《2018 入試対策》

千葉大学

理系数学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。　[2017]

2　座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。　[2014]

3　a, b を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

4　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1) 直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2) a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3) 連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

5 a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 $\mathrm{Q}\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$が，3 条件

(i)　$p>0,\ q>0$　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

6 座標平面上に点 A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 2)$をとる。線分 AB 上に点 P をとり，P から x 軸に下ろした垂線を PH, A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし，また P は A と異なるものとする。O を原点とし△OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき，通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。 [2009]

7 $a,\ t$ を実数とするとき，座標平面において，$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ で定義される図形 C を考える。

(1) すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし，点は円とみなさないものとする。

(2) $a=4$ とする。t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

(3) $a=6$ とする。t が $t>0$ であって，かつ C が円であるような範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。 [2006]

8 (1) 次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1)\geqq\log_{10}(-2x^2+2x+1)$$

(2) $x,\ y$ が(1)の不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。 [2005]

9 C は，2 次関数 $y=x^2$ のグラフを平行移動した放物線で，頂点が円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上にある。原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく。このとき，C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ。 [2001]

■ 図形と計量

1　1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を$1:2$に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1) AD の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

2　横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角θだけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積$S(\theta)$を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角θは 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。　[2012]

■ ベクトル

1　n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\cdots\mathrm{A}_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$ と線分 $\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4$ との交点 P は線分 $\mathrm{A}_1\mathrm{A}_3$ を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle\mathrm{PA}_2\mathrm{A}_3}{\triangle\mathrm{A}_1\mathrm{A}_2\mathrm{A}_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

$\boxed{2}$ 座標平面上にすべての内角が$180°$未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0以上の実数 $s,\ t,\ u$ が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を, 線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。 [2016]

$\boxed{3}$ 三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2) k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。 [2011]

$\boxed{4}$ △ABC は, 1 辺の長さが 1 の正三角形で, t は正の実数とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。直線 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり, $\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}$ を満たしている。正三角形△ADE の重心を G, 線分 BE の中点を M とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を計算せよ。

(2) t が正の実数全体を動くとき, △CGM の面積を最小にする t の値と, そのときの面積を求めよ。 [2010]

$\boxed{5}$ 平面上の△ABC において, 辺 AB を $4:3$ に内分する点を D, 辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし, 線分 AE と CD の交点を O とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$ とするとき, ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{p}$, $\vec{q}$ で表せ。

(2) 点 O が△ABC の外接円の中心になるとき, 3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。 [2008]

6　△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ とする。辺 AB 上に点 $\mathrm{P_1}$ をとる。ただし $\mathrm{P_1}$ は A, B とは異なるとする。$\mathrm{P_1}$ から辺 OB に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろす。次に，$\mathrm{Q_1}$ から辺 OA に垂線 $\mathrm{Q_1R_1}$ を下ろす。さらに，$\mathrm{R_1}$ から辺 AB に垂線 $\mathrm{R_1P_2}$ を下ろす。以下，同様の操作を続けて，点 P_n，Q_n，R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を定める。$\overrightarrow{\mathrm{AP}_n}=t_n(\vec{b}-\vec{a})$ により t_n $(0<t_n<1)$ を定める。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{BQ_1}}$ を t_1 と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2)　t_2 を t_1 を用いて表せ。

(3)　t_n を t_1 と n を用いて表せ。

(4)　$\mathrm{P_1}=\mathrm{P_2}$ となるような t_1 の値を求めよ。

(5)　$\mathrm{P_1}=\mathrm{P_2}$ のとき，$\triangle\mathrm{P_1Q_1R_1}$ の面積を求めよ。　[2006]

7　xyz 空間内に点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。　[2004]

8　R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき, R の面積を求めよ。　[2003]

9　四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BD}}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+2(\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}})=\vec{0}$ を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

(1)　直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2)　四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。　[2002]

10　四面体 OABC において $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{OC}=6$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ とする。OA を $t:1-t$ の比に内分する点を D, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2)　$\angle\mathrm{BDC}=\theta$ としたとき $\cos\theta$ を t の式で表せ。

(3)　三角形 BDC の面積の最小値を求めよ。　[1999]

11　平面上の三角形 OAB は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ をみたすとする。辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P とし，直線 OP に関して A と対称な点を Q, OQ の延長と AB の交点を R とおく。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(3)　△PQR の面積を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1　b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b, c がともに整数であることである。これを証明せよ。　[2015]

2　座標平面上に，円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と点 $\mathrm{Q}(1,\ 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3,\ 0)$ とし，x 軸上の点 P_2，P_3，…を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,\ 0)$ とする。

　点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき，3 点 Q，T_n，P_{n+1} は同一直線上にある。$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 T_1 の座標を求めよ。

(2)　点 P_2 の座標を求めよ。

(3)　点 T_n の座標を p_n の式で表せ。

(4)　点 P_n の座標を n の式で表せ。　[2014]

3　整数 p, q $(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0! = 1$ とする。

(1)　n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2)　m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

4　1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a) : (x+a-1)^2 + (y+a-1)^2 = 2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n = 1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n \geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2012]

5　放物線 $y = x^2$ と直線 $y = ax + b$ によって囲まれる領域を

$$D = \{(x,\ y) \mid x^2 \leqq y \leqq ax + b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a = 0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　a, b がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，a, b の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

6 以下の問いに答えよ。

(1) x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2) a, b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3) r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。 [2008]

7 n を奇数とする。

(1) n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2) n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3) n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。 [2007]

8 n を自然数とする。n 次多項式 $P_n(x)$ は, $n+1$ 個の整数 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して, $P_n(k)=2^k-1$ を満たす。

(1) $P_2(x)-P_1(x)$ および $P_3(x)-P_2(x)$ を因数分解せよ。

(2) $P_n(x)$ を求めよ。 [2004]

9 数列 $\{a_n\}$ は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i) $a_1=\dfrac{1}{2}$　　(ii) $n\geqq 2$ について, $a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし, $S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である。

(1) a_2 を求めよ。

(2) $n\geqq 2$ に対して, S_n を S_{n-1} で表せ。

(3) S_n を求めよ。

(4) $n\geqq 2$ に対して, a_n を求めよ。 [2000]

10 $a_1=1$, $a_n\neq 0$, $a_n=3(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ で与えられる数列 $\{a_n\}$ がある。ただし, S_n は $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和である。

(1) a_2 を求めよ。

(2) $\sqrt{S_n}$ を求めよ。

(3) a_n を求めよ。 [1999]

11　座標平面において，2 点 P，Q をそれぞれ直線 $x=-1$，$x=2$ 上の点とし，直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき，2 点 P，Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。　[1998]

■ 確率

1　1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

- 1 回目は，出た目が得点になる。
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1)　総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2)　p_6 を求めよ。

(3)　p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。　[2017]

2　数直線上の点 Q は，はじめは原点 $x=0$ にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が $x=a$ にあるとき，

- 出た目が 1 ならば $x=a$ にとどまる。
- 出た目が 2, 3 ならば $x=a+1$ へ動く。
- 出た目が 4, 5, 6 ならば $x=0$ に戻る（$a=0$ ならば動かない)。

(1)　整数 $a\geqq 0$ に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が $x=a$ にある確率を求めよ。

(2)　さいころを n 回投げたとき，Q が $x=0$ にある確率を求めよ。

(3)　さいころを n 回投げたとき，Q が $x=1$ にある確率を求めよ。　[2016]

3 コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

・コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

たとえば，コインを 3 回投げて(裏，表，裏)の順に出たときの得点は，$1+1+1=3$ より 3 点となる。また(裏，裏，表)の順に出たときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。コインの表と裏が出る確率はそれぞれ $\frac{1}{2}$ とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を $P_{n,m}$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2) $n\leqq m\leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。 [2015]

4 袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回（ただし $0\leqq A\leqq N$）取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ。

(2) N が 10 の倍数，すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n,\ 0)$，$p(10n,\ 1)$，…，$p(10n,\ 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0!=1$ とする。

(ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}\leqq 1$ を示す。 [2014]

5 　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし, 条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には, ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

6 　さいころを 7 回投げ, k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

7 　$k+1$ 個 $(k \geqq 1)$ の部屋 A_0, A_1, A_2, $\cdots$, A_k がある。千葉君はある部屋から, その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び, そこへ移動する。最初, 部屋 A_0 にいた千葉君が, n 回 $(n \geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。 [2011]

8 　数直線の原点上にある点が, 以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は, 正の方向に 1 移動し, 出た目が偶数の場合は, 負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の, 点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\neq 0$, $X(2)\neq 0$, $\cdots$, $X(5)\neq 0$ であって, かつ, $X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\neq 0$, $X(2)\neq 0$, $\cdots$, $X(9)\neq 0$ であって, かつ, $X(10)=0$ となる確率を求めよ。

[2010]

9　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 12 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X は平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X=n^2$ と表されることである。　[2009]

10　1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し，その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする。2 つが一致し, 1 つがこれと異なる場合には, 2 つの同じ値を X とし, 3 つとも同じならその値を X とする。

(1)　確率 $P(X \leqq k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(X=k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(3)　$P(X=k)$ が最大となる k の値はいくつか。　[2008]

■ 論証

1　n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

2 関数 $f(x)$ はすべての実数 x に対して定義され，すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき，以下の命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ。

(1) $x_1 < x_2$ を満たすすべての実数 x_1，x_2 に対して $f(x_1) < f(x_2)$ が成り立つとする。このとき，すべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ である。

(2) $f(0) = 0$ かつすべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty$ である。

(3) $f(0) = 0$ かつすべての実数 x に対して $f'(x) > 0$ ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt = +\infty$ である。 [2003]

3 次の問いに答えよ。

(1) $\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2) n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。 [2002]

■ 複素数

1 複素数平面上の点 $z\left(z \neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w = \dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1) 点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2) 点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。 [2017]

2 $z = \cos\dfrac{2\pi}{7} + i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1) $z + z^2 + z^3 + z^4 + z^5 + z^6$ を求めよ。

(2) $\alpha = z + z^2 + z^4$ とするとき，$\alpha + \overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3) $(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。 [2016]

3　a, b, c は実数とし，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

(1)　b, c を a を用いて表せ。

(2)　a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3)　b のとり得る値の範囲を求めよ。　[2011]

4　α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1)　複素数平面上で, z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき, w の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2)　複素数平面上で, z が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。　[2005]

5　$0<t<1$ とする。2 次方程式 $x^2-2tx+1=0$ の解の 1 つを α とする。複素数平面上の 4 点を O(0)，A(-1)，B(1)，P(α) とし，AB を直径とする円を C とする。点 A を通り OP に平行な直線が円 C と交わる A 以外の点を Q とする。

(1)　$|\alpha|$ を求めよ。

(2)　四角形 ABPQ の面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ。　[2004]

6　a を実数とし, z を複素数とする。複素数平面上で，a，z，z^2，z^3 が表す 4 点が，あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし，a と z^2 が表す頂点は対角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。　[2003]

7　次の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上で方程式 $|z-3i|=2|z|$ が表す図形を求め，図示せよ。

(2)　複素数 z が(1)で求めた図形から $z=i$ を除いた部分を動くとき，複素数 $w=\dfrac{z+i}{z-i}$ で表される点の軌跡を求め，図示せよ。　[2002]

8　iを虚数単位とし，複素数zに共役な複素数を$\overline{z}$で表す。

(1)　aを実数の定数とする。条件$1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$を満たす複素数平面上の点$z$の全体が直線であるとき, aの値を求めよ。

(2)　実軸上にない複素数αに対して，3 点0，1，αを通る複素数平面上の円の中心をβとする。このとき，βをαと$\overline{\alpha}$を用いて表せ。

(3)　α，βを(2)の複素数とする。点αが(1)の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$は一定であることを証明せよ。　[2001]

9　s, tは$0<s<1$, $0<t<1$を満たす実数とし，$\alpha=si$，$\beta=t$とおく。ここで，iは虚数単位である。複素数γは実部と虚部が正であるものとし，複素数平面上で，α，β，γは正三角形をなすとする。

(1)　$\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$を求めよ。

(2)　s, tが上記の範囲を動くとき，γが描く図形を図示せよ。　[2000]

10　複素数平面上に三角形ABCがあり，その頂点A, B, Cを表す複素数をそれぞれz_1，z_2，z_3とする。複素数wに対して，$z_1=wz_3$，$z_2=wz_1$，$z_3=wz_2$が成り立つとき，次の各問いに答えよ。

(1)　$1+w+w^2$の値を求めよ。

(2)　三角形ABCはどんな形の三角形か。

(3)　$z=z_1+2z_2+3z_3$の表す点をDとすると，三角形OBDはどんな形の三角形か。ただし, Oは原点である。　[1999]

11　複素数zに対して複素数wを$w=\dfrac{2iz}{z-\alpha}$で定める。ただし，αは0でない複素数の定数とする。

(1)　点zがα以外のすべての複素数を動くとき，点wのとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　点zがある円周C上を動くとき，点wは原点Oを中心とする半径1の円周を描くものとする。このとき，円周Cの中心と半径をαを用いて表せ。また円周Cの中心がiのとき，αの値を求めよ。

(3)　αは(2)で求めた値とする。点zが実軸上を動くとき，点wの描く図形を求めよ。

[1998]

■ 曲線

1　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$)を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。　[2015]

■ 極限

1　r は $0<r<1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ があり，その頂点を反時計まわりに A_n，B_n，C_n，D_n とする。さらに R_n は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i)　正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0(0,\ 1)$ である。

(ii)　$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_2，A_3，A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2)　A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。$x_{n+1}-x_n$ および $y_{n+1}-y_n$ を $r,\ n$ の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を r を用いて表せ。　[2011]

■ 微分法

1　曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が $t\ (t\geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ1つ存在することを示せ。　[2017]

2　以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2)　$1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3)　$x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq \log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。　[2016]

3　c を実数とし，曲線 $y=x^2+c$ ……①と曲線 $y=\log x$ ……②の共通接線を考える。

(1)　共通接線の本数を，実数 c の値によって答えよ。

(2)　共通接線が1本であるとき，その接線と①，②それぞれとの接点を求めよ。

(3)　共通接線が1本であるとき，①，②と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

[2015]

4　関数 $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)dx$ の値を求めよ。

(2)　$0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3)　$x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。　[2014]

5　$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とし，また実数 a, b について $g(x)=e^{-ax+b}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ においてつねに $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つために a, b が満たすべき条件を求めよ。

(2)　$y=g(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように a, b を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき，$y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3)　(2)で定めた $y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$ と $y=f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2009]

6　e を自然対数の底とし，$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log_e|x|+\dfrac{3}{4}$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の 2 接線で，互いに垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　直線 l は曲線 $y=f(x)$ の接線で，原点を通りかつ傾きが正とする。l の方程式は $y=x$ であることを示せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2007]

7　$a\neq 0$，$b\neq 0$ とする。$f(x)=a\cos^2x+b\cos x+c$ について，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているとする。

(1)　$y=f(x)$ のグラフが x 軸と接する点の x 座標をすべて求めよ。

(2)　さらに $\displaystyle\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0$ が成り立っているとき，$f(x)=0\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ を満たす x の値をすべて求めよ。　[2006]

8　3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　b, c を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)-g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。　[2004]

9 実数 t に対して，u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1) 媒介変数 t を用いて，$x=f(t)$，$y=-2t$ （t は実数）と表される曲線を図示せよ。

(2) 関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め，$f(t)$ のグラフをかけ。 [2003]

10 a は定数とし，n は 2 以上の整数とする。関数 $f(x)=ax^n\log x-ax\ (x>0)$ の最小値が -1 のとき，定積分 $\int_1^e f(x)\,dx$ の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。

[2003]

11 $a,\ b$ を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，$a,\ b$ の値を求めよ。 [2001]

12 $a,\ b$ を実数，e を自然対数の底とする。すべての実数 x に対して $e^x\geqq ax+b$ が成立するとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a,\ b$ の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分 $\int_0^1(e^x-ax-b)\,dx$ の最小値と，そのときの $a,\ b$ の値を求めよ。

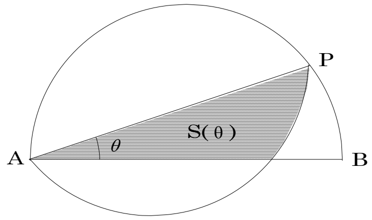
[2001]

13 与えられた実数 $a,\ b$ のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x)=x^3-7x$ に対して $g(x)=\min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1) $0\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2) 2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 [1998]

14　AB を直径とする半径 1 の半円がある。P を半円周上の動点とし，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおくとき，P は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす範囲を動く。直径 AB と弦 AP と弧 PB で囲まれた部分の面積を $T(\theta)$ で表す。



(1)　$T(\theta)$ を求めよ。

(2)　P が半円周上を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，右図のように，線分 AP を折り目にしてこの半円を折り重ね，重なった部分の面積を $S(\theta)$ とおく。このとき $S(\theta)$ を $T(\theta)$ と $T(2\theta)$ を用いて表せ。

(3)　(2)の $S(\theta)$ の最大値を与える θ の値を α とするとき，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ。

[1998]

■ 積分法

1　0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x)=1,\ T_1(x)=x,\ T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　0 以上の任意の整数 n に対して，$\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$ となることを示せ。

(2)　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1} T_n(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2015]

2　$n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2)　次の式 $I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3)　次の式 $\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。　[2014]

3 以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が，時刻 0 で発進後，距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。 [2012]

4 $f(x)=x\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$，$g(x)=\log(1+x^2)$（$x$ は実数）とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $x>0$ のとき $f(x)>g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right)-2\log n\right\}$ の値を求めよ。 [2011]

5 $a,\ b$ は実数とする。関数 $f(x)$ は，$f(x)=a\sin x+b\cos x+\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ を満たし，かつ $-\pi\leqq x\leqq\pi$ における最大値は 2π である。このとき，$\displaystyle\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ を最小にする $a,\ b$ の値と，その最小値を求めよ。 [2010]

6 次の問いに答えよ。

(1) 置換 $x=\tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}}\left(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\right)dx$ を求めよ。

(2) $t>1$ に対して，$g(t)=\displaystyle\int_1^t\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\,dx$ と定める。$t\to\infty$ のとき $g(t)-at^b$ が収束するような正の実数 $a,\ b$ を求めよ。 [2009]

7 x の関数 $f(x)=\displaystyle\int_{x-2}^{x+2}|\,y(y-5)\,|\,dy$ の $2\leqq x$ における最小値を求めよ。 [2007]

8 関数 $f(x)=3\cos 2x+7\cos x$ について，$\displaystyle\int_0^{\pi}|\,f(x)\,|\,dx$ を求めよ。 [2005]

9　n を 2 以上の整数とし，$I(x)=\int_0^x \sin t \sin nt\,dt\ (x \geqq 0)$ と定める。

(1)　$n=2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$I(x)$ の最大値が $\dfrac{n}{n^2-1}$ であるならば, n は偶数であることを証明せよ。　[2002]

10　$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f_n(0)=n$ で与えられる関数の列 $\{f_n(x)\}$ と $I_n=\int_0^{\frac{\pi}{2}} f_n(x)\,dx$ からなる数列 $\{I_n\}$ とがある。

(1)　$f_n(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。

(2)　$I_{n+1}-I_{n-1}$ を n の式で表せ。

(3)　$S_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2k-1}$ とするとき，I_n を S_m を用いて表せ。　[1999]

■ 積分の応用

1　2 点 O$(0,\ 0)$，A$(0,\ 2)$ を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く。点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする。点 Q を通り x 軸と平行な直線と，点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする。点 P の軌跡を C とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

(2)　正の実数 a に対して, C と x 軸と 2 直線 $x=a$，$x=-a$ によって囲まれる図形を, x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。　[2016]

2　a は 0 でない実数とする。直線 $y=ax$ と曲線 $y=x\log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2013]

3　関数 $y=\log|x|$ のグラフ G 上に動点 A, B があり，それぞれの x 座標を a, b とする。A における接線と B における接線が直交し，$a>0$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1)　ab を求めよ。

(2)　線分 AB の中点の存在範囲を求めよ。

(3)　直線 AB が点$(1,\ 0)$を通り，$a\neq 1$ を満たすとき，直線 AB と G で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2008]

4　媒介変数表示 $x=\cos\theta$，$y=\cos^2\theta\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$ $\left(\text{ただし，}0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が表す曲線を C とする。

(1)　y を最大にする θ の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(2)　曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2007]

5　関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

6　以下において $\log x$ は自然対数を表す。

(1)　$a>\dfrac{1}{e}$ のとき, $x>0$ に対し $x^a>\log x$ であることを示せ。

(2)　$a>\dfrac{1}{e}$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}x^a\log x=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$0<t<\dfrac{1}{e}$ として，曲線 $y=x\log x$ $(t\leqq x\leqq 1)$ および x 軸と直線 $x=t$ で囲まれた部分を，y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{t\to+0}V(t)$ を求めよ。　[2005]

7 xy 平面上の動点 A は原点 O$(0,\ 0)$ を出発し，x 軸上を点 $(2,\ 0)$ まで動くとする。また動点 B は点 $(0,\ 1)$ を出発し，$\mathrm{AB}=\mathrm{OB}=1$ なる条件を満たしながら第 1 象限を点 $(1,\ 0)$ まで動くとする。点 P は線分 AB 上の点で $2\mathrm{BP}=\mathrm{OA}$ を満たす。

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，点 P の座標を θ で表せ。ただし点 A が点 O と一致するときを除く。

(2) 点 P の軌跡と x 軸, y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2004]

8 座標空間内の 6 点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0,\ 1)$，$\mathrm{C}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$，$\mathrm{D}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{E}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{F}\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ がある。動点 P は A を出発し，B, C, A の順に $\triangle\mathrm{ABC}$ の周を一定の速さで一周する。P と同時に動点 Q は E を出発し，F, D, E の順に $\triangle\mathrm{DEF}$ の周を P と同じ速さで一周する。線分 PQ が動いて作られる図形と $\triangle\mathrm{ABC}$, $\triangle\mathrm{DEF}$ によって囲まれる立体を K とする。

(1) $\mathrm{AP}=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ のとき，点 Q の座標を t で表せ。

(2) (1)の P, Q に対して，線分 PQ と平面 $z=a\ (0\leqq a\leqq 1)$ との交点 $\mathrm{R}(t)$ の座標を求めよ。

(3) 平面 $z=a\ (0\leqq a\leqq 1)$ による K の切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) K の体積 V を求めよ。　[2000]

9 長さ 1 の棒 PQ が座標平面上にある。P は $\mathrm{A}(1,\ 0)$ から出発し, x 軸上を原点 O まで動き，Q は O を出発し，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ まで y 軸上を動く。この棒の上に動点 R があり，つねに $\mathrm{PR}=\mathrm{AP}$ であるとする。

(1) $\angle\mathrm{OQP}=\theta$ としたとき, R の座標を θ で表せ。

(2) R が動いてできる曲線と x 軸, y 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2000]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

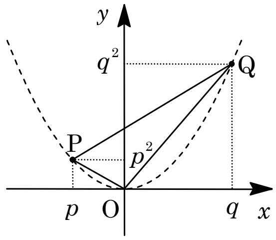
t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。　[2017]

解答例



(1) 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ $(p<q)$ に対して，$\mathrm{PQ}=2$ より，

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=4,\ (q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=4$$

ここで，$p+q=\sqrt{t}\ (t\geqq 0)$ ……①より，

$$(q-p)^2(1+t)=4,\ q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\Big(\sqrt{t}+\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ ………③

$$p=\frac{1}{2}\Big(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{1+t}}\Big)=\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\text{④}$$

(2) △OPQ の面積を S とすると，③④より，

$$S=\frac{1}{2}\left|pq^2-p^2q\right|=\frac{1}{2}\left|pq(q-p)\right|=\frac{1}{2}\left|\Big(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\Big)\cdot\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\left|\frac{t^2+t-4}{4(1+t)}\right|=\frac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

(3) 条件より $S=1$ なので，$\dfrac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}=1$ となり，

$$\left|t^2+t-4\right|=4(1+t)\sqrt{1+t},\ (t^2+t-4)^2=16(1+t)^3\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

⑤を展開してまとめると，$t^4-14t^3-55t^2-56t=0$ となり，

$$t=0\ \cdots\cdots\text{⑥},\ t^3-14t^2-55t-56=0\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

ここで，$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$ とおくと，

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(t-11)(3t+5)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t>0$ において⑦の解はただ 1 つ存在する。

t	0	…	11	…
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	↘		↗

以上より，⑤の解すなわち $S=1$ となる t の個数は，⑥を合わせて 2 である。

コメント

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では，同値変形とはいうものの，両辺を 2 乗して 4 次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが……。

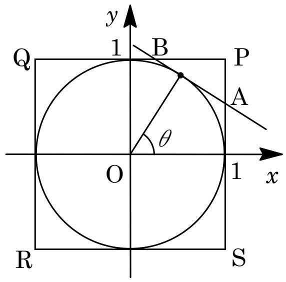
問　題

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。　[2014]

解答例

原点を中心とする半径 1 の円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$



直線 $x=1$ と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$ とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)$ とおくと，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ より $1<t\leqq\sqrt{2}$ となり，$(*)$から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，S が最大となるのは，$t=\sqrt{2}$ すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときである。

コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

問　題

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\Big(a,\ \dfrac{a^2}{4}\Big)$，$\mathrm{B}\Big(b,\ \dfrac{b^2}{4}\Big)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

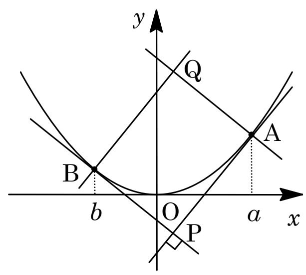
(1) b を a を用いて表せ。

(2) P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3) 長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例



(1) $y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\Big(a,\ \dfrac{a^2}{4}\Big)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\Big(b,\ \dfrac{b^2}{4}\Big)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。

ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ \ b=-\frac{4}{a}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\ \cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ \ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\Big)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\Big(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\Big)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ \ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\Big(a^2+\frac{16}{a^2}\Big)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\Big(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\Big)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと,

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係より, $a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお, 等号は, $a=\frac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より, S は $a=2$ のとき最小値 $\frac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが, 長方形の性質を利用して, 計算量を減らしています。

問　題

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$y=x^2$ に対して，$y'=2x$ となり，点 $(a,\ a^2)$ における接線 l_a の方程式は，

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5 \cdots\cdots ②$の表す領域に含まれることより，①を②に代入して，

$$2ax-a^2>-x^2+2x-5,\ \ x^2+2(a-1)x-a^2+5>0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③が任意の x に対して成立することより，

$$D/4=(a-1)^2-(-a^2+5)=2(a^2-a-2)<0$$

すると，$(a-2)(a+1)<0$ より，$-1<a<2$ である。

(2)　直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ は，①より，$a^2-2xa+y=0$ が $-1<a<2$ に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで，$f(a)=a^2-2xa+y=(a-x)^2-x^2+y$ とおくと，

(i)　$x\leqq -1$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\geqq 0$ より，$y\geqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，$y\leqq 4x-4$

(ii)　$-1<x<2$ のとき

(a)　$f(x)=-x^2+y>0$ より，$y>x^2$

(b)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$，$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，

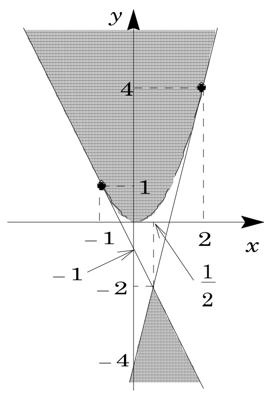
$y\leqq -2x-1$，$y\leqq 4x-4$

(iii)　$x\geqq 2$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$ より，$y\leqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\geqq 0$ より，$y\geqq 4x-4$

(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D は右図の網点部となる。ただし，破線の境界線のみ領域に含まない。



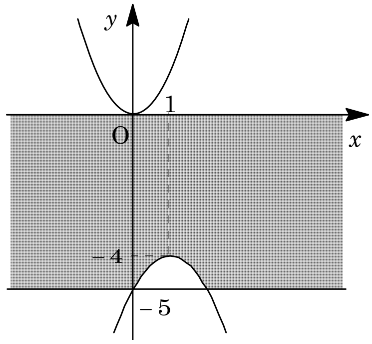
(3)　不等式$(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$を変形すると，

$x^2>-x^2+2x-5$より，

$$-x^2+2x-5\leqq y\leqq x^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$y(y+5)\leqq 0$より，

$$-5\leqq y\leqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$



よって，連立不等式④⑤の表す領域Eは右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

さて，直線$y=-2x-1$と放物線$y=-x^2+2x-5$を連立すると，

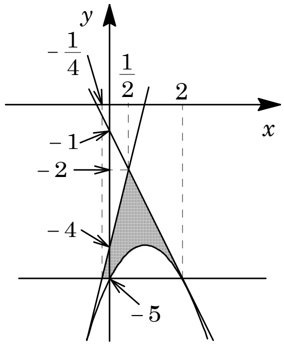
$$-2x-1=-x^2+2x-5\,,\ \ x^2-4x+4=0$$

重解$x=2$をもつことより，$x=2$で接する。

また，直線$y=4x-4$と放物線$y=-x^2+2x-5$を連立すると，

$$4x-4=-x^2+2x-5\,,\ \ x^2+2x+1=0$$

重解$x=-1$をもつことより，$x=-1$で接する。



これより，領域DとEの共通部分を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

そこで，この共通部分の面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}\Big(2+\frac{1}{4}\Big)(-2+5)-\int_0^2(-x^2+2x-5+5)\,dx$$

$$=\frac{27}{8}-\int_0^2 -x(x-2)\,dx=\frac{27}{8}-\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{49}{24}$$

コメント

計算量の多い問題で，時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが，図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

問　題

a を 1 より大きい実数とし，座標平面上に，点 O$(0,\ 0)$，A$(1,\ 0)$をとる。曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 P$\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$と，曲線 $y=\dfrac{a}{x}$ 上の点 Q$\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$が，3 条件

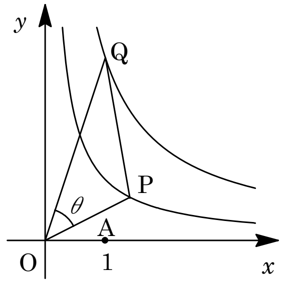
(i)　$p>0,\ q>0$　　　(ii)　$\angle\mathrm{AOP}<\angle\mathrm{AOQ}$

(iii)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積は 3 に等しい

を満たしながら動くとき，$\tan\angle\mathrm{POQ}$ の最大値が $\dfrac{3}{4}$ となるような a の値を求めよ。

[2010]

解答例



P$\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$，Q$\left(q,\ \dfrac{a}{q}\right)$に対して，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{AOQ}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p^2}$，$\tan\beta=\dfrac{a}{q^2}$ となる。

条件より，$\alpha<\beta$ なので，$\tan\alpha<\tan\beta$

$$\frac{1}{p^2}<\frac{a}{q^2},\ ap^2-q^2>0\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を S とすると，①より，

$$S=\frac{1}{2}\left|p\cdot\frac{a}{q}-\frac{1}{p}\cdot q\right|=\frac{1}{2pq}\left|ap^2-q^2\right|=\frac{1}{2pq}(ap^2-q^2)$$

条件より，$\dfrac{1}{2pq}(ap^2-q^2)=3$，$ap^2-q^2=6pq\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$\angle\mathrm{POQ}=\theta$ とおくと，$\theta=\beta-\alpha$ から，

$$\tan\theta=\tan(\beta-\alpha)=\frac{\tan\beta-\tan\alpha}{1+\tan\beta\tan\alpha}=\frac{\dfrac{a}{q^2}-\dfrac{1}{p^2}}{1+\dfrac{a}{q^2}\cdot\dfrac{1}{p^2}}=\frac{ap^2-q^2}{p^2q^2+a}$$

②を代入すると，$\tan\theta=\dfrac{6pq}{p^2q^2+a}=\dfrac{6}{pq+\dfrac{a}{pq}}\leqq\dfrac{6}{2\sqrt{a}}=\dfrac{3}{\sqrt{a}}$

等号は，$pq=\dfrac{a}{pq}$ すなわち $pq=\sqrt{a}$ のときに成立する。

よって，$\tan\theta$ の最大値は $\dfrac{3}{\sqrt{a}}$ となり，$\dfrac{3}{\sqrt{a}}=\dfrac{3}{4}$ から，$a=16$ である。

コメント

相加平均と相乗平均の関係を用いる最大・最小問題です。置き換えて，微分法の利用という手もありますが，おすすめは前者です。なお，等号の成立する p，q の値が存在することは明らかなので，記述を省いています。

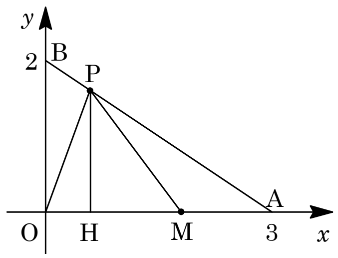
問　題

座標平面上に点 $A(3,\ 0)$，$B(0,\ 2)$ をとる。線分 AB 上に点 P をとり，P から x 軸に下ろした垂線を PH，A と H の中点を M とする。ただし点 H は x 軸上の点とし，また P は A と異なるものとする。O を原点とし△OPM を O を中心に座標平面内で 1 回転するとき，通過する点全体が作る円の面積が最小となるときの点 P の座標を求めよ。　　[2009]

解答例

線分 AB 上の点 P を，$0\leqq t<1$ として，

$$\overrightarrow{OP}=t\overrightarrow{OA}+(1-t)\overrightarrow{OB}=(3t,\ 2(1-t))$$



すると，$P(3t,\ 2(1-t))$，$H(3t,\ 0)$，$M\left(\dfrac{3t+3}{2},\ 0\right)$ となり，これより，

$$OP^2=(3t)^2+4(1-t)^2=13t^2-8t+4$$

$$OM^2=\frac{9}{4}(t+1)^2$$

さて，△OPM を O を中心に回転したときにできる円の面積を S とすると，

(i)　$13t^2-8t+4\geqq\dfrac{9}{4}(t+1)^2$　$\left(0\leqq t\leqq\dfrac{7}{43}\right)$のとき

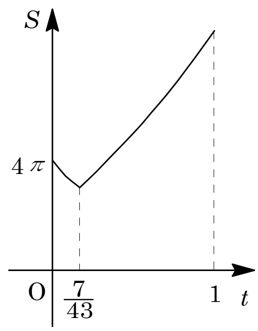
このとき，$OP^2\geqq OM^2$ より，

$$S=\pi OP^2=\pi(13t^2-8t+4)=\pi\left\{13\left(t-\frac{4}{13}\right)^2+\frac{36}{13}\right\}$$

(ii)　$13t^2-8t+4\leqq\dfrac{9}{4}(t+1)^2$　$\left(\dfrac{7}{43}\leqq t<1\right)$のとき

このとき，$OP^2\leqq OM^2$ より，

$$S=\pi OM^2=\frac{9}{4}\pi(t+1)^2$$



(i)(ii)より，S の値の変化は右図のようになる。

よって，$t=\dfrac{7}{43}$ のとき S は最小となり，このとき P の座標は，$\left(\dfrac{21}{43},\ \dfrac{72}{43}\right)$である。

コメント

円の半径は OP または OM となりますが，この大小関係に注目して場合分けをするところがポイントです。

問　題

$a,\ t$ を実数とするとき，座標平面において，$x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ で定義される図形 C を考える。

(1) すべての t に対して C が円であるような a の範囲を求めよ。ただし，点は円とみなさないものとする。

(2) $a=4$ とする。t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。

(3) $a=6$ とする。t が $t>0$ であって，かつ C が円であるような範囲を動くとき，C が通過してできる領域を求め，図示せよ。 [2006]

解答例

(1) $C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-a)=0$ より，

$$(x-t)^2+(y-t)^2=2t^2-at+4 \cdots\cdots\cdots ①$$

①が円を表す条件 $2t^2-at+4>0$ が，すべての t に対して成立するためには，

$$D=a^2-32<0,\ -4\sqrt{2}<a<4\sqrt{2}$$

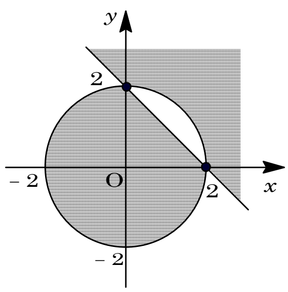
(2) $a=4$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-4)=0 \cdots\cdots\cdots ②$

t が $t>0$ の範囲を動くとき，C が通過する領域は，②を t の方程式としてみたとき，$t>0$ の解をもつ条件として表される。

まず，$2x+2y-4=0 \cdots\cdots ③$のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ④$の場合だけである。ここで，③④を連立することにより $(x,\ y)=(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ となり，C はこの点を通過する。

次に，$2x+2y-4\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}$ となり，

$$\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-4}>0,\ (x^2+y^2-4)(x+y-2)>0$$



よって，C が通過する領域は右図の網点部となる。ただし，点 $(2,\ 0),\ (0,\ 2)$ 以外の境界は含まない。

(3) $a=6$ のとき，$C: x^2+y^2-4-t(2x+2y-6)=0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

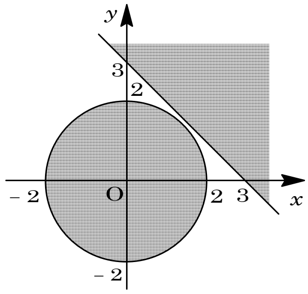
⑤が円を表す条件は，(1)より $2t^2-6t+4>0$ すなわち $(t-1)(t-2)>0$ であり，$t>0$ と合わせて，$0<t<1,\ 2<t \cdots\cdots (*)$となる。

まず，$2x+2y-6=0 \cdots\cdots ⑥$のとき，$t>0$ の解をもつのは，$x^2+y^2-4=0 \cdots\cdots ⑦$の場合だけである。ここで，⑥より $y=-x+3$ となり，⑦に代入すると，

$$x^2+(-x+3)^2-4=0,\ 2x^2-6x+5=0$$

しかし，$D/4=-1$ より実数解をもたず，不適である。

次に，$2x+2y-6\neq 0$ のときは，$t=\dfrac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}$ となり，



(＊)より，

$$0<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}<1 \cdots\cdots ⑧,\quad 2<\frac{x^2+y^2-4}{2x+2y-6}\cdots\cdots ⑨$$

⑧の左側の不等式は，

$$(x^2+y^2-4)(x+y-3)>0 \cdots\cdots\cdots ⑩$$

不等式⑩を図示すると，右上図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

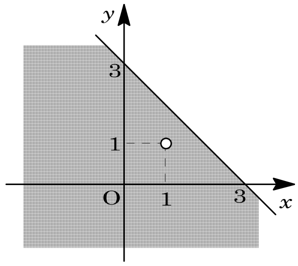
⑧の右側の不等式は，$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)<(2x+2y-6)^2$

$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-2x-2y+6)<0$$

$$(x+y-3)\{(x-1)^2+(y-1)^2\}<0 \cdots\cdots\cdots ⑪$$

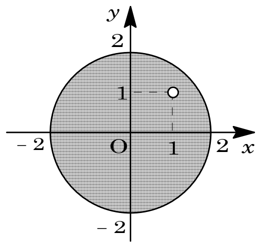
すると，$(x-1)^2+(y-1)^2\geqq 0$ から，不等式⑪は，

$$(x,\ y)\neq(1,\ 1)\ \ かつ\ \ x+y-3<0$$



よって，図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

まとめると，不等式⑧は，不等式⑩と⑪を連立したものであるので，その共通部分を領域として図示すると，右下図の網点部となる。ただし，境界および点(1，1)は含まない。



さらに，⑨を変形すると，

$$(x^2+y^2-4)(2x+2y-6)>2(2x+2y-6)^2$$

$$2(x+y-3)(x^2+y^2-4-4x-4y+12)>0$$

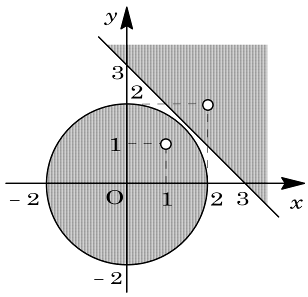
$$(x+y-3)\{(x-2)^2+(y-2)^2\}>0 \cdots\cdots\cdots ⑫$$

すると，$(x-2)^2+(y-2)^2\geqq 0$ から，不等式⑫は，

$$(x,\ y)\neq(2,\ 2)\ \ かつ\ \ x+y-3>0$$

したがって，不等式⑨は，直線 $x+y-3=0$ の上側から，点(2，2)を除いた領域を表す。

以上より，C が通過する領域は不等式⑧または⑨で表されるので，図示すると右図の網点部となる。



ただし，境界線および 2 点(1，1)，(2，2)は含まない。

コメント

記述量が多い問題です。ステップを 1 つずつ踏んで図示していくだけですが，かなりの計算力と忍耐力が要求されます。

問　題

(1)　次の不等式で表される領域を図示せよ。

$$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1) \geqq \log_{10}(-2x^2+2x+1)$$

(2)　$x,\ y$ が(1)の不等式を満たすとき，$x+y$ の最大値と最小値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$\log_{10}(-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1) \geqq \log_{10}(-2x^2+2x+1)$ に対して，

まず，$-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1>0$ ………①

$-2x^2+2x+1>0$ ………②

①②のもとで，$-y^2-2xy+y+x^4-2x^3-3x^2+4x+1 \geqq -2x^2+2x+1$ ………③

ここで，②③より，①はつねに成り立つ。

③を整理して，$y^2+(2x-1)y-(x^4-2x^3-x^2+2x) \leqq 0$

$y^2+(2x-1)y-(x^2-1)(x^2-2x) \leqq 0$

$\{y+(x^2-1)\}\{y-(x^2-2x)\} \leqq 0$ ………④

②より，$2x^2-2x-1<0$，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

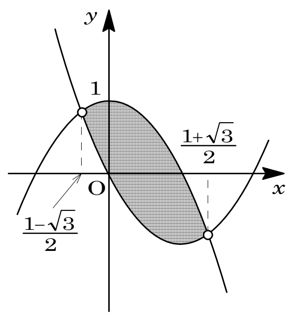
また，④で表される領域の境界線の方程式は，

$y=-x^2+1$ ………⑤，$y=x^2-2x$ ………⑥

⑤⑥の共有点は，$-x^2+1=x^2-2x$ より，

$2x^2-2x-1=0$，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{3}}{2}$

さて，点 $(0,\ -1)$ は④を満たさないので，②かつ④の満たす領域は右図の網点部となる。なお，白丸以外の境界線は領域に含む。



(2)　$x+y=k$ ……⑦とおき，直線⑦と(1)の領域が共有点をもつ k の範囲を求める。

まず，⑤と⑦が接するのは，$x+(-x^2+1)=k$，$x^2-x+k-1=0$

$D=1-4(k-1)=0$，$k=\dfrac{5}{4}$

このとき，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を満たす。

次に，⑥と⑦が接するのは，$x+(x^2-2x)=k$，$x^2-x-k=0$

$D=1+4k=0$，$k=-\dfrac{1}{4}$

このとき，$x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1-\sqrt{3}}{2}<x<\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ を満たす。

以上より，$x+y$ の最大値は $\dfrac{5}{4}$，最小値は $-\dfrac{1}{4}$ である。

コメント

④の左辺を因数分解することに，やや時間を取られることを除くと，見かけよりはるかに基本的です。

問　題

C は，2 次関数 $y=x^2$ のグラフを平行移動した放物線で，頂点が円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上にある。原点から C に引いた接線で傾きが正のものを l とおく。このとき，C と l の接点の x 座標が最大および最小になるときの C の頂点の座標をそれぞれ求めよ。

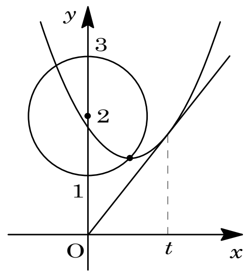
[2001]

解答例

$0\leqq\theta<2\pi$ として，円 $x^2+(y-2)^2=1$ 上の点を $(\cos\theta,\ \sin\theta+2)$ とする。

この点が，放物線 $y=x^2$ を平行移動した放物線の頂点とすると，その方程式は，

$$y=(x-\cos\theta)^2+\sin\theta+2$$



ここで，接点を $(t,\ (t-\cos\theta)^2+\sin\theta+2)\ (t>0)$ とおく。

すると，$y'=2(x-\cos\theta)$ なので，条件より，

$$\frac{(t-\cos\theta)^2+\sin\theta+2}{t}=2(t-\cos\theta)$$

$$(t-\cos\theta)^2+\sin\theta+2=2t(t-\cos\theta)$$

まとめて，$t^2=\cos^2\theta+\sin\theta+2=-\sin^2\theta+\sin\theta+3=-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}$

$t>0$ より，$t=\sqrt{-\left(\sin\theta-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{13}{4}}$

$-1\leqq\sin\theta\leqq 1$ より，t が最大となるのは $\sin\theta=\frac{1}{2}$ のとき，すなわち $\theta=\frac{\pi}{6}$ または $\theta=\frac{5\pi}{6}$ のときである。このとき頂点の座標は，$\left(\cos\frac{\pi}{6},\ \sin\frac{\pi}{6}+2\right)=\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ または $\left(\cos\frac{5\pi}{6},\ \sin\frac{5\pi}{6}+2\right)=\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{5}{2}\right)$ となる。

また，t が最小となるのは $\sin\theta=-1$ のとき，すなわち $\theta=\frac{3\pi}{2}$ のときである。このとき頂点の座標は，$\left(\cos\frac{3\pi}{2},\ \sin\frac{3\pi}{2}+2\right)=(0,\ 1)$ となる。

コメント

円周上の点をパラメータ表示して，放物線の方程式を作りました。なお，最大となる場合が 2 つありましたが，問題文を読んだときには見抜けませんでした。

問　題

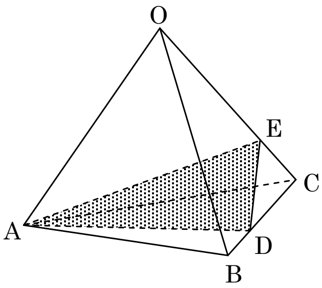
1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を$1:2$に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1) AD の長さを求めよ。

(2) $\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3) $\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

解答例



(1) $\triangle\mathrm{ABD}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ=7$$

よって，$\mathrm{AD}=\sqrt{7}$ となる。

(2) $\triangle\mathrm{ACE}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AE}^2=3^2+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\cos60^\circ=t^2-3t+9$$

また，$\triangle\mathrm{CDE}$ に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DE}^2=2^2+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\cos60^\circ=t^2-2t+4$$

さらに，$\triangle\mathrm{ADE}$ に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{DAE}=\frac{7+(t^2-3t+9)-(t^2-2t+4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}=\frac{12-t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

(3) (2)より，$\sin\angle\mathrm{DAE}=\sqrt{1-\dfrac{(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}}=\dfrac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$

すると，$\triangle\mathrm{ADE}$ の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9t^2-20t+36}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{9}}$$

よって，S は $t=\dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\dfrac{224}{9}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ をとる。

コメント

三角比の空間図形への適用問題です。基本的な定理の確認となっています。

問　題

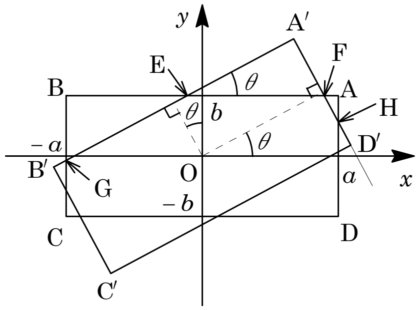
横 $2a$, 縦 $2b$ の長方形を長方形の中心のまわりに角 θ だけ回転させる。回転後の長方形ともとの長方形とが重なり合う部分の面積 $S(\theta)$ を求めよ。ただし，長方形の中心とはその 2 つの対角線の交点とし，長方形はそれを含む平面内で回転するものとする。また，回転角 θ は 0 以上，長方形のいずれかの頂点が隣の頂点に達するまでの角度以下にとるものとする。 [2012]

解答例

(i)　$a \neq b$ のとき

まず，$a > b$ としても一般性を失わない。

右図のように，長方形の中心を原点とし，長方形 ABCD の各辺が座標軸に平行になるようにとる。そして，原点中心に θ だけ回転した長方形を $\mathrm{A'B'C'D'}$ とする。



さて，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ のときを考える。

そこで，直線 $\mathrm{AB}: y = b$ と直線 $\mathrm{A'B'}: y = x\tan\theta + \dfrac{b}{\cos\theta}$ を連立して，

$$b = x\tan\theta + \frac{b}{\cos\theta},\quad x = \frac{b}{\tan\theta}\Big(1 - \frac{1}{\cos\theta}\Big) = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta}$$

よって，直線 AB と直線 $\mathrm{A'B'}$ の交点 E は，$\mathrm{E}\Big(\dfrac{b(\cos\theta-1)}{\sin\theta},\ b\Big)$ となり，

$$\mathrm{BE} = \frac{b(\cos\theta - 1)}{\sin\theta} - (-a) = \frac{a\sin\theta + b\cos\theta - b}{\sin\theta}$$

$$\triangle\mathrm{BEG} = \frac{1}{2}\mathrm{BE}\cdot\mathrm{BE}\tan\theta = \frac{(a\sin\theta + b\cos\theta - b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

次に，直線 $\mathrm{AB}: y = b$ と直線 $\mathrm{A'D'}: y = -\dfrac{1}{\tan\theta}\Big(x - \dfrac{a}{\cos\theta}\Big)$ を連立して，

$$b = -\frac{1}{\tan\theta}\Big(x - \frac{a}{\cos\theta}\Big),\quad x = -b\tan\theta + \frac{a}{\cos\theta} = \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta}$$

よって，直線 AB と直線 $\mathrm{A'D'}$ の交点 F は，$\mathrm{F}\Big(\dfrac{a - b\sin\theta}{\cos\theta},\ b\Big)$ となり，

$$\mathrm{AF} = a - \frac{a - b\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{a\cos\theta + b\sin\theta - a}{\cos\theta}$$

$$\triangle\mathrm{AFH} = \frac{1}{2}\mathrm{AF}\cdot\frac{\mathrm{AF}}{\tan\theta} = \frac{(a\cos\theta + b\sin\theta - a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}$$

したがって，長方形 ABCD と長方形 $\mathrm{A'B'C'D'}$ の共通部分の面積 $S(\theta)$ は，

$$S(\theta)=\square\mathrm{ABCD}-2(\triangle\mathrm{BEG}+\triangle\mathrm{AFH})$$
$$=4ab-2\left\{\frac{(a\sin\theta+b\cos\theta-b)^2}{2\sin\theta\cos\theta}+\frac{(a\cos\theta+b\sin\theta-a)^2}{2\sin\theta\cos\theta}\right\}$$
$$=4ab-\frac{2(a^2+b^2-a^2\cos\theta-b^2\cos\theta+2ab\sin\theta\cos\theta-2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}$$
$$=4ab-\frac{2(1-\cos\theta)(a^2+b^2-2ab\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$\theta=0$ のときは，$S(\theta)=4ab$ である。

(ii)　$a=b$ のとき

$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ のとき, $(*)$においてて $a=b$ とおくと,

$$S(\theta)=4a^2-\frac{2(1-\cos\theta)(2a^2-2a^2\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}=4a^2\left\{1-\frac{(1-\cos\theta)(1-\sin\theta)}{\sin\theta\cos\theta}\right\}$$
$$=\frac{4a^2(\sin\theta+\cos\theta-1)}{\sin\theta\cos\theta}$$

なお，$\theta=0,\ \frac{\pi}{2}$ のときは，$S(\theta)=4a^2$ である。

コメント

最初の設定から始める必要があり，そこで時間を費やしてしまいます。上の解答例では座標系を設定しましたが，計算量はかなりハードなものがあります。なお，回転角 θ は $0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{2}$ ですが，$\theta=\frac{\pi}{2}$ となるのは正方形のときのみです。

問　題

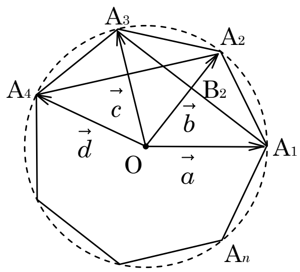
n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

解答例



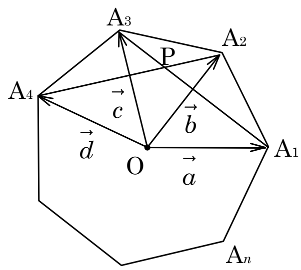
(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。



(2) まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1,\ t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0,\ t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　条件から，$A_1P:PA_3=t:1-t$ より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2$ ………③

また，$A_2P:PA_4=1-t:t$ より，$\triangle PA_1A_2=(1-t)\triangle A_1A_2A_4$ ………④

③④より，$\triangle PA_2A_3=\dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t}-\frac{1}{12}=\frac{12t^2-25t+12}{12t}=\frac{(3t-4)(4t-3)}{12t}>0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}=\dfrac{(1-t)^2}{t}>\dfrac{1}{12}$ である。

コメント

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

問　題

座標平面上にすべての内角が$180°$未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

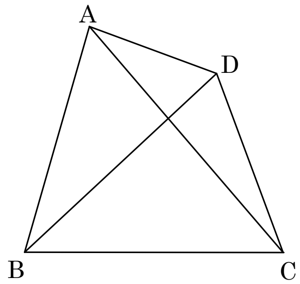
(1) $E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2) $E\left(\frac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3) 対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

解答例

(1) 原点 O, 四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。定数 k は$0\leqq k\leqq 1$，0 以上の実数 s, t, u は $k+s+t+u=1$ を満たす。



そして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

まず，$k=1$ のとき $s+t+u=0$ から $s=t=u=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ となる。すなわち，$E(1)$ は点 A である。

次に，$k=0$ のとき $s+t+u=1$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+t\vec{c}+(1-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{d}=s(\vec{b}-\vec{d})+t(\vec{c}-\vec{d})$$

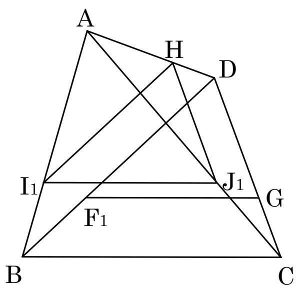
$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

よって，$E(0)$ は$\triangle$DBC の内部または辺上となる。

(2) $k=\frac{1}{3}$ のとき，$s+t+u=\frac{2}{3}$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=\frac{2}{3}-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+\left(\frac{2}{3}-s-t\right)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおき，DB, DC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{G_1}$ とすると，



$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

これより，点 Q は$\triangle\mathrm{DF_1G_1}$の内部または辺上にある。

さらに，AD，AB，AC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{H_1}$，$\mathrm{I_1}$，$\mathrm{J_1}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}=\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH_1}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{H_1P}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{H_1I_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{H_1J_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

よって，$E\left(\frac{1}{3}\right)$ は $\triangle\mathrm{H_1I_1J_1}$ の内部または辺上となる。

(3)　(2)と同様にして，$s+t+u=1-k$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-k-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+(1-k-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\{k\vec{a}+(1-k)\vec{d}\}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで，AD, AB, AC を $1-k:k$ に内分する点を，それぞれ H, I, J とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{s}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HI}}+\frac{t}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HJ}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{s}{1-k}+\frac{t}{1-k}\leqq 1\right)$$

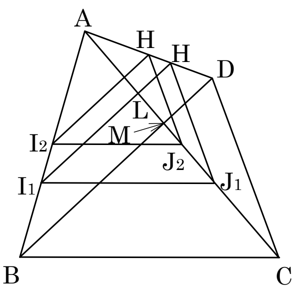
よって，$E(k)$ は $\triangle\mathrm{HIJ}$ の内部または辺上となる。

さて，$k=\frac{1}{2}$ のとき，AD，AB，AC の中点を，それぞれ $\mathrm{H_2}$，$\mathrm{I_2}$，$\mathrm{J_2}$ とおくと，$E\left(\frac{1}{2}\right)$ は $\triangle\mathrm{H_2I_2J_2}$ の内部または辺上となる。

すると，$\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{1}{2}$ において，どの $E(k)$ にも属するような点 P が存在する条件は，$E\left(\frac{1}{3}\right)$ と $E\left(\frac{1}{2}\right)$ に共通部分が存在することである。すなわち，対角線 AC，BD の交点を M，AC と $\mathrm{H_1I_1}$ の交点を L とすると，

$$\mathrm{AJ_2}\geqq\mathrm{AL},\ \frac{1}{2}\mathrm{AC}\geqq\frac{2}{3}\mathrm{AM}$$

よって，求める条件は，$3\mathrm{AC}\geqq 4\mathrm{AM}$ である。



コメント

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで，やや冗長な感じもします。また，丁寧な誘導のため，後半になるに従い省略ぎみに記しましたが，それでもボリュームはかなりのものとなっています。

問　題

三角形 ABC の外心を O, 重心を G, 内心を I とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\frac{1}{3}$ を満たす実数で, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ が成り立つならば, 三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

解答例

(1)　G は△ABC の重心より, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ………①

条件から, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので, ①に代入すると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

ここで, 辺 BC の中点を M とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ……②から, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$ となり, △ABC の外心 O は M と一致する。

したがって, △ABC は $\angle\mathrm{A}=90°$ の直角三角形である。

(2)　条件から, $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので, ①に代入すると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで, ②から, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{3k-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり, $k\neq\frac{1}{3}$ より, 3 点 O, A, M は同一直線上にある。一方, O は△ABC の外心なので, 辺 BC の垂直二等分線上にあり, $\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ である。

したがって, $\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となるので, △ABC は AB = AC の二等辺三角形である。

(3)　まず, O と M が一致しないとき, (2)より, $\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ ………③

ここで, 条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ または $\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OI}}=\vec{0}$ のとき

O と I が一致し, ③より, $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(ii)　$\mathrm{OI}\perp\mathrm{BC}$ のとき

③より, O, I, M は同一直線上にあり, $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

(i)(ii)より, $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

次に, O と M が一致するとき, $\overrightarrow{\mathrm{OI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{MI}}\neq\vec{0}$ なので, $\mathrm{IM}\perp\mathrm{BC}$ である。

よって，いずれの場合も $\mathrm{IM} \perp \mathrm{BC}$ であり，これより $\mathrm{IB} = \mathrm{IC}$ となり，

$$\angle\mathrm{IBC} = \angle\mathrm{ICB},\ 2\angle\mathrm{IBC} = 2\angle\mathrm{ICB},\ \angle\mathrm{ABC} = \angle\mathrm{ACB}$$

したがって，$\triangle\mathrm{ABC}$ は二等辺三角形である。

コメント

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。

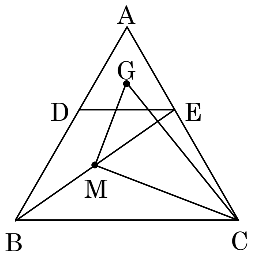
問　題

$\triangle$ABC は，1 辺の長さが 1 の正三角形で，t は正の実数とする。$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおく。直線 AB, AC 上にそれぞれ点 D, E があり，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}$ を満たしている。正三角形$\triangle$ADE の重心を G, 線分 BE の中点を M とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}$ を計算せよ。

(2) t が正の実数全体を動くとき，$\triangle$CGM の面積を最小にする t の値と，そのときの面積を求めよ。 [2010]

解答例



(1) 条件から，$|\vec{b}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=1$，$|\vec{c}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=1$ ………①

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t\vec{c}$ より，

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}=\vec{c}-\frac{\vec{b}+t\vec{c}}{2}=-\frac{1}{2}\vec{b}+\frac{1}{2}(2-t)\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MG}}=\frac{t\vec{b}+t\vec{c}}{3}-\frac{\vec{b}+t\vec{c}}{2}=\frac{1}{6}(2t-3)\vec{b}-\frac{1}{6}t\vec{c}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}=-\frac{1}{12}(2t-3)|\vec{b}|^2+\frac{1}{12}\{(2t-3)(2-t)+t\}\vec{b}\cdot\vec{c}-\frac{1}{12}t(2-t)|\vec{c}|^2$$

①②より，$\overrightarrow{\mathrm{MC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MG}}=-\dfrac{1}{12}(2t-3)+\dfrac{1}{12}(-t^2+4t-3)-\dfrac{1}{12}(2t-t^2)=0$

(2) ①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|^2=\dfrac{1}{4}|\vec{b}|^2-\dfrac{1}{2}(2-t)\vec{b}\cdot\vec{c}+\dfrac{1}{4}(2-t)^2|\vec{c}|^2$

$$=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}(2-t)+\frac{1}{4}(2-t)^2=\frac{1}{4}(t^2-3t+3)$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{MG}}|^2=\frac{1}{36}(2t-3)^2|\vec{b}|^2-\frac{1}{18}t(2t-3)\vec{b}\cdot\vec{c}+\frac{1}{36}t^2|\vec{c}|^2$$

$$=\frac{1}{36}(2t-3)^2-\frac{1}{36}t(2t-3)+\frac{1}{36}t^2=\frac{1}{12}(t^2-3t+3)$$

(1)より, MC と MG は直交するので，$\triangle$CGM の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{MC}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{MG}}|=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{t^2-3t+3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{t^2-3t+3}$$

$$=\frac{1}{8\sqrt{3}}(t^2-3t+3)=\frac{1}{8\sqrt{3}}\left\{\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}$$

よって，$t=\dfrac{3}{2}$ のとき, S は最小値 $\dfrac{1}{8\sqrt{3}}\cdot\dfrac{3}{4}=\dfrac{\sqrt{3}}{32}$ をとる。

コメント

見かけはベクトルの応用問題ですが，実際は，ただひたすら計算に専念です。

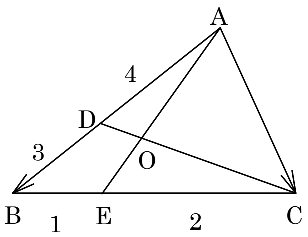
問　題

平面上の△ABC において，辺 AB を$4:3$に内分する点を D，辺 BC を$1:2$に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$を$\vec{p}$，$\vec{q}$で表せ。

(2)　点 O が△ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。　[2008]

解答例



(1)　△ABE と直線 CD に対して，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=1,\ \frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\vec{p}+\vec{q}}{3}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}$$

(2)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{4}{9}\vec{p}+\dfrac{2}{9}\vec{q}-\vec{p}=-\dfrac{5}{9}\vec{p}+\dfrac{2}{9}\vec{q}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}-\vec{q}=\frac{4}{9}\vec{p}-\frac{7}{9}\vec{q}$$

条件より，点 O は△ABC の外心なので，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$

$|4\vec{p}+2\vec{q}|=|-5\vec{p}+2\vec{q}|$……①，$|4\vec{p}+2\vec{q}|=|4\vec{p}-7\vec{q}|$……②

①より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=25|\vec{p}|^2-20\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2$，$|\vec{p}|^2=4\vec{p}\cdot\vec{q}$

②より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=16|\vec{p}|^2-56\vec{p}\cdot\vec{q}+49|\vec{q}|^2$，$5|\vec{q}|^2=8\vec{p}\cdot\vec{q}$

さて，$\vec{p}\cdot\vec{q}=k$とおくと，$\mathrm{AB}^2=|\vec{p}|^2=4k$，$\mathrm{CA}^2=|\vec{q}|^2=\dfrac{8}{5}k$となり，

$$\mathrm{BC}^2=|\vec{p}-\vec{q}|^2=4k-2k+\frac{8}{5}k=\frac{18}{5}k$$

よって，$\mathrm{AB}^2:\mathrm{BC}^2:\mathrm{CA}^2=4k:\dfrac{18}{5}k:\dfrac{8}{5}k=10:9:4$

コメント

平面ベクトルの三角形への応用についての基本問題です。

問　題

$\triangle$OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ とする。辺 AB 上に点 P_1 をとる。ただし P_1 は A, B とは異なるとする。P_1 から辺 OB に垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を下ろす。次に，Q_1 から辺 OA に垂線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ を下ろす。さらに，R_1 から辺 AB に垂線 $\mathrm{R}_1\mathrm{P}_2$ を下ろす。以下，同様の操作を続けて，点 P_n，Q_n，R_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を定める。$\overrightarrow{\mathrm{AP}_n}=t_n(\vec{b}-\vec{a})$ により t_n $(0<t_n<1)$ を定める。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{BQ}_1}$ を t_1 と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) t_2 を t_1 を用いて表せ。

(3) t_n を t_1 と n を用いて表せ。

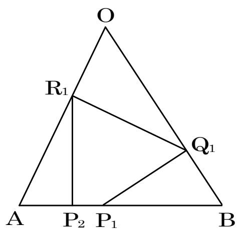
(4) $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2$ となるような t_1 の値を求めよ。

(5) $\mathrm{P}_1=\mathrm{P}_2$ のとき，$\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{R}_1$ の面積を求めよ。　[2006]

解答例

(1) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{AP}_1}=t_1(\vec{b}-\vec{a})$ なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}=\vec{a}+t_1(\vec{b}-\vec{a})=(1-t_1)\vec{a}+t_1\vec{b}$$



$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}$ の $\vec{b}$ 方向への正射影ベクトルより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OP}_1}\cdot\frac{\vec{b}}{\sqrt{3}}\right)\frac{\vec{b}}{\sqrt{3}}=\frac{1}{3}\{(1-t_1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t_1|\vec{b}|^2\}\vec{b}$$

ここで，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}=\frac{1}{3}(1-t_1+3t_1)\vec{b}=\frac{1}{3}(2t_1+1)\vec{b}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{BQ}_1}=\frac{1}{3}(2t_1+1)\vec{b}-\vec{b}=\frac{2}{3}(t_1-1)\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}$ は $\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}$ の $\vec{a}$ 方向への正射影ベクトルより，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}_1}=\left(\overrightarrow{\mathrm{OQ}_1}\cdot\frac{\vec{a}}{\sqrt{2}}\right)\frac{\vec{a}}{\sqrt{2}}=\frac{1}{6}\{(2t_1+1)\vec{a}\cdot\vec{b}\}\vec{a}=\frac{1}{6}(2t_1+1)\vec{a}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AP}_2}=t_2(\vec{b}-\vec{a})$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_2}=(1-t_2)\vec{a}+t_2\vec{b}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{R}_1\mathrm{P}_2}=\left(1-t_2-\frac{1}{3}t_1-\frac{1}{6}\right)\vec{a}+t_2\vec{b}=\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}t_1-t_2\right)\vec{a}+t_2\vec{b}$$

ここで，$\mathrm{R}_1\mathrm{P}_2$ と AB は垂直なので，$\overrightarrow{\mathrm{R}_1\mathrm{P}_2}\cdot(\vec{a}-\vec{b})=0$ より，

$$\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}t_1-t_2\right)|\vec{a}|^2+\left(t_2-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}t_1+t_2\right)\vec{a}\cdot\vec{b}-t_2|\vec{b}|^2=0$$

よって，$2\left(\frac{5}{6}-\frac{1}{3}t_1-t_2\right)+\left(2t_2-\frac{5}{6}+\frac{1}{3}t_1\right)-3t_2=0$ から，$t_2=-\frac{1}{9}t_1+\frac{5}{18}$

(3) (2)と同様にすると，$t_{n+1}=-\frac{1}{9}t_n+\frac{5}{18}$ から，$t_{n+1}-\frac{1}{4}=-\frac{1}{9}\left(t_n-\frac{1}{4}\right)$

$$t_n-\frac{1}{4}=\left(t_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1},\quad t_n=\left(t_1-\frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{9}\right)^{n-1}+\frac{1}{4}$$

(4)　$P_1=P_2$ から $t_1=t_2$ となり，(2)から $t_1=-\frac{1}{9}t_1+\frac{5}{18}$ なので，$t_1=\frac{1}{4}$ である。

(5)　$t_1=\frac{1}{4}$ より，$\overrightarrow{OQ_1}=\frac{1}{3}\left(2\cdot\frac{1}{4}+1\right)\vec{b}=\frac{1}{2}\vec{b}$，$\overrightarrow{OR_1}=\frac{1}{6}\left(2\cdot\frac{1}{4}+1\right)\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{a}$

よって，P_1 は AB を $1:3$，R_1 は OA を $1:3$ に内分し，Q_1 は AB の中点から，

$$\triangle P_1Q_1R_1=\left(1-\frac{1}{4}\times\frac{1}{2}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{4}-\frac{3}{4}\times\frac{1}{2}\right)\triangle OAB=\frac{5}{16}\triangle OAB$$

さて，$\triangle OAB=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2\times3-1^2}=\frac{\sqrt{5}}{2}$ より，

$$\triangle P_1Q_1R_1=\frac{5}{16}\times\frac{\sqrt{5}}{2}=\frac{5\sqrt{5}}{32}$$

コメント

難問というわけではありませんが，設問が 5 つもあるため，かなりの時間を費やしてしまいます。

問　題

xyz 空間内に点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。 [2004]

解答例

点 $\mathrm{C}(0,\ t,\ 0)$ とし，△ABC の面積を S とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-6,\ 3,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ t-1,\ -2)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{36+9+4}=7,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1+(t-1)^2+4}=\sqrt{t^2-2t+6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6+3(t-1)+4=3t+7$$

すると，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{49(t^2-2t+6)-(3t+7)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{40t^2-140t+245}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8\left(t-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{49}{2}}$$

よって，$t=\dfrac{7}{4}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{49}{2}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{4}$ をとる。

コメント

三角形の面積公式への代入練習とも思える問題です。

問　題

R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\vec{b}$ を満たすとする。

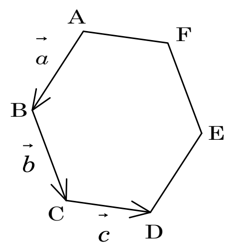
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき, R の面積を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$



(2)　条件より，△ACE と△BDF は重心が一致するので,

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}+\vec{c}$ より,

$$(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{c}$$

よって，$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$ ………(＊)

(3)　(1)より，対角線 AD の中点を中心として，四角形 ABCD を $180°$ 回転すると，四角形 DEFA に重なるので，六角形 R の面積は四角形 ABCD の面積の 2 倍である。

さて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ なので, (＊)から $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=4$，$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}=4$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より,

$$|\vec{a}|^2=5,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{a}|=\sqrt{5}$$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ なので, (＊)から $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=1$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より,

$$|\vec{c}|^2=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$$

また，$|\vec{b}|^2=|\vec{a}+\vec{c}|^2=5+2\cdot(-1)+2=5$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\vec{b}|=\sqrt{5}$

さらに，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=5+2\cdot4+5=18$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{2}$ となり,

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=-1+1=0$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\times5-(-4)^2}=\dfrac{3}{2}$

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3$$

以上より, R の面積は，$(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD})\times2=\left(\dfrac{3}{2}+3\right)\times2=9$ である。

コメント

(3)では，AB = BC であることが気になりましたが，この点は無視して，普通に三角形の面積を計算しました。

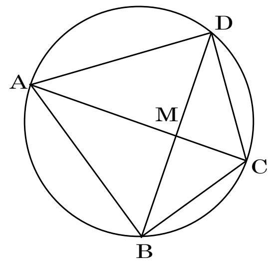
問　題

四角形 ABCD は半径 1 の円に内接し，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$，$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\vec{0}$ を満たしている。このとき次の問いに答えよ。

(1)　直線 AC は線分 BD の中点を通ることを示せ。

(2)　四角形 ABCD の 4 辺の各辺の長さを求めよ。　[2002]

解答例



(1)　$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+2(\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD})=\vec{0}$ より，

$$\frac{\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}}{2}=-2\cdot\frac{\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CD}}{2}$$

BD の中点を M とすると，$\overrightarrow{AM}=-2\overrightarrow{CM}$ ………(∗)

よって, A, M, C は同一直線上にあるので, 直線 AC は線分 BD の中点を通る。

(2)　(1)より，$BM=DM$

また, 条件より $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{BD}=0$ なので，$AC\perp BD$

これより, AC は BD の垂直二等分線となり，$\triangle ABC\equiv\triangle ADC$ となるので,

$$\angle ABC=\angle ADC$$

また, 四角形 ABCD は円に内接するので，$\angle ABC+\angle ADC=180^\circ$ より,

$$\angle ABC=\angle ADC=90^\circ$$

すなわち, AC は半径 1 である四角形 ABCD の外接円の直径となり，$AC=2$ である。

ここで, (∗)より，$AM:MC=2:1$ なので，$AM=2\times\dfrac{2}{3}=\dfrac{4}{3}$

外接円の中心を O とすると，$OM=AM-AO=\dfrac{4}{3}-1=\dfrac{1}{3}$

$$BM=\sqrt{OB^2-OM^2}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

よって，$AB=AD=\sqrt{AM^2+BM^2}=\sqrt{\dfrac{16}{9}+\dfrac{8}{9}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$

$$BC=DC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{4-\frac{24}{9}}=\frac{2\sqrt{3}}{3}$$

コメント

(1)の誘導によって，AC が外接円の直径であることを見つけるのが最大のポイントです。

問　題

四面体 OABC において $\mathrm{OA}=3$，$\mathrm{OB}=4$，$\mathrm{OC}=6$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ とする。OA を $t:1-t$ の比に内分する点を D，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，次の問いに答えよ。

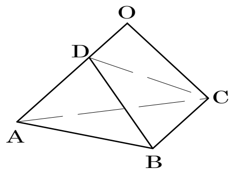
(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\angle\mathrm{BDC}=\theta$ としたとき $\cos\theta$ を t の式で表せ。

(3) 三角形 BDC の面積の最小値を求めよ。　[1999]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{b}-t\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{c}-t\vec{a}$



(2) 条件より，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=4$，$|\vec{c}|=6$

また，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot4\cos60^\circ=6$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=4\cdot6\cos60^\circ=12$

$\vec{c}\cdot\vec{a}=6\cdot3\cos60^\circ=9$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2=|\vec{b}-t\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2t\vec{a}\cdot\vec{b}+t^2|\vec{a}|^2=9t^2-12t+16$

$|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2=|\vec{c}-t\vec{a}|^2=|\vec{c}|^2-2t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2|\vec{a}|^2=9(t^2-2t+4)$

$\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}=(\vec{b}-t\vec{a})\cdot(\vec{c}-t\vec{a})=\vec{b}\cdot\vec{c}-t\vec{a}\cdot\vec{b}-t\vec{c}\cdot\vec{a}+t^2|\vec{a}|^2=3(3t^2-5t+4)$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}}}{|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}=\dfrac{3t^2-5t+4}{\sqrt{9t^2-12t+16}\sqrt{t^2-2t+4}}$

(3) $\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|\sin\theta=\dfrac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{DB}}||\overrightarrow{\mathrm{DC}}|\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2}$

$f(t)=|\overrightarrow{\mathrm{DB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{DB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DC}})^2$ とおくと，$\triangle\mathrm{BCD}=\dfrac{1}{2}\sqrt{f(t)}$

$f(t)=9(9t^2-12t+16)(t^2-2t+4)-9(3t^2-5t+4)^2$

$=9(27t^2-40t+48)=9\cdot27\left(t-\dfrac{20}{27}\right)^2+\dfrac{896}{3}$

よって，$t=\dfrac{20}{27}$ のとき $f(t)$ は最小値 $\dfrac{896}{3}$ をとり，このとき△BCD の面積は最小となる。その最小値は，$\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{896}{3}}=\dfrac{4\sqrt{42}}{3}$ である。

コメント

内容的には基本だけですが，計算がたいへんです。特に(3)の計算では，初めは $f(t)$ を微分して増減表を作り，最小値をとる t の値を求めたのですが，その後，また $f(t)$ からやり直したのが上の解です。

問　題

平面上の三角形 OAB は，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおくとき，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\dfrac{1}{2}$ をみたすとする。辺 AB を 1 : 2 に内分する点を P とし，直線 OP に関して A と対称な点を Q, OQ の延長と AB の交点を R とおく。

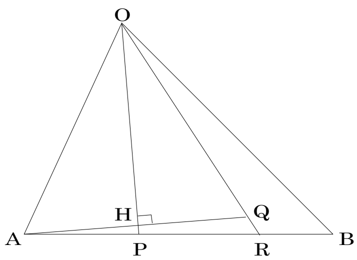
(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ で表せ。

(3) △PQR の面積を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}$ で，AQ と OP の交点を H とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ は $\vec{a}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルとなるので，



$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\left(\vec{a}\cdot\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}\right)\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\frac{\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\dfrac{1}{9}|2\vec{a}+\vec{b}|^2$

$$=\frac{1}{9}\left(4|\vec{a}|^2+4\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\frac{8}{9}$$

$$\vec{a}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}\cdot\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{1}{3}\left(2|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}\right)=\frac{5}{6}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{5}{6}\cdot\dfrac{9}{8}\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{15}{16}\cdot\dfrac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\dfrac{5}{16}(2\vec{a}+\vec{b})$

H は AQ の中点より，$\dfrac{\vec{a}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\vec{a}=\frac{5}{8}(2\vec{a}+\vec{b})-\vec{a}=\frac{1}{4}\vec{a}+\frac{5}{8}\vec{b}$$

(2) R は OQ 上の点なので，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\dfrac{1}{4}k\vec{a}+\dfrac{5}{8}k\vec{b}$

R は AB 上の点なので，$\dfrac{1}{4}k+\dfrac{5}{8}k=1$，$k=\dfrac{8}{7}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{8}{7}\vec{a}+\dfrac{5}{8}\cdot\dfrac{8}{7}\vec{b}=\dfrac{2}{7}\vec{a}+\dfrac{5}{7}\vec{b}$

(3) (2)より，AR : RB = 5 : 2，すなわち $\mathrm{AR}=\dfrac{5}{7}\mathrm{AB}$

条件より，$\mathrm{AP}=\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}$ から，$\mathrm{PR}=\dfrac{5}{7}\mathrm{AB}-\dfrac{1}{3}\mathrm{AB}=\dfrac{8}{21}\mathrm{AB}$

また, (2)で $k=\dfrac{8}{7}$ より，$\mathrm{QR}=\dfrac{1}{8}\mathrm{OR}$

よって，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{8}{21}\cdot\dfrac{1}{8}\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{21}\triangle\mathrm{OAB}$

ここで，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\dfrac{\sqrt{7}}{4}$

以上より，$\triangle\mathrm{PQR}=\dfrac{1}{21}\cdot\dfrac{\sqrt{7}}{4}=\dfrac{\sqrt{7}}{84}$

コメント

よく見かける頻出題です。(1)では正射影ベクトルを利用しましたが，普通に$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=x\vec{a}+y\vec{b}$とおいて，$x$, yの連立方程式を立て，それを解いても構いません。

問　題

b と c を $b^2+4c>0$ を満たす実数として，x に関する 2 次方程式 $x^2-bx-c=0$ の相異なる解を α，β とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ は漸化式 $a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすことを示せ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の項 a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。これを証明せよ。 [2015]

解答例

(1) $b^2+4c>0$ のとき，$x^2-bx-c=0$ の実数解 α，β について，

$$\alpha+\beta=b\,,\ \alpha\beta=-c\ \cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$a_n=\alpha^{n-1}+\beta^{n-1}\ \cdots\cdots②$から，①と合わせて，

$$\begin{aligned}ba_{n+1}+ca_n&=(\alpha+\beta)(\alpha^n+\beta^n)-\alpha\beta(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})\\&=\alpha^{n+1}+\alpha\beta^n+\alpha^n\beta+\beta^{n+1}-(\alpha^n\beta+\alpha\beta^n)=\alpha^{n+1}+\beta^{n+1}\end{aligned}$$

よって，$a_{n+2}=ba_{n+1}+ca_n\ \cdots\cdots③$が成立する。

(2) a_n がすべて整数のとき，①②から，$a_1=\alpha^0+\beta^0=2$，$a_2=\alpha^1+\beta^1=b$

これより b は整数となり，③から，$a_3=ba_2+ca_1$，$a_4=ba_3+ca_2$ となり，

$$2c=a_3-ba_2\ \cdots\cdots\cdots④,\ bc=a_4-ba_3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

また，①②から $a_3=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=b^2+2c$ となり，③から，

$$a_5=ba_4+ca_3\,,\ (b^2+2c)c=a_5-ba_4\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑤⑥より，$2c$，bc，$(b^2+2c)c$ はすべて整数である。

さて，$2c$ が整数より，k を整数として $c=\dfrac{k}{2}$ とおくことができる。

ここで，k が奇数と仮定すると，$bc=\dfrac{bk}{2}$ が整数より b は偶数となる。

ところが，$(b^2+2c)c=\dfrac{(b^2+k)k}{2}$ は，分子 $(b^2+k)k$ が奇数より，整数ではない。

したがって，k は奇数ではなく偶数となり，c も整数である。

逆に，b, c がともに整数であるとき，$a_1=2$，$a_2=b$ はともに整数であり，③から，帰納的に a_n $(n=3,\ 4,\ 5,\ \cdots)$ はすべて整数となる。

以上より，a_n がすべて整数であるための必要十分条件は，b，c がともに整数であることである。

コメント

隣接 3 項間型の漸化式が題材となっている証明問題です。(2)の設問は，見かけよりは難しめで，詰めに時間がかかりました。

問　題

座標平面上に，円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ と点 Q$(1,\ 2)$ がある。点 P_1 の座標を $(3,\ 0)$ とし，x 軸上の点 P_2，P_3，…を以下の条件によって決め，P_n の座標を $(p_n,\ 0)$ とする。

点 P_n から円 C に接線を引き，その y 座標が正である接点を T_n とする。このとき，3 点 Q，T_n，P_{n+1} は同一直線上にある。$(n=1,\ 2,\ \cdots)$

このとき，以下の問いに答えよ。

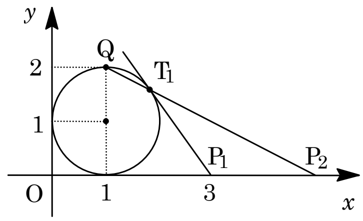
(1) 点 T_1 の座標を求めよ。

(2) 点 P_2 の座標を求めよ。

(3) 点 T_n の座標を p_n の式で表せ。

(4) 点 P_n の座標を n の式で表せ。　[2014]

解答例



(1) 円 $C:(x-1)^2+(y-1)^2=1$ 上の点 $\mathrm{T}_1(x_1,\ y_1)$ における接線の方程式は，

$$(x_1-1)(x-1)+(y_1-1)(y-1)=1$$

点 $\mathrm{P}_1(3,\ 0)$ を通ることより，

$$2(x_1-1)-(y_1-1)=1,\ y_1=2x_1-2\ \cdots\cdots①$$

$(x_1-1)^2+(y_1-1)^2=1$ と連立すると，$(x_1-1)^2+(2x_1-3)^2=1$ から，

$$5x_1^{\ 2}-14x_1+9=0,\ (x_1-1)(5x_1-9)=0$$

よって，$x_1\neq 1$ から $x_1=\dfrac{9}{5}$，①から $y_1=\dfrac{8}{5}$ となり，$\mathrm{T}_1\left(\dfrac{9}{5},\ \dfrac{8}{5}\right)$ である。

(2) 直線 QT_1 は，傾きが $\left(\dfrac{8}{5}-2\right)\Big/\left(\dfrac{9}{5}-1\right)=-\dfrac{1}{2}$ より，その方程式は，

$$y-2=-\frac{1}{2}(x-1),\ y=-\frac{1}{2}x+\frac{5}{2}$$

x 軸との交点は，$0=-\dfrac{1}{2}x+\dfrac{5}{2}$ より $x=5$ となり，$\mathrm{P}_2(5,\ 0)$ である。

(3) (1)と同様にして，$\mathrm{T}_n(x_n,\ y_n)$ とおくと，接線の方程式は，

$$(x_n-1)(x-1)+(y_n-1)(y-1)=1$$

点 $\mathrm{P}_n(p_n,\ 0)$ を通ることより，$(p_n-1)(x_n-1)-(y_n-1)=1$

$$y_n=(p_n-1)(x_n-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

$(x_n-1)^2+(y_n-1)^2=1$ と連立すると，$(x_n-1)^2+\{(p_n-1)(x_n-1)-1\}^2=1$

$$\{1+(p_n-1)^2\}(x_n-1)^2-2(p_n-1)(x_1-1)=0$$

よって，$x_n\neq 1$ から，$x_n=\dfrac{2(p_n-1)}{1+(p_n-1)^2}+1=\dfrac{p_n^{\ 2}}{p_n^{\ 2}-2p_n+2}$

②から $y_n=\dfrac{2(p_n-1)^2}{{p_n}^2-2p_n+1}$ となり，$\mathrm{T}_n\left(\dfrac{{p_n}^2}{{p_n}^2-2p_n+2},\ \dfrac{2(p_n-1)^2}{{p_n}^2-2p_n+2}\right)$ である。

(4)　(2)と同様にして，直線 QT_n は，傾きが $\left(\dfrac{2(p_n-1)^2}{{p_n}^2-2p_n+2}-2\right)\Big/\left(\dfrac{{p_n}^2}{{p_n}^2-2p_n+2}-1\right)$

すなわち $-\dfrac{1}{p_n-1}$ より，その方程式は，$y-2=-\dfrac{1}{p_n-1}(x-1)$ である。

x 軸との交点 P_{n+1} の x 座標は，$-2=-\dfrac{1}{p_n-1}(x-1)$ より $x=2p_n-1$ となり，

$$p_{n+1}=2p_n-1,\ \ p_{n+1}-1=2(p_n-1)$$

すると，$p_1=3$ から，$p_n-1=(p_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^n$ となり，$p_n=2^n+1$

よって，$\mathrm{P}_n(2^n+1,\ 0)$ である。

コメント

数列の図形への応用です。なお，(3)と(4)を先に記述するとよいかもしれません。

問　題

整数 $p,\ q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1) $n,\ k$ が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1)
$$
\begin{aligned}
{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)&=\frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\left\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!}-\frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\right\}\\
&=\frac{n+k+1}{k+1}-\frac{n+1}{k+1}=\frac{k}{k+1}
\end{aligned}
$$

(2) (1)の等式について，$k=2$ とすると，

$$
{}_{n+3}\mathrm{C}_3\times\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)=\frac{2}{3},\quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)
$$

これより，m が 3 以上の整数のとき，$S=\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
S&=\sum_{n=0}^{m-3}\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3}=\frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)\\
&=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)+\cdots+\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)\\
&=\frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2}-\frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right)=\frac{3}{2}\left\{1-\frac{2}{m(m-1)}\right\}=\frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}
\end{aligned}
$$

コメント

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。

問　題

1より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n\geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

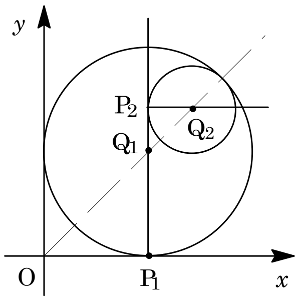
(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$0<a<1$ から，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ は，中心 $(1-a,\ 1-a)$ で半径 $\sqrt{2}a$ である。



ここで，$a=a_1$ のとき，$C(a_1)$ が x 軸と接する条件は，

$$1-a_1=\sqrt{2}a_1,\ (\sqrt{2}+1)a_1=1$$

よって，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

(2)　(1)より，$\mathrm{P}_1(2-\sqrt{2},\ 0)$，$\mathrm{Q}_1(2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$ となり，直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ は $x=2-\sqrt{2}$ である。

条件より，円 $C(a_2)$ は直線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ と接することより，

$$|(1-a_2)-(2-\sqrt{2})|=\sqrt{2}a_2,\ \sqrt{2}-1-a_2=\pm\sqrt{2}a_2$$

(i)　$\sqrt{2}-1-a_2=\sqrt{2}a_2$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=\sqrt{2}-1$ より，$a_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

(ii)　$\sqrt{2}-1-a_2=-\sqrt{2}a_2$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_2=\sqrt{2}-1$ となり，$0<a_2<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_2=3-2\sqrt{2}$ である。

(3)　円 $C(a_n)$ は中心 $(1-a_n,\ 1-a_n)$ で半径 $\sqrt{2}a_n$ であり，直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ は $x=1-a_{n-1}$ または $y=1-a_{n-1}$ である。

条件より，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ が接するので，

$$|(1-a_n)-(1-a_{n-1})|=\sqrt{2}a_n,\ a_{n-1}-a_n=\pm\sqrt{2}a_n$$

(i)　$a_{n-1}-a_n=\sqrt{2}a_n$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=a_{n-1}$ より，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}a_{n-1}=(\sqrt{2}-1)a_{n-1}=a_1(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

(1)より，$a_1=\sqrt{2}-1$ なので，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$

(ii)　$a_{n-1}-a_n=-\sqrt{2}a_n$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_n=a_{n-1}$ となり，$0<a_n<1$，$0<a_{n-1}<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$ である。

コメント

(3)では，n を偶奇に分けて処理が必要かとも思いましたが，対称性から不要でした。なお，円 $C(a)$ は a の値にかかわらず定点 $(1,\ 1)$ を通ることに注目すると，場合分けが必要ありません。

問　題

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

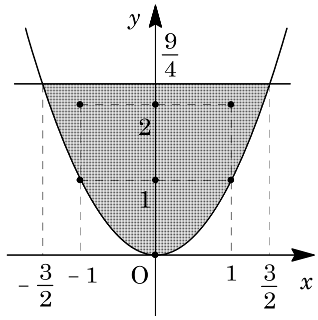
とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　$a,\ b$ がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，$a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　$a=0$ のとき，$D: x^2\leqq y\leqq b$ であり，境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は，$x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより，D の面積は，

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3=\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より，$\dfrac{4}{3}(\sqrt{b})^3=\dfrac{9}{2}$ となり，$\sqrt{b}=\dfrac{3}{2}$，$b=\dfrac{9}{4}$

よって，D に含まれる格子点は，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ となり，その個数は 7 個である。

(2)　$D: x^2\leqq y\leqq ax+b$ に対して，境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は，

$$x^2-ax-b=0,\quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで，$\alpha=\dfrac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$，$\beta=\dfrac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと，D の面積は，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3$$

条件より，$\dfrac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3=\dfrac{9}{2}$ となり，$\sqrt{a^2+4b}=3$，$a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき，$\alpha=\dfrac{a-3}{2}$，$\beta=\dfrac{a+3}{2}$ である。

さて，$a,\ b$ は整数なので，(＊)から a は奇数となり，α，β はともに整数である。

すると，D に含まれる格子点の個数は，$\dfrac{a-3}{2}=\alpha\leqq x\leqq\beta=\dfrac{a+3}{2}$ において，

(i)　$x=\dfrac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより，1 個である。

(ii)　$x=\dfrac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\dfrac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\dfrac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は,

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\dfrac{a+3}{2}$ のとき　格子点は$(\beta,\ \beta^2)$のみより，1 個である。

(i)～(iv)より，格子点の個数は, a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

コメント

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2)　$a,\ b$ を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。　[2008]

解答例

(1)　x は有理数より, $p\,(>0)$, q を互いに素な整数として, $x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができ,

$$7x^2=\frac{7q^2}{p^2}$$

条件より, $7x^2$ は整数なので, p^2 は $7q^2$ の約数である。

ところが, p と q は互いに素なので, p^2 と q^2 も互いに素であり, p^2 は素数 7 の約数, すなわち $p^2=1$ または $p^2=7$ である。

すると, p は自然数より, $p=1$ となり, つまり x は整数である。

(2)　$k,\ l$ を整数とし, $a,\ b$ を偶数, 奇数に分けて考える。

(i)　$a=2k$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l)^2=4(k^2-7l^2)$$

(ii)　$a=2k$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l+1)^2=4(k^2-7l^2-7l-2)+1$$

(iii)　$a=2k+1$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l)^2=4(k^2+k-7l^2)+1$$

(iv)　$a=2k+1$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l+1)^2=4(k^2+k-7l^2-7l-2)+2$$

(i)～(iv)より, a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数である。

(3)　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2=\dfrac{r^2-7(2s)^2}{4}$ が整数のとき, $r^2-7(2s)^2$ は 4 の倍数となり, しかも r が整数より, $7(2s)^2$ は整数となる。

すると, s は有理数なので, (1)から, $2s$ は整数である。

そこで, (2)の結果を用いると, r と $2s$ はともに偶数となることより, s は整数である。

コメント

(1)と(2)が, (3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

問　題

n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。　[2007]

解答例

(1)　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ より, n が奇数のとき，$n-1$，$n+1$ は連続する偶数となり, 一方は 4 の倍数, もう一方は 4 の倍数でない偶数である。

よって，n^2-1 は 8 の倍数である。

(2)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ より，$n-1$，n, $n+1$ は連続する 3 つの整数なので, いずれか 1 つは 3 の倍数である。

よって，n^5-n は 3 の倍数である。

(3)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2-4+5)$

$$=(n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2)+5\}$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$$

これより，$n-2$，$n-1$，n, $n+1$，$n+2$ は連続する 5 つの整数なので, いずれか 1 つは 5 の倍数である。また，$5(n-1)n(n+1)$ は 5 の倍数である。

よって，n^5-n は 5 の倍数となる。

そこで, (1)から $n^5-n=(n^2-1)n(n^2+1)$ は 8 の倍数, (2)から n^5-n は 3 の倍数であることを考え合わせると, 8, 3, 5 が互いに素より，n^5-n は $8\times3\times5=120$ の倍数となる。

コメント

(3)では, n を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし, 記述量が多くなるため, (2)をヒントに式変形を考えたのが上の解です。

問　題

n を自然数とする。n 次多項式 $P_n(x)$ は，$n+1$ 個の整数 $k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対して，$P_n(k)=2^k-1$ を満たす。

(1)　$P_2(x)-P_1(x)$ および $P_3(x)-P_2(x)$ を因数分解せよ。

(2)　$P_n(x)$ を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$P_1(x)$ は 1 次多項式で，$P_1(0)=2^0-1=0$，$P_1(1)=2^1-1=1$ となるので，

$$P_1(x)=x$$

さて，$Q_1(x)=P_2(x)-P_1(x)$ とすると，$Q_1(x)$ は 2 次多項式で，

$$Q_1(0)=P_2(0)-P_1(0)=0-0=0,\ Q_1(1)=P_2(1)-P_1(1)=1-1=0$$

これから，$Q_1(x)=a_1x(x-1)\ (a_1\neq 0)$ とおくことができ，

$$P_2(x)=P_1(x)+Q_1(x)=x+a_1x(x-1)$$

そこで，$P_2(2)=2^2-1=3$ より，$3=2+2a_1$，$a_1=\dfrac{1}{2}$

したがって，$Q_1(x)=P_2(x)-P_1(x)=\dfrac{1}{2}x(x-1)$

同様にして，$Q_2(x)=P_3(x)-P_2(x)$ とすると，$Q_2(x)$ は 3 次多項式となり，$Q_2(0)=Q_2(1)=Q_2(2)=0$ より，$Q_2(x)=a_2x(x-1)(x-2)\ (a_2\neq 0)$ とおける。

$$P_3(x)=P_2(x)+Q_2(x)=P_1(x)+Q_1(x)+Q_2(x)$$
$$=x+\frac{1}{2}x(x-1)+a_2x(x-1)(x-2)$$

$P_3(3)=2^3-1=7$ より，$7=3+3+6a_2$，$a_2=\dfrac{1}{6}$

したがって，$Q_2(x)=P_3(x)-P_2(x)=\dfrac{1}{6}x(x-1)(x-2)$

(2)　(1)と同様に，$Q_n(x)=P_{n+1}(x)-P_n(x)$ とすると，$Q_n(x)$ は n 次多項式となり，$Q_n(0)=Q_n(1)=Q_n(2)=\cdots=Q_n(n)=0$ から，

$$Q_n(x)=a_nx(x-1)(x-2)\cdots(x-n)\quad(a_n\neq 0)$$

以下，$a_n=\dfrac{1}{(n+1)!}$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{1}{(1+1)!}=\dfrac{1}{2}$ より，成立する。

(ii)　$n\leqq l$ のとき　$a_1=\dfrac{1}{(1+1)!}$，$a_2=\dfrac{1}{(2+1)!}$，$\cdots$，$a_l=\dfrac{1}{(l+1)!}$ と仮定すると，

$$P_{l+1}(x)=P_l(x)+Q_l(x)=P_1(x)+Q_1(x)+Q_2(x)+\cdots+Q_l(x)$$
$$=x+\frac{x(x-1)}{2!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-l)}{(l+1)!}$$

このとき，$P_{l+2}(x)=P_{l+1}(x)+Q_{l+1}(x)$

$$=P_{l+1}(x)+a_{l+1}x(x-1)(x-2)\cdots(x-l)(x-l-1)$$

ここで，$x=l+2$を代入すると，

$$2^{l+2}-1=(l+2)+\frac{(l+2)(l+1)}{2!}+\frac{(l+2)(l+1)l}{3!}+\cdots+\frac{(l+2)(l+1)l\cdot\cdots\cdot 2}{(l+1)!}$$
$$+a_{l+1}(l+2)(l+1)l\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1$$

$$2^{l+2}-{}_{l+2}\mathrm{C}_0={}_{l+2}\mathrm{C}_1+{}_{l+2}\mathrm{C}_2+{}_{l+2}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1}+a_{l+1}(l+2)!$$

すると，$a_{l+1}(l+2)!=2^{l+2}-({}_{l+2}\mathrm{C}_0+{}_{l+2}\mathrm{C}_1+{}_{l+2}\mathrm{C}_2+{}_{l+2}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1})$

$$=(1+1)^{l+2}-({}_{l+2}\mathrm{C}_0+{}_{l+2}\mathrm{C}_1+{}_{l+2}\mathrm{C}_2+{}_{l+2}\mathrm{C}_3+\cdots+{}_{l+2}\mathrm{C}_{l+1})$$
$$={}_{l+2}\mathrm{C}_{l+2}=1$$

よって，$a_{l+1}=\dfrac{1}{(l+2)!}$となり，$n=l+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{1}{(n+1)!}$すなわち$Q_n(x)=\dfrac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n)}{(n+1)!}$となる。

以上より, $n\geqq 2$ において,

$$P_n(x)=x+\frac{x(x-1)}{2!}+\frac{x(x-1)(x-2)}{3!}+\cdots+\frac{x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)}{n!}$$

なお，$n=1$のときも，$P_1(x)=x$より成立する。

コメント

最初は，与えられた条件を連立方程式に直して，$P_1(x)=x$，$P_2(x)=\dfrac{1}{2}x(x+1)$，$P_3(x)=\dfrac{1}{6}x(x^2+5)$を導きました。しかし，この方法では，(2)に繋がりません。そこで，考え直したのが上の解です。決してやさしくはありませんが，演習する価値のある問題です。

問　題

数列$\{a_n\}$は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$a_1=\dfrac{1}{2}$　　　(ii)　$n\geqq 2$ について，$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である。

(1)　a_2を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。

(3)　S_n を求めよ。

(4)　$n\geqq 2$ に対して，a_n を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$……①に$n=2$を代入すると，$a_2=\dfrac{2{S_2}^2}{2S_2-1}=\dfrac{2(a_1+a_2)^2}{2(a_1+a_2)-1}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ より，$2a_2\left(\dfrac{1}{2}+a_2\right)-a_2=2\left(\dfrac{1}{2}+a_2\right)^2$ となり，$a_2=-\dfrac{1}{4}$

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_n=S_n-S_{n-1}$ より，①から，$\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}=S_n-S_{n-1}$

$$2{S_n}^2=(S_n-S_{n-1})(2S_n-1),\ (2S_{n-1}+1)S_n=S_{n-1}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$S_{n-1}=-\dfrac{1}{2}$ とすると②は不成立なので，$S_n=\dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$………③

(3)　ある n で$S_n=0$とすると，③より$S_{n-1}=0$となり，帰納的に$S_1=0$となるが，これは$S_1=a_1=\dfrac{1}{2}$に反する。よって，どんなnに対しても$S_n\neq 0$である。

③より，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2S_{n-1}+1}{S_{n-1}}=2+\dfrac{1}{S_{n-1}}$なので,

$$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+2(n-1)=2+2(n-1)=2n,\ S_n=\frac{1}{2n}$$

(4)　①より, $n\geqq 2$ で，$a_n=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{4n^2}}{2\cdot\dfrac{1}{2n}-1}=\dfrac{1}{2n-2n^2}=\dfrac{1}{2n(1-n)}$

コメント

いわゆる和と一般項の関係を用いる問題です。(1)から(3)まで，親切すぎるほどの誘導がついています。

問　題

$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_n=3(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ で与えられる数列$\{a_n\}$がある。ただし，S_nは$\{a_n\}$の初項から第n項までの和である。

(1) a_2を求めよ。

(2) $\sqrt{S_n}$ を求めよ。

(3) a_nを求めよ。 [1999]

解答例

(1) 条件より，$a_n=3(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=\dfrac{3(S_n-S_{n-1})}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}=\dfrac{3a_n}{\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}}$

$a_n\neq 0$なので，$\sqrt{S_n}+\sqrt{S_{n-1}}=3$ $(n\geqq 2)$ ………①

①に$n=2$を代入すると，$\sqrt{S_2}+\sqrt{S_1}=3$，$\sqrt{a_1+a_2}+\sqrt{a_1}=3$

$a_1=1$より，$\sqrt{1+a_2}+1=3$，$a_2=3$

(2) ①より，$\sqrt{S_n}=-\sqrt{S_{n-1}}+3$，$\sqrt{S_1}=\sqrt{a_1}=1$

$$\sqrt{S_n}-\frac{3}{2}=-\left(\sqrt{S_{n-1}}-\frac{3}{2}\right)$$

よって，$\sqrt{S_n}-\dfrac{3}{2}=\left(\sqrt{S_1}-\dfrac{3}{2}\right)(-1)^{n-1}=-\dfrac{1}{2}(-1)^{n-1}$

$$\sqrt{S_n}=\frac{1}{2}\left\{3-(-1)^{n-1}\right\}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(3) (2)より，$a_n=3(\sqrt{S_n}-\sqrt{S_{n-1}})=\dfrac{3}{2}\left\{3-(-1)^{n-1}\right\}-\dfrac{3}{2}\left\{3-(-1)^{n-2}\right\}$

$$=\left(\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)(-1)^{n-2}=3(-1)^n\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②に$n=1$をあてはめると，$a_1=-3$となり不成立。

よって，$a_1=1$，$a_n=3(-1)^n$ $(n\geqq 2)$

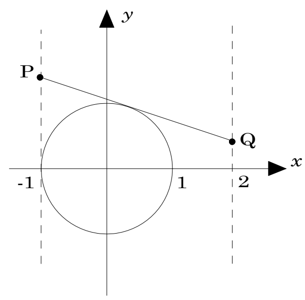
コメント

①のように，与えられた漸化式を予め変形しておくと，解を求めやすくなります。

問　題

座標平面において, 2 点 P, Q をそれぞれ直線 $x=-1$, $x=2$ 上の点とし, 直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき, 2 点 P, Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。 [1998]

解答例



$P(-1,\ a)$, $Q(2,\ b)$ とする。

$\overrightarrow{PQ}=(3,\ b-a)$ から, 直線 PQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a-b,\ 3)$ とおくことができる。

直線 PQ の方程式は,

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するので,

$\dfrac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1$ から, $|-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$

両辺 2 乗して, $(2a+b)^2=(a-b)^2+9$, $(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

a, b は整数より, a は 3 の約数となり, $a=\pm1,\ \pm3$

$a=1$ のとき $a+2b=3$ から, $b=1$ となる。よって, $P(-1,\ 1)$, $Q(2,\ 1)$

$a=-1$ のとき $a+2b=-3$ から, $b=-1$ となる。よって, $P(-1,\ -1)$, $Q(2,\ -1)$

$a=3$ のとき $a+2b=1$ から, $b=-1$ となる。よって, $P(-1,\ 3)$, $Q(2,\ -1)$

$a=-3$ のとき $a+2b=-1$ から, $b=1$ となる。よって, $P(-1,\ -3)$, $Q(2,\ 1)$

コメント

円と直線が接する条件を整理すると, 約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に P, Q の座標が求まってしまいます。

問　題

1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・ 1 回目は，出た目が得点になる。

・ 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・ 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。

(3) p_n が最大となるような n と，そのときの p_n を求めよ。 [2017]

解答例

(1) 題意の総得点 n が最大となるのは，3 回の出た目が 6, 5, 4 の場合で，最大値は $n=6+5+4=15$ である。このときの確率 p_{15} は，

$$p_{15}=3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

また，総得点 n が最小となるのは，3 回の出た目が 1, 1, 1 の場合で，最小値は $n=1+0+0=1$ である。このときの確率 p_1 は，

$$p_1=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(2) 総得点が 6 のとき，3 回の出た目について同じ目の出方で場合分けをする。

(i) 同じ目が出なかったとき

出た目が 1, 2, 3 の場合だけであり，このときの確率は $3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6}{216}$ である。

(ii) 同じ目が 2 回出たとき

出た目が 1, 1, 5 または 1, 5, 5 または 2, 2, 4 または 2, 4, 4 の場合であり，このときの確率は，

$$\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=4\cdot 3\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{12}{216}$$

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が 6, 6, 6 の場合だけであり，このときの確率は $\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$ である。

(i)～(iii)より，総得点 6 の確率 p_6 は，$p_6=\frac{6}{216}+\frac{12}{216}+\frac{1}{216}=\frac{19}{216}$

(3) 題意の総得点 n の値の範囲は，(1)から $1\leqq n\leqq 15$ である。そして，(2)と同様に，同じ目の出方について，場合分けをする。

(i)　同じ目が出なかったとき

出た目が a, b, c $(a<b<c)$ のとき，n の値とその出方 N 通りの関係は,

n	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	$3!$	$3!$	$2\cdot3!$	$3\cdot3!$	$3\cdot3!$	$3\cdot3!$	$3\cdot3!$	$2\cdot3!$	$3!$	$3!$

(ii)　同じ目が 2 回出たとき

出た目が a, a, b か a, b, b $(a<b)$ のとき，n の値とその出方 N 通りの関係は,

n	3	4	5	6	7	8	9	10	11
N	$2\cdot3$	$2\cdot3$	$4\cdot3$	$4\cdot3$	$6\cdot3$	$4\cdot3$	$4\cdot3$	$2\cdot3$	$2\cdot3$

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

出た目が a だけのとき，n の値とその出方 N 通りの関係は,

n	1	2	3	4	5	6
N	1	1	1	1	1	1

(i)～(iii)より，n の値とその出方 N 通りの関係をまとめると,

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15
N	1	1	7	7	13	19	24	24	30	24	24	18	12	6	6

以上より，$n=9$ のとき N の値が最大となるので，p_n の最大値は,

$$p_9=30\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{5}{36}$$

コメント

確率の標準的な問題です。理系単独の(3)は，1 組の出た目について，その確率がすべて $\left(\frac{1}{6}\right)^3$ であることに着目して，出た目のパターンの数を全調査しました。時間はかなりかかりましたが。

問　題

数直線上の点 Q は，はじめは原点$x=0$にあり，さいころを投げるたびに以下のルールに従って移動する。Q が$x=a$にあるとき，

・ 出た目が 1 ならば$x=a$にとどまる。

・ 出た目が 2, 3 ならば$x=a+1$へ動く。

・ 出た目が 4, 5, 6 ならば$x=0$に戻る（$a=0$ならば動かない)。

(1) 整数$a\geqq 0$に対して，さいころを 3 回投げたとき，Q が$x=a$にある確率を求めよ。

(2) さいころをn回投げたとき，Q が$x=0$にある確率を求めよ。

(3) さいころをn回投げたとき，Q が$x=1$にある確率を求めよ。 [2016]

解答例

(1) さいころを 3 回投げ Q が$x=a$にある確率を，aの値で場合分けをして求める。

(i) $a\geqq 4$のとき

到達点は$a\leqq 3$なので，このときの確率は 0 である。

(ii) $a=3$のとき

$0\to1\to2\to3$ の場合のみより，このときの確率は$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$である。

(iii) $a=2$のとき

$0\to0\to1\to2$，$0\to1\to1\to2$，$0\to1\to2\to2$ の場合があり，これらの確率はそれぞれ$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{2}{27}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{54}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{54}$である。

よって，このときの確率は$\dfrac{2}{27}+\dfrac{1}{54}+\dfrac{1}{54}=\dfrac{1}{9}$である。

(iv) $a=1$のとき

$0\to0\to0\to1$，$0\to0\to1\to1$，$0\to1\to0\to1$，$0\to1\to1\to1$ の場合があり，これらの確率はそれぞれ$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$，$\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{27}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{1}{18}$，$\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{108}$である。

よって，このときの確率は$\dfrac{4}{27}+\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{18}+\dfrac{1}{108}=\dfrac{1}{4}$である。

(v) $a=0$のとき

このときの確率は，(i)～(iv)の結果から，$1-\dfrac{1}{27}-\dfrac{1}{9}-\dfrac{1}{4}=\dfrac{65}{108}$である。

(2) さいころをn回投げ，Q が$x=0$，$x\neq 0$にある確率をそれぞれp_n，q_nとおくと，

$$p_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{2}q_n=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{2}(1-p_n)=\frac{1}{6}p_n+\frac{1}{2}$$

すると，$p_{n+1}-\dfrac{3}{5}=\dfrac{1}{6}\left(p_n-\dfrac{3}{5}\right)$となり，$p_1=\dfrac{2}{3}$から，

$$p_n-\frac{3}{5}=\left(p_1-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{3}-\frac{3}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{15}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{15}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}+\dfrac{3}{5}$ である。

(3) さいころを n 回投げ，Q が $x=1$ にある確率を r_n とおくと，$r_1=\dfrac{1}{3}$ で，(2)から，

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{1}{6}r_n=\frac{1}{6}r_n+\frac{1}{45}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{1}{5}$$

すると，両辺に 6^n をかけて，$6^n r_{n+1}=6^{n-1}r_n+\dfrac{2}{15}+\dfrac{1}{5}\cdot 6^n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$6^{n-1}r_n=6^0 r_1+\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{2}{15}+\frac{1}{5}\cdot 6^k\right)=\frac{1}{3}+\frac{2}{15}(n-1)+\frac{1}{5}\cdot\frac{6(6^{n-1}-1)}{6-1}$$

$$=\frac{2}{15}n+\frac{1}{25}\cdot 6^n-\frac{1}{25}$$

$$r_n=\frac{2}{15}n\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6}{25}-\frac{1}{25}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{2}{15}n-\frac{1}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6}{25}$$

$n=1$ をあてはめると，$r_1=\dfrac{2}{15}-\dfrac{1}{25}+\dfrac{6}{25}=\dfrac{1}{3}$ となり成立するので，

$$r_n=\left(\frac{2}{15}n-\frac{1}{25}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{6}{25}$$

コメント

設定が微妙に複雑な確率の問題です。(1)では，記述を省略しましたが，樹系図を書いて数えもれのチェックをしています。また，(2)は直接的に求めようかとも思いましたが，無難な漸化式という方針を採用しました。また，(3)は(2)の結果を利用しましたが，漸化式がやや複雑なタイプです。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

コインを n 回続けて投げ，1 回投げるごとに次の規則に従って得点を得るゲームをする。

・コイン投げの第 1 回目には，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と異なる面が出たら，1 点を得点とする。

・コイン投げの第 2 回目以降において，ひとつ前の回と同じ面が出たら，2 点を得点とする。

たとえば，コインを 3 回投げて(裏，表，裏)の順に出たときの得点は，$1+1+1=3$ より 3 点となる。また(裏，裏，表)の順に出たときの得点は，$1+2+1=4$ より 4 点となる。コインの表と裏が出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{2}$とし，このゲームで得られる得点が m となる確率を$P_{n,m}$とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ が与えられたとき，$P_{n,2n-1}$ と $P_{n,2n-2}$ を求めよ。

(2)　$n\leqq m\leqq 2n-1$ について，$P_{n,m}$ を n と m の式で表せ。　[2015]

解答例

(1)　コインを n 回続けて投げ，第 1 回目は 1 点，第 2 回目以降は前の回と異なる面が出たら 1 点，同じ面が出たら 2 点というゲームをする。

このとき，得られる得点が $2n-1$ 点の場合は，$2n-1=1+2(n-1)$ から，第 2 回目以降に第 1 回目と同じ面が出続けることより，その確率 $P_{n,2n-1}$ は，

$$P_{n,2n-1}=1\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

また，得られる得点が $2n-2$ 点の場合は，$2n-2=1+\{1\cdot 1+2(n-2)\}$ から，第 2 回目以降に前の回と異なる面が 1 回だけ出ることより，その確率 $P_{n,2n-2}$ は，

$$P_{n,2n-2}=1\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_1\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(n-1)\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

(2)　得られる得点が m 点 $(n\leqq m\leqq 2n-1)$ の場合，第 2 回目以降に前の回と異なる面が k 回だけ出るとすると，

$$m=1+\{1\cdot k+2(n-1-k)\},\quad m=2n-1-k$$

すると，$k=2n-m-1$ となり，その確率 $P_{n,m}$ は，

$$P_{n,m}=1\cdot {}_{n-1}\mathrm{C}_{2n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-n}=\frac{(n-1)!}{(2n-m-1)!(m-n)!}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なお，この式は $n=1$ のときも満たしている。

コメント

反復試行の確率の問題です。一見，二重数列が現れるかとも思いましたが，その予測に反して直接的に計算できました。

問　題

袋の中に，赤玉が 3 個，白玉が 7 個が入っている。袋から玉を無作為に 1 つ取り出し，色を確認してから，再び袋に戻すという試行を行う。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回（ただし $0\leqq A\leqq N$）取り出す確率を $p(N,\ A)$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 確率 $p(N,\ A)$ を N と A を用いて表せ。

(2) N が 10 の倍数，すなわち $N=10n$ となる自然数 n があるとする。確率 $p(10n,\ 0)$，$p(10n,\ 1)$，…，$p(10n,\ 10n)$ のうち，一番大きな値は $p(10n,\ 3n)$ であることを次の手順により証明せよ。

(i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して，$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$ を示す。ただし $0!=1$ とする。

(ii) 0 以上 $10n$ 以下の整数 m に対して，$\dfrac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}\leqq 1$ を示す。　[2014]

解答例

(1) 袋から玉を無作為に 1 つ取り出したとき，赤玉である確率は $\dfrac{3}{10}$，白玉である確率は $\dfrac{7}{10}$ である。この試行を N 回繰り返したときに，赤玉を A 回取り出す確率は，

$$p(N,\ A)={}_N\mathrm{C}_A\left(\frac{3}{10}\right)^A\left(\frac{7}{10}\right)^{N-A}=\frac{N!}{A!(N-A)!}\cdot\frac{3^A\cdot 7^{N-A}}{10^N}$$

(2) (i) 0 以上の整数 a，自然数 b に対して，

(a) $a<b$ のとき　$\dfrac{b!}{a!}=(a+1)(a+2)\cdots(b-1)b<b^{b-a}$

(b) $a=b$ のとき　$\dfrac{b!}{a!}=1=b^{b-a}$

(c) $a>b$ のとき　$\dfrac{b!}{a!}=\dfrac{1}{(b+1)(b+2)\cdots(a-1)a}<\dfrac{1}{b^{a-b}}=b^{b-a}$

(a)〜(c)より，$\dfrac{b!}{a!}\leqq b^{b-a}$ ………(＊)

(ii) $0\leqq m\leqq 10n$ のとき，(1)から，$p(10n,\ m)=\dfrac{(10n)!}{m!(10n-m)!}\cdot\dfrac{3^m\cdot 7^{10n-m}}{10^{10n}}$

$$p(10n,\ 3n)=\frac{(10n)!}{(3n)!(7n)!}\cdot\frac{3^{3n}\cdot 7^{7n}}{10^{10n}}$$

すると，(＊)を利用して，

$$\begin{aligned}\frac{p(10n,\ m)}{p(10n,\ 3n)}&=\frac{(3n)!(7n)!}{m!(10n-m)!}\cdot\frac{3^m\cdot 7^{10n-m}}{3^{3n}\cdot 7^{7n}}\\&\leqq(3n)^{3n-m}\cdot(7n)^{7n-10n+m}\cdot 3^{m-3n}\cdot 7^{10n-m-7n}\\&=3^{3n-m}\cdot n^{3n-m}\cdot 7^{-3n+m}\cdot n^{-3n+m}\cdot 3^{m-3n}\cdot 7^{3n-m}=1\end{aligned}$$

これより，$p(10n,\ 3n)\geqq p(10n,\ m)$ となり，$p(10n,\ 3n)$ が最大である。

コメント

反復試行の確率の最大値を題材とした問題です。(2)の(i)の誘導に従えば，方針に迷いは生じません。

問　題

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。

(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

解答例

(1)　9 枚のカードを無作為に 1 列に並べる $9!$ 通りが同様に確からしい。

さて，番号 1 のカードと番号 2 のカードが隣り合うのは，この 2 枚のカードの位置も考えると，$2!\times 8!$ 通りとなる。

よって，番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない確率は，

$$1-\frac{2!\times 8!}{9!}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

(2)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間の 1 枚のカードの選び方が 7 通りなので，番号 8 と番号 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがある場合は，この 2 枚のカードの位置も考えると，$7\times 2!\times 7!$ 通りとなる。すると，その確率は，

$$\frac{7\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{7}{36}$$

(3)　番号 1 と 2 のカードが隣り合わず，しかも番号 8 と 9 のカードの間にちょうど 1 枚のカードがあるのは，番号 8 と 9 のカードの間にあるカードで場合分けをして，

(i)　番号 1 または 2 のカードがあるとき

番号 1 と 2 のカードは隣り合わないので，$2\times 2!\times 7!$ 通りとなり，この確率は，

$$\frac{2\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{1}{18}$$

(ii)　番号 3 から 7 までのカードのいずれかがあるとき

番号 3 から 7 までの 5 枚のカードのいずれかがあるのは，$5\times 2!\times 7!$ 通りとなる。この中で，番号 1 と 2 のカードが隣り合うのは，$5\times 2!\times(2!\times 6!)$ 通りより，この場合の確率は，

$$\frac{5\times 2!\times 7!}{9!}-\frac{5\times 2!\times(2!\times 6!)}{9!}=\frac{5}{36}-\frac{5}{126}=\frac{25}{252}$$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{18}+\dfrac{25}{252}=\dfrac{13}{84}$ である。

コメント

確率の基本的な問題ですが，それがかえって，数えもれなどの不安を抱え込んでしまいます。

問　題

さいころを 7 回投げ, k 回目$(1\leqq k\leqq 7)$に出る目を X_k とする。

(1) 積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。 [2012]

解答例

(1) 積 X_1X_2 が 18 より大となるのは, $X_1=X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$, $(6,\ 6)$ である。また, $X_1<X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(4,\ 5)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 6)$, $X_1>X_2$ のときも同様になる。

よって, 積 X_1X_2 が 18 以下である確率は, $1-\dfrac{2+3\cdot 2}{6^2}=\dfrac{7}{9}$ である。

(2) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が奇数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^7=\dfrac{1}{128}$ から, 偶数である確率は,

$$1-\frac{1}{128}=\frac{127}{128}$$

(3) 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数でない偶数であるのは, X_1, X_2, $\cdots$, X_7 のうちの 1 つが 2 または 6, 残りが奇数の場合より, その確率は, ${}_7\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^6=\dfrac{7}{192}$ である。

よって, 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率は, (2)より,

$$\frac{127}{128}-\frac{7}{192}=\frac{367}{384}$$

(4) さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれ R_0, R_1, R_2 とおくと, いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで, 自然数を 3 で割った余りについて, 2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると, 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは, X_1, X_2, $\cdots$, X_7 のうち, R_1 が 7 回, または R_1 が 5 回で R_2 が 2 回, または R_1 が 3 回で R_2 が 4 回, または R_1 が 1 回で R_2 が 6 回という 4 通りの場合があり, その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_7\mathrm{C}_6\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^6=64\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{64}{2187}$$

コメント

確率の頻出問題です。(4)は, 積が R_1 となるのは, R_0 が 0 回で, R_2 が 0 または偶数回という意味です。

問　題

$k+1$ 個 $(k\geqq 1)$ の部屋 A_0, A_1, A_2, …, A_k がある。千葉君はある部屋から，その部屋以外の部屋を等しい確率 $\dfrac{1}{k}$ で 1 つ選び，そこへ移動する。最初，部屋 A_0 にいた千葉君が，n 回 $(n\geqq 1)$ 部屋を移動した後に部屋 A_1 にいる確率を求めよ。　[2011]

解答例

千葉君が部屋を n 回移動した後に部屋 A_1 にいる確率を p_n とおくと，最初，部屋 A_0 にいたので，$p_1=\dfrac{1}{k}$ である。

また，$n+1$ 回移動した後に部屋 A_1 にいるのは，n 回移動した後に部屋 A_1 以外にいて，A_1 を $\dfrac{1}{k}$ の確率で選んで移動する場合より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{k}(1-p_n),\ \ p_{n+1}=-\frac{1}{k}p_n+\frac{1}{k}\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{k+1}=-\dfrac{1}{k}\left(p_n-\dfrac{1}{k+1}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{k+1}=\left(p_1-\frac{1}{k+1}\right)\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=\frac{1}{k(k+1)}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n-1}=-\frac{1}{k+1}\left(-\frac{1}{k}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{k+1}\left\{1-\left(-\dfrac{1}{k}\right)^n\right\}$ である。

コメント

最初の移動で場合分けをし，隣接 3 項間型の漸化式を立式して解いたところ，そのプロセスで$(*)$が導かれ，考え直したのが，上の解答例です。

問　題

数直線の原点上にある点が，以下の規則で移動する試行を考える。

（規則）サイコロを振って出た目が奇数の場合は，正の方向に 1 移動し，出た目が偶数の場合は，負の方向に 1 移動する。

k 回の試行の後の，点の座標を $X(k)$ とする。

(1)　$X(10)=0$ である確率を求めよ。

(2)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(5)\neq 0$ であって，かつ，$X(6)=0$ となる確率を求めよ。

(3)　$X(1)\neq 0$，$X(2)\neq 0$，…，$X(9)\neq 0$ であって，かつ，$X(10)=0$ となる確率を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　サイコロを振って奇数の目，偶数の目の出る確率は，それぞれ $\frac{1}{2}$ ずつである。

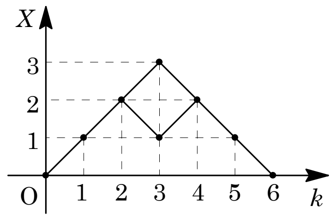
さて，$X(10)=0$ であるのは, 10 回の試行のうち，奇数の目が 5 回，偶数の目が 5 回出るときであり，その確率は,

$${}_{10}\mathrm{C}_5\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{63}{256}$$

(2)　まず，$X(1)=1$ のとき，条件を満たすのは,

$$X(2)=2,\ X(4)=2,\ X(5)=1,\ X(6)=0$$

すると，$X(3)=1$ または $X(3)=3$ であるので，その確率は，$2\times\left(\frac{1}{2}\right)^6=\frac{1}{32}$ となる。



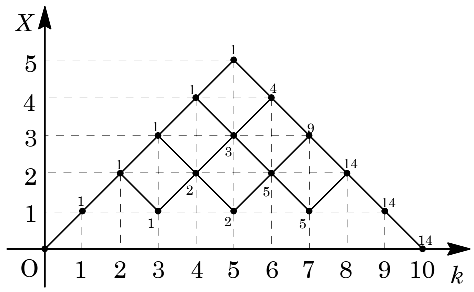
また，$X(1)=-1$ のとき，同様に考えると，条件を満たす確率は $\frac{1}{32}$ となる。

よって, 2 つの場合を合わせると，求める確率は，$\frac{1}{32}+\frac{1}{32}=\frac{1}{16}$

(3)　まず，$X(1)=1$ のとき，条件を満たすのは, (2)と同じく，$X(2)=2$ で,

$$X(8)=2,\ X(9)=1,\ X(10)=0$$

すると，試行回数と移動した点の座標の関係を表した右図から経路の数を数えると，14 通りの場合がある。これより，その確率は，$14\times\left(\frac{1}{2}\right)^{10}=\frac{7}{512}$ となる。



また，$X(1)=-1$ のとき，同様に考えると，条件を満たす確率は $\frac{7}{512}$ となる。

よって, 2 つの場合を合わせると，求める確率は，$\frac{7}{512}+\frac{7}{512}=\frac{7}{256}$

コメント

(3)では，図に書き込んであるように，経路の交差点で足し算をして，経路数を数えています。この方法がいちばん確実でしょう。

問　題

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 12 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が平方数になる確率を求めよ。ただし，X は平方数であるとは，ある自然数 n を用いて $X=n^2$ と表されることである。　[2009]

解答例

(1)　まず，9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りが同様に確からしいとし，事象 E の起こる確率を $P(E)$ とおく。

さて，X が 5 の倍数になる事象を A とすると，$P(\overline{A})=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{9}$ から，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(2)　X が 3 の倍数になる事象を B，4 の倍数になる事象を C とすると，X が 12 の倍数になる事象は $B\cap C$ となり，まず $P(\overline{B})=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{42}$ である。

また，X が 4 の倍数にならないのは，奇数のカード 4 枚を取り出す場合か，2 または 6 のカードと奇数のカード 3 枚を取り出す場合のいずれかより，

$$P(\overline{C})=\frac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}+\frac{{}_2\mathrm{C}_1\times{}_5\mathrm{C}_3}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{25}{126}$$

さらに，X が 3 の倍数にも 4 の倍数にもならないのは，1，2，5，7 のカードを取り出す場合のみより，$P(\overline{B}\cap\overline{C})=\dfrac{1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{126}$ となり，

$$\begin{aligned}P(B\cap C)&=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-P(\overline{B})-P(\overline{C})+P(\overline{B}\cap\overline{C})\\&=1-\frac{5}{42}-\frac{25}{126}+\frac{1}{126}=\frac{29}{42}\end{aligned}$$

(3)　5 と 7 については，平方数 X の約数となる可能性がないので，それ以外の数について，次のようにカードの数の集合を設定する。

$$S=\{1,\ 4,\ 9\},\ T=\{2,\ 3,\ 6,\ 8\}$$

まず，集合 S から 3 枚，集合 T から 1 枚取り出す場合，集合 T のみから 4 枚取り出す場合は，X は平方数にはならない。そこで，X が平方数になるのは，

(i)　集合 S から 1 枚，集合 T から 3 枚取り出す場合

集合 T からは，(2，3，6)，(3，6，8) を取り出す 2 通りの場合がある。

(ii)　集合 S から 2 枚，集合 T から 2 枚取り出す場合

集合 T からは，(2，8) を取り出す 1 通りのみである。

(i)(ii)より, X が平方数になる確率は,

$$\frac{{}_3\mathrm{C}_1\times 2}{{}_9\mathrm{C}_4}+\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times 1}{{}_9\mathrm{C}_4}=\frac{1}{14}$$

コメント

確率の頻出問題です。(3)は，闇雲に列挙しようとすると，数えもれが発生しそうです。

問　題

1 から n までの番号が書かれた n 枚のカードがある。この n 枚のカードの中から 1 枚を取り出し，その番号を記録してからもとに戻す。この操作を 3 回繰り返す。記録した 3 個の番号が 3 つとも異なる場合には大きい方から 2 番目の値を X とする。2 つが一致し，1 つがこれと異なる場合には，2 つの同じ値を X とし，3 つとも同じならその値を X とする。

(1)　確率 $P(X\leqq k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(2)　確率 $P(X=k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ を求めよ。

(3)　$P(X=k)$ が最大となる k の値はいくつか。　[2008]

解答例

(1)　題意の値 X について, $X\leqq k$ となる場合は次の 2 通りである。

(i)　記録した値がすべて k 以下のとき

このとき，k^3 通りの場合がある。

(ii)　記録した値の 1 つが k より大, 他の 2 つが k 以下のとき

このとき，${}_3\mathrm{C}_1(n-k)k^2=3(n-k)k^2$ 通りの場合がある。

(i)(ii)より，$P(X\leqq k)=\dfrac{k^3+3(n-k)k^2}{n^3}=\dfrac{k^2(-2k+3n)}{n^3}$　($k=n$ のときも成立)

(2)　(i)　$k=1$ のとき

$$P(X=1)=P(X\leqq 1)=\frac{3n-2}{n^3}$$

(ii)　$k\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}P(X=k)&=P(X\leqq k)-P(X\leqq k-1)\\&=\frac{k^2(-2k+3n)}{n^3}-\frac{(k-1)^2\{-2(k-1)+3n\}}{n^3}\\&=\frac{-6k^2+6(n+1)k-3n-2}{n^3}\ \cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

なお, $(*)$に $k=1$ を代入すると，$\dfrac{3n-2}{n^3}$ となり，成立する。

(i)(ii)より，$P(X=k)=\dfrac{-6k^2+6(n+1)k-3n-2}{n^3}$

(3)　(2)より，$P(X=k)=\left\{-6\left(k-\dfrac{n+1}{2}\right)^2+\dfrac{3n^2-1}{2}\right\}\left(\dfrac{1}{n}\right)^3$

(i)　n が奇数のとき

$P(X=k)$ が最大となるのは，$k=\dfrac{n+1}{2}$ のときである。

(ii)　n が偶数のとき

$P(X=k)$ が最大となるのは，$k=\dfrac{n}{2}$，$\dfrac{n}{2}+1$ のときである。

コメント

(1)は，問題文の流れに沿って立式すること可能ですが，出題者の意図は上の解のように，題意を読み替えることでしょう。

問　題

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

解答例

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} $$

ここで，$0 \leqq l \leqq k-1$ とすると，$n(k-l) \leqq k(n-l)$ より，$\dfrac{n-l}{k-l} \geqq \dfrac{n}{k}$ となり，

$$ \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} \geqq \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k $$

さらに，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ から，

$$ \left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}} $$

(2)　(1)より，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k = (1+1)^n = 2^n $$

よって，$\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$

(3)　(1)より，${}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} $$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ となるので，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3$

コメント

3 題構成の並列型の設問の場合，(1)と(2)が独立で，ともに(3)への誘導というのが一般的です。ところが，本問では，(1)が，独立な(2)と(3)への誘導となっており，変わった構図です。なお，内容は二項定理の応用として，著名なものです。

問　題

関数$f(x)$はすべての実数 x に対して定義され，すべての実数 x で微分可能であるとする。このとき，以下の命題について，正しければ証明し，正しくなければ反例をあげよ。

(1)　$x_1<x_2$を満たすすべての実数x_1，x_2に対して$f(x_1)<f(x_2)$が成り立つとする。このとき，すべての実数xに対して$f'(x)>0$である。

(2)　$f(0)=0$かつすべての実数 x に対して$f'(x)>0$ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=+\infty$である。

(3)　$f(0)=0$かつすべての実数 x に対して$f'(x)>0$ならば，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=+\infty$である。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=x^3$とすると，$x_1<x_2$を満たすすべての実数x_1，x_2に対して$f(x_1)<f(x_2)$であるが，$f'(0)=0$となる。

よって, (1)の命題は正しくない。

(2)　$f(x)=1-e^{-x}$とすると，$f(0)=0$かつ$f'(x)=e^{-x}>0$であるが，$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}f(x)=1$となる。

よって, (2)の命題は正しくない。

(3)　$f'(x)>0$より, $x>0$に対して，$f(x)>f(0)=0$である。

ここで，十分大きな整数nに対して，$n\leqq x<n+1$とすると，

$$\int_0^x f(t)\,dt\geqq\int_0^n f(t)\,dt=\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,dt\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$S_k=\displaystyle\int_k^{k+1}f(t)\,dt$とおくと，$f(x)$が単調増加より，

$$0<S_0<S_1<S_2<\cdots<S_{n-1}$$

よって，$\displaystyle\sum_{k=0}^{n-1}\int_k^{k+1}f(t)\,dt>nS_0\cdots\cdots\cdots②$

①②より，$\displaystyle\int_0^x f(t)\,dt>nS_0$

$x\to+\infty$のとき$n\to+\infty$となるので，$nS_0\to+\infty$から$\displaystyle\lim_{x\to+\infty}\int_0^x f(t)\,dt=+\infty$である。

以上より, (3)の命題は正しい。

コメント

命題(2)と命題(3)の仮定が同じことから，出題者の心理を考えると，一方が真，他方が偽であると予想できます。実際そのとおりでした。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3$ は無理数であることを証明せよ。

(2)　n が正の整数のとき，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはあるかどうか調べよ。　[2002]

解答例

(1)　$\log_2 3$ が有理数であると仮定すると，$p,\ q$ を互いに素な自然数として，

$$\log_2 3 = \frac{q}{p},\quad 2^{\frac{q}{p}} = 3,\quad 2^q = 3^p \cdots\cdots\cdots①$$

$p,\ q$ は自然数なので，①は左辺が偶数，右辺が奇数となり，成立しない。

よって，$\log_2 3$ は無理数である。

(2)　まず，$n = 1$ のとき $\log_2 1 = 0$ となり，$\log_2 n$ は整数である。

$n \geqq 2$ で $\log_2 n$ が有理数のとき，$p,\ q$ を互いに素な自然数として，

$$\log_2 n = \frac{q}{p},\quad 2^{\frac{q}{p}} = n,\quad 2^q = n^p$$

ここで，m を正の奇数とし，l を 0 以上の整数として，$n = m\cdot 2^l$ とおくと，

$$2^q = (m\cdot 2^l)^p = m^p\cdot 2^{lp},\quad 2^{q-lp} = m^p \cdots\cdots\cdots②$$

p は自然数なので，②の右辺は奇数となり，左辺も奇数となる。

よって，$q - lp = 0$，$q = lp \cdots\cdots\cdots③$

$p,\ q$ は自然数なので，③から l も自然数となる。

すると，$\dfrac{q}{p} = l$ より $\log_2 n = l$ となり，$\log_2 n$ が整数でない有理数となることはない。

コメント

(1)は基本的ですが，(2)では $n = m\cdot 2^l$ とおくことがすべてです。このような設定を自分でしなくてはいけないところが難しさの原因です。

問　題

複素数平面上の点 $z\left(z\neq -\dfrac{i}{2}\right)$ に対して，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}$ とする。

(1)　点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描く。このような r と α の組をすべて求めよ。　[2017]

解答例

(1)　与えられた条件より，$w=\dfrac{z+2i}{2z+i}\left(z\neq -\dfrac{i}{2}\right)$ ………①

さて，点 z が原点を中心とする半径 1 の円周上を動くことより，$|z|=1$ ………②

①より，$w(2z+i)=z+2i$ となり $(2w-1)z=-i(w-2)$ であるが，$w=\dfrac{1}{2}$ のときは成立しないので，$w\neq\dfrac{1}{2}$ となり，

$$z=\frac{-i(w-2)}{2w-1}\left(w\neq\frac{1}{2}\right)\text{………③}$$

③を①に代入すると，$\left|\dfrac{-i(w-2)}{2w-1}\right|=1$ から $\dfrac{|-i||w-2|}{|2w-1|}=1$ となり，

$$|w-2|=|2w-1|$$

両辺を 2 乗して $|w-2|^2=|2w-1|^2$ から，$(w-2)(\overline{w}-2)=(2w-1)(2\overline{w}-1)$

$$w\overline{w}-2w-2\overline{w}+4=4w\overline{w}-2w-2\overline{w}+1,\ w\overline{w}=1$$

よって，$|w|=1$ となるので，点 w は原点を中心とする半径 1 の円周を描く。

(2)　点 z が点 α を中心とする半径 1 の円周上を動くとき，$|z-\alpha|=1$ ………④

③を④に代入すると，$\left|\dfrac{-i(w-2)}{2w-1}-\alpha\right|=1$ から $\left|\dfrac{(-i-2\alpha)w+2i+\alpha}{2w-1}\right|=1$

$$|(-i-2\alpha)w+2i+\alpha|=|2w-1|,\ |(-i-2\alpha)w+2i+\alpha|^2=|2w-1|^2$$

$$\{(-i-2\alpha)w+2i+\alpha\}\{(i-2\overline{\alpha})\overline{w}-2i+\overline{\alpha}\}=(2w-1)(2\overline{w}-1)\text{………⑤}$$

また，点 w は原点を中心とする半径 r の円周を描くことより，$|w|=r$ から，

$$w\overline{w}=r^2\text{………⑥}$$

⑤⑥が一致することより，$(-i-2\alpha)(-2i+\overline{\alpha})=-2$，$(2i+\alpha)(i-2\overline{\alpha})=-2$ が必要となるが，この 2 式は等しく，

$$-2-i\overline{\alpha}+4i\alpha-2\alpha\overline{\alpha}=-2,\ 2\alpha\overline{\alpha}+(\overline{\alpha}-4\alpha)i=0\text{………⑦}$$

ここで，p, q を実数として，$\alpha=p+qi$ とおくと，⑦より，

$$2(p^2+q^2)+(p-qi-4p-4qi)i=0,\ (2p^2+2q^2+5q)-3pi=0$$

よって，$2p^2+2q^2+5q=0$ かつ $p=0$ より，$(p,\ q)=(0,\ 0)$，$\left(0,\ -\dfrac{5}{2}\right)$ となり，

(i)　$\alpha=0$ のとき　(1)より⑤は $w\overline{w}=1$ となり，⑥から $r=1$ である。

(ii)　$\alpha=-\dfrac{5}{2}i$ のとき　$-i-2\alpha=4i$，$2i+\alpha=-\dfrac{1}{2}i$ となるので，⑤に代入する。

すると，$16w\overline{w}+\dfrac{1}{4}=4w\overline{w}+1$ から $w\overline{w}=\dfrac{1}{16}$ となり，⑥から $r=\dfrac{1}{4}$ である。

コメント

複素数平面上の円の変換の問題です。なお，(2)は(1)と同じ方法を採用しています。

問　題

$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ (i は虚数単位)とおく。

(1)　$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6$ を求めよ。

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\alpha+\overline{\alpha}$，$\alpha\overline{\alpha}$ および α を求めよ。ただし，$\overline{\alpha}$ は α の共役複素数である。

(3)　$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)$ を求めよ。　[2016]

解答例

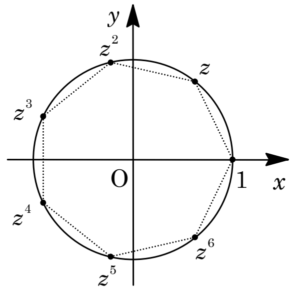
(1)　$z=\cos\dfrac{2\pi}{7}+i\sin\dfrac{2\pi}{7}$ に対して，$z^7=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1$ となり，

$$z+z^2+z^3+z^4+z^5+z^6=\frac{z(z^6-1)}{z-1}=\frac{z^7-z}{z-1}=\frac{1-z}{z-1}=-1$$

(2)　$\alpha=z+z^2+z^4$ とするとき，$\overline{\alpha}=\overline{z}+\overline{z^2}+\overline{z^4}=z^6+z^5+z^3$

$$\alpha+\overline{\alpha}=z+z^2+z^4+z^6+z^5+z^3=-1$$

$$\begin{aligned}\alpha\overline{\alpha}&=(z+z^2+z^4)(z^6+z^5+z^3)\\&=z^7+z^6+z^4+z^8+z^7+z^5+z^{10}+z^9+z^7\\&=3+z^6+z^4+z+z^5+z^3+z^2\\&=3-1=2\end{aligned}$$



よって，α，$\overline{\alpha}$ は 2 次方程式 $x^2+x+2=0$ の解より，

$$x=\frac{-1\pm\sqrt{7}i}{2}$$

そして，α の虚部は $\overline{\alpha}$ の虚部より大きいので，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{7}i}{2}$ である。

(3)　$x^7=1$ の解は，$x=1$，z，z^2，z^3，z^4，z^5，z^6 より，

$$x^7-1=(x-1)(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)$$

そして，$x^7-1=(x-1)(x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1)$ より，

$$\begin{aligned}&x^6+x^5+x^4+x^3+x^2+x+1\\&=(x-z)(x-z^2)(x-z^3)(x-z^4)(x-z^5)(x-z^6)\cdots\cdots\cdots(*)\end{aligned}$$

$(*)$ に $x=1$ を代入すると，

$$(1-z)(1-z^2)(1-z^3)(1-z^4)(1-z^5)(1-z^6)=7$$

コメント

1 の n 乗根に関する超有名問題です。解答例に示した図がすべてと言っても構わない内容です。

問　題

$a,\ b,\ c$ は実数とし，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ とおく。さらに 4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもち，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たすと仮定する。

(1) b, c を a を用いて表せ。

(2) a のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) b のとり得る値の範囲を求めよ。　[2011]

解答例

(1) 実数 α，β に対し，$\alpha+\beta=-(a+1)$，$\alpha\beta=\dfrac{1}{a}$ を満たす 2 次方程式は,

$$x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

さて，$f(x)=x^4+bx^2+cx+2$ に対して，4 次方程式 $f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解 α，β と 2 つの虚数解をもつことより，k を定数として,

$$x^4+bx^2+cx+2=\left\{x^2+(a+1)x+\frac{1}{a}\right\}(x^2+kx+2a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②の両辺の係数を比較すると，$k+a+1=0\ \cdots\cdots\cdots③$

$$2a+k(a+1)+\frac{1}{a}=b\ \cdots\cdots\cdots④,\quad 2a(a+1)+\frac{k}{a}=c\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

③より，$k=-a-1$ となり，④⑤に代入すると,

$$b=2a-(a+1)^2+\frac{1}{a}=-a^2+\frac{1}{a}-1\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

$$c=2a(a+1)-\frac{a+1}{a}=2a^2+2a-\frac{1}{a}-1\ \cdots\cdots\cdots⑦$$

(2) ①は異なる 2 つの実数解をもつことより,

$$D=(a+1)^2-\frac{4}{a}=\frac{a^3+2a^2+a-4}{a}=\frac{(a-1)(a^2+3a+4)}{a}>0$$

すると，$a^2+3a+4>0$ より，$a<0,\ 1<a\ \cdots\cdots\cdots⑧$

また，②③から，$x^2-(a+1)x+2a=0$ は 2 つの虚数解をもつことより,

$$D=(a+1)^2-8a=a^2-6a+1<0$$

よって，$3-2\sqrt{2}<a<3+2\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots⑨$

以上より，⑧⑨をともに満たす a の範囲は，$1<a<3+2\sqrt{2}$

(3) $g(a)=-a^2+\dfrac{1}{a}-1$ とおくと，⑥より，$b=g(a)$ となり，$1<a<3+2\sqrt{2}$ で,

$$g'(a)=-2a-\frac{1}{a^2}<0$$

よって，$g(a)$ は単調に減少し，$g(3+2\sqrt{2})<g(a)<g(1)$

すると，$g(3+2\sqrt{2})=-15-14\sqrt{2}$，$g(1)=-1$ から, b のとり得る値の範囲は,

$$-15-14\sqrt{2}<b<-1$$

コメント

高次方程式についての基本問題です。(1)では，最初，$f(x)$ を $x^2+(a+1)x+\dfrac{1}{a}$ で割ろうとしましたが，係数が複雑になりすぎると予測し，方針転換をして恒等式②で計算を進めました。

問　題

α は絶対値 1 の複素数とし，複素数 z に対して，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ とおく。ただし $\overline{\alpha}$ は α の共役複素数を表す。

(1) 複素数平面上で，z が原点と点 α を通る直線上（ただし，点 $\dfrac{\alpha}{2}$ を除く）を動くとき，w の表す点は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にあることを示せ。

(2) 複素数平面上で，z が不等式 $|z|>1$ を満たすとき，複素数 w を表す点はどのような図形上を動くか。 [2005]

解答例

(1) z が原点と点 α を通る直線上の点 $\dfrac{\alpha}{2}$ 以外を動くとき，k を実数とし，

$$z=k\alpha\ \left(k\neq\frac{1}{2}\right)$$

このとき，$w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}=\dfrac{k\overline{\alpha}\alpha-2}{2k\alpha-\alpha}$ となり，$|\alpha|=1$ より $\alpha\overline{\alpha}=1$ であるので，

$$w=\frac{k-2}{2k-1}\cdot\frac{1}{\alpha}=\frac{k-2}{2k-1}\overline{\alpha}$$

よって，点 w は原点と点 $\overline{\alpha}$ を通る直線上にある。

(2) $w=\dfrac{\overline{\alpha}z-2}{2z-\alpha}$ より，$(2z-\alpha)w=\overline{\alpha}z-2$，$(2w-\overline{\alpha})z=\alpha w-2$ ………①

ここで，$w=\dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ とすると，$\alpha w-2=\dfrac{\alpha\overline{\alpha}}{2}-2=-\dfrac{3}{2}$ となり，①は成立しない。

よって，$w\neq\dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ から，$z=\dfrac{\alpha w-2}{2w-\overline{\alpha}}$ ………②

さて，条件から，$|z|>1$ なので，

$$\left|\frac{\alpha w-2}{2w-\overline{\alpha}}\right|>1,\ \frac{|\alpha w-2|}{|2w-\overline{\alpha}|}>1,\ |\alpha w-2|>|2w-\overline{\alpha}|$$

$$(\alpha w-2)(\overline{\alpha}\overline{w}-2)>(2w-\overline{\alpha})(2\overline{w}-\alpha),\ \alpha\overline{\alpha}w\overline{w}+4>4w\overline{w}+\alpha\overline{\alpha}$$

$\alpha\overline{\alpha}=1$ から，$w\overline{w}<1$ となり，$|w|<1$ である。

よって，点 w は中心が原点，半径が 1 の円の内部を動く。ただし $\dfrac{\overline{\alpha}}{2}$ を除く。

コメント

複素数平面上の変換に関する基本問題です。2 つの設問とも頻出です。

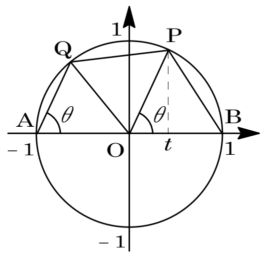
問　題

$0<t<1$ とする。2 次方程式 $x^2-2tx+1=0$ の解の 1 つを α とする。複素数平面上の 4 点を O(0)，A(-1)，B(1)，P(α)とし，AB を直径とする円を C とする。点 A を通り OP に平行な直線が円 C と交わる A 以外の点を Q とする。

(1)　$|\alpha|$を求めよ。

(2)　四角形 ABPQ の面積が最大となる t の値とそのときの面積を求めよ。　　[2004]

解答例



(1)　$0<t<1$ より，$x^2-2tx+1=0$ ……$(*)$の判別式 $D/4=t^2-1<0$ となり，$(*)$は虚数解 $x=t\pm\sqrt{1-t^2}\,i$ をもつ。これを α とすると，

$$|\alpha|^2=t^2+(\sqrt{1-t^2})^2=1$$

よって，$|\alpha|=1$ である。

(2)　まず，$\alpha=t+\sqrt{1-t^2}\,i$ としても，一般性を失わない。

さて，$\angle\mathrm{BOP}=\theta$ とおくと，$0<t<1$ より，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となり，

$$\angle\mathrm{AOQ}=\pi-2\angle\mathrm{OAQ}=\pi-2\theta,\ \angle\mathrm{POQ}=\angle\mathrm{AQO}=\angle\mathrm{QAO}=\theta$$

四角形 ABPQ の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot1^2\sin(\pi-2\theta)+\left(\frac{1}{2}\cdot1^2\sin\theta\right)\times2=\frac{1}{2}\sin2\theta+\sin\theta$$

$$S'=\cos2\theta+\cos\theta=2\cos\frac{3}{2}\theta\cos\frac{1}{2}\theta$$

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗	$\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$	↘	

右表より，$\theta=\dfrac{\pi}{3}$ のとき S は最大値 $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ をとる。このとき，$t=\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ である。

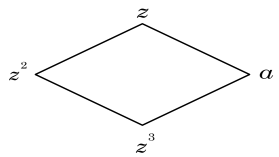
コメント

複素数平面を題材にした基本問題です。なお，(1)では，解と係数の関係を用いても OK です。

問　題

a を実数とし，z を複素数とする。複素数平面上で，a，z，z^2，z^3 が表す 4 点が，あるひし形の 4 頂点になるとする。ただし，a と z^2 が表す頂点は対角線上にあるとする。このような a と z の値をすべて求めよ。　[2003]

解答例



4 点 a，z，z^2，z^3 がひし形の頂点となるので，まず 2 点 a，z^2 の中点と，2 点 z，z^3 の中点が一致する。

$$\frac{a+z^2}{2}=\frac{z+z^3}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

さらに，辺 z^2z^3 と辺 z^2z の長さが等しいので，

$$|z^3-z^2|=|z^2-z|\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$|z|^2|z-1|=|z||z-1|$

z が実数のとき，ひし形はできないので，$z\neq 0$，$z\neq 1$ となり，

$$|z|\neq 0,\ |z-1|\neq 0$$

よって，$|z|=1$ から $z=\cos\theta+i\sin\theta$ ($0<\theta<\pi$，$\pi<\theta<2\pi$) とおくことができる。

①に代入して，$a+\cos2\theta+i\sin2\theta=\cos\theta+i\sin\theta+\cos3\theta+i\sin3\theta$

$$a+\cos2\theta=\cos\theta+\cos3\theta\cdots\cdots\cdots③,\quad \sin2\theta=\sin\theta+\sin3\theta\cdots\cdots\cdots④$$

④より，$\sin2\theta=2\sin2\theta\cos\theta$，$\sin2\theta(2\cos\theta-1)=0$

$\sin2\theta=0$，$\cos\theta=\frac{1}{2}$ となり，$0<\theta<\pi$，$\pi<\theta<2\pi$ から，$\theta=\frac{\pi}{2}$，$\frac{3\pi}{2}$，$\frac{\pi}{3}$，$\frac{5\pi}{3}$

(i)　$\theta=\frac{\pi}{2}$ のとき

$z=\cos\frac{\pi}{2}+i\sin\frac{\pi}{2}=i$ となり，③より $a=\cos\frac{\pi}{2}+\cos\frac{3\pi}{2}-\cos\pi=1$

(ii)　$\theta=\frac{3\pi}{2}$ のとき

$z=\cos\frac{3\pi}{2}+i\sin\frac{3\pi}{2}=-i$ となり，③より $a=\cos\frac{3\pi}{2}+\cos\frac{9\pi}{2}-\cos3\pi=1$

(iii)　$\theta=\frac{\pi}{3}$ のとき

$z=\cos\frac{\pi}{3}+i\sin\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $a=\cos\frac{\pi}{3}+\cos\pi-\cos\frac{2\pi}{3}=0$

(iv)　$\theta=\frac{5\pi}{3}$ のとき

$z=\cos\frac{5\pi}{3}+i\sin\frac{5\pi}{3}=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}i$ となり，③より $a=\cos\frac{5\pi}{3}+\cos5\pi-\cos\frac{10\pi}{3}=0$

コメント

ひし形を，平行四辺形の中で隣りあう 2 辺の長さが等しい四角形という条件で定義しています。a の入っていない②の関係式がポイントです。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　複素数平面上で方程式$|z-3i|=2|z|$が表す図形を求め，図示せよ。

(2)　複素数 z が(1)で求めた図形から$z=i$を除いた部分を動くとき，複素数$w=\dfrac{z+i}{z-i}$で表される点の軌跡を求め，図示せよ。　[2002]

解答例

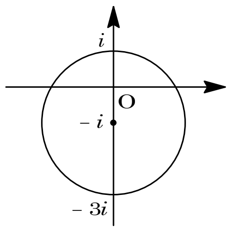
(1)　$z=x+yi$ とおくと，$z-3i=x+(y-3)i$

条件より，$|z-3i|=2|z|$なので，$|z-3i|^2=4|z|^2$

$$x^2+(y-3)^2=4(x^2+y^2),\quad x^2+y^2+2y-3=0$$

$$x^2+(y+1)^2=4$$

よって，点zは中心$-i$，半径 2 の円を描く。



(2)　(1)より，$|z+i|=2$………①

条件より，$w=\dfrac{z+i}{z-i}$………②

②より，$w(z-i)=z+i$，$(w-1)z=(w+1)i$

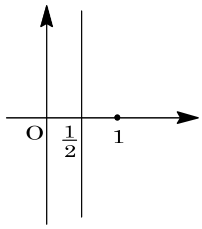
$w=1$のときは成立しないので，$z=\dfrac{w+1}{w-1}i$………③

③を①に代入すると，

$$\left|\frac{w+1}{w-1}i+i\right|=2,\quad \left|\frac{2w}{w-1}i\right|=2,\quad \left|\frac{w}{w-1}\right|=1$$

$$|w|=|w-1|$$

よって，点 w は原点と点 1 を結ぶ線分の垂直二等分線を描く。



コメント

(1)はアポロニウスの円ですが，このことは利用せずに解を作りました。(2)は複素数平面上の変換を題材とした基本的な問題です。

問　題

i を虚数単位とし，複素数 z に共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1)　a を実数の定数とする。条件 $1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$ を満たす複素数平面上の点 z の全体が直線であるとき, a の値を求めよ。

(2)　実軸上にない複素数 α に対して，3 点 0，1，α を通る複素数平面上の円の中心を β とする。このとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　α，β を(2)の複素数とする。点 α が(1)の直線上を動くとき，$\dfrac{\beta}{\alpha}$ は一定であることを証明せよ。　[2001]

解答例

(1)　x, y を実数として，$z=x+yi$ とおくと，$1-\overline{z}=(a+i)(z-\overline{z})$ より，

$$1-(x-yi)=(a+i)\cdot 2yi，\ 1-x+yi=-2y+2ayi$$

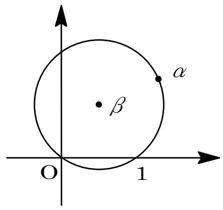
よって，$1-x=-2y$ ……①，$y=2ay$ ……②

②より，$(2a-1)y=0$

$y=0$ のとき，①より $x=1$ となり, z は 1 点だけを表すので不適である。

よって，$y\neq 0$ より $a=\dfrac{1}{2}$ となり，このとき点 z は①で表される直線を描く。

(2)　条件より，$|\beta|=|\beta-1|$ ……③，$|\beta|=|\beta-\alpha|$ ……④



③より，$|\beta|^2=|\beta-1|^2$，$\beta\overline{\beta}=(\beta-1)(\overline{\beta}-1)$

$$\beta+\overline{\beta}=1 \text{ ………⑤}$$

④より，$|\beta|^2=|\beta-\alpha|^2$，$\beta\overline{\beta}=(\beta-\alpha)(\overline{\beta}-\overline{\alpha})$

$$\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\alpha}-\alpha\overline{\beta}=0 \text{ ………⑥}$$

⑤より $\overline{\beta}=1-\beta$ となり，⑥に代入して $\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\alpha}-\alpha(1-\beta)=0$

$$\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\alpha}-\alpha+\alpha\beta=0，\ (\alpha-\overline{\alpha})\beta=\alpha(1-\overline{\alpha})$$

α は実数でないので $\alpha\neq\overline{\alpha}$ となり，$\beta=\dfrac{\alpha(1-\overline{\alpha})}{\alpha-\overline{\alpha}}$ ………⑦

(3)　(1)より，$z=\alpha$ として，$1-\overline{\alpha}=\left(\dfrac{1}{2}+i\right)(\alpha-\overline{\alpha})$

$$\frac{1-\overline{\alpha}}{\alpha-\overline{\alpha}}=\frac{1}{2}+i$$

⑦を代入すると，$\dfrac{\beta}{\alpha}=\dfrac{1}{2}+i$ となり，一定の値をとる。

コメント

特別な技巧は必要なく，誘導に従って解いていくことができます。(2)では，共役複素数を利用した解法を考えなさいという出題者の意向が，問題文から伝わってきます。

問　題

s, t は $0<s<1$, $0<t<1$ を満たす実数とし，$\alpha = si$，$\beta = t$ とおく。ここで，i は虚数単位である。複素数 γ は実部と虚部が正であるものとし，複素数平面上で，α，β，γ は正三角形をなすとする。

(1) $\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ を求めよ。

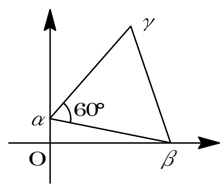
(2) s, t が上記の範囲を動くとき，γ が描く図形を図示せよ。 [2000]

解答例

(1) 条件より，点 γ は，点 α を中心として点 β を $60°$ 回転した点なので，

$$\gamma-\alpha = (\cos 60°+i\sin 60°)(\beta-\alpha)$$

$$\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha} = \cos 60°+i\sin 60° = \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i$$

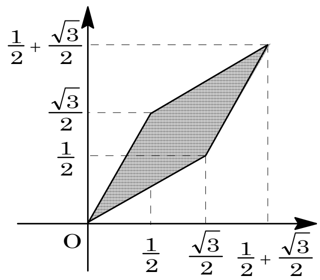


(2) (1)より，$\gamma = \alpha + \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(\beta-\alpha) = si + \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i\right)(t-si)$

$$= \left(\frac{1}{2}t+\frac{\sqrt{3}}{2}s\right)+\left(\frac{\sqrt{3}}{2}t+\frac{1}{2}s\right)i = s\left(\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2}i\right)+t\left(\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}i\right)$$

ここで，$(s,\ t)=(0,\ 0)$ のとき $\gamma = 0$，$(s,\ t)=(1,\ 0)$ のとき $\gamma_1 = \dfrac{\sqrt{3}}{2}+\dfrac{1}{2}i$，$(s,\ t)=(0,\ 1)$ のとき $\gamma_2 = \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}i$，$(s,\ t)=(1,\ 1)$ のとき $\gamma_3 = \left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)+\left(\dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)i$

すると，$0<s<1$, $0<t<1$ から，点 γ は線分 $\mathrm{O}\gamma_1$，線分 $\mathrm{O}\gamma_2$ を隣りあう 2 辺とするひし形 $\mathrm{O}\gamma_1\gamma_3\gamma_2$ の内部を描き，図示すると右図の網点部のようになる。なお，境界は領域に含まない。



コメント

独立に変化するパラメータが 2 つあるので，点 γ が動いてできる図形は 2 次元的な広がりをもちます。

問　題

複素数平面上に三角形 ABC があり，その頂点 A, B, C を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3 とする。複素数 w に対して，$z_1=wz_3$，$z_2=wz_1$，$z_3=wz_2$ が成り立つとき，次の各問いに答えよ。

(1) $1+w+w^2$ の値を求めよ。

(2) 三角形 ABC はどんな形の三角形か。

(3) $z=z_1+2z_2+3z_3$ の表す点を D とすると，三角形 OBD はどんな形の三角形か。ただし, O は原点である。 [1999]

解答例

(1) 条件より，$z_1=wz_3\cdots\cdots$①，$z_2=wz_1\cdots\cdots$②，$z_3=wz_2\cdots\cdots$③

①②より $z_2=w^2z_3$ なので，$z_1+z_2+z_3=(w+w^2+1)z_3\cdots\cdots\cdots$④

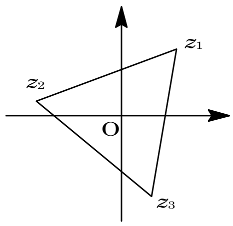
②③より $z_3=w^2z_1$ なので，$z_1+z_2+z_3=(1+w+w^2)z_1\cdots\cdots\cdots$⑤

④⑤より，$(1+w+w^2)(z_1-z_3)=0$

$z_1\neq z_3$ より，$1+w+w^2=0\cdots\cdots\cdots$⑥

(2) ④⑥より $z_1+z_2+z_3=0$ なので，$\triangle$ABC の重心は原点となる。

また⑥より，$w=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm120^\circ)+i\sin(\pm120^\circ)$



よって，以下，複号同順として，②より z_2 は z_1 を原点まわりに $\pm120^\circ$ 回転した点，③より z_3 は z_2 を原点まわりに $\pm120^\circ$ 回転した点，①より z_1 は z_3 を原点まわりに $\pm120^\circ$ 回転した点である。

以上より，$\triangle$ABC は重心が原点の正三角形である。

(3) ②③より，$z=z_1+2z_2+3z_3=\dfrac{z_2}{w}+2z_2+3wz_2=\left(\dfrac{1}{w}+2+3w\right)z_2$

ここで，⑥より $\dfrac{1}{w}=-1-w$ となるので，

$$z=(-1-w+2+3w)z_2=\left(1+2\cdot\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)z_2=\pm\sqrt{3}i\cdot z_2$$

(i) $w=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき　$z=\sqrt{3}i\cdot z_2$ より，z は z_2 を原点まわりに 90° 回転し，原点との距離を $\sqrt{3}$ 倍した点である。

(ii) $w=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき　$z=-\sqrt{3}i\cdot z_2$ より，z は z_2 を原点まわりに -90° 回転し，原点との距離を $\sqrt{3}$ 倍した点である。

(i)(ii)より，$\triangle$OBD は，$\angle$BOD $=90^\circ$，$\angle$DBO $=60^\circ$ の直角三角形である。

コメント

(1)と(2)の結論は，与えられた①②③から推測できます。その推測の正しいことを，うまく示すのがポイントです。

問　題

複素数 z に対して複素数 w を $w=\dfrac{2iz}{z-\alpha}$ で定める。ただし，α は 0 でない複素数の定数とする。

(1)　点 z が α 以外のすべての複素数を動くとき，点 w のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　点 z がある円周 C 上を動くとき，点 w は原点 O を中心とする半径 1 の円周を描くものとする。このとき，円周 C の中心と半径を α を用いて表せ。また円周 C の中心が i のとき，α の値を求めよ。

(3)　α は(2)で求めた値とする。点 z が実軸上を動くとき，点 w の描く図形を求めよ。

[1998]

解答例

(1)　条件より，$w=\dfrac{2iz}{z-\alpha}=2i+\dfrac{2i\alpha}{z-\alpha}$

z が $z\neq\alpha$ の任意の値をとるとき，$\alpha\neq 0$ から $\dfrac{2i\alpha}{z-\alpha}$ は 0 以外の任意の値をとりうる。よって, w は $2i$ 以外の任意の値をとりうる。すなわち，$w\neq 2i$ となる。

(2)　$|w|=1$ より，$\left|\dfrac{2iz}{z-\alpha}\right|=1$，$\dfrac{2|z|}{|z-\alpha|}=1$，$\dfrac{|z|}{|z-\alpha|}=\dfrac{1}{2}$

これより，点 z は原点 O と点 α を $1:2$ に内分する点 $\dfrac{1}{3}\alpha$ と，$1:2$ に外分する点 $-\alpha$ を直径の両端とする円を描く。

よって，円 C の中心は $\dfrac{\frac{1}{3}\alpha+(-\alpha)}{2}=-\dfrac{1}{3}\alpha$，半径は $\left|\dfrac{1}{3}\alpha-\left(-\dfrac{1}{3}\alpha\right)\right|=\dfrac{2}{3}|\alpha|$

また，円 C の中心が i のとき，$-\dfrac{1}{3}\alpha=i$ より $\alpha=-3i$

(3)　(2)より，$w=\dfrac{2iz}{z+3i}$，$wz+3iw=2iz$

z について解いて，$z=\dfrac{-3iw}{w-2i}$　$(w\neq 2i)$

z が実数より，$z=\overline{z}$

$$\frac{-3iw}{w-2i}=\frac{3i\overline{w}}{\overline{w}+2i},\ -w(\overline{w}+2i)=\overline{w}(w-2i),\ w\overline{w}-i\overline{w}+iw=0$$

$$(w-i)(\overline{w}+i)+i^2=0,\ (w-i)(\overline{w-i})=1,\ |w-i|=1$$

よって，点 w は中心が点 i，半径 1 の円を描く。ただし点 $2i$ は除く。

コメント

複素数平面上の変換を題材とした問題です。(1)の設問は，たぶんこんな意味だろうと判断して，やや雑ですが，上の解を作りました。

問　題

双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①の漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_0:(a_0,\ a_0)$ (ただし $a_0>0$) を通る双曲線①の接線を考え，接点を Q_1 とする。Q_1 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_1:(a_1,\ a_1)$ とする。次に P_1 を通る双曲線①の接線の接点を Q_2，Q_2 を通り漸近線②と垂直に交わる直線と，漸近線②との交点を $\mathrm{P}_2:(a_2,\ a_2)$ とする。この手続きを繰り返して同様にして点 $\mathrm{P}_n:(a_n,\ a_n)$，Q_n を定義していく。

(1)　Q_n の座標を a_n を用いて表せ。

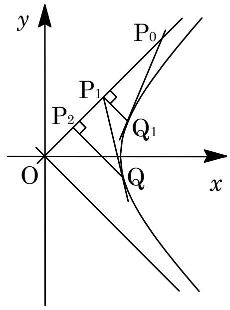
(2)　a_n を a_0 を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ の面積を求めよ。　　[2015]

解答例

(1)　双曲線 $x^2-y^2=1$ ……①上の点 $\mathrm{Q}_n(b_n,\ c_n)$，その漸近線 $y=x$ ……②上の点 $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ に対して，

$$b_n{}^2-c_n{}^2=1,\ (b_n+c_n)(b_n-c_n)=1\ \cdots\cdots\cdots③$$



点 Q_n を通り，漸近線②に垂直な直線は，

$$x+y=b_n+c_n$$

この直線が $\mathrm{P}_n(a_n,\ a_n)$ を通ることより，

$$2a_n=b_n+c_n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$b_n-c_n=\dfrac{1}{2a_n}$ ……⑤となり，④⑤から，

$$b_n=\frac{1}{2}\left(2a_n+\frac{1}{2a_n}\right)=a_n+\frac{1}{4a_n},\quad c_n=\frac{1}{2}\left(2a_n-\frac{1}{2a_n}\right)=a_n-\frac{1}{4a_n}$$

よって，$\mathrm{Q}_n\left(a_n+\dfrac{1}{4a_n},\ a_n-\dfrac{1}{4a_n}\right)$ である。

(2)　点 Q_n における①の接線は，(1)から，$\left(a_n+\dfrac{1}{4a_n}\right)x-\left(a_n-\dfrac{1}{4a_n}\right)y=1$

この接線が点 $\mathrm{P}_{n-1}(a_{n-1},\ a_{n-1})$ を通るので，

$$\left(a_n+\frac{1}{4a_n}\right)a_{n-1}-\left(a_n-\frac{1}{4a_n}\right)a_{n-1}=1,\quad \frac{1}{2a_n}a_{n-1}=1$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{2}a_{n-1}$ となり，$a_n=a_0\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ である。

(3)　$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}$ は $\angle\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=90^\circ$ の直角三角形であり，

$$\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n=\sqrt{2}(a_{n-1}-a_n)=\sqrt{2}(2a_n-a_n)=\sqrt{2}a_n$$

$$\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n=\sqrt{\left(a_n+\frac{1}{4a_n}-a_n\right)^2+\left(a_n-\frac{1}{4a_n}-a_n\right)^2}=\sqrt{\frac{1}{8a_n{}^2}}=\frac{1}{2\sqrt{2}a_n}$$

よって，$\triangle\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n-1}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{2}a_n\cdot\dfrac{1}{2\sqrt{2}a_n}=\dfrac{1}{4}$ である。

コメント

漸化式の双曲線への応用問題です。煩わしい計算の多い 2 次曲線としては, 計算量は少なめです。

問　題

r は $0<r<1$ を満たす実数とする。座標平面上に 1 辺の長さが r^n の正方形 R_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ があり，その頂点を反時計まわりに A_n，B_n，C_n，D_n とする。さらに R_n は次の条件(i), (ii)を満たすとする。

(i)　正方形 R_0 の頂点は $\mathrm{A}_0(0,\ 0)$，$\mathrm{B}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{C}_0(1,\ 1)$，$\mathrm{D}_0(0,\ 1)$ である。

(ii)　$\mathrm{A}_{n+1}=\mathrm{C}_n$ で，点 D_{n+1} は辺 $\mathrm{C}_n\mathrm{D}_n$ 上にある。

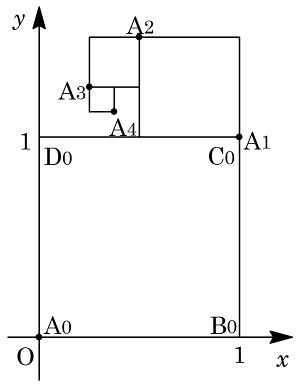
このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 A_2，A_3，A_4 の座標を r を用いて表せ。

(2)　A_{4n} の座標を $(x_n,\ y_n)$　$(n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。$x_{n+1}-x_n$ および $y_{n+1}-y_n$ を $r,\ n$ の式で表せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}y_n$ を r を用いて表せ。　[2011]

解答例



(1) 条件を図示すると，$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=r(-1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}=r^2(-1,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}=r^3(1,\ -1)$ となるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}=\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}=(1-r,\ 1+r)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}=\overrightarrow{\mathrm{A_0A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}=(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{A_0A_4}}=\overrightarrow{\mathrm{A_0A_3}}+\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}=(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$$

よって，$\mathrm{A}_2(1-r,\ 1+r)$，$\mathrm{A}_3(1-r-r^2,\ 1+r-r^2)$，$\mathrm{A}_4(1-r-r^2+r^3,\ 1+r-r^2-r^3)$ である。

(2)　$\mathrm{A}_{4n}(x_n,\ y_n)$ とおくとき，(1)と同様にして，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}_{4n+4}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}_{4n}}&=\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n}\mathrm{A}_{4n+1}}+\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+1}\mathrm{A}_{4n+2}}+\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+2}\mathrm{A}_{4n+3}}+\overrightarrow{\mathrm{A}_{4n+3}\mathrm{A}_{4n+4}}\\&=(r^4)^n\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+(r^4)^n\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+(r^4)^n\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}+(r^4)^n\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}}\\&=r^{4n}(\overrightarrow{\mathrm{A_0A_1}}+\overrightarrow{\mathrm{A_1A_2}}+\overrightarrow{\mathrm{A_2A_3}}+\overrightarrow{\mathrm{A_3A_4}})=r^{4n}\overrightarrow{\mathrm{A_0A_4}}\end{aligned}$$

よって，$x_{n+1}-x_n=r^{4n}(1-r-r^2+r^3)$，$y_{n+1}-y_n=r^{4n}(1+r-r^2-r^3)$

(3)　$p=1-r-r^2+r^3=(1-r)^2(1+r)$，$q=1+r-r^2-r^3=(1+r)^2(1-r)$ とおく。

すると，(2)より，$n\geqq1$ において，

$$x_n=x_0+\sum_{k=0}^{n-1}pr^{4k}=p\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k},\quad y_n=y_0+\sum_{k=0}^{n-1}qr^{4k}=q\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}$$

ここで，$0<r<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n-1}r^{4k}=\frac{1}{1-r^4}=\frac{1}{(1+r)(1-r)(1+r^2)}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=\frac{p}{1-r^4}=\frac{1-r}{1+r^2},\quad \lim_{n\to\infty}y_n=\frac{q}{1-r^4}=\frac{1+r}{1+r^2}$$

コメント

回転の行列を利用して，一般的に解くこともできますが，設問(2)を見て，(1)を延長した解答例を記しています。

問　題

曲線 C は曲線 $y=-e^x$ を平行移動したものとする。C と曲線 $y=e^{-x}$ は x 座標が t $(t \geqq 0)$ である点を共有し，その点で共通の接線をもつとする。C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。

(1)　C の方程式を求めよ。

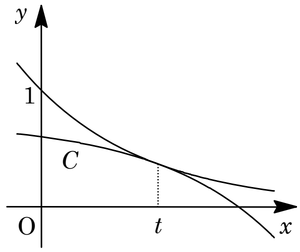
(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ が最大となるような t の値がただ 1 つ存在することを示せ。　[2017]

解答例

(1)　曲線 $y=-e^x$ を x 軸方向に a，y 軸方向に b だけ平行移動した曲線 C の方程式は，

$y=-e^{x-a}+b$ ………①



また，曲線 C は曲線 $y=e^{-x}$ ……②と $x=t$ $(t \geqq 0)$ で接するので，①より $y'=-e^{x-a}$，②より $y'=-e^{-x}$ から，

$-e^{t-a}=-e^{-t}$ ………③

$-e^{t-a}+b=e^{-t}$ ………④

③から，$t-a=-t$ より $a=2t$ となり，この式を④に代入すると，$-e^{-t}+b=e^{-t}$ から $b=2e^{-t}$ となるので，①に代入して，

$C: y=-e^{x-2t}+2e^{-t}$ ………⑤

(2)　C と x 軸との交点は，⑤より $-e^{x-2t}+2e^{-t}=0$ から，$e^{x-2t}=2e^{-t}$

$x-2t=\log 2e^{-t}=\log 2-t$，$x=t+\log 2$

すると，C と x 軸と y 軸とで囲まれた部分の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\int_0^{t+\log 2}(-e^{x-2t}+2e^{-t})dx=\left[-e^{x-2t}+2e^{-t}x\right]_0^{t+\log 2}$$

$$=-e^{-t+\log 2}+e^{-2t}+2(t+\log 2)e^{-t}=2(t-1+\log 2)e^{-t}+e^{-2t}$$

(3)　(2)より，$S'(t)=2e^{-t}-2(t-1+\log 2)e^{-t}-2e^{-2t}=-2e^{-t}(t-2+\log 2+e^{-t})$

ここで，$f(t)=t-2+\log 2+e^{-t}$ とおくと，

$f'(t)=1-e^{-t}$

これより，$t \geqq 0$ における $f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	0	$\cdots$
$f'(t)$	0	$+$
$f(t)$	$-1+\log 2$	$\nearrow$

すると，$f(0)=-1+\log 2<0$，$\lim_{t\to\infty} f(t)=\infty$ から，$f(\alpha)=0$ となる $\alpha>0$ がただ 1 つ存在する。

この α を用いて $t \geqq 0$ における $S(t)$ の増減を調べると，右表のようになる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$S'(t)$		$+$	0	$-$
$S(t)$		$\nearrow$		$\searrow$

これより，$S(t)$ は $t=\alpha$ のとき最大値をとる。すなわち，$S(t)$ が最大となるような t の値はただ 1 つ存在する。

コメント

微積分の総合問題です。2 つの曲線の式が似ているので，混乱しないように注意が必要です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，不等式 $\log x<x$ を示せ。

(2)　$1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3)　$x\geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。　[2016]

解答例

(1)　$x>0$ において $f(x)=x-\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$\times$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\times$	$\searrow$	1	$\nearrow$

$f(x)\geqq1>0$

よって，$x>0$ において，$\log x<x$ ………①

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{\log x}$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

ここで，$1<a<c<b$ となる c に対して，$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$ から，

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(c),\ \frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=-\frac{b-a}{c(\log c)^2}$$

これより，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{b-a}{c(\log c)^2}$ ………②

また，$0<a(\log a)^2<c(\log c)^2$ から，$0<\dfrac{1}{c(\log c)^2}<\dfrac{1}{a(\log a)^2}$ ………③

②③より，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ ………④

(3)　$x\geqq e$ において，$F(x)=\displaystyle\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}-\log(\log x)-\frac{1}{2(\log x)^2}+\frac{1}{2}$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{1}{x\log(x+1)}-\frac{1}{x\log x}+\frac{1}{x(\log x)^3}$$

$$=-\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{\log(x+1)}+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}$$

④より $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{\log(x+1)}<\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ となり，①から $\log x<x$ なので，

$$F'(x)>-\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x(\log x)^2}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}=-\frac{\log x-x}{x^2(\log x)^3}>0$$

すると，$x \geqq e$ において，$F(x) \geqq F(e) = 0 - \log 1 - \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2} = 0$ となり，

$$\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x) + \frac{1}{2(\log x)^2} - \frac{1}{2}$$

コメント

微分法の不等式への応用問題です。(1)(2)の誘導で(3)の見通しは良好です。なお，(2)では，不等式の形から平均値の定理の出番です。

問　題

c を実数とし，曲線 $y=x^2+c$ ……①と曲線 $y=\log x$ ……②の共通接線を考える。

(1) 共通接線の本数を，実数 c の値によって答えよ。

(2) 共通接線が 1 本であるとき，その接線と①，②それぞれとの接点を求めよ。

(3) 共通接線が 1 本であるとき，①，②と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

[2015]

解答例

(1) 曲線 $y=x^2+c$ ……①，$y=\log x$ ……②に対して，②上の点 $(t,\ \log t)$ における接線の方程式は，$y'=\dfrac{1}{x}$ から，

$$y-\log t=\frac{1}{t}(x-t),\quad y=\frac{1}{t}x+\log t-1\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③を連立して，$x^2+c=\dfrac{1}{t}x+\log t-1$，$x^2-\dfrac{1}{t}x-\log t+1+c=0$ ………④

①③が接することより，$D=\dfrac{1}{t^2}-4(-\log t+1+c)=0$ となり，

$$c=\frac{1}{4t^2}+\log t-1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，$f(t)=\dfrac{1}{4t^2}+\log t-1$ とおくと，

$$f'(t)=-\frac{1}{2t^3}+\frac{1}{t}=\frac{2t^2-1}{2t^3}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，

$$f\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\log 2-1=-\frac{1}{2}(\log 2+1),\quad \lim_{t\to\infty}f(t)=\infty$$

$$\lim_{t\to+0}f(t)=\lim_{t\to+0}\Big(\frac{1}{4t^2}+\log t-1\Big)=\lim_{t\to+0}\frac{1}{t}\Big(\frac{1}{4t}+t\log t-t\Big)=\infty$$

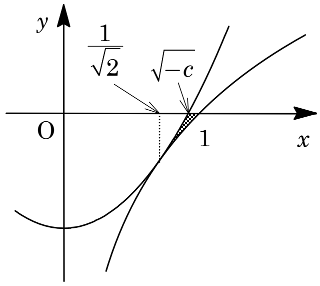
すると，曲線①と②の共通接線の本数は，⑤すなわち $c=f(t)$ の実数解の個数に一致する。よって，$c>-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき 2 本，$c=-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき 1 本，$c<-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき 0 本である。

(2) $c=-\dfrac{1}{2}(\log 2+1)$ のとき，⑤の解は $t=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となり，④の重解は $x=\dfrac{1}{2t}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

これより，①③の接点と②③の接点は一致し，その座標は，

$$(t,\ \log t)=\Big(\frac{1}{\sqrt{2}},\ -\frac{1}{2}\log 2\Big)$$

(3)　(2)のとき，①，②と x 軸で囲まれる図形の面積 S は，



$$S=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}-\log x\,dx-\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{-c}}-(x^2+c)\,dx$$

$$=-\Big[\,x\log x\,\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}dx+\Big[\,\frac{x^3}{3}+cx\,\Big]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\sqrt{-c}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+1-\frac{1}{\sqrt{2}}+\frac{2}{3}c\sqrt{-c}-\frac{1}{6\sqrt{2}}-\frac{c}{\sqrt{2}}$$

$$=-\frac{1}{2\sqrt{2}}\log 2+1-\frac{1}{\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}(\log 2+1)\sqrt{\log 2+1}-\frac{1}{6\sqrt{2}}+\frac{1}{2\sqrt{2}}(\log 2+1)$$

$$=1-\frac{2}{3\sqrt{2}}-\frac{1}{3\sqrt{2}}(\log 2+1)\sqrt{\log 2+1}=1-\frac{\sqrt{2}}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}(\log 2+1)\sqrt{\log 2+1}$$

コメント

微積分の総合問題です。複接線は現れないので，接線の本数が接点の個数に等しいという頻出事項を利用しています。なお，(3)の計算はかなりハードです。また，(1)で極限を求める際に，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t\log t=0$ であることは証明なしで用いています。

問　題

関数 $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx$ の値を求めよ。

(2) $0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $x\geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x\geqq f(x)$ が成り立つことを示せ。　[2014]

解答例

(1) $f(x)=e^{\sin x}(\sin 2x-2\cos x)$ に対して，$t=\sin x$ とおくと，$dt=\cos x\,dx$ となり，

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} f(x)\,dx=\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} 2e^{\sin x}(\sin x-1)\cos x\,dx=\int_{-1}^{1} 2e^t(t-1)\,dt$$

$$=2\Big[e^t(t-1)\Big]_{-1}^{1}-2\int_{-1}^{1} e^t\,dt=\frac{4}{e}-2\Big(e-\frac{1}{e}\Big)=\frac{6}{e}-2e$$

(2) $f'(x)=e^{\sin x}\cos x(\sin 2x-2\cos x)+e^{\sin x}(2\cos 2x+2\sin x)$

$$=2e^{\sin x}(\sin x\cos^2 x-\cos^2 x+1-2\sin^2 x+\sin x)$$

$$=-2e^{\sin x}(\sin^3 x+\sin^2 x-2\sin x)=-2e^{\sin x}\sin x(\sin x-1)(\sin x+2)$$

すると，$0\leqq x<2\pi$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	2π
$f'(x)$	0	$+$	0	$+$	0	$-$	
$f(x)$	-2	↗	0	↗	2	↘	-2

よって，$f(x)$ の最大値は 2 である。

(3) まず，$f(x+2\pi)=f(x)$

これより，$f(x)$ は周期 2π の周期関数なので，(2)から $f(x)\leqq 2$ である。

さて，$g(x)=(x^2+2x-2)e^x$ とおくと，$x\geqq 0$ において，

$$g'(x)=(2x+2)e^x+(x^2+2x-2)e^x=x(x+4)e^x\geqq 0$$

(i) $x\geqq 1$ のとき

$g(x)\geqq g(1)=e>2$ となり，$g(x)\geqq f(x)$ が成り立つ。

(ii) $0\leqq x<1$ のとき

$1<\dfrac{\pi}{2}$ から $x\geqq \sin x\geqq 0$ となり，$g''(x)=(x^2+6x+4)e^x\geqq 0$ より，

$$g'(x)\geqq g'(\sin x)=\sin x(\sin x+4)e^{\sin x}$$

ここで，$h(x)=g(x)-f(x)$ とおくと，$h'(x)=g'(x)-f'(x)$ となり，

$$h'(x)\geqq g'(\sin x)-f'(x)$$

$$=\sin x(\sin x+4)e^{\sin x}+2e^{\sin x}\sin x(\sin x-1)(\sin x+2)$$

$$=e^{\sin x}\sin x(\sin x+4+2\sin^2 x+2\sin x-4)$$

$$=e^{\sin x}\sin^2 x(2\sin x+3)\geqq 0$$

よって，$h(x) \geqq h(0) = g(0) - f(0) = 0$ より，$g(x) \geqq f(x)$ が成り立つ。

(i)(ii)より，$x \geqq 0$ のとき $(x^2+2x-2)e^x \geqq f(x)$ が成り立つ。

コメント

微分法の不等式への応用問題です。(3)の証明する不等式は，x が大きいときは明らかに成り立つので，x が 0 に近いところで示せばよいことになります。

問　題

$f(x)=\dfrac{1}{x}$ とし，また実数 $a,\ b$ について $g(x)=e^{-ax+b}$ とおく。ただし，e は自然対数の底である。次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ においてつねに $f(x)\geqq g(x)$ が成り立つために $a,\ b$ が満たすべき条件を求めよ。

(2) $y=g(x)$ のグラフが点 $(1,\ 1)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_1(x)$ とする。同様に $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(2,\ \dfrac{1}{2}\right)$ で $y=f(x)$ のグラフと接するように $a,\ b$ を定めたときの $g(x)$ を $g_2(x)$ とする。このとき，$y=g_1(x)$ と $y=g_2(x)$ の交点を求めよ。

(3) (2)で定めた $y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$ と $y=f(x)$ の 3 つの曲線で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2009]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{1}{x}$，$g(x)=e^{-ax+b}$ に対し，$x>0$ において，

$$f(x)\geqq g(x)\ \Leftrightarrow\ \frac{1}{x}\geqq e^{-ax+b}\ \Leftrightarrow\ \log\frac{1}{x}\geqq -ax+b\ \Leftrightarrow\ \log x\leqq ax-b$$

ここで，$h(x)=ax-b-\log x$ とおくと，$h'(x)=a-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax-1}{x}$

(i) $a>0$ のとき

$h(x)$ の増減は右表のようになり，$x>0$ で，つねに $h(x)\geqq 0$ の条件は，

$$h\left(\frac{1}{a}\right)=1-b+\log a\geqq 0$$

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{a}$	$\cdots$
$h'(x)$		$-$	0	$+$
$h(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(ii) $a\leqq 0$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to\infty}h(x)=-\infty$ となることから，不適である。

(i)(ii)より，求める条件は，$a>0$ かつ $1-b+\log a\geqq 0$ である。

(2) (1)より，$h(x)=\log f(x)-\log g(x)=ax-b-\log x$ であり，

$$h'(x)=\frac{f'(x)}{f(x)}-\frac{g'(x)}{g(x)}=a-\frac{1}{x}$$

さて，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが，$x=1$ で接することより，

$f(1)=g(1)$ ………①，$f'(1)=g'(1)$ ………②

①より，$h(1)=\log f(1)-\log g(1)=a-b=0$ ………③

②より，$h'(1)=\dfrac{f'(1)}{f(1)}-\dfrac{g'(1)}{g(1)}=a-1=0$ ………④

③④より，$a=b=1$ となり，$g_1(x)=e^{-x+1}$

また，$y=f(x)$と$y=g(x)$のグラフが，$x=2$で接することより，

$f(2)=g(2)$………⑤，$f'(2)=g'(2)$………⑥

⑤より，$h(2)=\log f(2)-\log g(2)=2a-b-\log 2=0$ ………⑦

⑥より，$h'(2)=\dfrac{f'(2)}{f(2)}-\dfrac{g'(2)}{g(2)}=a-\dfrac{1}{2}=0$ ………⑧

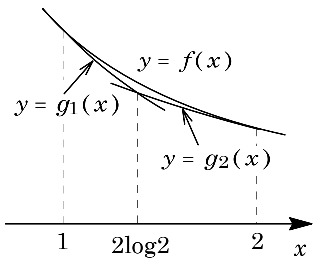
⑦⑧より，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1-\log 2$となり，$g_2(x)=e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}$

ここで，$y=g_1(x)$と$y=g_2(x)$のグラフの交点は，$e^{-x+1}=e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}$から，

$-x+1=-\dfrac{1}{2}x+1-\log 2$，$x=2\log 2$

$y=g_1(2\log 2)=e^{-2\log 2+1}=e^{\log\frac{e}{4}}=\dfrac{e}{4}$

よって，交点の座標は$\left(2\log 2,\ \dfrac{e}{4}\right)$である。



(3)　$\log e<\log 4<\log e^2$から，$1<2\log 2<2$である。

すると，$g_1(x)$，$g_2(x)$は(1)の条件を満たしており，

3曲線$y=g_1(x)$，$y=g_2(x)$，$y=f(x)$で囲まれる図形の面積Sは,

$$S=\int_1^{2\log 2}\left(\frac{1}{x}-e^{-x+1}\right)dx+\int_{2\log 2}^{2}\left(\frac{1}{x}-e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}\right)dx$$

$$=\Big[\log x+e^{-x+1}\Big]_1^{2\log 2}+\Big[\log x+2e^{-\frac{1}{2}x+1-\log 2}\Big]_{2\log 2}^{2}$$

$$=\log(2\log 2)+e^{-2\log 2+1}-1+\log 2-\log(2\log 2)+2e^{-\log 2}-2e^{-2\log 2+1}$$

$$=e^{\log\frac{e}{4}}-1+\log 2+2e^{\log\frac{1}{2}}-2e^{\log\frac{e}{4}}=\frac{e}{4}-1+\log 2+1-\frac{e}{2}$$

$$=\log 2-\frac{e}{4}$$

コメント

計算を見通しよくするために，(1)と(2)は，対数関数のグラフと直線の関係としてとらえています。それでも，量的にはかなりあります。

問　題

e を自然対数の底とし，$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log_e|x|+\dfrac{3}{4}$ とする。

(1)　曲線 $y=f(x)$ の 2 接線で，互いに垂直であるものをすべて求めよ。

(2)　直線 l は曲線 $y=f(x)$ の接線で，原点を通りかつ傾きが正とする。l の方程式は $y=x$ であることを示せ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{4}x^2+\dfrac{1}{2}\log|x|+\dfrac{3}{4}$ に対して，$f'(x)=\dfrac{1}{2}x+\dfrac{1}{2x}=\dfrac{x^2+1}{2x}$

さて，接点の x 座標を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくとき，接線の傾きはそれぞれ $f'(\alpha)$，$f'(\beta)$ なので, 2 接線が互いに垂直である条件は,

$$f'(\alpha)\cdot f'(\beta)=\frac{\alpha^2+1}{2\alpha}\cdot\frac{\beta^2+1}{2\beta}=-1$$

これより，$(\alpha^2+1)(\beta^2+1)=-4\alpha\beta$，$\alpha^2\beta^2+\alpha^2+\beta^2+1+4\alpha\beta=0$

$$(\alpha\beta+1)^2+(\alpha+\beta)^2=0$$

すると，$\alpha\beta+1=0$ かつ $\alpha+\beta=0$ より，$\alpha=-1$，$\beta=1$ となる。

$\alpha=-1$ のとき，$f'(-1)=-1$，$f(-1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=-(x+1)，\ y=-x$$

$\beta=1$ のとき，$f'(1)=1$，$f(1)=1$ より，接線の方程式は,

$$y-1=x-1，\ y=x$$

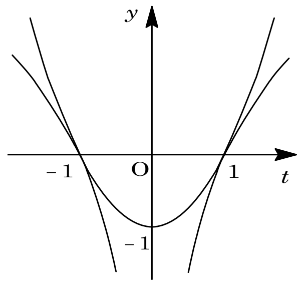
(2)　接点を $(t,\ f(t))$ とおくと，接線の方程式は，$y-f(t)=f'(t)(x-t)$

原点を通ることより，$-f(t)=f'(t)(-t)$

$$-\frac{1}{4}t^2-\frac{1}{2}\log|t|-\frac{3}{4}=\frac{t^2+1}{2t}\cdot(-t)$$

$$t^2+2\log|t|+3=2(t^2+1)$$

$$t^2-1=2\log|t|\cdots\cdots\cdots(*)$$



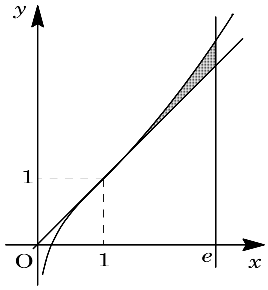
すると，右図より，(*)の解は $t=\pm1$ となり，(1)から傾きが正となる接線 l の方程式は $y=x$ である。

(3)　$f''(x)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2x^2}=\dfrac{x^2-1}{2x^2}$ より，$x>0$ において，曲線 $y=f(x)$ の概形は右図のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	＋		＋
$f''(x)$	×	－	0	＋
$f(x)$	×	↗	1	↗

すると，曲線 $y=f(x)$ と 2 直線 $x=e$，$y=x$ で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_1^e\left(\frac{1}{4}x^2+\frac{1}{2}\log x+\frac{3}{4}-x\right)dx$$
$$=\left[\frac{1}{12}x^3+\frac{1}{2}(x\log x-x)+\frac{3}{4}x-\frac{1}{2}x^2\right]_1^e$$
$$=\frac{1}{12}(e^3-1)+\frac{1}{2}e+\frac{1}{4}(e-1)-\frac{1}{2}(e^2-1)$$
$$=\frac{1}{12}e^3-\frac{1}{2}e^2+\frac{3}{4}e+\frac{1}{6}$$



コメント

(1)で，α，β の値が求まるだろうかという懸念は杞憂に過ぎませんでした。

問　題

$a\neq 0$，$b\neq 0$ とする。$f(x)=a\cos^2x+b\cos x+c$ について，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているとする。

(1) $y=f(x)$ のグラフが x 軸と接する点の x 座標をすべて求めよ。

(2) さらに $\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0$ が成り立っているとき，$f(x)=0\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ を満たす x の値をすべて求めよ。 [2006]

解答例

(1) $f(x)=a\cos^2x+b\cos x+c$ に対して，

$$f'(x)=-2a\cos x\sin x-b\sin x=-\sin x(2a\cos x+b)$$

$y=f(x)$ のグラフが x 軸と原点で接しているので，$f(0)=f'(0)=0$ より，

$$a+b+c=0,\ c=-a-b\ \cdots\cdots\cdots①$$

このとき，$f(x)=a\cos^2x+b\cos x-a-b=(\cos x-1)(a\cos x+a+b)$

さて，$y=f(x)$ のグラフが x 軸と $x=t$ で接するとすると，$f(t)=f'(t)=0$ より，

$$(\cos t-1)(a\cos t+a+b)=0\ \cdots\cdots②,\ \sin t(2a\cos t+b)=0\ \cdots\cdots③$$

②より $\cos t=1$ または $\cos t=-\dfrac{a+b}{a}$，③より $\sin t=0$ または $\cos t=-\dfrac{b}{2a}$ となる。

(i) $\cos t=1$，$\sin t=0$ のとき　n を整数として，$t=2n\pi$ である。

(ii) $\cos t=1$，$\cos t=-\dfrac{b}{2a}$ のとき

$-\dfrac{b}{2a}=1$ すなわち $b=-2a$ の場合には，$t=2n\pi$ （n は整数）である。

(iii) $\cos t=-\dfrac{a+b}{a}$，$\sin t=0$ のとき

$\sin t=0$ より $\cos t=\pm1$ であり，$-\dfrac{a+b}{a}=\pm1$ となる。

まず，$-\dfrac{a+b}{a}=1$ すなわち $b=-2a$ の場合には，$t=2n\pi$ （n は整数）である。

また，$-\dfrac{a+b}{a}=-1$ の場合には $b=0$ となり，$b\neq 0$ という条件に反する。

(iv) $\cos t=-\dfrac{a+b}{a}$，$\cos t=-\dfrac{b}{2a}$ のとき

$-\dfrac{a+b}{a}=-\dfrac{b}{2a}$ すなわち $b=-2a$ の場合には，$\cos t=1$ となる。

よって，$t=2n\pi$ （n は整数）である。

(i)～(iv)より，$y=f(x)$ のグラフと x 軸との接点は，$x=2n\pi$ （n は整数）である。

(2) $\int_0^{2\pi}f(x)\,dx=0$ より，$\int_0^{2\pi}\left(a\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+b\cos x+c\right)dx=0$ となり，

$$\frac{a}{2}\cdot 2\pi+c\cdot 2\pi=0,\ c=-\frac{a}{2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

①④より，$f(x)=(\cos x-1)(a\cos x-c)=a(\cos x-1)\left(\cos x+\dfrac{1}{2}\right)$

よって，$f(x)=0\ (0\leqq x\leqq 2\pi)$ の解は，$x=0$，$\dfrac{2}{3}\pi$，$\dfrac{4}{3}\pi$，2π となる。

コメント

微積分の計算問題です。計算量は多めです。

問　題

3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) b,c を a を用いて表せ。

(2) $f(x)-g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。　[2004]

解答例

(1) $f(x)=x^3$ より $f'(x)=3x^2$ となり，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ である。

また，$g(x)=ax^2+bx+c$ より，$g'(x)=2ax+b$ となる。

条件より，$g\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{1}{8}$ かつ $g'\left(\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{3}{4}$ となるので，

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{8},\quad a+b=\frac{3}{4}$$

よって，$b=\dfrac{3}{4}-a$，$c=\dfrac{1}{8}-\dfrac{1}{4}a-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{3}{4}-a\right)=-\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}a$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと, (1)より，$h(x)=x^3-ax^2-\left(\dfrac{3}{4}-a\right)x+\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a$

$$h'(x)=3x^2-2ax-\left(\frac{3}{4}-a\right)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-4a+3)$$

$h'(x)=0$ の解は，$x=\dfrac{1}{2},\ \dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}$ となり，

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{27}a^3+\frac{2}{3}a^2-a+\frac{1}{2}$$

また，$h(0)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a$，$h(1)=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}a$ から，$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値を m とおくと，

(i) $\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}<0$ $\left(a<\dfrac{3}{4}\right)$ のとき

右表より，$m=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(ii) $0\leqq\dfrac{2}{3}a-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$ $\left(\dfrac{3}{4}\leqq a<\dfrac{3}{2}\right)$ のとき

(ii-i) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{4}>0$ $(a<1)$ のとき

右表より，$m=h\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$

(ii-ii) $\dfrac{1}{4}-\dfrac{a}{4}\leqq 0$ $(a\geqq 1)$ のとき

右表より，$m=h(0)=\dfrac{1}{4}-\dfrac{1}{4}a$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(iii) $\frac{1}{2} \leqq \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} < 1\ \left(\frac{3}{2} \leqq a < \frac{9}{4}\right)$のとき

$h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right)$ と $h(0)$ の大小関係を調べるために，差をとり，

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

$$d(a) = h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right) - h(0)$$

すると，$d(a) = -\frac{4}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}$ となり，

$$d'(a) = -\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{3}a - \frac{3}{4} = -\frac{1}{36}(4a-9)(4a-3)$$

このとき，$\frac{3}{2} \leqq a < \frac{9}{4}$ において，$d'(a) > 0$ より，$d(a) \geqq d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$

よって，$h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right) > h(0)$ となり，$m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$ である。

(iv) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2} \geqq 1\ \left(a \geqq \frac{9}{4}\right)$のとき

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

$h(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}a > \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a = h(0)$ より，

$$m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$$

(i)〜(iv)より，$a < 1$ のとき $m = 0$，$a \geqq 1$ のとき $m = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$ である。

コメント

とにかく朴訥に場合分けをし，それぞれの場合について $h(x)$ の増減を調べました。難問ではないものの，かなりの時間を要します。

問　題

実数 t に対して，u の 3 次方程式 $u^3-3u+2t=0$ の実数解のうちで絶対値が最小のものを $f(t)$ とする。

(1)　媒介変数 t を用いて，$x=f(t)$，$y=-2t$（t は実数）と表される曲線を図示せよ。

(2)　関数 $f(t)$ が連続でない t の値を求め，$f(t)$ のグラフをかけ。　[2003]

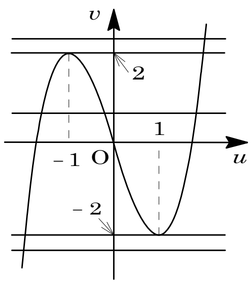
解答例

(1)　$u^3-3u+2t=0$ ……①より，$u^3-3u=-2t$ と変形すると，条件より，uv 平面上で $v=u^3-3u$ ……②と $v=-2t$ ……③の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

②より，$v'=3u^2-3=3(u+1)(u-1)$

u	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
v'	$+$	0	$-$	0	$+$
v	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

すると，②のグラフは右図のようになり，③との共有点の様子から，次のように場合分けをする。

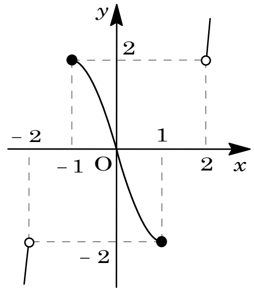


(i)　$-2t<-2$，$2<-2t$ のとき　②と③は 1 つの共有点しかもたないので，その共有点が $(f(t),\ -2t)$ である。

(ii)　$-2t=\pm2$ のとき　②と③は 2 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは接点の方で，$(f(t),\ -2t)=(\mp1,\ \pm2)$ (複号同順)となる。

(iii)　$-2<-2t<2$ のとき　②と③は 3 つの共有点をもつが，u 座標の絶対値が小さいのは $-1<u<1$ の範囲にある共有点であり，その点が $(f(t),\ -2t)$ である。

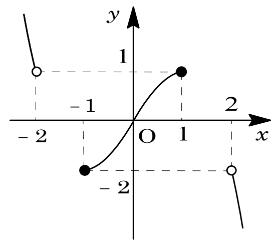
以上より，$(x,\ y)=(f(t),\ -2t)$ と表される曲線は，$y=x^3-3x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ であり，図示すると右図のようになる。



(2)　(1)と同様にして，①より $-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u=t$ と変形すると，$v=-\dfrac{1}{2}u^3+\dfrac{3}{2}u$ ……④と $v=t$ の共有点のうち，u 座標の絶対値の最小のものが $f(t)$ である。

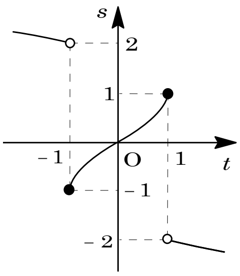
④より，$v'=-\dfrac{3}{2}u^2+\dfrac{3}{2}=-\dfrac{3}{2}(u+1)(u-1)$

すると，$t=\pm1$ で $f(t)$ は不連続で，$(x,\ y)=(f(t),\ t)$ は，$y=-\dfrac{3}{2}x^3+\dfrac{3}{2}x$ $(x<-2,\ -1\leqq x\leqq1,\ 2<x)$ ……⑤で表される曲線を描き，図示すると右図のようになる。



これより，点$(t,\ f(t))$の描く曲線は，⑤の曲線を直線$y=x$に関して対称移動したものであり，これを$s=f(t)$とおくと，$t=-\dfrac{3}{2}s^3+\dfrac{3}{2}s\ (s<-2,\ -1\leqq s\leqq 1,\ 2<s)$である。

よって，このグラフは右図のようになる。



コメント

おもしろい問題ですが, (1)の誘導は少し使いにくいものです。

問　題

a は定数とし，n は 2 以上の整数とする。関数 $f(x)=ax^n\log x-ax\ (x>0)$ の最小値が -1 のとき，定積分 $\int_1^e f(x)\,dx$ の値を n と自然対数の底 e を用いて表せ。 [2003]

解答例

$f(x)=ax^n\log x-ax=a(x^n\log x-x)$ に対して，

$$f'(x)=a(nx^{n-1}\log x+x^{n-1}-1)=a\{x^{n-1}(n\log x+1)-1\}$$

ここで，$g(x)=x^{n-1}(n\log x+1)-1$ とおくと，$f'(x)=ag(x)$ となり，

$$g'(x)=(n-1)x^{n-2}(n\log x+1)+nx^{n-2}=x^{n-2}\{n(n-1)\log x+2n-1\}$$

$x>0$ において，$g'(x)=0$ の解は, $n\geqq 2$ より，

$$\log x=-\frac{2n-1}{n(n-1)},\ \ x=e^{-\frac{2n-1}{n(n-1)}}$$

この値を $x=\alpha$ とおくと，$g(x)$ の増減は右表のようになり，$\lim_{x\to+0}g(x)=-1$，$g(1)=0$ に注意すると，$0<x<1$ のとき $g(x)<0$, $x>1$ のとき $g(x)>0$ である。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

(i)　$a>0$ のとき

$f(x)$ の増減は，右表のようになり，最小値は $f(1)=-a$ となる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$	$-a$	$\nearrow$

条件から，$-a=-1$，$a=1$ となり, $a>0$ も満たす。

(ii)　$a=0$ のとき　$f(x)=0$ より，最小値が -1 にはならない。

(iii) $a<0$ のとき　$\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ より，最小値は存在しない。

(i)(ii)(iii)より，$f(x)=x^n\log x-x$ である。

このとき，$\int_1^e f(x)\,dx=\int_1^e (x^n\log x-x)\,dx$

$$=\frac{1}{n+1}\Big[x^{n+1}\log x\Big]_1^e-\frac{1}{n+1}\int_1^e x^n\,dx-\frac{1}{2}\Big[x^2\Big]_1^e$$

$$=\frac{1}{n+1}e^{n+1}-\frac{1}{(n+1)^2}\Big[x^{n+1}\Big]_1^e-\frac{1}{2}(e^2-1)$$

$$=\frac{n}{(n+1)^2}e^{n+1}+\frac{1}{(n+1)^2}-\frac{1}{2}e^2+\frac{1}{2}$$

コメント

$g(1)=0$ は式の形から見つけます。ただ，$g(x)$ の増減について，チェックが少々面倒です。なお，$\lim_{x\to+0}x^n\log x=0$ は証明なしで用いています。

問　題

$a,\ b$ を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，$a,\ b$ の値を求めよ。 [2001]

解答例

$f(x)=x^3+ax^2+2bx$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+2b$

3 次関数 $f(x)$ が $0<x<2$ の範囲に極大値と極小値をもつ条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が $0<x<2$ の範囲に異なる 2 実数解をもつ条件に一致する。

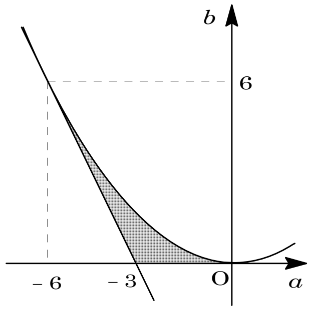
まず，$f'(x)=0$ の判別式 $D>0$ より，$a^2-6b>0$，$b<\dfrac{1}{6}a^2$ ………①

$y=f'(x)$ のグラフの軸が $x=-\dfrac{a}{3}$ より，

$$0<-\frac{a}{3}<2,\ -6<a<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$f'(0)=2b>0$ より，$b>0$………③

$f'(2)=12+4a+2b>0$ より，$b>-2a-6$ ………④



①～④を満たす領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

条件より，$a,\ b$ は整数なので，この領域内の格子点が求める $a,\ b$ の値となる。

よって，$(a,\ b)=(-3,\ 1)$ である。

コメント

①から④までの不等式は，簡単に求められます。しかし，この不等式を $a,\ b$ 平面上に図示して，領域内の格子点をさがす過程には時間がかかります。上の解ではその記述を省略しましたが。

問　題

a, b を実数, e を自然対数の底とする。すべての実数 x に対して $e^x \geqq ax+b$ が成立するとき, 以下の問いに答えよ。

(1) a, b の満たすべき条件を求めよ。

(2) 次の定積分 $\displaystyle\int_0^1 (e^x-ax-b)\,dx$ の最小値と, そのときの a, b の値を求めよ。

[2001]

解答例

(1) $f(x)=e^x-ax-b$ とおくと, $f'(x)=e^x-a$

(i) $a<0$ のとき

$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}(e^x-ax-b)=-\infty$ より, $f(x)\geqq 0$ は, すべての実数 x に対しては成立しない。

(ii) $a=0$ のとき

$f(x)=e^x-b$ より, すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ が成立する条件は, $-b\geqq 0$ すなわち $b\leqq 0$ である。

(iii) $a>0$ のとき

$f'(x)=e^x-a=0$ の解は $x=\log a$ より, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$\log a$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

よって, すべての実数 x に対して $f(x)\geqq 0$ が成立する条件は, $f(\log a)\geqq 0$ である。

$$e^{\log a}-a\log a-b\geqq 0,\ b\leqq e^{\log a}-a\log a=a(1-\log a)$$

(i)(ii)(iii)より, 求める条件は, $a=0$ かつ $b\leqq 0$, または $a>0$ かつ $b\leqq a(1-\log a)$

(2) $I=\displaystyle\int_0^1(e^x-ax-b)\,dx=\Big[e^x-\frac{a}{2}x^2-bx\Big]_0^1=e-1-\frac{a}{2}-b$

(i) $a=0$ かつ $b\leqq 0$ のとき

$I=e-1-b$ より, $b=0$ のとき最小値 $e-1$ をとる。

(ii) $a>0$ かつ $b\leqq a(1-\log a)$ のとき

$$I=e-1-\frac{a}{2}-b\geqq e-1-\frac{a}{2}-a+a\log a=a\log a-\frac{3}{2}a+e-1$$

ここで, $g(a)=a\log a-\dfrac{3}{2}a+e-1$ とおくと,

$$g'(a)=\log a+1-\frac{3}{2}=\log a-\frac{1}{2}$$

a	0	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$
$g'(a)$		$-$	0	$+$
$g(a)$		$\searrow$		$\nearrow$

右表より, $a=\sqrt{e}$ のとき最小値をとり,

$$g(\sqrt{e})=e-\sqrt{e}-1$$

すると，このとき$b=\sqrt{e}\left(1-\dfrac{1}{2}\right)=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$であり, Iは最小値$e-\sqrt{e}-1$をとる。

(i)(ii)より，$a=\sqrt{e}$，$b=\dfrac{\sqrt{e}}{2}$のとき, Iは最小値$e-\sqrt{e}-1$をとる。

コメント

(2)の(ii)では，まずaを$a>0$で固定し，bを$b\leqq a(1-\log a)$の条件のもとで動かして最小となる場合を考え，次にその状態でaを$a>0$で動かして最小値を求めています。いわゆる1文字固定という方法を利用しています。

問　題

与えられた実数 $a,\ b$ のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x)=x^3-7x$ に対して $g(x)=\min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-7x$，$f'(x)=3x^2-7=3\left(x-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	＋	0	－	0	＋
$f(x)$	↗		↘		↗

$y=f(x+1)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，$y=f(x-1)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

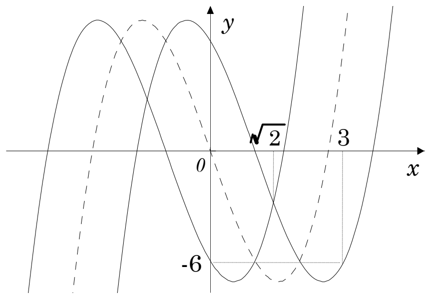
ここで，$f(x+1)=f(x-1)$ とすると，$(x+1)^3-7(x+1)=(x-1)^3-7(x-1)$

$x^2-2=0$，$x=\sqrt{2}$ $(x\geqq 0)$

したがって，

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ のとき，$g(x)=f(x+1)$

$\sqrt{2}\leqq x\leqq 3$ のとき，$g(x)=f(x-1)$



また，$0<\dfrac{\sqrt{21}}{3}-1<\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{21}}{3}+1<3$ より，$0\leqq x\leqq 3$ における $y=g(x)$ が最小となる x は，$x=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\pm 1$ となる。

最大となる x は，$x=0,\ \sqrt{2},\ 3$ のいずれかである。

ここで，$g(0)=f(1)=-6$，$g(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}-7)=-2\sqrt{2}$，$g(3)=f(2)=-6$ となることより，最大となる x は，$x=\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(x)=f(x+1)$ とすると，$x^3-7x=(x+1)^3-7(x+1)$ より，

$3x^2+3x-6=0$，$x=1$ $(x\geqq 0)$

また，$f(x)=f(x-1)$ とすると，$x^3-7x=(x-1)^3-7(x-1)$ より，

$-3x^2+3x+6=0$，$x=2$ $(x\geqq 0)$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分は，$1\leqq x\leqq 2$ の範囲だけなので，

$$S_1=\int_1^{\sqrt{2}}\{f(x+1)-f(x)\}dx=\int_1^{\sqrt{2}}(3x^2+3x-6)dx=-4\sqrt{2}+\frac{13}{2}$$

$$S_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\{f(x-1)-f(x)\}dx=\int_{\sqrt{2}}^{2}(-3x^2+3x+6)dx=-4\sqrt{2}+7$$

求める面積は，$S_1+S_2=-8\sqrt{2}+\dfrac{27}{2}$

コメント

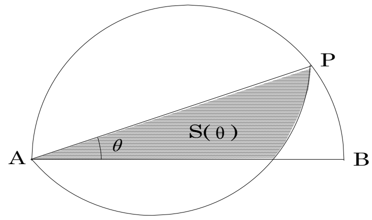
$y=f(x)$のグラフを丁寧に書いて，x軸方向に$+1$，および-1だけ平行移動すれば，結論は見えてきます。後はそれを計算で補うだけです。

問　題

AB を直径とする半径 1 の半円がある。P を半円周上の動点とし，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$ とおくとき，P は $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ をみたす範囲を動く。直径 AB と弦 AP と弧 PB で囲まれた部分の面積を $T(\theta)$ で表す。

(1)　$T(\theta)$ を求めよ。

(2)　P が半円周上を $0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ の範囲で動くとき，右図のように，線分 AP を折り目にしてこの半円を折り重ね，重なった部分の面積を $S(\theta)$ とおく。このとき $S(\theta)$ を $T(\theta)$ と $T(2\theta)$ を用いて表せ。



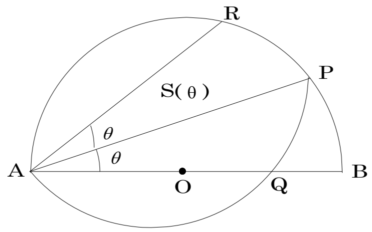
(3)　(2)の $S(\theta)$ の最大値を与える θ の値を α とするとき，$\cos 2\alpha$ の値を求めよ。

[1998]

解答例

(1)　円の中心を O とすると，$\angle\mathrm{POB}=2\theta$ より，

$$T(\theta)=\triangle\mathrm{OAP}+(\text{扇形 BOP})$$
$$=\frac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin(\pi-2\theta)+\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot2\theta$$
$$=\frac{1}{2}\sin 2\theta+\theta$$



(2)　折り重ねた弓形と直径 AB との交点を Q とおき, Q の AP に関する対称点を R とする。

すると，図形 APQ は図形 APR と合同なので,

$$S(\theta)=(\text{図形 ARP})=(\text{図形 ARB})-(\text{図形 APB})=T(2\theta)-T(\theta)$$

(3)　(2)より，$S(\theta)=\left(\dfrac{1}{2}\sin 4\theta+2\theta\right)-\left(\dfrac{1}{2}\sin 2\theta+\theta\right)=\dfrac{1}{2}(\sin 4\theta-\sin 2\theta)+\theta$

$$S'(\theta)=2\cos 4\theta-\cos 2\theta+1=4\cos^2 2\theta-\cos 2\theta-1$$
$$=4\left(\cos 2\theta-\frac{1+\sqrt{17}}{8}\right)\left(\cos 2\theta-\frac{1-\sqrt{17}}{8}\right)$$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ より，$0<2\theta<\dfrac{\pi}{2}$ から $\cos 2\theta>0$，よって $\cos 2\theta-\dfrac{1-\sqrt{17}}{8}>0$

$\cos 2\theta_0=\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$ とおくと,

$0<\theta<\theta_0$ で $\cos 2\theta-\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}>0$

$\theta_0<\theta<\dfrac{\pi}{4}$ で $\cos 2\theta-\dfrac{1+\sqrt{17}}{8}<0$

θ	0	$\cdots$	θ_0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$S'(\theta)$		$+$	0	$-$	
$S(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$\theta=\theta_0$ で $S(\theta)$ は最大となる。

すなわち，$\cos 2\alpha = \dfrac{1+\sqrt{17}}{8}$

コメント

(2)で「$T(\theta)$だけでなく$T(2\theta)$も用いよ」という意味の設問にはとまどってしまいますが，これが逆に，折り返しを考えるヒントとなっています。この点を発見するのが本問のポイントです。

問　題

0 以上の整数 n に対して，整式 $T_n(x)$ を

$$T_0(x)=1\,,\ T_1(x)=x\,,\ T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

で定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) 0 以上の任意の整数 n に対して，$\cos(n\theta)=T_n(\cos\theta)$ となることを示せ。

(2) 定積分 $\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx$ の値を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $T_0(x)=1\,,\ T_1(x)=x\,,\ T_n(x)=2xT_{n-1}(x)-T_{n-2}(x)\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ のとき，

$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ となることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=0,\ 1$ のとき

$T_0(\cos\theta)=1=\cos 0\,,\ T_1(\cos\theta)=\cos\theta$ となり，成立している。

(ii) $n=k,\ k+1\ (k\geqq 0)$ のとき

$T_k(\cos\theta)=\cos k\theta\,,\ T_{k+1}(\cos\theta)=\cos(k+1)\theta$ と仮定すると，

$$\begin{aligned}T_{k+2}(\cos\theta)&=2\cos\theta T_{k+1}(\cos\theta)-T_k(\cos\theta)=2\cos\theta\cos(k+1)\theta-\cos k\theta\\&=\cos(k+2)\theta+\cos k\theta-\cos k\theta=\cos(k+2)\theta=T_{k+2}(\cos\theta)\end{aligned}$$

これより，$n=k+2$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$T_n(\cos\theta)=\cos n\theta$ となる。

(2) $I=\displaystyle\int_{-1}^{1}T_n(x)dx$ とし，$x=\cos\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とおくと，$dx=-\sin\theta d\theta$ となり，

$$I=\int_{\pi}^{0}T_n(\cos\theta)(-\sin\theta)d\theta=\int_0^{\pi}\cos n\theta\sin\theta d\theta$$

(i) $n\geqq 2$ のとき

$$\begin{aligned}I&=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\{\sin(n+1)\theta-\sin(n-1)\theta\}d\theta\\&=\frac{1}{2}\Big[-\frac{\cos(n+1)\theta}{n+1}+\frac{\cos(n-1)\theta}{n-1}\Big]_0^{\pi}\\&=-\frac{1}{2(n+1)}\{\cos(n+1)\pi-1\}+\frac{1}{2(n-1)}\{\cos(n-1)\pi-1\}\\&=-\frac{1}{2(n+1)}\{(-1)^{n+1}-1\}+\frac{1}{2(n-1)}\{(-1)^{n-1}-1\}\\&=\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n-1}\Big)\{(-1)^{n-1}-1\}=\frac{(-1)^{n-1}-1}{(n+1)(n-1)}\end{aligned}$$

(ii) $n=1$ のとき　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\cos\theta\sin\theta d\theta=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}\sin 2\theta d\theta=-\frac{1}{4}\Big[\cos 2\theta\Big]_0^{\pi}=0$

(iii) $n=0$ のとき　$I=\displaystyle\int_0^{\pi}\sin\theta d\theta=-\Big[\cos\theta\Big]_0^{\pi}=2$

(i)〜(iii)より，$I=\dfrac{-2}{(n+1)(n-1)}$ (n が偶数)，$I=0$ (n が奇数)

コメント

ときどき見かける漸化式ですが，内容は数学的帰納法と定積分の計算の融合問題です。(2)では，場合分けに要注意です。

問　題

$n,\ m$ を 0 以上の整数とし，$I_{n,\,m}=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta$ とおく。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$ のとき，$I_{n,\,m}$ を $I_{n-2,\,m+2}$ を使って表せ。

(2) 次の式 $I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$ を示せ。

(3) 次の式 $\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$ を示せ。ただし $0!=1$ とする。 [2014]

解答例

(1) $n\geqq 2$ のとき，部分積分を用いて，

$$I_{n,\,m}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^n\theta\sin^m\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-1}\theta\sin^m\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{m+1}\Big[\cos^{n-1}\theta\sin^{m+1}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin\theta\sin^{m+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{n-1}{m+1}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{n-2}\theta\sin^{m+2}\theta\,d\theta=\frac{n-1}{m+1}I_{n-2,\,m+2}$$

(2) $x=\cos^2\theta$ とおくと，$dx=-2\cos\theta\sin\theta\,d\theta$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n+1}\theta\sin^{2m+1}\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^{2n}\theta\sin^{2m}\theta\cos\theta\sin\theta\,d\theta$$

$$=-\frac{1}{2}\int_1^0 x^n(1-x)^m\,dx=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n(1-x)^m\,dx$$

(3) (1)より，$I_{2n+1,\,2m+1}=\dfrac{2n}{2m+2}I_{2n-1,\,2m+3}$ となり，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{2n}{2m+2}\cdot\frac{2n-2}{2m+4}\cdot\frac{2n-4}{2m+6}\cdot\cdots\cdot\frac{2}{2m+2n}I_{1,\,2m+2n+1}$$

$$=\frac{n}{m+1}\cdot\frac{n-1}{m+2}\cdot\frac{n-2}{m+3}\cdot\cdots\cdot\frac{1}{m+n}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\sin^{2m+2n+1}\theta\,d\theta$$

$$=\frac{m!n!}{(m+n)!}\Big[\frac{1}{2m+2n+2}\sin^{2m+2n+2}\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{m!n!}{2(m+n+1)!}$$

また，二項展開を用いると，(2)より，

$$I_{2n+1,\,2m+1}=\frac{1}{2}\int_0^1 x^n\{{}_m\mathrm{C}_0-{}_m\mathrm{C}_1x+\cdots+(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_mx^m\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\{{}_m\mathrm{C}_0x^n-{}_m\mathrm{C}_1x^{n+1}+\cdots+(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_mx^{n+m}\}dx$$

$$=\frac{1}{2}\Big\{\frac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\frac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+\frac{(-1)^m\,{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}\Big\}$$

以上より，$\dfrac{n!m!}{(n+m+1)!}=\dfrac{{}_m\mathrm{C}_0}{n+1}-\dfrac{{}_m\mathrm{C}_1}{n+2}+\cdots+(-1)^m\dfrac{{}_m\mathrm{C}_m}{n+m+1}$

コメント

定積分の計算についての有名問題で，要演習の 1 題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ は第 2 次導関数 $f''(x)$ が連続で，ある $a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ を満たしているものとする。このとき

$$f(b)-f(a)=\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx$$

が成り立つことを示せ。

(2) 直線道路上における車の走行を考える。ある信号で停止していた車が, 時刻 0 で発進後, 距離 L だけ離れた次の信号に時刻 T で到達し再び停止した。この間にこの車の加速度の絶対値が $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である瞬間があることを示せ。 [2012]

解答例

(1)　$a<b$ に対して，$f'(a)=f'(b)=0$ より，

$$\begin{aligned}\int_a^b \left(\frac{a+b}{2}-x\right)f''(x)\,dx &= \left[\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f'(x)\right]_a^b-\int_a^b -f'(x)\,dx\\ &=\frac{a-b}{2}f'(b)-\frac{b-a}{2}f'(a)+\Big[f(x)\Big]_a^b\\ &=f(b)-f(a)\end{aligned}$$

(2) 車が時刻 0 で発進後，時刻 t での位置を $x(t)$ とすると，$0<T$ に対して，

$$L=\left|\int_0^T x'(t)\,dt\right|=\left|x(T)-x(0)\right|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，条件より，$x'(0)=x'(T)=0$ なので, (1)から,

$$x(T)-x(0)=\int_0^T \left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$\left|x''(t)\right|<\dfrac{4L}{T^2}$ と仮定すると，①②より，

$$\begin{aligned}L&=\left|\int_0^T \left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\,dt\right|\leqq\int_0^T \left|\left(\frac{T}{2}-t\right)x''(t)\right|dt=\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|\left|x''(t)\right|dt\\ &<\frac{4L}{T^2}\int_0^T\left|\frac{T}{2}-t\right|dt=\frac{4L}{T^2}\left(\frac{T^2}{8}+\frac{T^2}{8}\right)=L\end{aligned}$$

すると，$L<L$ となり成立しない。

よって，この車の加速度の絶対値 $\left|x''(t)\right|$ は，ある瞬間に $\dfrac{4L}{T^2}$ 以上である。

コメント

速度，加速度が題材になっているユニークな問題です。(1)の結論を利用すると，(2)の背理法へとスムーズに繋がります。なお，定積分の計算は，記述を省略しましたが，面積を対応させて値を求めています。

問　題

$f(x)=x\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$，$g(x)=\log(1+x^2)$（$x$ は実数）とおく。ただし，$\log x$ は x の自然対数を表す。

(1) $\displaystyle\int_0^1 f(x)dx$ の値を求めよ。

(2) $x>0$ のとき $f(x)>g(x)$ であることを証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left\{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right)-2\log n\right\}$ の値を求めよ。　[2011]

解答例

(1) $f(x)=x\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}$ より，部分積分を用いて，

$$\int_0^1 f(x)dx=\left[\frac{x^2}{2}\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}\right]_0^1-\int_0^1\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{1+x^2}dx$$

$$=\frac{1}{2}\int_0^1\frac{dt}{1+t^2}-\frac{1}{2}\int_0^1\left(1-\frac{1}{1+x^2}\right)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}\int_0^1 dx$$

ここで，$x=\tan\theta\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{1}{\cos^2\theta}d\theta$ より，

$$\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{\pi}{4}$$

よって，$\displaystyle\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\frac{dx}{1+x^2}-\frac{1}{2}=\frac{\pi}{4}-\frac{1}{2}$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)=x\displaystyle\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}-\log(1+x^2)$ とおくと，

$$h'(x)=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}+\frac{x}{1+x^2}-\frac{2x}{1+x^2}=\int_0^x\frac{dt}{1+t^2}-\frac{x}{1+x^2}$$

$$h''(x)=\frac{1}{1+x^2}-\frac{(1+x^2)-x\cdot 2x}{(1+x^2)^2}=\frac{2x^2}{(1+x^2)^2}$$

すると, $x>0$ において，$h''(x)>0$ より，$h'(x)>h'(0)=0$ となり，

$h(x)>h(0)=0$

すなわち，$f(x)>g(x)$ である。

(3) $S_n=\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log(k^2+n^2)\right)-2\log n=\left(\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\log n^2\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}\right)-2\log n$ とおくと，

$$S_n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log n^2+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}-2\log n$$

$$=\frac{1}{n}\cdot 2n\log n+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}-2\log n=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left\{\left(\frac{k}{n}\right)^2+1\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^1 \log(x^2+1)\,dx = \Big[\,x\log(x^2+1)\Big]_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{x^2+1}dx$$
$$= \log 2 - 2\int_0^1 \Big(1-\frac{1}{x^2+1}\Big)dx = \log 2 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{dx}{x^2+1}$$
$$= \log 2 + \frac{\pi}{2} - 2$$

コメント

解き終われば，3 つの設問の関連はあまりないことがわかります。ただ，解き進めているときには，(3)と(2)の関係について，迷いが生じます。

問　題

$a,\ b$ は実数とする。関数 $f(x)$ は，$f(x)=a\sin x+b\cos x+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ を満たし，かつ $-\pi\leqq x\leqq\pi$ における最大値は 2π である。このとき，$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ を最小にする $a,\ b$ の値と，その最小値を求めよ。　[2010]

解答例

$f(x)=a\sin x+b\cos x+\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ に対し，$c=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt$ とおくと，

$$f(x)=a\sin x+b\cos x+c$$

すると，$c=\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos t\,dt=\int_{-\pi}^{\pi}(a\sin t+b\cos t+c)\cos t\,dt$

$$=\int_{-\pi}^{\pi}\left(a\cdot\frac{\sin 2t}{2}+b\cdot\frac{1+\cos 2t}{2}+c\cos t\right)dt=\frac{b}{2}\cdot 2\pi=\pi b$$

よって，$f(x)=a\sin x+b\cos x+\pi b$

ここで，$a=b=0$ のときは，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ における $f(x)$ の最大値が 2π という条件に反するので，$a^2+b^2\neq 0$ から，

$$f(x)=\sqrt{a^2+b^2}\sin(x+\alpha)+\pi b\quad\left(\sin\alpha=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \cos\alpha=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ より，$-\pi+\alpha\leqq x+\alpha\leqq\pi+\alpha$ となり，$f(x)$ の最大値が 2π から，

$$\sqrt{a^2+b^2}+\pi b=2\pi,\quad a^2+b^2=\pi^2(2-b)^2\quad(b\leqq 2)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\{f(x)\}^2=(a\sin x+b\cos x+\pi b)^2$

$$=a^2\sin^2x+b^2\cos^2x+\pi^2b^2+2ab\sin x\cos x+2\pi b^2\cos x+2\pi ab\sin x$$

$$=a^2\cdot\frac{1-\cos 2x}{2}+b^2\cdot\frac{1+\cos 2x}{2}+\pi^2b^2+ab\sin 2x+2\pi b^2\cos x+2\pi ab\sin x$$

そこで，$-\pi\leqq x\leqq\pi$ における周期性に注意すると，$(*)$から，

$$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx=2\pi\left(\frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}+\pi^2b^2\right)=\pi(a^2+b^2+2\pi^2b^2)$$

$$=\pi^3(4-4b+b^2+2b^2)=\pi^3(3b^2-4b+4)$$

$$=\pi^3\left\{3\left(b-\frac{2}{3}\right)^2+\frac{8}{3}\right\}$$

すると，$b\leqq 2$ から，$b=\frac{2}{3}$ のとき最小となり，このとき，$(*)$から，$a^2=\frac{4}{9}(4\pi^2-1)$ すなわち $a=\pm\frac{2}{3}\sqrt{4\pi^2-1}$ である。

よって，$\int_{-\pi}^{\pi}\{f(x)\}^2dx$ の最小値は $\frac{8}{3}\pi^3$ である。

コメント

三角関数の周期性に注目すると，積分計算はほとんど必要ありません。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　置換 $x=\tan^3\theta$ により，定積分 $\displaystyle\int_1^{3\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\Big)dx$ を求めよ。

(2)　$t>1$ に対して，$g(t)=\displaystyle\int_1^t\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx$ と定める。$t\to\infty$ のとき $g(t)-at^b$ が収束するような正の実数 $a,\ b$ を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　$x=\tan^3\theta$ より，$\dfrac{dx}{d\theta}=3\tan^2\theta\cdot\dfrac{1}{\cos^2\theta}=3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)$

さて，$-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ では，$x=1\to3\sqrt{3}$ のとき $\theta=\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{\pi}{3}$ となるので，

$$\int_1^{3\sqrt{3}}\Big(\frac{1}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}\Big)dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\Big(\frac{1}{\tan^2\theta}-\frac{1}{1+\tan^2\theta}\Big)\cdot3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)}{\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)}d\theta=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=3\Big(\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}\Big)=\frac{\pi}{4}$$

(2)　(1)と同様に $x=\tan^3\theta$ とし，$t>1$ に対して $t=\tan^3\varphi$ $\Big(\dfrac{\pi}{4}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\Big)$ とおくと，

$$g(t)=\int_1^t\frac{1}{1+\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\frac{1}{1+\tan^2\theta}\cdot3\tan^2\theta(1+\tan^2\theta)\,d\theta$$

$$=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\tan^2\theta\,d\theta=3\int_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}\Big(\frac{1}{\cos^2\theta}-1\Big)d\theta=3\Big[\tan\theta-\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\varphi}$$

$$=3\tan\varphi-3\varphi-3+\frac{3}{4}\pi=3t^{\frac{1}{3}}-3\varphi-3+\frac{3}{4}\pi$$

すると，$g(t)-at^b=3t^{\frac{1}{3}}-at^b-3\varphi-3+\dfrac{3}{4}\pi=t^{\frac{1}{3}}(3-at^{b-\frac{1}{3}})-3\varphi-3+\dfrac{3}{4}\pi$

ここで，$t\to\infty$ のとき $\varphi\to\dfrac{\pi}{2}$ より，$g(t)-at^b$ が収束する必要条件は，

$$\lim_{t\to\infty}(3-at^{b-\frac{1}{3}})=0,\quad a\lim_{t\to\infty}t^{b-\frac{1}{3}}=3\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$b>\dfrac{1}{3}$ のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^{b-\frac{1}{3}}=\infty$，$0<b<\dfrac{1}{3}$ のとき $\displaystyle\lim_{t\to\infty}t^{b-\frac{1}{3}}=0$ となり，ともに(＊)に適さない。ところが，$b=\dfrac{1}{3}$ のとき，(＊)は $a=3$ で満たされる。

逆に，このとき $g(t)-at^b=-3\varphi-3+\dfrac{3}{4}\pi$ となり，$t\to\infty$ のとき明らかに収束するので，求める正の実数 $a,\ b$ は，$a=3$，$b=\dfrac{1}{3}$ である。

コメント

誘導付きの定積分の計算問題です。問題文に $-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ の指定はありませんが，これは，自分で設定するということでしょう。

問　題

x の関数 $f(x)=\int_{x-2}^{x+2}|y(y-5)|dy$ の $2\leqq x$ における最小値を求めよ。　　[2007]

解答例

$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}|y(y-5)|dy\quad (x\geqq 2)$ に対して，

(i)　$2\leqq x<3$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}-y(y-5)dy=\int_{x-2}^{x+2}(-y^2+5y)dy=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{x+2}$$
$$=-\frac{1}{3}\left\{(x+2)^3-(x-2)^3\right\}+\frac{5}{2}\left\{(x+2)^2-(x-2)^2\right\}$$
$$=-4x^2+20x-\frac{16}{3}=-4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{59}{3}$$

これより，最小値は $f(2)=\dfrac{56}{3}$ となる。

(ii)　$3\leqq x<7$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{5}-y(y-5)dy+\int_{5}^{x+2}y(y-5)dy$$
$$=\left[-\frac{y^3}{3}+\frac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{5}+\left[\frac{y^3}{3}-\frac{5}{2}y^2\right]_{5}^{x+2}$$

ここで，$\left[-\dfrac{y^3}{3}+\dfrac{5}{2}y^2\right]_{x-2}^{5}=-\dfrac{1}{3}\left\{125-(x-2)^3\right\}+\dfrac{5}{2}\left\{25-(x-2)^2\right\}$

$\left[\dfrac{y^3}{3}-\dfrac{5}{2}y^2\right]_{5}^{x+2}=\dfrac{1}{3}\left\{(x+2)^3-125\right\}-\dfrac{5}{2}\left\{(x+2)^2-25\right\}$

よって，$f(x)=\dfrac{2}{3}x^3-5x^2+8x+\dfrac{65}{3}$

$f'(x)=2x^2-10x+8=2(x-1)(x-4)$

右表より，最小値は $f(4)=\dfrac{49}{3}$ となる。

x	3	$\cdots$	4	$\cdots$	7
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(iii) $7\leqq x$ のとき

$$f(x)=\int_{x-2}^{x+2}y(y-5)dy=4\left(x-\frac{5}{2}\right)^2-\frac{59}{3}$$

これより，最小値は $f(7)=\dfrac{184}{3}$ となる。

(i)～(iii)より，$f(x)$ は連続関数なので，その最小値は $f(4)=\dfrac{49}{3}$ である。

コメント

絶対値のついた関数を積分する頻出問題です。ミスなく計算するだけですが，計算量は多めです。

問　題

関数 $f(x)=3\cos 2x+7\cos x$ について，$\displaystyle\int_0^\pi |f(x)|dx$ を求めよ。　[2005]

解答例

$0\leqq x\leqq\pi$ において，$f(x)=3\cos 2x+7\cos x=3(2\cos^2 x-1)+7\cos x$

$$=6\cos^2 x+7\cos x-3=(3\cos x-1)(2\cos x+3)$$

ここで，$\cos\alpha=\dfrac{1}{3}\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$0\leqq x\leqq\alpha$ で $f(x)\geqq 0$，$\alpha\leqq x\leqq\pi$ で $f(x)\leqq 0$ となり，

$$I=\int_0^\pi |f(x)|dx=\int_0^\alpha f(x)dx+\int_\alpha^\pi -f(x)dx$$

$$=\int_0^\alpha (3\cos 2x+7\cos x)dx-\int_\alpha^\pi (3\cos 2x+7\cos x)dx$$

$$=\left[\frac{3}{2}\sin 2x+7\sin x\right]_0^\alpha-\left[\frac{3}{2}\sin 2x+7\sin x\right]_\alpha^\pi$$

$$=\frac{3}{2}\sin 2\alpha+7\sin\alpha-\frac{3}{2}(0-\sin 2\alpha)-7(0-\sin\alpha)$$

$$=3\sin 2\alpha+14\sin\alpha$$

そこで，$\sin\alpha=\sqrt{1-\dfrac{1}{9}}=\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$，$\sin 2\alpha=2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4\sqrt{2}}{9}$ から，

$$I=3\cdot\frac{4\sqrt{2}}{9}+14\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{32}{3}\sqrt{2}$$

コメント

$f(x)=0$ となる x は求まらないので，この値を α として，α の条件を念頭におきながら計算をすすめる問題です。

問　題

n を 2 以上の整数とし，$I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt\ (x\geqq 0)$ と定める。

(1)　$n=2$ のとき，$I(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　$I(x)$ の最大値が $\dfrac{n}{n^2-1}$ であるならば, n は偶数であることを証明せよ。　[2002]

解答例

(1)　$n=2$ のとき，$I(x)=\int_0^x \sin t\sin 2t\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}(\cos 3t-\cos t)\,dt$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{3}\sin 3t-\sin t\Big]_0^x=-\frac{1}{6}\sin 3x+\frac{1}{2}\sin x$$

$$I'(x)=-\frac{1}{2}\cos 3x+\frac{1}{2}\cos x=-\frac{1}{2}(\cos 3x-\cos x)=\sin 2x\sin x$$

$I(x)$ は周期 2π の周期関数なので，$0\leqq x\leqq 2\pi$ で考えても一般性は失われない。

したがって，右表より，最大値は $I\left(\frac{\pi}{2}\right)=\frac{1}{6}+\frac{1}{2}=\frac{2}{3}$ となる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{3}{2}\pi$	$\cdots$	2π
$I'(x)$	0	＋	0	－	0	－	0	＋	0
$I(x)$	0	↗		↘	0	↘		↗	0

(2)　$I(x)=\int_0^x \sin t\sin nt\,dt=\int_0^x -\frac{1}{2}\{\cos(n+1)t-\cos(n-1)t\}\,dt$

$$=-\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{n+1}\sin(n+1)t-\frac{1}{n-1}\sin(n-1)t\Big]_0^x$$

$$=-\frac{1}{2(n+1)}\sin(n+1)x+\frac{1}{2(n-1)}\sin(n-1)x$$

$-1\leqq\sin(n+1)x\leqq 1$，$-1\leqq\sin(n-1)x\leqq 1$ より，

$$I(x)\leqq\frac{1}{2(n+1)}+\frac{1}{2(n-1)}=\frac{n-1+n+1}{2(n+1)(n-1)}=\frac{n}{n^2-1}\cdots\cdots\cdots①$$

これより，$I(x)$ の最大値が $\dfrac{n}{n^2-1}$ であるのは，①の等号が成立するときなので，

$\sin(n+1)x=-1\cdots\cdots②$，$\sin(n-1)x=1\cdots\cdots③$

②より, m を 0 以上の整数として，$(n+1)x=2m\pi+\frac{3}{2}\pi\cdots\cdots\cdots④$

③より, l を 0 以上の整数として，$(n-1)x=2l\pi+\frac{1}{2}\pi\cdots\cdots\cdots⑤$

④＋⑤より，$2nx=2m\pi+2l\pi+2\pi$，$nx=(m+l+1)\pi\cdots\cdots\cdots⑥$

④－⑤より，$2x=2m\pi-2l\pi+\pi$，$x=\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi\cdots\cdots\cdots⑦$

⑥⑦より，$n\left(m-l+\frac{1}{2}\right)\pi=(m+l+1)\pi$，$\frac{1}{2}n=(m+l+1)-n(m-l)$

以上より, l, m, n は整数なので, n は偶数となる。

コメント

(2)でも，(1)と同じように微分して増減表と考えました。ところが，それを実行するのは複雑そうに思えましたので，見方を変えたところ，あっさり結論が導けました。おもしろい問題です。

問　題

$n=0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$f_n(x)=\dfrac{\sin nx}{\sin x}\left(0<x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$f_n(0)=n$ で与えられる関数の列 $\{f_n(x)\}$ と $I_n=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}f_n(x)\,dx$ からなる数列 $\{I_n\}$ とがある。

(1) $f_n(x)$ は $x=0$ で連続であることを示せ。

(2) $I_{n+1}-I_{n-1}$ を n の式で表せ。

(3) $S_m=\displaystyle\sum_{k=1}^{m}\frac{(-1)^k}{2k-1}$ とするとき，I_n を S_m を用いて表せ。 [1999]

解答例

(1) $n\geqq 1$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f_n(x)=\lim_{x\to+0}\frac{x}{\sin x}\cdot\frac{\sin nx}{nx}\cdot n=n$

$n=0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f_0(x)=\lim_{x\to+0}\frac{\sin 0}{\sin x}=0$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f_n(x)=f_n(0)$ となり，$f_n(x)$ は $x=0$ で連続である。

(2)
$$I_{n+1}-I_{n-1}=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(n+1)x}{\sin x}dx-\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(n-1)x}{\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\sin(n+1)x-\sin(n-1)x}{\sin x}dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{2\cos nx\sin x}{\sin x}dx$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos nx\,dx=\frac{2}{n}\Big[\sin nx\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{n}\sin\frac{n}{2}\pi\quad(n\geqq 1)$$

(3) まず，$I_0=0$，$I_1=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}dx=\frac{\pi}{2}$ となり, (2)から l を自然数として,

(i) $n=2l$ のとき　$I_{2l+1}-I_{2l-1}=\dfrac{1}{l}\sin l\pi=0$ より，$I_{2l-1}=I_1=\dfrac{\pi}{2}$

(ii) $n=2l-1$ のとき　$I_{2l}-I_{2l-2}=\dfrac{2}{2l-1}\sin\dfrac{2l-1}{2}\pi=\dfrac{2}{2l-1}(-1)^{l-1}$
$$I_{2l}=I_0+\sum_{k=1}^{l}(I_{2k}-I_{2k-2})=\sum_{k=1}^{l}\frac{2}{2k-1}(-1)^{k-1}=-2\sum_{k=1}^{l}\frac{(-1)^k}{2k-1}=-2S_l$$

(i)(ii)より，$I_0=0$, n が奇数のとき $I_n=\dfrac{\pi}{2}$, n が 2 以上の偶数のとき $I_n=-2S_{\frac{n}{2}}$

コメント

(3)はおもしろい問題です。n を偶奇に分けて考えると，(2)の結論がうまく利用できます。

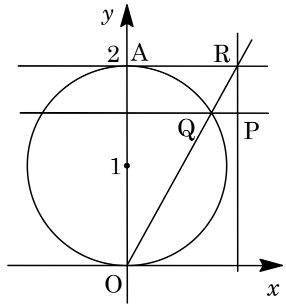
問　題

2 点 O(0, 0)，A(0, 2) を直径とする円周から O を除いた部分を点 Q が動く。点 A を通り x 軸に平行な直線と直線 OQ の交点を R とする。点 Q を通り x 軸と平行な直線と，点 R を通り y 軸と平行な直線との交点を P とする。点 P の軌跡を C とする。

(1) C の方程式を求めよ。

(2) 正の実数 a に対して，C と x 軸と 2 直線 $x=a$，$x=-a$ によって囲まれる図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を $V(a)$ とする。このとき，$\lim_{a\to\infty}V(a)$ を求めよ。 [2016]

解答例



(1) 点 O(0, 0)，A(0, 2) を直径の両端とする円周上の点 Q を $\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 1+\sin\theta)$ とおく。

ただし，$(\cos\theta,\ \sin\theta)\neq(0,\ -1)$ である。

ここで，直線 OQ の式は $y=\dfrac{1+\sin\theta}{\cos\theta}x$ となり，直線 $y=2$ との交点は，$x=\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$ から，

$$\mathrm{R}\left(\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta},\ 2\right),\ \mathrm{P}\left(\frac{2\cos\theta}{1+\sin\theta},\ 1+\sin\theta\right)$$

そこで，P$(x,\ y)$ とおくと，$x=\dfrac{2\cos\theta}{1+\sin\theta}$……①，$y=1+\sin\theta$……②となり，

②を①に代入して，$\cos\theta=\dfrac{xy}{2}$，$\sin\theta=y-1$ となり，

$$\frac{x^2y^2}{4}+(y-1)^2=1,\ x^2y^2+4y^2-8y=0$$

ここで，$y=0$ とすると $(\cos\theta,\ \sin\theta)=(0,\ -1)$ となり，不適である。

よって，点 P の軌跡 C の方程式は，$x^2y+4y-8=0$ すなわち $y=\dfrac{8}{x^2+4}$ である。

(2) C と x 軸と 2 直線 $x=a$，$x=-a$ によって囲まれる図形は y 軸対称であり，この図形を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 $V(a)$ は，

$$V(a)=2\pi\int_0^a\frac{64}{(x^2+4)^2}dx=128\pi\int_0^a\frac{1}{(x^2+4)^2}dx$$

ここで，$x=2\tan\varphi\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\varphi<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，$dx=\dfrac{2}{\cos^2\varphi}d\varphi$ となり，$x=0\to a$ のとき $a=2\tan\alpha$ とすると $\varphi=0\to\alpha$ となるので，

$$V(\alpha)=128\pi\int_0^{\alpha}\frac{1}{(4\tan^2\varphi+4)^2}\cdot\frac{2}{\cos^2\varphi}d\varphi=16\pi\int_0^{\alpha}(\cos^2\varphi)^2\cdot\frac{1}{\cos^2\varphi}d\varphi$$

$$=16\pi\int_0^{\alpha}\cos^2\varphi d\varphi=8\pi\int_0^{\alpha}(1+\cos 2\varphi)d\varphi=8\pi\Big[\varphi+\frac{1}{2}\sin 2\varphi\Big]_0^{\alpha}$$

$$=8\pi\Big(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\Big)$$

すると，$a\to\infty$ のとき $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V(a)=\lim_{\alpha\to\frac{\pi}{2}}8\pi\Big(\alpha+\frac{1}{2}\sin 2\alpha\Big)=4\pi^2$

コメント

軌跡と回転体の体積についての標準的な問題です。計算は易しめです。

問　題

a は 0 でない実数とする。直線 $y=ax$ と曲線 $y=x\log(x+1)$ で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2013]

解答例

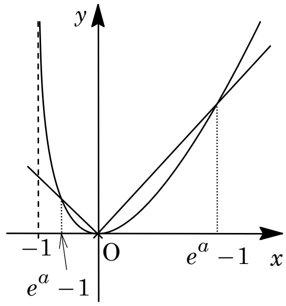
$x>-1$ のとき，曲線 $y=x\log(x+1)$ ……①に対して，$y'=\log(x+1)+\dfrac{x}{x+1}$

$$y''=\frac{1}{x+1}+\frac{x+1-x}{(x+1)^2}=\frac{x+2}{(x+1)^2}>0$$

x	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
y'		$-$	0	$+$
y		$\searrow$	0	$\nearrow$

すると，曲線①は下に凸であり，また y' は単調増加し，$x=0$ のとき $y'=0$ から y の増減は右表のようになる。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to-1+0}y=\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}y=\infty$ から，曲線①および直線 $y=ax$ ……②の関係は，右図のようになる。



ここで，①と②を連立すると，$x\log(x+1)=ax$

$$x\{\log(x+1)-a\}=0$$

よって，$x=0$，または $\log(x+1)=a$ より $x=e^a-1$

さて，曲線①と直線②で囲まれる図形の面積 S は,

(i)　$e^a-1>0$ $(a>0)$ のとき

$$S=\int_0^{e^a-1}\{ax-x\log(x+1)\}dx$$
$$=\Big[\frac{a}{2}x^2\Big]_0^{e^a-1}-\Big[\frac{x^2}{2}\log(x+1)\Big]_0^{e^a-1}+\int_0^{e^a-1}\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x+1}dx$$
$$=\frac{a}{2}(e^a-1)^2-\frac{(e^a-1)^2}{2}\log e^a+\frac{1}{2}\int_0^{e^a-1}\Big(x-1+\frac{1}{x+1}\Big)dx$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\frac{1}{2}x^2-x+\log|x+1|\Big]_0^{e^a-1}=\frac{1}{4}(e^a-1)^2-\frac{1}{2}(e^a-1)+\frac{1}{2}\log e^a$$
$$=\frac{1}{4}e^{2a}-e^a+\frac{1}{2}a+\frac{3}{4}$$

(ii)　$e^a-1<0$ $(a<0)$ のとき

$$S=\int_{e^a-1}^{0}\{ax-x\log(x+1)\}dx=-\frac{1}{4}e^{2a}+e^a-\frac{1}{2}a-\frac{3}{4}$$

コメント

微積分の基本題です。曲線の概形が把握できれば，場合分けはあるものの計算は面倒ではありません。

問　題

関数 $y=\log|x|$ のグラフ G 上に動点 A, B があり，それぞれの x 座標を a, b とする。A における接線と B における接線が直交し, $a>0$ であるとき，以下の問いに答えよ。

(1) ab を求めよ。

(2) 線分 AB の中点の存在範囲を求めよ。

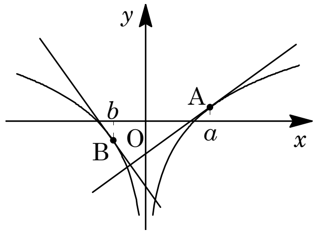
(3) 直線 AB が点 $(1,\ 0)$ を通り，$a\neq 1$ を満たすとき，直線 AB と G で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2008]

解答例

(1) $G: y=\log|x|$ に対し，$y'=\dfrac{1}{x}$ となる。

ここで，$A(a,\ \log|a|)$，$B(b,\ \log|b|)$ における接線が直交することより，

$$\frac{1}{a}\cdot\frac{1}{b}=-1,\ ab=-1\cdots\cdots\cdots①$$



(2) $a>0$ なので，①から $b<0$ であり，$A(a,\ \log a)$，$B(b,\ \log(-b))$ となる。

さて，線分 AB の中点を $M(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{\log a+\log(-b)}{2}=\frac{\log(-ab)}{2}$$

①より，$y=\dfrac{\log 1}{2}=0$ となり，$x=\dfrac{1}{2}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$ から，x は任意の値をとりうる。

以上より，中点 M の存在範囲は, x 軸全体である。

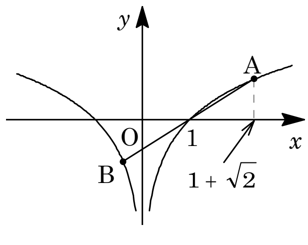
(3) 直線 AB が点 $(1,\ 0)$ を通り，$a\neq 1$ であるので, (2)より，$M(1,\ 0)$ となり，

$$\frac{a+b}{2}=1,\ b=2-a\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a(2-a)=-1$，$a^2-2a-1=0$

$a>0$ より，$a=1+\sqrt{2}$

すると，直線 AB と G で囲まれる図形の面積 S は,



$$S=\int_1^{1+\sqrt{2}}\log x\,dx-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\log(1+\sqrt{2})$$

$$=\Big[x\log x-x\Big]_1^{1+\sqrt{2}}-\frac{\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2})=\frac{2+\sqrt{2}}{2}\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}$$

コメント

微積分の標準的な問題です。(3)は(2)の結果を利用しなくても構いませんが，計算量が少し増加します。

問　題

媒介変数表示 $x=\cos\theta$，$y=\cos^2\theta\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$ $\left(ただし，0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ が表す曲線を C とする。

(1) y を最大にする θ の値を α とするとき，$\cos\alpha$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2007]

解答例

(1) $y=\cos^2\theta\cdot\tan\dfrac{\theta}{2}$ より，

$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta(-\sin\theta)\tan\frac{\theta}{2}+\cos^2\theta\cdot\frac{1}{\cos^2\frac{\theta}{2}}\cdot\frac{1}{2}$$

$$=\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}\left(-4\sin\theta\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+\cos\theta\right)=-\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}(2\sin^2\theta-\cos\theta)$$

$$=\frac{\cos\theta}{2\cos^2\frac{\theta}{2}}(2\cos^2\theta+\cos\theta-2)$$

ここで，$0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，$\dfrac{dy}{d\theta}=0$ とすると，$2\cos^2\theta+\cos\theta-2=0$ より，

$$\cos\theta=\frac{-1+\sqrt{17}}{4}$$

ここで，$\cos\theta_1=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ とおくと，右表より $\theta=\theta_1$ のとき y は最大となる。

θ	0	$\cdots$	θ_1	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	0	$-$	0
y	0	$\nearrow$		$\searrow$	0

よって，$\cos\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{17}}{4}$ である。

(2) $x=\cos\theta$ より，$\dfrac{dx}{d\theta}=-\sin\theta$

よって，曲線 C の概形は右下図のようになり，曲線 C と x 軸で囲まれた図形の面積 S は,

θ	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$	0	$-$	
x	1	$\searrow$	0

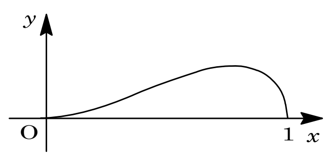
$$S=\int_0^1 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^0\cos^2\theta\tan\frac{\theta}{2}(-\sin\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}2\cos^2\theta\sin^2\frac{\theta}{2}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta(1-\cos\theta)\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{1+\cos2\theta}{2}\,d\theta-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\theta)\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{1}{2}\left[\theta+\frac{1}{2}\sin2\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}-\left[\sin\theta-\frac{1}{3}\sin^3\theta\right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}-1+\frac{1}{3}=\frac{\pi}{4}-\frac{2}{3}$$



コメント

内容は標準的なパラメータ積分ですが，計算量はかなりのものです。

問　題

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

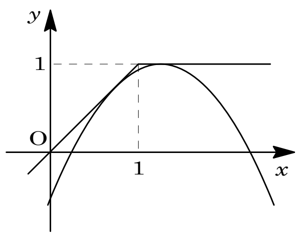
また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接することより，$p>1$ として，



$$g(x)=-(x-p)^2+1$$

すると，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=x$ との共有点は，

$$x=-(x-p)^2+1,\ x^2-(2p-1)x+p^2-1=0$$

$x<1$ において接することより，

$$D=(2p-1)^2-4(p^2-1)=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$x=\frac{2p-1}{2}<1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$1-4p+4=0$，$p=\dfrac{5}{4}$

この値は $p>1$ を満たし，しかも②は $x=\dfrac{3}{4}<1$ となり，成立しているので，

$$g(x)=-\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+1=-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}$$

よって，$a=\dfrac{5}{2}$，$b=-\dfrac{9}{16}$

(2)　$x<1$ における接点は②より $x=\dfrac{3}{4}$，$x>1$ における接点は $x=p=\dfrac{5}{4}$ から，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left\{x-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left\{1-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{1}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^3\right]_{1}^{\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{96}$$

コメント

$y=f(x)$ のグラフが複雑ではないので，直感に依存した解となっています。

問　題

以下において $\log x$ は自然対数を表す。

(1)　$a>\dfrac{1}{e}$ のとき, $x>0$ に対し $x^a>\log x$ であることを示せ。

(2)　$a>\dfrac{1}{e}$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^a\log x=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　$0<t<\dfrac{1}{e}$ として，曲線 $y=x\log x$ $(t\leqq x\leqq 1)$ および x 軸と直線 $x=t$ で囲まれた部分を，y 軸のまわりに回転して得られる図形の体積を $V(t)$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{t\to+0} V(t)$ を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$f(x)=x^a-\log x$ とおくと，$f'(x)=ax^{a-1}-\dfrac{1}{x}=\dfrac{ax^a-1}{x}$

$f'(x)=0$ の解は $x=\dfrac{1}{\sqrt[a]{a}}$ より，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\dfrac{1}{\sqrt[a]{a}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\frac{1}{\sqrt[a]{a}}\right)=\frac{1}{a}-\log a^{-\frac{1}{a}}=\frac{1}{a}(1+\log a)$$

$a>\dfrac{1}{e}$ から，$f\left(\dfrac{1}{\sqrt[a]{a}}\right)>\dfrac{1}{a}\left(1+\log\dfrac{1}{e}\right)=\dfrac{1}{a}(1-\log e)=0$

よって，$f(x)>0$ から，$x^a>\log x$ である。

(2)　$x=\dfrac{1}{t}$ とおくと，$x\to+0$ のとき $t\to\infty$ から，$\displaystyle\lim_{x\to+0} x^a\log x=-\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t^a}$

(1)より，$a=\dfrac{1}{e}$ のとき $f(x)\geqq 0$ なので，$x^{\frac{1}{e}}\geqq\log x$ となり, $t>1$ において,

$$\frac{t^{\frac{1}{e}}}{t^a}\geqq\frac{\log t}{t^a}<0,\ \ \frac{1}{t^{a-\frac{1}{e}}}\geqq\frac{\log t}{t^a}<0$$

すると，$a>\dfrac{1}{e}$ なので，$t\to\infty$ のとき $t^{a-\frac{1}{e}}\to\infty$ から，$\displaystyle\lim_{t\to\infty}\frac{\log t}{t^a}=0$ となり,

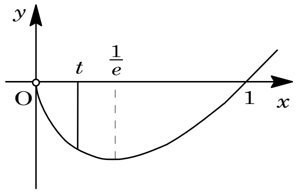
$$\lim_{x\to+0} x^a\log x=0$$

(3)　$y=x\log x$ に対して，$y'=\log x+1$

$y'=0$ の解は $x=\dfrac{1}{e}$ であり，$0<t<\dfrac{1}{e}$ から，$t\leqq x\leqq 1$ における増減は右表のようになり,

x	t	$\cdots$	$\dfrac{1}{e}$	$\cdots$	1
y'		$-$	0	$+$	
y	$t\log t$	$\searrow$		$\nearrow$	0

$$V(t)=\int_t^1 2\pi x(-x\log x)\,dx$$
$$=-2\pi\int_t^1 x^2\log x\,dx$$
$$=-2\pi\left\{\left[\frac{x^3}{3}\log x\right]_t^1-\int_t^1\frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx\right\}$$
$$=2\pi\left\{\frac{t^3}{3}\log t+\frac{1}{3}\left[\frac{x^3}{3}\right]_t^1\right\}=2\pi\left\{\frac{t^3}{3}\log t+\frac{1}{9}(1-t^3)\right\}$$



(2)より，$\displaystyle\lim_{t\to+0}t^3\log t=0$ なので，$\displaystyle\lim_{t\to+0}V(t)=\frac{2}{9}\pi$ となる。

コメント

(1)と(2)を結ぶ糸が曖昧なため, (2)にはかなりの時間が必要でした。

問　題

xy 平面上の動点 A は原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を出発し，x 軸上を点 $(2,\ 0)$ まで動くとする。また動点 B は点 $(0,\ 1)$ を出発し，$\mathrm{AB}=\mathrm{OB}=1$ なる条件を満たしながら第 1 象限を点 $(1,\ 0)$ まで動くとする。点 P は線分 AB 上の点で $2\mathrm{BP}=\mathrm{OA}$ を満たす。

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とするとき，点 P の座標を θ で表せ。ただし点 A が点 O と一致するときを除く。

(2) 点 P の軌跡と x 軸，y 軸で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 [2004]

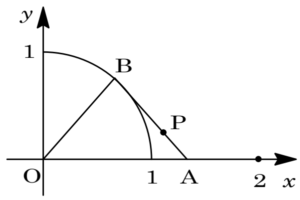
解答例

(1) $\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とすると，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ となる。

また，$\mathrm{A}(t,\ 0)$ とすると，$\mathrm{AB}=1$ から，

$$(\cos\theta-t)^2+\sin^2\theta=1,\ -2t\cos\theta+t^2=0$$

$t=2\cos\theta$ より，$\mathrm{A}(2\cos\theta,\ 0)$



点 P は線分 AB 上の点なので，$0\leqq s\leqq 1$ として，$\mathrm{BP}:\mathrm{PA}=s:1-s$ とおく。

すると，$2\mathrm{BP}=\mathrm{OA}$ から，$2s\mathrm{AB}=\mathrm{OA}$ となり，

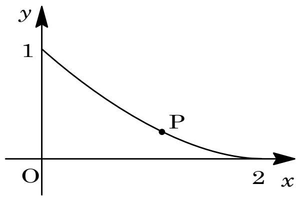
$$2s=2\cos\theta,\ s=\cos\theta$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\cos\theta(2\cos\theta,\ 0)+(1-\cos\theta)(\cos\theta,\ \sin\theta)$

よって，$\mathrm{P}((1+\cos\theta)\cos\theta,\ (1-\cos\theta)\sin\theta)$

(2) $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ は，$x=(1+\cos\theta)\cos\theta$，$y=(1-\cos\theta)\sin\theta$

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta+(1+\cos\theta)(-\sin\theta)$$
$$=-\sin\theta(2\cos\theta+1)\leqq 0$$
$$\frac{dy}{d\theta}=\sin\theta\sin\theta+(1-\cos\theta)\cos\theta$$
$$=-2\cos^2\theta+\cos\theta+1$$
$$=-2(2\cos\theta+1)(\cos\theta-1)\geqq 0$$



すると，点 P の軌跡は右図のようになり，

$$S=\int_0^2 y\,dx=\int_{\frac{\pi}{2}}^{0}(1-\cos\theta)\sin\theta(-\sin\theta)(2\cos\theta+1)\,d\theta$$
$$=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2\cos^2\theta+\cos\theta+1)\sin^2\theta\,d\theta$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\sin^2\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^2 2\theta\,d\theta=\frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 4\theta)\,d\theta=\frac{\pi}{16}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos\theta \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{3}\Big[\sin^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \frac{1}{3}$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta \, d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\cos 2\theta)\, d\theta = \frac{\pi}{4}$$

よって，$S = -2\cdot\frac{\pi}{16} + \frac{1}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{\pi}{8} + \frac{1}{3}$

コメント

題意を読み取り，点 P の位置が把握できれば，後は計算だけです。

問　題

座標空間内の 6 点 $A(0,\ 0,\ 1)$，$B(1,\ 0,\ 1)$，$C\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 1\right)$，$D(0,\ 0,\ 0)$，$E(1,\ 0,\ 0)$，$F\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$がある。動点 P は A を出発し，B，C，A の順に△ABC の周を一定の速さで一周する。P と同時に動点 Q は E を出発し，F，D，E の順に△DEF の周を P と同じ速さで一周する。線分 PQ が動いて作られる図形と△ABC，△DEF によって囲まれる立体を K とする。

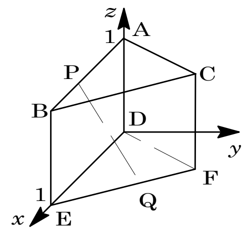
(1) $AP=t\ (0\leqq t\leqq 1)$ のとき，点 Q の座標を t で表せ。

(2) (1)の P，Q に対して，線分 PQ と平面 $z=a\ (0\leqq a\leqq 1)$ との交点 $R(t)$ の座標を求めよ。

(3) 平面 $z=a\ (0\leqq a\leqq 1)$ による K の切り口の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) K の体積 V を求めよ。　[2000]

解答例



(1) △ABC および△DEF は 1 辺の長さが 1 の正三角形であり，$AP=t$ のとき $EQ=t$ となるので，点 Q は EF を $t:1-t$ に内分する。

$$\overrightarrow{OQ}=(1-t)\overrightarrow{OE}+t\overrightarrow{OF}=\left(1-\frac{1}{2}t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}t,\ 0\right)$$

よって，点$Q\left(1-\dfrac{1}{2}t,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}t,\ 0\right)$となる。

(2) 条件より $P(t,\ 0,\ 1)$ となり，線分 PQ を$1-a:a$に内分する点が$R(t)$なので，

$$\overrightarrow{OR(t)}=a\overrightarrow{OP}+(1-a)\overrightarrow{OQ}=\left(1-a+\frac{1}{2}(3a-1)t,\ \frac{\sqrt{3}}{2}(1-a)t,\ a\right)$$

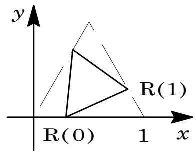
よって，点$R(t)\left(1-a+\dfrac{1}{2}(3a-1)t,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-a)t,\ a\right)$となる。

(3) (2)より，$\overrightarrow{OR(t)}=(1-a,\ 0,\ a)+\dfrac{t}{2}(3a-1,\ \sqrt{3}(1-a),\ 0)$

これより，点$R(t)$は平面$z=a$上で，点$(1-a,\ 0,\ a)$を通り，方向ベクトル$(3a-1,\ \sqrt{3}(1-a),\ 0)$の直線を描く。

ここで，$\overrightarrow{OR(0)}=(1-a,\ 0,\ a)$，$\overrightarrow{OR(1)}=\left(\dfrac{a+1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}(1-a)}{2},\ a\right)$となり，$0\leqq t\leqq 1$のとき点$R(t)$は 2 点$R(0)$，$R(1)$を両端点とする線分を描く。

さて，点 P が BC 上で点 Q が FD 上のとき，および点 P が CA 上で点 Q が DE 上のときも同様に考えると，平面 $z=a$ による K の切り口は，1 辺の長さが $\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(1)$ の正三角形となる。



$$\left\{\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(1)\right\}^2=\left\{\frac{a+1}{2}-(1-a)\right\}^2+\left\{\frac{\sqrt{3}(1-a)}{2}\right\}^2$$
$$=3a^2-3a+1$$

よって，$S(a)=\dfrac{1}{2}\left\{\mathrm{R}(0)\mathrm{R}(1)\right\}^2\sin 60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}(3a^2-3a+1)$

(4)　(3)より，$V=\displaystyle\int_0^1 S(a)\,da=\frac{\sqrt{3}}{4}\int_0^1(3a^2-3a+1)\,da=\frac{\sqrt{3}}{4}\Big[a^3-\frac{3}{2}a^2+a\Big]_0^1=\frac{\sqrt{3}}{8}$

コメント

数年前までは頻出問題の 1 つでした。記憶を辿って調べたところ，86 年京大で，全く同じ問題が出ていました。

問　題

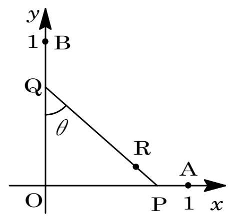
長さ 1 の棒 PQ が座標平面上にある。P は A(1, 0) から出発し, x 軸上を原点 O まで動き, Q は O を出発し, B(0, 1) まで y 軸上を動く。この棒の上に動点 R があり, つねに PR = AP であるとする。

(1) $\angle \mathrm{OQP} = \theta$ としたとき, R の座標を θ で表せ。

(2) R が動いてできる曲線と x 軸, y 軸によって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2000]

解答例



(1) $\mathrm{PQ} = 1$ より, $\mathrm{OP} = \sin\theta$, $\mathrm{OQ} = \cos\theta$, $\mathrm{AP} = 1 - \sin\theta$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}} = \overrightarrow{\mathrm{OP}} + (1 - \sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$$
$$= (\sin\theta,\ 0) + (1 - \sin\theta)(-\sin\theta,\ \cos\theta)$$
$$= \left(\sin^2\theta,\ (1 - \sin\theta)\cos\theta\right)$$

よって, $\mathrm{R}\left(\sin^2\theta,\ (1 - \sin\theta)\cos\theta\right)$ となる。

(2) (1)より, 点 $\mathrm{R}(x,\ y)$ の軌跡をパラメータ表示すると,

$$x = \sin^2\theta,\ \ y = (1 - \sin\theta)\cos\theta \ \ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2}\right)$$

この曲線と x 軸, y 軸によって囲まれる図形の面積を S とすると,

$$S = \int_0^1 y\,dx = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin\theta)\cos\theta \cdot 2\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$
$$= 2\int_0^{\frac{\pi}{2}} (\sin\theta\cos^2\theta - \sin^2\theta\cos^2\theta)\,d\theta$$

ここで, $\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta\cos^2\theta\,d\theta = -\frac{1}{3}\Big[\cos^3\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = -\frac{1}{3}\cdot(-1) = \frac{1}{3}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2\theta\cos^2\theta\,d\theta = \frac{1}{4}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^2 2\theta\,d\theta = \frac{1}{8}\int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \cos 4\theta)\,d\theta = \frac{1}{8}\cdot\frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}$$

よって, $S = 2\left(\dfrac{1}{3} - \dfrac{\pi}{16}\right) = \dfrac{2}{3} - \dfrac{\pi}{8}$

コメント

パラメータ曲線ではさまれた領域の面積を求めるという問題です。文中の誘導を利用すれば, スムーズに値が求まります。