<\dfrac{2}{3}|x_n-\alpha|$

すると，$|x_n-\alpha|\leqq|x_1-\alpha|\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ （等号は $n=1$ のとき成立）

$n\to\infty$ のとき，$|x_1-\alpha|\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}\to 0$ から $|x_n-\alpha|\to 0$，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\alpha=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

コメント

他の問題の 2 倍程度の量があります。(1)はよくある頻出題で，漸化式を立てることによって，q_n が整数であることを示すものです。ところが(2)は一筋縄ではいきません。p_n が整数であることをどのようにして示すかを見つけるのが最初の関門です。こんなときは具体的に考えます。④から $q_1=1$，$q_2=2$，$q_3=3$，$q_4=5$，$q_5=8$，$q_6=13$ となります。また，$p_1=p_2=1$ から⑥を用いて次々に計算していくと，$p_3=2$，$p_4=3$，$p_5=5$，$p_6=8$ となり，これから数列 $\{p_n\}$ と $\{q_n\}$ の類似性が発見できます。これをもとにして，上の解をつくりました。(3)も難問ですが，この試行が役に立ちました。

問　題

θ は $0 \leqq \theta < 2\pi$ をみたす実数とする。xy 平面にベクトル $\vec{a} = (\cos\theta, \sin\theta)$，$\vec{b} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$ をとり，点 P_n，Q_n，$n = 1, 2, \cdots$ を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1} = (1, 0)$，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} = \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - (\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} = 4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - (\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\right\}$$

で定める。ただし，O は原点で，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}$ および $\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n}$ はベクトルの内積を表す。$\overrightarrow{\mathrm{OP}_n} = (x_n, y_n)$ とおく。数列 $\{x_n\}$，$\{y_n\}$ がともに収束する θ の範囲を求めよ。さらに，このような θ に対して，極限値 $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$，$\lim\limits_{n\to\infty} y_n$ を求めよ。 [1998]

解答例

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}_n} - (\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_n})\vec{a}\\ &= (x_n, y_n) - (x_n\cos\theta + y_n\sin\theta)(\cos\theta, \sin\theta)\\ &= (x_n(1-\cos^2\theta) - y_n\sin\theta\cos\theta,\ -x_n\sin\theta\cos\theta + y_n(1-\sin^2\theta))\\ &= (x_n\sin^2\theta - y_n\sin\theta\cos\theta,\ -x_n\sin\theta\cos\theta + y_n\cos^2\theta)\\ &= (x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)(\sin\theta, -\cos\theta)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+1}} &= 4\left\{\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n} - (\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}_n})\vec{b}\right\}\\ &= 4(x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)\left\{(\sin\theta, -\cos\theta) - \frac{1}{4}(\sqrt{3}\sin\theta - \cos\theta)(\sqrt{3}, 1)\right\}\\ &= (x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta,\ -\sqrt{3}\sin\theta - 3\cos\theta)\\ &= (x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)(1, -\sqrt{3})\end{aligned}$$

よって，$x_{n+1} = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)(x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)$ ……………①

$y_{n+1} = -\sqrt{3}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)(x_n\sin\theta - y_n\cos\theta)$ ………②

①②より，$y_{n+1} = -\sqrt{3}x_{n+1}$

これから，$y_n = -\sqrt{3}x_n$ （$n \geqq 2$）

①に代入して，$x_{n+1} = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 x_n$ ………③

③より，$y_{n+1} = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 y_n$ ………………④

なお初項は，①より $x_2 = (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\sin\theta$

②より $y_2 = -\sqrt{3}(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)\sin\theta$

以上より，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$ が収束する条件は，

$$\sin\theta = 0 \text{ または } 0 \leqq (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 \leqq 1$$

(i)　$\sin\theta = 0$ のとき，$\theta = 0,\ \pi$

(ii)　$0 \leqq (\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^2 \leqq 1$ のとき，$-1 \leqq \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta \leqq 1$ となるので，

$-1 \leqq 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leqq 1$ から，$-\frac{1}{2} \leqq \sin\left(\theta + \frac{\pi}{3}\right) \leqq \frac{1}{2}$

条件より $0 \leqq \theta < 2\pi$ なので，$\frac{5}{6}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{7}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi \leqq \theta + \frac{\pi}{3} \leqq \frac{13}{6}\pi$

すなわち，$\frac{1}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$

(i)(ii)より，$\{x_n\}$，$\{y_n\}$が収束する θ の範囲は，

$$\theta = 0,\ \frac{1}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi,\ \theta = \pi,\ \frac{3}{2}\pi \leqq \theta \leqq \frac{11}{6}\pi$$

ここで，③より $x_n = \sin\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^{1+2(n-2)} = \sin\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^{2n-3}$

④より $y_n = -\sqrt{3}\sin\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^{1+2(n-2)} = -\sqrt{3}\sin\theta(\sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta)^{2n-3}$

これから，$\lim_{n\to\infty} x_n$，$\lim_{n\to\infty} y_n$ の値は，

$\theta = 0$，π のとき，$n \geqq 2$ で $x_n = y_n = 0$ から，$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$

$\theta = \frac{1}{2}\pi$，$\frac{3}{2}\pi$ のとき，$n \geqq 2$ で $x_n = x_2 = 1$，$y_n = y_2 = -\sqrt{3}$ から

$$\lim_{n\to\infty} x_n = 1 \quad \lim_{n\to\infty} y_n = -\sqrt{3}$$

$\theta = \frac{5}{6}\pi$，$\frac{11}{6}\pi$ のとき，$n \geqq 2$ で $x_n = x_2 = -\frac{1}{2}$，$y_n = y_2 = \frac{\sqrt{3}}{2}$ から

$$\lim_{n\to\infty} x_n = -\frac{1}{2} \quad \lim_{n\to\infty} y_n = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$\frac{1}{2}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi$，$\frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{11}{6}\pi$ のとき，$-1 < \sin\theta + \sqrt{3}\cos\theta < 1$ から

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} y_n = 0$$

コメント

特別な考え方は必要でなく，計算力だけが問われている問題です。丁寧に計算すれば，完答することができます。もっともかなりの計算量はありますが。

問　題

実数 a，b に対して，$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$ とし，$0<\theta<\pi$ で定義された関数 $g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$ を考える。

(1)　$f(\theta)$ と $g(\theta)$ を $x=\cos\theta$ の整式で表せ。

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとるための a，b についての条件を求めよ。また，条件を満たす点 $(a,\ b)$ が描く図形を座標平面上に図示せよ。　[2017]

解答例

(1)　$f(\theta)=\cos 3\theta+a\cos 2\theta+b\cos\theta$ に対して，$x=\cos\theta$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(\theta)&=4\cos^3\theta-3\cos\theta+a(2\cos^2\theta-1)+b\cos\theta\\ &=4x^3-3x+a(2x^2-1)+bx=4x^3+2ax^2+(b-3)x-a \end{aligned}$$

また，$0<\theta<\pi$ のとき，$g(\theta)=\dfrac{f(\theta)-f(0)}{\cos\theta-1}$ に対して，

$$\begin{aligned} g(\theta)&=\frac{4x^3+2ax^2+(b-3)x-a-(1+a+b)}{x-1}\\ &=\frac{(x-1)\{4x^2+(2a+4)x+2a+b+1\}}{x-1}=4x^2+(2a+4)x+2a+b+1 \end{aligned}$$

(2)　$g(\theta)$ が $0<\theta<\pi$ の範囲で最小値 0 をとる条件は，$h(x)=g(\theta)$ とおくと，$h(x)$ が $-1<x<1$ の範囲で最小値 0 をとる条件に対応するので，(1)より，

$$\begin{aligned} h(x)&=4\Big(x+\frac{a+2}{4}\Big)^2-\frac{(a+2)^2}{4}+2a+b+1\\ &=4\Big(x+\frac{a+2}{4}\Big)^2+\frac{-a^2+4a+4b}{4} \end{aligned}$$

(i)　$-\dfrac{a+2}{4}\leqq -1$，$1\leqq -\dfrac{a+2}{4}$ $(a\leqq -6,\ 2\leqq a)$ のとき

$-1<x<1$ で，$h(x)$ の最小値は存在しないので，不適である。

(ii)　$-1<-\dfrac{a+2}{4}<1$ $(-6<a<2)$ のとき

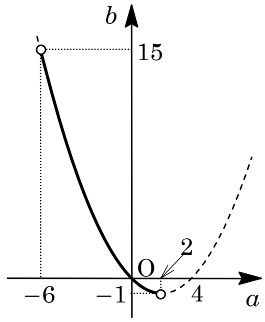
$-1<x<1$ の範囲で最小値 0 となる条件は，$\dfrac{-a^2+4a+4b}{4}=0$ から，

$$b=\frac{1}{4}a^2-a=\frac{1}{4}(a-2)^2-1$$

(i)(ii)より，求める a, b についての条件は，

$$-6<a<2,\ b=\frac{1}{4}(a-2)^2-1$$

また，点 $(a,\ b)$ が描く図形は，右図の放物線の太線部となる。ただし，両端点は含まない。



コメント

(i)の場合，開区間において最小値が存在しないことは，注意すべきところです。

問　題

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\frac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x < e < \left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$ [2016]

解答例

まず，$f(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1=x\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $f''(x)<0$ より，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(x)>\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right\}=\log e-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<1$，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e$ ………①

また，$g(x)=\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}-1=\left(x+\frac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $g''(x)>0$ より，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$g'(x)<\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}=\log(e\cdot 1)-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>1$，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e$ ………②

したがって，①②より，$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

コメント

微分の不等式への応用問題です。まず，証明すべき式の各辺に対数をとって，式の同値変形をした後に，差をとって微分するという定型的な処理をしています。

問　題

a を実数とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)$，$g(x)$ を次のように定める。

$$f(x)=\frac{\cos x}{x},\ \ g(x)=\sin x+ax$$

このとき $y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが $x>0$ において共有点をちょうど 3 つもつような a をすべて求めよ。 [2013]

解答例

$f(x)=\frac{\cos x}{x}$，$g(x)=\sin x+ax$ を連立すると，$\frac{\cos x}{x}=\sin x+ax$ より，

$$\frac{\cos x}{x^2}-\frac{\sin x}{x}=a,\ \ \frac{\cos x-x\sin x}{x^2}=a$$

さて，$h(x)=\frac{\cos x-x\sin x}{x^2}$ とおくと，$x>0$ において，$y=f(x)$ のグラフと $y=g(x)$ のグラフが共有点をちょうど 3 つもつ条件は，$y=h(x)$ のグラフと直線 $y=a$ が共有点をちょうど 3 つもつ条件に等しい。

$$h'(x)=\frac{(-\sin x-\sin x-x\cos x)x^2-(\cos x-x\sin x)\cdot 2x}{x^4}$$

$$=\frac{-x^2\cos x-2\cos x}{x^3}=-\frac{x^2+2}{x^3}\cos x$$

ここで，n を 0 以上の整数とすると，$h'(x)=0$ の解は，$x=n\pi+\frac{\pi}{2}$ となり，

$$h\Big(n\pi+\frac{\pi}{2}\Big)=-\frac{(-1)^n}{n\pi+\frac{\pi}{2}}=\frac{2\cdot(-1)^{n+1}}{(2n+1)\pi}$$

すると，$h(x)$ の増減は下表のようになり，

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{5}{2}\pi$	$\cdots$	$\frac{7}{2}\pi$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$h(x)$	∞	$\searrow$	$-\frac{2}{\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{3\pi}$	$\searrow$	$-\frac{2}{5\pi}$	$\nearrow$	$\frac{2}{7\pi}$	$\searrow$

これから，$h(x)$ は n が偶数のとき負の極小値をもち，その値は n の値の増加に伴って増加する。また，n が奇数のとき正の極大値をもち，その値は n の値の増加に伴って減少する。

以上より，共有点をちょうど 3 つもつ条件は，

$$a=-\frac{2}{5\pi},\ \ \frac{2}{7\pi}<a<\frac{2}{3\pi}$$

コメント

定数分離によって，共有点の個数を調べるという頻出のタイプです。なお，解答例では $y=h(x)$ のグラフは記していませんが，下書きでは，しっかりと書いています。

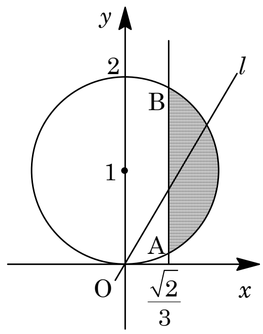
問　題

次の連立不等式で定まる座標平面上の領域 D を考える。

$$x^2+(y-1)^2\leqq 1,\ \ x\geqq\frac{\sqrt{2}}{3}$$

直線 l は原点を通り，D との共通部分が線分となるものとする。その線分の長さ L の最大値を求めよ。また，L が最大値をとるとき，x 軸と l のなす角 $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ の余弦 $\cos\theta$ を求めよ。　[2012]

解答例



領域 $D : x^2+(y-1)^2\leqq 1$，$x\geqq\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ において，その境界線 $x^2+(y-1)^2=1$ ……①と $x=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ ……②の交点は，

$$\frac{2}{9}+(y-1)^2=1,\ \ y=1\pm\frac{\sqrt{7}}{3}$$

そこで，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 1-\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{3},\ 1+\dfrac{\sqrt{7}}{3}\right)$とおく。

さて，直線 OA, OB の傾きを，それぞれ α，β とすると，

$$\alpha=\frac{3-\sqrt{7}}{\sqrt{2}},\ \ \beta=\frac{3+\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$$

ここで，直線 l の方程式を $y=mx$ ……③とすると，$\alpha<m<\beta$ において，①③より，

$$x^2+(mx-1)^2=1,\ \ (1+m^2)x^2-2mx=0$$

これより，原点と異なる交点の x 座標は，$x=\dfrac{2m}{1+m^2}$ となり，l と D の共通部分のの線分の長さ L は，$L=\sqrt{1+m^2}\left(\dfrac{2m}{1+m^2}-\dfrac{\sqrt{2}}{3}\right)$

$$L'=\frac{2m}{2\sqrt{1+m^2}}\left(\frac{2m}{1+m^2}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)+\sqrt{1+m^2}\cdot\frac{2(1+m^2)-4m^2}{(1+m^2)^2}$$

$$=\frac{6m^2-\sqrt{2}m-\sqrt{2}m^3}{3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}+\frac{2-2m^2}{(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}=\frac{-\sqrt{2}(m^3+m-3\sqrt{2})}{3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}$$

$$=\frac{-\sqrt{2}(m-\sqrt{2})(m^2+\sqrt{2}m+3)}{3(1+m^2)\sqrt{1+m^2}}$$

m	α	$\cdots$	$\sqrt{2}$	$\cdots$	β
L'		$+$	0	$-$	
L		$\nearrow$	$\dfrac{\sqrt{6}}{3}$	$\searrow$	

L の最大値は $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$，このとき x 軸と l のなす角を θ とすると，$m=\tan\theta=\sqrt{2}$，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

コメント

導関数を求める計算が少し難ですが，それ以外は基本的な計算問題です。

問　題

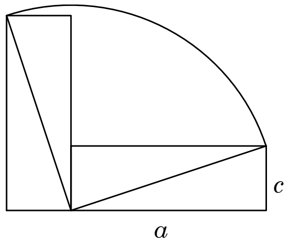
3 辺の長さが a と b と c の直方体を，長さが b の 1 辺を回転軸として $90°$ 回転させるとき，直方体が通過する点全体がつくる立体を V とする。

(1)　V の体積を a, b, c を用いて表せ。

(2)　$a+b+c=1$ のとき，V の体積のとりうる値の範囲を求めよ。　[2010]

解答例

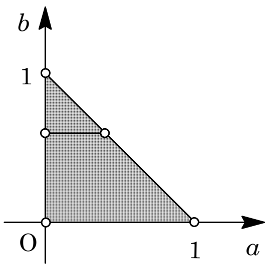
(1)　立体 V の回転軸に垂直な断面は，右図のように，半径 $\sqrt{a^2+c^2}$ の四分円に，直角をはさむ 2 辺の長さが a と c の直角三角形を 2 個合わせたものである。



これより，V の体積 W は，

$$W=\left\{\frac{1}{4}\pi\left(\sqrt{a^2+c^2}\right)^2+2\cdot\frac{1}{2}ac\right\}b$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(a^2+c^2)+abc\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$c=1-a-b>0$ から，$a+b<1$ となり，①より，



$$W=\frac{1}{4}\pi b\{(a+c)^2-2ac\}+abc$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(a+c)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)abc$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)ab(1-a-b)$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\{-a^2+(1-b)a\}$$
$$=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2+\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\left\{\left(a-\frac{1-b}{2}\right)^2-\frac{(1-b)^2}{4}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

②において，いったん b の値を固定して $W=f(a)$ とおくと，$0<a<1-b$ より，

$$f\left(\frac{1-b}{2}\right)\leqq f(a)<f(0)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2-\left(\frac{1}{2}\pi-1\right)b\cdot\frac{(1-b)^2}{4}=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)b(1-b)^2$

$$f(0)=\frac{1}{4}\pi b(1-b)^2$$

さらに，$g(b)=b(1-b)^2$ とおくと，

$$g'(b)=(1-b)^2-2b(1-b)$$
$$=(1-b)(1-3b)$$

b	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$g'(b)$		$+$	0	$-$	
$g(b)$	0	$\nearrow$	$\frac{4}{27}$	$\searrow$	0

よって，$0<b<1$ のとき $0<g(b)\leqq\frac{4}{27}\cdots\cdots\cdots④$

すると，$f\left(\frac{1-b}{2}\right)=\left(\frac{1}{8}\pi+\frac{1}{4}\right)g(b)>0$，$f(0)=\frac{1}{4}\pi g(b)\leqq\frac{1}{4}\pi\cdot\frac{4}{27}=\frac{1}{27}\pi$

以上より，③④から，$0<W<\frac{1}{27}\pi$ である。

コメント

いったん 1 文字を固定することにより，とりうる値の範囲を求めていくという東大頻出の問題です。(2)において，W のとりうる範囲を，b を消去して $a+c$ と ac をもとに考えることもできますが，計算がやや煩雑になります。

問　題

(1)　実数 x が $-1<x<1$，$x\neq 0$ を満たすとき，次の不等式を示せ。

$$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}$$

(2)　次の不等式を示せ。$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$　　[2009]

解答例

(1)　$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}$ とおくと，

$$f(x)=\frac{1}{x}\log(1+x)-\frac{x-1}{x}\log(1-x)=\frac{1}{x}\{\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)\}$$

さらに，$g(x)=\log(1+x)-(x-1)\log(1-x)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-\log(1-x)+\frac{x-1}{1-x}=-\frac{x}{1+x}-\log(1-x)$$

$$g''(x)=-\frac{(1+x)-x}{(1+x)^2}+\frac{1}{1-x}$$

$$=\frac{x(x+3)}{(1+x)^2(1-x)}$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g''(x)$		$-$	0	$+$	
$g'(x)$		↘	0	↗	

これより，$g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)$ は単調に増加し，$-1<x<0$ のとき $g(x)<0$，$0<x<1$ のとき $g(x)>0$ となる。

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	1
$g'(x)$		$+$	0	$+$	
$g(x)$		↗	0	↗	

すると，$-1<x<1$，$x\neq 0$ のとき，

$$f(x)=\log(1+x)^{\frac{1}{x}}-\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}=\frac{1}{x}g(x)>0$$

よって，$\log(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<\log(1+x)^{\frac{1}{x}}$，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}\cdots\cdots\cdots(*)$

(2)　$(*)$より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1+x)^{1-\frac{1}{x}}$ となり，

$$(1-x^2)^{1-\frac{1}{x}}<1+x$$

$x=-\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.9999^{101}<0.99$

また，$(*)$より，$(1-x)^{1-\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}<(1+x)^{\frac{1}{x}}(1-x)^{\frac{1}{x}}$ となり，

$$1-x<(1-x^2)^{\frac{1}{x}}$$

$x=\dfrac{1}{100}$ とおくと，$0.99<0.9999^{100}$

以上より，$0.9999^{101}<0.99<0.9999^{100}$ が成り立つ。

コメント

微分法の不等式への応用問題です。なお，(2)の式変形については，結論の不等式を $(1-10^{-4})^{1+10^2}<1-10^{-2}<(1-10^{-4})^{10^2}$ とみて方針を立てました。

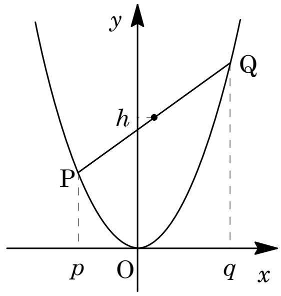
問　題

放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 P, Q がある。線分 PQ の中点の y 座標を h とする。

(1) 線分 PQ の長さ L と傾き m で, h を表せ。

(2) L を固定したとき, h がとりうる値の最小値を求めよ。　[2008]

解答例



(1) $\mathrm{P}(p,\ p^2)$, $\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおくと, 線分 PQ の中点の y 座標 h は,

$$h=\frac{1}{2}(p^2+q^2)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, 線分 PQ の傾き m は,

$$m=\frac{p^2-q^2}{p-q}=p+q\cdots\cdots\cdots②$$

また, 線分 PQ の長さ L は,

$$L^2=(p-q)^2+(p^2-q^2)^2=(p-q)^2\{1+(p+q)^2\}\cdots\cdots\cdots③$$

②を③に代入して, $L^2=(p-q)^2(1+m^2)$ から, $(p-q)^2=\dfrac{L^2}{1+m^2}$

②より, $(p+q)^2=m^2$ となり, ①に代入すると,

$$h=\frac{1}{2}(p^2+q^2)=\frac{1}{4}\{(p+q)^2+(p-q)^2\}=\frac{1}{4}\left(m^2+\frac{L^2}{1+m^2}\right)$$

(2) $m^2=u\geqq 0$ とおくと, $h=\dfrac{1}{4}\left(u+\dfrac{L^2}{1+u}\right)$ となり,

$$\frac{dh}{du}=\frac{1}{4}\left\{1-\frac{L^2}{(1+u)^2}\right\}=\frac{(u+1+L)(u+1-L)}{4(1+u)^2}$$

(i) $L\geqq 1$ のとき

h の増減は右表のようになり, $u=L-1$ のとき, h は最小値 $\dfrac{1}{4}(2L-1)$ をとる。

u	0	$\cdots$	$L-1$	$\cdots$
$\dfrac{dh}{du}$		$-$	0	$+$
h	$\dfrac{1}{4}L^2$	↘	$\dfrac{1}{4}(2L-1)$	↗

(ii) $0<L<1$ のとき

$\dfrac{dh}{du}>0$ より, h は単調増加し, $u=0$ のとき, h は最小値 $\dfrac{1}{4}L^2$ をとる。

コメント

微分法の標準的な問題です。なお, (2)において, 相加平均と相乗平均の関係を用いると, (i)の場合の結論が導けます。

問　題

関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=x^3-3x,\ f_2(x)=\{f_1(x)\}^3-3f_1(x),\ f_3(x)=\{f_2(x)\}^3-3f_2(x)$$

以下同様に, $n\geqq 3$ に対して関数 $f_n(x)$ が定まったならば, 関数 $f_{n+1}(x)$ を

$$f_{n+1}(x)=\{f_n(x)\}^3-3f_n(x)$$

で定める。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$f_1(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2) a を実数とする。$f_2(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3) n を 3 以上の自然数とする。$f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n であることを示せ。 [2004]

解答例

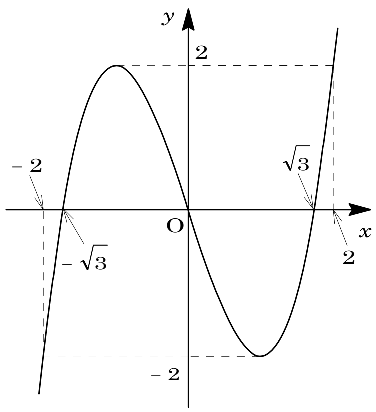
(1) $f_1(x)=x^3-3x$ より, $f_1'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f_1(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は, $y=f_1(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので, 右表より, $a<-2$, $2<a$ のとき 1 個, $a=\pm2$ のとき 2 個, $-2<a<2$ のとき 3 個である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f_1'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f_1(x)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

(2) $f_1(x)=t$ とおくと, $f_2(x)=a$ は,

$$t^3-3t=a\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



(i) $a<-2$ のとき

$(*)$は $t<-2$ に解を 1 個もつので, $f_1(x)=t$ の解 x は 1 個である。

(ii) $a=-2$ のとき

$(*)$の解は $t=-2,\ 1$ となり, $f_1(x)=t$ の解 x は $2+3=5$ 個となる。

(iii) $-2<a<2$ のとき

$(*)$は $-2<t<2$ に解を 3 個もつので, $f_1(x)=t$ の解 x は $3\times3=9$ 個である。

(iv) $a=2$ のとき

$(*)$の解は $t=-1,\ 2$ となり, $f_1(x)=t$ の解 x は $3+2=5$ 個となる。

(v) $a>2$ のとき

$(*)$は $t>2$ に解を 1 個もつので, $f_1(x)=t$ は解 x は 1 個である。

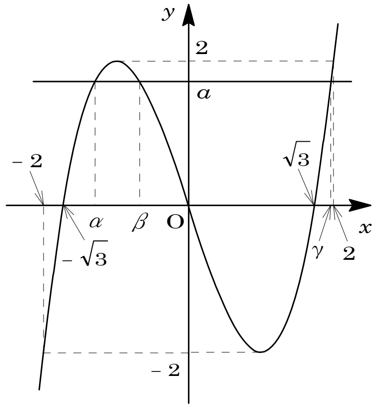
(i)～(v)より, $f_2(x)=a$ の解の個数は, 次のようになる。

$a<-2$, $2<a$ のとき 1 個, $a=\pm2$ のとき 5 個, $-2<a<2$ のとき 9 個

(3)　$-2<a<2$ のとき，$f_n(x)=a$ を満たす実数 x が $-2<x<2$ に 3^n 個あるという命題が，すべての自然数に対して成立することを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$f_1(x)=a$ の解は，(1)より $-2<x<2$ に 3 個ある。これを $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおく。



(ii)　$n=k$ のとき

$-2<t<2$ のとき $f_k(x)=t$ の解が $-2<x<2$ に 3^k 個あると仮定する。

このとき，$f_{k+1}(x)=a$ は，

$$t^3-3t=a,\ f_1(f_k(x))=a$$

すると，解は $f_k(x)=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ より求まる。

仮定より，$f_k(x)=\alpha$，$f_k(x)=\beta$，$f_k(x)=\gamma$ の解は，$-2<\alpha<\beta<\gamma<2$ から，$-2<x<2$ に，それぞれ 3^k 個ずつあり，それらはすべて異なる。

すなわち，$f_{k+1}(x)=a$ の解は，$-2<x<2$ に $3\times3^k=3^{k+1}$ 個存在する。

(i)(ii)より，$n\geqq1$，$-2<a<2$ では，$f_n(x)=a$ は $-2<x<2$ に 3^n 個の解をもつ。

そこで，$n\geqq1$ を $n\geqq3$ とし，a の値を $a=0$ に限定しても上の命題は成り立つので，$n\geqq3$ のとき $f_n(x)=0$ を満たす実数 x の個数は 3^n である。

コメント

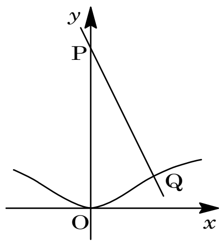
実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。特に(3)で，数学的帰納法を十分に機能させるために，拡張した命題を証明しなくてはならないという点が，その最たるところです。

問　題

a は正の実数とする。xy 平面の y 軸上に点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ をとる。関数 $y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ のグラフを C とする。C 上の点 Q で次の条件を満たすものが原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ 以外に存在するような a の範囲を求めよ。

条件：Q における C の接線が直線 PQ と直交する。　[2002]

解答例



$y=\dfrac{x^2}{x^2+1}$ より，$y'=\dfrac{2x(x^2+1)-x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=\dfrac{2x}{(x^2+1)^2}$

点 $\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{t^2}{t^2+1}\right)(t\neq 0)$ とおくと，Q における接線の傾きが $y'=\dfrac{2t}{(t^2+1)^2}$ より，点 Q における法線は，

$$y-\frac{t^2}{t^2+1}=-\frac{(t^2+1)^2}{2t}(x-t)$$

条件より，点 $\mathrm{P}(0,\ a)$ を通るので，$a-\dfrac{t^2}{t^2+1}=-\dfrac{(t^2+1)^2}{2t}(-t)$

$$a=\frac{t^2}{t^2+1}+\frac{(t^2+1)^2}{2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(t)=\dfrac{t^2}{t^2+1}+\dfrac{(t^2+1)^2}{2}$ とおくと，

$$f'(t)=\frac{2t}{(t^2+1)^2}+(t^2+1)\cdot 2t=\frac{2t\{1+(t^2+1)^3\}}{(t^2+1)^2}$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	↘	$\dfrac{1}{2}$	↗

右表より, (＊)が $t\neq 0$ の解をもつ条件は $a>\dfrac{1}{2}$ である。

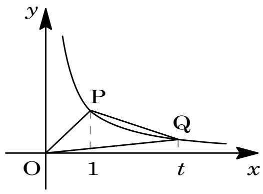
コメント

難しそうな感じのする設問ですが，法線の y 切片の存在範囲を求める問題と題意を翻訳できれば，簡単です。

問　題

実数 $t>1$ に対し，xy 平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$を頂点とする三角形の面積を $a(t)$ とし，線分 OP，OQ と双曲線 $xy=1$ とで囲まれた部分の面積を $b(t)$ とする。このとき，$c(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)}$ とおくと，関数 $c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少することを示せ。 [2001]

解答例



$t>1$ に対し，$\mathrm{P}(1,\ 1)$，$\mathrm{Q}\left(t,\ \dfrac{1}{t}\right)$より，

$$a(t)=\frac{1}{2}\left|\, t-\frac{1}{t}\,\right|=\frac{1}{2}\left(t-\frac{1}{t}\right)=\frac{t^2-1}{2t}$$

また，$b(t)=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2+\displaystyle\int_1^t \frac{1}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot t\cdot\frac{1}{t}=\big[\log x\big]_1^t=\log t$

よって，$c(t)=\dfrac{b(t)}{a(t)}=\dfrac{2t\log t}{t^2-1}$

$$c'(t)=\frac{2(\log t+1)(t^2-1)-2t\log t\cdot 2t}{(t^2-1)^2}=-\frac{2(t^2\log t-t^2+\log t+1)}{(t^2-1)^2}$$

ここで，$f(t)=t^2\log t-t^2+\log t+1$ とおくと，

$$f'(t)=2t\log t+t^2\cdot\frac{1}{t}-2t+\frac{1}{t}=\frac{2t^2\log t-t^2+1}{t}$$

さらに，$g(t)=2t^2\log t-t^2+1$ とおくと，

$$g'(t)=4t\log t+2t^2\cdot\frac{1}{t}-2t=4t\log t$$

$t>1$ のとき，$g'(t)>0$ より，$g(t)>g(1)=0$

よって，$f'(t)>0$ となり，$f(t)>f(1)=0$

したがって，$c'(t)<0$ となるので，$c(t)$ は $t>1$ においてつねに減少する。

コメント

関数の増減についての基本問題です。新しい関数をどんどん設定し，微分していけば, そのうち題意と同値な式にたどりつくというタイプです。

問　題

a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。 [1998]

解答例

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ より，

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$ から，$f'(x)=0$ は 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=\frac{a-\frac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を $g(a)$ とすると，

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↗

$$\begin{aligned}g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3\\&=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$g(a)$ は $a-\dfrac{1}{a}=0$，すなわち $a=\pm1$ のとき最小になる。

コメント

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題です。しかし，上の解法は知識として持っておかない限り，無理でしょう。ただし本問では，$f'(x)=0$ の解が $x=\dfrac{2}{3}a,\ -\dfrac{2}{3a}$ となりますので, a の正負で場合分けをして，直接 $g(a)$ を求めても，計算量がやや増える程度ですみます。

問　題

n を正の整数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　関数 $g(x)$ を次のように定める。

$$g(x)=\frac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ g(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

$f(x)$ を連続な関数とし，p，q を実数とする。$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ を満たす x に対して $p\leqq f(x)\leqq q$ が成り立つとき，次の不等式を示せ。$p\leqq n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q$

(2)　関数 $h(x)$ を次のように定める。

$$h(x)=-\frac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\text{ のとき}),\ h(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$$

このとき，次の極限を求めよ。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$　[2015]

解答例

(1)　$g(x)=\dfrac{\cos(\pi x)+1}{2}\ (|x|\leqq 1\text{ のとき})$，$g(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$ より，

$$g(nx)=\frac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ g(nx)=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

ここで，$g(nx)\geqq 0$ かつ $p\leqq f(x)\leqq q\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$ から，

(i)　$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ のとき　$\dfrac{p}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}\leqq g(nx)f(x)\leqq\dfrac{q}{2}\{\cos(n\pi x)+1\}$

(ii)　$|x|>\dfrac{1}{n}$ のとき　$g(nx)f(x)=0$

さて，$I_n=n\displaystyle\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$ とおくと，

$$\frac{np}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq\frac{nq}{2}\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

$$np\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx\leqq I_n\leqq nq\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx$$

そこで，$\displaystyle\int_{0}^{\frac{1}{n}}\{\cos(n\pi x)+1\}dx=\left[\frac{\sin(n\pi x)}{n\pi}+x\right]_{0}^{\frac{1}{n}}=\frac{1}{n}$ から，$np\cdot\dfrac{1}{n}\leqq I_n\leqq nq\cdot\dfrac{1}{n}$

$$p\leqq n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx\leqq q\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$g(nx)=\dfrac{\cos(n\pi x)+1}{2}\left(|x|\leqq\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$，$g(nx)=0\left(|x|>\dfrac{1}{n}\text{ のとき}\right)$ より，

$$(g(nx))'=-\frac{n\pi}{2}\sin(n\pi x)\left(|x|<\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ (g(nx))'=0\left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

また，$h(x)=-\dfrac{\pi}{2}\sin(\pi x)\ (|x|\leqq 1\text{ のとき})$，$h(x)=0\ (|x|>1\text{ のとき})$ より，

$$h(nx)=-\frac{\pi}{2}\sin(n\pi x)\ \left(|x|\leqq\frac{1}{n}\text{ のとき}\right),\ h(nx)=0\ \left(|x|>\frac{1}{n}\text{ のとき}\right)$$

すると，$x=\pm\dfrac{1}{n}$ のときも含めて，$h(nx)=\dfrac{1}{n}(g(nx))'$ である。

さて，$J_n=n^2\displaystyle\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx$ とおくと，

$$J_n=n^2\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}(g(nx))'\log(1+e^{x+1})dx$$

$$=n\Big[g(nx)\log(1+e^{x+1})\Big]_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$$

ここで，$g(1)=g(-1)=0$ から，$J_n=-n\displaystyle\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)\cdot\frac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}dx$

さらに，$|x|\leqq\dfrac{1}{n}$ において，$f(x)=\dfrac{e^{x+1}}{1+e^{x+1}}=1-\dfrac{1}{1+e^{x+1}}$ とおくと，

$$J_n=-n\int_{-\frac{1}{n}}^{\frac{1}{n}}g(nx)f(x)dx=-n\int_{-1}^{1}g(nx)f(x)dx$$

そして，$f(x)$ は単調に増加し，$\dfrac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq f(x)\leqq\dfrac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}$ となり，(＊)から，

$$\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}\leqq -J_n\leqq\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}},\quad -\frac{e^{\frac{1}{n}+1}}{1+e^{\frac{1}{n}+1}}\leqq J_n\leqq-\frac{e^{-\frac{1}{n}+1}}{1+e^{-\frac{1}{n}+1}}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\int_{-1}^{1}h(nx)\log(1+e^{x+1})dx=\lim_{n\to\infty}J_n=-\frac{e}{1+e}$

コメント

(2)では，当然のことながら，(1)の結果を利用するだろうということは推測できますが，このときボトルネックになるのは，$g'(x)=h(x)$ という $g(x)$ と $h(x)$ の関係です。ただ，それに気づけば秘かにほくそ笑むことができ，部分積分の出番という方針が立ちます。もっとも，$f(x)=\log(1+e^{x+1})$ という単純な置き換えは出題されないだろうと推測することも当然のことですが……。

問　題

u を実数とする。座標平面上の 2 つの放物線 $C_1 : y = -x^2 + 1$，$C_2 : y = (x-u)^2 + u$ を考える。C_1 と C_2 が共有点をもつような u の値の範囲は，ある実数 a, b により，$a \leqq u \leqq b$ と表される。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) u が $a \leqq u \leqq b$ を満たすとき，C_1 と C_2 の共有点を $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ とする。ただし，共有点が 1 点のときは，P_1 と P_2 は一致し，ともにその共有点を表すとする。$2|x_1y_2 - x_2y_1|$ を u の式で表せ。

(3) (2)で得られる u の式を $f(u)$ とする。定積分 $I = \displaystyle\int_a^b f(u)\,du$ を求めよ。 [2014]

解答例

(1) $C_1 : y = -x^2 + 1 \cdots\cdots$①，$C_2 : y = (x-u)^2 + u \cdots\cdots$②を連立すると，

$$-x^2 + 1 = (x-u)^2 + u,\ 2x^2 - 2ux + u^2 + u - 1 = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

C_1 と C_2 が共有点をもつ条件は，③が実数解をもつ条件に対応し，

$$D/4 = u^2 - 2(u^2 + u - 1) \geqq 0,\ u^2 + 2u - 2 \leqq 0$$

よって，$-1-\sqrt{3} \leqq u \leqq -1+\sqrt{3}$ より，$a = -1-\sqrt{3}$，$b = -1+\sqrt{3}$ である。

(2) ③の実数解を $x = x_1,\ x_2$ とおくと，$\mathrm{P}_1(x_1,\ -{x_1}^2+1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ -{x_2}^2+1)$ となり，

$$x_1 + x_2 = u,\ x_1x_2 = \frac{1}{2}(u^2 + u - 1) \cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$f(u) = 2|x_1y_2 - x_2y_1|$ とおくと，

$$\begin{aligned} f(u) &= 2|x_1(-{x_2}^2+1) - x_2(-{x_1}^2+1)| = 2|x_1x_2(-x_2+x_1) + x_1 - x_2| \\ &= 2|(x_1-x_2)(x_1x_2+1)| = 2|x_1x_2+1|\sqrt{(x_1+x_2)^2 - 4x_1x_2} \end{aligned}$$

④を代入すると，

$$\begin{aligned} f(u) &= |(u^2+u-1)+2|\sqrt{u^2 - 2(u^2+u-1)} \\ &= |u^2+u+1|\sqrt{-u^2-2u+2} \end{aligned}$$

さらに，$u^2+u+1 = \left(u+\dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{3}{4} > 0$ より，$f(u) = (u^2+u+1)\sqrt{-u^2-2u+2}$

(3) 条件より，$I = \displaystyle\int_a^b f(u)\,du = \int_{-1-\sqrt{3}}^{-1+\sqrt{3}} (u^2+u+1)\sqrt{-(u+1)^2+3}\,du$

ここで，$u+1 = v$ とおくと，

$$I = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} \{(v-1)^2 + v\}\sqrt{-v^2+3}\,dv = \int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}} (v^2 - v + 1)\sqrt{-v^2+3}\,dv$$

さらに，$v = \sqrt{3}\sin\theta\left(-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dv = \sqrt{3}\cos\theta \cdot d\theta$ から，

$$I=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1)\cdot\sqrt{3}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\sqrt{3}\cos\theta\,d\theta$$

$$=3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(3\sin^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta+1)(1-\sin^2\theta)\,d\theta$$

$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin^3\theta\,d\theta=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sin\theta\,d\theta=0$ より，$\displaystyle I=6\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-3\sin^4\theta+2\sin^2\theta+1)\,d\theta$

すると，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4\theta\,d\theta=\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{3}{16}\pi$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{4}$ から，

$$I=6\Big(-3\cdot\frac{3}{16}\pi+2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{\pi}{2}\Big)=\frac{21}{8}\pi$$

コメント

実質的には，定積分の計算問題です。スペースの関係上，公式を利用しています。

問　題

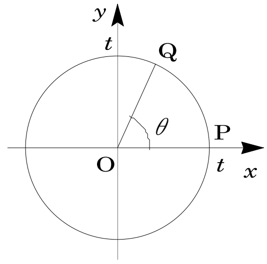
L を正定数とする。座標平面の x 軸上の正の部分にある点 $\mathrm{P}(t,\ 0)$ に対し，原点 O を中心とし点 P を通る円周上を，P から出発して反時計回りに道のり L だけ進んだ点を $\mathrm{Q}(u(t),\ v(t))$ と表す。

(1) $u(t)$，$v(t)$ を求めよ。

(2) $0<a<1$ の範囲の実数 a に対し，積分 $f(a)=\displaystyle\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt$ を求めよ。

(3) 極限 $\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}$ を求めよ。　[2011]

解答例



(1) 動径 OQ を，x 軸の正の部分から反時計回りに測った角を θ とすると，$t\theta=L$ より，$\theta=\dfrac{L}{t}$ となるので，

$$u(t)=t\cos\frac{L}{t},\ \ v(t)=t\sin\frac{L}{t}$$

(2) $$u'(t)=\cos\frac{L}{t}-t\Big(-\frac{L}{t^2}\Big)\sin\frac{L}{t}=\cos\frac{L}{t}+\frac{L}{t}\sin\frac{L}{t}$$

$$v'(t)=\sin\frac{L}{t}+t\Big(-\frac{L}{t^2}\Big)\cos\frac{L}{t}=\sin\frac{L}{t}-\frac{L}{t}\cos\frac{L}{t}$$

すると，$\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2=\Big(\cos\dfrac{L}{t}+\dfrac{L}{t}\sin\dfrac{L}{t}\Big)^2+\Big(\sin\dfrac{L}{t}-\dfrac{L}{t}\cos\dfrac{L}{t}\Big)^2=1+\dfrac{L^2}{t^2}$

$$f(a)=\int_a^1\sqrt{\{u'(t)\}^2+\{v'(t)\}^2}\,dt=\int_a^1\sqrt{1+\frac{L^2}{t^2}}\,dt=\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t}dt$$

ここで，$\sqrt{t^2+L^2}=s$ とおくと，$t^2+L^2=s^2$ から，$2tdt=2sds$ となる。

また，$\alpha=\sqrt{a^2+L^2}$，$\beta=\sqrt{1+L^2}$ とすると，

$$f(a)=\int_a^1\frac{\sqrt{t^2+L^2}}{t^2}\cdot t\,dt=\int_\alpha^\beta\frac{s}{s^2-L^2}\cdot s\,ds=\int_\alpha^\beta\Big(1+\frac{L^2}{s^2-L^2}\Big)ds$$

$$=\beta-\alpha+\frac{L}{2}\int_\alpha^\beta\Big(\frac{1}{s-L}-\frac{1}{s+L}\Big)ds=\beta-\alpha+\frac{L}{2}\Big[\log\frac{s-L}{s+L}\Big]_\alpha^\beta$$

$$=\beta-\alpha+\frac{L}{2}\log\frac{\beta-L}{\beta+L}-\frac{L}{2}\log\frac{\alpha-L}{\alpha+L}=\beta-\alpha+\frac{L}{2}\log\Big(\frac{\beta-L}{\beta+L}\cdot\frac{\alpha+L}{\alpha-L}\Big)$$

ここで，$\dfrac{\beta-L}{\beta+L}\cdot\dfrac{\alpha+L}{\alpha-L}=\dfrac{\sqrt{1+L^2}-L}{\sqrt{1+L^2}+L}\cdot\dfrac{\sqrt{a^2+L^2}+L}{\sqrt{a^2+L^2}-L}=\dfrac{(\sqrt{a^2+L^2}+L)^2}{a^2(\sqrt{1+L^2}+L)^2}$ から，

$$f(a)=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}+L}{a(\sqrt{1+L^2}+L)}$$

(3)　(2)より，$f(a)=\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}+L\log\dfrac{\sqrt{a^2+L^2}+L}{\sqrt{1+L^2}+L}-L\log a$ となり，

$$\frac{1}{\log a}\left(\sqrt{1+L^2}-\sqrt{a^2+L^2}\right)\to 0,\ \frac{1}{\log a}\log\frac{\sqrt{a^2+L^2}+L}{\sqrt{1+L^2}+L}\to 0\quad (a\to +0)$$

したがって，$\displaystyle\lim_{a\to+0}\frac{f(a)}{\log a}=-L$

コメント

(2)の定積分の計算では，最初，$t=L\tan\varphi$ と置き換えをしましたが，かなりの量となり，そこで，方針を変更した結果，上の解答例となったわけです。

問　題

(1)　すべての自然数 k に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}$$

(2)　$m>n$ であるようなすべての自然数 m と n に対して，次の不等式を示せ。

$$\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$$ [2010]

解答例

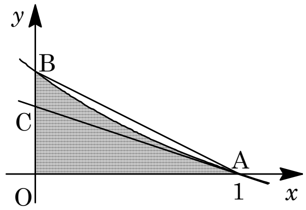
(1)　自然数 k に対して，$f(x)=\dfrac{1-x}{k+x}=-1+\dfrac{k+1}{k+x}$ とおくと, $0\leqq x\leqq 1$ において,

$$f'(x)=-\frac{k+1}{(k+x)^2}<0,\ \ f''(x)=\frac{2(k+1)}{(k+x)^3}>0$$

これより，$f(x)$ は単調に減少し，曲線 $y=f(x)$ は下に凸となる。

ここで，$y=f(x)$ と x 軸，y 軸との交点を，それぞれ

$A(1,\ 0)$，$B\left(0,\ \dfrac{1}{k}\right)$ とおく。



また，点 A における接線は,

$$y=-\frac{k+1}{(k+1)^2}(x-1)=-\frac{1}{k+1}(x-1)$$

この接線と y 軸の交点を C とすると，$C\left(0,\ \dfrac{1}{k+1}\right)$

となる。

そこで，面積を比較して，$\triangle\mathrm{OAC}<\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx<\triangle\mathrm{OAB}$ より,

$$\frac{1}{2(k+1)}<\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx<\frac{1}{2k}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$\displaystyle\int_0^1\frac{1-x}{k+x}dx=\int_0^1\left(-1+\frac{k+1}{k+x}\right)dx=\Big[-x+(k+1)\log(k+x)\Big]_0^1$

$$=-1+(k+1)\{\log(k+1)-\log k\}=-1+(k+1)\log\frac{k+1}{k}$$

すると，①より，$\dfrac{1}{2(k+1)}<-1+(k+1)\log\dfrac{k+1}{k}<\dfrac{1}{2k}$ となり,

$$\frac{1}{2(k+1)^2}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{1}{2(k+1)(k+2)}<\dfrac{1}{2(k+1)^2}$ より,

$$\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}<\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②において，$k=n$ から $k=m-1$ までの和をとると,

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}<\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)<\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2(k+1)(k+2)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{m+1}\right)$

$$=\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}$$

$$\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2k(k+1)}=\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{2}\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{m}\right)=\frac{m-n}{2mn}$$

また，$\displaystyle\sum_{k=n}^{m-1}\left(-\frac{1}{k+1}+\log\frac{k+1}{k}\right)=-\sum_{k=n}^{m-1}\frac{1}{k+1}+\sum_{k=n}^{m-1}\{\log(k+1)-\log k\}$

$$=-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}+\log m-\log n=\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}$$

よって，③より，$\displaystyle\frac{m-n}{2(m+1)(n+1)}<\log\frac{m}{n}-\sum_{k=n+1}^{m}\frac{1}{k}<\frac{m-n}{2mn}$

コメント

凸関数のグラフの性質を用いて，(1)の不等式の証明をしています。$f(x)$ のグラフを描くと，三角形との関係が見えてきます。(2)も，一癖ある設問です。

問　題

以下の問いに答えよ。

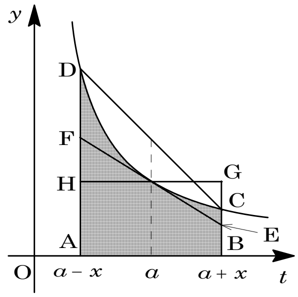
(1)　$0<x<a$ を満たす実数 x, a に対し，次を示せ。$\dfrac{2x}{a}<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)$

(2)　(1)を利用して，次を示せ。$0.68<\log 2<0.71$

ただし，$\log 2$ は 2 の自然対数とする。　[2007]

解答例

(1)　$y=\dfrac{1}{t}$ に対して，$y'=-\dfrac{1}{t^2}$，$y''=\dfrac{2}{t^3}$ となり，$t>0$ において，曲線 $y=\dfrac{1}{t}$ は下に凸で単調に減少する。



このため，曲線上の点における接線は曲線の下側にあり，曲線上の 2 点を結ぶ線分は曲線の上側にある。

ここで，$0<x<a$ より，$0<a-x<a<a+x$ において，右図から，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>(\text{台形 FABE})=(\text{長方形 HABG})$$

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt>\frac{1}{a}\cdot 2x=\frac{2x}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<(\text{台形 ABCD})$ より，

$$\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdot 2x=x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{2x}{a}<\displaystyle\int_{a-x}^{a+x}\frac{1}{t}dt<x\left(\frac{1}{a+x}+\frac{1}{a-x}\right)\cdots\cdots\cdots③$

(2)　まず，$\log 2=\displaystyle\int_1^2\frac{1}{t}dt=\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt+\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt\cdots\cdots\cdots④$

③において，$a=\dfrac{5}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\dfrac{2}{5}<\displaystyle\int_1^{\frac{3}{2}}\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{2}{3}+1\right)=\frac{5}{12}\cdots\cdots\cdots⑤$

また，$a=\dfrac{7}{4}$，$x=\dfrac{1}{4}$ とすると，$\dfrac{2}{7}<\displaystyle\int_{\frac{3}{2}}^2\frac{1}{t}dt<\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\right)=\frac{7}{24}\cdots\cdots\cdots⑥$

④⑤⑥より，$\dfrac{24}{35}=\dfrac{2}{5}+\dfrac{2}{7}<\log 2<\dfrac{5}{12}+\dfrac{7}{24}=\dfrac{17}{24}$

さらに，$\dfrac{24}{35}>0.685>0.68$，$\dfrac{17}{24}<0.709<0.71$ に注意すると，$0.68<\log 2<0.71$

コメント

(2)では，まず $\dfrac{a+x}{a-x}=2$ すなわち $a=3x$ として計算しましたが，$\dfrac{2}{3}<\log 2<\dfrac{3}{4}$ しか示せず，「やはり」という感じがしました。そこで，考え直したのが上の解です。

問　題

$x>0$ を定義域とする関数 $f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ について，以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)\ (x>0)$ は，実数全体を定義域とする逆関数をもつことを示せ。すなわち，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる $x>0$ がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) 前問(1)で定められた逆関数を $y=g(x)\ (-\infty<x<\infty)$ とする。このとき，定積分 $\displaystyle\int_{8}^{27} g(x)\,dx$ を求めよ。　[2006]

解答例

(1) $x>0$ のとき，$f(x)=\dfrac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{12(3e^{3x}-3e^{x})(e^{2x}-1)-12(e^{3x}-3e^{x})(2e^{2x})}{(e^{2x}-1)^2}=\frac{12(e^{5x}+3e^{x})}{(e^{2x}-1)^2}$$

すると，$f'(x)>0$ より，$f(x)$ は単調に増加する。

ここで，$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=-\infty$

$$\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{3x}-3e^{x})}{e^{2x}-1}=\lim_{x\to\infty}\frac{12(e^{x}-3e^{-x})}{1-e^{-2x}}=\infty$$

以上より, $x>0$ において，任意の実数 a に対して，$f(x)=a$ となる x がただ 1 つ存在する。

(2) まず，$x=f(t)$ とおくと，$\dfrac{dx}{dt}=f'(t)$ となる。

また，$f(t)=8$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=8$ となり，

$$3e^{3t}-2e^{2t}-9e^{t}+2=0,\ (e^{t}-2)(3e^{2t}+4e^{t}-1)=0$$

ここで, $t>0$ より $e^{t}>1$ となり，$e^{t}=2$，$t=\log 2$ である。

同様に，$f(t)=27$ とすると，$\dfrac{12(e^{3t}-3e^{t})}{e^{2t}-1}=27$ となり，

$$4e^{3t}-9e^{2t}-12e^{t}+9=0,\ (e^{t}-3)(4e^{2t}+3e^{t}-3)=0$$

$e^{t}>1$ から，$e^{t}=3$，$t=\log 3$ である。

よって，
$$\begin{aligned}\int_{8}^{27} g(x)\,dx&=\int_{\log 2}^{\log 3} g(f(t))f'(t)\,dt=\int_{\log 2}^{\log 3} t f'(t)\,dt\\&=\Big[\,t f(t)\,\Big]_{\log 2}^{\log 3}-\int_{\log 2}^{\log 3} f(t)\,dt\\&=\log 3\cdot f(\log 3)-\log 2\cdot f(\log 2)-\int_{\log 2}^{\log 3} f(t)\,dt\end{aligned}$$

$$= 27\log 3 - 8\log 2 - 12\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^t(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt$$

さて，$u = e^t$ とおくと，$\dfrac{du}{dt} = e^t$ であり，$t = \log 2$ のとき $u = 2$，$t = \log 3$ のとき $u = 3$ となることより，

$$\int_{\log 2}^{\log 3} \frac{e^t(e^{2t}-3)}{e^{2t}-1}\,dt = \int_2^3 \frac{u^2-3}{u^2-1}\,du = \int_2^3 \left(1 - \frac{2}{u^2-1}\right)du$$
$$= \int_2^3 \left(1 - \frac{1}{u-1} + \frac{1}{u+1}\right)du = \left[u + \log\left|\frac{u+1}{u-1}\right|\right]_2^3$$
$$= 1 + \log 2 - \log 3$$

以上より，$\displaystyle\int_8^{27} g(x)\,dx = 27\log 3 - 8\log 2 - 12(1 + \log 2 - \log 3)$

$$= -12 - 20\log 2 + 39\log 3$$

コメント

逆関数の定積分を題材とした重要問題です。過去にも，たとえば 1998 年に東北大で類題が出ています。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。　　　　[2003]

解答例

$f(x) = ax^2 + bx + c$ に対して，$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$ より，

$$a - b + c = -1 \cdots\cdots①,\quad a + b + c = 1 \cdots\cdots②$$

①②より，$b = 1$，$c = -a$

さて，$g(x) = 3x^2 - 1 - f(x)$ とおくと，

$$g(x) = 3x^2 - 1 - (ax^2 + x - a) = (3-a)x^2 - x + (a-1)$$

ここで，$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$g(x) \geqq 0$ である条件は，

(i)　$3 - a \leqq 0\ (a \geqq 3)$ のとき　$y = g(x)$ のグラフは，直線または上に凸の放物線であり，$g(-1) = 3$，$g(1) = 1$ より，$g(x) \geqq 0$ は成立する。

(ii)　$3 - a > 0\ (a < 3)$ のとき

$y = g(x)$ のグラフは，下に凸の放物線で，軸は $x = \dfrac{1}{2(3-a)} > 0$ である。

(ii-i)　$0 < \dfrac{1}{2(3-a)} \leqq 1\ \left(a \leqq \dfrac{5}{2}\right)$ のとき　$g(x) \geqq 0$ である条件は，$g(x) = 0$ の判別式が 0 以下であることと等しい。

$$D = 1 - 4(3-a)(a-1) \leqq 0,\quad 4a^2 - 16a + 13 \leqq 0$$

よって，$\dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{4+\sqrt{3}}{2}$ となり，$a \leqq \dfrac{5}{2}$ と合わせて $\dfrac{4-\sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2}$

(ii-ii)　$\dfrac{1}{2(3-a)} > 1\ \left(\dfrac{5}{2} < a < 3\right)$ のとき　$g(-1) = 3$, $g(1) = 1$ より $g(x) \geqq 0$ は成立。

(i)(ii)より，$a \geqq \dfrac{4-\sqrt{3}}{2}$

このとき，$I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (2ax+1)^2 dx = 2\int_{0}^{1} (4a^2x^2 + 1)dx$

$$= 2\left[\frac{4}{3}a^2x^3 + x\right]_0^1 = \frac{8}{3}a^2 + 2$$

すると，$I \geqq \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{4-\sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 = \dfrac{44 - 16\sqrt{3}}{3}$ となる。

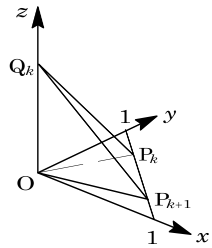
コメント

理系では条件が 1 つ少ないために場合分けが必要となります。

問　題

O を原点とする xyz 空間に点 $\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$, $k=0,\ 1,\ \cdots,\ n$, をとる。また, z 軸上 $z\geqq 0$ の部分に, 点 Q_k を線分 $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k$ の長さが 1 になるようにとる。三角錐 $\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}\mathrm{Q}_k$ の体積を V_k とおいて, 極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k$ を求めよ。 [2002]

解答例



$\mathrm{P}_k\left(\dfrac{k}{n},\ 1-\dfrac{k}{n},\ 0\right)$, $\mathrm{P}_{k+1}\left(\dfrac{k+1}{n},\ 1-\dfrac{k+1}{n},\ 0\right)$ に対して, $\mathrm{Q}_k(0,\ 0,\ z_k)$ とおくと, 条件より, $\mathrm{P}_k\mathrm{Q}_k=1$ なので,

$$\left(\frac{k}{n}\right)^2+\left(1-\frac{k}{n}\right)^2+{z_k}^2=1,\quad {z_k}^2=2\cdot\frac{k}{n}-2\left(\frac{k}{n}\right)^2$$

$z_k\geqq 0$ より, $z_k=\sqrt{2\cdot\dfrac{k}{n}-2\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$

さて, $\triangle\mathrm{OP}_k\mathrm{P}_{k+1}=\dfrac{1}{2}\left|\dfrac{k}{n}\left(1-\dfrac{k+1}{n}\right)-\dfrac{k+1}{n}\left(1-\dfrac{k}{n}\right)\right|$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{k}{n}-\frac{k(k+1)}{n^2}-\frac{k+1}{n}+\frac{k(k+1)}{n^2}\right|$$

$$=\frac{1}{2}\left|\frac{-1}{n}\right|=\frac{1}{2n}$$

すると, $V_k=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2n}\sqrt{2\cdot\dfrac{k}{n}-2\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{6}\cdot\dfrac{1}{n}\sqrt{\dfrac{k}{n}-\left(\dfrac{k}{n}\right)^2}$

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\sqrt{\frac{k}{n}-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\frac{\sqrt{2}}{6}\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx$$

ここで, $I=\displaystyle\int_0^1\sqrt{x-x^2}\,dx=\int_0^1\sqrt{-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}}\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1\sqrt{1-4\left(x-\frac{1}{2}\right)^2}\,dx$ から, $2\left(x-\dfrac{1}{2}\right)=\sin\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$I=\frac{1}{2}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cdot\frac{1}{2}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta$$

$$=\frac{1}{8}\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{8}\pi$$

以上より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}V_k=\frac{\sqrt{2}}{6}\cdot\frac{1}{8}\pi=\frac{\sqrt{2}}{48}\pi$

コメント

区分求積法を利用して, 級数の和を求める基本問題です。

問　題

次の等式を満たす関数$f(x)\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$がただ 1 つ定まるための実数$a$, bの条件を求めよ。また，そのときの$f(x)$を決定せよ。

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$

ただし，$f(x)$は区間$0\leqq x\leqq 2\pi$で連続な関数とする。　[2001]

解答例

まず，$\displaystyle\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\sin x\cos y+\cos x\sin y)f(y)\,dy$

$$=\frac{a}{2\pi}\left(\sin x\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)\,dy+\cos x\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)\,dy\right)$$

また，$\displaystyle\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy=\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\cos x\cos y+\sin x\sin y)f(y)\,dy$

$$=\frac{b}{2\pi}\left(\cos x\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)\,dy+\sin x\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)\,dy\right)$$

ここで，$\displaystyle A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos y\,f(y)\,dy$ ……①，$\displaystyle B=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin y\,f(y)\,dy$ ……②とおくと，

$$f(x)=\frac{a}{2\pi}\int_0^{2\pi}\sin(x+y)f(y)\,dy+\frac{b}{2\pi}\int_0^{2\pi}\cos(x-y)f(y)\,dy+\sin x+\cos x$$
$$=a(A\sin x+B\cos x)+b(A\cos x+B\sin x)+\sin x+\cos x$$
$$=(aA+bB+1)\sin x+(aB+Ab+1)\cos x\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$\displaystyle A=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{(aA+bB+1)\sin y\cos y+(aB+Ab+1)\cos^2 y\}dy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{(aA+bB+1)\sin 2y+(aB+Ab+1)(1+\cos 2y)\}dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(aB+Ab+1)\cdot 2\pi$$

$2A=aB+Ab+1$，$(2-b)A-aB=1$ ………④

②③より，$\displaystyle B=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\{(aA+bB+1)\sin^2 y+(aB+Ab+1)\sin y\cos y\}dy$

$$=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{2}\{(aA+bB+1)(1-\cos 2y)+(aB+Ab+1)\sin 2y\}dy$$
$$=\frac{1}{2\pi}\cdot\frac{1}{2}(aA+bB+1)\cdot 2\pi$$

$2B=aA+bB+1$，$-aA+(2-b)B=1$ ………⑤

④⑤をまとめると，$\begin{pmatrix}2-b & -a\\ -a & 2-b\end{pmatrix}\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$ ………⑥

さて，$f(x)$がただ 1 つ定まるのは，$\begin{pmatrix}A\\ B\end{pmatrix}$がただ 1 つ定まることと同値なので，⑥

から$\begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix}^{-1}$が存在する。

$$(2-b)^2-a^2\neq 0,\ \ a\neq\pm(2-b)$$

このとき，$\begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 2-b & -a \\ -a & 2-b \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}=\dfrac{1}{(2-b)^2-a^2}\begin{pmatrix} 2-b & a \\ a & 2-b \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$=\frac{1}{(2-b+a)(2-b-a)}\begin{pmatrix} 2-b+a \\ a+2-b \end{pmatrix}=\frac{1}{2-b-a}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

③より，$f(x)=\left(\dfrac{a}{2-b-a}+\dfrac{b}{2-b-a}+1\right)\sin x+\left(\dfrac{a}{2-b-a}+\dfrac{b}{2-b-a}+1\right)\cos x$

$$=\frac{2}{2-a-b}(\sin x+\cos x)$$

コメント

いわゆる置き換え型の積分方程式で，超頻出題です。計算の難易もちょうどよく，入試対策の練習問題として適しています。後半，行列を利用していますが，普通に連立方程式を解いても構いません。

問　題

$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx > 8$ であることを示せ。ただし，$\pi = 3.14\cdots$ は円周率，$e = 2.71\cdots$ は自然対数の底である。 [1999]

解答例

まず，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x \sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x(1-\cos 2x)\,dx = \frac{1}{2}(e^{\pi}-1) - \frac{1}{2}\int_0^{\pi} e^x \cos 2x\,dx$

$(e^x\cos 2x)' = e^x\cos 2x - 2e^x\sin 2x \cdots\cdots\cdots①$

$(e^x\sin 2x)' = e^x\sin 2x + 2e^x\cos 2x \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$5e^x\cos 2x = (e^x\cos 2x + 2e^x\sin 2x)'$

$$e^x\cos 2x = \frac{1}{5}\left\{e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)\right\}'$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\cos 2x\,dx = \frac{1}{5}\Big[e^x(\cos 2x + 2\sin 2x)\Big]_0^{\pi} = \frac{1}{5}(e^{\pi}-1)$

以上より，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx = \frac{1}{2}(e^{\pi}-1) - \frac{1}{10}(e^{\pi}-1) = \frac{2}{5}(e^{\pi}-1)$

すると，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx > 8 \iff \frac{2}{5}(e^{\pi}-1) > 8 \iff e^{\pi} > 21$

ここで，$e > 2.7$，$\pi > 3.1$ より，

$$e^{\pi} > 2.7^{3.1} = 2.7^{3+0.1} = 2.7^3 \times 2.7^{0.1} = 19.683 \times 2.7^{0.1} \cdots\cdots\cdots③$$

さて，二項定理より，

$$\left(1+\frac{1}{10}\right)^{10} = 1 + {}_{10}\mathrm{C}_1\frac{1}{10} + {}_{10}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{10}\right)^2 + {}_{10}\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{10}\right)^3 + {}_{10}\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{10}\right)^4 + {}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{10}\right)^5$$
$$+ \cdots\cdots + {}_{10}\mathrm{C}_9\left(\frac{1}{10}\right)^9 + \left(\frac{1}{10}\right)^{10}$$
$$< 1 + 1 + 45\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^2 + 120\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^3 + 210\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^4 + 252\cdot\left(\frac{1}{10}\right)^5 \times 6$$
$$= 2.60612 < 2.7$$

よって，$1.1^{10} < 2.7 \iff 2.7^{0.1} > 1.1 \cdots\cdots\cdots④$

③④より，$e^{\pi} > 19.683 \times 1.1 = 21.6513 > 21$ となるので，$\displaystyle\int_0^{\pi} e^x\sin^2 x\,dx > 8$ である。

コメント

$e^{\pi} > 21$ まではすぐに求まるのですが，問題はその後でした。e も π も小数第 2 位を切り捨てるなどというかなり荒っぽいやり方で e^{π} を評価しましたが，これで題意の不等式を示すことができました。なお，1.1^{10} を考えた根拠は，21 を 19.683 で割った商からというのは言うまでもありません。

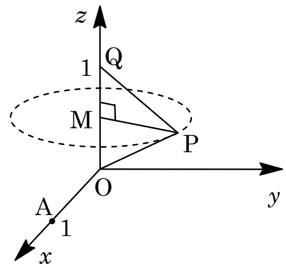
問　題

点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A(1, 0, 0) に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0° \leqq \theta \leqq 180°$ とする。

(1) 点 Q が (0, 0, 1) にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。 [2017]

解答例



(1) 原点 O，点 Q(0, 0, 1) に対して，線分 OQ の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。

さて，座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かすとき，$\mathrm{PM}\perp\mathrm{OQ}$，$\mathrm{PM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，点 P の座標は，φ を $0° \leqq \varphi < 360°$ として，$\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\ \dfrac{1}{2}\right)$ とおくことができる。すると，点 P の x 座標がとりうる値の範囲は，

$$-\frac{\sqrt{3}}{2} \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi \leqq \frac{\sqrt{3}}{2}$$

また，点 A(1, 0, 0) に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ $(0° \leqq \theta \leqq 180°)$ とするとき，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta,\ \ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=1\cdot1\cdot\cos\theta$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$ となり，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $30° \leqq \theta \leqq 150°$ である。

(2) (1)から，Q(0, 0, 1) のとき，辺 OP が通過してできる図形は，頂点が原点で，中心軸が z 軸の円錐側面 C である。そして，点 Q が平面 $x=0$ 上を動く，すなわち yz 平面上で中心が原点で半径 1 の円を描くとき，辺 OP が通過してできる図形 K は，円錐側面 C を x 軸のまわりに回転したものとなる。

さて，円錐側面 C 上の任意の点を $\mathrm{X}(x,\ y,\ z)$ とおくと，$\angle\mathrm{QOX}=\dfrac{\pi}{3}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\frac{\pi}{3},\ \ z=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{2}$$

$0 \leqq z \leqq \dfrac{1}{2}$ から，両辺を 2 乗すると，$4z^2=x^2+y^2+z^2$ となり，

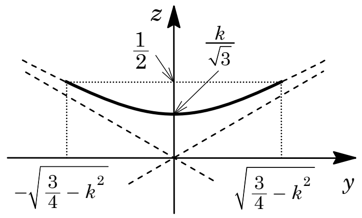
$$3z^2=x^2+y^2\ \ \left(0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に，円錐側面 C を，x 軸に垂直な平面 $x=k$ で切断したときの切り口を考える。

ただし，(1)から，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq k \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする。

すると，(＊)から，$3z^2 = k^2 + y^2$ となり，

$$y^2 - 3z^2 = -k^2 \quad \left(0 \leqq z \leqq \frac{1}{2}\right)$$



$k \neq 0$ のときは双曲線の一部となり，平面 $x = k$ 上に図示すると，右図の太線部のようになる。

さらに，この双曲線（太線部）を点 $(k,\ 0,\ 0)$ のまわりに回転してできるドーナツ形の外径を R，内径を r，面積を $S(k)$ とおくと，

$$R = \sqrt{\left(\frac{3}{4} - k^2\right) + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{1 - k^2},\quad r = \frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$S(k) = \pi(R^2 - r^2) = \pi\left(1 - k^2 - \frac{k^2}{3}\right) = \pi\left(1 - \frac{4}{3}k^2\right)$$

また，$k = 0$ のときも，上記の $S(k)$ は成立している。

以上より，求める図形 K の体積を V とすると，yz 平面に関する対称性より，

$$V = 2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} S(k)\,dk = 2\pi \int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}} \left(1 - \frac{4}{3}k^2\right)dk = 2\pi\left[k - \frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$= 2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right) = \frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

コメント

東大で頻出の立体の体積を求める問題です。(1)が誘導になり，立式の方針が決まります。なお，円錐側面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

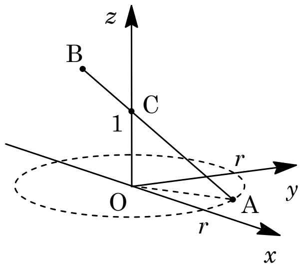
座標空間内を，長さ 2 の線分 AB が次の 2 条件(a), (b)を満たしながら動く。

(a)　点 A は平面 $z=0$ 上にある。

(b)　点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ が線分 AB 上にある。

このとき，線分 AB が通過することのできる領域を K とする。K と不等式 $z\geqq 1$ の表す範囲との共通部分の体積を求めよ。　[2016]

解答例



xy 平面上の点 A を，$r\geqq 0$ として $\mathrm{A}(r\cos\theta,\ r\sin\theta,\ 0)$ とおくと，$\mathrm{B}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ に対して，条件から，$\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=\sqrt{r^2+1}$ より $\mathrm{BC}=2-\sqrt{r^2+1}$ となる。

点 B は AC を $2:\left(2-\sqrt{r^2+1}\right)$ に外分することから，

$$x=\frac{r\cos\theta\left(\sqrt{r^2+1}-2\right)}{\sqrt{r^2+1}}\cdots\cdots\cdots①$$

$$y=\frac{r\sin\theta\left(\sqrt{r^2+1}-2\right)}{\sqrt{r^2+1}}\cdots\cdots\cdots②,\quad z=\frac{2}{\sqrt{r^2+1}}\cdots\cdots\cdots③$$

なお，$2-\sqrt{r^2+1}\geqq 0$ より $r^2+1\leqq 4$ となり，$0\leqq r\leqq\sqrt{3}$ ……④である。

ここで，線分 AB が通過してできる領域 K の $z\geqq 1$ の部分は，線分 BC の通過領域であり，すなわち $z\geqq 1$ における点 B の描く曲面で囲まれた立体の内部となる。

さて，①②より $x^2+y^2=\dfrac{r^2\left(\sqrt{r^2+1}-2\right)^2}{r^2+1}\cdots\cdots\cdots⑤$

③から，$r^2+1=\dfrac{4}{z^2}$ となり，⑤に代入すると，$x^2+y^2=\dfrac{\left(\dfrac{4}{z^2}-1\right)\left(\dfrac{2}{z}-2\right)^2}{\dfrac{4}{z^2}}$ より，

$$x^2+y^2=\frac{(4-z^2)(1-z)^2}{z^2}\cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，⑥で表される点 B の描く曲面を，平面 $z=k$ で切断したとき，その切り口は，$z=k$ 上で $x^2+y^2=\dfrac{(4-k^2)(1-k)^2}{k^2}$ と表すことができ，変形すると，

$$x^2+y^2=\frac{-k^4+2k^3+3k^2-8k+4}{k^2},\quad x^2+y^2=-k^2+2k+3-\frac{8}{k}+\frac{4}{k^2}$$

この円の面積を $S(k)$ とおくと，$S(k)=\pi\left(-k^2+2k+3-\dfrac{8}{k}+\dfrac{4}{k^2}\right)$ となり，求める線分 BC の通過領域の体積 V は，③④から $1\leqq k\leqq 2$ に留意すると，

$$V=\int_1^2 S(k)\,dk=\pi\int_1^2\Big(-k^2+2k+3-\frac{8}{k}+\frac{4}{k^2}\Big)dk$$
$$=\pi\Big[-\frac{k^3}{3}+k^2+3k-8\log k-\frac{4}{k}\Big]_1^2=\Big(\frac{17}{3}-8\log 2\Big)\pi$$

コメント

条件を満たす空間図形を求め，その体積を計算する問題です。解答例では方程式を利用した処理をしましたが，$\theta=0$ のときの点 B の軌跡をもとにしても可能です。

問　題

a を正の実数とし，p を正の有理数とする。座標平面上の 2 つの曲線 $y=ax^p$ $(x>0)$ と $y=\log x$ $(x>0)$ を考える。この 2 つの曲線の共有点が 1 点のみであるとし，その共有点を Q とする。以下の問いに答えよ。必要であれば，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x^p}{\log x}=\infty$ を証明なしに用いてもよい。

(1) a および点 Q の x 座標を p を用いて表せ。

(2) この 2 つの曲線と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を p を用いて表せ。

(3) (2)で得られる立体の体積が 2π になるときの p の値を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $x>0$ で，$y=ax^p$ ……①，$y=\log x$ ……② に対し，$f(x)=ax^p-\log x$ とおくと，

$$f'(x)=apx^{p-1}-\frac{1}{x}=\frac{apx^p-1}{x}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

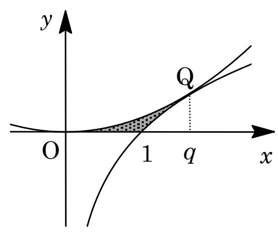
x	0	$\cdots$	$\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘		↗

さらに $\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{ax^p}{\log x}-1\right)\log x=\infty$ から，曲線①と②の共有点が 1 点のみである条件，すなわち $f(x)=0$ がただ 1 つの解をもつ条件は，

$$f\left(\left(\frac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}\right)=\frac{1}{p}-\frac{1}{p}\log\frac{1}{ap}=0$$

よって，$\dfrac{1}{ap}=e$ から $a=\dfrac{1}{ep}$ となり，共有点 Q の x 座標は $\left(\dfrac{1}{ap}\right)^{\frac{1}{p}}=e^{\frac{1}{p}}$ である。

(2) $q=e^{\frac{1}{p}}$ とおき，曲線①と②と x 軸で囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とすると，



$$V=\pi\int_0^q(ax^p)^2dx-\pi\int_1^q(\log x)^2dx$$

ここで $I_1=\displaystyle\int_0^q(ax^p)^2dx$，$I_2=\displaystyle\int_1^q(\log x)^2dx$ とおくと，

$$I_1=\frac{a^2}{2p+1}\Big[\,x^{2p+1}\,\Big]_0^q=\frac{1}{e^2p^2(2p+1)}\left(e^{\frac{1}{p}}\right)^{2p+1}=\frac{1}{p^2(2p+1)}e^{\frac{1}{p}}$$

$$I_2=\Big[\,x(\log x)^2\,\Big]_1^q-2\int_1^q\log x\,dx=q(\log q)^2-2\Big[\,x\log x\,\Big]_1^q+2\int_1^q dx$$

$$=q(\log q)^2-2q\log q+2q-2=\left(\frac{1}{p^2}-\frac{2}{p}+2\right)e^{\frac{1}{p}}-2$$

よって，$V=\pi\left\{\left(\dfrac{1}{p^2(2p+1)}-\dfrac{1}{p^2}+\dfrac{2}{p}-2\right)e^{\frac{1}{p}}+2\right\}=\pi\left(-\dfrac{4p-2}{2p+1}e^{\frac{1}{p}}+2\right)$

(3)　条件より $V=2\pi$ なので，$\dfrac{4p-2}{2p+1}=0$ となり，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

曲線①と②の共有点が 1 点のみのとき，その点において 2 曲線は共通接線をもつだろうと思えますが，ただ感覚的に立式すると危ないケースもありますので，この点は無視しました。問題文から匂ってくる出題意図を推察したわけです。なお，(2)の図は $p>1$ の場合に対応しています。

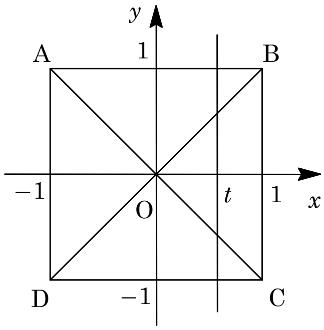
問　題

座標空間において，xy 平面内で不等式 $|x|\leqq 1$，$|y|\leqq 1$ により定まる正方形 S の 4 つの頂点を $\mathrm{A}(-1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$，$\mathrm{D}(-1,\ -1,\ 0)$ とする。正方形 S を，直線 BD を軸として回転させてできる立体を V_1，直線 AC を軸として回転させてできる立体を V_2 とする。

(1)　$0\leqq t<1$ を満たす実数 t に対し，平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積を求めよ。

(2)　V_1 と V_2 の共通部分の体積を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　正方形 S を直線 BD を軸として回転させてできる立体 V_1 は，中心 O で半径 $\sqrt{2}$ の円を底面とし，高さ $\sqrt{2}$ の直円錐を底面で 2 つ結合したものである。ここで，点 B を頂点とする円錐面上の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BO}}=|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BO}}|\cos 45^\circ\quad(x+y\geqq 0)\cdots\cdots①$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x-1,\ y-1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=(-1,\ -1,\ 0)$ なので，①より，

$$-(x-1)-(y-1)=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}\cdot\sqrt{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$-x-y+2=\sqrt{(x-1)^2+(y-1)^2+z^2}$$

$-x-y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$2xy-4x-4y+4=-2x-2y+z^2+2$$

$$z^2-2xy+2x+2y-2=0\quad(0\leqq x+y\leqq 2)\cdots\cdots\cdots②$$

次に，点 D を頂点とする直円錐面上の点を $\mathrm{Q}(x,\ y,\ z)$ とすると，

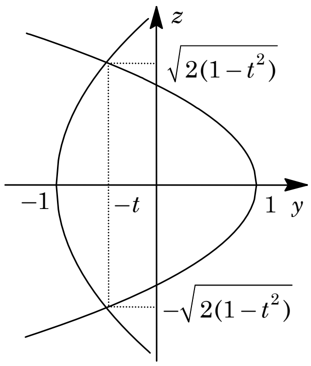
$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DO}}=|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}||\overrightarrow{\mathrm{DO}}|\cos 45^\circ\quad(x+y\leqq 0)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=(x+1,\ y+1,\ z)$，$\overrightarrow{\mathrm{DO}}=(1,\ 1,\ 0)$ なので，③より，同様にして，

$$x+y+2=\sqrt{(x+1)^2+(y+1)^2+z^2}$$

$x+y+2\geqq 0$ として，両辺を 2 乗すると，

$$z^2-2xy-2x-2y-2=0\ (-2\leqq x+y\leqq 0)\cdots\cdots④$$



さて，平面 $x=t\ (0\leqq t<1)$ による V_1 の切り口を考える。

②より，$z^2-2ty+2t+2y-2=0\ (0\leqq t+y\leqq 2)$ から，

$$z^2=-(2-2t)(y-1)$$

$$y-1=-\frac{z^2}{2-2t}\quad(-t\leqq y\leqq 2-t)\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，$z^2-2ty-2t-2y-2=0\ (-2\leqq t+y\leqq 0)$ から，

$$z^2=(2+2t)(y+1)$$

$$y+1=\frac{z^2}{2+2t}\quad(-2-t\leqq y\leqq -t)\cdots\cdots\cdots⑥$$

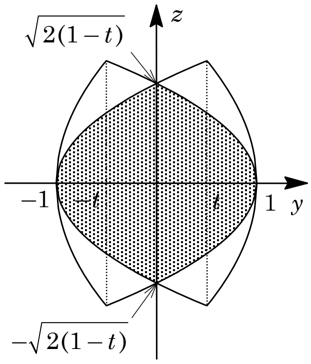
平面 $x=t$ による V_1 の切り口の面積 $S_1(t)$ は，対称性を考えて，

$$S_1(t)=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left\{\left(1-\frac{z^2}{2-2t}\right)-\left(-1+\frac{z^2}{2+2t}\right)\right\}dz$$

$$=2\int_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}\left(2-\frac{z^2}{1-t^2}\right)dz=2\left[2z-\frac{z^3}{3(1-t^2)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t^2)}}$$

$$=4\sqrt{2(1-t^2)}-\frac{4}{3}\sqrt{2(1-t^2)}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t^2}$$

(2)　立体を V_1 と直線 AC を軸として回転させてできる立体 V_2 は xz 平面に関して対称となるので，V_1 と V_2 の共通部分を，平面 $x=t$ $(0\leqq t<1)$ で切断した切り口は右図の網点部のようになる。



この面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=4\int_0^{\sqrt{2(1-t)}}\left\{1-\frac{z^2}{2(1-t)}\right\}dz$$

$$=4\left[z-\frac{z^3}{6(1-t)}\right]_0^{\sqrt{2(1-t)}}$$

$$=4\sqrt{2(1-t)}-\frac{4}{3}\sqrt{2(1-t)}=\frac{8\sqrt{2}}{3}\sqrt{1-t}$$

V_1 と V_2 は yz 平面について対称なので，この共通部分の体積 V は，

$$V=2\int_0^1 S(t)\,dt=\frac{16\sqrt{2}}{3}\left[-\frac{2}{3}(1-t)^{\frac{3}{2}}\right]_0^1=\frac{32}{9}\sqrt{2}$$

コメント

頻出している立体の体積を求める問題です。ただ，今年のものは計算量がかなり多めとなっています。なお，円錐面の方程式については，サイトの「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

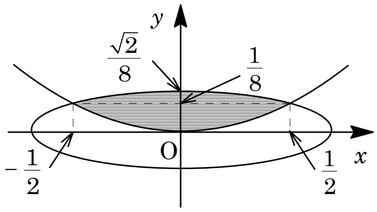
座標平面上で 2 つの不等式 $y \geqq \frac{1}{2}x^2$，$\frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$ によって定まる領域を S とする。S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_1 とし，y 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V_2 とする。

(1)　V_1 と V_2 の値を求めよ。

(2)　$\frac{V_2}{V_1}$ の値と 1 の大小を判定せよ。　[2012]

解答例

(1)　領域 $S: y \geqq \frac{1}{2}x^2$，$\frac{x^2}{4}+4y^2 \leqq \frac{1}{8}$ において，境界線



$y=\frac{1}{2}x^2$ ……①，$\frac{x^2}{4}+4y^2=\frac{1}{8}$ ……②の交点は，

$$\frac{y}{2}+4y^2=\frac{1}{8},\ 32y^2+4y-1=0$$

$$(8y-1)(4y+1)=0$$

$y \geqq 0$ から $y=\frac{1}{8}$ となり，①から $x=\pm\frac{1}{2}$

さて，②を変形しておくと，$y^2=-\frac{x^2}{16}+\frac{1}{32}$，または $x^2=\frac{1}{2}-16y^2$ である。

そこで，S を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_1 は，

$$V_1=2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\left(-\frac{x^2}{16}+\frac{1}{32}\right)dx-2\pi\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{1}{4}x^4\,dx=2\pi\left[-\frac{x^3}{48}+\frac{x}{32}\right]_0^{\frac{1}{2}}-2\pi\left[\frac{x^5}{20}\right]_0^{\frac{1}{2}}$$

$$=\left(-\frac{1}{192}+\frac{1}{32}-\frac{1}{320}\right)\pi=\frac{11}{480}\pi$$

また，S を y 軸のまわりに回転してできる立体の体積 V_2 は，

$$V_2=\pi\int_0^{\frac{1}{8}}2y\,dy+\pi\int_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}\left(\frac{1}{2}-16y^2\right)dy=\pi\left[y^2\right]_0^{\frac{1}{8}}+\pi\left[\frac{1}{2}y-\frac{16}{3}y^3\right]_{\frac{1}{8}}^{\frac{\sqrt{2}}{8}}$$

$$=\left\{\frac{1}{64}+\frac{1}{16}(\sqrt{2}-1)-\frac{1}{96}(2\sqrt{2}-1)\right\}\pi=\left(\frac{\sqrt{2}}{24}-\frac{7}{192}\right)\pi$$

(2)　$$\frac{V_2-V_1}{\pi}=\frac{\sqrt{2}}{24}-\frac{7}{192}-\frac{11}{480}=\frac{\sqrt{2}}{2^3\times 3}-\frac{7}{2^6\times 3}-\frac{11}{2^5\times 3\times 5}=\frac{\sqrt{2}}{2^3\times 3}-\frac{19}{2^6\times 5}$$

$$=\frac{1}{2^6\times 3\times 5}(40\sqrt{2}-57)=\frac{1}{2^6\times 3\times 5}(\sqrt{3200}-\sqrt{3249})<0$$

よって，$V_2-V_1<0$ となるので，$\frac{V_2}{V_1}<1$ である。

コメント

計算問題ですが，数値計算の難易度は高めです。

問　題

(1)　$x,\ y$ を実数とし，$x>0$ とする。t を変数とする 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt$ の $0\leqq t\leqq 1$ における最大値と最小値の差を求めよ。

(2)　次の条件を満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる座標平面内の領域を S とする。

　$x>0$ かつ，実数 z で $0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ を満たすようなものが存在する。

S の概形を図示せよ。

(3)　次の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域を V とする。

　$0\leqq x\leqq 1$ かつ，$0\leqq t\leqq 1$ の範囲のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$ が成り立つ。

V の体積を求めよ。　[2011]

解答例

(1) 2 次関数 $f(t)=xt^2+yt=x\left(t+\dfrac{y}{2x}\right)^2-\dfrac{y^2}{4x}$ に対し，$0\leqq t\leqq 1$ における最大値を M，最小値を m とおくと，$x>0$ から，

(i)　$-\dfrac{y}{2x}\leqq 0\ (y\geqq 0)$ のとき　$M-m=f(1)-f(0)=x+y$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq \dfrac{1}{2}\ (-x\leqq y\leqq 0)$ のとき　$M-m=f(1)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=x+y+\dfrac{y^2}{4x}$

(iii) $\dfrac{1}{2}\leqq -\dfrac{y}{2x}\leqq 1\ (-2x\leqq y\leqq -x)$ のとき　$M-m=f(0)-f\left(-\dfrac{y}{2x}\right)=\dfrac{y^2}{4x}$

(iv)　$-\dfrac{y}{2x}\geqq 1\ (y\leqq -2x)$ のとき　$M-m=f(0)-f(1)=-x-y$

(2)　$0\leqq t\leqq 1$ のすべての実数 t に対して，$0\leqq xt^2+yt+z\leqq 1$，すなわち

$$0\leqq f(t)+z\leqq 1$$

が成り立つ z の存在する条件は，$M-m\leqq 1$ である。$x>0$ を考え合わせ, (1)より,

(i)　$y\geqq 0$ のとき　$M-m=x+y\leqq 1$ より，$y\leqq -x+1$

(ii)　$-x\leqq y\leqq 0$ のとき

$M-m=x+y+\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1$ より，$4x^2+4xy+y^2\leqq 4x$，$(2x+y)^2-4x\leqq 0$ となり，

$$(2x+y+2\sqrt{x})(2x+y-2\sqrt{x})\leqq 0,\ -2x-2\sqrt{x}\leqq y\leqq -2x+2\sqrt{x}$$

(iii) $-2x\leqq y\leqq -x$ のとき　$M-m=\dfrac{y^2}{4x}\leqq 1$ より，$y^2-4x\leqq 0$ となり，

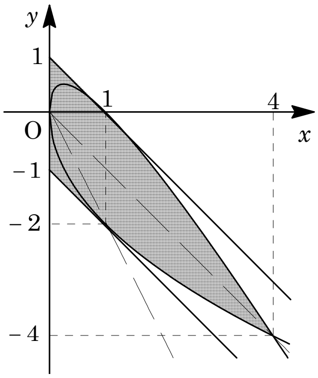
$(y+2\sqrt{x})(y-2\sqrt{x})\leqq 0$，$-2\sqrt{x}\leqq y\leqq 2\sqrt{x}$

(iv)　$y\leqq -2x$ のとき

$M-m=-x-y\leqq 1$ より，$y\geqq -x-1$

(i)～(iv)より，S の概形は右図の網点部となる。

ただし，y 軸以外の境界線は含む。



(3)　$0 \leqq t \leqq 1$ のすべての実数 t に対して，$0 \leqq xt^2 + yt + z \leqq 1$，すなわち $0 \leqq f(t) + z \leqq 1$ が成り立つ $x,\ y,\ z$ の条件を求めるには，(1)より，$m \leqq f(t) \leqq M$ なので，

$$m + z \leqq f(t) + z \leqq M + z$$

これより求める条件は $0 \leqq m + z$ かつ $M + z \leqq 1$ から，

$$-m \leqq z \leqq 1 - M$$

まず，$0 < x \leqq 1$ の場合については，

(i)　$y \geqq 0$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1 - M$ から，$0 \leqq z \leqq 1 - x - y$

(ii)　$-x \leqq y \leqq 0$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1 - M$ から，$\dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1 - x - y$

(iii)　$-2x \leqq y \leqq -x$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1 - M$ から，$\dfrac{y^2}{4x} \leqq z \leqq 1$

(iv)　$y \leqq -2x$ のとき　$-m \leqq z \leqq 1 - M$ から，$-x - y \leqq z \leqq 1$

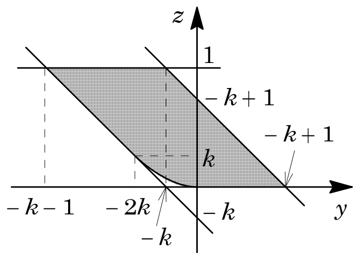
さて，(i)～(iv)の条件を満たす点 $(x,\ y,\ z)$ 全体からなる座標空間内の領域 V を，平面 $x = k$ $(0 < k \leqq 1)$ で切断したときにできる断面は，

(i)　$y \geqq 0$ のとき　$0 \leqq z \leqq 1 - k - y$

(ii)　$-k \leqq y \leqq 0$ のとき　$\dfrac{y^2}{4k} \leqq z \leqq 1 - k - y$

(iii)　$-2k \leqq y \leqq -k$ のとき　$\dfrac{y^2}{4k} \leqq z \leqq 1$

(iv)　$y \leqq -2x$ のとき　$-k - y \leqq z \leqq 1$



そこで，(i)～(iv)で表される断面を，平面 $x = k$ 上で図示すると右上図のようになる。この断面の面積を $T(k)$ とおくと，

$$T(k) = \frac{1+2}{2} \times 1 - \frac{k+1}{2}(-k+1) - \int_{-2k}^{0} \frac{y^2}{4k}dy = \frac{3}{2} - \frac{1}{2}(1-k^2) - \frac{1}{12k}\Big[\ y^3\ \Big]_{-2k}^{0}$$

$$= 1 + \frac{1}{2}k^2 - \frac{2}{3}k^2 = 1 - \frac{1}{6}k^2 \cdots\cdots\cdots (*)$$

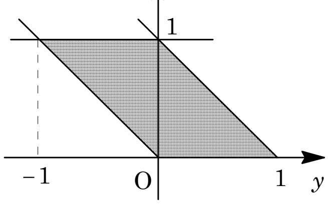
次に，$x = 0$ の場合については，$f(t) = yt$ となり，

(v)　$y \geqq 0$ のとき

$m = 0$，$M = y$ より，$0 \leqq z \leqq 1 - y$

(vi)　$y \leqq 0$ のとき

$m = y$，$M = 0$ より，$-y \leqq z \leqq 1$



これより，$T(0) = 1$ となり，この場合も$(*)$は成立する。

したがって，領域 V の体積は，

$$\int_0^1 T(k)\,dk = \int_0^1 \left(1 - \frac{1}{6}k^2\right)dk = 1 - \frac{1}{18} = \frac{17}{18}$$

コメント

(2)で，不等式で表された領域を図示するときに必要な，共有点の座標計算や曲線の概形についての記述は，解答例が量的に拡大しすぎるために省いています。しかし，それも「焼け石に水」のようなボリュームでした。

問　題

O を原点とする座標平面上の曲線 $C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}$ と，その上の相異なる 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ を考える。

(1)　P_i $(i=1,\ 2)$ を通る x 軸に平行な直線と，直線 $y=x$ との交点を，それぞれ H_i $(i=1,\ 2)$ とする。このとき $\triangle\mathrm{OP_1H_1}$ と $\triangle\mathrm{OP_2H_2}$ の面積は等しいことを示せ。

(2)　$x_1<x_2$ とする。このとき C の $x_1\leqq x\leqq x_2$ の範囲にある部分と，線分 $\mathrm{P_1O}$，$\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積を，y_1，y_2 を用いて表せ。　[2010]

解答例

(1)　$C: y=\frac{1}{2}x+\sqrt{\frac{1}{4}x^2+2}=\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)\cdots\cdots(*)$ に対して，

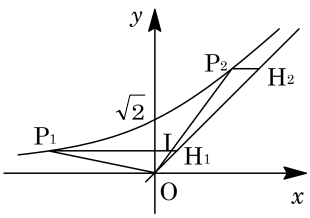
$$y'=\frac{1}{2}\left(1+\frac{x}{\sqrt{x^2+8}}\right)>0,\quad y''=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2+8-x^2}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}=\frac{4}{(x^2+8)\sqrt{x^2+8}}>0$$

また，$\lim\limits_{x\to\infty}y=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(x+\sqrt{x^2+8}\right)=\infty$ であり，

$$\lim_{x\to-\infty}y=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=\frac{1}{2}\lim_{x\to\infty}\frac{8}{x+\sqrt{x^2+8}}=0$$

さらに，$\lim\limits_{x\to\infty}(y-x)=\lim\limits_{x\to\infty}\frac{1}{2}\left(-x+\sqrt{x^2+8}\right)=0$

よって，曲線 C は下に凸であり，x 軸および直線 $y=x$ を漸近線としてもつ。



さて，$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ から，$\mathrm{H}_1(y_1,\ y_1)$，$\mathrm{H}_2(y_2,\ y_2)$ となり，

$$\triangle\mathrm{OP_1H_1}=\frac{1}{2}(y_1-x_1)y_1=\frac{1}{8}\left(-x_1+\sqrt{x_1{}^2+8}\right)\left(x_1+\sqrt{x_1{}^2+8}\right)=1$$

同様に，$\triangle\mathrm{OP_2H_2}=1$ となるので，$\triangle\mathrm{OP_1H_1}=\triangle\mathrm{OP_2H_2}$ である。

(2)　2 直線 $\mathrm{P_1H_1}$ と $\mathrm{OP_2}$ の交点を I とおくとき，$\triangle\mathrm{OP_1H_1}=\triangle\mathrm{OP_2H_2}$ から，

$$\triangle\mathrm{OP_1H_1}-\triangle\mathrm{OIH_1}=\triangle\mathrm{OP_2H_2}-\triangle\mathrm{OIH_1}$$

これより，C と線分 $\mathrm{P_1O}$，$\mathrm{P_2O}$ とで囲まれる図形の面積 S は，C と線分 $\mathrm{P_1H_1}$，$\mathrm{P_2H_2}$，および直線 $y=x$ とで囲まれる図形の面積に等しい。

ここで，(*)より，$2y=x+\sqrt{x^2+8}$ から，$(2y-x)^2=x^2+8$

$$y^2-yx=2,\quad x=y-\frac{2}{y}$$

よって，$S=\int_{y_1}^{y_2}\left\{y-\left(y-\frac{2}{y}\right)\right\}dy=\int_{y_1}^{y_2}\frac{2}{y}dy=2\Big[\log y\Big]_{y_1}^{y_2}=2\log\frac{y_2}{y_1}$

コメント

S は x で積分すると 3 倍程度の記述量が必要です。そのため書き直しました。

問　題

a を正の実数とし，空間内の 2 つの円板

$$D_1=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=a\}$$
$$D_2=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 1,\ z=-a\}$$

を考える。D_1 を y 軸のまわりに $180°$ 回転して D_2 に重ねる。ただし回転は z 軸の正の部分を x 軸の正の方向に傾ける向きとする。この回転の間に D_1 が通る部分を E とする。E の体積を $V(a)$ とし，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積を $W(a)$ とする。

(1) $W(a)$ を求めよ。

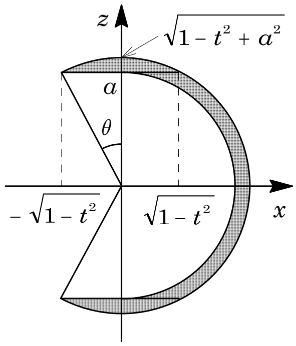
(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。　[2009]

解答例

(1) 円板 D_1 を平面 $y=t\ (-1\leqq t\leqq 1)$ で切断したとき，その切り口は，

$$x^2+t^2\leqq 1,\ z=a$$
$$-\sqrt{1-t^2}\leqq x\leqq\sqrt{1-t^2},\ z=a$$

すると，D_1 を y 軸のまわりに $180°$ 回転して D_2 に重ねる間に D_1 が通る部分 E を，平面 $y=t$ で切断したときの切り口は，右図の網点部となる。



この切り口の $x\geqq 0$ の部分の面積は，

$$\frac{1}{2}\pi\left(\sqrt{1-t^2+a^2}\right)^2-\frac{1}{2}\pi a^2=\frac{1}{2}\pi(1-t^2)$$

よって，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\geqq 0\}$ との共通部分の体積 $W(a)$ は，

$$W(a)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}\pi(1-t^2)\,dt=\pi\int_0^1(1-t^2)\,dt=\frac{2}{3}\pi$$

(2) E の平面 $y=t$ での切り口において，$x\leqq 0$ の部分の面積 $S(t)$ は，右上図のように角 θ を設定すると，

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2+a^2}\right)^2\theta-\frac{1}{2}a\sqrt{1-t^2}\right\}=(1-t^2+a^2)\theta-a\sqrt{1-t^2}$$

さて，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\theta<\tan\theta=\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{a}$ であることを用いると，

$$0<S(t)<\frac{(1-t^2+a^2)\sqrt{1-t^2}}{a}-a\sqrt{1-t^2}=\frac{(1-t^2)\sqrt{1-t^2}}{a}\leqq\frac{1}{a}$$

ここで，E と $\{(x,\ y,\ z)\mid x\leqq 0\}$ との共通部分の体積を $U(a)$ とすると，

$$0<U(a)<\int_{-1}^{1}\frac{1}{a}\,dt=\frac{2}{a}$$

これより, $a\to\infty$のとき，$U(a)\to 0$ となるので,

$$\lim_{a\to\infty} V(a)=\lim_{a\to\infty}\{W(a)+U(a)\}=\frac{2}{3}\pi$$

コメント

頻出の立体の求積問題です。題意を読み取り，軸に垂直な切り口を考えるという常套手段で解決できます。なお, (2)は結論を予想して不等式を立てています。

問　題

(1)　正八面体のひとつの面を下にして水平な台の上に置く。この八面体を真上から見た図（平面図）を描け。

(2)　正八面体の互いに平行な 2 つの面をとり，それぞれの面の重心をG_1，G_2とする。G_1，G_2を通る直線を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし八面体は内部も含むものとし，各辺の長さは 1 とする。　[2008]

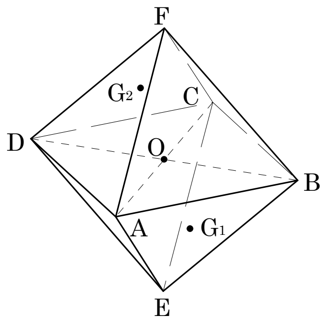
解答例

(1)　1 辺の長さが 1 の正八面体 ABCDEF において，正方形 ABCD の対角線の交点を O とすると，

$$OA = OB = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdots\cdots\cdots ①$$

また，△ACE は∠AEC = 90°の直角二等辺三角形であるので，

$$OA = OE = \frac{\sqrt{2}}{2} \cdots\cdots\cdots ②$$

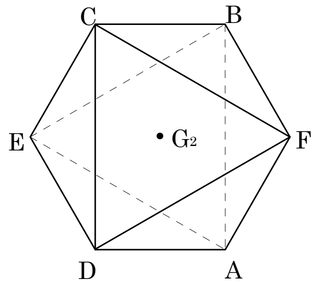


すると，四面体 OABE において，底面の正三角形 ABE の重心をG_1とおくと，①②より，線分OG_1は平面 ABE に垂直である。

同様に，正三角形 CDF の重心をG_2とおくと，線分OG_2は平面 CDF に垂直である。さらに，平面 ABE と平面 CDF は平行であることより, 3 点G_1, O，G_2は一直線上にある。

これより，△ABE の面を水平な台に置き，真上から見ると，正三角形 ABE を$G_2(G_1)$のまわりに180°だけ回転すると正三角形 CDF の位置になっている。

したがって，正八面体を真上から見た図は，正六角形 AFBCED を外形とする右図である。



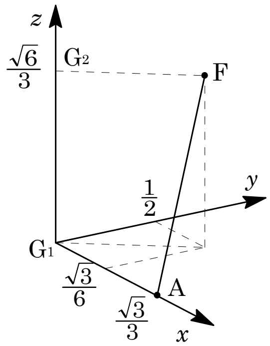
(2)　直線G_1G_2を軸としてこの正八面体を 1 回転させてできる立体を R とすると，その外形は，辺 AF をG_1G_2のまわりに回転したものに等しい。

さて，辺 BE の中点を M とおき，△OAM において，

$$AG_1 = \frac{2}{3}AM = \frac{2}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{\sqrt{3}}{3}$$

$$G_1G_2 = 2OG_1 = 2\sqrt{OA^2 - {AG_1}^2} = 2\sqrt{\frac{1}{2}-\frac{1}{3}} = \frac{\sqrt{6}}{3}$$

ここで，G_1を原点とし，平面 ABE を xy 平面とする座標系を設定する。さらに，G_1Aを x 軸，G_1G_2を z 軸とすると，



$$G_1(0,\ 0,\ 0),\ G_2\left(0,\ 0,\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right),\ A\left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right)$$

また，点 F の x 座標と y 座標は，

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3}\cos 60° = \frac{\sqrt{3}}{6},\quad y = \frac{\sqrt{3}}{3}\sin 60° = \frac{1}{2}$$

よって，$F\left(\frac{\sqrt{3}}{6},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$となり，

$$\overrightarrow{AF} = \left(-\frac{\sqrt{3}}{3},\ \frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{6}}{3}\right) = \frac{1}{6}(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})$$

これより，直線 AF のパラメータ表示は，

$$(x,\ y,\ z) = \left(\frac{\sqrt{3}}{3},\ 0,\ 0\right) + t(-\sqrt{3},\ 3,\ 2\sqrt{6})\ \cdots\cdots\cdots③$$

直線③と平面 $z = k\ \left(0 \leqq k \leqq \frac{\sqrt{6}}{3}\right)$との交点は，$2\sqrt{6}t = k$ より $t = \frac{\sqrt{6}}{12}k$ となり，

$$x = \frac{\sqrt{3}}{3} - \sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k = \frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}k,\quad y = 3\cdot\frac{\sqrt{6}}{12}k = \frac{\sqrt{6}}{4}k$$

よって，立体 R を平面 $z = k$ で切断したときの切り口の面積を $S(k)$ とおくと，

$$S(k) = \pi(x^2 + y^2) = \pi\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3} - \frac{\sqrt{2}}{4}k\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{6}}{4}k\right)^2\right\} = \pi\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}k + \frac{1}{2}k^2\right)$$

これより，立体 R の体積 V は，

$$V = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} S(k)\,dk = \pi\int_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}}\left(\frac{1}{3} - \frac{\sqrt{6}}{6}k + \frac{1}{2}k^2\right)dk$$

$$= \pi\left[\frac{1}{3}k - \frac{\sqrt{6}}{12}k^2 + \frac{1}{6}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{6}}{3}} = \pi\left(\frac{\sqrt{6}}{9} - \frac{\sqrt{6}}{18} + \frac{\sqrt{6}}{27}\right) = \frac{5}{54}\sqrt{6}\pi$$

コメント

ありふれた素材をもとにしたものですが，内容は本格的な求積問題です。東大らしい構図です。

問　題

座標平面において，媒介変数 t を用いて，$x=\cos 2t$，$y=t\sin t$　$(0\leqq t\leqq 2\pi)$と表される曲線が囲む領域の面積を求めよ。　[2008]

解答例

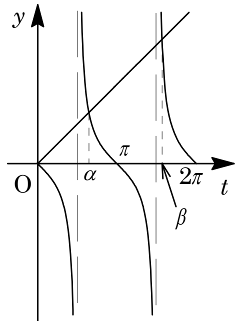
$0\leqq t\leqq 2\pi$ における曲線 $x=\cos 2t$，$y=t\sin t$ に対して，

$$\frac{dx}{dt}=-2\sin 2t\,,\ \frac{dy}{dt}=\sin t+t\cos t$$

ここで，$\dfrac{dx}{dt}=0$ の解は，$t=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \pi,\ \dfrac{3}{2}\pi,\ 2\pi$ である。

また，$\cos t\neq 0\ \left(t\neq\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi\right)$のとき，

$$\frac{dy}{dt}=\cos t(\tan t+t)=\cos t\{t-(-\tan t)\}$$



そこで，$y=t$，$y=-\tan t$ のグラフを描くと右図のようになり，原点以外の 2 つの交点を $t=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおく。

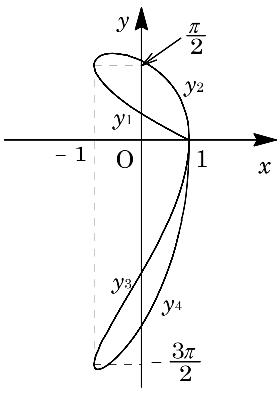
なお，$\cos t=0$ のときは，

$$\frac{dy}{dt}=\sin\frac{\pi}{2}=1\ \left(t=\frac{\pi}{2}\right),\ \frac{dy}{dt}=\sin\frac{3\pi}{2}=-1\ \left(t=\frac{3}{2}\pi\right)$$

以上をまとめて, x, y の増減を調べると，下表のようになる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3\pi}{2}$	$\cdots$	β	$\cdots$	2π
$\frac{dx}{dt}$	0	$-$	0	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	0
x	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	1	$\searrow$	-1	$\nearrow$		$\nearrow$	1
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	1	$+$	0	$-$		$-$	-1	$-$	0	$+$	
y	0	$\nearrow$	$\frac{\pi}{2}$	$\nearrow$		$\searrow$	0	$\searrow$	$-\frac{3\pi}{2}$	$\searrow$		$\nearrow$	0

これより，曲線を描くと，その概形は右図のとおりである。



曲線の $0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi$，$\pi\leqq t\leqq\dfrac{3\pi}{2}$，$\dfrac{3\pi}{2}\leqq t\leqq 2\pi$ の部分を，それぞれ $y=y_1$，$y=y_2$，$y=y_3$，$y=y_4$ とおくと，曲線によって囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\int_{-1}^{1}y_2\,dx-\int_{-1}^{1}y_1\,dx+\int_{-1}^{1}y_3\,dx-\int_{-1}^{1}y_4\,dx$$

ここで，変数を x から t に置き換えると，

$$\int_{-1}^{1}y_2\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi}t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} y_1\,dx = \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} y_3\,dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$\int_{-1}^{1} y_4\,dx = \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

すると，$S = \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt - \int_{\frac{\pi}{2}}^{0} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$

$$+\int_{\frac{3\pi}{2}}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt - \int_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

$$= \int_{0}^{\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt - \int_{\pi}^{2\pi} t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$$

ここで，$F(t) = \int t\sin t(-2\sin 2t)\,dt$ とおくと，

$$F(t) = \int t(\cos 3t - \cos t)\,dt = t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) - \int\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right)dt$$

$$= t\left(\frac{1}{3}\sin 3t - \sin t\right) + \frac{1}{9}\cos 3t - \cos t + C$$

以上より，$S = F(\pi) - F(0) - F(2\pi) + F(\pi) = 2F(\pi) - F(0) - F(2\pi)$

$$= 2\cdot\frac{8}{9} - \left(-\frac{8}{9}\right) - \left(-\frac{8}{9}\right) = \frac{32}{9}$$

コメント

パラメータ曲線に囲まれた領域の面積を求めるものですが，計算量は多めです。なお，曲線の概形を描くにあたっては，上の解に，$0 < t_1 < \frac{\pi}{2}$ として，x 座標の等しくなる $t = t_1$，$t = \pi - t_1$，$t = \pi + t_1$，$t = 2\pi - t_1$ における y 座標の大小関係の調査を加えると，明快になります。

問　題

r を正の実数とする。xyz 空間において

$$x^2+y^2 \leqq r^2,\ y^2+z^2 \geqq r^2,\ z^2+x^2 \leqq r^2$$

を満たす点全体からなる立体の体積を求めよ。 [2005]

解答例

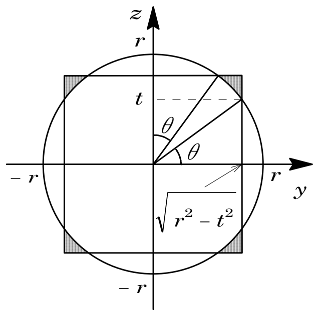
不等式 $x^2+y^2 \leqq r^2$ ……①，$y^2+z^2 \geqq r^2$ ……②，$z^2+x^2 \leqq r^2$ ……③で表される立体を K とおく。

まず，K は yz 平面に対称であり，$x \geqq 0$ の部分を考える。そこで，K を平面 $x=t$ $(0 \leqq t \leqq r)$ で切ったときの断面を表す式は，①③より，

$$y^2 \leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq y \leqq \sqrt{r^2-t^2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

$$z^2 \leqq r^2-t^2,\ -\sqrt{r^2-t^2} \leqq z \leqq \sqrt{r^2-t^2}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって，平面 $x=t$ 上の断面は，②④⑤の連立式として表される。



この断面が存在する条件は，$\sqrt{r^2-t^2} \geqq r\cos\dfrac{\pi}{4}$ より，

$$\sqrt{2}\sqrt{r^2-t^2} \geqq r,\ 2(r^2-t^2) \geqq r^2$$

$0 \leqq t \leqq r$ から，$0 \leqq t \leqq \dfrac{r}{\sqrt{2}}$

このとき，右図のように θ を設定すると，

$$r\cos\theta=\sqrt{r^2-t^2},\ r\sin\theta=t\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

さて，断面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=4\left\{\left(\sqrt{r^2-t^2}\right)^2-\frac{1}{2}t\sqrt{r^2-t^2}\times 2-\frac{1}{2}r^2\left(\frac{\pi}{2}-2\theta\right)\right\}$$

$$=(4-\pi)r^2-4t^2-4t\sqrt{r^2-t^2}+4r^2\theta$$

よって，K の体積 V は，

$$V=2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}S(t)\,dt=2\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left\{(4-\pi)r^2-4t^2-4t\sqrt{r^2-t^2}+4r^2\theta\right\}dt$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}\left\{(4-\pi)r^2-4t^2\right\}dt=\left[(4-\pi)r^2t-\frac{4}{3}t^3\right]_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}=\left(\frac{5}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3$

また，$u=\sqrt{r^2-t^2}$ とおくと，$u^2=r^2-t^2$ から，$2udu=-2tdt$ となり，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}}4t\sqrt{r^2-t^2}\,dt=4\int_r^{\frac{r}{\sqrt{2}}}u(-u)\,du=4\int_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r u^2\,du=4\left[\frac{u^3}{3}\right]_{\frac{r}{\sqrt{2}}}^r$$

$$=\left(\frac{4}{3}-\frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3$$

さらに，⑥より，$r\cos\theta\,d\theta=dt$ なので，

$$\int_0^{\frac{r}{\sqrt{2}}} 4r^2\theta\,dt = 4r^3\int_0^{\frac{\pi}{4}} \theta\cos\theta\,d\theta = 4r^3\left\{\Big[\,\theta\sin\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}} - \int_0^{\frac{\pi}{4}} \sin\theta\,d\theta\right\}$$

$$= 4r^3\left\{\frac{\pi}{4}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \Big[\,\cos\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}\right\} = 4r^3\left(\frac{\sqrt{2}}{8}\pi + \frac{\sqrt{2}}{2} - 1\right)$$

$$= \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + 2\sqrt{2} - 4\right)r^3$$

以上より，

$$V = 2\left\{\left(\frac{5}{3}\sqrt{2} - \frac{\sqrt{2}}{2}\pi\right)r^3 - \left(\frac{4}{3} - \frac{\sqrt{2}}{3}\right)r^3 + \left(\frac{\sqrt{2}}{2}\pi + 2\sqrt{2} - 4\right)r^3\right\}$$

$$= \left(8\sqrt{2} - \frac{32}{3}\right)r^3$$

コメント

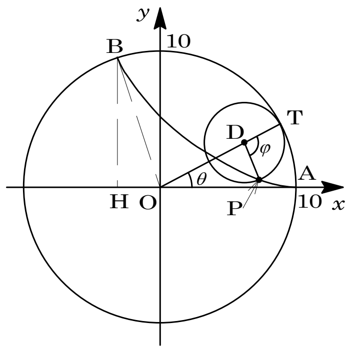
②式の不等号が逆向きになると，有名問題です。パラメータθの置き方については，1994 年, 1998 年, 2003 年の類題が参考になります。

問　題

半径 10 の円 C がある。半径 3 の円板 D を，円 C に内接させながら，円 C の円周に沿って滑ることなく転がす。円板 D の周上の 1 点を P とする。点 P が，円 C の円周に接してから再び円 C の円周に接するまでに描く曲線は，円 C を 2 つの部分に分ける。それぞれの面積を求めよ。 [2004]

解答例

初めの点 P の位置をA$(10,\ 0)$，円板 D を円 C に内接させながら転がし，点 P が再び円 C の円周に接する点を B とする。



また，円板 D の中心を D とし，OD と x 軸の正の向きとのなす角を θ とおく。さらに，2 円の接点を T とおき，$\angle\mathrm{TDP}=\varphi$ とすると，

$$10\theta=3\varphi,\ \ \varphi=\frac{10}{3}\theta$$

$0\leqq\varphi\leqq 2\pi$ のとき，$0\leqq\theta\leqq\frac{3}{5}\pi$ となることより，$\mathrm{B}\left(10\cos\frac{3}{5}\pi,\ 10\sin\frac{3}{5}\pi\right)$である。

また, B から x 軸に下ろした垂線の足を$\mathrm{H}\left(10\cos\frac{3}{5}\pi,\ 0\right)$とおく。

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\overrightarrow{\mathrm{DP}}=(7\cos\theta,\ 7\sin\theta)+(3\cos(\theta-\varphi),\ 3\sin(\theta-\varphi))$

$$=(7\cos\theta,\ 7\sin\theta)+\left(3\cos\left(-\frac{7}{3}\theta\right),\ 3\sin\left(-\frac{7}{3}\theta\right)\right)$$

$$=\left(7\cos\theta+3\cos\frac{7}{3}\theta,\ 7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)$$

ここで，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=7\cos\theta+3\cos\frac{7}{3}\theta,\ \ y=7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta$$

まず，扇形 OAB の面積は，$\angle\mathrm{AOB}=\frac{3}{5}\pi$ より，$\frac{1}{2}\cdot 10^2\cdot\frac{3}{5}\pi=30\pi$ である。

次に，$\triangle$OBH の面積は，$\angle\mathrm{BOH}=\pi-\frac{3}{5}\pi=\frac{2}{5}\pi$ より，

$$\frac{1}{2}\cdot 10\cos\frac{2}{5}\pi\cdot 10\sin\frac{2}{5}\pi=50\cos\frac{2}{5}\pi\sin\frac{2}{5}\pi=25\sin\frac{4}{5}\pi$$

点 P の描く曲線 AB と x 軸，直線 BH に囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\int_{10\cos\frac{3}{5}\pi}^{10}y\,dx=\int_{\frac{3}{5}\pi}^{0}\left(7\sin\theta-3\sin\frac{7}{3}\theta\right)\left(-7\sin\theta-7\sin\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

$$=7\int_{0}^{\frac{3}{5}\pi}\left(7\sin^2\theta+4\sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta-3\sin^2\frac{7}{3}\theta\right)d\theta$$

さて，$\displaystyle\int_0^{\frac{3}{5}\pi} 7\sin^2\theta\,d\theta = \frac{7}{2}\int_0^{\frac{3}{5}\pi}(1-\cos 2\theta)\,d\theta = \frac{7}{2}\Big[\,\theta - \frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{3}{5}\pi}$

$$= \frac{21}{10}\pi - \frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi$$

$$\int_0^{\frac{3}{5}\pi} 4\sin\frac{7}{3}\theta\sin\theta\,d\theta = -2\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\Big(\cos\frac{10}{3}\theta - \cos\frac{4}{3}\theta\Big)d\theta$$

$$= -2\Big[\,\frac{3}{10}\sin\frac{10}{3}\theta - \frac{3}{4}\sin\frac{4}{3}\theta\,\Big]_0^{\frac{3}{5}\pi} = \frac{3}{2}\sin\frac{4}{5}\pi$$

$$\int_0^{\frac{3}{5}\pi} 3\sin^2\frac{7}{3}\theta\,d\theta = \frac{3}{2}\int_0^{\frac{3}{5}\pi}\Big(1-\cos\frac{14}{3}\theta\Big)d\theta = \frac{3}{2}\Big[\,\theta - \frac{3}{14}\sin\frac{14}{3}\theta\,\Big]_0^{\frac{3}{5}\pi}$$

$$= \frac{9}{10}\pi - \frac{9}{28}\sin\frac{4}{5}\pi$$

よって，$S = 7\Big(\dfrac{21}{10}\pi - \dfrac{7}{4}\sin\dfrac{6}{5}\pi + \dfrac{3}{2}\sin\dfrac{4}{5}\pi - \dfrac{9}{10}\pi + \dfrac{9}{28}\sin\dfrac{4}{5}\pi\Big)$

$$= 7\Big(\frac{6}{5}\pi - \frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi + \frac{51}{28}\sin\frac{4}{5}\pi\Big)$$

以上より，円 C の内側で，曲線 AB の上側の部分の面積は，

$$30\pi + 25\sin\frac{4}{5}\pi - 7\Big(\frac{6}{5}\pi - \frac{7}{4}\sin\frac{6}{5}\pi + \frac{51}{28}\sin\frac{4}{5}\pi\Big)$$

$$= \frac{108}{5}\pi + \frac{49}{4}\sin\frac{4}{5}\pi + \frac{49}{4}\sin\frac{6}{5}\pi = \frac{108}{5}\pi + \frac{49}{4}\sin\frac{4}{5}\pi - \frac{49}{4}\sin\frac{4}{5}\pi$$

$$= \frac{108}{5}\pi$$

また，曲線 AB によって分けられた円 C のもう 1 つの部分の面積は，

$$10^2\pi - \frac{108}{5}\pi = \frac{392}{5}\pi$$

コメント

よく見かける内サイクロイドが題材になっています。ただ，積分計算は，かなり多めです。

問　題

r を正の実数とする。xyz 空間内の原点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を A, 点 $\mathrm{P}(r,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球を B とする。球 A と球 B の和集合の体積を V とする。ただし, 球 A と球 B の和集合とは, 球 A または球 B の少なくとも一方に含まれる点全体よりなる立体のことである。

(1) V を r の関数として表し, そのグラフの概形をかけ。

(2) $V=8$ となるとき, r の値はいくらか。四捨五入して小数第 1 位まで求めよ。

注意 : 円周率 π は $3.14<\pi<3.15$ を満たす。 [2004]

解答例

(1) (i) $r \geqq 2$ のとき

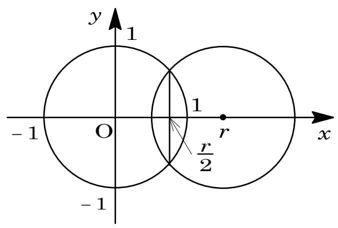
球 A と B は共通部分がないので, $V=\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3+\dfrac{4}{3}\pi\cdot 1^3=\dfrac{8}{3}\pi$ である。

(ii) $0<r<2$ のとき

円 $x^2+y^2=1$ と円 $(x-r)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに回転して, 球 A と B をつくると考える。

そして, 直線 $x=\dfrac{r}{2}$ に関する対称性を考慮すると,

球 A と B の和集合の体積 V は,



$$V=2\pi\int_{-1}^{\frac{r}{2}}(1-x^2)\,dx=2\pi\Big[\,x-\frac{x^3}{3}\,\Big]_{-1}^{\frac{r}{2}}$$

$$=2\pi\Big\{\frac{r}{2}+1-\frac{1}{3}\Big(\frac{r^3}{8}+1\Big)\Big\}=\pi\Big(-\frac{r^3}{12}+r+\frac{4}{3}\Big)$$

ここで, $\dfrac{dV}{dr}=\pi\Big(-\dfrac{r^2}{4}+1\Big)=-\dfrac{\pi}{4}(r+2)(r-2)$ より,

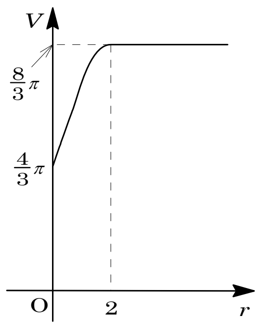
r	0	$\cdots$	2
$\dfrac{dV}{dr}$	1	＋	0
V	$\dfrac{4}{3}\pi$	↗	$\dfrac{8}{3}\pi$

V は $0<r<2$ で右表のように単調に増加し, さらに

$$\frac{d^2V}{dr^2}=-\frac{\pi}{2}r<0$$

これから, グラフは上に凸である。

(i)(ii)より, V のグラフの概形は右図のようになる。



(2) $\dfrac{8}{3}\pi>\dfrac{8}{3}\times 3.14>8$ より, $V=8$ となる r は, $0<r<2$ にただ 1 つ存在する。

(1)より, $\pi\Big(-\dfrac{r^3}{12}+r+\dfrac{4}{3}\Big)=8\cdots\cdots\cdots(*)$

$$-\frac{r^3}{12}+r+\frac{4}{3}=\frac{8}{\pi},\quad -r^3+12r=\frac{96}{\pi}-16$$

ここで, $3.14<\pi<3.15$ より, $14.47<\dfrac{96}{\pi}-16<14.58$

$r=1.5$ のとき，$-r^3+12r=1.5\times(12-2.25)=14.625$

$r=1.4$ のとき，$-r^3+12r=1.4\times(12-1.96)=14.056$

$r=1.45$ のとき，$-r^3+12r\fallingdotseq 1.45\times(12-2.10)=14.355$

以上より, (＊)を満たす r の小数第 1 位までの概数は 1.5 である。

コメント

数値計算が超難です。(2)では，グラフから, r の値が 2 より少し小さいと判断し，とりあえず 1.5 で計算し，その後，微調整をしました。電卓なしで計算するのは，本当に疲れます。

問　題

xyz 空間において，平面 $z=0$ 上の原点を中心とする半径 2 の円を底面とし，点 $(0,\ 0,\ 1)$ を頂点とする円錐を A とする。次に，平面 $z=0$ 上の点 $(1,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を H，平面 $z=1$ 上の点 $(1,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の円を K とする。H と K を 2 つの底面とする円柱を B とする。円錐 A と円柱 B の共通部分を C とする。

$0\leqq t\leqq 1$ を満たす実数 t に対し，平面 $z=t$ による C の切り口の面積を $S(t)$ とおく。

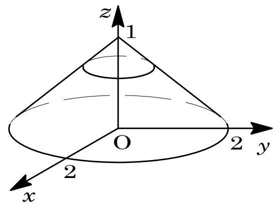
(1)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ とする。$t=1-\cos\theta$ のとき，$S(t)$ を θ で表せ。

(2)　C の体積 $\displaystyle\int_0^1 S(t)\,dt$ を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　円錐 A を平面 $z=t$ $(0\leqq t\leqq 1)$ で切断したとき，その切り口の円の半径を r とすると，

$$r:2=1-t:1,\ \ r=2(1-t)$$

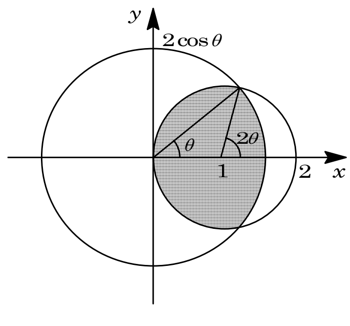


よって，$z=t$ 上で，この円の方程式は，

$$x^2+y^2=4(1-t)^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，円柱 B は，中心 $(1,\ 0,\ 0)$ で半径 1 の円を底面とし，中心軸が z 軸に平行なので，その方程式は，$z=t$ 上でも，

$$(x-1)^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots②$$



①と②の交点は，①－②より，

$$2x=4(1-t)^2,\ \ x=2(1-t)^2$$

$t=1-\cos\theta$ とおくと $x=2\cos^2\theta$ となり，①の半径が $r=2\cos\theta$ から $\dfrac{x}{r}=\cos\theta$ である。

①より $y^2=4\cos^2\theta-4\cos^4\theta=4\cos^2\theta(1-\cos^2\theta)$

$$=4\cos^2\theta\sin^2\theta=\sin^2 2\theta$$

よって，$y=\pm\sin 2\theta$ となり，共通部分の面積は，

$$S(t)=2\left\{\frac{1}{2}(2\cos\theta)^2\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot1\cdot\sin 2\theta\right\}$$

$$=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi$$

(2)　$t=1-\cos\theta$ より，$\dfrac{dt}{d\theta}=\sin\theta$ となり，$t=0$ のとき $\theta=0$，$t=1$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{2}$

$$V=\int_0^1 S(t)\,dt=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)\sin\theta\,d\theta$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2\theta\cos 2\theta\sin\theta - \sin 2\theta\sin\theta)\,d\theta + \pi\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} 2\theta\cos 2\theta\sin\theta\,d\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \theta(\sin 3\theta - \sin\theta)\,d\theta$

$$= -\left[\theta\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta - \cos\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{2}} + \int_0^{\frac{\pi}{2}}\left(\frac{1}{3}\cos 3\theta - \cos\theta\right)d\theta = -\frac{10}{9}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta\sin\theta\,d\theta = -\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\cos 3\theta - \cos\theta)\,d\theta = \frac{2}{3}$$

よって，$V = -\dfrac{10}{9} - \dfrac{2}{3} + \pi\cdot 1 = \pi - \dfrac{16}{9}$

コメント

空間図形の求積に関する頻出題です。誘導の与え方を見て，似た問題があったという記憶があり，調べてみると，それは 1994 年度の 3 番でした。

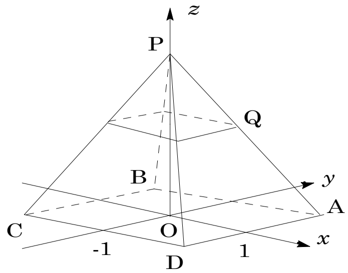
問　題

xyz 空間に 5 点 A$(1,\ 1,\ 0)$, B$(-1,\ 1,\ 0)$, C$(-1,\ -1,\ 0)$, D$(1,\ -1,\ 0)$, P$(0,\ 0,\ 3)$をとる。四角錐 PABCD の $x^2+y^2 \geqq 1$ をみたす部分の体積を求めよ。

[1998]

解答例

平面 $z=k$ $(k \geqq 0)$ において，四角錐 PABCD の切り口を，$x \geqq 0$，$y \geqq 0$ に領域で考える。



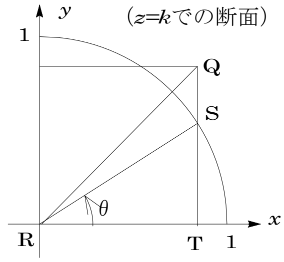
平面 $z=k$ と z 軸との交点を R，辺 AP との交点を Q とする。

RQ : OA = PR : PO より，RQ : $\sqrt{2}=(3-k):3$

$$\mathrm{RQ}=\frac{\sqrt{2}}{3}(3-k)$$

ここで，RQ$\geqq 1$ とすると，$k \leqq 3-\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3}{2}(2-\sqrt{2})$

よって，$0 \leqq k \leqq \dfrac{3}{2}(2-\sqrt{2})$



さて，右の断面において, RS と x 軸の正方向とのなす角を θ とする。

円柱 $x^2+y^2=1$ の外部（または面上）と四角錐 PABCD の内部（または面上）の共通部分を，平面 $z=k$ で切断した断面の面積を $S(k)$ とすると，RT = RQ$\sin\dfrac{\pi}{4}=1-\dfrac{k}{3}$ より，

$$S(k)=2\left\{\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{3}\right)^2-\frac{1}{2}\left(1-\frac{k}{3}\right)\left(1-\frac{k}{3}\right)\tan\theta-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\left(\frac{\pi}{4}-\theta\right)\right\}$$

$$=\left(1-\frac{k}{3}\right)^2\left(1-\frac{\sin\theta}{\cos\theta}\right)-\frac{\pi}{4}+\theta$$

$$=\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\frac{\pi}{4}+\theta \quad \left(\cos\theta=1-\frac{k}{3}\text{ より}\right)$$

求める体積を V とすると，$-\sin\theta d\theta=-\dfrac{1}{3}dk$ より，

$$V=4\int_0^{\frac{3}{2}(2-\sqrt{2})}S(k)dk=4\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta-\cos\theta\sin\theta-\frac{\pi}{4}+\theta)3\sin\theta d\theta$$

$$=12\int_0^{\frac{\pi}{4}}(\cos^2\theta\sin\theta-\cos\theta\sin^2\theta-\frac{\pi}{4}\sin\theta+\theta\sin\theta)d\theta$$

$$=12\left[-\frac{1}{3}\cos^3\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta+\frac{\pi}{4}\cos\theta-\theta\cos\theta+\sin\theta\right]_0^{\frac{\pi}{4}}$$

$$=12\left(-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{12}+\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{\pi}{4}-\frac{\sqrt{2}}{8}\pi+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)=4+4\sqrt{2}-3\pi$$

コメント

空間では，$x^2+y^2=1$が円柱を表すということがわからないと手も足もでませんが，それがクリアーできれば，後は体積計算の基本です。上の解では z 軸に垂直に切りましたが，他の軸について切っても OK です。94 年に類題が出ています。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆