1

解答解説のページへ

△ABC の外心を O, 重心を G とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とし,

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5,\ 4\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{BG}}+5\overrightarrow{\mathrm{CG}}=12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ を示せ。

(2) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$, $\vec{b}\cdot\vec{c}$ および $\vec{c}\cdot\vec{a}$ を求めよ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|$ の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

座標平面上の原点 O を中心とする半径 1 の円周 C 上の点を $\mathrm{A}(a,\ b)$ とし，$f(x)=(x-a)^2+b$ とする。点 $\mathrm{B}(0,\ -2)$ から放物線 $y=f(x)$ に引いた接線を l_1，l_2 とし，接点をそれぞれ $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ とする。ただし，$p<q$ である。放物線 $y=f(x)$ と 2 直線 l_1，l_2 とで囲まれた部分の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l_1 の方程式と接点 P の座標，および接線 l_2 の方程式と接点 Q の座標を a，b を用いて表せ。

(2)　面積 S を b を用いて表せ。

(3)　点 A が円周 C 上を動くとき，面積 S の最大値とそのときの点 A の座標 $(a,\ b)$ を求めよ。

3

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を次の条件(i)および(ii)を満たすように定める。

(i)　$a_1=0$，$a_2=3$

(ii)　3 以上の自然数 n に対して，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどの項の値とも等しくないときは$a_n=a_{n-1}-1$であり，第$(n-1)$項a_{n-1}の値が初項a_1から第$(n-2)$項a_{n-2}までのどれかの項の値と等しいときは$a_n=a_{n-1}+6$である。

次の問いに答えよ。

(1)　数列$\{a_n\}$の第 3 項から第 10 項までの各項の値を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の第 2015 項の値を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の初項から第 201 項までの和を求めよ。

4

解答解説のページへ

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)$ を次のように定める。

$$f_1(x)=1-\frac{x^2}{2},\ f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad(n\text{ が偶数のとき})$$

$$f_n(x)=1-\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt\quad(n\text{ が }3\text{ 以上の奇数のとき})$$

次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$0<x\leqq 1$ のとき $x-\dfrac{x^3}{3!}<\sin x<x$ が成り立つことを用いてよい。

(1)　関数 $f_2(x)$，$f_3(x)$ を求めよ。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式が成り立つことを示せ。$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，次の不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ がすべての自然数 m に対して成り立つことを示せ。

(4)　極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)$ を求めよ。

1

問題のページへ

(1)　△ABC の重心 G に対して $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\vec{g}$ とおくと，$4\overrightarrow{\mathrm{AG}}+3\overrightarrow{\mathrm{BG}}+5\overrightarrow{\mathrm{CG}}=12\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ から，

$$4(\vec{g}-\vec{a})+3(\vec{g}-\vec{b})+5(\vec{g}-\vec{c})=12\vec{g}$$

よって，$4\vec{a}+3\vec{b}+5\vec{c}=\vec{0}$ となる。

(2)　(1)から，$4\vec{a}+3\vec{b}=-5\vec{c}$ となり，$|4\vec{a}+3\vec{b}|=|5\vec{c}|$ から，

$$16|\vec{a}|^2+24\vec{a}\cdot\vec{b}+9|\vec{b}|^2=25|\vec{c}|^2$$

すると，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=5$ より，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{24}(25-16-9)\cdot5^2=0$

同様にして，$3\vec{b}+5\vec{c}=-4\vec{a}$ より，$9|\vec{b}|^2+30\vec{b}\cdot\vec{c}+25|\vec{c}|^2=16|\vec{a}|^2$ となり，

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{30}(16-9-25)\cdot5^2=-15$$

また，$4\vec{a}+5\vec{c}=-3\vec{b}$ より，$16|\vec{a}|^2+40\vec{c}\cdot\vec{a}+25|\vec{c}|^2=9|\vec{b}|^2$ となり，

$$\vec{c}\cdot\vec{a}=\frac{1}{40}(9-16-25)\cdot5^2=-20$$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ なので，(2)から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|^2=\frac{1}{9}|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2=\frac{1}{9}\left(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+2\vec{b}\cdot\vec{c}+2\vec{c}\cdot\vec{a}\right)$$

$$=\frac{1}{9}(25+25+25+0-30-40)=\frac{5}{9}$$

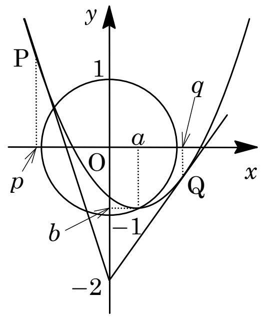
よって，$|\overrightarrow{\mathrm{OG}}|=\dfrac{\sqrt{5}}{3}$ である。

［解　説］

数分程度で片付く平面ベクトルの基本問題です。

2

問題のページへ



(1)　まず，点$(0,\ -2)$を通る直線を$y=mx-2$……①とおく。

$f(x)=(x-a)^2+b$のとき，放物線$y=f(x)$……②に対して，①②を連立すると，$(x-a)^2+b=mx-2$から，

$$x^2-(2a+m)x+a^2+b+2=0\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①②が接することより，

$$D=(2a+m)^2-4(a^2+b+2)=0$$

すると，$2a+m=\pm 2\sqrt{a^2+b+2}$となり，

$$m=2\left(-a\pm\sqrt{a^2+b+2}\right)$$

接点のx座標は，③より，$x=\dfrac{2a+m}{2}=\pm\sqrt{a^2+b+2}$（複号同順）

これより，$p=-\sqrt{a^2+b+2}$，$q=\sqrt{a^2+b+2}$となり，

$$l_1: y=2\left(-a-\sqrt{a^2+b+2}\right)x-2,\quad l_2: y=2\left(-a+\sqrt{a^2+b+2}\right)x-2$$

点Pのy座標$f(p)$，点Qのy座標$f(q)$は，それぞれl_1，l_2から，

$$f(p)=2\left(-a-\sqrt{a^2+b+2}\right)\left(-\sqrt{a^2+b+2}\right)-2$$
$$=2a\sqrt{a^2+b+2}+2(a^2+b+1)$$
$$f(q)=2\left(-a+\sqrt{a^2+b+2}\right)\left(\sqrt{a^2+b+2}\right)-2$$
$$=-2a\sqrt{a^2+b+2}+2(a^2+b+1)$$

よって，$\mathrm{P}\left(-\sqrt{a^2+b+2},\ 2a\sqrt{a^2+b+2}+2(a^2+b+1)\right)$

$\mathrm{Q}\left(\sqrt{a^2+b+2},\ -2a\sqrt{a^2+b+2}+2(a^2+b+1)\right)$

(2)　放物線$y=f(x)$と2直線l_1，l_2とで囲まれた部分の面積Sは，

$$S=\int_p^0 (x-p)^2dx+\int_0^q (x-q)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-p)^3\Big]_p^0+\frac{1}{3}\Big[(x-q)^3\Big]_0^q$$
$$=-\frac{1}{3}p^3+\frac{1}{3}q^3=\frac{1}{3}(q^3-p^3)=\frac{2}{3}\left(\sqrt{a^2+b+2}\right)^3$$

ここで，条件より，$a^2+b^2=1$なので，

$$S=\frac{2}{3}\left(\sqrt{1-b^2+b+2}\right)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{-b^2+b+3}\right)^3$$

(3)　(2)から，$S=\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{-\left(b-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{13}{4}}\right)^3$となり，$S$の最大値は$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{13}{4}\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{13}{12}\sqrt{13}$

である。このとき，$(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$となる。

［解　説］

放物線と接線に囲まれた図形の面積が題材の有名問題です。計算はやや難です。

3

問題のページへ

(1) 条件より，$a_1=0$，$a_2=3$，$a_3=3-1=2$，$a_4=2-1=1$，$a_5=1-1=0$，$a_6=0+6=6$，$a_7=6-1=5$，$a_8=5-1=4$，$a_9=4-1=3$，$a_{10}=3+6=9$

(2) (1)の結果から，$a_1=0$で，kを自然数とし，以下のように推測できる。

$$a_{4k-2}=3k,\ a_{4k-1}=3k-1,\ a_{4k}=3k-2,\ a_{4k+1}=3k-3\cdots\cdots\cdots(*)$$

推測$(*)$が正しいことを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $k=1$のとき　(1)より，成立している。

(ii) $k\leqq l$のとき　$(*)$が成立していると仮定する。

このとき，$a_1=0$から$a_{4l+1}=3l-3$までの値は，$3l$以下であり，しかもa_{4l+1}は$a_{4l-6}=a_{4(l-1)-2}=3(l-1)$と等しいので，

$$a_{4l+2}=3l-3+6=3l+3,\ a_{4(l+1)-2}=3(l+1)$$
$$a_{4l+3}=3l+3-1=3l+2,\ a_{4(l+1)-1}=3(l+1)-1$$
$$a_{4l+4}=3l+2-1=3l+1,\ a_{4(l+1)}=3(l+1)-2$$
$$a_{4l+5}=3l+1-1=3l,\ a_{4(l+1)+1}=3(l+1)-3$$

よって，$k=l+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，すべての自然数kに対して$(*)$は成立している。

したがって，$a_{2015}=a_{4\times504-1}=3\times504-1=1511$

(3) 初項から第201項までの和をS_{201}とおくと，$201=1+4\times50$から，

$$S_{201}=a_1+\sum_{k=1}^{50}(a_{4k-2}+a_{4k-1}+a_{4k}+a_{4k+1})$$
$$=0+\sum_{k=1}^{50}(3k+3k-1+3k-2+3k-3)=\sum_{k=1}^{50}(12k-6)=6\sum_{k=1}^{50}(2k-1)$$
$$=6\left(2\cdot\frac{1}{2}\cdot50\cdot51-50\right)=6\cdot50^2=15000$$

［解 説］

群数列の絡んだ漸化式の問題です。a_1を特別扱いして，a_2から 4 項ずつのグループで考えていくところが複雑です。

$\boxed{4}$ 問題のページへ

(1)　$f_1(x)=1-\dfrac{x^2}{2}$ から，条件より，$f_2(x)=\displaystyle\int_0^x f_1(t)\,dt=\int_0^x\Big(1-\dfrac{t^2}{2}\Big)dt=x-\dfrac{x^3}{6}$

$$f_3(x)=1-\int_0^x f_2(t)\,dt=1-\int_0^x\Big(t-\frac{t^3}{6}\Big)dt=1-\frac{x^2}{2}+\frac{x^4}{24}$$

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，$g(x)=f_1(x)-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}=1-\dfrac{x^2}{2}-\cos x+\dfrac{x^4}{4!}$ とおくと，

$$g'(x)=-x+\sin x+\frac{x^3}{3!}$$

すると，$x-\dfrac{x^3}{3!}\leqq\sin x$ より $g'(x)\geqq 0$ となり，$g(x)\geqq g(0)=0$

また，$h(x)=\dfrac{x^4}{4!}-f_1(x)+\cos x=\dfrac{x^4}{4!}-1+\dfrac{x^2}{2}+\cos x$ とおくと，

$$h'(x)=\frac{x^3}{3!}+x-\sin x$$

$\sin x\leqq x$ より $h'(x)\geqq 0$ となり，$h(x)\geqq h(0)=0$

以上より，$0\leqq x\leqq 1$ において，$-\dfrac{x^4}{4!}\leqq f_1(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^4}{4!}$

(3)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき，不等式 $-\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}\leqq f_{2m-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2m+2}}{(2m+2)!}$ ……(＊)が，すべての自然数 m に対して成り立つことを，数学的帰納法により証明する。

(i)　$m=1$ のとき　(2)より，成り立っている。

(ii)　$m=l$ のとき　$-\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}\leqq f_{2l-1}(x)-\cos x\leqq\dfrac{x^{2l+2}}{(2l+2)!}$ の成立を仮定すると，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l-1}(t)-\cos t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+2}}{(2l+2)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}\leqq f_{2l}(x)-\sin x\leqq\dfrac{x^{2l+3}}{(2l+3)!}$ となり，

$$-\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt\leqq\int_0^x\{f_{2l}(t)-\sin t\}dt\leqq\int_0^x\frac{t^{2l+3}}{(2l+3)!}dt$$

よって，$-\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq 1-f_{2l+1}(x)+\cos x-1\leqq\dfrac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$ となり，

$$-\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}\leqq f_{2l+1}(x)-\cos x\leqq\frac{x^{2l+4}}{(2l+4)!}$$

すると，$m=l+1$ のときも成り立っている。

(i)(ii)より，自然数 m に対して(＊)は成り立っている。

(4)　(＊)に $x=\dfrac{\pi}{6}$ を代入すると，

$$-\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}\leqq f_{2m-1}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{1}{(2m+2)!}\Big(\frac{\pi}{6}\Big)^{2m+2}$$

すると，$0<\dfrac{\pi}{6}<1$から，$m\to\infty$のとき，$f_{2m-1}\left(\dfrac{\pi}{6}\right)-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\to 0$となるので，

$$\lim_{m\to\infty} f_{2m-1}\left(\frac{\pi}{6}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

［解 説］

定積分と不等式，加えて極限を問うものです。記述量は多いですが，方針に迷いが生ずることはないでしょう。