《2018 入試対策》

大阪大学

理系数学

1998―2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された大阪大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。
過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 ， 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 阪大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。
(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 $b,\ c$ を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が，$0\leqq f(1)\leqq 2$，$5\leqq f(3)\leqq 6$ を満たすとする。

(1) $f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 [2017]

2 不等式 $1\leqq\big||x|-2\big|+\big||y|-2\big|\leqq 3$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。 [2013]

3 実数の組 $(p,\ q)$ に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$ とおく。

(1) 放物線 $y=f(x)$ が点 $(0,\ 1)$ を通り，しかも直線 $y=x$ の $x>0$ の部分と接するような実数の組 $(p,\ q)$ と接点の座標を求めよ。

(2) 実数の組 $(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$ に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$ および $f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$ とおく。実数 α，β（ただし $\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\quad\text{かつ}\quad f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間 $\alpha\leqq x\leqq\beta$ において不等式 $f_1(x)<f_2(x)$ がつねに成り立つことを示せ。

(3) 長方形 $R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$ を考える。また，4 点 $\mathrm{P}_0(0,\ 1)$，$\mathrm{P}_1(0,\ 0)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 0)$ をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組 $(p,\ q)$ を，放物線 $y=f(x)$ と折れ線 L が共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，R の点のうちで放物線 $y=f(x)$ が通過する点全体の集合を T とする。R から T を除いた領域 S を座標平面上に図示し，その面積を求めよ。 [2011]

4　θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x = t\cos\theta,\ \ y = 1 - t^2 + t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき, 点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき, Q の x 座標を求めよ。

(2)　θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき, C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3)　θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。　[2005]

5　座標平面上に直線 $l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1\ \left(0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \geqq 1$ が表す領域を D, 不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \leqq 1$ が表す領域を D' とする。

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる。また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1', C_2' を, C_1' は l と y 軸に接し, C_2' は l と x 軸に接し, さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる。

(1)　$\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ。

(2)　θ が $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2004]

6　$a > b > 0$ とする。円 $x^2 + y^2 = a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2 - b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点を P とする。また, 円の外部の点 $(b,\ c)$ からこの円に 2 本の接線を引き, 接点を Q, R とする。このとき, 2 点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ。　[2000]

■ 図形と計量

1　1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{QPC}$，$\angle\mathrm{PQC}=\angle\mathrm{RQD}$，$\angle\mathrm{QRD}=\angle\mathrm{SRA}$ となるようにとる。ただし，点 P, Q, R, S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。　[2006]

2　立方体 X と球 Y があって，両者の体積は等しいとする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，円周率は $\pi=3.14\cdots\cdots$ である。

(1)　立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの頂点が球 Y の内部に含まれるようにしたい。最大何個の頂点が含まれるようにできるか。

(2)　立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの辺が球 Y の内部と共通の点をもつようにしたい。最大何個の辺が共通の点をもつようにできるか。

[2000]

3　平面上に，点 O を中心とし点 A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6 を頂点とする正六角形がある。O を通りその平面上にある直線 l を考え，各 A_k と l との距離をそれぞれ d_k とする。このとき

$$D={d_1}^2+{d_2}^2+{d_3}^2+{d_4}^2+{d_5}^2+{d_6}^2$$

は l によらず一定であることを示し，その値を求めよ。ただし，$\mathrm{OA}_k=r$ とする。

[1999]

■ ベクトル

1　実数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ に対して，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(c,\ d)$，$\mathrm{C}(e,\ 0)$ をとる。ただし点 A と点 B はどちらも原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とは異なる点とする。このとき，実数 $s,\ t$ で，$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすものが存在するための，$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ についての必要十分条件を求めよ。　[2014]

2 平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。 [2009]

3 点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に，また，2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして，線分 AC の中点を M，線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s，線分 CD の長さを t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2) 点 A, B と C, D が，$s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，線分 MN の長さの最大値を求めよ。 [2008]

4 xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

(b) $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1) 点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2) (1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。 [2007]

5 三角形 OAB の辺 OA, OB 上に，それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=b\overrightarrow{\mathrm{OB}}\ (0<a<1,\ 0<b<1)$$

とする。三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また，その条件を満たす点$(a,\ b)$はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし，三角形 OPQ の辺上の点は，三角形 OPQ の内部に含まれないと考える。 [2006]

6　空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2,\ \mathrm{AD}=3,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。 [2005]

■ 整数と数列

1　$a,\ b$ を自然数とし，不等式(A) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ を考える。次の問いに答えよ。ただし，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1)　不等式(A)を満たし $b\geqq 2$ である自然数 $a,\ b$ に対して，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ であることを示せ。

(2)　不等式(A)を満たす自然数 $a,\ b$ の組のうち，$b\geqq 2$ であるものをすべて求めよ。

[2017]

2　正の整数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

(1)　$\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_n S_n$ は奇数の整数であることを示せ。

(2)　$S_n=2+\dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組$(n,\ m)$をすべて求めよ。

(3)　整数 a と $0\leqq b<1$ を満たす実数 b を用いて，$A_{20}S_{20}=a+b$ と表すとき，b の値を求めよ。 [2016]

3　4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。 [2013]

4 次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　l, m を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m| \leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3)　$2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。　[2012]

5 5 次式 $f(x) = x^5 + px^4 + qx^3 + rx^2 + sx + t$ （p, q, r, s, t は実数）について考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　数列 $f(0)$，$f(1)$，$f(2)$，$f(3)$，$f(4)$ が等差数列であることと，

$$f(x) = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4) + lx + m \quad (l, m \text{ は実数})$$

と書けることは互いに同値であることを示せ。

(2)　$f(x)$ は(1)の条件を満たすものとする。α を実数，k を 3 以上の自然数とする。k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α, k の組をすべて求めよ。　[2012]

6 l, m, n を 3 以上の整数とする。等式 $\left(\dfrac{n}{m} - \dfrac{n}{2} + 1\right)l = 2$ を満たす l, m, n の組をすべて求めよ。　[2010]

7 α を 2 次方程式 $x^2 - 2x - 1 = 0$ の解とするとき，$(a + 5\alpha)(b + 5c\alpha) = 1$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，必要ならば，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。　[2009]

8 x, y を変数とする。

(1)　n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)} = \frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)} + \frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2)　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)} = \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$

[2006]

9　正の整数nに対して,

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\,,\ \ T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく。等式$S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$が成り立つことを，数学的帰納法を用いて示せ。　[2005]

10　素数p, qに対して，$a_n=p^n-4(-q)^n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって整数a_nを定める。ただし，$p>2q$とする。

(1)　a_1とa_2が1より大きい公約数mをもつならば，$m=3$であることを示せ。

(2)　a_nがすべて3の倍数であるようなp, qのうちで積pqが最小となるものを求めよ。　[2004]

11　実数a, rに対し数列$\{x_n\}$を

$$x_1=a\,,\ \ x_{n+1}=rx_n(1-x_n)\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。

(1)　すべてのnについて$x_n=a$となるようなaを求めよ。

(2)　$x_2\neq a$，$x_3=a$となるようなaの個数を求めよ。

(3)　$0\leqq a\leqq 1$となるすべてのaについて$0\leqq x_n\leqq 1$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$が成り立つようなrの範囲を求めよ。　[2004]

12　数列$\{a_k\}$が$a_k<a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$および

$$a_{kl}=a_k+a_l\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ \ l=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする。

(1)　k, lを2以上の自然数とする。自然数nが与えられたとき，$l^{m-1}\leqq k^n<l^m$を満たす自然数mが存在することを示せ。

(2)　k, lを2以上の自然数とするとき，$-\dfrac{1}{n}<\dfrac{a_k}{a_l}-\dfrac{\log k}{\log l}<\dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3)　$a_2=a$とするとき，数列$\{a_k\}$の一般項を求めよ。　[2003]

13　数列$\{a_n\}$において，各項a_nが$a_n \geqq 0$をみたし，かつ$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$が成り立つとする。さらに各$n$に対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\quad c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1)　すべてのnに対し不等式$b_n \geqq c_n$が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2)　あるnについて$b_{n+1} = c_{n+1}$が成り立てば，$b_n = c_n$となることを示せ。

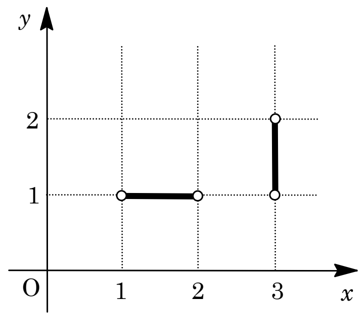
(3)　$b_3 = \dfrac{1}{2}$となるとき，$c_3 = \dfrac{1}{2}$であることを示せ。また$b_3 = \dfrac{1}{2}$となる数列$\{a_n\}$は全部で何種類あるかを求めよ。　[2001]

14　どのような負でない2つの整数mとnを用いても，$x = 3m + 5n$とは表すことができない正の整数xをすべて求めよ。　[2000]

15　座標平面において，x座標とy座標がともに整数である点を格子点という。また，2つの格子点を結ぶ長さ1の線分から両端の点を除いたものを格子辺という。次の問いに答えよ。

(1)　点P(630, 5400)を通る直線$y = ax$（aは定数）は$0 \leqq x \leqq 630$の範囲で何個の格子辺と交わるか。

(2)　nを2以上の整数とする。点P(630, 5400)を通る曲線$y = bx^n$（bはnにより定まる定数）は$0 \leqq x \leqq 630$の範囲で何個の格子辺と交わるか。　[1998]



格子辺の例

■ 確率

$\boxed{1}$　1以上6以下の2つの整数 $a,\ b$ に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

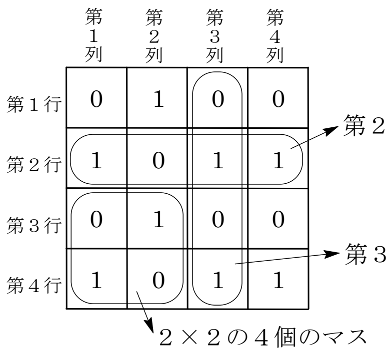
(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　$a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3)　1個のさいころを2回投げて，1回目に出る目を a，2回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。　[2016]

$\boxed{2}$　n を2以上の整数とする。正方形の形に並んだ $n\times n$ のマスに0または1のいずれかの数字を入れる。マスは上から第1行，第2行，…，左から第1列，第2列…と数える。数字の入れ方についての次の条件 p を考える。

条件 p：1から $n-1$ までのどの整数 $i,\ j$ についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の4個のマスには0と1が2つずつ入る。



（$n=4$ の場合の入れ方の例）

(1)　条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には0と1が交互に現れることを示せ。

(2)　条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ。　[2015]

$\boxed{3}$　さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を5で割った余りが1である確率を p_n とし，余りが2, 3, 4のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。　[2014]

4　n を 3 以上の整数とする。n 個の球 K_1，K_2，…，K_n と n 個の空の箱 H_1，H_2，…，H_n がある。以下のように，K_1，K_2，…，K_n の順番に，球を箱に 1 つずつ入れていく。

まず，球 K_1 を箱 H_1，H_2，…，H_n のどれか 1 つに無作為に入れる。次に，球 K_2 を，箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ，箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

一般に，$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，球 K_i を箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ，箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

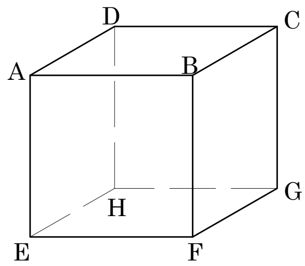
(1)　K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

(2)　K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。　[2013]

5　1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表すことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が存在する確率を求めよ。

(2)　関数 $f(x)=\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が，$x>-1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ。　[2012]



6 n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P，Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。

(1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2) 時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3) 時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。 [2010]

7 1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする。n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回で終わる確率を $p(n)$ とする。

(1) $501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ。

(2) $p(1002)-p(1001)$ の値を求めよ。

(3) $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1)-p(n)$ の値を求めよ。 [2008]

8　n を $n \geqq 7$ を満たす整数とし，1 つのさいころを投げる試行を n 回くり返す。このとき，$2 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対し，「n 回の試行のうち，同じ目が出るどの 2 つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す。ただし，i 番目の試行と j 番目の試行について，この試行は $|i-j|$ だけ離れているということにする。

(1)　p_2 の値を求めよ。

(2)　$k \geqq 3$ のとき，p_k の値を求めよ。

(3)「n 回の試行において，同じ目が続くことはなく，しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する」という事象が起こる確率を求めよ。　[2002]

9　半径 1 の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする。ただし，n は自然数である。

(1)　線分 P_0P_k の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ。

(2)　点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} のうちの相異なる 3 点を頂点にもつ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ。　[2001]

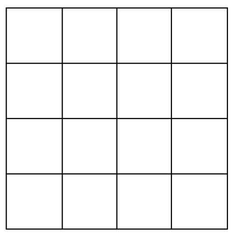
10　xy 平面上の 16 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y) \mid x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ y=0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選ぶ試行において，次の事象の起こる確率を求めよ。

「選んだ 3 点が三角形の頂点となり，その三角形の面積は $\dfrac{9}{2}$ である」　[2000]

11　一辺の長さが 4 の正方形の紙の表を，図のように一辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し，A と B の 2 人に渡す。A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと，両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても，塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし，2 枚の紙を重ね合わせるときには，それぞれの紙を回転させてもよいが，紙の四隅は合わせることとする。　[1999]



■ 論証

1　実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。　[2015]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。

(2)　$p,\ q,\ \sqrt{2}p + \sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。そのとき，$p = q = 0$ であることを示せ。　[2015]

3　$a,\ b,\ c$ を正の定数とし，x の関数 $f(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1)　定数 p, q に対し，次を満たす定数 r が存在することを示せ。

$x \geqq 1$ ならば $|px + q| \leqq rx$

(2)　恒等式 $(\alpha - \beta)(\alpha^2 + \alpha\beta + \beta^2) = \alpha^3 - \beta^3$ を用いて，次を満たす定数 $k,\ l$ が存在することを示せ。

$x \geqq 1$ ならば $\left|\sqrt[3]{f(x)} - x - k\right| \leqq \dfrac{l}{x}$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x) = (x+m)^3$ と表されることを示せ。　[2011]

4　次の問いに答えよ。

(1)　x が正の数のとき，$|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ。

(2)　p, q, r が $p + q + r = 1$ を満たす正の数のとき，$p^2 + q^2 + r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ を示せ。

(3)　a, b, c が相異なる正の数で，$\sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{c} = 1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a} + \frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b} + \frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ。　[2007]

5 (1)　$f(x)$を x の整式とし，$\{a_k\}$は$a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ および$\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$ を満たす数列とする。このとき$f(a_k)=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ ならば，$f(x)$は整式として 0 であることを示せ。

(2)　$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$をxの整式とし，

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)\sin x+f_3(x)\sin 2x$$

はすべての実数xに対して 0 であるとする。このとき$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$は，いずれも整式として 0 であることを示せ。　[2003]

6 実数を係数とする 3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$が異なる 3 つの実数解をもつとする。このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ。　[2002]

7 xy 平面上の点$(a,\ b)$は，a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。xy 平面において，3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし，必要ならば$\sqrt{3}$が無理数であることは証明なしで使ってよい。　[1999]

8 n を 1 以上の整数とする。n 次の整式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

とその導関数$f'(x)$の間に，$nf(x)=(x+p)f'(x)$という関係があるとする。ただし，pは定数である。このとき，$f(x)=a_0(x+p)^n$であることを示せ。　[1998]

■ 複素数

1 複素数 z は$z^5=1$を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順にa_0，a_1，a_2，a_3，a_4とおく。複素数wを$w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$と定める。

(1)　5 回とも表が出たとする。wの値を求めよ。

(2)　$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$のとき，$|w|<1$であることを示せ。

(3)　$|w|<1$である確率を求めよ。　[2017]

2　n を自然数とする。

(1)　n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ。

(2)　n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が

$$0 \leqq \theta_k \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad \cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$$

を満たすならば，不等式

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ。　[2004]

3　a を正の実数，$w=a(\cos 5^\circ+i\sin 5^\circ)$ とする。ただし，i は虚数単位である。また，複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1=w$，$z_{n+1}=z_n w^{2n+1}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ。

(2)　複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする。$1 \leqq n \leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ。　[2003]

4　α を $|\alpha|=1$ であるような複素数とし，複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1=1,\quad z_2=\frac{\alpha^4}{2},\quad \frac{z_n}{z_{n-1}}=\frac{\alpha^2}{4}\,\frac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

で定める。ただし，$\overline{z_n}$ は複素数 z_n の共役な複素数とする。

(1)　各 n に対し，z_n を求めよ。

(2)　z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とし，$\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき，無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k$ をそれぞれ求めよ。　[2002]

5　2 つの複素数 $z=x+yi$，$w=u+vi$ （$x,\ y,\ u,\ v$ は実数，$i=\sqrt{-1}$ は虚数単位）に対し，$x \geqq u$ と $y \geqq v$ がともに成り立つとき，$z \gg w$ と書くことにする。

(1)　次の条件 $z^2 \gg 3$ かつ $\bar{z} \gg -\dfrac{5}{z}$ をみたす複素数 z の範囲を求め，複素数平面上に図示せよ。ただし，$\bar{z}$ は z に共役な複素数とする。

(2)　(1)で求めた範囲を z が動くとき，絶対値 $|z-3i|$ の最小値，および最小値をあたえる z を求めよ。　[2001]

6　平面上において, 7 点A, P, Q, R, S, R′, S′を下図のようにとる。ただし,

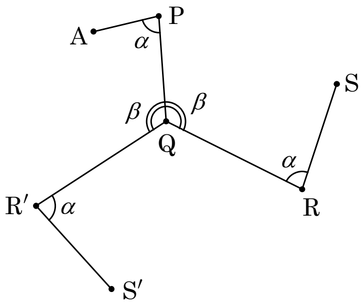
$\mathrm{AP}=a,\ \mathrm{PQ}=b$

$\mathrm{QR}=\mathrm{QR}'=c,\ \mathrm{RS}=\mathrm{R}'\mathrm{S}'=d$

$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{SRQ}=\angle\mathrm{S}'\mathrm{R}'\mathrm{Q}=\alpha\ (0\leqq\alpha\leqq\pi)$

$\angle\mathrm{RQP}=\angle\mathrm{PQR}'=\beta\ (0\leqq\beta\leqq\pi)$

である。このとき, $\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2$ を $\sin\alpha$, $\sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。 [1998]



■ 曲線

1　双曲線 $H: x^2-y^2=1$ 上の 3 点 $\mathrm{A}(-1,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(s,\ t)\ (t\neq 0)$ を考える。

(1)　点 A における H の接線と直線 BC の交点を P とするとき, P の座標を s と t を用いて表せ。

(2)　点 C における H の接線と直線 AB の交点を Q とするとき, Q の座標を s と t を用いて表せ。

(3)　点 B における H の接線と直線 AC の交点を R とするとき, 3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。 [2017]

2　$a>0$ とする。C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$, C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が C_1 上を動き, 点 Q が C_2 上を動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty}f(a)$ を求めよ。 [2012]

3　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1: x^2+3y^2=3,\ C_2: \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち, x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1, C_2 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とし, y 軸と l_1, l_2 の交点をそれぞれ Q, R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 線分 QR の長さの最小値を求めよ。 [2010]

4　直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。　[2006]

5　(1)　平面上において座標軸に平行な主軸（長軸，短軸）をもち，x 軸，y 軸の両方に接する楕円を考える。その中心の x 座標を a とする。このような楕円のうち，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ。ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする。

(2)　(1)の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする。△ABC の面積を $S(a)$ で表すとき，この関数のグラフをかけ。

[2003]

■ 極限

1　円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

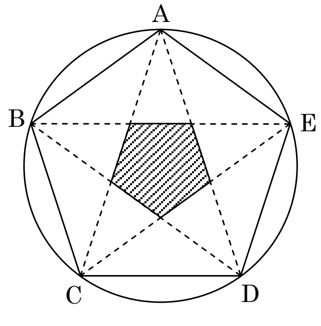
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3)　R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

(4)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$ を求めよ。　[2016]



斜線部分が R_2

2 自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ $(x\geqq 0)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx \leqq \int_0^1 \log(1+x)\,dx$ を示せ。

(2) 数列 $\{I_n\}$ を，$I_n=\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$ で定める。$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい。 [2015]

3 放物線 $C: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ {a_1}^2)$，$\mathrm{A}_2(a_2,\ {a_2}^2)$，$\mathrm{A}_3(a_3,\ {a_3}^2)$，$\cdots$ を，A_{k+2} $(k\geqq 1)$ における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし，$a_1<a_2$ とする。三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k$ を S を用いて表せ。 [2009]

4 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\dfrac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1) 不等式 $1-{q_n}^2\leqq\dfrac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}q_n=1$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(2) $S_n=\displaystyle\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx$ を p_n で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}nS_n$ を求めよ。 [2009]

5　n を正の整数，a を正の実数とする。曲線 $y=x^n$ と曲線 $y=a\log x$ が，点 P で共通の接線をもつとする。ただし，対数は自然対数である。点 P の x 座標を t とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a, t をそれぞれ n を用いて表せ。

(2)　曲線 $y=x^n$ と x 軸および直線 $x=t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする。また，曲線 $y=a\log x$ と x 軸および直線 $x=t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき，$\dfrac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ。

(3)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x}+x-1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを，次の(a)，(b)に分けて示せ。ただし，e は自然対数の底とする。

(a)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $e^{-x}+x-1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(b)　$x \geqq 0$ のとき，不等式 $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x}+x-1$ が成り立つことを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。　[2005]

6　実数 x に対して，x を越えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。n を正の整数とし，

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\,\right]}{n^2}$$

とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2000]

7　(1)　a を 1 より大きい実数とする。0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log 2+\frac{x}{2}\log a \leqq \log(1+a^x) \leqq \log 2+\frac{x}{2}\log a+\frac{x^2}{8}(\log a)^2$$

ただし，対数は自然対数である。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\cdots$ に対して，$a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ とおく。(1)の不等式を用いて極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[1998]

■ 微分法

1 次の問いに答えよ。

(1) c を正の定数とする。正の実数 $x,\ y$ が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2) 正の実数 $x,\ y,\ z$ が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。 [2016]

2 $t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア) $t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$ が成り立つ。

(イ) $t>0$ に対して，等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$ を満たす実数 x が存在する。

このとき，$f(t)$ を求めよ。 [2014]

3 三角関数の極限に関する公式 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1$ を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ。 [2013]

4 実数 θ が動くとき，xy 平面上の動点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$ および $\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$ を考える。θ が $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分を D とする。D を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。 [2011]

5 N を 2 以上の自然数とする。

(1) 関数 $f(x)=(N-x)\log x$ を $1\leqq x\leqq N$ の範囲で考える。このとき，曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる。このことを示せ。

(2) 自然数の列 $a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_N$ を

$$a_n=n^{N-n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$$

で定める。$a_1,\ a_2,\ \cdots\cdots,\ a_N$ のうちで最大の値を M とし，$M=a_n$ となる n の個数を k とする。このとき $k\leqq 2$ であることを示せ。

(3) (2)で $k=2$ となるのは，N が 2 のときだけであることを示せ。 [2008]

6 $f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。 [2005]

7 (1) $0<t<1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ。

(2) k を正の定数とする。$a>0$ とし，曲線 $C: y=e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える。このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標はつねに正であることを示せ。 [2003]

8 $f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく。曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただ一つ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。 [2001]

■ 積分法

1 $\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。 [2014]

2 関数 $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1) $f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式 $\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ を求めよ。 [2010]

3 関数 $f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3$ を考える。n，k を自然数とし

$$g_n(k)=f\left(\frac{\pi}{3n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n\geqq 2$ とする。

(1) n を固定する。$2\leqq k\leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。また，k が $1\leqq k\leqq 3n$ の範囲を動くとき，$g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2) (1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}$ を求めよ。

[2001]

■ 積分の応用

1 xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0 \leqq t \leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\ \left(\dfrac{\pi}{4} \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。 [2017]

2 座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする。

(1) $a,\ b,\ r$ の値をそれぞれ求めよ。

(2) 連立不等式 $a \leqq x \leqq 1$，$0 \leqq y \leqq \sqrt{2}(x-1)^2$，$x^2+y^2 \geqq r^2$ の表す領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2016]

3 座標空間の x 軸上に動点 P，Q がある。P，Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に，Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P，Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ $A,\ B$ とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) $V(t)$ の最大値を求めよ。 [2015]

4 半径 1 の 2 つの球 S_1 と S_2 が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径をもつ n 個 $(n \geqq 3)$ の球 $T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_n$ があり，次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア) T_i は S_1，S_2 にそれぞれ 1 点で接している $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

(イ) T_i は T_{i+1} に 1 点で接しており $(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そして T_n は T_1 に 1 点で接している。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_n$ の共通の半径 r_n を求めよ。

(2) S_1 と S_2 の中心を結ぶ直線のまわりに T_1 を回転してできる回転体の体積を V_n とし，$T_1,\ T_2,\ \cdots,\ T_n$ の体積の和を W_n とするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。 [2014]

5　xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2013]

6　xyz 空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3},\ 1)$ がある。平面 $z=0$ に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を W とする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_A とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たす点 R 全体がつくる立体を V_B とおく。さらに V_A と V_B の重なり合う部分を V とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　平面 $z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ による立体 V の切り口の面積を θ を用いて表せ。

(2)　立体 V の体積を求めよ。　[2012]

7　半径 3 の球 T_1 と半径 1 の球 T_2 が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球 S が次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A)　S は T_1 の内部にあるか T_1 に内接している。

(B)　S は T_2 の外部にあるか T_2 に外接している。

S の中心が存在しうる範囲を D とするとき，立体 D の体積を求めよ。　[2010]

8　t を負の実数とし，xy 平面上で曲線 $y=2^{2x+2t}$ と $y=2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする。

(1)　D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2)　t が負の実数の範囲を動くとき，$V(t)$ の最大値を求めよ。　[2008]

9　n を自然数とする。関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを C とし，C 上の 2 点 $(n,\ \sqrt{n})$ と $(n+1,\ \sqrt{n+1})$ を通る直線を l とする。C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき $\lim\limits_{n\to\infty}n^aV=b$ を満たす正の数 $a,\ b$ を求めよ。　[2007]

10 $f(x)=x^3-x$ とし，t を実数とする。xy 平面において，曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし，直線 $x=t$ に関して C_1 と対称な曲線 $y=f(2t-x)$ を C_2 とする。

(1) C_1 と C_2 が 3 点で交わるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ。 [2007]

11 曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ の共有点のうち, x 座標が正のものを, x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，…とし，第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_n の x 座標を求めよ。また，点 A_n において，曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ は接していることを示せ。

(2) 線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y=x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2006]

12 n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において，円周を n 等分する点 P_0，P_1，…，P_{n-1} を時計回りにとる。各 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_0$ とする。放物線 C_1，C_2，…，C_n によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。 [2004]

13 平面上に双曲線 $C: y=\dfrac{1}{x}$ を考える。$a,\ b,\ c,\ d$ を $d<c<0<b<a$ を満たす数とし，曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S をそれぞれ x 座標が $a,\ b,\ c,\ d$ であるような点としたとき，四角形 PQSR が長方形になっているとする。

(1) b, c, d を a を用いて表せ。

(2) 線分 PR と x 軸との交点を T, 線分 QS と y 軸との交点を U とするとき，線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲にあるとき，3 線分 PT, TU, UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) a が(2)の範囲を動くとき，$S(a)$ の増減を調べ, その最大値を求めよ。 [2002]

14 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と点 $\mathrm{P}(0,\ \sin\alpha)$ を中心とする半径 1 の円 C_2 がある。ただし $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ とする。円 C_2 と x 軸との交点を A, B とし, A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれ l_{A}, l_{B} とする。2 直線 l_{A}, l_{B} ではさまれた領域の部分で, 円 C_1 の外部で円 C_2 の内部であるものを D_1, 円 C_2 の外部で円 C_1 の内部であるものを D_2 とする。いま, D_1, D_2 をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を $V_1(\alpha)$, $V_2(\alpha)$ とする。

(1) $V_1(\alpha)$, $V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ をそれぞれ α を用いて表せ。

(2) α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$ の最大値を求めよ。 [2002]

15 曲線 $C : y=e^x$ と直線 $l : y=ax+b$ $(a>0)$ が 2 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ と $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ で交わっている。ただし, $x_1<x_2$ とする。

(1) $x_2-x_1=c$ とおくとき, y_1 と y_2 を a と c を用いて表せ。

(2) P と Q の距離が 1 であるとする。曲線 C と x 軸および 2 直線 $x=x_1$, $x=x_2$ とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる回転体の体積を $V(a)$ とおくとき, $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a}$ を求めよ。 [1999]

16 xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても, 平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0,\ 0,\ a)$, $(1,\ 0,\ a)$, $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である。また, どのような a に対しても, 平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0,\ a,\ 0)$, $\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$, $\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。

このとき, 立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。 [1999]

17 座標空間において

平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1

平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2

とする。また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，

円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m

円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M

とする。次の問いに答えよ。

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ。

(2) $|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする。図形 H の体積を求めよ。 [1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$b,\ c$ を実数とする。2 次関数 $f(x)=-x^2+bx+c$ が，$0\leqq f(1)\leqq 2$，$5\leqq f(3)\leqq 6$ を満たすとする。

(1)　$f(4)$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標 q のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標が 6 のとき，放物線 $y=f(x)$ と x 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2017]

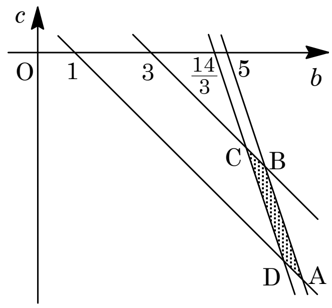
解答例

(1)　$f(x)=-x^2+bx+c$ に対して，$0\leqq f(1)\leqq 2$，$5\leqq f(3)\leqq 6$ より，

$$0\leqq -1+b+c\leqq 2\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 5\leqq -9+3b+c\leqq 6\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$-b+1\leqq c\leqq -b+3$

②より，$-3b+14\leqq c\leqq -3b+15$



この連立不等式を bc 平面上に図示すると，右図の網点をつけた平行四辺形の内部または辺上となる。

さらに，①②の境界線の方程式を連立して 4 つの頂点の座標を求めると，$A(7,\ -6)$，$B(6,\ -3)$，$C\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$，$D\left(\dfrac{13}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right)$ である。

さて，$f(4)=k$ とおくと，$-16+4b+c=k$ すなわち $c=-4b+k+16\ \cdots\cdots\cdots③$

そして，直線③が右上の領域と共有点をもつ k の範囲を求める。

すると，図より，k は $A(7,\ -6)$ において最大値 $-16+28-6=6$ をとり，$C\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ において最小値 $-16+22-\dfrac{5}{2}=\dfrac{7}{2}$ をとる。

よって，$\dfrac{7}{2}\leqq f(4)\leqq 6$ である。

(2)　$f(x)=-\left(x-\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{b^2}{4}+c$ より，放物線 $y=f(x)$ の頂点の y 座標を q とすると，

$q=\dfrac{b^2}{4}+c$ すなわち $c=-\dfrac{b^2}{4}+q\ \cdots\cdots④$ となる。

そして，放物線④が右上の領域と共有点をもつ q の範囲を求める。すると図より，頂点を通るとき，辺と接するときに，q は最大または最小になることがわかる。

そこで，$A(7,\ -6)$ における q の値は $\dfrac{49}{4}-6=\dfrac{25}{4}$，$B(6,\ -3)$ における q の値は $9-3=6$，$C\left(\dfrac{11}{2},\ -\dfrac{5}{2}\right)$ における q の値は $\dfrac{121}{16}-\dfrac{5}{2}=\dfrac{81}{16}$，$D\left(\dfrac{13}{2},\ -\dfrac{11}{2}\right)$ における q の値は $\dfrac{169}{16}-\dfrac{11}{2}=\dfrac{81}{16}$ である。

さらに，④から$c' = -\dfrac{b}{2}$より，接線の傾きが-1となるのは$-\dfrac{b}{2} = -1$すなわち$b = 2$のときであるが，この点は辺 AD，辺 BC 上にはない。

また，接線の傾きが-3となるのは$-\dfrac{b}{2} = -3$すなわち$b = 6$のときであり，辺 AB，辺 CD 上の点について調べると，点$\mathrm{B}(6,\ -3)$および辺 CD の中点$\mathrm{M}(6,\ -4)$があてはまる。そして，M におけるqの値は$9-4=5$である。

以上より，qのとりうる値の範囲は$5 \leqq q \leqq \dfrac{25}{4}$である。

(3)　$q = 6$のとき，$f(x) = -\left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 + 6$となる。

そこで，放物線$y = f(x)$とx軸の交点のx座標は，$-\left(x - \dfrac{b}{2}\right)^2 + 6 = 0$より，

$$x = \frac{b}{2} - \sqrt{6},\quad x = \frac{b}{2} + \sqrt{6}$$

これを$x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$とおくと，$y = f(x)$と$x$軸で囲まれた部分の面積$S$は，

$$S = \int_{\alpha}^{\beta} \left\{-\left(x - \frac{b}{2}\right)^2 + 6\right\}dx = -\int_{\alpha}^{\beta} (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta - \alpha)^3$$
$$= \frac{1}{6}(2\sqrt{6})^3 = 8\sqrt{6}$$

コメント

解法の方針は基本的なものですが，特に(2)において，詰めの部分がかなり面倒です。そのため，解答にすさまじい時間が必要です。なお，(3)は付録のような設問で，不思議なことに単独に解くことができます。

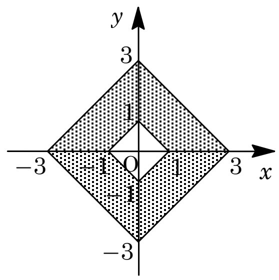
問　題

不等式 $1\leqq||x|-2|+||y|-2|\leqq 3$ の表す領域を xy 平面上に図示せよ。　[2013]

解答例

まず，$f(x,\ y)=||x|-2|+||y|-2|$ とおくと，

$$f(x,\ -y)=f(-x,\ y)=f(x,\ y)$$

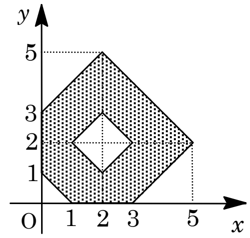


これより，$1\leqq f(x,\ y)\leqq 3$ の表す領域は，x 軸対称かつ y 軸対称である。

そこで，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の場合について考える。

このとき，$1\leqq f(x,\ y)\leqq 3$ の表す不等式は，

$$1\leqq|x-2|+|y-2|\leqq 3\ \cdots\cdots\cdots①$$



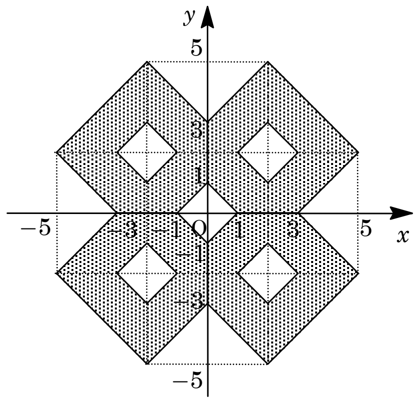
さて，①で表される領域は，不等式 $1\leqq|x|+|y|\leqq 3$ ……②で表される領域を，x 軸方向に 2，y 軸方向に 2 だけ平行移動したものである。

まず，不等式②で表される領域は，右上図の網点部となる。

すると，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ において，不等式①で表す領域は，右図のようになる。

この領域を x 軸対称かつ y 軸対称した領域が，不等式 $1\leqq f(x,\ y)\leqq 3$ の表す領域である。

すなわち，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

言葉で書くと，一番上の図を平行移動して後，座標軸に関してパタパタ折り返していくだけですが，これを図示していくのには時間がかかってしまいます。

問　題

実数の組$(p,\ q)$に対し，$f(x)=(x-p)^2+q$とおく。

(1)　放物線$y=f(x)$が点$(0,\ 1)$を通り，しかも直線$y=x$の $x>0$ の部分と接するような実数の組$(p,\ q)$と接点の座標を求めよ。

(2)　実数の組$(p_1,\ q_1)$，$(p_2,\ q_2)$に対して，$f_1(x)=(x-p_1)^2+q_1$および$f_2(x)=(x-p_2)^2+q_2$とおく。実数α，β（ただし$\alpha<\beta$）に対して

$$f_1(\alpha)<f_2(\alpha)\ \text{かつ}\ f_1(\beta)<f_2(\beta)$$

であるならば，区間$\alpha\leqq x\leqq\beta$において不等式$f_1(x)<f_2(x)$がつねに成り立つことを示せ。

(3) 長方形$R:0\leqq x\leqq 1,\ 0\leqq y\leqq 2$を考える。また，4 点$\mathrm{P_0}(0,\ 1)$，$\mathrm{P_1}(0,\ 0)$，$\mathrm{P_2}(1,\ 1)$，$\mathrm{P_3}(1,\ 0)$をこの順に結んで得られる折れ線を L とする。実数の組$(p,\ q)$を，放物線$y=f(x)$と折れ線Lが共有点がないようなすべての組にわたって動かすとき，Rの点のうちで放物線$y=f(x)$が通過する点全体の集合をTとする。RからTを除いた領域Sを座標平面上に図示し，その面積を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$f(x)=(x-p)^2+q$に対して，条件から，$f(0)=1$となり，$p^2+q=1$ ………①

次に，$y=f(x)$と$y=x$を連立して，

$$(x-p)^2+q=x\ ,\ \ x^2-(2p+1)x+p^2+q=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x>0$で，$y=f(x)$と$y=x$が接することより，$f(x)=x$は正の重解をもち，

$$D=(2p+1)^2-4(p^2+q)=0\ \cdots\cdots\cdots③,\ \ 2p+1>0\ \cdots\cdots\cdots④$$

①③より，$(2p+1)^2=4$となり，④から，$2p+1=2$，$p=\dfrac{1}{2}$

①に代入すると，$q=\dfrac{3}{4}$となり，このとき②の重解は，$x=\dfrac{2p+1}{2}=1$

よって，接点の座標は，$(1,\ 1)$である。

(2)　$g(x)=f_2(x)-f_1(x)$とおくと，条件より$g(\alpha)>0$かつ$g(\beta)>0$であり，

$$g(x)=(x-p_2)^2+q_2-(x-p_1)^2-q_1=-2(p_2-p_1)x+{p_2}^2-{p_1}^2+q_2-q_1$$

(i)　$p_2\geqq p_1$のとき　$g(x)$は単調に減少し，$\alpha<x<\beta$において，$g(x)\geqq g(\beta)>0$

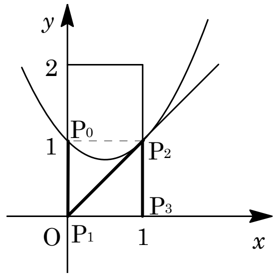
(ii)　$p_2<p_1$のとき　$g(x)$は単調に増加し，$\alpha<x<\beta$において，$g(x)\geqq g(\alpha)>0$

(i)(ii)より，$\alpha\leqq x\leqq\beta$において$f_1(x)<f_2(x)$が成り立つ。

(3)　点$(0,\ 1)$を通り，直線$y=x$と点$(1,\ 1)$で接する放物線は，(1)より，

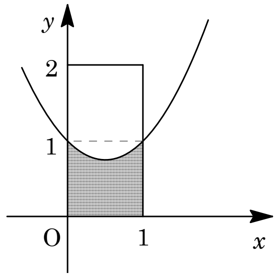
$$y=\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}=x^2-x+1$$

この放物線を $y=f_1(x)$ とおき，放物線 $y=f(x)$ が，不等式 $1=f_1(0)<f(0)$ かつ $1=f_1(1)<f(1)$ を満たすとすると，(2)より，$y=f(x)$ は折れ線 L と共有点をもたない。



また，$f(0)\leqq f_1(0)$ または $f(1)\leqq f_1(1)$ が満たされるとき，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ は，折れ線 L と共有点をもつ。

そこで，長方形 R を通過する放物線 $y=f(x)$ を，折れ線 L と共有点がないように動かすとき，$y=f(x)$ が通過する領域は，$y=f_1(x)$ の上部全体となる。



したがって，長方形 R から，上記の通過領域 T を除いた領域 S を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は含む。また，この領域 S の面積は，

$$\int_0^1 (x^2-x+1)\,dx=\frac{1}{3}-\frac{1}{2}+1=\frac{5}{6}$$

コメント

(3)の論理展開は感覚的すぎると思いながらも，この程度の記述に留めました。

問　題

θ を $0 \leqq \theta < 2\pi$ を満たす実数とする。時刻 t における座標が

$$x = t\cos\theta,\ \ y = 1 - t^2 + t\sin\theta$$

で与えられるような動点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ を考える。t が実数全体を動くとき，点 P が描く曲線を C とする。C が x 軸の $x \geqq 0$ の部分と交わる点を Q とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\theta = \dfrac{\pi}{4}$ のとき，Q の x 座標を求めよ。

(2) θ が変化すると曲線 C も変化する。θ が $0 \leqq \theta < 2\pi$ の範囲を変化するとき，C が通過する範囲を xy 平面上に図示せよ。

(3) θ が変化すると点 Q も変化する。Q の x 座標が最大となるような θ $(0 \leqq \theta < 2\pi)$ について $\tan\theta$ の値を求めよ。　[2005]

解答例

(1) 条件より，$x = t\cos\dfrac{\pi}{4} = \dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……①，$y = 1 - t^2 + t\sin\dfrac{\pi}{4} = 1 - t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t$ ……②

$y = 0$ とすると，②から $1 - t^2 + \dfrac{1}{\sqrt{2}}t = 0$ より，

$$\sqrt{2}t^2 - t - \sqrt{2} = 0,\ \ (\sqrt{2}t + 1)(t - \sqrt{2}) = 0$$

$x \geqq 0$ より $t \geqq 0$ なので，$t = \sqrt{2}$ となり，①から点 Q の x 座標は $x = 1$ である。

(2) $x = t\cos\theta$ ……③，$y = 1 - t^2 + t\sin\theta$ ……④に対して，

$t = 0$ のとき，$(x,\ y) = (0,\ 1)$

$t \neq 0$ のとき，③④より $\cos\theta = \dfrac{x}{t}$，$\sin\theta = \dfrac{y - 1 + t^2}{t}$ から，

$$\left(\frac{x}{t}\right)^2 + \left(\frac{y - 1 + t^2}{t}\right)^2 = 1,\ \ x^2 + (y - 1 + t^2)^2 = t^2 \text{ ………⑤}$$

⑤は $(x,\ y) = (0,\ 1)$ を満たしているので，$t = 0$ のときも成り立つ。

さて，t が実数全体を動くとき，曲線⑤が通過する範囲は，⑤を t の方程式をしてみたとき，実数 t が存在する条件として求めることができる。

⑤から，$x^2 + (y - 1)^2 + 2(y - 1)t^2 + t^4 = t^2$

$$t^4 + (2y - 3)t^2 + x^2 + (y - 1)^2 = 0 \text{ ………⑥}$$

ここで，$u = t^2 \geqq 0$ とおくと，⑥は $u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2 = 0$ ……⑦となり，2 次方程式⑦が，0 以上の解を少なくとも 1 つもつ条件となる。

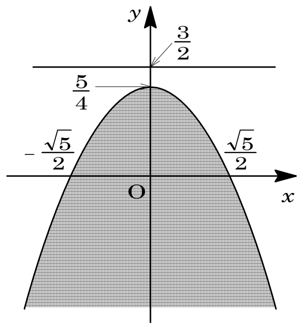
そこで，$f(u) = u^2 + (2y - 3)u + x^2 + (y - 1)^2$ とおき，$f(0) = x^2 + (y - 1)^2 \geqq 0$ に注意すると，

$$D=(2y-3)^2-4\{x^2+(y-1)^2\}\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑧$$

$$u=-\frac{2y-3}{2}\geqq 0\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑧から，$-4y-4x^2+5\geqq 0$，$y\leqq -x^2+\dfrac{5}{4}$

⑨から，$2y-3\leqq 0$，$y\leqq\dfrac{3}{2}$



以上まとめると，曲線 C が通過する範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

(3)　点 Q の x 座標の最大値は, (2)より $x=\dfrac{\sqrt{5}}{2}$ であり，③④より，

$$\frac{\sqrt{5}}{2}=t\cos\theta\cdots\cdots⑩,\ \ 0=1-t^2+t\sin\theta\cdots\cdots⑪$$

⑩より，$t=\dfrac{\sqrt{5}}{2\cos\theta}$ となり，⑪に代入すると，

$$1-\frac{5}{4\cos^2\theta}+\frac{\sqrt{5}\sin\theta}{2\cos\theta}=0,\ \ 1-\frac{5}{4}(1+\tan^2\theta)+\frac{\sqrt{5}}{2}\tan\theta=0$$

まとめると，

$$5\tan^2\theta-2\sqrt{5}\tan\theta+1=0,\ \ (\sqrt{5}\tan\theta-1)^2=0$$

よって，$\tan\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ である。

コメント

難易度が高いというわけではありませんが，それなりに時間のかかる問題です。(2)では，まずパラメータ θ を動かし，その後，パラメータ t を動かして通過領域を求めました。

問　題

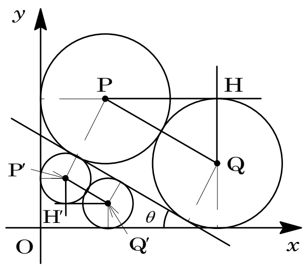
座標平面上に直線 $l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1\ \left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ がある。不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \geqq 1$ が表す領域を D, 不等式 $x \geqq 0,\ y \geqq 0,\ x\sin\theta + y\cos\theta \leqq 1$ が表す領域を D' とする。

D 内に半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 を, C_1 は l と y 軸に接し, C_2 は l と x 軸に接し, さらに C_1 と C_2 が外接するようにとる。また D' 内に半径 r の 2 つの円 C_1', C_2' を, C_1' は l と y 軸に接し, C_2' は l と x 軸に接し, さらに C_1' と C_2' が外接するようにとる。

(1) $\dfrac{r}{R}$ を θ で表せ。

(2) θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, $\dfrac{r}{R}$ のとりうる値の範囲を求めよ。 [2004]

解答例



(1) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から, 直線 $l : x\sin\theta + y\cos\theta = 1$ の上向きの法線ベクトルの成分を $(\sin\theta,\ \cos\theta)$ とすることができるので, これより l の右向きの方向ベクトルの成分は $(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ となる。

さて, 半径 R の 2 つの円 C_1, C_2 の中心をそれぞれ P, Q とおき, P を通り x 軸に平行な直線と, Q を通り y 軸に平行な直線との交点を H とおくと, $\mathrm{PQ} = 2R$, $\angle\mathrm{QPH} = \theta$ となる。

すると, 点 P の座標は $\mathrm{P}(R,\ 2R\sin\theta + R)$ となり, 直線 l との距離が R なので,

$$\frac{R\sin\theta + (2R\sin\theta + R)\cos\theta - 1}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = R$$

$R(\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta) - 1 = R$ より, $R = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}$

同様にして, 図のように点 P', Q', H' を設定すると, $\mathrm{P}'(r,\ 2r\sin\theta + r)$ となり,

$$\frac{-\{r\sin\theta + (2r\sin\theta + r)\cos\theta - 1\}}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = r$$

$-r(\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta) + 1 = r$ より, $r = \dfrac{1}{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 1}$

以上より, $\dfrac{r}{R} = \dfrac{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta - 1}{\sin\theta + \cos\theta + 2\sin\theta\cos\theta + 1}$

(2) $t = \sin\theta + \cos\theta$ とおくと, $t^2 = 1 + 2\sin\theta\cos\theta$ より, $2\sin\theta\cos\theta = t^2 - 1$

また, $t = \sqrt{2}\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{4}\right)$ となり, $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $1<t \leqq \sqrt{2}$ である。

ここで，$\dfrac{r}{R}=f(t)$ とおくと，(1)より，

$$f(t)=\frac{t+t^2-2}{t+t^2}=1-\frac{2}{t+t^2}$$

すると，$1<t\leqq\sqrt{2}$ で，$f'(t)=\dfrac{2(2t+1)}{(t+t^2)^2}>0$ より，$f(t)$ は単調増加し，

$$f(1)<f(t)\leqq f(\sqrt{2})$$

よって，$f(1)=0$，$f(\sqrt{2})=-1+\sqrt{2}$ より，$0<\dfrac{r}{R}\leqq-1+\sqrt{2}$ である。

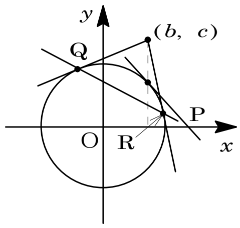
コメント

(1)はいろいろな解法が考えられます。最初に考えたのは，直線 l の x 切片と y 切片の間の距離を R と θ で表すものでした。しかし，計算が複雑になりすぎ，次に考えたのが上に記した解法です。

問　題

$a>b>0$ とする。円 $x^2+y^2=a^2$ 上の点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線と x 軸との交点を P とする。また，円の外部の点 $(b,\ c)$ からこの円に 2 本の接線を引き，接点を Q, R とする。このとき，2 点 Q, R を通る直線は P を通ることを示せ。 [2000]

解答例



$\mathrm{Q}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{R}(x_2,\ y_2)$ とおくと，Q, R における接線は，

$$x_1x+y_1y=a^2,\quad x_2x+y_2y=a^2$$

これらの接線は，ともに点 $(b,\ c)$ を通るので，

$$bx_1+cy_1=a^2\cdots\cdots①,\quad bx_2+cy_2=a^2\cdots\cdots②$$

ここで，方程式 $bx+cy=a^2$ ……③を考えると，これは直線を表し，①より点 Q を通り，②より点 R を通ることがわかる。すなわち，③は直線 QR を表す。

さて，点 $\left(b,\ \sqrt{a^2-b^2}\right)$ における接線は，

$$bx+\sqrt{a^2-b^2}\,y=a^2$$

x 軸との交点は，$x=\dfrac{a^2}{b}$，$y=0$ より，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ となる。

そこで，$(x,\ y)=\left(\dfrac{a^2}{b},\ 0\right)$ を③に代入すると，③が成立することがわかるので，直線 QR は点 P を通る。

コメント

毎年のように出題されてきた有名問題です。そして，上記の解はその有名な解法です。

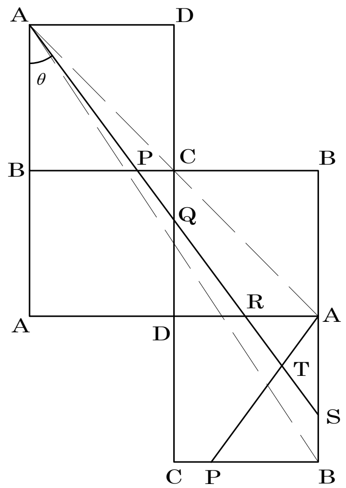
問　題

1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD の辺 BC, CD, DA, AB 上に，それぞれ点 P, Q, R, S を，$\angle\mathrm{APB}=\angle\mathrm{QPC}$，$\angle\mathrm{PQC}=\angle\mathrm{RQD}$，$\angle\mathrm{QRD}=\angle\mathrm{SRA}$ となるようにとる。ただし，点 P，Q，R，S は，どれも正方形 ABCD の頂点とは一致しないものとする。以下の問いに答えよ。

(1)　線分 BP の長さ t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　直線 AP と直線 RS の交点を T とする。四角形 PQRT の面積を線分 BP の長さ t についての関数と考えて $f(t)$ で表す。$f(t)$ の最大値を求めよ。　　[2006]

解答例



(1)　右図のように，正方形 ABCD を辺 BC，CD，DA に関して，順に折り返していく。すると，条件より，折れ線 APQRS は 1 本の直線になる。

さて，点 S が辺 AB 上にあるとき，点 P, Q, R は，それぞれ辺 BC, CD, DA 上に存在する。

ここで，点 S が点 A と一致するとき $\mathrm{BP}=1$，点 S が点 B と一致するとき $\mathrm{BP}=\dfrac{2}{3}$ となり，求める条件は，$\mathrm{BP}=t$ から $\dfrac{2}{3}<t<1$ である。

(2)　まず，$\angle\mathrm{BAP}=\theta$ とおくと，$\tan\theta=t$ となる。

そこで，$\angle\mathrm{CQP}=\angle\mathrm{DQR}=\angle\mathrm{ASR}=\theta$ から，

$$\mathrm{CP}=1-t,\ \ \mathrm{CQ}=\frac{1-t}{\tan\theta}=\frac{1-t}{t}$$

$$\mathrm{DQ}=1-\frac{1-t}{t}=\frac{2t-1}{t},\ \ \mathrm{DR}=\frac{2t-1}{t}\tan\theta=2t-1,\ \ \mathrm{AR}=1-(2t-1)=2-2t$$

これより，$\triangle\mathrm{ABP}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot t=\dfrac{t}{2}$，$\triangle\mathrm{PCQ}=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{1-t}{t}=\dfrac{(1-t)^2}{2t}$

$$\triangle\mathrm{QDR}=\frac{1}{2}(2t-1)\cdot\frac{2t-1}{t}=\frac{(2t-1)^2}{2t}$$

また，RS と AP の交点を T とするとき，$\angle\mathrm{TAS}=\angle\mathrm{TSA}=\theta$ から，$\triangle\mathrm{TAS}$ は二等辺三角形となり，T から AR への垂線の長さは，AS の $\dfrac{1}{2}$ であるので，

$$\mathrm{AS}=\frac{2-2t}{\tan\theta}=\frac{2-2t}{t},\ \ \triangle\mathrm{RAT}=\frac{1}{2}(2-2t)\cdot\frac{2-2t}{2t}=\frac{(1-t)^2}{t}$$

したがって，四角形 PQRT の面積 $f(t)$ は，

$$f(t)=1-\frac{t}{2}-\frac{(1-t)^2}{2t}-\frac{(2t-1)^2}{2t}-\frac{(1-t)^2}{t}=1-\frac{t^2+3(1-t)^2+(2t-1)^2}{2t}$$

$$=1-\frac{4t^2-5t+2}{t}=\frac{-4t^2+6t-2}{t}=6-\left(4t+\frac{2}{t}\right)$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$4t+\frac{2}{t}\geqq 2\sqrt{4t\cdot\frac{2}{t}}=4\sqrt{2}$

等号成立は $4t=\frac{2}{t}$ のときであり，$\frac{2}{3}<t<1$ から $t=\frac{\sqrt{2}}{2}$ の場合となる。

以上より，$f(t)$ の最大値は $6-4\sqrt{2}$ である。

コメント

有名な反射の問題です。上の解のように折り返しを利用するのが常套手段です。なお，平行四辺形 PQRT の面積は，まわりの三角形を除く方針で計算しています。

問　題

立方体 X と球 Y があって，両者の体積は等しいとする。このとき，次の問いに答えよ。ただし，円周率は $\pi = 3.14\cdots\cdots$ である。

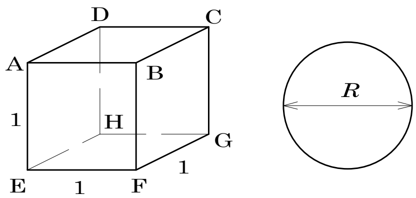
(1)　立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの頂点が球 Y の内部に含まれるようにしたい。最大何個の頂点が含まれるようにできるか。

(2)　立方体 X と球 Y を動かして，立方体 X のなるべく多くの辺が球 Y の内部と共通の点をもつようにしたい。最大何個の辺が共通の点をもつようにできるか。

[2000]

解答例

(1)　立方体 X の 1 辺の長さを 1，球 Y の直径を R とすると，条件より，



$$1^3 = \frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3,\ R^3 = \frac{6}{\pi}\cdots\cdots\cdots①$$

まず，X の頂点間の距離は $1,\ \sqrt{2},\ \sqrt{3}$ のいずれかである。

また①より，$1 < R^3 < 2\sqrt{2}$ なので，$1 < R < \sqrt{2}\cdots\cdots\cdots②$

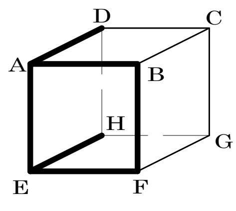
これより，Y の内部に X の頂点を 2 つ含むことはできる。しかし，X には距離がすべて 1 の 3 つの頂点は存在しないので，Y の内部に X の頂点を 3 つ含むことはできない。

したがって，Y の内部に含まれる X の頂点の最大数は 2 である。

(2)　(1)より，2 頂点 A と E はともに Y の内部に含むことができるので，5 つの辺 AE, AB, AD, EF, EH は Y の内部と共通の点をもつ。

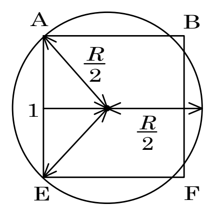
さて，次に X の 6 つの辺と Y の内部が共通の点をもつとすると，3 つの場合が考えられる。

(i)　X の 2 つの頂点が Y の内部に含まれるとき



頂点 A と E が Y に含まれるとし，②より，6 つの辺 AE, AB, AD, EF, EH, BF と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。

ここで，球 Y の大円が 2 頂点 A, E を通る場合を考え，辺 BF と共通の点をもつ場合を考えると，右図より，



$$\sqrt{\left(\frac{R}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} + \frac{R}{2} \geqq 1\cdots\cdots\cdots③$$

$$③ \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 1} + R \geqq 2 \Leftrightarrow \sqrt{R^2 - 1} \geqq 2 - R\cdots\cdots\cdots④$$

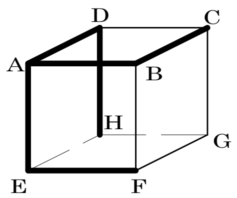
②より，④ $\Leftrightarrow$ $R^2-1\geqq(2-R)^2$ $\Leftrightarrow$ $R\geqq\dfrac{5}{4}$ ………⑤

①より，⑤ $\Leftrightarrow$ $\dfrac{6}{\pi}\geqq\left(\dfrac{5}{4}\right)^3$ $\Leftrightarrow$ $\pi\leqq\dfrac{6\cdot4^3}{5^3}=3.072$ ………⑥

⑥は$\pi>3.14$より成立しない。すなわち，③は不成立となり，2 頂点 A, E が Y の内部に含まれる場合，辺 BF とは共通の点をもたない。よって，この場合はありえない。

(ii) X の 1 つの頂点だけが Y の内部に含まれるとき

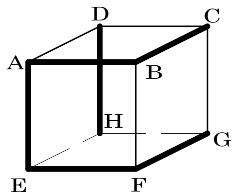
頂点 A だけが Y に含まれるとし，②より，6 つの辺 AE, AB, AD, EF, BC, DH と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。



このとき，立方体 X と球 Y を面 AEFB を含む平面に正射影して考えると，頂点 A は Y を正射影した円に含まれ，また辺 BC と Y の内部が共通の点をもつことより，点 B も Y を正射影した円に含まれる。

すると，(i)よりこの円は辺 EF と共通の点をもたないことより，この場合はありえない。

(iii) X の頂点が Y の内部に含まれないとき



②より，6 つの辺 AE, AB, EF, BC, FG, DH と Y の内部が共通の点をもつとしても一般性は失われない。

このとき，(ii)と同じく，立方体 X と球 Y を面 AEFB を含む平面に正射影して考えると，辺 BC, FG と Y の内部が共通の点をもつことより，点 B, F がともに Y を正射影した円に含まれる。

すると，(i)よりこの円は辺 AE と共通の点をもたないことより，この場合はありえない。

(i)(ii)(iii)より，Y の内部と X の 6 つの辺が共通の点をもつことはない。

以上より，Y の内部と共通の点をもつ X の辺の最大数は 5 である。

コメント

(1)は基本的ですが，(2)については難でした。(1)を使えば，5 辺の場合には条件を満たすことはすぐにわかるのですが，その後，6 辺についての考察がたいへんでした。球の内部に含まれる頂点の個数をもとに場合分けをしましたが，内部に含まれる辺を決めるプロセスは，パズルに向かっていく気分で解いていきましたので，その詳細は省略しました。時間無制限で解くには楽しい問題でしょうが……。

問　題

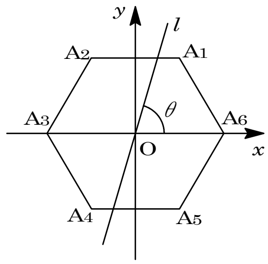
平面上に，点 O を中心とし点A_1，A_2，A_3，A_4，A_5，A_6を頂点とする正六角形がある。O を通りその平面上にある直線 l を考え，各A_kと l との距離をそれぞれd_kとする。このとき

$$D = {d_1}^2 + {d_2}^2 + {d_3}^2 + {d_4}^2 + {d_5}^2 + {d_6}^2$$

はlによらず一定であることを示し，その値を求めよ。ただし，$\mathrm{OA}_k = r$とする。

[1999]

解答例



O を原点とし，$1 \leqq k \leqq 6$で，一般性を失うことなく$\mathrm{A}_k\left(r\cos\dfrac{k\pi}{3},\ r\sin\dfrac{k\pi}{3}\right)$とおくことができる。

またlの方向ベクトルを$(\cos\theta,\ \sin\theta)$とすると，法線ベクトルは$(-\sin\theta,\ \cos\theta)$とおけるので，

$$l : -x\sin\theta + y\cos\theta = 0$$

すると，点と直線との距離の公式を用いて，

$$d_k = \frac{\left|-r\cos\dfrac{k\pi}{3}\sin\theta + r\sin\dfrac{k\pi}{3}\cos\theta\right|}{\sqrt{\sin^2\theta + \cos^2\theta}} = r\left|\sin\left(\frac{k\pi}{3} - \theta\right)\right|$$

$$D = \sum_{k=1}^{6} {d_k}^2 = r^2\sum_{k=1}^{6}\sin^2\left(\frac{k\pi}{3} - \theta\right) = \frac{r^2}{2}\sum_{k=1}^{6}\left\{1 - \cos 2\left(\frac{k\pi}{3} - \theta\right)\right\}$$

$$= 3r^2 - \frac{r^2}{2}\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2k\pi}{3} - 2\theta\right)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{6}\cos\left(\frac{2k\pi}{3} - 2\theta\right) = \cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\theta\right) + \cos(2\pi - 2\theta)$

$$+ \cos\left(\frac{8\pi}{3} - 2\theta\right) + \cos\left(\frac{10\pi}{3} - 2\theta\right) + \cos(4\pi - 2\theta)$$

$$= 2\left\{\cos\left(\frac{2\pi}{3} - 2\theta\right) + \cos\left(\frac{4\pi}{3} - 2\theta\right) + \cos(2\pi - 2\theta)\right\}$$

$$= 2\left\{2\cos(\pi - 2\theta)\cos\frac{\pi}{3} + \cos(-2\theta)\right\}$$

$$= 2(-\cos 2\theta + \cos 2\theta) = 0$$

以上より，$D = 3r^2$

コメント

正六角形と直線 l の位置関係は相対的なので，どちらか一方を「よい位置」に配置することができます。上の解は前者を「よい位置」に配置したものです。

問　題

実数 $a,\ b,\ c,\ d,\ e$ に対して，座標平面上の点 $\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(c,\ d)$，$\mathrm{C}(e,\ 0)$ をとる。ただし点 A と点 B はどちらも原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ とは異なる点とする。このとき，実数 $s,\ t$ で，$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を満たすものが存在するための，$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ についての必要十分条件を求めよ。 [2014]

解答例

$s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，$s(a,\ b)+t(c,\ d)=(e,\ 0)$ となり，

$$as+ct=e\cdots\cdots\cdots①,\quad bs+dt=0\cdots\cdots\cdots②$$

①×d－②×c より，$(ad-bc)s=de\cdots\cdots\cdots$③

②×a－①×b より，$(ad-bc)t=-be\cdots\cdots\cdots$④

(i)　$ad-bc\neq 0$ のとき　③④より，$s=\dfrac{de}{ad-bc}$，$t=-\dfrac{be}{ad-bc}$

(ii)　$ad-bc=0$ のとき　③④より，$be=de=0\cdots\cdots\cdots$⑤

(ii-i)　$e=0$ のとき　任意の $s,\ t$ で③④は成り立つ。

(ii-ii)　$e\neq 0$ のとき　⑤より，$b=d=0$ となり，$ad-bc=0$ は成り立つ。

また，$(a,\ b)\neq(0,\ 0)$，$(c,\ d)\neq(0,\ 0)$ から，$a\neq 0$，$c\neq 0$ であり，このとき①②が成り立つ $s,\ t$ は存在する。

以上より，①②を満たす実数 $s,\ t$ が存在する条件は，$ad-bc\neq 0$ または（$e=0$ かつ $ad-bc=0$）または（$e\neq 0$ かつ $b=d=0$）である。

コメント

行列を用いて，いったんまとめてもよいですが，ここでは普通に連立方程式を解きました。なお，結論は流れに沿った形で止めています。

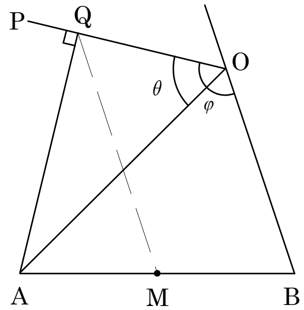
問　題

平面上の三角形 OAB を考え，辺 AB の中点を M とする。$\vec{a}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|}$，$\vec{b}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|}$ とおき，点 P を $\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ であるようにとる。直線 OP に A から下ろした垂線と直線 OP の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行であることを示せ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$ であることを示せ。　[2009]

解答例



(1) まず，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ のなす角を φ とおく。

条件より，$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=-\vec{b}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}>0$ ………①

すると，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{\pi}{2}<\varphi\leqq\pi$ となり，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=1$ から，①より，$\cos\theta=-\cos\varphi$，$\cos\theta=\cos(\pi-\varphi)$

これより，$\theta=\pi-\varphi$ となり，OP は∠AOB の外角の二等分線である。

さて，点 Q は OP 上にあるので, k を正の定数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=k\{\vec{a}+(-\vec{b})\}=k(\vec{a}-\vec{b})\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=y$ とおくと $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=x\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=y\vec{b}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ から，

$$(k\vec{a}-k\vec{b}-x\vec{a})\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0,\quad k|\vec{a}-\vec{b}|^2-x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$$

これより，$k=\dfrac{x\vec{a}\cdot(\vec{a}-\vec{b})}{|\vec{a}-\vec{b}|^2}=\dfrac{x|\vec{a}|^2-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2}=\dfrac{x-x\vec{a}\cdot\vec{b}}{2-2\vec{a}\cdot\vec{b}}=\dfrac{x}{2}$ となり，②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})$$

そこで, M は辺 AB の中点から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\frac{x}{2}(\vec{a}-\vec{b})-\frac{x\vec{a}+y\vec{b}}{2}=-\left(\frac{x}{2}+\frac{y}{2}\right)\vec{b}$$

以上より，$\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$ と $\vec{b}$ は平行である。

(2) (1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{MQ}}|=\left|\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}\right||\vec{b}|=\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{2}=\dfrac{1}{2}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|+|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|)$

コメント

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ がともに単位ベクトルであるのに注目し，ひし形の対角線が角を二等分するという定理をベースにした解です。

問　題

点 O で交わる 2 つの半直線 OX, OY があって $\angle\mathrm{XOY}=60^\circ$ とする。2 点 A, B が OX 上に O, A, B の順に, また, 2 点 C, D が OY 上に O, C, D の順に並んでいるとして, 線分 AC の中点を M, 線分 BD の中点を N とする。線分 AB の長さを s, 線分 CD の長さを t とするとき, 以下の問いに答えよ。

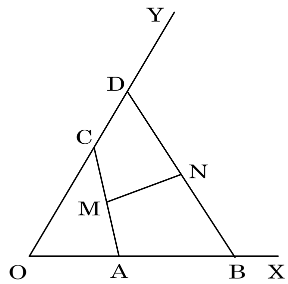
(1) 線分 MN の長さを s と t を用いて表せ。

(2) 点 A, B と C, D が, $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき, 線分 MN の長さの最大値を求めよ。 [2008]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\frac{\vec{b}+\vec{d}}{2}-\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}}{2}$$



すると, $|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}+|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|^2\right)$

$$=\frac{1}{4}(s^2+2st\cos 60^\circ+t^2)$$

$$=\frac{1}{4}(s^2+st+t^2)$$

よって, $\mathrm{MN}=\frac{1}{2}\sqrt{s^2+st+t^2}$

(2) $s^2+t^2=1$ ($s>0$, $t>0$) より, $s=\cos\theta$, $t=\sin\theta$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおくと,

$$s^2+st+t^2=1+\cos\theta\sin\theta=1+\frac{1}{2}\sin 2\theta$$

すると, $\sin 2\theta=1$ $\left(\theta=\frac{\pi}{4}\right)$ のとき, s^2+st+t^2 は最大値 $\frac{3}{2}$ をとる。

よって, (1)より, MN の最大値は $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{3}{2}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ である。

コメント

平面ベクトルの基本題です。$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ の表現がポイントとなっています。なお, (2)では, 相加平均と相乗平均の関係を用いても OK です。

問　題

xy 平面において，原点 O を通る半径 r $(r>0)$ の円を C とし，その中心を A とする。O を除く C 上の点 P に対し，次の 2 つの条件(a), (b)で定まる点 Q を考える。

(a)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の向きが同じ

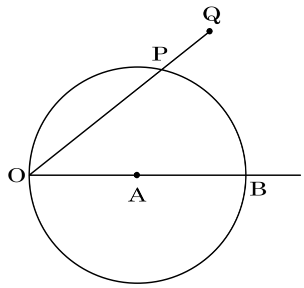
(b)　$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=1$

以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が O を除く C 上を動くとき，点 Q は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動くことを示せ。

(2)　(1)の直線を l とする。l が C と 2 点で交わるとき，r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2007]

解答例



(1)　条件(a)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$　$(k>0)$

条件(b)に代入すると, $k>0$ より $k|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2=1$

これより，$k=\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ とおくと，点 P は OB を直径とする円 C 上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BP}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}\cdot\left(\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=0$，$\dfrac{1}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2}=0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくと，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=2r$ なので，③より,

$$2r|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta=1,\ |\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\cos\theta=\frac{1}{2r}$$

以上より，半直線 OB 上に $\mathrm{OH}=\dfrac{1}{2r}$ となる点 H をとると，点 Q は点 H を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ に直交する直線上を動く。

(2)　l が C と 2 点で交わる条件は OH＜OB であり，$\dfrac{1}{2r}<2r$ から，$r>\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

③式は，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の OB 方向への正射影ベクトルの大きさが一定という意味でとらえました。なお, 原点を O, x 軸を直線 OA とする座標系を導入する方法もあります。

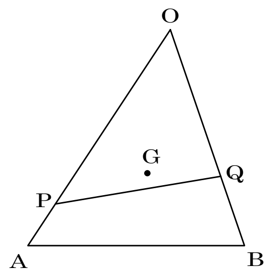
問　題

三角形 OAB の辺 OA, OB 上に, それぞれ点 P, Q をとり

$$\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OQ}=b\overrightarrow{OB}\ (0<a<1,\ 0<b<1)$$

とする。三角形 OAB の重心 G が三角形 OPQ の内部に含まれるための必要十分条件を a, b を用いて表せ。また, その条件を満たす点$(a,\ b)$はどのような範囲にあるかを座標平面上に図示せよ。ただし, 三角形 OPQ の辺上の点は, 三角形 OPQ の内部に含まれないと考える。 [2006]

解答例



条件より, 点 G は△OAB の重心であり, $\overrightarrow{OP}=a\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OQ}=b\overrightarrow{OB}$ なので,

$$\overrightarrow{OG}=\frac{1}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}=\frac{1}{3a}\overrightarrow{OP}+\frac{1}{3b}\overrightarrow{OQ}$$

G が△OPQ の内部に含まれるための必要十分条件は,

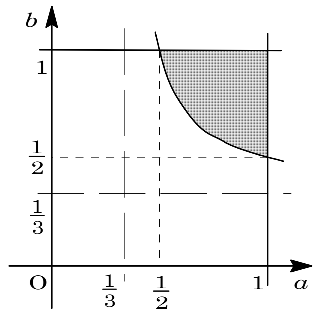
$$\frac{1}{3a}>0,\ \frac{1}{3b}>0,\ \frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}<1$$

$0<a<1$, $0<b<1$ より, $\frac{1}{3a}>0$, $\frac{1}{3b}>0$ は成立し,

$$\frac{1}{3a}+\frac{1}{3b}<1$$

変形すると, $\frac{1}{3b}<\frac{3a-1}{3a}$ となり, $3a-1>0$ のもとで,

$$b>\frac{a}{3a-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3(3a-1)}$$



よって, 点$(a,\ b)$の範囲を図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界線は含まない。

コメント

まったく同じ問題を解いたことのあるような感じがします。単なる既視感かもしれませんが。

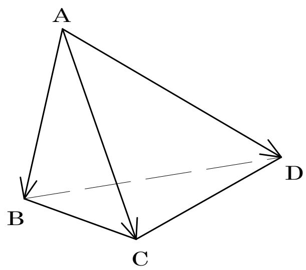
問　題

空間内の 4 点 A, B, C, D が

$$\mathrm{AB}=1,\ \mathrm{AC}=2,\ \mathrm{AD}=3,\ \angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{CAD}=60^\circ,\ \angle\mathrm{DAB}=90^\circ$$

を満たしている。この 4 点から等距離にある点を E とする。線分 AE の長さを求めよ。　[2005]

解答例



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおくと，条件より，

$$|\vec{b}|=1,\ |\vec{c}|=2,\ |\vec{d}|=3$$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 2\cdot\cos 60^\circ=1$$

$$\vec{c}\cdot\vec{d}=2\cdot 3\cdot\cos 60^\circ=3$$

$$\vec{d}\cdot\vec{b}=3\cdot 1\cdot\cos 90^\circ=0$$

このとき，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=x\vec{b}+y\vec{c}+z\vec{d}$ とおくと，

$$|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{b}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2$$

$$=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(x+y)+1$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(x+4y+3z)+4$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}-\vec{d}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{AE}}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2-2(3y+9z)+9$$

条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CE}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DE}}|$ なので，

$$-2(x+y)+1=0,\ 2x+2y=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$-2(x+4y+3z)+4=0,\ x+4y+3z=2\cdots\cdots\cdots②$$

$$-2(3y+9z)+9=0,\ 2y+6z=3\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=0$，$z=\dfrac{1}{2}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\dfrac{1}{2}\vec{b}+\dfrac{1}{2}\vec{d}=\dfrac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|^2=\frac{1}{4}\left(|\vec{b}|^2+2\vec{b}\cdot\vec{d}+|\vec{d}|^2\right)=\frac{5}{2}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AE}}|=\sqrt{\dfrac{5}{2}}=\dfrac{\sqrt{10}}{2}$

コメント

$\angle\mathrm{DAB}=90^\circ$ なので，A を原点とする座標を設定して解こうか，どうしようかと迷いました。計算量はどちらでも同じぐらいでしょう。

問　題

$a,\ b$ を自然数とし，不等式(A) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ を考える。次の問いに答えよ。ただし，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ であること，$\sqrt{7}$ が無理数であることを用いてよい。

(1)　不等式(A)を満たし $b \geqq 2$ である自然数 $a,\ b$ に対して，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ であることを示せ。

(2)　不等式(A)を満たす自然数 $a,\ b$ の組のうち，$b \geqq 2$ であるものをすべて求めよ。

[2017]

解答例

(1)　不等式(A) $\left|\dfrac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<\dfrac{2}{b^4}$ ……①が成り立つとき，

$$\left|\frac{a}{b}+\sqrt{7}\right|=\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}+2\sqrt{7}\right| \leqq \left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|+2\sqrt{7}<\frac{2}{b^4}+2\sqrt{7} \cdots\cdots\cdots ②$$

そして，$b \geqq 2$，$2.645<\sqrt{7}<2.646$ から，

$$\frac{2}{b^4}+2\sqrt{7}<\frac{2}{2^4}+2\times 2.646=0.125+5.292<6 \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より，$\left|\dfrac{a}{b}+\sqrt{7}\right|<6$ ………④

(2)　①×④より，$\left|\dfrac{a^2}{b^2}-7\right|<\dfrac{12}{b^4}$ となり，$b^2\left|a^2-7b^2\right|<12$ ………⑤

ここで，$a^2-7b^2=0$ とすると $a=\pm b\sqrt{7}$ となり, a は自然数, b は 2 以上の自然数, そして $\sqrt{7}$ は無理数ということに反する。

よって，$\left|a^2-7b^2\right| \geqq 1$ となり，さらに $b^2 \geqq 4$ なので，⑤から $b^2=4,\ 9$ すなわち $b=2,\ 3$ である。

(i)　$b=2$ のとき

⑤より，$4\left|a^2-28\right|<12$ となり，$\left|a^2-28\right|=1,\ 2$ である。

(i-i)　$\left|a^2-28\right|=1$ $(a^2-28=\pm 1)$ のとき　$a^2=27,\ 29$ となり不適。

(i-ii)　$\left|a^2-28\right|=2$ $(a^2-28=\pm 2)$ のとき　$a^2=26,\ 30$ となり不適。

(ii)　$b=3$ のとき

⑤より，$9\left|a^2-63\right|<12$ となり，$\left|a^2-63\right|=1$ である。

すると，$a^2=62,\ 64$ となり，適する自然数 a は $a=8$ である。

(i)(ii)より，①を満たすには，$a=8$，$b=3$ であることが必要となる。

以下，$a=8$，$b=3$ のとき，①を満たすかどうかを調べる。

$\dfrac{a}{b}=\dfrac{8}{3}$ より $2.666<\dfrac{a}{b}<2.667$ となり，また $2.645<\sqrt{7}<2.646$ なので，

$$0.02<\left|\frac{a}{b}-\sqrt{7}\right|<0.022$$

一方，$\dfrac{2}{b^4}=\dfrac{2}{81}$ となり，$0.024<\dfrac{2}{b^4}<0.025$ から①を満たしている。

以上より，不等式(A)を満たす自然数 $a,\ b$ の組は，$a=8$，$b=3$ のみである。

コメント

(1)は三角不等式だけですが，(2)は難です。(1)で得た緩い不等式④は誘導と考えるのが妥当ですので，まず①④から邪魔な $\sqrt{7}$ を消すことを考えます。そのための手段としては，足すか掛けるかですが，前者はうまくいかなかったので，後者で……。

問　題

正の整数 n に対して，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$ とおき，1 以上 n 以下のすべての奇数の積を A_n とする。

(1)　$\log_2 n$ 以下の最大の整数を N とするとき，$2^N A_nS_n$ は奇数の整数であることを示せ。

(2)　$S_n=2+\dfrac{m}{20}$ となる正の整数の組$(n,\ m)$をすべて求めよ。

(3)　整数 a と $0\leqq b<1$ を満たす実数 b を用いて，$A_{20}S_{20}=a+b$ と表すとき，b の値を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　まず，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$，$N=[\log_2 n]$，$A_n$ を n 以下のすべての奇数の積とするとき，$P_n=2^NA_nS_n$ とおくと，$P_1=2^0\cdot1\cdot1=1$ となり，$n=1$ のとき P_n は奇数である。

以下，$n\geqq2$ のときを考え，$N\geqq1$ における $P_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{2^NA_n}{k}$ の各項について，

(i)　k が奇数のとき　k は奇数の積 A_n のいずれかの項であることから，

$$\frac{2^NA_n}{k}=\frac{2^N(1\times3\times\cdots)}{k}=2^N\{1\times3\times\cdots\times(k-2)\times(k+2)\times\cdots\}$$ は偶数となる。

(ii)　k が偶数のとき　$N=[\log_2 n]$ から $2^N\leqq n<2^{N+1}$ であることから，

(ii-i)　$k=2^N$ のとき

$$\frac{2^NA_n}{k}=\frac{2^N(1\times3\times\cdots)}{2^N}=1\times3\times\cdots$$ は奇数となる。

(ii-ii)　$k\neq2^N$ のとき　$k=2^l\cdot M$ ($1\leqq l\leqq N-1$，M は n 以下の奇数) と表せ，

$$\frac{2^NA_n}{k}=\frac{2^N(1\times3\times\cdots)}{2^l\cdot M}=2^{N-l}\{1\times3\times\cdots\times(M-2)\times(M+2)\times\cdots\}$$ は偶数となる。

(i)(ii)より，$P_n=2^NA_nS_n$ は，奇数 1 項と偶数 $n-1$ 項の和となり奇数である。

(2)　正の整数 n，m に対し $S_n=2+\dfrac{m}{20}$ ……(＊)となるのは，$S_1<S_2<S_3=1+\dfrac{5}{6}<2$，$S_4=2+\dfrac{1}{12}>2$ から，$n\geqq4$ であり，

$$S_5=2+\frac{17}{60},\quad S_6=2+\frac{9}{20},\quad S_7=2+\frac{83}{140}$$

ここで，(1)から $P_n=2^NA_nS_n$ は奇数となり，$S_n=\dfrac{P_n}{2^NA_n}$ と表せる。

すると，$n\geqq8$ のとき $N\geqq3$ となるので，S_n の分母は約数 $2^3=8$ をもつ。ところが，$20=2^2\times5$ であるので，このとき(＊)は成立しない。

よって，(＊)を満たす$(n,\ m)$は，$n=6$，$m=9$だけである。

(3)　$A_{20}S_{20}=\displaystyle\sum_{k=1}^{20}\frac{1\times3\times\cdots\times19}{k}=a+b$ （aは整数部分，bは小数部分）と表すとき，

(i)　kが奇数のとき

$\dfrac{1\times3\times\cdots\times19}{k}=1\times3\times\cdots\times(k-2)\times(k+2)\times\cdots\times19$より，小数部分$b=0$となる。

(ii)　kが偶数のとき

(1)より，$\dfrac{2^N A_{20}}{k}=\dfrac{2^4(1\times3\times\cdots\times19)}{k}$は整数となり，$A_{20}$を$2^4=16$で割った余りを求めるために，mod16で調べると，

$$A_{20}\equiv1\times3\times5\times7\times(-7)\times(-5)\times(-3)\times(-1)\times1\times3\equiv3\times3\times3\times3\times3\equiv3$$

これより，$k=2,\ 4,\ \cdots,\ 20$のときについて，

(ii-i)　$k=2$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{2}=2^3A_{20}\equiv8\times3\equiv8$より，$b=\dfrac{8}{16}$となる。

(ii-ii)　$k=4$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{4}=2^2A_{20}\equiv4\times3=12$より，$b=\dfrac{12}{16}$となる。

(ii-iii)　$k=6$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{6}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{3}\equiv8\times1=8$より，$b=\dfrac{8}{16}$となる。

(ii-iv)　$k=8$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{8}=2A_{20}\equiv2\times3=6$より，$b=\dfrac{6}{16}$となる。

(ii-v)　$k=10$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{10}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{5}\equiv8\times7\equiv8$より，$b=\dfrac{8}{16}$となる。

(ii-vi)　$k=12$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{12}=2^2\cdot\dfrac{A_{20}}{3}\equiv4\times1=4$より，$b=\dfrac{4}{16}$となる。

(ii-vii)　$k=14$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{14}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{7}\equiv8\times5\equiv8$より，$b=\dfrac{8}{16}$となる。

(ii-viii)　$k=16$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{16}=A_{20}\equiv3$より，$b=\dfrac{3}{16}$となる。

(ii-ix)　$k=18$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{18}=2^3\cdot\dfrac{A_{20}}{9}\equiv8\times11\equiv8$より，$b=\dfrac{8}{16}$となる。

(ii-x)　$k=20$のとき　$\dfrac{2^4A_{20}}{20}=2^2\cdot\dfrac{A_{20}}{5}\equiv4\times7\equiv12$より，$b=\dfrac{12}{16}$となる。

(i)(ii)より，小数部分bの和については，

$$0\times10+\frac{8}{16}+\frac{12}{16}+\frac{8}{16}+\frac{6}{16}+\frac{8}{16}+\frac{4}{16}+\frac{8}{16}+\frac{3}{16}+\frac{8}{16}+\frac{12}{16}=\frac{77}{16}=4+\frac{13}{16}$$

以上より，$A_{20}S_{20}$の小数部分bは$b=\dfrac{13}{16}$である。

コメント

整数に関する難問です。(1)は，$n=7,\ 8$として具体例から考え，それを一般化しただけです。(2)では分母20に，(3)では16で割った余りに注目しています。なお，記述方法を検討しながら解答例をつくると，実質的に時間無制限でした。

問　題

4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。これを証明せよ。 [2013]

解答例

まず，正の整数 n を 3 で割った余りと，n^3，n^5，n^7 をそれぞれ 3 で割った余りは等しくなる。

そこで，n を 3 で割った余りと，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 をそれぞれ 3 で割った余りを表にまとめると，右のようになる。

n	0	1	2
$n+1$	1	2	0
n^3+3	0	1	2
n^5+5	2	0	1
n^7+7	1	2	0

(i)　n を 3 で割った余りが 0 のとき

n^3+3 は 3 の倍数となり，$n^3+3\geqq 30$ なので，n^3+3 は素数ではない。

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 のとき

n^5+5 は 3 の倍数となり，$n^5+5\geqq 6$ なので，n^5+5 は素数ではない。

(iii)　n を 3 で割った余りが 2 のとき

n^7+7 は 3 の倍数となり，$n^7+7\geqq 135$ なので，n^7+7 は素数ではない。

(i)～(iii)より，4 個の整数 $n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 がすべて素数となるような正の整数 n は存在しない。

コメント

n を偶数として，$n+1$，n^3+3，n^5+5，n^7+7 を計算していくと，素数でないのは 3 の倍数という共通項が見つかります。すると，行うべきことは明白です。なお，$n+1$ については，結果として，必要ありませんでした。

問　題

次の 2 つの条件(i), (ii)を満たす自然数 n について考える。

(i)　n は素数ではない。

(ii)　$l,\ m$ を 1 でも n でもない n の正の約数とすると，必ず $|l-m|\leqq 2$ である。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　n が偶数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(2)　n が 7 の倍数のとき，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。

(3)　$2\leqq n\leqq 1000$ の範囲で，(i), (ii)を満たす n をすべて求めよ。　[2012]

解答例

(1)　n が偶数のとき $n=2k$ とおくと，条件(ii)より，必要条件として，

$$|k-2|\leqq 2,\ 0\leqq k\leqq 4$$

さらに，条件(i)を考え合わせると，$2\leqq k\leqq 4$ となり，$n=4,\ 6,\ 8$ である。

(a)　$n=4$ のとき　1, 4 を除く正の約数は 2 だけであり，条件を満たす。

(b)　$n=6$ のとき　1, 6 を除く正の約数は 2, 3 であり，条件を満たす。

(c)　$n=8$ のとき　1, 8 を除く正の約数は 2, 4 であり，条件を満たす。

(a)～(c)より，$n=4,\ 6,\ 8$

(2)　n が 7 の倍数のとき, (1)と同様にすると,

$$|k-7|\leqq 2,\ 5\leqq k\leqq 9$$

(1)より，偶数を除くと，$n=35,\ 49,\ 63$ である。

(a)　$n=35$ のとき　1, 35 を除く正の約数は 5, 7 であり，条件を満たす。

(b)　$n=49$ のとき　1, 49 を除く正の約数は 7 だけであり，条件を満たす。

(c)　$n=63$ のとき　1, 63 を除く正の約数は 3, 7, 9, 21 であり，条件に反する。

(a)～(c)より，$n=35,\ 49$

(3)　$31^2=961$，$37^2=1369$ に注目して, (1), (2)と同様に考える。

(Ⅰ) n が 3 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=3^2,\ 3\times5$

(Ⅱ) n が 5 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=5\times3,\ 5^2,\ 5\times7$

(Ⅲ) n が 11 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=11^2,\ 11\times13$

(Ⅳ) n が 13 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=13\times11,\ 13^2$

(Ⅴ) n が 17 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=17^2,\ 17\times19$

(Ⅵ) n が 19 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=19\times17,\ 19^2$

(Ⅶ) n が 23 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=23^2$

(Ⅷ) n が 29 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=29^2,\ 29\times31$

(Ⅸ) n が 31 の倍数のとき　条件を満たすのは，$n=31\times29,\ 31^2$

(Ⅰ)～(Ⅸ)に, (1), (2)の結果を合わせると, $2 \leqq n \leqq 1000$ の範囲で条件を満たす n は,

$$n = 4,\ 6,\ 8,\ 9,\ 15,\ 25,\ 35,\ 49,\ 121,\ 143,\ 169,\ 289,\ 323,\ 361,\ 529,\ 841,\ 899,\ 961$$

コメント

(1)と(2)が実験となっています。(3)も, 同じ調子で羅列しています。

問　題

5 次式 $f(x)=x^5+px^4+qx^3+rx^2+sx+t$ （p, q, r, s, t は実数）について考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) 数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ が等差数列であることと,

$$f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m \quad (l,\ m \text{ は実数})$$

と書けることは互いに同値であることを示せ。

(2) $f(x)$ は(1)の条件を満たすものとする。α を実数, k を 3 以上の自然数とする。k 項からなる数列

$$f(\alpha),\ f(\alpha+1),\ f(\alpha+2),\ \cdots,\ f(\alpha+k-1)$$

が等差数列となるような α , k の組をすべて求めよ。 [2012]

解答例

(1) 数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ が等差数列であるとき, $f(0)=m$, 公差を l とおくと, $f(1)=m+l$, $f(2)=m+2l$, $f(3)=m+3l$, $f(4)=m+4l$

ここで, $g(x)=f(x)-(m+lx)$ とおくと, $g(x)$ は 5 次式であり,

$$g(0)=g(1)=g(2)=g(3)=g(4)=0$$

よって, $g(x)$ は $x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$ で割り切れ, $a\neq 0$ とし,

$$g(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)$$

すると, $f(x)=ax(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$ となり, x^5 の係数を比べると $a=1$ である。

すなわち, $f(x)=x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)+lx+m$ ………①

逆に, ①のとき, $f(0)=m$, $f(1)=m+l$, $f(2)=m+2l$, $f(3)=m+3l$, $f(4)=m+4l$ となり, 数列 $f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ は等差数列である。

(2) 条件より, $f(\alpha)$, $f(\alpha+1)$, $f(\alpha+2)$ が等差数列であることが必要であり,

$$2f(\alpha+1)=f(\alpha)+f(\alpha+2) \text{ ………②}$$

ここで,
$$\begin{aligned}f(\alpha)+f(\alpha+2)&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)(\alpha-4)+l\alpha+m\\&\quad+(\alpha+2)(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)+l\alpha+2l+m\\&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha^2-4\alpha+14)+2l\alpha+2l+2m\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}2f(\alpha+1)&=2(\alpha+1)\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(\alpha-3)+2l\alpha+2l+2m\\&=\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)(2\alpha^2-4\alpha-6)+2l\alpha+2l+2m\end{aligned}$$

すると, ②から, $20\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)=0$ となり, $\alpha=0,\ 1,\ 2$

また, $f(5)=5\cdot4\cdot3\cdot2\cdot1+5l+m=120+5l+m$ となり, 数列 $f(3)$, $f(4)$, $f(5)$ は等差数列とはなりえない。

(i)　$\alpha=0$ のとき　$f(0)$, $f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ は等差数列から,
　　$(\alpha,\ k)=(0,\ 5)$, $(0,\ 4)$, $(0,\ 3)$

(ii)　$\alpha=1$ のとき　$f(1)$, $f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ は等差数列から,
　　$(\alpha,\ k)=(1,\ 4)$, $(1,\ 3)$

(iii)　$\alpha=2$ のとき　$f(2)$, $f(3)$, $f(4)$ は等差数列から,
　　$(\alpha,\ k)=(2,\ 3)$

コメント

(1)の証明は, 問題文に暗示されているように, 因数定理の利用がポイントです。また, (2)については, 必要条件から絞り込むという方法をとっています。

問　題

$l,\ m,\ n$ を 3 以上の整数とする。等式 $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ を満たす $l,\ m,\ n$ の組をすべて求めよ。 [2010]

解答例

3 以上の整数 l, m, n に対して, $\left(\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\right)l=2$ ………①

まず, $l\geqq 3$ から, $0<\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1\leqq\dfrac{2}{3}$ となり, $m>0$ から左側の不等式は,

$$2n-mn+2m>0\,,\ \ mn-2m-2n<0\,,\ \ (m-2)(n-2)<4 \text{ ………②}$$

すると, ②を満たす 3 以上の整数 $(m,\ n)$ は,

$$(3,\ 3),\ (3,\ 4),\ (3,\ 5),\ (4,\ 3),\ (5,\ 3)$$

(i) $(m,\ n)=(3,\ 3)$ のとき $\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{2}$ となり, ①から, $l=4$

(ii) $(m,\ n)=(3,\ 4)$ のとき $\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{3}$ となり, ①から, $l=6$

(iii) $(m,\ n)=(3,\ 5)$ のとき $\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{6}$ となり, ①から, $l=12$

(iv) $(m,\ n)=(4,\ 3)$ のとき $\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{4}$ となり, ①から, $l=8$

(v) $(m,\ n)=(5,\ 3)$ のとき $\dfrac{n}{m}-\dfrac{n}{2}+1=\dfrac{1}{10}$ となり, ①から, $l=20$

(i)～(v)より, ①を満たす 3 以上の整数 $(l,\ m,\ n)$ は,

$$(4,\ 3,\ 3),\ (6,\ 3,\ 4),\ (12,\ 3,\ 5),\ (8,\ 4,\ 3),\ (20,\ 5,\ 3)$$

コメント

見かけよりは扱いやすい不定方程式です。アバウトな評価で解の候補が絞れます。実際は, もっときつい評価をして進めましたが。

問　題

α を 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解とするとき，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ を満たす整数の組 $(a,\ b,\ c)$ をすべて求めよ。ただし，必要ならば，$\sqrt{2}$ が無理数であることは証明せずに用いてよい。 [2009]

解答例

α は 2 次方程式 $x^2-2x-1=0$ の解より，$\alpha^2=2\alpha+1$ となり，

$$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=ab+(5ac+5b)\alpha+25c(2\alpha+1)$$
$$=(ab+25c)+(5ac+5b+50c)\alpha$$

条件より，$(a+5\alpha)(b+5c\alpha)=1$ なので，

$$(ab+25c-1)+5(ac+b+10c)\alpha=0$$

ここで, a, b, c は整数，$\alpha=1\pm\sqrt{2}$ は無理数より，

$$ab+25c-1=0\cdots\cdots\cdots①,\quad ac+b+10c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$b=-c(a+10)$ となり，①に代入すると，

$$-ac(a+10)+25c-1=0,\quad c(-a^2-10a+25)=1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，③から c は 1 の約数となり，$c=\pm1$ である。

(i)　$c=1$ のとき

③より，$-a^2-10a+25=1$，$a^2+10a-24=0$，$(a+12)(a-2)=0$

$a=-12$ のとき $b=-1\times(-2)=2$，$a=2$ のとき $b=-1\times12=-12$ となる。

(ii)　$c=-1$ のとき

③より，$-a^2-10a+25=-1$，$a^2+10a-26=0$ となり，整数解はない。

(i)(ii)より，$(a,\ b,\ c)=(-12,\ 2,\ 1)$，$(2,\ -12,\ 1)$

コメント

整数についての基本問題です。式も扱いやすく，計算量も少なめです。

問　題

x, y を変数とする。

(1)　n を自然数とする。次の等式が成り立つように定数 a, b を定めよ。

$$\frac{n+1}{y(y+1)\cdots(y+n)(y+n+1)}=\frac{a}{y(y+1)\cdots(y+n)}+\frac{b}{(y+1)(y+2)\cdots(y+n+1)}$$

(2)　すべての自然数 n について，次の等式が成り立つことを証明せよ。

$$\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$$ [2006]

解答例

(1)　条件より，$n+1=a(y+n+1)+by$，$n+1=(a+b)y+a(n+1)$

任意の y に対して成立する条件は，$a+b=0$，$a(n+1)=n+1$ となり，

$a=1$，$b=-1$

(2)　$\displaystyle\frac{n!}{x(x+1)\cdots(x+n)}=\sum_{r=0}^{n}(-1)^r\frac{{}_n\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……①の成立を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき

①の左辺 $=\dfrac{1}{x(x+1)}$，①の右辺 $=\dfrac{{}_1\mathrm{C}_0}{x}-\dfrac{{}_1\mathrm{C}_1}{x+1}=\dfrac{1}{x}-\dfrac{1}{x+1}=\dfrac{1}{x(x+1)}$

よって，$n=1$ のとき成立する。

(ii)　$n=k$ のとき

$\displaystyle\frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}$ ……②の成立を仮定する。

ここで，$(k+1)!=(k+1)k!$ を用いると，(1)および②より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\frac{k!}{x(x+1)\cdots(x+k)}-\frac{k!}{(x+1)(x+2)\cdots(x+k+1)}\\&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}-\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}\ \cdots\cdots\cdots③\end{aligned}$$

さて，いったん $r+1=s$ とおきかえると，

$$\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+1+r}=\sum_{s=1}^{k+1}(-1)^{s-1}\frac{{}_k\mathrm{C}_{s-1}}{x+s}=-\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，

$$\begin{aligned}\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)}&=\sum_{r=0}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r}{x+r}+\sum_{r=1}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}\\&=\frac{{}_k\mathrm{C}_0}{x}+\sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_k\mathrm{C}_r+{}_k\mathrm{C}_{r-1}}{x+r}+(-1)^{k+1}\frac{{}_k\mathrm{C}_k}{x+k+1}\end{aligned}$$

さらに，${}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1} = {}_{k+1}\mathrm{C}_r$ より，

$$\frac{(k+1)!}{x(x+1)\cdots(x+k+1)} = \frac{1}{x} + \sum_{r=1}^{k}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r} + (-1)^{k+1}\frac{1}{x+k+1}$$

$$= \sum_{r=0}^{k+1}(-1)^r\frac{{}_{k+1}\mathrm{C}_r}{x+r}$$

よって，$n = k+1$ のとき，①は成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n について，①は成立する。

コメント

数学的帰納法による証明において，式変形を進めると，(1)の恒等式だけでなく，二項係数の関係 ${}_k\mathrm{C}_r + {}_k\mathrm{C}_{r-1} = {}_{k+1}\mathrm{C}_r$ を利用するという方針が見えてきます。

問　題

正の整数 n に対して,

$$S(n)=\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}\,,\quad T(n)=\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$$

とおく。等式 $S(n)=T(n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ が成り立つことを, 数学的帰納法を用いて示せ。 [2005]

解答例

$S(n)=\displaystyle\sum_{p=1}^{2n}\frac{(-1)^{p-1}}{p}$, $T(n)=\displaystyle\sum_{q=1}^{n}\frac{1}{n+q}$ に対して, $S(n)=T(n)$ を証明する。

(i)　$n=1$ のとき

$$S(1)=\sum_{p=1}^{2}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\,,\quad T(1)=\sum_{q=1}^{1}\frac{1}{1+q}=\frac{1}{2}$$ より, $S(1)=T(1)$

(ii)　$n=k$ のとき

$S(k)=T(k)$, すなわち $\displaystyle\sum_{p=1}^{2k}\frac{(-1)^{p-1}}{p}=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}$ の成立を仮定する。

両辺に $\left(\dfrac{1}{2k+1}-\dfrac{1}{2k+2}\right)$ を加えると,

$$\begin{aligned}\sum_{p=1}^{2(k+1)}\frac{(-1)^{p-1}}{p}&=\sum_{q=1}^{k}\frac{1}{k+q}+\left(\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\right)\\&=\frac{1}{k+1}+\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}-\frac{1}{2k+2}\\&=\frac{1}{k+2}+\cdots+\frac{1}{2k}+\frac{1}{2k+1}+\frac{1}{2k+2}=\sum_{q=1}^{k+1}\frac{1}{(k+1)+q}\end{aligned}$$

よって, $S(k+1)=T(k+1)$ となり, $n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, 正の整数 n に対して, $S(n)=T(n)$ が成り立つ。

コメント

たびたび出題されている有名問題です。神戸大でも出題されたとの記憶がありましたので, 調べたところ, 10 年前の 1995 年でした。

問　題

素数 p, q に対して，$a_n = p^n - 4(-q)^n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって整数 a_n を定める。ただし，$p>2q$ とする。

(1)　a_1 と a_2 が 1 より大きい公約数 m をもつならば，$m=3$ であることを示せ。

(2)　a_n がすべて 3 の倍数であるような p, q のうちで積 pq が最小となるものを求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$a_1 = p+4q$，$a_2 = p^2-4q^2$ の公約数を m とし，整数 b_1，b_2 に対し，$a_1 = mb_1$，$a_2 = mb_2$ とすると，

$$p+4q = mb_1 \cdots\cdots\cdots ①,\quad p^2-4q^2 = mb_2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①より $p = mb_1 - 4q$，②に代入して $(mb_1-4q)^2 - 4q^2 = mb_2$

$$12q^2 = m(b_2 - b_1{}^2 + 8b_1q) \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，素数 p, q は $p>2q$ を満たすので，p は 5 以上の奇数である。これより，$p+4q$ は奇数となり，①より m は奇数である。

さらに，③より m は $12q^2 = 2^2\times3\times q^2$ の約数であるので，$m>1$ であれば，奇数 m の値として，$m=3,\ q,\ q^2,\ 3q,\ 3q^2\ (q\neq2)$ が考えられる。

ところが，$m=q,\ q^2,\ 3q,\ 3q^2$ のときは，①より p は q の倍数となり，不適である。以上より，$m>1$ であれば，$m=3$ である。

(2)　まず，$a_1 = (p+q)+3q$ から，a_1 が 3 の倍数であるためには，$p+q$ が 3 の倍数であることが必要である。逆に，$p+q$ が 3 の倍数とき，任意の n に対して，

$$\begin{aligned} a_n &= p^n - 4(-q)^n = p^n - (3+1)(-q)^n = p^n - (-q)^n - 3(-q)^n \\ &= (p+q)\{p^{n-1} + p^{n-2}(-q) + \cdots + (-q)^{n-1}\} - 3(-q)^n \end{aligned}$$

これより，a_n はすべて 3 の倍数となるので，a_n が 3 の倍数である条件と，$p+q$ が 3 の倍数である条件は等しい。

さて，素数 p, q は $p>2q$ を満たすので，$p\geqq5$, $q\geqq2$ である。

そこで，$q=2$ のときを考えると，$p+q$ が 3 の倍数となる最小の素数 p は 7 であり，このとき $pq=14$ となる。

また，$q\geqq3$ のときは $p\geqq7$ から $pq\geqq21$ となり，これより積 pq が最小となる p, q は，$p=7$，$q=2$ である。

コメント

(2)において，a_2 についても，$a_2 = p^2 - q^2 - 3q^2 = (p+q)(p-q) - 3q^2$ と変形し，3 の倍数となる条件を考えています。

問　題

実数 a, r に対し数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1 = a,\quad x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。

(1)　すべての n について $x_n = a$ となるような a を求めよ。

(2)　$x_2 \neq a$，$x_3 = a$ となるような a の個数を求めよ。

(3)　$0 \leqq a \leqq 1$ となるすべての a について $0 \leqq x_n \leqq 1\ (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ が成り立つような r の範囲を求めよ。　[2004]

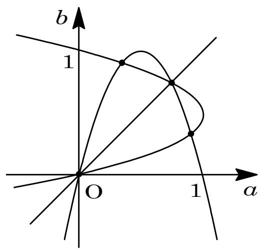
解答例

(1)　$f(x) = rx(1 - x)$ とおくと，$x_{n+1} = f(x_n)$ ………(＊)

さて，$x_1 = x_2 = a$ とすると，$a = f(a)$ であり，このとき(＊)から，帰納的に $x_n = a$ となるので，求める a の条件は，$a = ra(1 - a)$，$ra^2 - (r - 1)a = 0$

よって，$r = 0$ のとき $a = 0$，$r \neq 0$ のとき $a = 0,\ \dfrac{r-1}{r}$ である。

(2)　条件より，$x_1 = x_3 = a$ のとき，$x_2 = b \neq a$ とおくと，$x_2 = f(x_1)$，$x_3 = f(x_2)$ から，



$$b = f(a),\ b = ra(1 - a) \cdots\cdots\cdots ①$$

$$a = f(b),\ a = rb(1 - b) \cdots\cdots\cdots ②$$

①－②より，$b - a = r(a - b) - r(a^2 - b^2)$

$b \neq a$ から，$-1 = r(1 - a - b)$，$1 - a - b = -\dfrac{1}{r}\ (r \neq 0)$

①を代入して，$1 - a - ra(1 - a) = -\dfrac{1}{r}$，$ra^2 - (r + 1)a + 1 + \dfrac{1}{r} = 0$ ………③

$$D = (r + 1)^2 - 4r\left(1 + \frac{1}{r}\right) = r^2 - 2r - 3 = (r - 3)(r + 1) \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，$b \neq a$ すなわち $ra(1 - a) \neq a$ という条件は，(1)より $a \neq 0$，$a \neq \dfrac{r-1}{r}$ に対応する。$a = 0$ では，③は $1 + \dfrac{1}{r} = 0$，$r = -1$ となるが，このとき③は重解をもち，$b \neq a$ を満たす a はない。$a = \dfrac{r-1}{r}$ では，$r \cdot \dfrac{(r-1)^2}{r^2} - (r + 1) \cdot \dfrac{r-1}{r} + 1 + \dfrac{1}{r} = 0$ から $r = 3$ となるが，このときも③は重解をもち，$b \neq a$ を満たす a はない。

したがって，$r = 0$ のときも含めて，④から，$-1 \leqq r \leqq 3$ のとき a は存在しない。また，$r < -1$，$3 < r$ のとき a は 2 個存在する。

(3)　まず，$0 \leqq a \leqq 1$ となる a に対して，$0 \leqq x_2 \leqq 1$ が必要なので，(2)と同様に考えて，

$$b = f(a) = ra(1 - a) = -ra^2 + ra = -r\left(a - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}r$$

$r<0$ では，明らかに $b<0$ となる a が存在し，不適である。

$r\geqq 0$ では，求める条件は $0\leqq\frac{1}{4}r\leqq 1$，すなわち $0\leqq r\leqq 4$ である。

逆に $0\leqq r\leqq 4$ のとき，$(*)$から帰納的に，どんな n に対しても $0\leqq x_n\leqq 1$ となるので，求める条件は $0\leqq r\leqq 4$ である。

コメント

(2)では，$r>0$ のときの 1 例を図に示しました。2 つの放物線 $b=f(a)$ と $a=f(b)$ の $b\neq a$ である共有点の個数を求めるということに注目して解いています。

問　題

数列$\{a_k\}$が$a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$および

$$a_{kl}=a_k+a_l \ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ l=1,\ 2,\ \cdots)$$

を満たすとする。

(1) $k,\ l$ を 2 以上の自然数とする。自然数 n が与えられたとき，$l^{m-1} \leqq k^n < l^m$ を満たす自然数 m が存在することを示せ。

(2) $k,\ l$ を 2 以上の自然数とするとき，$-\dfrac{1}{n} < \dfrac{a_k}{a_l} - \dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{1}{n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$が成り立つことを示せ。

(3) $a_2=a$ とするとき，数列$\{a_k\}$の一般項を求めよ。 [2003]

解答例

(1) $l \geqq 2$ より，$l^{m-1} \leqq k^n < l^m$ ……①から，$m-1 \leqq n\log_l k < m$ ………②

$k \geqq 2,\ n \geqq 1$ より，$n\log_l k > 0$ なので，②を満たす自然数 m が存在する。すなわち，①を満たす自然数 m は存在する。

(2) ①より$(m-1)\log l \leqq n\log k < m\log l$，$\log l > 0$ から$\dfrac{m-1}{n} \leqq \dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{m}{n}$ ………③

さて，$a_{kl}=a_k+a_l$ において，$l=k$ とすると，$a_{k^2}=2a_k$

$$a_{k^3}=a_{k^2}+a_k=2a_k+a_k=3a_k$$

すると，帰納的に，$a_{k^n}=na_k$ となる。

ここで，①と $a_k < a_{k+1}$ より，$a_{l^{m-1}} \leqq a_{k^n} < a_{l^m}$ となり，$(m-1)a_l \leqq na_k < ma_l$

さらに, $k \geqq 2,\ l \geqq 2$ より $kl > k$ なので，$a_k+a_l=a_{kl} > a_k$ から，$a_l > 0$ である。

よって，$\dfrac{m-1}{n} \leqq \dfrac{a_k}{a_l} < \dfrac{m}{n}$ ………④

③④より，$\dfrac{m-1}{n}-\dfrac{m}{n} < \dfrac{a_k}{a_l}-\dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{m}{n}-\dfrac{m-1}{n}$，$-\dfrac{1}{n} < \dfrac{a_k}{a_l}-\dfrac{\log k}{\log l} < \dfrac{1}{n}$ ………⑤

(3) $k,\ l$ と無関係などんな n に対しても，⑤が成立するので，

$$\frac{a_k}{a_l}-\frac{\log k}{\log l}=0,\ a_k=\frac{\log k}{\log l}a_l \ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑥に $l=2$ を代入すると，$a_k=\dfrac{\log k}{\log 2}a_2=a\log_2 k$

これは，$a_k < a_{k+1}$ および $a_{kl}=a_k+a_l$ を満たしている。

コメント

与えられた漸化式をみて，対数関数のイメージをもつことができれば，証明のネックとなる④を導くことが可能ですが，それでもかなりの難問です。

問　題

数列$\{a_n\}$において，各項a_nが$a_n \geqq 0$をみたし，かつ$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$が成り立つとする。
さらに各nに対し

$$b_n = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_n),\ c_n = 1-(a_1+a_2+\cdots\cdots+a_n)$$

とおく。

(1) すべてのnに対し不等式$b_n \geqq c_n$が成り立つことを，数学的帰納法で示せ。

(2) あるnについて$b_{n+1} = c_{n+1}$が成り立てば，$b_n = c_n$となることを示せ。

(3) $b_3 = \dfrac{1}{2}$となるとき，$c_3 = \dfrac{1}{2}$であることを示せ。また$b_3 = \dfrac{1}{2}$となる数列$\{a_n\}$は全部で何種類あるかを求めよ。 [2001]

解答例

(1) (i) $n=1$のとき　$b_1 = c_1 = 1-a_1$より，$b_1 \geqq c_1$は成立する。

(ii) $n=k$のとき　$b_k \geqq c_k$と仮定すると，$b_k - c_k \geqq 0$

$$b_{k+1} - c_{k+1} = (1-a_{k+1})b_k - (c_k - a_{k+1}) \geqq a_{k+1}(1-b_k)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$a_n \geqq 0$かつ$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$より，$0 \leqq a_n \leqq \dfrac{1}{2}$となるので，$\dfrac{1}{2} \leqq 1-a_n \leqq 1$

よって，$b_k = (1-a_1)(1-a_2)\cdots\cdots(1-a_k) \leqq 1$から，$a_{k+1}(1-b_k) \geqq 0\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$b_{k+1} - c_{k+1} \geqq 0$となり，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，すべてのnに対し，不等式$b_n \geqq c_n$が成り立つ。

(2) 条件より，あるnに対して，$b_{n+1} - c_{n+1} = (b_n - c_n) + a_{n+1}(1-b_n) = 0$

ここで，②より$a_{n+1}(1-b_n) \geqq 0$なので，$b_n - c_n \leqq 0$

ところが, (1)より$b_n - c_n \geqq 0$なので，$b_n - c_n = 0$となる。

(3) $c_3 = 1-(a_1+a_2+a_3)$で，$0 \leqq a_1+a_2+a_3 \leqq \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \frac{1}{2}$より，$\dfrac{1}{2} \leqq c_3 \leqq 1$

ところが，$b_3 = \dfrac{1}{2}$のとき, (1)より$c_3 \leqq \dfrac{1}{2}$となるので，$c_3 = \dfrac{1}{2}$である。

さて，$b_3 = (1-a_1)(1-a_2)(1-a_3) = \dfrac{1}{2}\cdots\cdots③$，$c_3 = 1-(a_1+a_2+a_3) = \dfrac{1}{2}\cdots\cdots④$

③より，$1-(a_1+a_2+a_3)+(a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1) - a_1a_2a_3 = \dfrac{1}{2}$

④を代入して，$a_1a_2+a_2a_3+a_3a_1 = a_1a_2a_3\cdots\cdots\cdots⑤$

また, (2)より$b_3 = c_3 = \dfrac{1}{2}$のとき，$b_2 = c_2$なので,

$$(1-a_1)(1-a_2) = 1-(a_1+a_2),\ a_1a_2 = 0\cdots\cdots\cdots⑥$$

(i)　$a_1=0$ のとき　⑤より $a_2a_3=0$

$a_2=0$ のとき③より $a_3=\dfrac{1}{2}$，$a_3=0$ のとき③より $a_2=\dfrac{1}{2}$

(ii)　$a_1\neq 0$ のとき　⑥より $a_2=0$ で，⑤より $a_3a_1=0$ なので $a_3=0$

このとき，③より $a_1=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$(a_1,\ a_2,\ a_3)=\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ 0\right),\ \left(0,\ \dfrac{1}{2},\ 0\right),\ \left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$

すると，このいずれの組も，$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}a_n=\frac{1}{2}$ から $n\geqq 4$ において $a_n=0$ となるので，求める数列$\{a_n\}$は全部で 3 種類存在する。

コメント

思考がなめらかに流れていくように，設問に工夫がいろいろ施されています。

問　題

どのような負でない 2 つの整数 m と n を用いても，$x = 3m + 5n$ とは表すことができない正の整数 x をすべて求めよ。　[2000]

解答例

まず, 8 以上の整数 x は, 0 以上の整数 m, n を用いて，$x = 3m + 5n$ の形に表せることを示す。

$n = 0$ のとき $x = 3m$ となり, $m \geqq 0$ より x は 3 以上の 3 の倍数をすべて表すことができる。

$n = 1$ のとき $x = 3m + 5 = 3(m + 1) + 2$ となり，$m + 1 \geqq 1$ より x は 3 で割った余りが 2 となる 5 以上の整数をすべて表すことができる。

$n = 2$ のとき $x = 3m + 10 = 3(m + 3) + 1$ となり，$m + 3 \geqq 3$ より x は 3 で割った余りが 1 となる 10 以上の整数をすべて表すことができる。

以上より, 8 以上の整数 x は，$x = 3m + 5n$ の形に表せる。

さて，$(m,\ n) = (1,\ 1)$ で $x = 8$ となるので, 8 より小さい自然数 x が $x = 3m + 5n$ の形に表せるのは，$(m,\ n) = (1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(0,\ 1)$ の場合だけであり，順に $x = 3,\ 6,\ 5$ となる。

すると, 0 以上の整数 m, n を用いて，$x = 3m + 5n$ とは表すことができない自然数 x は 1, 2, 4, 7 だけである。

コメント

いきなり 8 以上の整数がすべて $3m + 5n$ の形で表せることがわかったわけではありません。m, n に 0 以上の整数を具体的にあてはめて推測をしました。ただ, 3 と 5 が互いに素なので, 整数 m, n を用いて $3m + 5n$ の形で, 任意の整数が表せるということは, 基本の 1 つです。

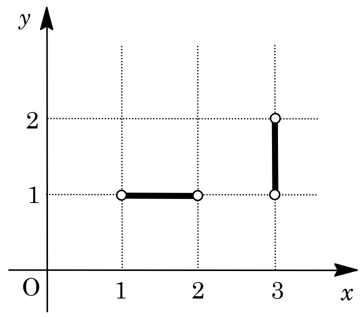
問　題

座標平面において，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。また，2 つの格子点を結ぶ長さ 1 の線分から両端の点を除いたものを格子辺という。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(630,\ 5400)$ を通る直線 $y=ax$ （a は定数）は $0\leqq x\leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

(2)　n を 2 以上の整数とする。点 $\mathrm{P}(630,\ 5400)$ を通る曲線 $y=bx^n$ (b は n により定まる定数) は $0\leqq x\leqq 630$ の範囲で何個の格子辺と交わるか。

[1998]



格子辺の例

解答例

(1)　$y=ax$ が点 $\mathrm{P}(630,\ 5400)$ を通ることより，$5400=630a$，$a=\dfrac{60}{7}$

よって，$y=\dfrac{60}{7}x$ ………①

$0<x\leqq 630$ の範囲で，①が通る格子点の x 座標は，

$x=7,\ 7\times 2,\ 7\times 3,\ \cdots\cdots,\ 7\times 90$

ここで，一般的に曲線または直線が点 $(m,\ n)$ という格子点を通るとき，$x=m$ 上の格子辺との交点と $y=n$ 上の格子辺との交点，合わせて 2 個の交点が消失する。

これより，求める格子辺との交点の数は，$630+5400-90\times 2=5850$

(2)　$y=bx^n$ が点 $\mathrm{P}(630,\ 5400)$ を通ることより，$5400=630^n\cdot b$，$b=\dfrac{5400}{630^n}$

$$y=\frac{5400}{630^n}x^n=\frac{2^3\cdot 3^3\cdot 5^2}{(2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7)^n}x^n=\frac{1}{2^{n-3}\cdot 3^{2n-3}\cdot 5^{n-2}\cdot 7^n}x^n\cdots\cdots\cdots②$$

(i) $n=2$ のとき

②は $y=\dfrac{2}{3\cdot 7^2}x^2$ ……③となり，x が $3\cdot 7=21$ の倍数のとき y が整数となる。

$0<x\leqq 630$ の範囲で，③が通る格子点の x 座標は，

$x=21,\ 21\times 2,\ 21\times 3,\ \cdots\cdots,\ 21\times 30$

求める格子辺との交点の数は，$630+5400-30\times 2=5970$

(ii)　$n=3$ のとき

②は $y=\dfrac{1}{3^3\cdot 5\cdot 7^3}x^3$ ……④となり，x が $3\cdot 5\cdot 7=105$ の倍数のとき y が整数となる。

$0<x\leqq 630$ の範囲で，④が通る格子点の x 座標は，

$x=105,\ 105\times 2,\ 105\times 3,\ \cdots\cdots,\ 105\times 6$

求める格子辺との交点の数は，$630+5400-6\times 2=6018$

(iii) $n\geqq 4$ のとき

$1\leqq n-3<n$，$n<2n-3<2n$，$2\leqq n-2<n$ となることより，②から x が

$2\cdot 3^2\cdot 5\cdot 7=630$ の倍数のとき y が整数となる。

$0<x\leqq 630$ の範囲で，②が通る格子点の x 座標は，$x=630$

求める格子辺との交点の数は，$630+5400-1\times 2=6028$

コメント

(2)の(iii)は，初めは $n=4$ のときも考えて，$0<x<630$ では格子点を通らないことから，$n=5,\ 6,\cdots$ の場合も同じだろうと予測し，その理由を考えたものです。

問　題

1 以上 6 以下の 2 つの整数 a, b に対し，関数 $f_n(x)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次の条件(ア), (イ), (ウ)で定める。

(ア)　$f_1(x)=\sin(\pi x)$

(イ)　$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}-x\right)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(ウ)　$f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

以下の問いに答えよ。

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$f_5(0)$ を求めよ。

(2)　$a=1$，$b=6$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)$ を求めよ。

(3)　1 個のさいころを 2 回投げて，1 回目に出る目を a, 2 回目に出る目を b とするとき，$f_6(0)=0$ となる確率を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$a=2$，$b=3$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{5}{6}$ から，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\quad f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{5}{6}-x\right),\quad f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_5(x)$ を求めると，

$$f_5(x)=f_4(-x)=f_3\left(\frac{5}{6}+x\right)=f_2\left(-\frac{5}{6}-x\right)=f_1\left(\frac{5}{6}+\frac{5}{6}+x\right)$$
$$=f_1\left(\frac{5}{3}+x\right)=\sin\left(\frac{5}{3}\pi+\pi x\right)$$

よって，$f_5(0)=\sin\dfrac{5}{3}\pi=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(2)　$a=1$，$b=6$ のとき，$\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=\dfrac{7}{6}$ から，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\quad f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\frac{7}{6}-x\right),\quad f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_{2n}(x)=f_{2n-1}\left(\dfrac{7}{6}-x\right)=f_{2n-2}\left(-\dfrac{7}{6}+x\right)=f_{2n-2}\left(x-\dfrac{7}{6}\right)$ となり，

$$f_{2n}(x)=f_2\left(x-\frac{7}{6}(n-1)\right)=f_1\left(\frac{7}{6}-x+\frac{7}{6}(n-1)\right)=f_1\left(-x+\frac{7}{6}n\right)$$

よって，$f_{2n}(0)=f_1\left(\dfrac{7}{6}n\right)=\sin\left(\dfrac{7}{6}n\pi\right)$

ここで，$s_k=(-1)^k f_{2k}(0)=(-1)^k\sin\left(\dfrac{7}{6}k\pi\right)$ とおくと，

$$\sum_{k=1}^{12}s_k=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}+0-\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}-1-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}+0=0$$

すると，$100=12\times 8+4=96+4$ から，

$$\sum_{k=1}^{100}(-1)^k f_{2k}(0)=\sum_{k=1}^{96}s_k+s_{97}+s_{98}+s_{99}+s_{100}$$
$$=0\times 8+\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}+1+\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}+\sqrt{3}$$

(3) $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}=k$ とおくと，$1\leqq a\leqq 6$，$1\leqq b\leqq 6$ より，$\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq 2$ となり，

$$f_1(x)=\sin(\pi x),\ f_{2n}(x)=f_{2n-1}(k-x),\ f_{2n+1}(x)=f_{2n}(-x)$$

これより，$f_6(x)=f_5(k-x)=f_4(-k+x)=f_4(x-k)$ から，

$$f_6(x)=f_2(x-2k)=f_1(k+2k-x)=f_1(3k-x)=\sin(3k\pi-\pi x)$$

よって，$f_6(0)=\sin(3k\pi)$ となり，$f_6(0)=0$ より $\sin(3k\pi)=0\cdots\cdots\cdots(*)$

ここで，$\pi\leqq 3k\pi\leqq 6\pi$ なので，(*)から，$3k\pi=\pi,\ 2\pi,\ 3\pi,\ 4\pi,\ 5\pi,\ 6\pi$

$$3k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$$

すなわち，(*)を満たすのは，$3k=\dfrac{3}{a}+\dfrac{3}{b}$ が 6 以下の自然数の場合である。

そこで，$\dfrac{3}{a}$，$\dfrac{3}{b}$ のとり得る値が，ともに $3,\ \dfrac{3}{2},\ 1,\ \dfrac{3}{4},\ \dfrac{3}{5},\ \dfrac{1}{2}$ であることに注意し，この条件を満たす $\left(\dfrac{3}{a},\ \dfrac{3}{b}\right)$ の組を列挙すると，

$$(3,\ 3),\ (3,\ 1),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{3}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (1,\ 3),\ (1,\ 1),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{3}{2}\right),\ \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

したがって，$f_6(0)=0$ となる $(a,\ b)$ の組は 8 通りとなり，その確率は，

$$\frac{8}{6^2}=\frac{2}{9}$$

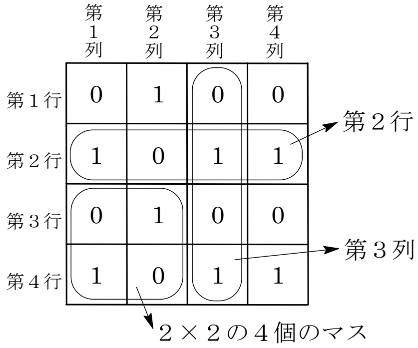
コメント

関数の定義を問う設問に確率が融合しています。(2)では，$f_{2n}(0)$ の式の形から周期 12 が見つかります。また(3)では，条件を満たす $(a,\ b)$ の組を見つけるには，記述は省きましたが，センター風に 6×6 の表を作りました。

問　題

n を 2 以上の整数とする。正方形の形に並んだ $n\times n$ のマスに 0 または 1 のいずれかの数字を入れる。マスは上から第 1 行，第 2 行，…，左から第 1 列，第 2 列…と数える。数字の入れ方についての次の条件 p を考える。

条件 p：1 から $n-1$ までのどの整数 $i,\ j$ についても，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 の 4 個のマスには 0 と 1 が 2 つずつ入る。



（$n=4$ の場合の入れ方の例）

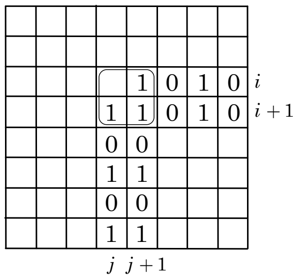
(1) 条件 p を満たすとき，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れることを示せ。

(2) 条件 p を満たすような数字の入れ方の総数 a_n を求めよ。 [2015]

解答例

(1) まず，第 i 行，第 j 列の数字を $N(i,\ j)$ と表す。

ここで，条件 p を満たすとき，第 n 行にも第 n 列にも同じ数字が連続して現れると仮定する。



すると，右図のように，ある i, j について，

$$N(i,\ n)=N(i+1,\ n),\quad N(n,\ j)=N(n,\ j+1)$$

このとき，任意の $k\,(1\leqq k\leqq n)$ に対して，

$$N(i,\ k)=N(i+1,\ k),\quad N(k,\ j)=N(k,\ j+1)$$

これより，第 i 行，第 $i+1$ 行と第 j 列，第 $j+1$ 列とが作る 2×2 のマスには，同じ数字が 3 個入ることになり，条件 p に反する。

よって，第 n 行と第 n 列の少なくとも一方には 0 と 1 が交互に現れる。

(2) 第 n 行と第 n 列について，ともに 0 と 1 が交互に現れる入れ方を b_n 通り，また一方だけ 0 と 1 が交互に現れる入れ方を c_n 通りとする。すると，条件 p を満たす数字の入れ方の総数 a_n は，(1)の結果から，$a_n=b_n+c_n$ となる。

まず，$n=2$ のとき，条件 p を満たす入れ方は右図のようになり，$b_2=2$，$c_2=4$ である。

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 0&1\\\hline\end{array}$　$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 1&0\\\hline\end{array}$　$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&1\\\hline 0&0\\\hline\end{array}$

$\begin{array}{|c|c|}\hline 1&0\\\hline 1&0\\\hline\end{array}$　$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&0\\\hline 1&1\\\hline\end{array}$　$\begin{array}{|c|c|}\hline 0&1\\\hline 0&1\\\hline\end{array}$

さて，$n\times n$ のマスから $(n+1)\times(n+1)$ のマスを作ると考え，$N(n,\ n)$ と $N(n+1,\ n+1)$ に注目する。

(i)　$n\times n$ のマスで，第 n 行と第 n 列ともに 0 と 1 が交互に現れるとき

(i-i)　$N(n+1,\ n+1)=N(n,\ n)$ のとき

						1	
						0	
						1	
						0	
						1	
						0	
1	0	1	0	1	0	1	

条件 p を満たすのは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，

$$N(n+1,\ k)\neq N(n,\ k)\text{ かつ }N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$$

(i-ii)　$N(n+1,\ n+1)\neq N(n,\ n)$ のとき

条件 p を満たすのは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，次のいずれかである。

・$N(n+1,\ k)\neq N(n,\ k)$ かつ $N(k,\ n+1)=N(k,\ n)$

・$N(n+1,\ k)=N(n,\ k)$ かつ $N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$

(ii)　$n\times n$ のマスで，第 n 行と第 n 列いずれか一方に 0 と 1 が交互に現れるとき

(ii-i)　$N(n+1,\ n+1)=N(n,\ n)$ のとき

						0	
						1	
						0	
						1	
						0	
						1	
1	0	1	0	1	0	1	

条件 p を満たすのは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，

$$N(n+1,\ k)\neq N(n,\ k)\text{ かつ }N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$$

(ii-ii)　$N(n+1,\ n+1)\neq N(n,\ n)$ のとき

条件 p を満たすのは，第 n 行だけ 0 と 1 が交互に現れるときは，$N(n+1,\ n+1)$ を除いて，

$$N(n+1,\ k)=N(n,\ k)\text{ かつ }N(k,\ n+1)\neq N(k,\ n)$$

また，第 n 列だけ 0 と 1 が交互に現れるときも同様である。

(i)(ii)より，b_{n+1}，c_{n+1} を b_n，c_n を用いて表すと，$b_2=2$，$c_2=4$ のもとで，

$$b_{n+1}=b_n\ \cdots\cdots\cdots①\quad c_{n+1}=2b_n+2c_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$b_{n+1}=b_n=2$ となり，②に代入すると，$c_{n+1}=4+2c_n$ となる。

$$c_{n+1}+4=2(c_n+4)\text{，}\ c_n+4=(c_2+4)2^{n-2}=8\cdot 2^{n-2}=2^{n+1}$$

以上より，$a_n=2+(2^{n+1}-4)=2^{n+1}-2$

コメント

場合の数についてのかなり難しめの問題です。$n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots$ と実験をしながら考えていきます。さらに，考えたことを表現するのが一苦労です。そのため，上記の解答例をまとめるのに，たいへん時間を費やしてしまいました。なお，①②については，(i-i)の場合だけが，第 $n+1$ 行と第 $n+1$ 列について，ともに 0 と 1 が交互に現れることに着目し，立式しています。

問　題

さいころを繰り返し投げ，n 回目に出た目を X_n とする。n 回目までに出た目の積 $X_1X_2\cdots X_n$ を T_n で表す。T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n とし，余りが 2，3，4 のいずれかである確率を q_n とする。

(1)　p_n+q_n を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と n を用いて表せ。

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおいて r_n を求めることにより，p_n を n の式で表せ。　[2014]

解答例

(1)　$T_n=X_1X_2\cdots X_n$ とするとき，T_n が 5 で割り切れないのは，X_1，X_2，$\cdots$，X_n のいずれも 5 以外の場合である。

条件より，T_n を 5 で割った余りが 1 である確率を p_n，余りが 2，3，4 のいずれかである確率を q_n とするとき，p_n+q_n は T_n が 5 で割り切れない確率になるので，

$$p_n+q_n=\left(\frac{5}{6}\right)^n\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　T_{n+1} を 5 で割った余りが 1 となる場合は，次の通りである。

(i)　T_n を 5 で割った余りが 1 のとき

X_{n+1} が 1 または 6 であるときで，その確率は $\dfrac{1}{3}$ である。

(ii)　T_n を 5 で割った余りが, 2, 3, 4 のいずれかであるとき

X_{n+1} がそれぞれ 3, 2, 4 ときで，その確率はいずれも $\dfrac{1}{6}$ である。

(iii)　T_n を 5 で割った余りが 0 のとき

どんな X_{n+1} に対しても T_{n+1} を 5 で割った余りは 0 となり，成立しない。

(i)～(iii)に，①を適用して，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}q_n=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}\left\{\left(\frac{5}{6}\right)^n-p_n\right\}=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　$r_n=\left(\dfrac{6}{5}\right)^n p_n$ とおくと，$p_1=\dfrac{1}{3}$ より $r_1=\dfrac{6}{5}p_1=\dfrac{2}{5}$ となり，②から，

$$\left(\frac{6}{5}\right)^{n+1}p_{n+1}=\frac{1}{5}\left(\frac{6}{5}\right)^n p_n+\frac{1}{5},\quad r_{n+1}=\frac{1}{5}r_n+\frac{1}{5}$$

これより，$r_{n+1}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{5}\left(r_n-\dfrac{1}{4}\right)$ となり，$r_n-\dfrac{1}{4}=\left(r_1-\dfrac{1}{4}\right)\left(\dfrac{1}{5}\right)^{n-1}=\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$

よって，$r_n=\dfrac{1}{4}+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{5}\right)^n$，$p_n=\left(\dfrac{5}{6}\right)^n r_n=\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{5}{6}\right)^n+\dfrac{3}{4}\left(\dfrac{1}{6}\right)^n$

コメント

確率と漸化式についての標準的な問題です。(3)で誘導が付いていたのは意外です。

問　題

n を 3 以上の整数とする。n 個の球 K_1，K_2，…，K_n と n 個の空の箱 H_1，H_2，…，H_n がある。以下のように，K_1，K_2，…，K_n の順番に，球を箱に 1 つずつ入れていく。

まず，球 K_1 を箱 H_1，H_2，…，H_n のどれか 1 つに無作為に入れる。次に，球 K_2 を，箱 H_2 が空ならば箱 H_2 に入れ，箱 H_2 が空でなければ残りの $n-1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

一般に，$i=2,\ 3,\ \cdots,\ n$ について，球 K_i を箱 H_i が空ならば箱 H_i に入れ，箱 H_i が空でなければ残りの $n-i+1$ 個の空の箱のどれか 1 つに無作為に入れる。

(1)　K_n が入る箱は H_1 または H_n である。これを証明せよ。

(2)　K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　まず，K_1 が入った箱で場合分けをする。

(i)　K_1 が H_1 に入ったとき　K_n は H_n に入る。

(ii)　K_1 が H_n に入ったとき　K_n は H_1 に入る。

(iii)　K_1 が H_i $(2\leqq i\leqq n-1)$ に入ったとき　K_i は H_1，H_{i+1}，…，H_n のどれか 1 つに入る。さらに，K_i が入った箱で場合分けをする。

(a)　K_i が H_1 に入ったとき　K_n は H_n に入る。

(b)　K_i が H_n に入ったとき　K_n は H_1 に入る。

(c)　K_i が H_j $(i+1\leqq j\leqq n-1)$ に入ったとき　K_j は H_1，H_{j+1}，…，H_n のどれか 1 つに入る。

同様に，この操作を繰り返すと，$i<j$ より，K_n は H_1 または H_n のいずれかに入ることになる。

(2)　K_{n-1} が H_{n-1} に入らない，すなわち K_{n-2} までの球が H_{n-1} に入っている場合を考え，この確率を p_n とおく。また，一般的に，K_l が H_m に入ることを $K_l\to H_m$ と表し，$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})$ が入る箱について場合分けをする。

まず，$K_l\to H_l$ となる l が存在しないときを考える。

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})\to(H_2,\ H_3,\ H_4,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{n-(n-2)+1}=\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{3}\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に，$K_l\to H_l$ となる l がただ 1 個だけのときを考える。

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2})\to(H_3,\ H_2,\ H_4,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot 1\cdot\frac{1}{n-2}\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{3}$$

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2}) \to (H_2,\ H_4,\ H_3,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は,

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1}\cdot 1\cdot\frac{1}{n-3}\cdots\frac{1}{3}$$

他の場合も同様に考えると, $(*)$において, $\dfrac{1}{n-1}$, $\dfrac{1}{n-2}$, $\dfrac{1}{n-3}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{3}$ のうちから 1 つの式を選び, それを 1 に変えて積をとったものが, 対応する確率となる。

また, $K_l \to H_l$ となる l が 2 個あるときを考える。

$(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2}) \to (H_4,\ H_2,\ H_3,\ H_5,\ \cdots,\ H_{n-1})$ のときの確率は,

$$\frac{1}{n}\cdot 1\cdot 1\cdot\frac{1}{n-3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{3}$$

他の場合も同様に考えると, $(*)$において, $\dfrac{1}{n-1}$, $\dfrac{1}{n-2}$, $\dfrac{1}{n-3}$, $\cdots$, $\dfrac{1}{3}$ のうちから 2 つの式を選び, それを 1 に変えて積をとったものが, 対応する確率となる。

さらに, $K_l \to H_l$ となる l が 3 個以上あるときも同様に考えていき, $K_l \to H_l$ となる l の個数が最大のとき, すなわち $n-3$ 個であるときを考える。

この場合は, $(K_1,\ K_2,\ K_3,\ K_4,\ \cdots,\ K_{n-2}) \to (H_{n-1},\ H_2,\ H_3,\ H_4,\ \cdots,\ H_{n-2})$ のときとなり, この確率は, $\dfrac{1}{n}\cdot 1\cdot 1\cdot 1\cdots 1$ である。

以上, K_{n-2} までの球が H_{n-1} に入っている場合は, これらの 2^{n-3} 通りの場合の総和となり, その確率 p_n は,

$$p_n = \frac{1}{n}\Big(1+\frac{1}{n-1}\Big)\Big(1+\frac{1}{n-2}\Big)\Big(1+\frac{1}{n-3}\Big)\cdots\Big(1+\frac{1}{3}\Big)$$
$$= \frac{1}{n}\cdot\frac{n}{n-1}\cdot\frac{n-1}{n-2}\cdot\frac{n-2}{n-3}\cdots\frac{4}{3} = \frac{1}{3}$$

したがって, K_{n-1} が H_{n-1} に入る確率は, $1-p_n = \dfrac{2}{3}$ である。

コメント

どこに解法の糸口を見つければよいのか迷うほどの問題です。(2)では, 極端なケースを端緒として考えました。ただ, 断続的に睡魔が襲ってきましたが……。

問　題

1 個のさいころを 3 回続けて投げるとき，1 回目に出る目を l，2 回目に出る目を m，3 回目に出る目を n で表すことにする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 極限値 $\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が存在する確率を求めよ。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が，$x>-1$ の範囲で極値をとる確率を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $L=\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+mx+n}{x+1}$ が存在する必要条件は，$x\to-1$ のとき $lx^2+mx+n\to0$

$$l-m+n=0,\ m=l+n\cdots\cdots\cdots①$$

逆に，①のとき，$L=\displaystyle\lim_{x\to-1}\frac{lx^2+(l+n)x+n}{x+1}=\lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(lx+n)}{x+1}=-l+n$

したがって，①を満たす $(l,\ m,\ n)$ を求めると，

(i) $m=2$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1)$

(ii) $m=3$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(iii) $m=4$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 3),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

(iv) $m=5$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

(v) $m=6$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 5),\ (2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2),\ (5,\ 1)$

(i)〜(v)より，①を満たす確率は，$\dfrac{15}{6^3}=\dfrac{5}{72}$ である。

(2) 関数 $f(x)=\dfrac{lx^2+mx+n}{x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{(2lx+m)(x+1)-(lx^2+mx+n)}{(x+1)^2}=\frac{lx^2+2lx+m-n}{(x+1)^2}$$

$x>-1$ で極値をとる条件は，この範囲で $f'(x)$ の符号が変化することである。

そこで，$g(x)=lx^2+2lx+m-n$ とおくと，$g(x)$ のグラフの軸が $x=-1$ から，求める条件は，

$$g(-1)=l-2l+m-n=-l+m-n<0,\ m<l+n\cdots\cdots\cdots②$$

さて，(1)より，$m=l+n$ を満たす $(l,\ m,\ n)$ は 15 通りある。

また，$m>l+n$ を満たす $(l,\ m,\ n)$ を求めると，

(i) $m=3$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1)$

(ii) $m=4$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1)$

(iii) $m=5$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),\ (3,\ 1)$

(iv)　$m=6$ のとき　$(l,\ n)=(1,\ 1),\ (1,\ 2),\ (1,\ 3),\ (1,\ 4),\ (2,\ 1),\ (2,\ 2),$
$(2,\ 3),\ (3,\ 1),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1)$

(i)～(iv)より，$m>l+n$ を満たす $(l,\ m,\ n)$ は 20 通りある。

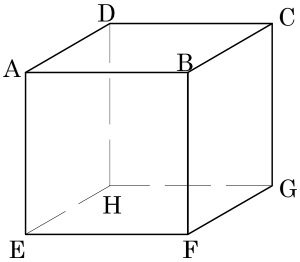
以上より，②を満たす確率は，$1-\dfrac{15+20}{6^3}=\dfrac{181}{216}$ である。

コメント

最初, (2)は直接的に数えましたが，ここはやはり余事象でしょう。

問　題

n を 0 以上の整数とする。立方体 ABCD-EFGH の頂点を，以下のように移動する 2 つの動点 P, Q を考える。時刻 0 には P は頂点 A に位置し，Q は頂点 C に位置している。時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には，P は時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移り，Q も時刻 n に位置していた頂点から，それに隣接する 3 頂点のいずれかに等しい確率で移る。一方，時刻 n において，P と Q が同じ頂点に位置していれば，時刻 $n+1$ には P も Q も時刻 n の位置からは移動しない。



(1) 時刻 1 において，P と Q が異なる頂点に位置するとき，P と Q はどの頂点にあるか。可能な組み合わせをすべて挙げよ。

(2) 時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率 r_n を求めよ。

(3) 時刻 n において，P と Q がともに上面 ABCD の異なる頂点に位置するか，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置するかのいずれかである確率を p_n とする。また，時刻 n において，P と Q のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH にある確率を q_n とする。p_{n+1} を，p_n と q_n を用いて表せ。

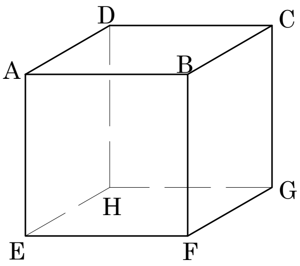
(4) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}$ を求めよ。 [2010]

解答例

(1) 時刻 1 に，点 P は A から B, D, E のいずれかに移動，点 Q は C から B, D, G のいずれかに移動している。

これより，異なる頂点に位置する (P, Q) は，

(B, D)，(B, G)，(D, B)，(D, G)
(E, B)，(E, D)，(E, G)



(2) まず，(1)から，P と Q が異なる頂点に位置するとき，その位置は 1 つの面の対角線の両端である。

そこで，(P, Q) が異なる頂点に位置するとき，1 回の移動で可能な $3^2=9$ 通りの (P, Q) の位置のうち，異なる頂点であるのは，(1)から 7 通りである。

すると，時刻 n において，P と Q が異なる頂点に位置する確率を r_n とすると，

$$r_{n+1}=\frac{7}{9}r_n,\quad r_n=r_0\left(\frac{7}{9}\right)^n=\left(\frac{7}{9}\right)^n$$

(3)　時刻 n において，(P，Q)がともに上面 ABCD の異なる頂点か，またはともに下面 EFGH の異なる頂点に位置する状態を A_n とし，(P，Q)のいずれか一方が上面 ABCD，他方が下面 EFGH の頂点に位置する状態を B_n とする。

すると，状態 A_n である確率が p_n，状態 B_n である確率が q_n である。

さて，(1)から，状態 A_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{3}{9}=\frac{1}{3}$，状態 B_n から状態 A_{n+1} に推移する確率は $\frac{2}{9}$，これら以外の状態から状態 A_{n+1} への推移はないので，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}q_n\ \cdots\cdots\cdots①$$

(4)　(2)(3)より，$p_n+q_n=r_n$ なので，$q_n=r_n-p_n=\left(\frac{7}{9}\right)^n-p_n\ \cdots\cdots\cdots②$

①②より，$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n-\frac{2}{9}p_n=\frac{1}{9}p_n+\frac{2}{9}\left(\frac{7}{9}\right)^n$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^{n+1}=\frac{1}{9}\left\{p_n-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n\right\}$$

すると，$p_0=1$ から，$p_n-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n=\left\{p_0-\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{9}\right)^n=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$ となり，②から，

$$p_n=\frac{1}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n+\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n,\quad q_n=\frac{2}{3}\left(\frac{7}{9}\right)^n-\frac{2}{3}\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{q_n}{p_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2\cdot7^n-2}{7^n+2}=\lim_{n\to\infty}\frac{2-2\cdot7^{-n}}{1+2\cdot7^{-n}}=2$

コメント

問題文が長く，また答案の書きにくい問題です。(3)の状態 B_n からの推移確率については，上面を AEFB，下面を DHGC として見ると，(1)が利用できます。なお，漸化式の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

1 枚の硬貨を繰り返し投げる反復試行を行い，表が 500 回続けて出たときに終わるものとする。n を 500 以上の自然数とするとき，この反復試行が n 回で終わる確率を $p(n)$ とする。

(1) $501 \leqq n \leqq 1000$ のとき，$p(n)$ は n に関係なく一定の値になることを示し，またその値を求めよ。

(2) $p(1002)-p(1001)$ の値を求めよ。

(3) $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，$p(n+1)-p(n)$ の値を求めよ。 [2008]

解答例

(1) k を $0 \leqq k \leqq 499$ を満たす整数とし，初めの k 回が任意，$k+1$ 回目に裏，その後 500 回続けて表が出て，$k+501$ 回目に終了する場合を考える。

ここで，$n=k+501$ とおくと，$501 \leqq k+501 \leqq 1000$ から，

$$p(n)=1^k \cdot \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{500}=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$$

(2) 1001 回目で終了するのは，500 回目に終了せず，501 回目に裏，その後 500 回続けて表が出る場合より，$p(1001)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1-p(500)\}$

また，1002 回目で終了するのは，500 回目，501 回目に終了せず，502 回目に裏，その後 500 回続けて表が出る場合より，$p(1002)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1-p(500)-p(501)\}$

すると，(1)から $p(501)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ なので，

$$p(1002)-p(1001)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1-p(500)-p(501)-1+p(500)\}$$
$$=-\left(\frac{1}{2}\right)^{501}p(501)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\left(\frac{1}{2}\right)^{501}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$$

(3) $1002 \leqq n \leqq 1500$ のとき，(2)と同様に考えて，

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1-p(500)-p(501)-\cdots-p(n-501)\}$$
$$p(n+1)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\{1-p(500)-p(501)-\cdots-p(n-500)\}$$

これより，$p(n+1)-p(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{501}p(n-500)$

$1002 \leqq n \leqq 1500$ より，$502 \leqq n-500 \leqq 1000$ なので，$p(n-500)=\left(\frac{1}{2}\right)^{501}$ となり，

$$p(n+1)-p(n)=-\left(\frac{1}{2}\right)^{501}\left(\frac{1}{2}\right)^{501}=-\left(\frac{1}{2}\right)^{1002}$$

コメント

余事象の考え方を利用して(2)を解くと，(3)にスムーズに接続できます。

問　題

n を $n \geqq 7$ を満たす整数とし, 1 つのさいころを投げる試行を n 回くり返す。このとき, $2 \leqq k \leqq n$ を満たす整数 k に対し, 「n 回の試行のうち, 同じ目が出るどの 2 つの試行も k 以上離れている」という事象が起こる確率を p_k と表す。ただし, i 番目の試行と j 番目の試行について, この試行は $|i-j|$ だけ離れているということにする。

(1) p_2 の値を求めよ。

(2) $k \geqq 3$ のとき, p_k の値を求めよ。

(3)「n 回の試行において, 同じ目が続くことはなく, しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する」という事象が起こる確率を求めよ。 [2002]

解答例

(1) さいころを n 回投げたとき, 同じ目が続けて出ない確率は, $1 \times \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ となるので, $p_2 = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}$ である。

(2) さいころを n 回投げたとき, 同じ目の出るのが 3 以上離れているのは, 3 回目以降に直前の 2 回の目と異なる目が出ればよいので,

$$p_3 = 1 \times \frac{5}{6} \times \left(\frac{4}{6}\right)^{n-2} = \frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

同様に考えて, $p_4 = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \left(\frac{3}{6}\right)^{n-3} = \frac{5}{9}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}$

$$p_5 = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \left(\frac{2}{6}\right)^{n-4} = \frac{5}{18}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-4}$$

$$p_6 = 1 \times \frac{5}{6} \times \frac{4}{6} \times \frac{3}{6} \times \frac{2}{6} \times \left(\frac{1}{6}\right)^{n-5} = \frac{5}{54}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-5}$$

また, 同じ目の出るのが 7 以上離れている場合はないので, $p_k = 0\ (k \geqq 7)$

(3) n 回の試行において, 同じ目が続くことはなく, しかも同じ目が出る試行の組でちょうど 2 だけ離れたものが少なくとも 1 組存在する場合は, 同じ目が出るどの 2 つの試行も 2 以上離れている場合から, 同じ目が出るどの 2 つの試行も 3 以上離れている場合を除いたものなので, その確率は,

$$p_2 - p_3 = \left(\frac{5}{6}\right)^{n-1} - \frac{5}{6}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-2}$$

コメント

問題文の読解力をみるものです。具体的に考えていけば, 内容は平易であることがわかりますが, イライラするとミスをしてしまいそうです。

問　題

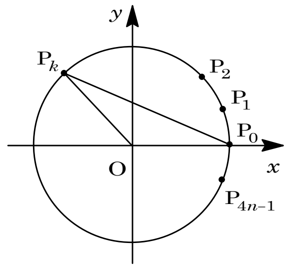
半径 1 の円周上に，$4n$ 個の点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} が，反時計回りに等間隔に並んでいるとする。ただし，n は自然数である。

(1) 線分 P_0P_k の長さが $\sqrt{2}$ 以上となる k の範囲を求めよ。

(2) 点 P_0，P_1，…，P_{4n-1} のうちの相異なる 3 点を頂点にもつ三角形のうち，各辺の長さがすべて $\sqrt{2}$ 以上になるものの個数 $g(n)$ を求めよ。　[2001]

解答例

(1) $\angle P_0OP_k = \dfrac{2\pi}{4n}k = \dfrac{\pi}{2n}k$ であり，条件より $P_0P_k \geqq \sqrt{2}$ なので $P_0P_k{}^2 \geqq 2$



$\triangle P_0OP_k$ に余弦定理を適用して，

$$1+1-2\cdot1\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{2n}k \geqq 2$$

$\cos\dfrac{\pi}{2n}k \leqq 0$ より，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \dfrac{\pi}{2n}k \leqq \dfrac{3\pi}{2}$

よって，$n \leqq k \leqq 3n$

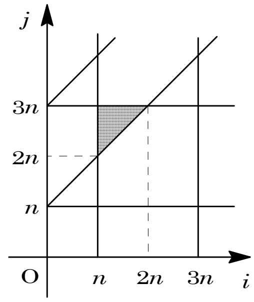
(2) P_0 を 1 つの頂点とする三角形を考え，他の頂点を P_i，P_j $(i<j)$ とおくと，

$P_0P_i \geqq \sqrt{2}$ から，$n \leqq i \leqq 3n$ ………①

$P_iP_j \geqq \sqrt{2}$ から，$i+n \leqq j \leqq i+3n$ ………②

$P_jP_0 \geqq \sqrt{2}$ から，$4n-3n \leqq j \leqq 4n-n$

$n \leqq j \leqq 3n$ ………③



①②③を満たす領域は右図のようになり，この領域内の $(i,\ j)$ の組の個数は，

$$\sum_{i=n}^{2n}\{3n-(i+n)+1\} = \sum_{i=n}^{2n}(2n-i+1) = \sum_{i=1}^{n+1}i$$
$$= \frac{1}{2}(n+1)(n+2)$$

P_1 を 1 つの頂点とする三角形，P_2 を 1 つの頂点とする三角形，……，P_{4n-1} を 1 つの頂点とする三角形についても同数となり，また条件を満たす三角形を重複して 3 回数えていることより，求める個数 $g(n)$ は，

$$g(n) = \frac{1}{2}(n+1)(n+2)\cdot 4n\cdot\frac{1}{3} = \frac{2}{3}n(n+1)(n+2)$$

コメント

(2)は格子点の個数を対応させて数えました。よく見かける頻出題です。

問　題

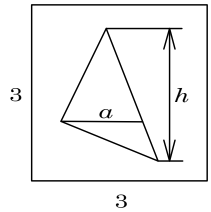
xy 平面上の 16 個の点からなる集合

$$\{(x,\ y)\,|\,x=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ y=0,\ 1,\ 2,\ 3\}$$

を考える。この集合から異なる 3 点を無作為に選ぶ試行において，次の事象の起こる確率を求めよ。

「選んだ 3 点が三角形の頂点となり，その三角形の面積は $\dfrac{9}{2}$ である」　[2000]

解答例



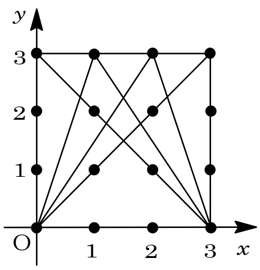
1 辺の長さ 3 の正方形の内部または辺上に頂点のある三角形を考え，右図のように長さ a, h を決めると，三角形の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}ah\leqq\frac{1}{2}\cdot3\cdot3=\frac{9}{2}$$

これより，$S=\dfrac{9}{2}$ となるのは $x=y=3$，すなわち三角形の少なくとも 1 つの辺が，正方形と辺を共有するときである。

さて，ここで条件を満たす 16 個の格子点から 3 個の格子点を選ぶ場合の数は ${}_{16}\mathrm{C}_3=560$ 通りである。

また，3 個の格子点を結んでできる三角形の面積 S が，$S=\dfrac{9}{2}$ となるのは，次の 2 つの場合がある。



(i)　三角形の 1 辺だけが正方形と辺を共有するとき

1 つの共有辺に対して，三角形が 2 通りずつ決まるので，$2\times4=8$ 通りある。

(ii)　三角形の 2 辺が正方形と辺を共有するとき

直角二等辺三角形となる場合なので, 4 通りある。

(i)(ii)より，合わせて $8+4=12$ 通りとなる。

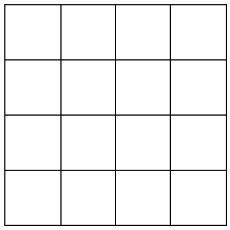
以上より，$S=\dfrac{9}{2}$ となる確率は，$\dfrac{12}{560}=\dfrac{3}{140}$ となる。

コメント

たくさんの場合分けが必要なのではないかと思いましたが，$S=\dfrac{9}{2}$ が正方形の面積の半分であることがわかり，ホッとしました。しかし，前半の論理は直観的には明らかなのですが，記述するのは手間がかかります。

問　題

一辺の長さが 4 の正方形の紙の表を，図のように一辺の長さが 1 のマス目 16 個に区切る。その紙を 2 枚用意し，A と B の 2 人に渡す。A と B はそれぞれ渡された紙の 2 個のマス目を無作為に選んで塗りつぶす。塗りつぶしたあと，両方の紙を表を上にしてどのように重ね合わせても，塗りつぶされたマス目がどれも重ならない確率を求めよ。ただし，2 枚の紙を重ね合わせるときには，それぞれの紙を回転させてもよいが，紙の四隅は合わせることとする。　[1999]



解答例

2 枚の紙を表を上にして重ね合わせたとき，16 個のマス目のうち重なるマス目には同じ番号を書いてみると，右図のようになる。これより，どの番号も 4 つのマス目に書かれていることがわかる。

2	3	4	2
4	1	1	3
3	1	1	4
2	4	3	2

ここで，A が塗りつぶしたマス目の状態について場合分けをして，A と B が塗りつぶしたマス目がどれも重ならない確率を求める。

(i)　A が同じ番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_1$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 12 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_2}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_{12}C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_1=\frac{1}{20}\times\frac{11}{20}\times 4=\frac{11}{100}$$

(ii)　A が異なる番号を 2 つ塗りつぶしたとき

A が選ぶ番号は ${}_4C_2$ 通りで，B は A が選んだ番号以外の番号の書かれている 8 個のマス目から 2 つ選んで塗ればよいので，

$$\frac{{}_4C_1\times{}_4C_1}{{}_{16}C_2}\times\frac{{}_8C_2}{{}_{16}C_2}\times{}_4C_2=\frac{2}{15}\times\frac{7}{30}\times 6=\frac{14}{75}$$

以上より，求める確率は，$\dfrac{11}{100}+\dfrac{14}{75}=\dfrac{89}{300}$

コメント

難問風の問題設定にドキッとします。しかし，まん中の 4 つは同じというように考えていけば，結論までのプロセスが次第に見えてきます。

問　題

実数 x, y が $|x| \leqq 1$ と $|y| \leqq 1$ を満たすとき，不等式

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

が成り立つことを示せ。　[2015]

解答例

まず，$|x| \leqq 1$，$|y| \leqq 1$ より，$x = \cos\alpha$，$y = \cos\beta$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$ とおくことができ，さらに，$P = x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2}$ とすると，

$$\begin{aligned} P &= \cos^2\alpha + \cos^2\beta - 2\cos^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{1-\cos^2\alpha}\sqrt{1-\cos^2\beta} \\ &= \cos^2\alpha(1-\cos^2\beta) + \cos^2\beta(1-\cos^2\alpha) + 2\cos\alpha\cos\beta\sqrt{\sin^2\alpha}\sqrt{\sin^2\beta} \\ &= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \cos^2\beta\sin^2\alpha + 2\cos\alpha\cos\beta|\sin\alpha||\sin\beta| \\ &= \cos^2\alpha\sin^2\beta + \sin^2\alpha\cos^2\beta + 2\cos\alpha\cos\beta\sin\alpha\sin\beta \\ &= (\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta)^2 = \sin^2(\alpha+\beta) \end{aligned}$$

すると，$0 \leqq \alpha + \beta \leqq 2\pi$ より $0 \leqq P \leqq 1$ となり，

$$0 \leqq x^2 + y^2 - 2x^2y^2 + 2xy\sqrt{1-x^2}\sqrt{1-y^2} \leqq 1$$

コメント

初めは，$P = \left(x\sqrt{1-x^2} + y\sqrt{1-y^2}\right)^2 + (x^2-y^2)^2$ と変形したものの，右側の不等式がうまく示せません。後ろ髪を引かれつつも，この式変形を放棄し，式の形をみて，$x = \cos\alpha$，$y = \cos\beta$ とおきました。すると，$P = \left(x\sqrt{1-y^2} + y\sqrt{1-x^2}\right)^2$ という変形に気づきます！　運・不運が濃厚に反映される問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　$\sqrt{2}$ と $\sqrt[3]{3}$ が無理数であることを示せ。

(2)　p, q, $\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q$ がすべて有理数であるとする。そのとき，$p=q=0$ であることを示せ。 [2015]

解答例

(1)　まず，$\sqrt{2}$ が有理数であると仮定すると，a, b を互いに素な自然数として，

$$\sqrt{2}=\frac{b}{a},\ b^2=2a^2$$

b^2 は 2 の倍数，すると b は 2 の倍数となり，k を自然数として $b=2k$ とおくと，

$$4k^2=2a^2,\ a^2=2k^2$$

a^2 は 2 の倍数，すると a は 2 の倍数となり，a, b が互いに素であることに反する。よって，$\sqrt{2}$ は有理数ではない，すなわち無理数である。

次に，$\sqrt[3]{3}$ が有理数であると仮定すると，c, d を互いに素な自然数として，

$$\sqrt[3]{3}=\frac{d}{c},\ d^3=3c^3$$

d^3 は 3 の倍数，すると d は 3 の倍数となり，l を自然数として $d=3l$ とおくと，

$$27l^3=3c^3,\ c^3=9l^3$$

c^3 は 3 の倍数，すると c は 3 の倍数となり，c, d が互いに素であることに反する。よって，$\sqrt[3]{3}$ は有理数ではない，すなわち無理数である。

(2)　p, q, r が有理数のとき，$\sqrt{2}p+\sqrt[3]{3}q=r$ とおくと，$\sqrt[3]{3}q=r-\sqrt{2}p$ となり，

$$3q^3=r^3-3\sqrt{2}pr^2+6p^2r-2\sqrt{2}p^3,\ p(2p^2+3r^2)\sqrt{2}=r^3+6p^2r-3q^3$$

ここで，$p(2p^2+3r^2)\neq 0$ とすると，$\sqrt{2}=\dfrac{r^3+6p^2r-3q^3}{p(2p^2+3r^2)}$ となるが，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。よって，$p(2p^2+3r^2)=0$ である。

(i)　$p=0$ のとき

$\sqrt[3]{3}q=r$ となり，ここで $q\neq 0$ とすると $\sqrt[3]{3}=\dfrac{r}{q}$ となるが，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。よって，$q=0$ である。

(ii)　$p\neq 0$ のとき

$2p^2+3r^2=0$ となるが，左辺は正より成立しない。

(i)(ii)より，$p=q=0$ である。

コメント

教科書や参考書に，背理法の例題として載っている有名問題です。

問　題

$a,\ b,\ c$ を正の定数とし，x の関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ を考える。以下，定数はすべて実数とする。

(1)　定数 $p,\ q$ に対し，次を満たす定数 r が存在することを示せ。

$x\geqq 1$　ならば　$|px+q|\leqq rx$

(2)　恒等式 $(\alpha-\beta)(\alpha^2+\alpha\beta+\beta^2)=\alpha^3-\beta^3$ を用いて，次を満たす定数 $k,\ l$ が存在することを示せ。

$x\geqq 1$　ならば　$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right|\leqq\dfrac{l}{x}$

(3)　すべての自然数 n に対して，$\sqrt[3]{f(n)}$ が自然数であるとする。このとき関数 $f(x)$ は，自然数の定数 m を用いて $f(x)=(x+m)^3$ と表されることを示せ。　[2011]

解答例

(1)　三角不等式を用いて，$|px+q|\leqq|px|+|q|=|p||x|+|q|$ ………①

また，$x\geqq 1$ であれば，

$$|p||x|+|q|=|p|x+|q|\leqq|p|x+|q|x=(|p|+|q|)x\ \cdots\cdots\cdots②$$

そこで，$|p|+|q|=r$ とおくと，①②より，$|px+q|\leqq rx$ となる。

(2)　まず，$f(x)-(x+k)^3=(x^3+ax^2+bx+c)-(x+k)^3$

$$=(a-3k)x^2+(b-3k^2)x+(c-k^3)$$

$k=\dfrac{a}{3}>0$ の場合は，$\left|f(x)-(x+k)^3\right|=\left|\left(b-\dfrac{a^2}{3}\right)x+\left(c-\dfrac{a^3}{27}\right)\right|$

そこで，$x\geqq 1$ のとき，$\left|b-\dfrac{a^2}{3}\right|+\left|c-\dfrac{a^3}{27}\right|=l$ とおくと，(1)より，

$$\left|f(x)-(x+k)^3\right|\leqq lx\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，$a,\ b,\ c$ は正の定数より，$x\geqq 1$ のとき，

$$\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2+\sqrt[3]{f(x)}(x+k)+(x+k)^2\geqq\left(\sqrt[3]{x^3}\right)^2+\sqrt[3]{x^3}\cdot x+x^2\geqq x^2\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，

$$\left|\sqrt[3]{f(x)}-x-k\right|=\frac{\left|f(x)-(x+k)^3\right|}{\left(\sqrt[3]{f(x)}\right)^2+\sqrt[3]{f(x)}(x+k)+(x+k)^2}\leqq\frac{lx}{x^2}=\frac{l}{x}$$

(3)　正の数 k の整数部分を $[k]$，小数部分を α とすると，$0\leqq\alpha<1$ である。

さて，(2)より，すべての自然数 n に対して，

$$\left|\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]-\alpha\right|\leqq\frac{l}{n},\ \ \alpha-\frac{l}{n}\leqq\sqrt[3]{f(n)}-n-[k]\leqq\alpha+\frac{l}{n}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，区間 $I_n:\alpha-\dfrac{l}{n}\leqq x\leqq\alpha+\dfrac{l}{n}$ とおくと，$I_1\supset I_2\supset I_3\supset\cdots\supset I_n\supset\cdots$ となる。

(i)　$0<\alpha<1$ のとき

区間 $J:0<x<1$ とすると，$n\geqq n_0$ において $J\supset I_n$ となる n_0 が存在する。しかし，$\sqrt[3]{f(n)}-n-[\,k\,]$ は整数であることから，⑤は成立しない。

(ii)　$\alpha=0$ のとき

⑤より，$-\dfrac{l}{n}\leqq\sqrt[3]{f(n)}-n-[\,k\,]\leqq\dfrac{l}{n}$ ………⑥

ここで，$[\,k\,]=m>0$ とおくと，十分大きな n に対しても⑥が成立することより，

$$\sqrt[3]{f(n)}-n-m=0,\ \ f(n)=(n+m)^3 \text{ ………⑦}$$

すると，3 次関数 $f(x)$ に対し，任意の自然数 n に対して⑦が成立するので，

$$f(x)=(x+m)^3$$

コメント

(3)は, k が整数であることを示すのがポイントですが，その記述方法は……。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　x が正の数のとき，$|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$ を示せ。

(2)　$p,\ q,\ r$ が $p+q+r=1$ を満たす正の数のとき，$p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$ を示せ。

(3)　$a,\ b,\ c$ が相異なる正の数で，$\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c}=1$ を満たすとき

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}+\frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b}+\frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \frac{1}{3}$$

を示せ。　[2007]

解答例

(1)　まず，$f(x)=\dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}-|\log x|$ とおく。

(i)　$x \geqq 1$ のとき

$$f(x)=\frac{x-1}{\sqrt{x}}-\log x=\sqrt{x}-\frac{1}{\sqrt{x}}-\log x$$

$$f'(x)=\frac{1}{2\sqrt{x}}+\frac{1}{2x\sqrt{x}}-\frac{1}{x}=\frac{x+1-2\sqrt{x}}{2x\sqrt{x}}=\frac{(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}} \geqq 0$$

$x \geqq 1$ において，$f(x) \geqq f(1)=0$

(ii)　$0<x<1$ のとき

$$f(x)=-\frac{x-1}{\sqrt{x}}+\log x=-\sqrt{x}+\frac{1}{\sqrt{x}}+\log x$$

$$f'(x)=\frac{-(\sqrt{x}-1)^2}{2x\sqrt{x}}<0$$

$0<x<1$ において，$f(x)>f(1)=0$

(i)(ii)より，$|\log x| \leqq \dfrac{|x-1|}{\sqrt{x}}$　（等号は $x=1$ のとき成立）

(2)　$\vec{u}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{v}=(p,\ q,\ r)$ とおくと，$(\vec{u}\cdot\vec{v})^2 \leqq |\vec{u}|^2|\vec{v}|^2$ より，

$$(1\times p+1\times q+1\times r)^2 \leqq (1^2+1^2+1^2)(p^2+q^2+r^2)$$

すると，$p+q+r=1$ より，$p^2+q^2+r^2 \geqq \dfrac{1}{3}$

等号は，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ が同じ方向であるとき，すなわち $p>0$，$q>0$，$r>0$ から，$p=q=r=\dfrac{1}{3}$ のときに成立する。

(3)　(1)より，$\left|\log\dfrac{b}{a}\right| \leqq \dfrac{\left|\dfrac{b}{a}-1\right|}{\sqrt{\dfrac{b}{a}}}=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\left|\dfrac{b}{a}-1\right|=\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\cdot\dfrac{|b-a|}{a}=\dfrac{|b-a|}{\sqrt{ab}}$ となるので，

$$\left|\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a}\right| \leqq \frac{ab}{\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

さらに，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a} \leqq \left|\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a}\right|$ から，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a} \leqq \sqrt{ab}$

同様にして，$\dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b} \leqq \sqrt{bc}$，$\dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c} \leqq \sqrt{ca}$ となり，

$$\frac{ab}{b-a}\log\frac{b}{a} + \frac{bc}{c-b}\log\frac{c}{b} + \frac{ca}{a-c}\log\frac{a}{c} \leqq \sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$\sqrt{a} = p$，$\sqrt{b} = q$，$\sqrt{c} = r$ とおくと，条件より $p+q+r=1$ なので, (2)より，

$$pq+qr+rp = \frac{1}{2}\{\,(p+q+r)^2 - (p^2+q^2+r^2)\,\}$$

$$= \frac{1}{2}\{\,1-(p^2+q^2+r^2)\,\} \leqq \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}$$

よって，$\sqrt{ab} + \sqrt{bc} + \sqrt{ca} \leqq \dfrac{1}{3} \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$\dfrac{ab}{b-a}\log\dfrac{b}{a} + \dfrac{bc}{c-b}\log\dfrac{c}{b} + \dfrac{ca}{a-c}\log\dfrac{a}{c} \leqq \dfrac{1}{3}$

コメント

(1)と(2)の不等式を誘導として(3)の不等式を証明するわけですが，誘導が丁寧ではありません。ここでは，不等号の向きに注目することが手がかりになります。なお，(2)は，有名なコーシー・シュワルツの不等式ですが，普通に差をとって証明してもかまいません。

問　題

(1)　$f(x)$を x の整式とし，$\{a_k\}$は$a_k < a_{k+1}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$および$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k = \infty$を満たす数列とする。このとき$f(a_k)=0$ $(k=1,\ 2,\ \cdots)$ならば，$f(x)$は整式として 0 であることを示せ。

(2)　$f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$を x の整式とし，

$$F(x)=f_1(x)+f_2(x)\sin x+f_3(x)\sin 2x$$

はすべての実数 x に対して 0 であるとする。このとき $f_1(x)$，$f_2(x)$，$f_3(x)$は，いずれも整式として 0 であることを示せ。　[2003]

解答例

(1)　n を自然数として，$f(x)$を n 次式とすると，条件より，

$a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ で，$f(a_1)=f(a_2)=\cdots=f(a_n)=0$ なので, k を定数として，

$$f(x)=k(x-a_1)(x-a_2)\cdots(x-a_n)$$

ここで，$x=a_{n+1} > a_n$ に対して，$f(a_{n+1})=0$ なので，

$$k(a_{n+1}-a_1)(a_{n+1}-a_2)\cdots(a_{n+1}-a_n)=0$$

よって，$k=0$ となり，$f(x)=0$ である。

(2)　$F(x)=f_1(x)+f_2(x)\sin x+f_3(x)\sin 2x$ に対して，$a_k=k\pi$ とおくと，

$$F(a_k)=f_1(a_k)+f_2(a_k)\sin k\pi+f_3(a_k)\sin 2k\pi=f_1(a_k)$$

条件より，$F(a_k)=0$ なので $f_1(a_k)=0$ となり, (1)より $f_1(x)=0$ である。

$$F(x)=f_2(x)\sin x+f_3(x)\sin 2x$$

次に，$b_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{2}$ とおくと，

$$F(b_k)=f_2(b_k)\sin\left(2k\pi+\frac{\pi}{2}\right)+f_3(b_k)\sin(4k\pi+\pi)=f_2(b_k)$$

条件より，$F(b_k)=0$ なので $f_2(b_k)=0$ となり, (1)より $f_2(x)=0$ である。

$$F(x)=f_3(x)\sin 2x$$

さらに，$c_k=2k\pi+\dfrac{\pi}{4}$ とおくと，

$$F(c_k)=f_3(c_k)\sin\left(4k\pi+\frac{\pi}{2}\right)=f_3(c_k)$$

条件より，$F(c_k)=0$ なので $f_3(c_k)=0$ となり, (1)より $f_3(x)=0$ である。

コメント

当然と思えることを証明するときは，気苦労が絶えません。この問題では，$\displaystyle\lim_{k\to\infty} a_k=\infty$ の条件が，とりたてて必要でもないので，なおさらです。

問　題

実数を係数とする 3 次方程式$x^3+ax^2+bx+c=0$が異なる 3 つの実数解をもつとする。このとき，$a>0$，$b>0$ ならば，少なくとも 2 つの実数解は負であることを示せ。

[2002]

解答例

$x^3+ax^2+bx+c=0$の異なる 3 つの実数解を$x=\alpha$，β，γ $(\alpha<\beta<\gamma)$とおくと，

$$\alpha+\beta+\gamma=-a\,,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=b\,,\ \alpha\beta\gamma=-c$$

条件より, $a>0$, $b>0$ なので，$\alpha+\beta+\gamma<0$ ……①，$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha>0$ ……②

①より，$0>\alpha+\beta+\gamma>\alpha+\alpha+\alpha=3\alpha$ なので，$\alpha<0$ となる。

ここで，$\beta\geqq 0$ と仮定すると$\gamma>0$ となり，①より$\alpha+\beta<-\gamma<0$ なので,

$$\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=\alpha\beta+\gamma(\alpha+\beta)<0$$

これは②に反するので，$\beta<0$ である。

以上より，α，β，γ の少なくとも 2 つは負である。

コメント

グラフを利用しようか，解と係数の関係を利用しようかと迷いましたが，結局，後者で解をつくりました。

問　題

xy 平面上の点$(a,\ b)$は，a と b がともに有理数のときに有理点と呼ばれる。xy 平面において，3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しないことを示せ。ただし，必要ならば$\sqrt{3}$が無理数であることは証明なしで使ってよい。 [1999]

解答例

複素数平面を設定し，$\mathrm{A}(\alpha)$，$\mathrm{B}(\beta)$，$\mathrm{C}(\gamma)$とおくとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ が正三角形の条件は，以下，複号同順として，

$$\beta-\alpha=\left\{\cos\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\pm\frac{\pi}{3}\right)\right\}(\gamma-\alpha)$$

ここで，$\alpha=a_1+a_2i$，$\beta=b_1+b_2i$，$\gamma=c_1+c_2i$とし, 3 点 A, B, C がすべて有理点, すなわちa_1，a_2，b_1，b_2，c_1，c_2がすべて有理数と仮定すると,

$$(b_1-a_1)+(b_2-a_2)i=\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\{(c_1-a_1)+(c_2-a_2)i\}$$

$b_1-a_1=p$，$b_2-a_2=q$，$c_1-a_1=2s$，$c_2-a_2=2t$とおくと, p, q, s, t はすべて有理数となり,

$$p+qi=(1\pm\sqrt{3}i)(s+ti)=(s\mp\sqrt{3}t)+(t\pm\sqrt{3}s)i$$

よって，$p=s\mp\sqrt{3}t$，$q=t\pm\sqrt{3}s$

$\sqrt{3}$は無理数なので，$p=s$かつ$t=0$，$q=t$かつ$s=0$

まとめると，$p=q=s=t=0$より，$a_1=b_1=c_1$，$a_2=b_2=c_2$となるので，3 点 A, B, C は一致する。すなわち，$\triangle\mathrm{ABC}$は存在しない。

以上より, 3 つの頂点がすべて有理点である正三角形は存在しない。

コメント

$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積に注目して，題意を証明することもできます。このような解法を利用する類題が, 92 年の東大・理で出題されています。

問　題

n を 1 以上の整数とする。n 次の整式

$$f(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_kx^{n-k}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

とその導関数 $f'(x)$ の間に，$nf(x)=(x+p)f'(x)$ という関係があるとする。ただし，p は定数である。このとき，$f(x)=a_0(x+p)^n$ であることを示せ。　[1998]

解答例

$f(x)$ を $x+p$ について展開し，x^n の係数（$a_0\neq 0$）を比較すると，

$$f(x)=a_0(x+p)^n+b_1(x+p)^{n-1}+\cdots\cdots+b_{n-1}(x+p)+b_n$$

すなわち，$f(x)=a_0(x+p)^n+\displaystyle\sum_{k=1}^{n}b_k(x+p)^{n-k}$

(i)　$n\geqq 2$ のとき

$$nf(x)=na_0(x+p)^n+\sum_{k=1}^{n}nb_k(x+p)^{n-k}$$

$$(x+p)f'(x)=(x+p)\left\{na_0(x+p)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)b_k(x+p)^{n-k-1}\right\}$$

$$=na_0(x+p)^n+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)b_k(x+p)^{n-k}$$

条件より，$nf(x)=(x+p)f'(x)$ が恒等的に成立するので，

$nb_k=(n-k)b_k$　$(k=1,\ 2,\cdots\cdots,\ n-1)$………①

$nb_n=0$………②

①より $kb_k=0$ なので，$1\leqq k\leqq n-1$ より $b_k=0$，②より $b_n=0$

よって，$f(x)=a_0(x+p)^n$

(ii)　$n=1$ のとき

$f(x)=a_0(x+p)+b_1$ とおくと，

$nf(x)=a_0(x+p)+b_1$，$(x+p)f'(x)=a_0(x+p)$ から，条件より $b_1=0$

よって，$f(x)=a_0(x+p)$

(i)(ii)より，すべての自然数 n で $f(x)=a_0(x+p)^n$

コメント

少々荒っぽいのですが，与えられた式を $\dfrac{f'(x)}{f(x)}=\dfrac{n}{x+p}$ と変形して両辺を積分し，$\log|f(x)|=n\log|x+p|+C=\log e^c|x+p|^n$ から，$f(x)=\pm e^c(x+p)^n$ とします。この後，x^n の係数を比較すると $f(x)=a_0(x+p)^n$ を示すことができます。

問　題

複素数 z は $z^5=1$ を満たし，実部と虚部がともに正であるものとする。硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 とおく。複素数 w を $w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4$ と定める。

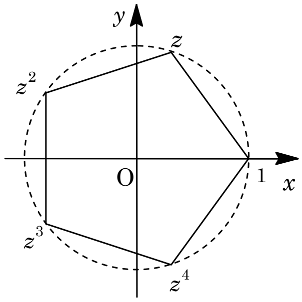
(1)　5 回とも表が出たとする。w の値を求めよ。

(2)　$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のとき，$|w|<1$ であることを示せ。

(3)　$|w|<1$ である確率を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　複素数 z は $z^5=1$ を満たし，しかも実部と虚部がともに正なので，



$$z=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi$$

また，複素数平面上で，点1，z，z^2，z^3，z^4 は，中心が原点で半径 1 の円に内接する正五角形の各頂点となり，

$$z^4=\overline{z},\ \ z^3=\overline{z^2}$$

さて，硬貨を投げて表が出れば 1，裏が出れば 0 とし，5 回投げて出た順に a_0，a_1，a_2，a_3，a_4 とおく。

ここで，5 回とも表が出ると，$a_0=a_1=a_2=a_3=a_4=1$ より，

$$w=a_0+a_1z+a_2z^2+a_3z^3+a_4z^4=1+z+z^2+z^3+z^4=\frac{1-z^5}{1-z}=0$$

(2)　$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のとき，$w=z+z^4$ となり，

$$w=\cos\frac{2}{5}\pi+i\sin\frac{2}{5}\pi+\cos\frac{2}{5}\pi-i\sin\frac{2}{5}\pi=2\cos\frac{2}{5}\pi$$

さて，$\dfrac{\pi}{3}<\dfrac{2}{5}\pi<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos\dfrac{\pi}{2}<\cos\dfrac{2}{5}\pi<\cos\dfrac{\pi}{3}$ となり，$0<\cos\dfrac{2}{5}\pi<\dfrac{1}{2}$

よって，$|w|=2\cos\dfrac{2}{5}\pi<1$ である。

(3)　硬貨を 5 回投げたとき，表と裏の出方は 2^5 通りとなり，これが同様に確からしいとする。そこで，表の出た回数で場合分けをする。

(i)　表の出た回数が 0 のとき　この場合は 1 通りあり，$w=0$ で $|w|<1$ である。

(ii)　表の出た回数が 1 のとき　この場合は ${}_5\mathrm{C}_1=5$ 通りある。
いずれの場合も $|w|=1$ となり，$|w|<1$ を満たさない。

(iii) 表の出た回数が 2 のとき　この場合は ${}_5\mathrm{C}_2=10$ 通りある。

(iii-i)　表が連続して出たとき（第 1 回目を第 6 回目とみなしたときも含む）
この場合は 5 通りあり，$a_0=a_1=a_4=0$，$a_2=a_3=1$ のときは，

$$w=z^2+z^3=\cos\frac{4}{5}\pi+i\sin\frac{4}{5}\pi+\cos\frac{4}{5}\pi-i\sin\frac{4}{5}\pi=2\cos\frac{4}{5}\pi$$

さて，$\frac{2}{3}\pi<\frac{4}{5}\pi<\pi$ から $\cos\pi<\cos\frac{4}{5}\pi<\cos\frac{2}{3}\pi$ となり，$-1<\cos\frac{4}{5}\pi<-\frac{1}{2}$

よって，$|w|=-2\cos\frac{4}{5}\pi>1$ であり，$|w|<1$ を満たさない。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たさない。

(iii-ii)　表が連続せずに出たとき

この場合は $10-5=5$ 通りあり，$a_0=a_2=a_3=0$，$a_1=a_4=1$ のときは，(2)より $|w|<1$ を満たす。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たす。

(iv) 表の出た回数が 3 のとき　この場合は ${}_5\mathrm{C}_3=10$ 通りある。

(iv-i)　表が 3 回連続して出たとき（第 1 回目を第 6 回目とみなしたときも含む）

この場合は 5 通りあり，$a_2=a_3=0$，$a_0=a_1=a_4=1$ のときは，

$$w=1+z+z^4=1+2\cos\frac{2}{5}\pi$$

さて，$0<\cos\frac{2}{5}\pi<\frac{1}{2}$ から $1<1+2\cos\frac{2}{5}\pi<2$ となり，$|w|<1$ を満たさない。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たさない。

(iv-ii)　表が 3 回連続せずに出たとき

この場合は $10-5=5$ 通りあり，$a_1=a_4=0$，$a_0=a_2=a_3=1$ のときは，

$$w=1+z^2+z^3=1+2\cos\frac{4}{5}\pi$$

さて，$-1<\cos\frac{4}{5}\pi<-\frac{1}{2}$ から $-1<1+2\cos\frac{4}{5}\pi<0$ となり，$|w|<1$ を満たす。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|<1$ を満たす。

(v)　表の出た回数が 4 のとき　この場合は ${}_5\mathrm{C}_4=5$ 通りある。

$a_0=0$，$a_1=a_2=a_3=a_4=1$ のときは，

$$w=z+z^2+z^3+z^4=(1+z+z^2+z^3+z^4)-1$$

(1)より，$w=-1$ となり $|w|=1$ である。そして，同様に他の 4 通りの場合も $|w|=1$ となり，$|w|<1$ を満たさない。

(vi) 表の出た回数が 5 のとき　この場合は 1 通りあり，(1)より $|w|<1$ である。

(i)～(vi)より，$|w|<1$ である確率は，$\dfrac{1+5+5+1}{2^5}=\dfrac{3}{8}$ である。

コメント

複素数と確率の融合問題です。(1)と(2)の結果が(3)への誘導となっています。ただ，対称性に着目して処理をしましたが，解答例の書きにくい問題です。なお，(3)で(iv)の場合については，(v)で(ii)を利用した方法で(iii)を利用すると，少し簡略化できます。(v)を記した後に気づきましたが。

問　題

n を自然数とする。

(1)　n 個の複素数 z_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が $0 \leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たすならば，不等式

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$$

が成り立つことを示せ。

(2)　n 個の実数 θ_k $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ が

$$0 \leqq \theta_k \leqq \frac{\pi}{2} \quad \text{かつ} \quad \cos\theta_1+\cos\theta_2+\cdots+\cos\theta_n=1$$

を満たすならば，不等式

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1+\sin\theta_2+\cdots+\sin\theta_n$$

が成り立つことを示せ。　[2004]

解答例

(1)　$0 \leqq \arg z_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ である n 個の複素数 z_k に対して，数学的帰納法により，$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2$ が成立することを示す。

(i)　$n=1$ のとき　左辺 $=|z_1|^2=$ 右辺より，成立する。

(ii)　$n=l$ のとき

$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_l|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_l|^2$ の成立を仮定すると，

$$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_l|^2+|z_{l+1}|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_l|^2+|z_{l+1}|^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$|z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1}|^2=(z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1})(\overline{z_1+z_2+\cdots+z_l}+\overline{z_{l+1}})$

$$=|z_1+z_2+\cdots+z_l|^2+|z_{l+1}|^2+\sum_{p=1}^{l}(z_p\overline{z_{l+1}}+\overline{z_p}z_{l+1})$$

ここで，$z_p=r_p(\cos\theta_p+i\sin\theta_p)$，$z_{l+1}=r_{l+1}(\cos\theta_{l+1}+i\sin\theta_{l+1})$ とおくと，

$$z_p\overline{z_{l+1}}=r_pr_{l+1}\{\cos(\theta_p-\theta_{l+1})+i\sin(\theta_p-\theta_{l+1})\}$$
$$\overline{z_p}z_{l+1}=r_pr_{l+1}\{\cos(-\theta_p+\theta_{l+1})+i\sin(-\theta_p+\theta_{l+1})\}$$

よって，$z_p\overline{z_{l+1}}+\overline{z_p}z_{l+1}=2r_pr_{l+1}\cos(\theta_p-\theta_{l+1})$

すると，$0 \leqq \theta_p \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \theta_{l+1} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ から，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta_p-\theta_{l+1} \leqq \dfrac{\pi}{2}$ となることより，$\cos(\theta_p-\theta_{l+1}) \geqq 0$，すなわち $z_p\overline{z_{l+1}}+\overline{z_p}z_{l+1} \geqq 0$ なので，

$$|z_1+z_2+\cdots+z_l|^2+|z_{l+1}|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1}|^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_l|^2+|z_{l+1}|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_l+z_{l+1}|^2$

(i)(ii)より，$n \geqq 1$ で，$|z_1|^2+|z_2|^2+\cdots+|z_n|^2 \leqq |z_1+z_2+\cdots+z_n|^2 \cdots\cdots\cdots ③$

(2) $z_k = \cos\theta_k + i\sin\theta_k$ とおくと，$\cos\theta_1 + \cos\theta_2 + \cdots + \cos\theta_n = 1$ より，

$$z_1 + z_2 + \cdots + z_n = 1 + i(\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n)$$

$|z_k| = 1$ から，③にあてはめると，$n \leqq 1 + (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n)^2$

$$n - 1 \leqq (\sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n)^2$$

ここで，$0 \leqq \theta_k \leqq \dfrac{\pi}{2}$ より，$\sin\theta_k \geqq 0$ となるので,

$$\sqrt{n-1} \leqq \sin\theta_1 + \sin\theta_2 + \cdots + \sin\theta_n$$

コメント

(1)の証明は，どんな方法を採用しようかと迷い，たいへん時間がかかりました。しかし, (2)は, (1)の命題に具体例を適用するだけで，あっさり解決しました。

問　題

a を正の実数，$w = a(\cos 5° + i\sin 5°)$ とする。ただし，i は虚数単位である。また，複素数の列 $\{z_n\}$ を $z_1 = w$ ，$z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ で定める。

(1)　z_n が実数になるための必要十分条件は n が 6 の倍数であることを示せ。

(2)　複素数平面で原点を O とし z_n を表す点を P_n とする。$1 \leqq n \leqq 17$ であるような n について，$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となるような n と a を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$z_{n+1} = z_n w^{2n+1}$ より, $n \geqq 2$ で,

$$z_n = z_1 w^3 w^5 w^7 \cdots w^{2n-1} = w w^3 w^5 w^7 \cdots w^{2n-1} = w^{1+3+5+7+\cdots+2n-1} = w^{n^2}$$

これは $n = 1$ のときも成立するので，$z_n = a^{n^2}\{\cos(5° \times n^2) + i\sin(5° \times n^2)\}$

z_n が実数になるための必要十分条件は, k を整数として,

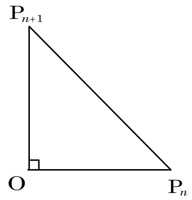
$$5° \times n^2 = 180° \times k,\quad n^2 = 36k$$

よって，n^2 は 36 の倍数より, n は 6 の倍数である。

(2)　$|z_{n+1}| = |z_n w^{2n+1}| = |z_n||w|^{2n+1} = a^{2n+1}|z_n|$ より，$\mathrm{OP}_{n+1} = a^{2n+1}\mathrm{OP}_n$

$\triangle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1}$ が直角二等辺三角形となる場合を a の値で場合分けをする。

(i)　$a = 1$ のとき　$\mathrm{OP}_{n+1} = \mathrm{OP}_n$ より，$\angle \mathrm{P}_n\mathrm{OP}_{n+1} = 90°$ となり,

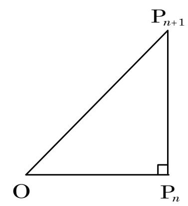


$$w^{2n+1} = \cos 90° \pm i\sin 90°$$

よって，$5° \times (2n+1) = \pm 90° + 360° \times k$，$2n + 1 = \pm 18 + 72k$

これを満たす整数 n は存在しない。

(ii)　$a > 1$ のとき　$\mathrm{OP}_{n+1} > \mathrm{OP}_n$ より，$\angle \mathrm{OP}_n\mathrm{P}_{n+1} = 90°$ となり,



$$w^{2n+1} = \sqrt{2}(\cos 45° \pm i\sin 45°)$$

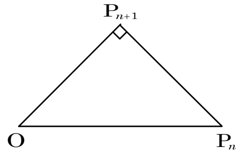
よって，$a^{2n+1} = \sqrt{2}$，$5° \times (2n+1) = \pm 45° + 360° \times k$

$$a = 2^{\frac{1}{2(2n+1)}},\quad 2n + 1 = \pm 9 + 72k$$

$1 \leqq n \leqq 17$ より，$k = 0$ で $n = 4$，$a = 2^{\frac{1}{18}}$ である。

(iii)　$0 < a < 1$ のとき　$\mathrm{OP}_{n+1} < \mathrm{OP}_n$ より，$\angle \mathrm{OP}_{n+1}\mathrm{P}_n = 90°$ となり,

$$w^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\cos 45° \pm i\sin 45°)$$



よって，$a^{2n+1} = \frac{1}{\sqrt{2}}$，$5° \times (2n+1) = \pm 45° + 360° \times k$

$$a = 2^{\frac{1}{2(2n+1)}},\quad 2n + 1 = \pm 9 + 72k$$

(ii)と同様にすると，$k = 0$ で $n = 4$，$a = 2^{-\frac{1}{18}}$ である。

コメント

(1)は(2)の誘導ではなく，お互い独立した問題です。(2)は w の絶対値で場合分けをすると，直角二等辺三角形の配置が決まります。

問　題

α を $|\alpha|=1$ であるような複素数とし，複素数の列 $\{z_n\}$ を

$$z_1=1,\ z_2=\frac{\alpha^4}{2},\ \frac{z_n}{z_{n-1}}=\frac{\alpha^2}{4}\frac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}}\ (n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots\cdots)$$

で定める。ただし，$\overline{z_n}$ は複素数 z_n の共役な複素数とする。

(1) 各 n に対し，z_n を求めよ。

(2) z_n の実部と虚部をそれぞれ x_n，y_n とし，$\alpha=-\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ とおくとき，無限級数の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}x_k$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}y_k$ をそれぞれ求めよ。 [2002]

解答例

(1) $\dfrac{z_n}{z_{n-1}}=\dfrac{\alpha^2}{4}\dfrac{\overline{z_{n-2}}}{\overline{z_{n-1}}}$ より，$z_n\overline{z_{n-1}}=\dfrac{\alpha^2}{4}z_{n-1}\overline{z_{n-2}}$ ………①

①の両辺の共役複素数を考えて，$\overline{z_n}z_{n-1}=\dfrac{\overline{\alpha}^2}{4}\overline{z_{n-1}}z_{n-2}$

$|\alpha|=1$ より，$|\alpha|^2=\alpha\overline{\alpha}=1$，$\overline{\alpha}=\dfrac{1}{\alpha}$ となり，$\overline{z_n}z_{n-1}=\dfrac{1}{4\alpha^2}\overline{z_{n-1}}z_{n-2}$ ………②

①×②より，$z_n\overline{z_n}z_{n-1}\overline{z_{n-1}}=\dfrac{1}{16}z_{n-1}\overline{z_{n-1}}z_{n-2}\overline{z_{n-2}}$，$z_n\overline{z_n}=\dfrac{1}{16}z_{n-2}\overline{z_{n-2}}$

$$|z_n|^2=\frac{1}{16}|z_{n-2}|^2,\ |z_n|=\frac{1}{4}|z_{n-2}|\ \cdots\cdots\cdots③$$

(i) $n=2k-1\ (k\geqq1)$ のとき

$|z_1|=1$ で，③より，$|z_{2k-1}|=\dfrac{1}{4}|z_{2(k-1)-1}|=|z_1|\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

$$|z_n|=\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n+1}{2}-1}=4\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(ii) $n=2k\ (k\geqq1)$ のとき

$|z_2|=\left|\dfrac{\alpha^4}{2}\right|=\dfrac{|\alpha|^4}{2}=\dfrac{1}{2}$ で，③より，$|z_{2k}|=\dfrac{1}{4}|z_{2(k-1)}|=|z_2|\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{k-1}$

$$|z_n|=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}=\frac{1}{2}\cdot4\left(\frac{1}{2}\right)^{n}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(i)(ii)より，$|z_n|=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$，$|z_n|^2=z_n\overline{z_n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}$ から，$\overline{z_n}=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}\dfrac{1}{z_n}$ ………④

①④より，$z_n\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-2}\dfrac{1}{z_{n-1}}=\dfrac{\alpha^2}{4}z_{n-1}\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-3}\dfrac{1}{z_{n-2}}$，$\dfrac{z_n}{z_{n-1}}=\alpha^2\dfrac{z_{n-1}}{z_{n-2}}$

よって，$\dfrac{z_n}{z_{n-1}}=\dfrac{z_2}{z_1}(\alpha^2)^{n-2}=\dfrac{\alpha^4}{2}\alpha^{2n-4}=\dfrac{\alpha^{2n}}{2}$

$$z_n=z_1\cdot\frac{\alpha^4}{2}\cdot\frac{\alpha^6}{2}\cdot\frac{\alpha^8}{2}\cdots\cdot\frac{\alpha^{2n}}{2}=\frac{\alpha^{4+6+8+\cdots+2n}}{2^{n-1}}=\frac{1}{2^{n-1}}\alpha^{(n+2)(n-1)}\ (n\geqq2)$$

この式に$n=1$をあてはめると$z_1=1$となり，$n=1$のときも成り立つ。

(2)　$\alpha=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$なので，

$$\frac{1}{2^{n-1}}\alpha^{(n+2)(n-1)}=\frac{1}{2^{n-1}}\cos\frac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi+i\frac{1}{2^{n-1}}\sin\frac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi$$

(1)より，$x_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\cos\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi$，$y_n=\dfrac{1}{2^{n-1}}\sin\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi$

(i)　$n=3l+1\ (l\geqq 0)$のとき

$\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi=\dfrac{2(3l+3)\cdot 3l}{3}\pi=(6l^2+6l)\pi$より，

$$(x_n,\ y_n)=\frac{1}{2^{n-1}}(\cos 0,\ \sin 0)=\frac{1}{2^{n-1}}(1,\ 0)$$

(ii)　$n=3l+2\ (l\geqq 0)$のとき

$\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi=\dfrac{2(3l+4)(3l+1)}{3}\pi=\left(6l^2+10l+2+\dfrac{2}{3}\right)\pi$より，

$$(x_n,\ y_n)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

(iii)　$n=3l+3\ (l\geqq 0)$のとき

$\dfrac{2(n+2)(n-1)}{3}\pi=\dfrac{2(3l+5)(3l+2)}{3}\pi=\left(6l^2+14l+6+\dfrac{2}{3}\right)\pi$より，

$$(x_n,\ y_n)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(\cos\frac{2}{3}\pi,\ \sin\frac{2}{3}\pi\right)=\frac{1}{2^{n-1}}\left(-\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}x_k=S_n$，$x_{3n-2}+x_{3n-1}+x_{3n}=s_n$とおくと，

$$s_1=1+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5}{8}$$

$$S_{3n}=\sum_{k=1}^{n}s_k=\frac{5}{8}+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{5}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1},\quad \lim_{n\to\infty}S_{3n}=\frac{\frac{5}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{5}{7}$$

また，$|x_n|\leqq\dfrac{1}{2^{n-1}}$より，$n\to\infty$のとき$x_n\to 0$なので，

$$\lim_{n\to\infty}S_{3n+1}=\lim_{n\to\infty}(S_{3n}+x_{3n+1})=\frac{5}{7},\quad \lim_{n\to\infty}S_{3n+2}=\lim_{n\to\infty}(S_{3n+1}+x_{3n+2})=\frac{5}{7}$$

同様にして，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}y_k=T_n$，$y_{3n-2}+y_{3n-1}+y_{3n}=t_n$とおくと，

$$t_1=0+\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3\sqrt{3}}{8}$$

$$T_{3n}=\sum_{k=1}^{n}t_k=\frac{3\sqrt{3}}{8}+\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)+\cdots+\frac{3\sqrt{3}}{8}\left(\frac{1}{8}\right)^{n-1},\quad \lim_{n\to\infty}T_{3n}=\frac{\frac{3\sqrt{3}}{8}}{1-\frac{1}{8}}=\frac{3\sqrt{3}}{7}$$

また，$|y_n| \leqq \dfrac{1}{2^{n-1}}$ より, $n\to\infty$ のとき $y_n \to 0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty} T_{3n+1} = \lim_{n\to\infty}(T_{3n} + y_{3n+1}) = \frac{3\sqrt{3}}{7},\quad \lim_{n\to\infty} T_{3n+2} = \lim_{n\to\infty}(T_{3n+1} + y_{3n+2}) = \frac{3\sqrt{3}}{7}$$

以上より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} x_k = \frac{5}{7}$，$\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} y_k = \frac{3\sqrt{3}}{7}$

コメント

大変な計算量です。なお，(1)では①×②で漸化式をつくりましたが，n が 1 つとびのタイプになってしまい，この後ややこしい計算が待ち構えているという気がしましたが，これは杞憂に過ぎませんでした。

問　題

2 つの複素数 $z = x + yi$, $w = u + vi$ （x, y, u, v は実数, $i = \sqrt{-1}$ は虚数単位）に対し, $x \geqq u$ と $y \geqq v$ がともに成り立つとき, $z \gg w$ と書くことにする。

(1) 次の条件 $z^2 \gg 3$ かつ $\bar{z} \gg -\dfrac{5}{z}$ をみたす複素数 z の範囲を求め, 複素数平面上に図示せよ。ただし, $\bar{z}$ は z に共役な複素数とする。

(2) (1)で求めた範囲を z が動くとき, 絶対値 $|z - 3i|$ の最小値, および最小値をあたえる z を求めよ。 [2001]

解答例

(1) $z^2 = (x + yi)^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$ なので, $z^2 \gg 3$ より,

$$x^2 - y^2 \geqq 3 \cdots\cdots\cdots①,\quad 2xy \geqq 0 \cdots\cdots\cdots②$$

また, $\bar{z} = x - yi$, $-\dfrac{5}{z} = -\dfrac{5}{x - yi} = -\dfrac{5(x + yi)}{x^2 + y^2}$ なので, $\bar{z} \gg -\dfrac{5}{z}$ より,

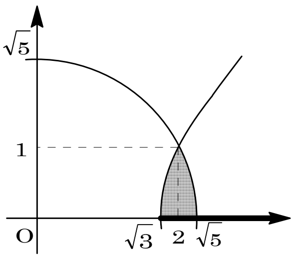
$$x \geqq -\frac{5x}{x^2 + y^2},\quad -y \geqq -\frac{5y}{x^2 + y^2}$$

$(x,\ y) \neq (0,\ 0)$ で, $x(x^2 + y^2 + 5) \geqq 0 \cdots\cdots\cdots③$, $y(x^2 + y^2 - 5) \leqq 0 \cdots\cdots\cdots④$

②より $xy \geqq 0$, ③より $x \geqq 0$ なので,

$$x \geqq 0,\quad xy \geqq 0,\quad y(x^2 + y^2 - 5) \leqq 0,\quad x^2 - y^2 \geqq 3$$

z の範囲を図示すると, 右図の網点部および太線部となる。ただし, 境界はすべて含む。



(2) z と $3i$ の距離が最小となるのは, 右図より, z が曲線 $x^2 - y^2 = 3$ 上にあるときなので,

$$|z - 3i|^2 = x^2 + (y - 3)^2 = (y^2 + 3) + (y - 3)^2$$
$$= 2y^2 - 6y + 12 = 2\left(y - \frac{3}{2}\right)^2 + \frac{15}{2}$$

$0 \leqq y \leqq 1$ より, $y = 1$ のとき $|z - 3i|^2$ は最小値 8 をとる。

よって, $|z - 3i|$ の最小値は $2\sqrt{2}$, このとき $z = 2 + i$ である。

コメント

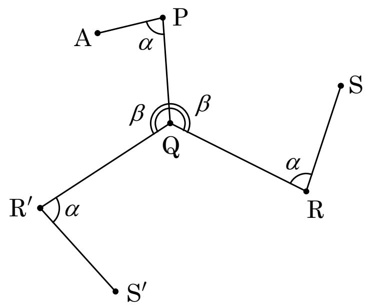
(1)は, 式を変形せずに共通部分を図示した方が, かえって近道です。積が 0 以上や 0 以下というのはアブナイですから。

問　題

平面上において, 7 点 A, P, Q, R, S, R′, S′ を下図のようにとる。ただし,

$$\mathrm{AP}=a,\ \mathrm{PQ}=b$$
$$\mathrm{QR}=\mathrm{QR}'=c,\ \mathrm{RS}=\mathrm{R'S'}=d$$
$$\angle\mathrm{APQ}=\angle\mathrm{SRQ}=\angle\mathrm{S'R'Q}=\alpha\ (0\leqq\alpha\leqq\pi)$$
$$\angle\mathrm{RQP}=\angle\mathrm{PQR}'=\beta\ (0\leqq\beta\leqq\pi)$$

である。このとき, $\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2$ を $\sin\alpha$, $\sin\beta$ および a, b, c, d を用いて表せ。　[1998]



解答例

Q を原点とし, QP を実軸の正の部分とする複素数平面を設定する。

また, $z=\cos\alpha+i\sin\alpha$, $w=\cos\beta+i\sin\beta$ とおく。

すると, 点 P を表す複素数は b となり, 点 A を表す複素数は,

$$b+(0-b)\cdot\frac{a}{b}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=b-a\overline{z}$$

点 R, R′ を表す複素数は, それぞれ $c\overline{w}$, cw となる。

点 S を表す複素数は,

$$c\overline{w}+(0-c\overline{w})\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=c\overline{w}-d\overline{w}\overline{z}=\overline{w}(c-d\overline{z})$$

点 S′ を表す複素数は,

$$cw+(0-cw)\cdot\frac{d}{c}\{\cos(-\alpha)+i\sin(-\alpha)\}=cw-dw\overline{z}=w(c-d\overline{z})$$

ここで $b-a\overline{z}=u$, $c-d\overline{z}=v$ とおくと, A(u), S$(\overline{w}v)$, S′(wv) となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2&=|\overline{w}v-u|^2-|wv-u|^2\\&=(\overline{w}v-u)(w\overline{v}-\overline{u})-(wv-u)(\overline{w}\overline{v}-\overline{u})\\&=-\overline{w}\overline{u}v-wu\overline{v}+w\overline{u}v+\overline{w}u\overline{v}=(\overline{u}v-u\overline{v})(w-\overline{w})\end{aligned}$$

そこで,
$$\begin{aligned}\overline{u}v-u\overline{v}&=(b-az)(c-d\overline{z})-(b-a\overline{z})(c-dz)\\&=-bd\overline{z}-acz+bdz+ac\overline{z}\\&=(bd-ac)(z-\overline{z})=(bd-ac)\cdot 2i\sin\alpha\end{aligned}$$

また, $w-\overline{w}=2i\sin\beta$ より,

$$\mathrm{AS}^2-\mathrm{AS}'^2=(bd-ac)(4i^2)\sin\alpha\sin\beta=4(ac-bd)\sin\alpha\sin\beta$$

コメント

旧課程では 1 次変換, 新課程では複素数平面の利用という方針さえ決まれば, 結論を導くことはさほど困難ではありません。

問　題

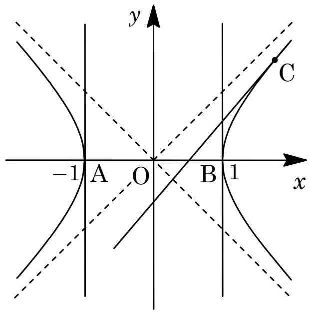
双曲線$H : x^2 - y^2 = 1$上の 3 点$A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 0)$，$C(s,\ t)\ (t \neq 0)$を考える。

(1) 点 A におけるHの接線と直線 BC の交点を P とするとき，P の座標をsとtを用いて表せ。

(2) 点 C におけるHの接線と直線 AB の交点を Q とするとき，Q の座標をsとtを用いて表せ。

(3) 点 B におけるHの接線と直線 AC の交点を R とするとき，3 点 P, Q, R は一直線上にあることを証明せよ。 [2017]

解答例



(1) 双曲線$H : x^2 - y^2 = 1$上の点$A(-1,\ 0)$，$B(1,\ 0)$，$C(s,\ t)\ (t \neq 0)$に対し，点 A における接線の方程式は，

$$x = -1 \cdots\cdots\cdots ①$$

直線 BC の方程式は，$y = \dfrac{t}{s-1}(x-1) \cdots\cdots\cdots ②$

①②を連立すると$y = \dfrac{-2t}{s-1}$となるので，①②の交点 P の座標は$P\left(-1,\ \dfrac{-2t}{s-1}\right)$である。

(2) 点 C におけるHの接線の方程式は$sx - ty = 1 \cdots\cdots ③$，また直線 AB の方程式は$y = 0 \cdots\cdots ④$となり，③④を連立すると$x = \dfrac{1}{s}$である。

これより，③④の交点 Q の座標は$Q\left(\dfrac{1}{s},\ 0\right)$である。

(3) 点 B におけるHの接線の方程式は$x = 1 \cdots\cdots ⑤$，また直線 AC の方程式は，

$$y = \frac{t}{s+1}(x+1) \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥を連立すると$y = \dfrac{2t}{s+1}$となるので，⑤⑥の交点 R の座標は$R\left(1,\ \dfrac{2t}{s+1}\right)$

すると，$\overrightarrow{QP} = \left(-1 - \dfrac{1}{s},\ \dfrac{-2t}{s-1}\right) = \left(-\dfrac{s+1}{s},\ \dfrac{-2t}{s-1}\right) = \dfrac{-1}{s(s-1)}(s^2-1,\ 2st)$

$$\overrightarrow{QR} = \left(1 - \frac{1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\right) = \left(\frac{s-1}{s},\ \frac{2t}{s+1}\right) = \frac{1}{s(s+1)}(s^2-1,\ 2st)$$

よって，$\overrightarrow{QR} = -\dfrac{s-1}{s+1}\overrightarrow{QP}$となり，3 点 P, Q, R は一直線上にある。

コメント

双曲線の接線に関する基本的な問題です。計算も容易です。

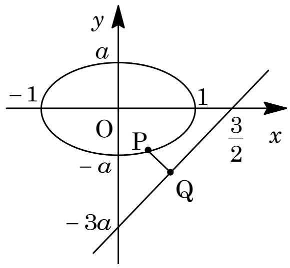
問　題

$a>0$ とする。C_1 を曲線 $x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$，C_2 を直線 $y=2ax-3a$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P が C_1 上を動き，点 Q が C_2 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を $f(a)$ とする。$f(a)$ を a を用いて表せ。

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{a\to\infty} f(a)$ を求めよ。　[2012]

解答例



(1)　曲線 $C_1 : x^2+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ 上の点 P を，θ を任意の実数として，$\mathrm{P}(\cos\theta,\ a\sin\theta)$ と表す。

また，直線 $C_2 : y=2ax-3a$ 上の点 Q に対して，線分 PQ の長さが最小となるのは，PQ と C_2 が垂直になるときである。直線 C_2 は $2ax-y-3a=0$ から，このときの線分 PQ の長さを h とすると，

$$h=\frac{|2a\cos\theta-a\sin\theta-3a|}{\sqrt{4a^2+1}}=\frac{a|2\cos\theta-\sin\theta-3|}{\sqrt{4a^2+1}}$$

ここで，$\cos\alpha=-\dfrac{1}{\sqrt5}$，$\sin\alpha=\dfrac{2}{\sqrt5}$ とおくと，

$$|2\cos\theta-\sin\theta-3|=|\sqrt5\sin(\theta+\alpha)-3|=3-\sqrt5\sin(\theta+\alpha)$$

θ は任意の実数から，$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき h は最小となり，最小値 $f(a)$ は，

$$f(a)=\frac{(3-\sqrt5)a}{\sqrt{4a^2+1}}$$

(2)　$$\lim_{a\to\infty} f(a)=\lim_{a\to\infty}\frac{(3-\sqrt5)a}{\sqrt{4a^2+1}}=\lim_{a\to\infty}\frac{3-\sqrt5}{\sqrt{4+\dfrac{1}{a^2}}}=\frac{3-\sqrt5}{2}$$

コメント

点と直線の距離の公式を用いるか，楕円 C_1 の接線と直線 C_2 が平行になる条件を利用するか，と迷いましたが，題意を考えて前者を採用しました。

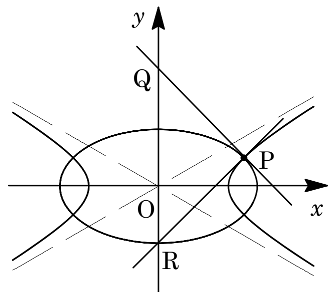
問　題

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。2 つの曲線

$$C_1: x^2+3y^2=3,\quad C_2: \frac{x^2}{\cos^2\theta}-\frac{y^2}{\sin^2\theta}=2$$

の交点のうち, x 座標と y 座標がともに正であるものを P とする。P における C_1, C_2 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とし, y 軸と l_1, l_2 の交点をそれぞれ Q, R とする。θ が $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき, 線分 QR の長さの最小値を求めよ。 [2010]

解答例



$C_1: x^2+3y^2=3\cdots\cdots$①, $C_2: \dfrac{x^2}{\cos^2\theta}-\dfrac{y^2}{\sin^2\theta}=2\cdots\cdots$②の交点の座標を求める。

まず, ②は, $x^2\sin^2\theta-y^2\cos^2\theta=2\sin^2\theta\cos^2\theta$ となり, ①と連立すると,

$$\begin{pmatrix}1 & 3\\ \sin^2\theta & -\cos^2\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

ここで, $\Delta=-\cos^2\theta-3\sin^2\theta=-1-2\sin^2\theta<0$ から,

$$\begin{pmatrix}x^2\\ y^2\end{pmatrix}=-\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix}-\cos^2\theta & -3\\ -\sin^2\theta & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\ 2\sin^2\theta\cos^2\theta\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{1+2\sin^2\theta}\begin{pmatrix}3\cos^2\theta(1+2\sin^2\theta)\\ \sin^2\theta(1+2\sin^2\theta)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\cos^2\theta\\ \sin^2\theta\end{pmatrix}$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\sin\theta>0$, $\cos\theta>0$ であり, 第 1 象限の交点 P は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ となる。点 P における C_1, C_2 の接線をそれぞれ l_1, l_2 とすると,

$$l_1: \sqrt{3}x\cos\theta+3y\sin\theta=3,\quad l_2: \frac{\sqrt{3}x}{\cos\theta}-\frac{y}{\sin\theta}=2$$

y 軸と l_1 の交点は $\mathrm{Q}\left(0,\ \dfrac{1}{\sin\theta}\right)$, l_2 の交点は $\mathrm{R}(0,\ -2\sin\theta)$ となり,

$$\mathrm{QR}=\frac{1}{\sin\theta}+2\sin\theta\geqq 2\sqrt{\frac{1}{\sin\theta}\cdot 2\sin\theta}=2\sqrt{2}$$

等号は, $\dfrac{1}{\sin\theta}=2\sin\theta$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$ のときに成立する。

よって, QR の長さの最小値は $2\sqrt{2}$ である。

コメント

楕円周上の点をパラメータ表示することからスタートしました。延々と計算をして, 結局, 交点は $\mathrm{P}(\sqrt{3}\cos\theta,\ \sin\theta)$ であることがわかり, 書き直したのが上の解です。

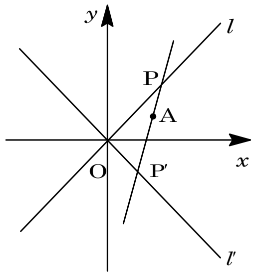
問　題

直線 $y=x$ を l で，直線 $y=-x$ を l' で表す。直線 l，l' のどちらの上にもない点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ をとる。点 A を通る直線 m が 2 直線 l，l' とそれぞれ点 P，P′ で交わるとする。点 Q を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を満たすようにとる。ただし，O は xy 平面の原点である。直線 m を変化させるとき，点 Q の軌跡は l と l' を漸近線とする双曲線となることを示せ。　[2006]

解答例

$\mathrm{P}(p,\ p)$，$\mathrm{P'}(p',\ -p')$，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OP'}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ より，

$$p+p'=a+x,\quad p-p'=b+y$$



よって，$p=\dfrac{1}{2}(a+b+x+y)$ ………①

$$p'=\frac{1}{2}(a-b+x-y)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

また，k を実数として，$\overrightarrow{\mathrm{AP'}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ より，

$$(p'-a,\ -p'-b)=k(p-a,\ p-b)$$

よって，$(p'-a)(p-b)+(p'+b)(p-a)=0$ ………③

①②を③に代入して，

$$\frac{1}{4}(-a-b+x-y)(a-b+x+y)+\frac{1}{4}(a+b+x-y)(-a+b+x+y)=0$$

$$(x-b)^2-(y+a)^2+(x+b)^2-(y-a)^2=0$$

まとめると，$x^2-y^2=a^2-b^2$

点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ は $y=x$，$y=-x$ 上にないことより，$b\neq\pm a$ から $a^2-b^2\neq 0$ であり，

$$\frac{x^2}{a^2-b^2}-\frac{y^2}{a^2-b^2}=1$$

したがって，点 Q の軌跡は $l: y=x$ と $l': y=-x$ を漸近線とする双曲線となる。

コメント

文系に l と l' が x 軸，y 軸となっている類題が出ています。しかし，本問に出合ったとき，座標系の回転を思いつくのは，容易なことではありません。

問　題

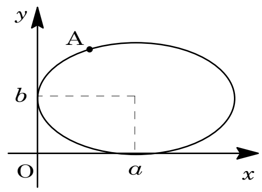
(1)　平面上において座標軸に平行な主軸（長軸，短軸）をもち，x 軸，y 軸の両方に接する楕円を考える。その中心の x 座標を a とする。このような楕円のうち，点 $\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るものが存在するための a の範囲を求めよ。ただし円は楕円の特別な場合とみなすものとする。

(2)　(1)の楕円がちょうど 2 つ存在するような a に対して，その 2 つの楕円の中心を B, C とする。△ABC の面積を $S(a)$ で表すとき，この関数のグラフをかけ。

[2003]

解答例

(1)　楕円の中心を$(a,\ b)$とおくと，x 軸，y 軸の両方に接することより，



$$\frac{(x-a)^2}{a^2}+\frac{(y-b)^2}{b^2}=1$$

$\mathrm{A}(1,\ 2)$ を通るので，$a>0$，$b>0$ として，

$$\frac{(1-a)^2}{a^2}+\frac{(2-b)^2}{b^2}=1$$

$$\left(\frac{2-b}{b}\right)^2=1-\left(\frac{1-a}{a}\right)^2\cdots\cdots\cdots①$$

$b>0$ のとき，$\dfrac{2-b}{b}=\dfrac{2}{b}-1\geqq-1$ から $\left(\dfrac{2-b}{b}\right)^2\geqq 0$ となり，$-1\leqq\dfrac{1-a}{a}\leqq 1$

$a>0$ から，$-a\leqq 1-a\leqq a$ より，$a\geqq\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　①より，$\dfrac{4-4b+b^2}{b^2}=\dfrac{2a-1}{a^2}$ で，$k=\dfrac{2a-1}{a^2}=\dfrac{2}{a}-\dfrac{1}{a^2}=-\left(\dfrac{1}{a}-1\right)^2+1$ とおくと，

(1)より $a\geqq\dfrac{1}{2}$ なので，$0<\dfrac{1}{a}\leqq 2$ から $0\leqq k\leqq 1$……②となり，

$$4-4b+b^2=kb^2,\ (1-k)b^2-4b+4=0\cdots\cdots\cdots③$$

③を満たす b の値が 2 つ存在する条件は，$k\neq 1$ かつ $D/4=4-4(1-k)=4k>0$

②と合わせると $0<k<1$ となり，$0<\dfrac{2a-1}{a^2}<1$ より，$a>\dfrac{1}{2}$ かつ $a\neq 1$ である。

このとき③の解は $b=\dfrac{2\pm2\sqrt{k}}{1-k}$ なので，$\mathrm{B}\left(a,\ \dfrac{2-2\sqrt{k}}{1-k}\right)$，$\mathrm{C}\left(a,\ \dfrac{2+2\sqrt{k}}{1-k}\right)$より，

$$S(a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{4\sqrt{k}}{1-k}\cdot|a-1|=2|a-1|\frac{a\sqrt{2a-1}}{(1-a)^2}=\frac{2a\sqrt{2a-1}}{|a-1|}$$

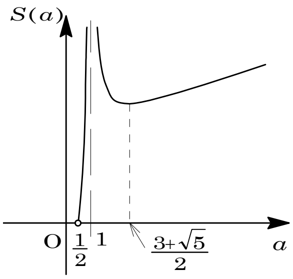
さて，$f(x)=\dfrac{2x\sqrt{2x-1}}{x-1}$ とおくと，

$$f'(x)=\frac{2(x^2-3x+1)}{(x-1)^2\sqrt{2x-1}}$$

x	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{5}}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	×	−	×	−	0	+
$f(x)$	0	↘	×	↘		↗

　$f'(x)=0$ の解は，$x=\dfrac{3\pm\sqrt{5}}{2}$ となるので，$f(x)$ の増減は右上表のようになる。

　すると，$S(a)=|f(a)|$ より，右図が $S(a)$ のグラフである。



コメント

　計算量の多い問題です。$S(a)$ のグラフの極小値は，すごい値になりましたので，省略しました。

問　題

円上の 5 点 A, B, C, D, E は反時計回りにこの順に並び，円周を 5 等分している。5 点 A, B, C, D, E を頂点とする正五角形を R_1 とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\vec{c}$ とおき，$\vec{a}$ の大きさを x とする。

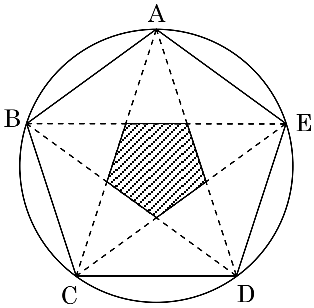
(1) $\overline{\mathrm{AC}}$ の大きさを y とするとき，$x^2=y(y-x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(3) R_1 の対角線の交点として得られる R_1 の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_2 とする。R_2 の 1 辺の長さを x を用いて表せ。

(4) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，R_n の対角線の交点として得られる R_n の内部の 5 つの点を頂点とする正五角形を R_{n+1} とし，R_n の面積を S_n とする。

$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k$ を求めよ。　　[2016]



斜線部分が R_2

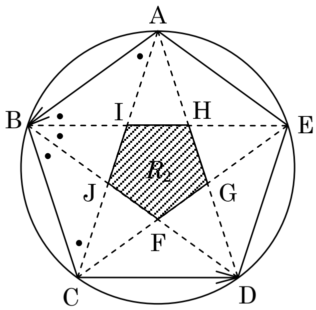
解答例

(1) 5 点 A, B, C, D, E は円周を 5 等分しているので，

$$\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}=\angle\mathrm{DBC}=\angle\mathrm{BAC}=\angle\mathrm{BCA}$$

これより，右図のように，対角線の交点を F, G, H, I, J とおくと，△ABC と△AIB は相似となり，

$$\mathrm{AB}:\mathrm{AI}=\mathrm{AC}:\mathrm{AB}\cdots\cdots\cdots①$$



また，$\angle\mathrm{BAC}+\angle\mathrm{ABE}=\angle\mathrm{EBD}+\angle\mathrm{DBC}$ であるので，$\angle\mathrm{CIB}=\angle\mathrm{CBI}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=x$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=y$ とすると，

$$\mathrm{AI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CI}=\mathrm{AC}-\mathrm{CB}=y-x\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$x:(y-x)=y:x$ となり，$x^2=y(y-x)\cdots\cdots\cdots③$

(2) ③より，$y^2-xy-x^2=0$ となり，$y=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}x\cdots\cdots\cdots④$

また，AD // BC，$\mathrm{AD}=y$，$\mathrm{BC}=x$ なので，④から $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{y}{x}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ から，$\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\vec{c}$ となり，

$$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{a}+\vec{c},\quad \overrightarrow{\mathrm{BC}}=\frac{2}{-1+\sqrt{5}}(\vec{a}+\vec{c})=\frac{1+\sqrt{5}}{2}(\vec{a}+\vec{c})$$

(3) R_2 の 1 辺 IJ の長さは，$\mathrm{IJ}=\mathrm{AJ}-\mathrm{AI}=x-(y-x)=2x-y$ となるので，④から，

$$\mathrm{IJ}=2x-\frac{1+\sqrt{5}}{2}x=\frac{3-\sqrt{5}}{2}x$$

(4)　相似な図形 R_{n+1} と R_n の面積比は，(3)より $\left(\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^2=\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}$ であるので，

$$S_{n+1}=\frac{7-3\sqrt{5}}{2}S_n$$

すると，$\displaystyle\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_1\left(\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}=\sum_{k=1}^{n}\left(-\frac{7-3\sqrt{5}}{2}\right)^{k-1}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{S_1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}S_k=\frac{1}{1+\dfrac{7-3\sqrt{5}}{2}}=\frac{2}{9-3\sqrt{5}}=\frac{3+\sqrt{5}}{6}$$

コメント

正五角形を題材とした有名問題です。三角関数をベースに考えなくてもよいように，相似に着目させる誘導がついています。

問　題

自然数 n に対して関数 $f_n(x)$ を，$f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ $(x\geqq 0)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx\leqq\int_0^1\log(1+x)\,dx$ を示せ。

(2) 数列 $\{I_n\}$ を，$I_n=\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$ で定める。$0\leqq x\leqq 1$ のとき $\log(1+x)\leqq\log 2$ であることを用いて数列 $\{I_n\}$ が収束することを示し，その極限値を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{\log x}{x}=0$ であることは用いてよい。 [2015]

解答例

(1) $f_n(x)=\dfrac{x}{n(1+x)}\log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ のとき，$I_n=\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx$ に対し，$t=\dfrac{x}{n}$ とおくと，

$$I_n=\int_0^1\frac{t}{1+nt}\log(1+t)\cdot n\,dt=\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+nt}\right)\log(1+t)\,dt$$
$$=\int_0^1\log(1+t)\,dt-\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+nt>0$，$\log(1+t)\geqq 0$ より，

$$\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log(1+t)\,dt>0$$

よって，$I_n\leqq\displaystyle\int_0^1\log(1+t)\,dt$，すなわち，$\displaystyle\int_0^n f_n(x)\,dx\leqq\int_0^1\log(1+x)\,dx$

(2) まず，$\displaystyle\int_0^1\log(1+x)\,dx=\Big[(x+1)\log(x+1)\Big]_0^1-\int_0^1 dx=2\log 2-1$

すると，(1)より，$I_n\leqq 2\log 2-1\cdots\cdots\cdots②$

また，$0\leqq t\leqq 1$ のとき $\log(1+t)\leqq\log 2$ から，①より，

$$I_n\geqq 2\log 2-1-\int_0^1\frac{1}{1+nt}\log 2\,dt=2\log 2-1-\log 2\left[\frac{\log(1+nt)}{n}\right]_0^1$$
$$=2\log 2-1-\frac{\log(1+n)}{n}\log 2\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$2\log 2-1-\dfrac{\log(1+n)}{n}\log 2\leqq I_n\leqq 2\log 2-1$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{\log(1+n)}{1+n}\left(\frac{1}{n}+1\right)=0$ より，

$$\lim_{n\to\infty}I_n=2\log 2-1$$

コメント

不等式を立て，はさみうちの原理を用いて極限を求めるという頻出問題です。ポイントは，①の 2 つめの定積分の値の評価を，$0\leqq\log(1+t)\leqq\log 2$ によって行うということですが，やや誘導がつかみにくいのは確かです。

問　題

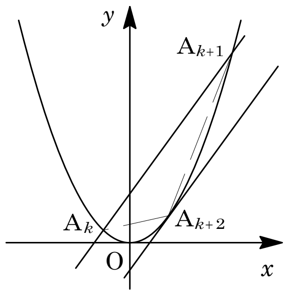
放物線 $C: y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}_1(a_1,\ {a_1}^2)$，$\mathrm{A}_2(a_2,\ {a_2}^2)$，$\mathrm{A}_3(a_3,\ {a_3}^2)$，$\cdots$を，$\mathrm{A}_{k+2}$ $(k \geqq 1)$における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であるようにとる。ただし，$a_1 < a_2$ とする。三角形 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積を T_k とし，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{T_{k+1}}{T_k}$ を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k$ を S を用いて表せ。 [2009]

解答例

(1) $C: y = x^2$ に対して，$y' = 2x$



さて，条件より，3 点 $\mathrm{A}_k(a_k,\ {a_k}^2)$，$\mathrm{A}_{k+1}(a_{k+1},\ {a_{k+1}}^2)$，$\mathrm{A}_{k+2}(a_{k+2},\ {a_{k+2}}^2)$について，$\mathrm{A}_{k+2}$ における C の接線が直線 $\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$ に平行であることから，

$$2a_{k+2} = \frac{{a_{k+1}}^2 - {a_k}^2}{a_{k+1} - a_k} = a_{k+1} + a_k \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}} = (a_{k+1} - a_k,\ {a_{k+1}}^2 - {a_k}^2)$

$$= (a_{k+1} - a_k)(1,\ a_{k+1} + a_k)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+2}} = (a_{k+2} - a_k)(1,\ a_{k+2} + a_k)$$

すると，$\triangle \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}$ の面積 T_k は，①を利用すると，

$$T_k = \frac{1}{2}\left|(a_{k+1} - a_k)(a_{k+2} - a_k)\{(a_{k+2} + a_k) - (a_{k+1} + a_k)\}\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(a_{k+1} - a_k)(a_{k+2} - a_k)(a_{k+2} - a_{k+1})\right|$$

$$= \frac{1}{2}\left|(a_{k+1} - a_k)\left(\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k - a_k\right)\left(\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k - a_{k+1}\right)\right|$$

$$= \frac{1}{8}\left|(a_{k+1} - a_k)(a_{k+1} - a_k)(-a_{k+1} + a_k)\right| = \frac{1}{8}\left|a_{k+1} - a_k\right|^3$$

$$T_{k+1} = \frac{1}{8}\left|a_{k+2} - a_{k+1}\right|^3 = \frac{1}{8}\left|\frac{1}{2}a_{k+1} + \frac{1}{2}a_k - a_{k+1}\right|^3 = \frac{1}{64}\left|a_{k+1} - a_k\right|^3$$

よって，$T_{k+1} = \dfrac{1}{8}T_k$ より，$\dfrac{T_{k+1}}{T_k} = \dfrac{1}{8}$ である。

(2) (1)より，数列 $\{T_k\}$ は公比 $\dfrac{1}{8}$ の等比数列であるので，$a_1 < a_2$ から，

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} T_k = \frac{T_1}{1 - \frac{1}{8}} = \frac{8}{7}T_1 = \frac{8}{7}\cdot\frac{1}{8}\left|a_2 - a_1\right|^3 = \frac{1}{7}(a_2 - a_1)^3 \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，直線 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2$ と C で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_{a_1}^{a_2}-(x-a_1)(x-a_2)\,dx=\frac{1}{6}(a_2-a_1)^3\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}T_k=\frac{1}{7}\cdot 6S=\frac{6}{7}S$

コメント

三角形の面積に無限等比級数を組み合わせた標準的な 1 題です。

問　題

$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の交点のうち第 1 象限にある点を $(p_n,\ q_n)$ とする。

(1) 不等式 $1-{q_n}^2 \leqq \frac{(e-1)^2}{n^2}$ を示すことにより，$\lim_{n\to\infty} q_n=1$ を証明せよ。ただし，e は自然対数の底である。

(2) $S_n=\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx$ を p_n で表せ。

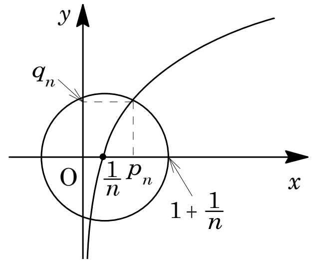
(3) $\lim_{n\to\infty} nS_n$ を求めよ。　[2009]

解答例

(1) 点 $(p_n,\ q_n)$ は，$y=\log(nx)$ と $\left(x-\frac{1}{n}\right)^2+y^2=1$ の第 1 象限にある交点であるので，

$$q_n=\log(np_n)\ \cdots\cdots\cdots ①$$

$$\left(p_n-\frac{1}{n}\right)^2+{q_n}^2=1\ \cdots\cdots\cdots ②$$



②より，$1-{q_n}^2=\left(p_n-\frac{1}{n}\right)^2=\frac{(np_n-1)^2}{n^2}\ \cdots\cdots\cdots ③$

①より，$np_n=e^{q_n}$ から，$np_n-1=e^{q_n}-1\ \cdots\cdots\cdots ④$

③④より，$1-{q_n}^2=\frac{(e^{q_n}-1)^2}{n^2}$

ここで, $0<q_n\leqq 1$ から, $0<e^{q_n}-1\leqq e-1$ となり，$1-{q_n}^2\leqq\frac{(e-1)^2}{n^2}$

さらに, $0<{q_n}^2\leqq 1$ から，$0\leqq 1-{q_n}^2$ となり，$0\leqq 1-{q_n}^2\leqq\frac{(e-1)^2}{n^2}$

すると, $n\to\infty$ のとき $1-{q_n}^2\to 0$ すなわち ${q_n}^2\to 1$ となり，$q_n>0$ から,

$$\lim_{n\to\infty} q_n=1$$

(2) $S_n=\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}\log(nx)\,dx=\left[x\log(nx)\right]_{\frac{1}{n}}^{p_n}-\int_{\frac{1}{n}}^{p_n}x\cdot\frac{1}{x}\,dx=p_n\log(np_n)-p_n+\frac{1}{n}$

(3) (2)の結果に④を適用すると,

$$nS_n=np_n\log(np_n)-np_n+1=q_ne^{q_n}-e^{q_n}+1=e^{q_n}(q_n-1)+1\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(1)から，$\lim_{n\to\infty} q_n=1$ なので，⑤より $\lim_{n\to\infty} nS_n=1$ である。

コメント

ていねいな誘導のついた極限の問題です。この誘導がなければ難問です。

問　題

n を正の整数, a を正の実数とする。曲線 $y = x^n$ と曲線 $y = a\log x$ が, 点 P で共通の接線をもつとする。ただし, 対数は自然対数である。点 P の x 座標を t とするとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a, t をそれぞれ n を用いて表せ。

(2) 曲線 $y = x^n$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_1 とする。また, 曲線 $y = a\log x$ と x 軸および直線 $x = t$ で囲まれる部分の面積を S_2 とする。このとき, $\dfrac{S_2}{S_1}$ を n を用いて表せ。

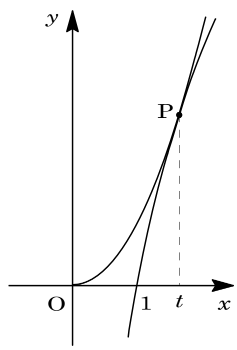
(3) $x \geqq 0$ のとき, 不等式 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを, 次の(a), (b)に分けて示せ。ただし, e は自然対数の底とする。

(a) $x \geqq 0$ のとき, 不等式 $e^{-x} + x - 1 \leqq \dfrac{x^2}{2}$ が成り立つことを示せ。

(b) $x \geqq 0$ のとき, 不等式 $\dfrac{x^2}{2} - \dfrac{x^3}{6} \leqq e^{-x} + x - 1$ が成り立つことを示せ。

(4) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_1}$ を求めよ。 [2005]

解答例



(1) まず, $y = x^n$ ……①に対して, $y' = nx^{n-1}$

また, $y = a\log x$ ……②に対して, $y' = \dfrac{a}{x}$

①と②が点 $\mathrm{P}(t,\ t^n)$ で共通接線をもつことより,

$t^n = a\log t$ ………③, $nt^{n-1} = \dfrac{a}{t}$ ………④,

④より $nt^n = a$ なので, ③を代入して $na\log t = a$ から,

$t = e^{\frac{1}{n}}$, $a = ne$

(2) 条件より, $S_1 = \displaystyle\int_0^t x^n dx = \left[\frac{1}{n+1}x^{n+1}\right]_0^t = \frac{t^{n+1}}{n+1}$

$$S_2 = \int_1^t a\log x\,dx = a\Big[x\log x - x\Big]_1^t = a(t\log t - t + 1)$$

(1)より,
$$\frac{S_2}{S_1} = \frac{a(n+1)(t\log t - t + 1)}{t^{n+1}} = \frac{n(n+1)e\left(e^{\frac{1}{n}}\cdot\frac{1}{n} - e^{\frac{1}{n}} + 1\right)}{e^{\frac{n+1}{n}}}$$

$$= \frac{n(n+1)\left(e^{\frac{n+1}{n}}\cdot\frac{1}{n} - e^{\frac{n+1}{n}} + e\right)}{e^{\frac{n+1}{n}}} = n(n+1)\left(\frac{1}{n} - 1 + e^{-\frac{1}{n}}\right)$$

(3) (a) $f(x)=e^{-x}+x-1-\dfrac{x^2}{2}$ とおくと,

$$f'(x)=-e^{-x}+1-x\,,\ \ f''(x)=e^{-x}-1$$

$x\geqq 0$ のとき, $f''(x)\leqq 0$ より, $f'(x)\leqq f'(0)=0$

よって, $f(x)\leqq f(0)=0$, すなわち $e^{-x}+x-1\leqq\dfrac{x^2}{2}$ $(x\geqq 0)$ が成り立つ。

(b) $g(x)=e^{-x}+x-1-\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{x^3}{6}=f(x)+\dfrac{x^3}{6}$ とおくと,

$$g'(x)=f'(x)+\frac{x^2}{2}=-e^{-x}+1-x+\frac{x^2}{2}=-f(x)$$

$x\geqq 0$ のとき $g'(x)\geqq 0$ より, $g(x)\geqq g(0)=0$

すなわち, $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leqq e^{-x}+x-1$ $(x\geqq 0)$ が成り立つ。

(4) (3)より, $x\geqq 0$ のとき, $\dfrac{x^2}{2}-\dfrac{x^3}{6}\leqq e^{-x}+x-1\leqq\dfrac{x^2}{2}$

ここで, $x=\dfrac{1}{n}>0$ とおくと,

$$\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2-\frac{1}{6}\Big(\frac{1}{n}\Big)^3\leqq e^{-\frac{1}{n}}+\frac{1}{n}-1\leqq\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{n}\Big)^2$$

各辺に $n(n+1)$ をかけて,

$$\frac{n+1}{2n}-\frac{n+1}{6n^2}\leqq n(n+1)\Big(\frac{1}{n}-1+e^{-\frac{1}{n}}\Big)\leqq\frac{n+1}{2n}$$

よって, $\dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)-\dfrac{1}{6n}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\leqq\dfrac{S_2}{S_1}\leqq\dfrac{1}{2}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)$

$n\to\infty$ のとき $\dfrac{S_2}{S_1}\to\dfrac{1}{2}$ から, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{S_2}{S_1}=\frac{1}{2}$ である。

コメント

誘導が非常にていねいで, 今までにはなかったような形式です。特に, (3)の設問には驚いてしまいます。

問　題

実数 x に対して, x を越えない最大の整数を $[\,x\,]$ で表す。n を正の整数とし,

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\right]}{n^2}$$

とおく。このとき, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。 [2000]

解答例

一般的に $[\,x\,]\leqq x<[\,x\,]+1$ より, $x-1<[\,x\,]\leqq x$ なので,

$$\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<\frac{\left[\sqrt{2n^2-k^2}\right]}{n^2}\leqq\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

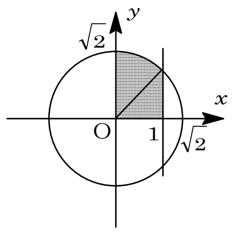
各辺で $k=1$ から $k=n$ までの和をとると,

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}<a_n\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}$$

ここで, $\displaystyle b_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}}{n^2}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}$ とおくと, 区分求積法を用いて,

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}=\int_0^1\sqrt{2-x^2}\,dx$$

$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1+\frac{1}{2}\cdot(\sqrt{2})^2\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$



また, $\displaystyle c_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sqrt{2n^2-k^2}-1}{n^2}$ とすると,

$$c_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\sqrt{2-\left(\frac{k}{n}\right)^2}-\frac{n}{n^2}=b_n-\frac{1}{n}$$

$$\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}\left(b_n-\frac{1}{n}\right)=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$$

すると, $c_n<a_n\leqq b_n$ で $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}+\frac{\pi}{4}$

コメント

はさみうちの原理と区分求積法を用いる融合問題です。それをすばやく見抜ける眼力が必要です。

問　題

(1)　a を 1 より大きい実数とする。0 以上の任意の実数 x に対して次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\log 2+\frac{x}{2}\log a \leqq \log(1+a^x) \leqq \log 2+\frac{x}{2}\log a+\frac{x^2}{8}(\log a)^2$$

ただし，対数は自然対数である。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n$ とおく。(1)の不等式を用いて極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$f(x)=\log(1+a^x)-\log 2-\dfrac{x}{2}\log a$ とおく。

$$f'(x)=\frac{a^x\log a}{1+a^x}-\frac{1}{2}\log a=\frac{2a^x\log a-(1+a^x)\log a}{2(1+a^x)}=\frac{(a^x-1)\log a}{2(1+a^x)}$$

$a>1$，$x\geqq 0$ より，$f'(x)\geqq 0$

$x\geqq 0$ で，$f(x)\geqq f(0)=\log(1+1)-\log 2=0$

また，$g(x)=\log 2+\dfrac{x}{2}\log a+\dfrac{x^2}{8}(\log a)^2-\log(1+a^x)$ とおく。

$$g'(x)=\frac{1}{2}\log a+\frac{x}{4}(\log a)^2-\frac{a^x\log a}{1+a^x}=\log a\left(\frac{1}{2}+\frac{x}{4}\log a-\frac{a^x}{1+a^x}\right)$$

$h(x)=\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}\log a-\dfrac{a^x}{1+a^x}=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{x}{4}\log a+\dfrac{1}{1+a^x}$ とおく。

$$h'(x)=\frac{1}{4}\log a-\frac{a^x\log a}{(1+a^x)^2}=\frac{(1-a^x)^2}{4(1+a^x)^2}\log a\geqq 0\quad(a>1\text{より})$$

$x\geqq 0$ で，$h(x)\geqq h(0)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{1+1}=0$

$a>1$ より，$\log a>0$ なので $g'(x)\geqq 0$

$x\geqq 0$ で，$g(x)\geqq g(0)=\log 2-\log(1+1)=0$

以上より，$\log 2+\dfrac{x}{2}\log a\leqq\log(1+a^x)\leqq\log 2+\dfrac{x}{2}\log a+\dfrac{x^2}{8}(\log a)^2$

(2)　$a_n=\left(\dfrac{1+\sqrt[n]{3}}{2}\right)^n=\dfrac{(1+3^{\frac{1}{n}})^n}{2^n}$ より，$\log a_n=n\log(1+3^{\frac{1}{n}})-n\log 2$

ここで，(1)の式において $a=3$，$x=\dfrac{1}{n}$ とおくと，

$$\log 2+\frac{1}{2n}\log 3\leqq\log(1+3^{\frac{1}{n}})\leqq\log 2+\frac{1}{2n}\log 3+\frac{1}{8n^2}(\log 3)^2$$

$$\frac{1}{2}\log 3 \leqq n\log\left(1+3^{\frac{1}{n}}\right) - n\log 2 \leqq \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{8n}(\log 3)^2$$

$$\frac{1}{2}\log 3 \leqq \log a_n \leqq \frac{1}{2}\log 3 + \frac{1}{8n}(\log 3)^2$$

$n \to \infty$ とすると，はさみうちの原理より $\log a_n \to \dfrac{1}{2}\log 3 = \log\sqrt{3}$

対数関数は定義された変域において連続なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \sqrt{3}$

コメント

(1)の不等式を誘導として用いて a_n の極限を求めるわけですが，$\log a_n$ を考えれば，$a = 3$，$x = \dfrac{1}{n}$ と対応づけるのに迷いはないでしょう。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2)　正の実数 x, y, z が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　c は正の定数，$x+y=c$ $(x>0,\ y>0)$ のとき，$P=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ とおくと，

$$P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$c=x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ となり，

$\dfrac{1}{xy}\geqq\dfrac{4}{c^2}$　（等号は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき成立）

よって，$P\geqq 1+\dfrac{4(c+1)}{c^2}=\dfrac{(c+2)^2}{c^2}=\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ となり，P は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ をとる。

(2)　$x+y+z=1$ $(x>0,\ y>0,\ z>0)$ のとき，$Q=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおく。

ここで，$x+y=1-z$ から $0<z<1$ となり，$1-\dfrac{4}{3z}=\dfrac{3z-4}{3z}<0$

すると，(1)の結果から，

$$Q=P\left(1-\frac{4}{3z}\right)\leqq\left(\frac{1-z+2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)=\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{3z-4}{3z}$$

なお，等号は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき成立する。

ここで，$f(z)=\left(\dfrac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}=\left(\dfrac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}$ とおくと，

$$f'(z)=2\cdot\frac{z-3}{z-1}\cdot\frac{2}{(z-1)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}$$

$$=\frac{4(z-3)}{3z(z-1)^2}\left(\frac{3z-4}{z-1}+\frac{z-3}{z}\right)=\frac{4(z-3)(4z^2-8z+3)}{3z^2(z-1)^3}$$

$$=\frac{4(z-3)(2z-1)(2z-3)}{3z^2(z-1)^3}$$

これより，$f(z)$ の増減は右表のようになり，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		↗	$-\frac{125}{3}$	↘	

したがって, Q は $x=y=\dfrac{1}{4}$, $z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

コメント

条件付きの最大・最小問題です。(2)では, (1)の結果の利用するため, いったん z を固定して考えています。なお, $f'(z)$ を商の微分法を利用してまとめていくと, 相当な計算量になります。

問　題

$t>0$ において定義された関数 $f(t)$ は次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　$t>0$ のとき，すべての実数 x に対して不等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)\geqq 1+x$ が成り立つ。

(イ)　$t>0$ に対して，等式 $t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)=1+x$ を満たす実数 x が存在する。

このとき，$f(t)$ を求めよ。　[2014]

解答例

まず，$g(x)=t\cdot\dfrac{e^x+e^{-x}}{2}+f(t)-1-x$ とおくと，条件より，$g(x)\geqq 0$ かつ $g(x)=0$ となる x が存在することになり，

$$g'(x)=t\cdot\frac{e^x-e^{-x}}{2}-1,\quad g''(x)=t\cdot\frac{e^x+e^{-x}}{2}$$

すると，$t>0$ から $g''(x)>0$ となり，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$\lim_{x\to-\infty}g'(x)=-\infty,\quad \lim_{x\to\infty}g'(x)=\infty$$

よって，$g'(x)=0$ となる x がただ 1 つ存在し，これを $x=\alpha$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになり，条件より，$g(\alpha)=0$ である。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$	$-$	0	$+$
$g(x)$	↘		↗

さて，$g'(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha-e^{-\alpha}}{2}-1=0$ より，

$$e^\alpha-e^{-\alpha}=\frac{2}{t},\quad e^{2\alpha}-\frac{2}{t}e^\alpha-1=0,\quad e^\alpha=\frac{1}{t}+\sqrt{\frac{1}{t^2}+1}=\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

すると，$g(\alpha)=t\cdot\dfrac{e^\alpha+e^{-\alpha}}{2}+f(t)-1-\alpha=0$ から，

$$\frac{t}{2}\left(\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\frac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}\right)+f(t)-1-\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=0$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{t}{1+\sqrt{1+t^2}}=\dfrac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}+\dfrac{-1+\sqrt{1+t^2}}{t}=\dfrac{2\sqrt{1+t^2}}{t}$ より，

$$f(t)=-\frac{t}{2}\cdot\frac{2\sqrt{1+t^2}}{t}+1+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}=1-\sqrt{1+t^2}+\log\frac{1+\sqrt{1+t^2}}{t}$$

コメント

一見，難問風の問題設定ですが，誘導はなくてもスムーズに流れていきます。

問　題

三角関数の極限に関する公式 $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ を示すことにより，$\sin x$ の導関数が $\cos x$ であることを証明せよ。 [2013]

解答例

$0<x<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\sin x<x<\tan x=\dfrac{\sin x}{\cos x}$ が成り立つので，

$$\frac{\sin x}{x}<1<\frac{\sin x}{x\cos x},\ \ \cos x<\frac{\sin x}{x}<1\cdots\cdots\cdots(*)$$

これより，$x\to+0$ のとき，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ となる。

また，$-\dfrac{\pi}{2}<x<0$ のとき，$(*)$より，$\cos(-x)<\dfrac{\sin(-x)}{-x}<1$ となり，

$$\cos x<\frac{-\sin x}{-x}<1,\ \ \cos x<\frac{\sin x}{x}<1$$

これより，$x\to-0$ のとき，$\dfrac{\sin x}{x}\to 1$ となる。

以上より，$\lim_{x\to 0}\dfrac{\sin x}{x}=1$ が成り立つ。

さて，$f(x)=\sin x$ とおくと，

$$f'(x)=\lim_{h\to 0}\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h}=\lim_{h\to 0}\frac{1}{h}\cdot 2\cos\frac{2x+h}{2}\sin\frac{h}{2}$$

$$=\lim_{h\to 0}\frac{\sin\frac{h}{2}}{\frac{h}{2}}\cdot\cos\frac{2x+h}{2}=1\cdot\cos x=\cos x$$

コメント

出題意図がよくわからないので，不等式を前提に，解答例を記しています。

問　題

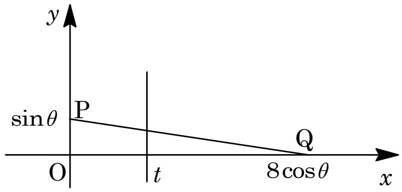
実数θが動くとき，xy 平面上の動点$\mathrm{P}(0,\ \sin\theta)$および$\mathrm{Q}(8\cos\theta,\ 0)$を考える。$\theta$が$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，平面内で線分 PQ が通過する部分をDとする。Dをx軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vを求めよ。　[2011]

解答例

まず，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$のとき，線分 PQ を表す方程式は，$x=0$　$(0\leqq y\leqq 1)$である。

また，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき，線分 PQ を表す方程式は,

$$y=-\frac{\tan\theta}{8}x+\sin\theta\quad(0\leqq x\leqq 8\cos\theta)$$



さて，直線$x=t$ $(0\leqq t\leqq 8\cos\theta)$上における y のとりうる値の範囲を求める。

ここで，$f(\theta)=-\dfrac{t}{8}\tan\theta+\sin\theta$とおくと,

$$f'(\theta)=-\frac{t}{8}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}+\cos\theta=\frac{8\cos^3\theta-t}{8\cos^2\theta}$$

すると，$0\leqq t\leqq 8\cos\theta$から$0\leqq\sqrt[3]{t}\leqq 2\sqrt[3]{\cos\theta}$となり，$\cos\alpha=\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}$となる$\alpha$がただ 1 つ存在する。また，$8\cos\beta=t\left(\cos\beta=\dfrac{t}{8}\right)$とおくと，$\dfrac{\sqrt[3]{t}}{2}\geqq\dfrac{t}{8}$から，$\alpha\leqq\beta$である。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β
$f'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$f(\theta)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

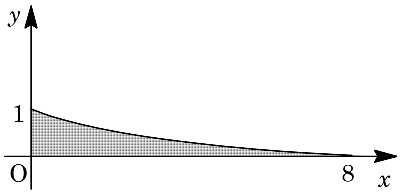
これより，$f(\theta)$の増減は右表のようになり,

$$f(\alpha)=-\frac{t}{8}\tan\alpha+\sin\alpha=\sin\alpha\left(-\frac{t}{8\cos\alpha}+1\right)=\sqrt{1-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}}\left(-\frac{t^{\frac{2}{3}}}{4}+1\right)$$

$$=\frac{\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{1}{2}}}{2}\cdot\frac{4-t^{\frac{2}{3}}}{4}=\frac{1}{8}\left(4-t^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$

よって，線分 PQ が通過する部分Dは,

$$0\leqq y\leqq\frac{1}{8}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^{\frac{3}{2}}$$



したがって, Dをx軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積Vは,

$$V=\pi\int_0^8\frac{1}{64}\left(4-x^{\frac{2}{3}}\right)^3dx=\frac{\pi}{64}\int_0^8\left(64-48x^{\frac{2}{3}}+12x^{\frac{4}{3}}-x^2\right)dx$$

$$=\frac{\pi}{64}\Big[64x-48\cdot\frac{3}{5}x^{\frac{5}{3}}+12\cdot\frac{3}{7}x^{\frac{7}{3}}-\frac{1}{3}x^3\Big]_0^8=\frac{\pi}{64}\left(2^9-\frac{9}{5}\cdot 2^9+\frac{9}{7}\cdot 2^9-\frac{1}{3}\cdot 2^9\right)$$

$$=2^3\pi\left(1-\frac{9}{5}+\frac{9}{7}-\frac{1}{3}\right)=\frac{128}{105}\pi$$

コメント

　線分の通過領域を求める際に，1 文字を固定して処理する有名問題です。なお，定積分の数値計算が面倒なので，変数を取り直した方がよかったかもしれません。

問　題

Nを 2 以上の自然数とする。

(1) 関数 $f(x)=(N-x)\log x$ を $1\leqq x\leqq N$ の範囲で考える。このとき，曲線 $y=f(x)$ は上に凸であり，関数 $f(x)$ は極大値を 1 つだけとる。このことを示せ。

(2) 自然数の列 a_1，a_2，……，a_N を

$$a_n=n^{N-n}\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots,\ N)$$

で定める。a_1，a_2，……，a_N のうちで最大の値を M とし，$M=a_n$ となる n の個数を k とする。このとき $k\leqq 2$ であることを示せ。

(3) (2)で $k=2$ となるのは, N が 2 のときだけであることを示せ。　[2008]

解答例

(1) $f(x)=(N-x)\log x$ に対して，$f'(x)=-\log x+\dfrac{N-x}{x}=-\log x+\dfrac{N}{x}-1$

$$f''(x)=-\frac{1}{x}-\frac{N}{x^2}=-\frac{x+N}{x^2}<0$$

これより, $1\leqq x\leqq N$ において，曲線 $y=f(x)$ は上に凸である。

また，$f'(x)$ の増減は右表のようになり，

$$f'(1)=N-1>0\,,\ f'(N)=-\log N<0$$

すると，$f'(x)=0$ はただ 1 つの解をもつ。

x	1	$\cdots$	N
$f''(x)$		$-$	
$f'(x)$		$\searrow$	

これを $x=\alpha$ $(1<\alpha<N)$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は極大値を 1 つだけもつ。

x	1	$\cdots$	α	$\cdots$	N
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

(2) $f(n)=(N-n)\log n=\log n^{N-n}$ より，

$$a_n=n^{N-n}=e^{f(n)}$$

ここで，l を $1\leqq l\leqq N-1$ を満たす自然数とし，$l\leqq\alpha\leqq l+1$ とする。さらに，一般的に, a と b の小さくない方を $\max\{a,\ b\}$ で表すと，

$$M=\max\{e^{f(l)},\ e^{f(l+1)}\}=\max\{a_l,\ a_{l+1}\}$$

よって，$M=a_n$ となる n の個数 k は, $k\leqq 2$ である。

(3) $k=2$ となるのは，$l<\alpha<l+1$ において，$a_l=a_{l+1}$ の場合より，

$$l^{N-l}=(l+1)^{N-l-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて, l と $l+1$ は連続する自然数より，偶奇が異なる。

(i) $N-l-1\geqq 1$ $(N-l\geqq 2)$ のとき

(＊)は，両辺の偶奇が異なることより成立しない。

(ii) $N-l-1=0$ $(N-l=1)$ のとき

(＊)より，$l=1$ すなわち $N=2$ である。

　このとき，$a_n = n^{2-n}$ から $a_1 = a_2 = 1$ となり，$k = 2$ である。

(i)(ii)より，$k = 2$ となるのは，$N = 2$ のときだけである。

コメント

$f(x)$ のグラフは書いていませんが，これをイメージして解いています。(3)は，(1)と(2)の延長線上では解決できない点が難です。

問　題

$f(x)=2x^3+x^2-3$ とおく。直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲を求めよ。 [2005]

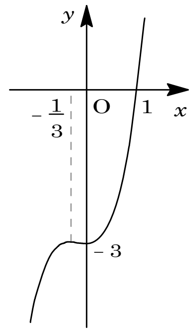
解答例

まず，$f(x)=2x^3+x^2-3$ より，

$$f'(x)=6x^2+2x=2x(3x+1)$$

よって，$y=f(x)$ のグラフの概形は右下のようになる。

x	$\cdots$	$-\frac{1}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	$-\frac{80}{27}$	$\searrow$	-3	$\nearrow$



また，点 $(t,\ 2t^3+t^2-3)$ における接線の方程式は，

$$y-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(x-t)$$

原点を通るとき，

$$-(2t^3+t^2-3)=(6t^2+2t)(-t)$$

$$4t^3+t^2+3=0,\ (t+1)(4t^2-3t+3)=0$$

ここで，$4t^2-3t+3=0$ は $D=9-48<0$ より実数解をもたないので，$t=-1$ である。

このとき，接線は $y=4x$ であるので，図より，直線 $y=mx$ が曲線 $y=f(x)$ と相異なる 3 点で交わるような実数 m の範囲は, $m>4$ である。

コメント

$f(x)=mx$ から，$x\neq 0$ のもとで定数 m を分離して，$\dfrac{f(x)}{x}=m$ として処理する方がクリアーです。しかし，文系に同じ問題が出されており，そこでの誘導に沿った解法を記しています。

問　題

(1)　$0<t<1$ のとき，不等式 $\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つことを示せ。

(2)　k を正の定数とする。$a>0$ とし，曲線 $C: y=e^{kx}$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$，$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ を考える。このとき P における C の接線と Q における C の接線の交点の x 座標はつねに正であることを示せ。　[2003]

解答例

(1)　$f(t)=\dfrac{\log t}{2}+\dfrac{1-t}{1+t}$ とおくと，

$$f'(t)=\frac{1}{2t}+\frac{-(1+t)-(1-t)}{(1+t)^2}=\frac{(1-t)^2}{2t(1+t)^2}$$

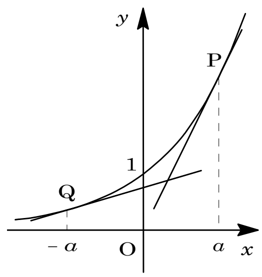
$0<t<1$ で $f'(t)>0$ より，$f(t)<f(1)=0$ となり，$\dfrac{\log t}{2}<-\dfrac{1-t}{1+t}$ が成り立つ。

(2)　$y=e^{kx}$ より，$y'=ke^{kx}$ なので，$\mathrm{P}(a,\ e^{ka})$ における接線は，

$$y-e^{ka}=ke^{ka}(x-a)\cdots\cdots\cdots①$$

$\mathrm{Q}(-a,\ e^{-ka})$ における接線は，

$$y-e^{-ka}=ke^{-ka}(x+a)\cdots\cdots\cdots②$$



①②の交点は，$ke^{ka}(x-a)+e^{ka}=ke^{-ka}(x+a)+e^{-ka}$

$$k(e^{2ka}-1)x=(ka-1)e^{2ka}+ka+1$$

$$x=\frac{(ka-1)e^{2ka}+ka+1}{k(e^{2ka}-1)}=\frac{(ka-1)+(ka+1)e^{-2ka}}{k(1-e^{-2ka})}$$

ここで，$e^{-2ka}=t$ とおくと，$k>0$，$a>0$ より $0<t<1$ となり，$ka=-\dfrac{\log t}{2}$ である。

$$x=\frac{\left(-\frac{\log t}{2}-1\right)+\left(-\frac{\log t}{2}+1\right)t}{k(1-t)}=\frac{-\frac{\log t}{2}(1+t)+(t-1)}{k(1-t)}$$

$$=\frac{1}{k}\left(-\frac{\log t}{2}\cdot\frac{1+t}{1-t}-1\right)=\frac{1}{k}\cdot\frac{1+t}{1-t}\left(-\frac{\log t}{2}-\frac{1-t}{1+t}\right)$$

(1)から，$-\dfrac{\log t}{2}-\dfrac{1-t}{1+t}>0$ なので，$x>0$ となり，①②の交点の x 座標はつねに正である。

コメント

(2)では，(1)の不等式が使えるようで使えない，何か隔靴掻痒という感じがしました。このため，時間がずいぶんかかってしまいました。

問　題

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ とおく。曲線 $y=f(x)$ に点 $(0,\ a)$ から接線がただ一つ引けるとし，しかもその接線はただ 1 点でこの曲線に接するとする。このときの a の値を求めよ。 [2001]

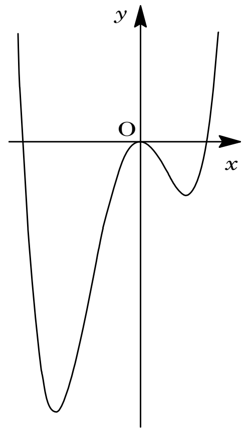
解答例

$f(x)=x^4+x^3-3x^2$ より，$f'(x)=4x^3+3x^2-6x$

接点を $(t,\ t^4+t^3-3t^2)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^4+t^3-3t^2)=(4t^3+3t^2-6t)(x-t)$$

$$y=(4t^3+3t^2-6t)x-3t^4-2t^3+3t^2 \cdots\cdots\cdots ①$$



①が点 $(0,\ a)$ を通るので，

$$a=-3t^4-2t^3+3t^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

ここで，$g(t)=-3t^4-2t^3+3t^2$ とおくと，

$$g'(t)=-12t^3-6t^2+6t$$

$$=-6t(2t-1)(t+1)$$

点 $(0,\ a)$ を通る複接線以外の接線が 1 本だけ引ける条件は，②がただ 1 つの実数解をもつことに対応する。

t	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$g'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$
$g(t)$	$\nearrow$	2	$\searrow$	0	$\nearrow$	$\frac{5}{16}$	$\searrow$

すると，右表において $2>\frac{5}{16}$ なので，$a=2$ のときである。

コメント

問題文の「ただ 1 点でこの曲線に接する」というコメントは，4 次曲線では現れる複接線を除外するというものです。

問　題

$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分を求めよ。　　[2014]

解答例

まず，$y=\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ のグラフに対して，図 1 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}&=\sum_{n=1}^{39999}\frac{1}{\sqrt{n}}+\frac{1}{\sqrt{40000}}\\&>\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx+\frac{1}{200}\\&=\Big[\,2\sqrt{x}\,\Big]_1^{40000}+\frac{1}{200}\\&=2(200-1)+\frac{1}{200}=398+\frac{1}{200}\end{aligned}$$

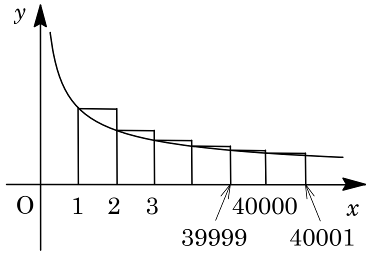


図1

また，同様に，図 2 より，

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}&=\frac{1}{\sqrt{1}}+\sum_{n=2}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}\\&<1+\int_1^{40000}\frac{1}{\sqrt{x}}\,dx\\&=1+398=399\end{aligned}$$

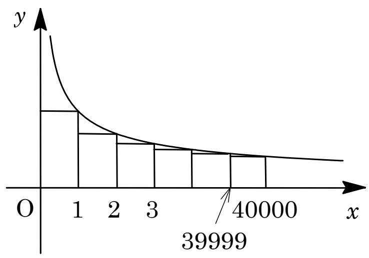


図2

以上より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{40000}\frac{1}{\sqrt{n}}$ の整数部分は 398 である。

コメント

数列と定積分の融合問題です。$\sqrt{40000}=200$ に着目して，最初または最後の短冊は別扱いという形で，きれいに解けます。ただ，かなりアバウトな書き方になっていますが……。

問　題

関数 $f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e は自然対数の底とする。

(1)　$f(x)$ の第 2 次導関数を $f''(x)$ とする。等式 $\log f''(x)=-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$f(x)=2\log(1+e^x)-x-\log 2$ に対して，$f'(x)=\dfrac{2e^x}{1+e^x}-1$ となり，

$$f''(x)=\frac{2e^x(1+e^x)-2e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\frac{2e^x}{(1+e^x)^2}$$

よって，$\log f''(x)=\log 2e^x-2\log(1+e^x)=-2\log(1+e^x)+x+\log 2=-f(x)$

(2)　$I=\displaystyle\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{-f(x)}dx$ とし, (1)の結果を適用すると,

$$I=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)e^{\log f''(x)}dx=\int_0^{\log 2}(x-\log 2)f''(x)\,dx$$

$$=\Big[(x-\log 2)f'(x)\Big]_0^{\log 2}-\int_0^{\log 2}f'(x)\,dx=(\log 2)f'(0)-\Big[f(x)\Big]_0^{\log 2}$$

$$=-f(\log 2)+f(0)=-2\log 3+\log 2+\log 2+(2\log 2-\log 2)$$

$$=-2\log 3+3\log 2=\log\frac{8}{9}$$

コメント

定積分の計算問題です。(1)の誘導によって，方針は自然に決まります。

問　題

関数 $f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3$ を考える。n , k を自然数とし

$$g_n(k)=f\left(\frac{\pi}{3n}\right)+f\left(\frac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\frac{k\pi}{3n}\right)$$

とおく。ただし $n\geqq 2$ とする。

(1)　n を固定する。$2\leqq k\leqq 3n$ の範囲で $g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ となる k をすべて求めよ。
　また, k が $1\leqq k\leqq 3n$ の範囲を動くとき，$g_n(k)$ を最小とする k をすべて求めよ。

(2)　(1)における $g_n(k)$ の最小値を G_n とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}$ を求めよ。

[2001]

解答例

(1)　$g_n(k-1)\geqq g_n(k)$ より，$g_n(k)-g_n(k-1)\leqq 0$ なので，$f\left(\dfrac{k\pi}{3n}\right)\leqq 0$ ………①

さて，$f(x)=4\cos^2 x-8\cos x+3=(2\cos x-3)(2\cos x-1)$

$f(x)\leqq 0$ とすると，$\cos x\geqq\dfrac{1}{2}$ なので, ①より $\cos\dfrac{k\pi}{3n}x\geqq\dfrac{1}{2}$ ………②

$2\leqq k\leqq 3n$ から，$\dfrac{2\pi}{3n}\leqq\dfrac{k\pi}{3n}\leqq\pi$ となり，②を満たすのは，$\dfrac{2\pi}{3n}\leqq\dfrac{k\pi}{3n}\leqq\dfrac{1}{3}\pi$

よって, $2\leqq k\leqq n$ となり，求める k は，$k=2,\ 3,\ \cdots,\ n-1,\ n$

すると，$g_n(k-1)>g_n(k)$ となるのは $2\leqq k\leqq n-1$，また $g_n(k-1)=g_n(k)$ となるのは $k=n$，さらに $g_n(k-1)<g_n(k)$ となるのは $n+1\leqq k\leqq 3n$ なので,

$$g_n(1)>g_n(2)>\cdots>g_n(n-1)=g_n(n)<g_n(n+1)<\cdots<g_n(3n)$$

よって，$g_n(k)$ が最小となる k は，$n-1$ または n である。

(2)　(1)より，$G_n=g_n(n)=f\left(\dfrac{\pi}{3n}\right)+f\left(\dfrac{2\pi}{3n}\right)+\cdots\cdots+f\left(\dfrac{n\pi}{3n}\right)=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{G_n}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)=\frac{3}{\pi}\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3n}\sum_{k=1}^{n}f\left(\frac{\pi}{3n}k\right)=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}f(x)\,dx$$

$$=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(4\cos^2 x-8\cos x+3)\,dx=\frac{3}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{3}}(2\cos 2x-8\cos x+5)\,dx$$

$$=\frac{3}{\pi}\Big[\sin 2x-8\sin x+5x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}=\frac{3}{\pi}\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-4\sqrt{3}+\frac{5}{3}\pi\right)=-\frac{21\sqrt{3}}{2\pi}+5$$

コメント

(1)は階差数列を用いた最大・最小問題, (2)は区分求積法による極限計算となっています。一見, 畑違いの分野が１つの問題にうまく収まっています。

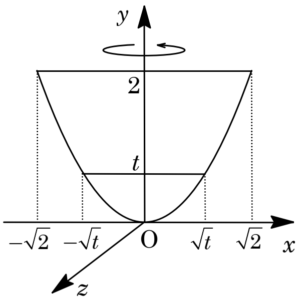
問　題

xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1) t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2) M の体積 V を求めよ。　[2017]

解答例



(1) xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 L を，y 軸に直交する平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で切断したときの切り口は，中心が点 $(0,\ t,\ 0)$ で半径が $\sqrt{t}$ の円板となるので，

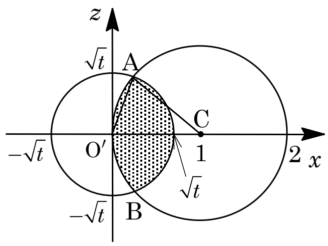
$$x^2+z^2\leqq t,\ \ y=t\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下の点で構成される円柱を $y=t$ で切断したときの切り口は，

$$(x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，立体 M を $y=t$ で切断したときの切り口は，①②から，

$$x^2+z^2\leqq t,\ (x-1)^2+z^2\leqq 1,\ y=t$$



この連立不等式を平面 $y=t$ 上に図示すると右図の網点部になる。なお，$\mathrm{O}'(0,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ t,\ 0)$ とし，2 円の交点を A，B とおく。すると，交点 A，B の x 座標は $x^2+z^2=t$ と $(x-1)^2+z^2=1$ を連立して，

$$2x-1=t-1,\ \ x=\frac{t}{2}$$

そこで，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{O'C}$ で $\mathrm{O'A}=\sqrt{t}$ より，$\sqrt{t}\cos\angle\mathrm{AO'C}=\dfrac{t}{2}$ となり，

$$2\cos\angle\mathrm{AO'C}=\sqrt{t},\ \ t=(2\cos\angle\mathrm{AO'C})^2$$

これより，$\angle\mathrm{AO'C}=\theta$ とおくことができ，$0\leqq t\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，網点部の面積を $S(t)$ とすると，$\angle\mathrm{ACO'}=\pi-2\theta$ から，

$$\begin{aligned}S(t)&=2\left\{\frac{1}{2}(\sqrt{t})^2\theta+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\right\}\\&=t\theta+\pi-2\theta-\sin2\theta=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin2\theta\\&=2\theta(1+\cos2\theta)+\pi-2\theta-\sin2\theta=2\theta\cos2\theta-\sin2\theta+\pi\end{aligned}$$

(2)　M の体積 V とすると，$V=\int_0^2 S(t)\,dt$ となり，(1)より，

$$V=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)(-8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\theta\cos 2\theta-4\sin 2\theta+4\pi)(\sin 2\theta)\,d\theta$$

$$=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta-2+2\cos 4\theta+4\pi\sin 2\theta)\,d\theta$$

ここで，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\Big[\sin 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0$，$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\cos 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}4\theta\sin 4\theta\,d\theta=-\Big[\theta\cos 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta=-\left(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\right)=-\frac{3}{4}\pi$$

以上より，$V=-\frac{3}{4}\pi-2\cdot\frac{\pi}{4}+4\pi\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{4}\pi$ となる。

コメント

立体の体積計算という阪大の頻出問題です。(1)は(2)の計算を考えて，結論をまとめています。ただ，これでも(2)の積分計算は，簡単とはいえません。

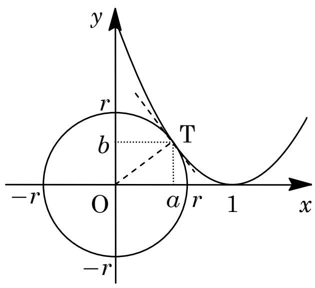
問　題

座標平面において，原点 O を中心とする半径 r の円と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ は，ただ 1 つの共有点 $(a,\ b)$ をもつとする。

(1) a, b, r の値をそれぞれ求めよ。

(2) 連立不等式 $a\leqq x\leqq 1$，$0\leqq y\leqq\sqrt{2}(x-1)^2$，$x^2+y^2\geqq r^2$ の表す領域を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を求めよ。 [2016]

解答例



(1) 円 $x^2+y^2=r^2$ と放物線 $y=\sqrt{2}(x-1)^2$ の接点を $\mathrm{T}(a,\ b)$ とおくと，

$$b=\sqrt{2}(a-1)^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，点 T における放物線の接線について，$y'=2\sqrt{2}(x-1)$ から，その方向ベクトルを $\vec{u}$ とおくと，$\vec{u}=\left(1,\ 2\sqrt{2}(a-1)\right)$ と表せる。

そして，$\vec{u}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OT}}=(a,\ b)$ は垂直なので，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OT}}=0$ より，

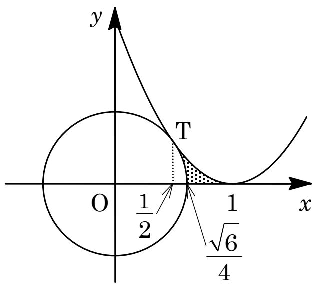
$$a+2\sqrt{2}(a-1)b=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a+4(a-1)^3=0$ となり，

$$4a^3-12a^2+13a-4=0,\ (2a-1)(2a^2-5a+4)=0$$

$2a^2-5a+4=0$ は実数解をもたないので，$a=\dfrac{1}{2}$

$$b=\sqrt{2}\left(\frac{1}{2}-1\right)^2=\frac{\sqrt{2}}{4},\ r=\sqrt{a^2+b^2}=\sqrt{\frac{1}{4}+\frac{1}{8}}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$



(2) (1)より，円 $x^2+y^2=\dfrac{3}{8}$，$\mathrm{T}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ となり，右図の網点部を x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}\{\sqrt{2}(x-1)^2\}^2dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\frac{3}{8}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{2}}^{1}2(x-1)^4dx-\pi\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}\left(\frac{3}{8}-x^2\right)dx$$

$$=\pi\left[\frac{2}{5}(x-1)^5\right]_{\frac{1}{2}}^{1}-\pi\left[\frac{3}{8}x-\frac{x^3}{3}\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{\sqrt{6}}{4}}$$

$$=\frac{2}{5}\pi\cdot\frac{1}{32}-\frac{3}{8}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{4}-\frac{1}{2}\right)+\frac{\pi}{3}\left(\frac{3\sqrt{6}}{32}-\frac{1}{8}\right)=\left(\frac{19}{120}-\frac{\sqrt{6}}{16}\right)\pi$$

コメント

回転体の体積を計算する基本問題です。最後の数値計算が少しややこしいです。

問　題

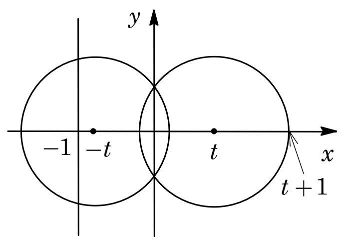
座標空間の x 軸上に動点 P, Q がある。P, Q は時刻 0 において，原点を出発する。P は x 軸の正の方向に, Q は x 軸の負の方向に，ともに速さ 1 で動く。その後，ともに時刻 1 で停止する。点 P, Q を中心とする半径 1 の球をそれぞれ A, B とし，空間で $x \geqq -1$ の部分を C とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　時刻 t $(0 \leqq t \leqq 1)$ における立体 $(A \cup B) \cap C$ の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2)　$V(t)$ の最大値を求めよ。　[2015]

解答例

(1) 時刻 t において，球 A は中心の座標が $(t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x-t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したもの，また球 B は中心の座標が $(-t,\ 0,\ 0)$ より，xy 平面上の円 $(x+t)^2+y^2=1$ を x 軸のまわりに 1 回転したものである。



さて，球 A, B の交線は yz 平面上にあるので，$x \geqq -1$ における $A \cup B$ の体積 $V(t)$ は，

$$V(t)=\pi\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx+\pi\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{1-(x+t)^2\}dx$，$I_2=\displaystyle\int_{0}^{t+1}\{1-(x-t)^2\}dx$ とすると，

$$I_1=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x+t)^3\,\Big]_{-1}^{0}=1-\frac{1}{3}\{t^3-(-1+t)^3\}=-t^2+t+\frac{2}{3}$$

$$I_2=\Big[\,x-\frac{1}{3}(x-t)^3\,\Big]_{0}^{t+1}=t+1-\frac{1}{3}(1+t^3)=-\frac{1}{3}t^3+t+\frac{2}{3}$$

よって，$V(t)=\pi(I_1+I_2)=\pi\Big(-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}\Big)$

(2)　$f(t)=-\dfrac{1}{3}t^3-t^2+2t+\dfrac{4}{3}$ とおくと，$V(t)=\pi f(t)$ となり，

$$f'(t)=-t^2-2t+2$$

すると，$0 \leqq t \leqq 1$ における $f'(t)=0$ の解は $t=-1+\sqrt{3}$ となり，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$	$-1+\sqrt{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$			$\searrow$

ここで，$f(t)$ を $-f'(t)$ で割ると，$f(t)=-f'(t)\Big(-\dfrac{1}{3}t-\dfrac{1}{3}\Big)+2t+\dfrac{2}{3}$ から，

$$f(-1+\sqrt{3})=2(-1+\sqrt{3})+\frac{2}{3}=-\frac{4}{3}+2\sqrt{3}$$

よって，$V(t)$ の最大値は，$\pi f(-1+\sqrt{3})=\Big(-\dfrac{4}{3}+2\sqrt{3}\Big)\pi$ である。

コメント

阪大・理系の定番である立体の体積を求める問題です。ただ，例年に比べ穏やかな内容になっています。

問　題

半径 1 の 2 つの球S_1とS_2が 1 点で接している。互いに重なる部分のない等しい半径をもつn個$(n \geqq 3)$の球T_1，T_2，…，T_nがあり，次の条件(ア)(イ)を満たす。

(ア)　T_iはS_1，S_2にそれぞれ 1 点で接している$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$。

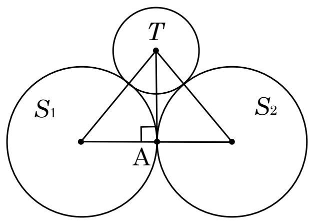
(イ)　T_iはT_{i+1}に 1 点で接しており$(i=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$，そしてT_nはT_1に 1 点で接している。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　T_1，T_2，…，T_nの共通の半径r_nを求めよ。

(2)　S_1とS_2の中心を結ぶ直線のまわりにT_1を回転してできる回転体の体積をV_nとし，T_1，T_2，…，T_nの体積の和をW_nとするとき，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}$ を求めよ。[2014]

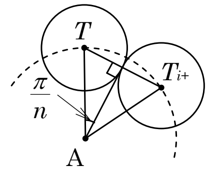
解答例



(1)　半径 1 の球S_1，S_2の接点を A とし，A と半径r_nの球T_iの中心との距離をx_nとすると，

$$x_n=\sqrt{(1+r_n)^2-1^2}=\sqrt{{r_n}^2+2r_n}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$r_n=x_n\sin\dfrac{\pi}{n}$より，$x_n=\dfrac{r_n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}\ \cdots\cdots\cdots②$



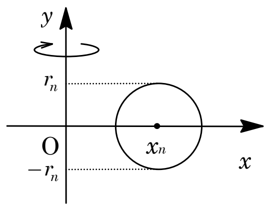
①②より，$\dfrac{r_n}{\sin\dfrac{\pi}{n}}=\sqrt{{r_n}^2+2r_n}$ となり，

$$ {r_n}^2=({r_n}^2+2r_n)\sin^2\frac{\pi}{n},\ \left(1-\sin^2\frac{\pi}{n}\right)r_n=2\sin^2\frac{\pi}{n}$$

よって，$r_n=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{1-\sin^2\dfrac{\pi}{n}}=\dfrac{2\sin^2\dfrac{\pi}{n}}{\cos^2\dfrac{\pi}{n}}=2\tan^2\dfrac{\pi}{n}$

(2)　まず，T_1，T_2，…，T_nの体積の和W_nは，$W_n=\dfrac{4}{3}n\pi{r_n}^3$

次に，S_1とS_2の中心を結ぶ直線のまわりにT_1を回転してできる回転体を，中心$(x_n,\ 0)$，半径r_nの円をy軸のまわりに 1 回転してつくる考え，



$$(x-x_n)^2+y^2={r_n}^2,\ x=x_n\pm\sqrt{{r_n}^2-y^2}$$

すると，$y=k$における回転体の断面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi\left\{(x_n+\sqrt{{r_n}^2-k^2})^2-(x_n-\sqrt{{r_n}^2-k^2})^2\right\}=4\pi x_n\sqrt{{r_n}^2-k^2}$$

その体積V_nは，対称性から，

$$V_n=2\int_0^{r_n}S(k)dk=8\pi x_n\int_0^{r_n}\sqrt{{r_n}^2-k^2}\,dk=8\pi x_n\cdot\frac{1}{4}\pi{r_n}^2=2\pi^2x_n{r_n}^2$$

②より，$\dfrac{W_n}{V_n}=\dfrac{\dfrac{4}{3}n\pi {r_n}^3}{2\pi^2 x_n {r_n}^2}=\dfrac{2n}{3\pi}\cdot\dfrac{r_n}{x_n}=\dfrac{2n}{3\pi}\sin\dfrac{\pi}{n}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{W_n}{V_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{2}{3}\cdot\frac{\sin\dfrac{\pi}{n}}{\dfrac{\pi}{n}}=\frac{2}{3}$$

コメント

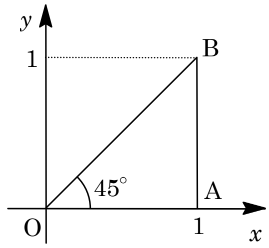
空間図形とその体積についての総合問題です。計算量も妥当なものです。

問　題

xyz 空間内の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐を V とする。円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2013]

解答例

3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 0)$ を頂点とする三角形 OAB を x 軸のまわりに 1 回転させてできる円錐 V の側面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とすると，

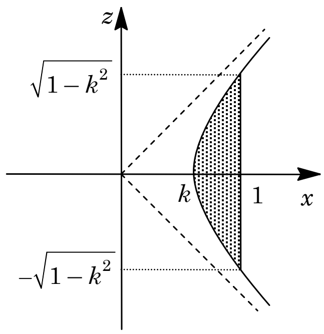


$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos 45^\circ$$

$$x=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

$$x^2=y^2+z^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

この円錐 V を y 軸に垂直な平面 $y=k\ \ (0\leqq k\leqq 1)$ で切断すると，その切り口は，



$$x^2=k^2+z^2,\ \ x^2-z^2=k^2\quad(0\leqq x\leqq 1)$$

そこで，この切り口を y 軸のまわりに 1 回転させると，その形状はドーナツ形になり，その外径を R，内径を r とおくと，

$$R=\sqrt{1^2+(\sqrt{1-k^2})^2}=\sqrt{2-k^2}\ ,\ \ r=k$$

すると，切り口の面積 $S(k)$ は，

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi(2-k^2-k^2)=2\pi(1-k^2)$$

よって，円錐 V を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積は，xz 平面に関する対称性から，

$$2\int_0^1 S(k)\,dk=4\pi\int_0^1(1-k^2)\,dk=4\pi\Big(1-\frac{1}{3}\Big)=\frac{8}{3}\pi$$

コメント

阪大頻出の立体の求積問題です。円錐の回転体が題材ですが，内容は基本事項の組合せです。なお，円錐面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

xyz 空間に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(0,\ \sqrt{3},\ 1)$がある。平面$z=0$に含まれ，中心が O，半径が 1 の円を Wとする。点 P が線分 OA 上を，点 Q が円 Wの周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を満たす点 R 全体がつくる立体を$V_A$とおく。同様に点 P が線分 OB 上を，点 Q が円 W の周および内部を動くとき，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を満たす点 R 全体がつくる立体を$V_B$とおく。さらに$V_A$と$V_B$の重なり合う部分を Vとする。このとき，以下の問いに答えよ。

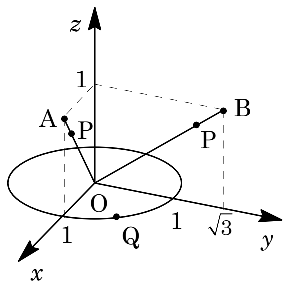
(1) 平面$z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$による立体 Vの切り口の面積をθを用いて表せ。

(2) 立体 Vの体積を求めよ。　[2012]

解答例

(1) $0\leqq a\leqq1$，$0\leqq b\leqq1$ とし，線分 OA 上の点 P をP_a，線分 OB 上の点 P をP_bとおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}=a\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(a,\ 0,\ a)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_b}=b\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(0,\ \sqrt{3}b,\ b)$$



また，点 Q は円 W の周および内部にあるので，φを任意の実数，$0\leqq r\leqq1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$

さて，立体V_A上の点$\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$は，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OP}_a}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(a,\ 0,\ a)+(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$=(a+r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ a)\cdots\cdots\cdots①$$

同様に，立体V_B上の点$\mathrm{R}(x,\ y,\ z)$は，

$$(x,\ y,\ z)=\overrightarrow{\mathrm{OP}_b}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(0,\ \sqrt{3}b,\ b)+(r\cos\varphi,\ r\sin\varphi,\ 0)$$
$$=(r\cos\varphi,\ \sqrt{3}b+r\sin\varphi,\ b)\cdots\cdots\cdots②$$

そこで，立体V_AとV_Bの平面$z=\cos\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$による切り口を求める。

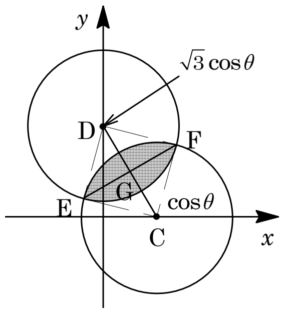
①より，$a=\cos\theta$から，$x=\cos\theta+r\cos\varphi$，$y=r\sin\varphi$，$z=\cos\theta$

これより，立体V_Aの切り口は，平面$z=\cos\theta$上で，$(x-\cos\theta)^2+y^2=r^2$となり，中心$\mathrm{C}(\cos\theta,\ 0,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

同様に，②より，$b=\cos\theta$から，$x=r\cos\varphi$，$y=\sqrt{3}\cos\theta+r\sin\varphi$，$z=\cos\theta$

これより，立体V_Bの切り口は，平面$z=\cos\theta$上で，$x^2+(y-\sqrt{3}\cos\theta)^2=r^2$となり，中心$\mathrm{D}(0,\ \sqrt{3}\cos\theta,\ \cos\theta)$，半径 1 の円の周および内部である。

よって，V_AとV_Bの共通部分 V を，平面$z=\cos\theta$によって切断した切り口は，下図の網点部となる。



ここで，2 円の交点を E, F とし，線分 EF と CD の交点を G とおくと，中心間距離 $\mathrm{CD}=2\cos\theta$ となることより，$\mathrm{CG}=\mathrm{DG}=\cos\theta$ である。

すると，$\angle\mathrm{ECG}=\angle\mathrm{FCG}=\angle\mathrm{EDG}=\angle\mathrm{FDG}=\theta$ となり，網点部の面積を S とすると，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta-\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin2\theta\right)=2\theta-\sin2\theta$$

(2)　立体 V の体積 U は，$U=\int_0^1 S\,dz$ と表せ，$z=\cos\theta$ とおくと，$dz=-\sin\theta\,d\theta$ となる。

また，$z=0\to1$ のとき $\theta=\frac{\pi}{2}\to0$ である。

$$U=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(2\theta-\sin2\theta)(-\sin\theta)d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(2\theta\sin\theta-\sin2\theta\sin\theta)d\theta$$

ここで，$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\theta\sin\theta\,d\theta=-\Big[\theta\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta=\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=1$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin2\theta\sin\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos3\theta-\cos\theta)d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}\sin3\theta-\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$
$$=-\frac{1}{6}\cdot(-1)+\frac{1}{2}\cdot1=\frac{2}{3}$$

以上より，立体 V の体積は，$U=2-\frac{2}{3}=\frac{4}{3}$ である。

コメント

断面積を積分することによって体積を求める問題です。数式的に処理をして断面図を描きましたが，図形的に意味を考える方がすばやく結論に到達します。ただ，プロセスの述べ方が難ですが。

問　題

半径 3 の球T_1と半径 1 の球T_2が，内接した状態で空間に固定されている。半径 1 の球Sが次の条件(A), (B)を同時に満たしながら動く。

(A)　SはT_1の内部にあるかT_1に内接している。

(B)　SはT_2の外部にあるかT_2に外接している。

Sの中心が存在しうる範囲をDとするとき，立体Dの体積を求めよ。　[2010]

解答例

条件より，球T_1，T_2の中心をそれぞれ$(0,\ 0,\ 0)$，$(2,\ 0,\ 0)$とすると，

$$T_1 : x^2+y^2+z^2=9,\quad T_2 : (x-2)^2+y^2+z^2=1$$

また，球Sの中心を$(x_0,\ y_0,\ z_0)$とおくと，

$$S : (x-x_0)^2+(y-y_0)^2+(z-z_0)^2=1$$

さて, SはT_1の内部にあるかT_1に内接していることより,

$$\sqrt{{x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \leqq 3-1,\quad {x_0}^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①$$

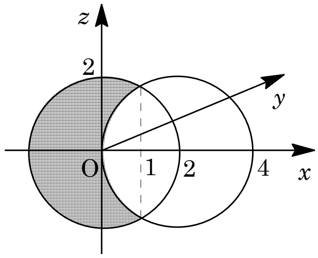
また, SはT_2の外部にあるかT_2に外接していることより,

$$\sqrt{(x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2} \geqq 1+1,\quad (x_0-2)^2+{y_0}^2+{z_0}^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②$$

よって, Sの中心が存在しうる範囲Dは，①②より，

$$x^2+y^2+z^2 \leqq 4 \cdots\cdots\cdots ①'$$

$$(x-2)^2+y^2+z^2 \geqq 4 \cdots\cdots\cdots ②'$$



ここで，平面$x=k$ $(0 \leqq k \leqq 1)$で①′ ②′の共通範囲を切断すると，

$$y^2+z^2 \leqq 4-k^2 \cdots\cdots\cdots ①'$$

$$y^2+z^2 \geqq 4-(k-2)^2 \cdots\cdots\cdots ②'$$

これより，切り口は，x軸上に中心があり，外径が$\sqrt{4-k^2}$，内径が$\sqrt{4-(k-2)^2}$のドーナツ形であり，その面積$S(k)$は，

$$S(k)=\pi(4-k^2)-\pi\{4-(k-2)^2\}=\pi(4-4k)$$

これより，立体Dの体積Vは，

$$V=\frac{1}{2}\cdot\frac{4}{3}\pi\cdot 2^3+\int_0^1 S(k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+\int_0^1 \pi(4-4k)\,dk=\frac{16}{3}\pi+2\pi=\frac{22}{3}\pi$$

コメント

平面図形では頻出の内接と外接を題材にした問題です。対象が空間図形でも同じように考えることができます。なお，球面の方程式などについては「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

t を負の実数とし, xy 平面上で曲線 $y=2^{2x+2t}$ と $y=2^{x+3t}$ および y 軸で囲まれる部分を D とする。

(1) D を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ を求めよ。

(2) t が負の実数の範囲を動くとき, $V(t)$ の最大値を求めよ。　[2008]

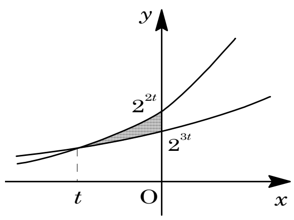
解答例

(1) 2 曲線 $y=2^{2x+2t}$ ……①と $y=2^{x+3t}$ ……②の交点は,

$$2^{2x+2t}=2^{x+3t},\ 2x+2t=x+3t$$

よって, $x=t$ となる。

そこで, 2 曲線①と②および y 軸で囲まれる部分を, x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 $V(t)$ は, $t<0$ から,



$$V(t)=\pi\int_t^0 2^{2(2x+2t)}dx-\pi\int_t^0 2^{2(x+3t)}dx=\frac{\pi}{\log 2}\Big[\frac{1}{4}\cdot 2^{4x+4t}-\frac{1}{2}\cdot 2^{2x+6t}\Big]_t^0$$

$$=\frac{\pi}{\log 2}\Big\{\frac{1}{4}(2^{4t}-2^{8t})-\frac{1}{2}(2^{6t}-2^{8t})\Big\}=\frac{\pi}{4\log 2}(2^{8t}-2\cdot 2^{6t}+2^{4t})$$

(2) $V'(t)=\dfrac{\pi}{4\log 2}(8\cdot 2^{8t}\log 2-12\cdot 2^{6t}\log 2+4\cdot 2^{4t}\log 2)$

$$=2\cdot 2^{8t}-3\cdot 2^{6t}+2^{4t}$$
$$=2^{4t}(2\cdot 2^{4t}-3\cdot 2^{2t}+1)$$
$$=2^{4t}(2\cdot 2^{2t}-1)(2^{2t}-1)$$

t	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0
$V'(t)$	＋	0	－	
$V(t)$	↗		↘	

すると, $t<0$ から $2^{2t}-1<0$ となり, $V(t)$ の増減は右表のようになる。これより, $V(t)$ の最大値は,

$$V\Big(-\frac{1}{2}\Big)=\frac{\pi}{4\log 2}(2^{-4}-2\cdot 2^{-3}+2^{-2})=\frac{\pi}{64\log 2}$$

コメント

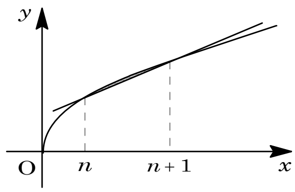
とりたてて工夫もせずに解いています。ただ, $t<0$ には要注意です。

問　題

n を自然数とする。関数 $y=\sqrt{x}$ のグラフを C とし，C 上の 2 点 $(n,\ \sqrt{n})$ と $(n+1,\ \sqrt{n+1})$ を通る直線を l とする。C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。このとき $\lim\limits_{n\to\infty} n^aV=b$ を満たす正の数 $a,\ b$ を求めよ。 [2007]

解答例

$n\leqq x\leqq n+1$ において，$C: y=\sqrt{x}$ と x 軸にはさまれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V_1 とすると，



$$V_1=\pi\int_n^{n+1}(\sqrt{x})^2dx=\pi\Big[\frac{x^2}{2}\Big]_n^{n+1}$$
$$=\frac{\pi}{2}\{(n+1)^2-n^2\}=\frac{\pi}{2}(2n+1)$$

さて，直線 l の方程式は，

$$y-\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(x-n)$$

ここで, x 軸との交点を $(p,\ 0)$ とおくと,

$$-\sqrt{n}=(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})(p-n),\ \ n-p=\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}=\sqrt{n(n+1)}+n$$

$n\leqq x\leqq n+1$ において，l と x 軸にはさまれた部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体は円錐台となり，その体積を V_2 とすると，

$$V_2=\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n+1})^2(n-p+1)-\frac{1}{3}\pi(\sqrt{n})^2(n-p)$$
$$=\frac{1}{3}\pi\{(n+1)(n-p+1)-n(n-p)\}$$
$$=\frac{1}{3}\pi(n+n-p+1)=\frac{1}{3}\pi(2n+\sqrt{n(n+1)}+1)$$

よって，C と l で囲まれた部分を x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積 V は,

$$V=V_1-V_2=\frac{\pi}{6}\{3(2n+1)-2(2n+\sqrt{n(n+1)}+1)\}$$
$$=\frac{\pi}{6}\{2n+1-2\sqrt{n(n+1)}\}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{(2n+1)^2-4n(n+1)}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}$$
$$=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}$$
$$n^aV=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{n^a}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}$$

すると，$0<a<1$ のとき $n^aV\to 0\ (n\to\infty)$，$a>1$ のとき $n^aV\to\infty\ (n\to\infty)$ となり，条件に反する。よって，$a=1$ となり，このとき，

$$b=\lim_{n\to\infty}nV=\lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{6}\cdot\frac{n}{2n+1+2\sqrt{n(n+1)}}=\frac{\pi}{6}\cdot\frac{1}{2+2}=\frac{\pi}{24}$$

コメント

回転体の体積に関する基本問題です。極限値を求める部分も容易です。

問　題

$f(x)=x^3-x$ とし, t を実数とする。xy 平面において, 曲線 $y=f(x)$ を C_1 とし, 直線 $x=t$ に関して C_1 と対称な曲線 $y=f(2t-x)$ を C_2 とする。

(1)　C_1 と C_2 が 3 点で交わるとき, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき, C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S の最大値を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-x$ のとき, $f(2t-x)=(2t-x)^3-(2t-x)$

すると, 2 曲線 $C_1: y=f(x)$ と $C_2: y=f(2t-x)$ の交点の x 座標は,

$$x^3-x=(2t-x)^3-(2t-x),\quad x^3-(2t-x)^3-x+(2t-x)=0$$

$$(x-2t+x)\{x^2+x(2t-x)+(2t-x)^2-1\}=0$$

$$(x-t)(x^2-2tx+4t^2-1)=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって, $x=t$, $t\pm\sqrt{1-3t^2}$

すると, C_1 と C_2 が 3 点で交わる条件は, $(*)$が異なる 3 実数解をもつことより,

$$1-3t^2>0,\quad -\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$$

(2)　$\alpha=t-\sqrt{1-3t^2}$, $\beta=t+\sqrt{1-3t^2}$ とおくと, $\alpha<t<\beta$ であり,

$$f(x)-f(2t-x)=2(x-t)(x-\alpha)(x-\beta)$$

ここで, C_1 と C_2 で囲まれた部分について, $\alpha\leqq x\leqq t$, $t\leqq x\leqq\beta$ の面積を, それぞれ S_1, S_2 とおくと,

$$S_1=2\int_{\alpha}^{t}(x-t)(x-t+\sqrt{1-3t^2})(x-t-\sqrt{1-3t^2})\,dx$$

$$=2\int_{\alpha-t}^{0}u(u+\sqrt{1-3t^2})(u-\sqrt{1-3t^2})\,du\quad(u=x-t)$$

$$=2\int_{-\sqrt{1-3t^2}}^{0}\{u^3-(1-3t^2)u\}\,du=2\Big[\frac{u^4}{4}-(1-3t^2)\frac{u^2}{2}\Big]_{-\sqrt{1-3t^2}}^{0}$$

$$=2\Big\{-\frac{1}{4}(1-3t^2)^2+\frac{1-3t^2}{2}(1-3t^2)\Big\}=\frac{1}{2}(1-3t^2)^2$$

$$S_2=-2\int_{t}^{\beta}(x-t)(x-t+\sqrt{1-3t^2})(x-t-\sqrt{1-3t^2})\,dx=\frac{1}{2}(1-3t^2)^2$$

すると, C_1 と C_2 で囲まれた部分の面積 S は, $S=S_1+S_2=(1-3t^2)^2$

よって, $-\frac{1}{\sqrt{3}}<t<\frac{1}{\sqrt{3}}$ から, $t=0$ のとき S は最大値 1 をとる。

コメント

C_1 と C_2 の交点の 1 つが $x=t$ 上にあることは明らかです。

問　題

曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ の共有点のうち，x 座標が正のものを，x 座標が小さいものから順に A_1，A_2，A_3，…とし，第 n 番目の点を A_n とする。以下の問いに答えよ。

(1) 点 A_n の x 座標を求めよ。また，点 A_n において，曲線 $y=x\sin^2 x$ と直線 $y=x$ は接していることを示せ。

(2) 線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線 $y=x\sin^2 x$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

解答例

(1) $y=x\sin^2 x$ ……①，$y=x$ ……②に対して, x 座標が正の共有点は,

$$x\sin^2 x=x\,,\ \sin^2 x=1\,,\ \sin x=\pm 1$$

これより，$x_1=\dfrac{\pi}{2}$，$x_{n+1}=x_n+\pi$ となり，$x_n=\dfrac{\pi}{2}+(n-1)\pi=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$

さて，①より，$y'=\sin^2 x+2x\sin x\cos x=\sin^2 x+x\sin 2x$

そこで，$x=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$ において，

$$y'=\sin^2\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\sin(2n-1)\pi=(\pm 1)^2=1$$

よって，曲線①と直線②は，点 A_n において接している。

(2) $0\leqq\sin^2 x\leqq 1$ から，$x>0$ において $x\sin^2 x\leqq x$ となり，線分 $\mathrm{A}_n\mathrm{A}_{n+1}$ と曲線①で囲まれる部分の面積 S は,

$$S=\int_{x_n}^{x_{n+1}}(x-x\sin^2 x)\,dx=\int_{x_n}^{x_{n+1}}x\cos^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}}x(1+\cos 2x)\,dx$$

ここで, (1)より，$x_n=\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi$，$x_{n+1}=\left(n+\dfrac{1}{2}\right)\pi$ なので,

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}x\,dx=\frac{1}{2}({x_{n+1}}^2-{x_n}^2)=\frac{1}{2}(x_{n+1}+x_n)(x_{n+1}-x_n)=\frac{1}{2}\cdot 2n\pi\cdot\pi=n\pi^2$$

$$\int_{x_n}^{x_{n+1}}x\cos 2x\,dx=\left[\frac{1}{2}x\sin 2x\right]_{x_n}^{x_{n+1}}-\frac{1}{2}\int_{x_n}^{x_{n+1}}\sin 2x\,dx$$

$$=\frac{1}{2}(x_{n+1}\sin 2x_{n+1}-x_n\sin 2x_n)+\frac{1}{4}\Big[\cos 2x\Big]_{x_n}^{x_{n+1}}=\frac{1}{4}(\cos 2x_{n+1}-\cos 2x_n)$$

$$=\frac{1}{4}(\cos(2n+1)\pi-\cos(2n-1)\pi)=\frac{1}{4}(-1+1)=0$$

したがって，$S=\dfrac{1}{2}n\pi^2$ である。

コメント

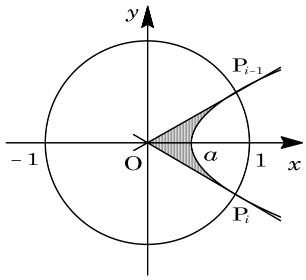
微積分の総合問題です。曲線①と直線②の位置関係は明らかなので，図を描くまでもありません。

問　題

n を 3 以上の自然数とする。点 O を中心とする半径 1 の円において，円周を n 等分する点 P_0，P_1，…，P_{n-1} を時計回りにとる。各 $i=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接するような放物線を C_i とする。ただし，$\mathrm{P}_n=\mathrm{P}_0$ とする。放物線 C_1，C_2，…，C_n によって囲まれる部分の面積を S_n とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。 [2004]

解答例

$1\leqq i\leqq n$ として，右図のように，$\mathrm{P}_{i-1}\left(\cos\dfrac{\pi}{n},\ \sin\dfrac{\pi}{n}\right)$，$\mathrm{P}_i\left(\cos\dfrac{\pi}{n},\ -\sin\dfrac{\pi}{n}\right)$とおく。



また，直線 OP_{i-1}，OP_i とそれぞれ点 P_{i-1}，P_i で接する放物線を $y^2=4p(x-a)\ (p>0)$ とすると，点 P_{i-1} における接線は，$y\sin\dfrac{\pi}{n}=2p\left(x-a+\cos\dfrac{\pi}{n}-a\right)$

$$y=\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}}x+2p\cdot\frac{\cos\frac{\pi}{n}-2a}{\sin\frac{\pi}{n}}\cdots\cdots\cdots①$$

また，直線 OP_{i-1} は，$y=x\tan\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots②$

①と②が一致することより，

$$\frac{2p}{\sin\frac{\pi}{n}}=\tan\frac{\pi}{n}\cdots\cdots\cdots③,\quad \cos\frac{\pi}{n}-2a=0\cdots\cdots\cdots④$$

③より $p=\dfrac{1}{2}\tan\dfrac{\pi}{n}\sin\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots⑤$，④より $a=\dfrac{1}{2}\cos\dfrac{\pi}{n}\cdots\cdots⑥$となる。

このとき，直線 OP_{i-1}，OP_i と放物線によって囲まれた図形の面積を T_i とおくと，

$$T_i=2\left\{\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}-\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}y\,dx\right\}$$

ここで，$n\geqq3$ なので，$0<\dfrac{\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{3}$ となり，⑤⑥より，

$$\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}y\,dx=\int_a^{\cos\frac{\pi}{n}}2\sqrt{p}\sqrt{x-a}\,dx=2\sqrt{p}\cdot\frac{2}{3}\Big[(x-a)^{\frac{3}{2}}\Big]_a^{\cos\frac{\pi}{n}}$$

$$=\frac{4}{3}\sqrt{p}\left(\cos\frac{\pi}{n}-a\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\sqrt{\tan\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}}\left(\cos\frac{\pi}{n}-\frac{1}{2}\cos\frac{\pi}{n}\right)^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{4}{3\sqrt{2}}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}\cos\frac{\pi}{n}\sqrt{\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$$

よって，$T_i = \cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} - \frac{2}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n} = \frac{1}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$

すると，$S_n = nT_i = \frac{n}{3}\cos\frac{\pi}{n}\sin\frac{\pi}{n}$ より，$\lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\frac{\pi}{3}\cos\frac{\pi}{n}\cdot\frac{\sin\frac{\pi}{n}}{\frac{\pi}{n}} = \frac{\pi}{3}$

コメント

ひねりはあるものの，よく見かける問題です。

問　題

平面上に双曲線 $C: y = \dfrac{1}{x}$ を考える。$a,\ b,\ c,\ d$ を $d < c < 0 < b < a$ を満たす数とし，曲線 C 上の 4 点 P, Q, R, S をそれぞれ x 座標が a, b, c, d であるような点としたとき，四角形 PQSR が長方形になっているとする。

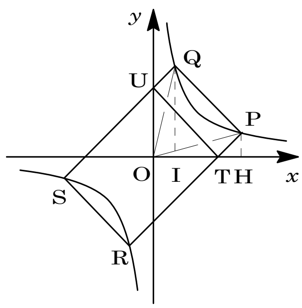
(1) b, c, d を a を用いて表せ。

(2) 線分 PR と x 軸との交点を T，線分 QS と y 軸との交点を U とするとき，線分 TU と曲線 C が共通点をもたないような a の値の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲にあるとき，3 線分 PT，TU，UQ と曲線 C で囲まれた部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) a が(2)の範囲を動くとき，$S(a)$ の増減を調べ，その最大値を求めよ。　[2002]

解答例



(1) $\mathrm{P}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{Q}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{R}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$，$\mathrm{S}\left(d,\ \dfrac{1}{d}\right)$とおくと，四角形 PQSR が長方形なので，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}} = \overrightarrow{\mathrm{RS}}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{PR}} = 0$ である。

$$b - a = d - c \cdots\cdots①,\quad \frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{1}{d} - \frac{1}{c} \cdots\cdots②$$

$$(b-a)(c-a) + \left(\frac{1}{b} - \frac{1}{a}\right)\left(\frac{1}{c} - \frac{1}{a}\right) = 0 \cdots\cdots\cdots③$$

②より $\dfrac{a-b}{ab} = \dfrac{c-d}{cd}$ となり，①を代入して，

$$ab = cd \cdots\cdots\cdots④$$

③より $(b-a)(c-a) + \dfrac{a-b}{ab} \cdot \dfrac{a-c}{ac} = 0$

$(a-b)(a-c) > 0$ より，$1 + \dfrac{1}{a^2bc} = 0$，$a^2bc + 1 = 0 \cdots\cdots\cdots⑤$

①より $d = b - a + c$ として，④に代入すると $ab = c(b - a + c)$

$$b(a-c) + c(a-c) = 0,\ (b+c)(a-c) = 0$$

$a - c > 0$ より，$b + c = 0$，$c = -b \cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥より $b - a = d + b$，$d = -a$

⑤⑥より $a^2b^2 = 1$ で $0 < b < a$ より $ab = 1$，$b = \dfrac{1}{a}$

さらに，これを⑥に代入して，$c = -\dfrac{1}{a}$

(2) (1)より，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{a},\ a\right)$，$\mathrm{R}\left(-\dfrac{1}{a},\ -a\right)$，$\mathrm{S}\left(-a,\ -\dfrac{1}{a}\right)$となるので，P と Q，R と S は直線 $y = x$ に関して対称になっており，$b = \dfrac{1}{a} < a$ から $1 < a$ である。

ここで，直線PR : $y-\frac{1}{a}=x-a$ と x 軸との交点は，$y=0$ として $x=a-\frac{1}{a}$ から $\mathrm{T}\left(a-\frac{1}{a},\ 0\right)$ となる。また，点 U は点 T と直線 $y=x$ に関して対称なので，$\mathrm{U}\left(0,\ a-\frac{1}{a}\right)$ である。

さて，線分 TU と曲線 C : $y=\frac{1}{x}$ が共通点をもたないのは，線分 TU の中点 $\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2a},\ \frac{a}{2}-\frac{1}{2a}\right)$ が，領域 $xy<1$ に存在することである。

$$\left(\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}\right)^2<1,\ -1<\frac{a}{2}-\frac{1}{2a}<1,\ -2a<a^2-1<2a$$

$a^2+2a-1>0$ より $a<-1-\sqrt{2},\ -1+\sqrt{2}<a$ となり，$a^2-2a-1<0$ より $1-\sqrt{2}<a<1+\sqrt{2}$ となる。

$1<a$ と合わせて共通範囲を求めると，$1<a<1+\sqrt{2}$

(3) 点 P, Q から x 軸に下ろした垂線の足を，それぞれ H, I とする。

すると，(1)より△OHP と△OIQ の面積は等しいので，線分 OP，OQ と曲線 C によって囲まれた部分の面積は，

$$\triangle\mathrm{OIQ}+\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx-\triangle\mathrm{OHP}=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx=\left[\log x\right]_{\frac{1}{a}}^{a}=\log a-\log\frac{1}{a}=2\log a$$

よって，
$$\begin{aligned}S(a)&=2\log a+\triangle\mathrm{OUQ}+\triangle\mathrm{OTP}-\triangle\mathrm{OTU}\\&=2\log a+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)\frac{1}{a}-\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2\\&=2\log a-\frac{1}{2}a^2-\frac{3}{2a^2}+2\end{aligned}$$

(4) $S'(a)=\frac{2}{a}-a+\frac{3}{a^3}=-\frac{(a^2-3)(a^2+1)}{a^3}$

a	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	$1+\sqrt{2}$
$S'(a)$		＋	0	－	
$S(a)$		↗		↘	

右表より，$a=\sqrt{3}$ のとき $S(a)$ は最大値をとる。

$$S(\sqrt{3})=2\log\sqrt{3}-\frac{1}{2}\cdot 3-\frac{3}{2\cdot 3}+2=\log 3$$

コメント

双曲線を原点のまわりに45°回転すれば，長方形が直線 $y=x$ に関して対称であることは明らかです。なお，(3)の解は，線分 OP，OQ と曲線 C によって囲まれた部分の面積が簡単に求められることを利用しています。

問　題

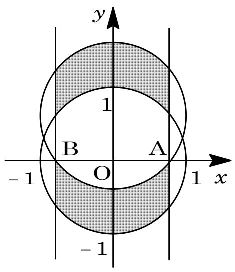
平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円C_1と点$\mathrm{P}(0,\ \sin\alpha)$を中心とする半径 1 の円$C_2$がある。ただし$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$とする。円$C_2$と$x$軸との交点を A, B とし, A, B を通り y 軸と平行な直線をそれぞれl_{A}，l_{B}とする。2 直線l_{A}，l_{B}ではさまれた領域の部分で, 円C_1の外部で円C_2の内部であるものをD_1, 円C_2の外部で円C_1の内部であるものをD_2とする。いま, D_1，D_2をそれぞれ x 軸のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を$V_1(\alpha)$，$V_2(\alpha)$とする。

(1)　$V_1(\alpha)$，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$をそれぞれαを用いて表せ。

(2)　αが$0<\alpha<\frac{\pi}{2}$の範囲を動くとき，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)$の最大値を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$C_1: x^2+y^2=1$ ……①，$C_2: x^2+(y-\sin\alpha)^2=1$ ……②



に対して,

②と x 軸との交点は, $y=0$ として,

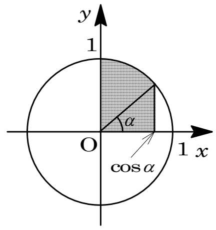
$$x^2=1-\sin^2\alpha=\cos^2\alpha,\ x=\pm\cos\alpha$$

よって，$l_{\mathrm{A}}: x=\cos\alpha$，$l_{\mathrm{B}}; x=-\cos\alpha$

また, ①より $y=\pm\sqrt{1-x^2}$，②より $y=\sin\alpha\pm\sqrt{1-x^2}$ となるので,

$$V_1(\alpha)=\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\pi(\sin\alpha+\sqrt{1-x^2})^2dx-\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\pi(1-x^2)dx$$

$$=2\pi\int_0^{\cos\alpha}(\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sqrt{1-x^2})dx$$



ここで, 右図の網点部の面積から,

$$\int_0^{\cos\alpha}\sqrt{1-x^2}\,dx=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{1}{2}\cdot1^2\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$$

$$=\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}$$

$$V_1(\alpha)=2\pi\sin^2\alpha\cos\alpha+4\pi\sin\alpha\left(\frac{1}{2}\cos\alpha\sin\alpha+\frac{\pi}{4}-\frac{\alpha}{2}\right)$$

$$=4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha+\pi^2\sin\alpha-2\pi\alpha\sin\alpha$$

$$V_2(\alpha)=\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\pi(1-x^2)dx-\int_{-\cos\alpha}^{\cos\alpha}\pi(\sin\alpha-\sqrt{1-x^2})^2dx$$

$$=2\pi\int_0^{\cos\alpha}(-\sin^2\alpha+2\sin\alpha\sqrt{1-x^2})dx$$

したがって，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)=2\pi\int_0^{\cos\alpha}2\sin^2\alpha\,dx=4\pi\sin^2\alpha\cos\alpha$

(2)　(1)より，$V_1(\alpha)-V_2(\alpha)=4\pi(1-\cos^2\alpha)\cos\alpha=4\pi(\cos\alpha-\cos^3\alpha)$

ここで，$\cos\alpha = t$ とし，$0 < t < 1$ において $f(t) = t - t^3$ とおくと，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha) = 4\pi f(t)$ となり，

$$f'(t) = 1 - 3t^2 = (1 - \sqrt{3}t)(1 + \sqrt{3}t)$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$	$\searrow$	

右表より，$t = \dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき $f(t)$ は最大値 $\dfrac{2}{9}\sqrt{3}$ をとる。よって，$V_1(\alpha) - V_2(\alpha)$ の最大値は，$4\pi \cdot \dfrac{2}{9}\sqrt{3} = \dfrac{8}{9}\sqrt{3}\pi$ である。

コメント

積分の標準題です。計算も難しくなくホッとします。

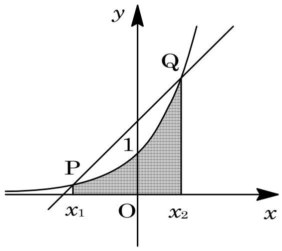
問　題

曲線$C: y=e^x$と直線$l: y=ax+b\ (a>0)$が 2 点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$と$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$で交わっている。ただし，$x_1<x_2$とする。

(1) $x_2-x_1=c$とおくとき，y_1とy_2をaとcを用いて表せ。

(2) P と Q の距離が 1 であるとする。曲線Cとx軸および 2 直線$x=x_1$，$x=x_2$とで囲まれた図形をx軸のまわりに 1 回転させて得られる回転体の体積を$V(a)$とおくとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a}$を求めよ。 [1999]

解答例



(1) $C: y=e^x$が 2 点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$を通るので，

$y_1=e^{x_1}$，$y_2=e^{x_2}$より，

$$\frac{y_2}{y_1}=e^{x_2-x_1}=e^c\cdots\cdots\cdots①$$

$l: y=ax+b$が 2 点$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$を通るので，$y_1=ax_1+b$，$y_2=ax_2+b$より，

$$y_2-y_1=a(x_2-x_1)=ac\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(e^c-1)y_1=ac$，$y_1=\dfrac{ac}{e^c-1}$，$y_2=\dfrac{ace^c}{e^c-1}$

(2) 条件より，$\mathrm{PQ}=1$なので$(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2=1$

②より，$c^2+a^2c^2=1$，$c^2(1+a^2)=1\cdots\cdots\cdots③$

$a>0$，$c>0$より，$a=\dfrac{\sqrt{1-c^2}}{c}\cdots\cdots\cdots④$

ここで, (1)の結果から,

$$V(a)=\int_{x_1}^{x_2}\pi(e^x)^2dx=\frac{\pi}{2}(e^{2x_2}-e^{2x_1})=\frac{\pi}{2}({y_2}^2-{y_1}^2)$$

$$=\frac{\pi}{2}(y_2+y_1)(y_2-y_1)=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{ac(e^c+1)}{e^c-1}\cdot ac=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{a^2c^2(e^c+1)}{e^c-1}$$

$$\frac{V(a)}{a}=\frac{\pi}{2}\cdot\frac{ac^2(e^c+1)}{e^c-1}=\frac{\pi}{2}\cdot\sqrt{1-c^2}\cdot\frac{c}{e^c-1}(e^c+1)\ （④より）$$

$a\to\infty$のとき③より$c\to+0$となり，$\dfrac{e^c-1}{c}\to 1$から,

$$\lim_{a\to\infty}\frac{V(a)}{a}=\frac{\pi}{2}\cdot 1\cdot 1\cdot 2=\pi$$

コメント

(1)の誘導に乗れば, (2)の極限値はスムーズに求まります。

問　題

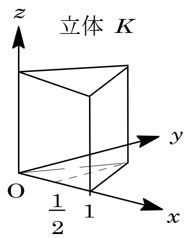
xyz 空間内に 2 つの立体 K と L がある。どのような a に対しても，平面 $z=a$ による立体 K の切り口は 3 点 $(0,\ 0,\ a)$，$(1,\ 0,\ a)$，$\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ a\right)$ を頂点とする正三角形である。また，どのような a に対しても，平面 $y=a$ による立体 L の切り口は 3 点 $(0,\ a,\ 0)$，$\left(0,\ a,\ \dfrac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\left(1,\ a,\ \dfrac{1}{\sqrt{3}}\right)$ を頂点とする正三角形である。

このとき，立体 K と L の共通部分の体積を求めよ。 [1999]

解答例

立体 K を表す不等式は，

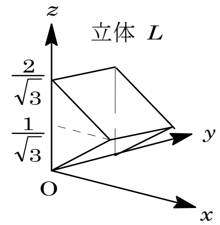
$$y \geqq 0,\ \ y \leqq \sqrt{3}x,\ \ y \leqq -\sqrt{3}(x-1) \cdots\cdots\cdots ①$$



立体 L を表す不等式は，

$$x \geqq 0,\ \ z \geqq \frac{1}{\sqrt{3}}x,\ \ z \leqq -\frac{1}{\sqrt{3}}x+\frac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ②$$

立体 K と L の共通部分を平面 $x=k$ で切った断面で考える。また，その面積を $S(k)$ とおく。



②より，$k \geqq 0$，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq z \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}k+\dfrac{2}{\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ③$

断面が存在する条件は，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}k \leqq -\dfrac{1}{\sqrt{3}}k+\dfrac{2}{\sqrt{3}}$ より，$k \leqq 1$ となるので，$0 \leqq k \leqq 1 \cdots\cdots\cdots ④$

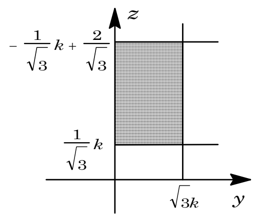
①より，$y \geqq 0$，$y \leqq \sqrt{3}k$，$y \leqq -\sqrt{3}(k-1) \cdots\cdots\cdots ⑤$

④⑤より，$\sqrt{3}k \leqq -\sqrt{3}(k-1) \Leftrightarrow 0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$，$\sqrt{3}k \geqq -\sqrt{3}(k-1) \Leftrightarrow \dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$

(i)　$0 \leqq k \leqq \dfrac{1}{2}$ のとき

③⑤より $x=k$ で切った断面は右図のようになる。

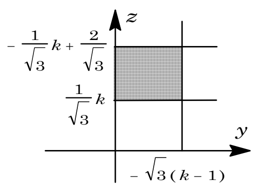
$$S(k)=\sqrt{3}k\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k+\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$
$$=-2k(k-1)$$



(ii)　$\dfrac{1}{2} \leqq k \leqq 1$ のとき

③⑤より $x=k$ で切った断面は右図のようになる。

$$S(k)=-\sqrt{3}(k-1)\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}k+\frac{2}{\sqrt{3}}-\frac{1}{\sqrt{3}}k\right)$$
$$=2(k-1)^2$$



以上より，立体 K と L の共通部分の体積 V は,

$$V=\int_0^{\frac{1}{2}}-2k(k-1)\,dk+\int_{\frac{1}{2}}^{1}2(k-1)^2\,dk=\left[-\frac{2}{3}k^3+k^2\right]_0^{\frac{1}{2}}+\frac{2}{3}\left[(k-1)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{1}$$

$$=-\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}+\frac{1}{4}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{4}$$

コメント

2 つの立体の共通部分の体積を求めるという以前からの頻出題の一つです。

問　題

座標空間において

平面 $z=\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ \sqrt{2})$ の円を C_1

平面 $z=-\sqrt{2}$ 上にある半径 $\sqrt{2}$，中心 $(0,\ 0,\ -\sqrt{2})$ の円を C_2

とする。また，空間内の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ に対し，

円 C_1 上を動く点 Q と P の距離の最小値を m

円 C_2 上を動く点 R と P の距離の最大値を M

とする。次の問いに答えよ。

(1) $r=\sqrt{x^2+y^2}$ とおくとき，m と M を r および z で表せ。

(2) $|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ という条件を満たす点 P の範囲を H とする。図形 H の体積を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $\mathrm{Q}(\sqrt{2}\cos\theta,\ \sqrt{2}\sin\theta,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{R}(\sqrt{2}\cos\varphi,\ \sqrt{2}\sin\varphi,\ -\sqrt{2})$ とおく。

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2&=(x-\sqrt{2}\cos\theta)^2+(y-\sqrt{2}\sin\theta)^2+(z-\sqrt{2})^2\\&=x^2+y^2-2\sqrt{2}(x\cos\theta+y\sin\theta)+2+(z-\sqrt{2})^2\\&=r^2-2\sqrt{2}r\sin(\theta+\alpha)+2+(z-\sqrt{2})^2\quad\left(\sin\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\alpha=\frac{y}{r}\right)\end{aligned}$$

$\sin(\theta+\alpha)=1$ のとき，PQ^2 は最小値 m^2 をとる。

$$m=\sqrt{r^2-2\sqrt{2}r+2+(z-\sqrt{2})^2}=\sqrt{(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2}$$

$$\begin{aligned}\mathrm{PR}^2&=(x-\sqrt{2}\cos\varphi)^2+(y-\sqrt{2}\sin\varphi)^2+(z+\sqrt{2})^2\\&=r^2-2\sqrt{2}r\sin(\varphi+\alpha)+2+(z+\sqrt{2})^2\quad\left(\sin\alpha=\frac{x}{r},\ \cos\alpha=\frac{y}{r}\right)\end{aligned}$$

$\sin(\varphi+\alpha)=-1$ のとき，PR^2 は最大値 M^2 をとる。

$$M=\sqrt{r^2+2\sqrt{2}r+2+(z+\sqrt{2})^2}=\sqrt{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2}$$

(2) $|M-2\sqrt{6}|\geqq m$ より，$(M-2\sqrt{6})^2\geqq m^2$，$M^2-4\sqrt{6}M+24\geqq m^2$

$$(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2-4\sqrt{6}M+24\geqq(r-\sqrt{2})^2+(z-\sqrt{2})^2$$

まとめて，$r+z+3\sqrt{2}\geqq\sqrt{3}M$

$r+z+3\sqrt{2}\geqq0$…… ①のもとで，両辺 2 乗すると，

$$r^2+z^2+18+2rz+6\sqrt{2}r+6\sqrt{2}z\geqq3\left\{(r+\sqrt{2})^2+(z+\sqrt{2})^2\right\}$$

まとめて，$r^2-rz+z^2-3\leqq0$……②

さてここで，$z=k$ での断面を考えると，

①は，$r+k+3\sqrt{2}\geqq0$…… ①′

②は，$r^2-kr+k^2-3\leqq0$……②′

不等式②′が解をもつのは，$k^2-4(k^2-3)\geqq 0$，すなわち$-2\leqq k\leqq 2$……③のときである。

③のもとで，$r\geqq 0$より①′はつねに満たされる。

ここで，②′の左辺を$f(r)$とおき，$f(r)=0$の解を$r=r_1$，r_2　$(r_1\leqq r_2)$とおく。

(i)　$f(0)\leqq 0$　$(k^2-3\leqq 0)$のとき

$r\geqq 0$より，②′の解は$0\leqq r\leqq r_2$

③を考慮して，$-\sqrt{3}\leqq k\leqq\sqrt{3}$のとき，$0\leqq r\leqq\dfrac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)$

(ii)　$f(0)\geqq 0$　$(k^2-3\geqq 0)$のとき

$r\geqq 0$より，②′の解は$k\geqq 0$のもとで$r_1\leqq r\leqq r_2$

③を考慮して，$\sqrt{3}\leqq k\leqq 2$のとき，$\dfrac{1}{2}\left(k-\sqrt{12-3k^2}\right)\leqq r\leqq\dfrac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)$

求めるHの体積をVとし，以下のようにV_1，V_2を定めると，$V=V_1+V_2$

$$V_1=\pi\int_{-\sqrt{3}}^{\sqrt{3}}\left\{\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)\right\}^2dk=\frac{2\pi}{4}\int_0^{\sqrt{3}}(k^2+12-3k^2)\,dk$$

$$=\pi\left[-\frac{k^3}{3}+6k\right]_0^{\sqrt{3}}=(-\sqrt{3}+6\sqrt{3})\pi=5\sqrt{3}\pi$$

$$V_2=\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}\left(\left\{\frac{1}{2}\left(k+\sqrt{12-3k^2}\right)\right\}^2-\left\{\frac{1}{2}\left(k-\sqrt{12-3k^2}\right)\right\}^2\right)dk$$

$$=\pi\int_{\sqrt{3}}^{2}k\sqrt{12-3k^2}\,dk=\sqrt{3}\pi\int_1^0(-t^2)\,dt=\frac{1}{3}\sqrt{3}\pi\quad\left(\sqrt{4-k^2}=t\text{とおく}\right)$$

以上より，$V=5\sqrt{3}\pi+\dfrac{1}{3}\sqrt{3}\pi=\dfrac{16}{3}\sqrt{3}\pi$

コメント

(1)は図形的に考えてもできますが，上の解では座標を用いてみました。計算はそんなに複雑ではありません。(2)では，平面$z=k$での切り口を考え，その断面積を求めて積分するという普通の方法をとりました。計算量はかなり多く，しかも無理不等式の同値変形など必要で，神経を消耗するものでした。なお，(2)の体積を円筒分割で求める解法もあります。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆