1

解答解説のページへ

座標平面上の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$ を考える。さらに，$0 \leqq \theta_1 \leqq \pi$，$0 \leqq \theta_2 \leqq \pi$ に対し，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1 - a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1 + a_2\cos\theta_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2 - b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2 + b_2\cos\theta_2)$ とおく。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}| = |\overrightarrow{\mathrm{OD}}|$ を示せ。

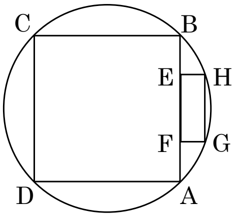
(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}} = 0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}} = 2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}} \neq 0$ であるとする。$\theta_1 = \dfrac{\pi}{7}$ であるとき，θ_2 を求めよ。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}$ の外接円の半径を r_1 とし，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径を r_2 とする。また，$\triangle\mathrm{OAB}$ の面積を S とする。$\mathrm{AB} : \mathrm{DE} = 2 : 3$ であるとき，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積を，S，r_1，r_2 で表せ。なお，3 点 O, A, B は同一直線上にないものとし，3 点 O, D, E も同一直線上にないものとする。

$\boxed{2}$

解答解説のページへ

半径が $\sqrt{2}$ の円に正方形 ABCD が内接している。辺 AB 上の異なる 2 点 E, F と，短い方の弧 AB 上の異なる 2 点 G, H を，四角形 EFGH が長方形となるようにとる。



(1) 長方形 EFGH が正方形のとき，その 1 辺の長さを求めよ。

(2) 長方形 EFGH の面積が最大になるときの辺 FG の長さを求めよ。

$\boxed{3}$ 解答解説のページへ

$f(x)=2xe^{-x^2}$ とする。$a>0$ に対し，曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $S(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ が最大値をとる x の値 p を求めよ。

(2)　極限 $k=\lim\limits_{a\to\infty} S(a)$ の値を求めよ。

(3)　(1)で求めた p に対し，$b>p$ が成り立つとする。点 $(b,\ f(b))$ における曲線 $y=f(x)$ の接線と，直線 $x=b$ および x 軸で囲まれた領域の面積を $T(b)$ とする。(2)で求めた k に対し，$S(b)+T(b)=k$ となるように，b の値を定めよ。

解答解説のページへ

4

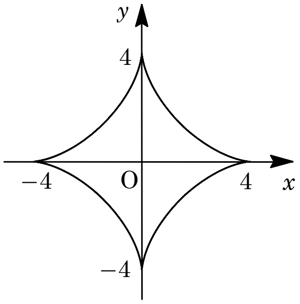
　$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において，媒介変数 t で表された曲線

$$x = 3\cos t + \cos 3t\,,\quad y = 3\sin t - \sin 3t$$

を C とする。

(1)　C の長さを求めよ。

(2)　C で囲まれた領域の面積を求めよ。



5

解答解説のページへ

数列$\{a_n\}$を条件 $a_1=-1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$によって定める。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n)$がすべての n に対して成り立つような p，q を求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(3) r を正の実数とし，数列$\{b_n\}$を条件 $b_1=r\dfrac{1}{a_1}$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r\dfrac{a_n}{a_{n+1}}$によって定める。このとき，極限$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。

1　　問題のページへ

(1)　点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{D}(a_1\cos\theta_1-a_2\sin\theta_1,\ a_1\sin\theta_1+a_2\cos\theta_1)$ に対し，

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|^2=(a_1\cos\theta_1-a_2\sin\theta_1)^2+(a_1\sin\theta_1+a_2\cos\theta_1)^2$$
$$=({a_1}^2+{a_2}^2)(\cos^2\theta_1+\sin^2\theta_1)+2a_1a_2(-\cos\theta_1\sin\theta_1+\sin\theta_1\cos\theta_1)$$
$$={a_1}^2+{a_2}^2=\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|^2$$

よって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OA}}\right|=\left|\overrightarrow{\mathrm{OD}}\right|$ である。

(2)　$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$，$\mathrm{C}(b_2,\ -b_1)$，$\mathrm{E}(b_1\cos\theta_2-b_2\sin\theta_2,\ b_1\sin\theta_2+b_2\cos\theta_2)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=a_1b_2-a_2b_1=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=2\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}\neq0$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=a_1b_1+a_2b_2\neq0$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OE}}=a_1b_1(\cos\theta_1\cos\theta_2+\sin\theta_1\sin\theta_2)-a_1b_2(\cos\theta_1\sin\theta_2-\sin\theta_1\cos\theta_2)$$
$$-a_2b_1(\sin\theta_1\cos\theta_2-\cos\theta_1\sin\theta_2)+a_2b_2(\sin\theta_1\sin\theta_2+\cos\theta_1\cos\theta_2)$$
$$=(a_1b_1+a_2b_2)\cos(\theta_1-\theta_2)+(a_1b_2-a_2b_1)\sin(\theta_1-\theta_2)$$

すると，$a_1b_1+a_2b_2=2(a_1b_1+a_2b_2)\cos(\theta_1-\theta_2)+2(a_1b_2-a_2b_1)\sin(\theta_1-\theta_2)$ より，

$$(a_1b_1+a_2b_2)\{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1\}+2(a_1b_2-a_2b_1)\sin(\theta_1-\theta_2)=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(a_1b_1+a_2b_2)\{2\cos(\theta_1-\theta_2)-1\}=0$ となり，$a_1b_1+a_2b_2\neq0$ から，

$$2\cos(\theta_1-\theta_2)-1=0\,,\ \cos(\theta_1-\theta_2)=\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\theta_1=\dfrac{\pi}{7}$，$0\leqq\theta_2\leqq\pi$ から，$-\dfrac{6}{7}\pi\leqq\theta_1-\theta_2\leqq\dfrac{\pi}{7}$ となり，③より，

$$\theta_1-\theta_2=-\frac{\pi}{3}\,,\ \theta_2=\theta_1+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{7}+\frac{\pi}{3}=\frac{10}{21}\pi$$

(3)　$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{ODE}$ の外接円の半径をそれぞれ r_1，r_2 とし，さらに $\angle\mathrm{AOB}=\varphi_1$，$\angle\mathrm{DOE}=\varphi_2$ とおくと，正弦定理より，

$$\mathrm{AB}=2r_1\sin\varphi_1\,,\ \mathrm{DE}=2r_2\sin\varphi_2$$

条件より $\mathrm{AB}:\mathrm{DE}=2:3$ なので $\mathrm{DE}=\dfrac{3}{2}\mathrm{AB}$ となり，$r_2\sin\varphi_2=\dfrac{3}{2}r_1\sin\varphi_1\cdots\cdots\cdots④$

さて，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{ODE}$ の面積をそれぞれ $S,\ T$ とおくと，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\varphi_1\,,\ T=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\sin\varphi_2\cdots\cdots\cdots⑤$$

ここで，(1)より $\mathrm{OA}=\mathrm{OD}$ となり，同様にして $\mathrm{OB}=\mathrm{OE}$ となるので，④⑤から，

$$T=\frac{\sin\varphi_2}{\sin\varphi_1}S=\frac{3}{2}r_1\cdot\frac{1}{r_2}S=\frac{3r_1}{2r_2}S$$

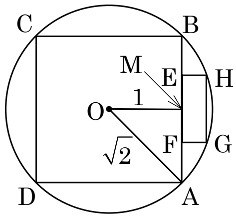
［解　説］

点と座標に関する総合問題です。なお，点 D は点 A を原点まわりに θ_1，点 E は点 B を原点まわりに θ_2 だけ回転した点として設定されています。

© 電送数学舎 2017

2

問題のページへ



(1) 半径$\sqrt{2}$の円の中心をO，正方形の辺ABの中点をMとおき，$FM = EM = x$とする。

ここで，長方形 EFGH が正方形のとき，$FG = 2x$となるので，$OG = \sqrt{2}$すなわち$(OM + FG)^2 + FM^2 = (\sqrt{2})^2$から，

$$(1 + 2x)^2 + x^2 = 2,\ 5x^2 + 4x - 1 = 0$$

すると，$(5x - 1)(x + 1) = 0$から$x = \dfrac{1}{5}$となるので，正方形 EFGH の 1 辺の長さは，$2x = \dfrac{2}{5}$である。

(2) (1)と同様に設定して，$FG = y$とおくと，$OG = \sqrt{2}$から，

$$(1 + y)^2 + x^2 = 2,\ x^2 = 2 - (1 + y)^2 = 1 - 2y - y^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，長方形EFGHの面積をSとおくと$S = 2xy$となり，①より，

$$S^2 = 4x^2y^2 = 4y^2(1 - 2y - y^2) = -4(y^4 + 2y^3 - y^2)$$

ここで，①から，$2 - (1 + y)^2 > 0$なので，$0 < y < \sqrt{2} - 1$

そして，$f(y) = -4(y^4 + 2y^3 - y^2)$とおくと，

$$f'(y) = -4(4y^3 + 6y^2 - 2y)$$
$$= -8y(2y^2 + 3y - 1)$$

すると，$f(y)$の増減は右表のようになり，$y = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$のとき最大値をとる。すなわち，$FG = \dfrac{-3 + \sqrt{17}}{4}$のとき長方形 EFGH の面積は最大になる。

y	0	$\cdots$	$\dfrac{-3+\sqrt{17}}{4}$	$\cdots$	$\sqrt{2}-1$
$f'(y)$	0	$+$	0	$-$	
$f(y)$		$\nearrow$		$\searrow$	

［解 説］

図形量の最大・最小問題です。なお，座標系を設定する方法もあります。

© 電送数学舎 2017

3

問題のページへ

(1)　$f(x)=2xe^{-x^2}$ に対して，$x \geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$，$x<0$ のとき $f(x)<0$ であるので，$f(x)$が最大値をとる x は $x\geqq 0$ となり，

$$f'(x)=2e^{-x^2}+2xe^{-x^2}(-2x)$$
$$=2(1-2x^2)e^{-x^2}$$

これより，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになり，$f(x)$ は $x=\frac{1}{\sqrt{2}}$ で最大値をとる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$	0	$\nearrow$		$\searrow$

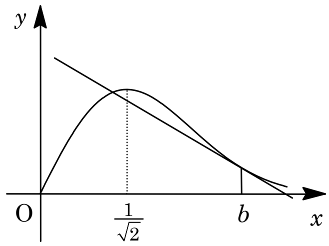
すなわち，$p=\frac{1}{\sqrt{2}}$ である。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $x=a$ および x 軸で囲まれた領域の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^a 2xe^{-x^2}dx=\Big[-e^{-x^2}\Big]_0^a=1-e^{-a^2}$$

よって，$k=\lim\limits_{a\to\infty}S(a)=1$ である。

(3)　$b>\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，(2)から，$S(b)=1-e^{-b^2}$



また，点$(b,\ f(b))$における接線の方程式は，

$$y-2be^{-b^2}=2(1-2b^2)e^{-b^2}(x-b)$$

x 軸との交点は $y=0$ とおくと，

$$-2be^{-b^2}=2(1-2b^2)e^{-b^2}(x-b)$$

よって，$-b=(1-2b^2)(x-b)$ から $x=b+\frac{b}{2b^2-1}$ となる。

これより，接線と直線 $x=b$ および x 軸で囲まれた領域の面積 $T(b)$ は，

$$T(b)=\frac{1}{2}\left(b+\frac{b}{2b^2-1}-b\right)\cdot 2be^{-b^2}=\frac{b^2}{2b^2-1}e^{-b^2}$$

条件より，$S(b)+T(b)=1$ なので，$1-e^{-b^2}+\frac{b^2}{2b^2-1}e^{-b^2}=1$ となり，

$$-1+\frac{b^2}{2b^2-1}=0,\ -b^2+1=0$$

すると，$b>\frac{1}{\sqrt{2}}$ から，$b=1$ となる。

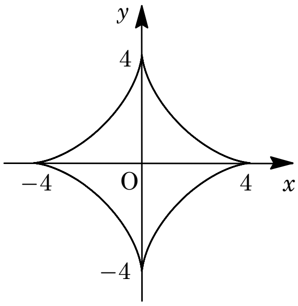
［解 説］

微積分の基本問題です。計算量も少なめです。

© 電送数学舎 2017

4

問題のページへ



(1)　曲線 C の媒介変数表示は，$0 \leqq t \leqq 2\pi$ において，

$$x = 3\cos t + \cos 3t\,,\ \ y = 3\sin t - \sin 3t$$

ここで，3 倍角の公式を適用すると，

$$x = 4\cos^3 t\,,\ \ y = 4\sin^3 t$$

$$\frac{dx}{dt} = -12\cos^2 t\sin t\,,\ \ \frac{dy}{dt} = 12\sin^2 t\cos t$$

さて，曲線 C は x 軸，y 軸について対称なので，C の長さを L とすると，

$$L = 4\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{12^2\cos^4 t\sin^2 t + 12^2\sin^4 t\cos^2 t}\,dt$$

$$= 48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{\cos^2 t\sin^2 t(\cos^2 t + \sin^2 t)}\,dt = 48\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin t\,dt$$

$$= 48\Big[\frac{1}{2}\sin^2 t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = 24$$

(2)　C で囲まれた領域の面積を S とすると，対称性から，

$$S = 4\int_0^4 y\,dx = 4\int_{\frac{\pi}{2}}^0 4\sin^3 t(-12\cos^2 t\sin t)\,dt = 192\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^4 t(1-\sin^2 t)\,dt$$

$$= 192\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^4 t - \sin^6 t)\,dt$$

ここで，n を 0 以上の整数として，$I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin^n t\,dt$ とおくと，$I_0 = \dfrac{\pi}{2}$ で，

$$I_{n+1} = \int_0^{\frac{\pi}{2}}\sin t\sin^n t\,dt = -\Big[\cos t\sin^n t\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} + n\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos t\sin^{n-1}t\cos t\,dt$$

$$= n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2 t)\sin^{n-1}t\,dt = n\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\sin^{n-1}t - \sin^{n+1}t)\,dt$$

$$= n(I_{n-1} - I_{n+1})$$

すると，$(n+1)I_{n+1} = nI_{n-1}$ から，$I_{n+1} = \dfrac{n}{n+1}I_{n-1}$ となり，

$$S = 192(I_4 - I_6) = 192\Big(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2} - \frac{5}{6}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\Big) = 192\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{2}\cdot\frac{1}{6} = 6\pi$$

［解　説］

問題文の図から，曲線がアステロイドと予測できますので，まず 3 倍角の公式を用いて変形しています。ただ，(2)ではこの変形をしない方がよかったかもしれません。

© 電送数学舎 2017

5

問題のページへ

(1)　$a_1=-1$，$a_2=3$，$a_{n+2}=5a_{n+1}-6a_n\ (n=1,\ 2,\ \cdots)$……①に対し，①を変形し，

$$a_{n+2}-pa_{n+1}=q(a_{n+1}-pa_n),\quad a_{n+2}=(p+q)a_{n+1}-pqa_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

すべての n に対して，①②が一致することから，

$$p+q=5,\quad pq=6$$

すると，p, q は 2 次方程式 $x^2-5x+6=0$ の 2 つの解となり，$x=2,\ 3$ から，

$$(p,\ q)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$$

(2)　$(p,\ q)=(2,\ 3)$ のとき，②から $a_{n+2}-2a_{n+1}=3(a_{n+1}-2a_n)$ となり，

$$a_{n+1}-2a_n=(a_2-2a_1)3^{n-1}=5\cdot3^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，$(p,\ q)=(3,\ 2)$ のとき，②から $a_{n+2}-3a_{n+1}=2(a_{n+1}-3a_n)$ となり，

$$a_{n+1}-3a_n=(a_2-3a_1)2^{n-1}=6\cdot2^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$a_n=5\cdot3^{n-1}-6\cdot2^{n-1}$

(3)　$r>0$ として，$b_1=r\dfrac{1}{a_1}=-r$，$\dfrac{b_{n+1}}{b_n}=r\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\ \cdots\cdots\cdots⑤$

ここで，$r\dfrac{a_n}{a_{n+1}}=c_n$ とおくと，⑤から $b_{n+1}=c_nb_n$ となるので，$n\geqq2$ で，

$$b_n=b_1\cdot c_1\cdot c_2\cdot\cdots\cdot c_{n-1}=-r\cdot r\frac{a_1}{a_2}\cdot r\frac{a_2}{a_3}\cdot\cdots\cdot r\frac{a_{n-1}}{a_n}=-r^n\frac{a_1}{a_n}$$

$$=-r^n\frac{-1}{5\cdot3^{n-1}-6\cdot2^{n-1}}=\frac{r^n}{3^{n-1}\left\{5-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\right\}}=\frac{r}{5-6\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}}\cdot\left(\frac{r}{3}\right)^{n-1}$$

(i)　$0<\dfrac{r}{3}<1\ (0<r<3)$ のとき　$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{r}{3}\right)^{n-1}\to0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=0$

(ii)　$\dfrac{r}{3}=1\ (r=3)$ のとき　$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{r}{3}\right)^{n-1}\to1$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\frac{r}{5}=\frac{3}{5}$

(iii)　$\dfrac{r}{3}>1\ (r>3)$ のとき　$n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{r}{3}\right)^{n-1}\to\infty$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\infty$

［解　説］

漸化式と極限の典型題です。(3)の $b_n=b_1\cdot c_1\cdot c_2\cdot\cdots\cdot c_{n-1}\ (n\geqq2)$ については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

© 電送数学舎 2017