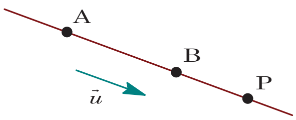
第１講　直線の方程式



直線は，異なる２点によって決定されます。この２点をA, B とし，直線 AB 上の任意の点を P とおきます。

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = t'\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$ （t' は実数）

点 P の始点を原点 O に変更すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}} = t'\overrightarrow{\mathrm{AB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t'\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$ （t' は実数）

ここで，直線 AB に平行なベクトルを $\vec{u}$ ($\vec{u} \neq \vec{0}$) とすると，$\vec{u}$ は $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ の実数倍なので，$t'\overrightarrow{\mathrm{AB}} = t\vec{u}$ とおくことができ，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{u}$$ （t は実数）

と表すことができます。この $\vec{u}$ を直線 AB の方向ベクトルといいます。

直線のパラメータ表示

点 A を通り，ベクトル $\vec{u}$ に平行な直線

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + t\vec{u}$$ （t は実数）

$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$，$\mathrm{A}(x_0,\ y_0,\ z_0)$，$\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$(x,\ y,\ z) = (x_0,\ y_0,\ z_0) + t(a,\ b,\ c)$$ （t は実数）………(＊)

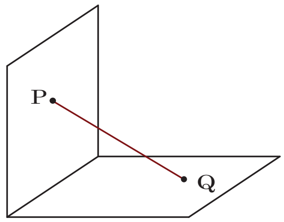
例題１　２点 $\mathrm{A}(4,\ 5,\ 2)$, $\mathrm{B}(10,\ 15,\ 4)$ を通る直線が xz 平面および, xy 平面と交わる点をそれぞれ P, Q とする。線分 PQ の長さを求めよ。

解　$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = (6,\ 10,\ 2) = 3(3,\ 5,\ 1)$ より，直線 AB のパラメータ表示は，

$$(x,\ y,\ z) = (4,\ 5,\ 2) + t(3,\ 5,\ 1)$$

$$x = 4 + 3t,\ y = 5 + 5t,\ z = 2 + t \cdots\cdots\text{①}$$

さて, xz 平面：$y = 0$ ……②, xy 平面：$z = 0$ ……③



①②より，$5 + 5t = 0$ から $t = -1$ となり，$x = 1$，$z = 1$ から $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 1)$ である。

①③より，$2 + t = 0$ から $t = -2$ となり，$x = -2$，$y = -5$ から $\mathrm{Q}(-2,\ -5,\ 0)$ である。

よって，$\mathrm{PQ} = \sqrt{(1+2)^2 + (0+5)^2 + (1-0)^2} = \sqrt{35}$

《注》t の値だけから，$\mathrm{PQ} = |-1-(-2)|\sqrt{3^2 + 5^2 + 1^2} = \sqrt{35}$ と計算できます。

© 電送数学舎　2005

次に, (＊)から, パラメータ t を消去して, x, y, z の関係式を一般的に求めます。

$$x = x_0 + at\ ,\quad y = y_0 + bt\ ,\quad z = z_0 + ct$$

$a \neq 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ のときは, $t = \dfrac{x - x_0}{a}$, $t = \dfrac{y - y_0}{b}$, $t = \dfrac{z - z_0}{c}$ より,

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

直線の方程式

点 $A(x_0,\ y_0,\ z_0)$ を通り, ベクトル $\vec{u} = (a,\ b,\ c)$ に平行な直線の方程式

$$\frac{x - x_0}{a} = \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c} \quad (abc \neq 0)$$

《注》 $a = 0$, $b \neq 0$, $c \neq 0$ のときは, $x = x_0$, $t = \dfrac{y - y_0}{b}$, $t = \dfrac{z - z_0}{c}$ より,

$$x = x_0\ ,\quad \frac{y - y_0}{b} = \frac{z - z_0}{c}$$

また, $a = 0$, $b = 0$, $c \neq 0$ のときは, $x = x_0$, $y = y_0$, $t = \dfrac{z - z_0}{c}$ より,

$$x = x_0,\quad y = y_0$$

この場合, 「z は任意」となりますが, この記述は省略します。なお, $x = x_0$ は x 軸に垂直な平面の方程式, $y = y_0$ は y 軸に垂直な平面の方程式を表します。この 2 つの方程式の連立として表されるということから, この直線は, 平面 $x = x_0$ と平面 $y = y_0$ の交線ということを意味します。

例題 2　2 直線 $l : \dfrac{x}{3} = \dfrac{y + 1}{-2} = z - 6$, $m : \dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z - 9}{4}$ の交点を求めよ。

解　$\dfrac{x}{3} = \dfrac{y + 1}{-2} = z - 6 = t$, $\dfrac{x + 1}{2} = \dfrac{y + 2}{-3} = \dfrac{z - 9}{4} = s$ とおくと,

$x = 3t$, $y = -2t - 1$, $z = t + 6$ ………①

$x = 2s - 1$, $y = -3s - 2$, $z = 4s + 9$ ………②

①②の方程式をすべて満たす x, y, z が l と m の交点の座標を表すので,

$3t = 2s - 1$ ……③, $-2t - 1 = -3s - 2$ ……④, $t + 6 = 4s + 9$ ……⑤

③④より, $s = t = -1$ となり, この値を⑤の両辺に代入すると,

$$-1 + 6 = 4 \times (-1) + 9$$

よって, ⑤は成立し, このとき①より, $x = -3$, $y = 1$, $z = 5$ である。

すなわち, 2 直線 l, m の交点の座標は $(-3,\ 1,\ 5)$ となる。

© 電送数学舎 2005

問題 1

直線l : $\dfrac{x-2}{2}=y=-z-2$ に原点 O から下ろした垂線の足 P の座標を求めよ。

問題 2

2 直線l : $\dfrac{x+2}{3}=y-1=\dfrac{z-1}{-2}$，$m$: $\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{3}=1-z$ は，ねじれの位置にあることを示せ。

Next

© 電送数学舎 2005

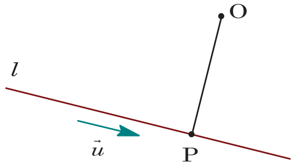
第１講　直線の方程式

問題１

$\dfrac{x-2}{2}=y=-z-2=t$ とおくと，直線 l 上の点 $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ は，

$$x=2t+2\,,\quad y=t\,,\quad z=-t-2$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(2t+2,\ t,\ -t-2)$



また，l の方向ベクトルは $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ であり，OP と直線 l は直交するので，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=0$ から，

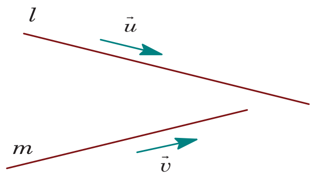
$$2(2t+2)+t-(-t-2)=0\,,\quad 6t+6=0$$

これより $t=-1$ となり，このとき $x=0\,,\ y=-1\,,\ z=-1$ である。

よって，垂線の足 P の座標は $(0,\ -1,\ -1)$ となる。

問題２

まず, 2 直線 l と m が交わると仮定する。



$l:\dfrac{x+2}{3}=y-1=\dfrac{z-1}{-2}=t$ とおくと,

$$x=3t-2\,,\quad y=t+1\,,\quad z=-2t+1\cdots\cdots\cdots①$$

$m:\dfrac{x-4}{2}=\dfrac{y+1}{3}=1-z=s$ とおくと,

$$x=2s+4\,,\quad s=3s-1\,,\quad z=-s+1\cdots\cdots\cdots②$$

すると，①②を満たす x, y, z が存在して,

$$3t-2=2s+4\cdots\cdots③,\quad t+1=3s-1\cdots\cdots④,\quad -2t+1=-s+1\cdots\cdots⑤$$

④⑤より $t=\dfrac{2}{5}\,,\quad s=\dfrac{4}{5}$ となるが，この値は③を満たさない。

よって，③④⑤を満たす $t,\ s$ は存在しない。すなわち，①②を満たす $x,\ y,\ z$ は存在せず, 2 直線 l と m は交わらない。

次に，直線 l, m の方向ベクトルを，それぞれ $\vec{u}\,,\ \vec{v}$ とすると,

$$\vec{u}=(3,\ 1,\ -2)\,,\quad \vec{v}=(2,\ 3,\ -1)$$

すると，$\vec{u}=k\vec{v}$ となる実数 k が存在しないので，$\vec{u}$ と $\vec{v}$ は平行でない。すなわち，2 直線 l と m は平行でない。

以上より，直線 l と m は交わらず，また平行でもないので，この 2 直線はねじれの位置にある。

© 電送数学舎 2005