10　　［千葉大・理］

t を 0 以上の実数とし，O を原点とする座標平面上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ で 3 つの条件 $\mathrm{PQ}=2$，$p<q$，$p+q=\sqrt{t}$ を満たすものを考える。△OPQ の面積を S とする。ただし，点 P または点 Q が原点 O と一致する場合は $S=0$ とする。

(1) p と q をそれぞれ t を用いて表せ。

(2) S を t を用いて表せ。

(3) $S=1$ となるような t の個数を求めよ。

11　　［東北大・理］

$a,\ b$ を実数とする。$y=\left|x^2-4\right|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

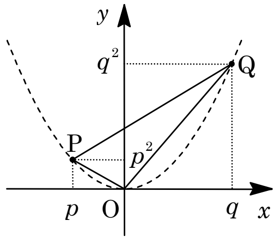
(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。

12　　［一橋大］

正の実数 $a,\ b,\ c$ は $a+b+c=1$ を満たす。連立不等式 $|ax+by|\leqq 1$，$|cx-by|\leqq 1$ の表す xy 平面の領域を D とする。D の面積の最小値を求めよ。

10　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［千葉大・理］



(1)　点 $P(p,\ p^2)$，$Q(q,\ q^2)\ (p<q)$ に対して，$PQ=2$ より，

$$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=4,\ (q-p)^2\{1+(q+p)^2\}=4$$

ここで，$p+q=\sqrt{t}\ (t\geqq 0)$ ……①より，

$$(q-p)^2(1+t)=4,\ q-p=\frac{2}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{t}+\dfrac{2}{\sqrt{1+t}}\right)=\dfrac{\sqrt{t}}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{1+t}}$ ………③

$$p=\frac{1}{2}\left(\sqrt{t}-\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right)=\frac{\sqrt{t}}{2}-\frac{1}{\sqrt{1+t}}\ \cdots\cdots\text{④}$$

(2)　$\triangle OPQ$ の面積を S とすると，③④より，

$$S=\frac{1}{2}\left|pq^2-p^2q\right|=\frac{1}{2}\left|pq(q-p)\right|=\frac{1}{2}\left|\left(\frac{t}{4}-\frac{1}{1+t}\right)\cdot\frac{2}{\sqrt{1+t}}\right|$$

$$=\frac{1}{\sqrt{1+t}}\left|\frac{t^2+t-4}{4(1+t)}\right|=\frac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}$$

(3)　条件より $S=1$ なので，$\dfrac{\left|t^2+t-4\right|}{4(1+t)\sqrt{1+t}}=1$ となり，

$$\left|t^2+t-4\right|=4(1+t)\sqrt{1+t},\ (t^2+t-4)^2=16(1+t)^3\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

⑤を展開してまとめると，$t^4-14t^3-55t^2-56t=0$ となり，

$$t=0\ \cdots\cdots\text{⑥},\ t^3-14t^2-55t-56=0\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

ここで，$f(t)=t^3-14t^2-55t-56$ とおくと，

$$f'(t)=3t^2-28t-55=(t-11)(3t+5)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t>0$ において⑦の解はただ１つ存在する。

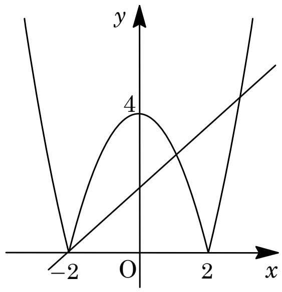
t	0	$\cdots$	11	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	-56	↘		↗

以上より，⑤の解すなわち $S=1$ となる t の個数は，⑥を合わせて 2 である。

［解　説］

放物線を題材にした図形と式についての問題です。(3)では，同値変形とはいうものの，両辺を 2 乗して 4 次方程式⑤を導く段階で少し躊躇しましたが，$t=0$ が解の 1 つであることがわかり……。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東北大・理］



(1)　$C : y = |x^2 - 4|$ に対して，

$$y = x^2 - 4 \quad (x \leqq -2,\ 2 \leqq x) \cdots\cdots\cdots ①$$
$$y = -x^2 + 4 \quad (-2 < x < 2) \cdots\cdots\cdots ②$$

また，$l : y = ax + b \cdots\cdots ③$が点$(-2,\ 0)$を通ることより，

$$-2a + b = 0,\ b = 2a$$

ここで，②より $y' = -2x$ となり，$x = -2$ のとき $y' = 4$ から，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は，$0 < a < 4$ である。

よって，求める $a,\ b$ の条件は，$b = 2a\ (0 < a < 4)$ である。

(2)　l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は，l と x 軸の交点に注目して，

(i)　l が点$(-2,\ 0)$を通るとき　(1)より，$b = 2a\ (0 < a < 4)$

(ii)　l が点$(2,\ 0)$を通るとき　(1)と同様に，$2a + b = 0$ より $b = -2a$

そして，②より $x = 2$ のとき $y' = -4$ から，l の傾き a の範囲が $-4 < a < 0$ となり，まとめると，$b = -2a\ (-4 < a < 0)$ である。

(iii) l が点$(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2 < x < 2$ のときは，l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x < -2,\ 2 < x$ のとき，および x 軸と交点をもたないときは，l と C が $-2 < x < 2$ で接するときである。

②③を連立して，$-x^2 + 4 = ax + b$ より，$x^2 + ax + b - 4 = 0 \cdots\cdots\cdots ④$

④が $-2 < x < 2$ に重解をもつことより，

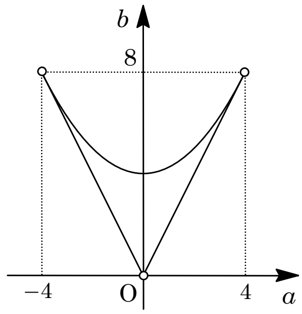
$$D = a^2 - 4(b - 4) = 0,\ -2 < -\frac{a}{2} < 2$$

よって，$b = \dfrac{a^2}{4} + 4\ (-4 < a < 4)$ となる。

このとき，①と③は 2 交点をもつ。

(i)〜(iii)より，点$(a,\ b)$の軌跡は右図の実線部になる。

ただし，原点と 2 点$(\pm 4,\ 8)$は含まない。



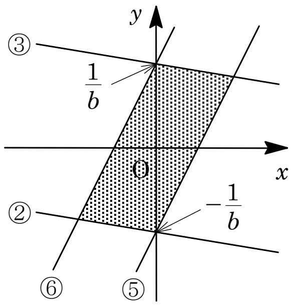
［解 説］

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き，それをもとに計算をしています。

12　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［一橋大］

$a>0$，$b>0$，$c>0$，$a+b+c=1$ に対し，$|ax+by|\leqq 1$ ……①より，

$$-1\leqq ax+by\leqq 1,\ -\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq -\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$$



境界線は，$y=-\frac{a}{b}x-\frac{1}{b}$ ……②，$y=-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}$ ……③

また，$|cx-by|\leqq 1$ ……④より，

$$-1\leqq cx-by\leqq 1,\ \frac{c}{b}x-\frac{1}{b}\leqq y\leqq \frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$$

境界線は，$y=\frac{c}{b}x-\frac{1}{b}$ ……⑤，$y=\frac{c}{b}x+\frac{1}{b}$ ……⑥

①かつ④の表す領域 D は，直線②と③，および直線⑤と⑥が，平行で，しかも原点対称であることより，右上図の平行四辺形の内部または辺上となる。

そして，直線③と⑤を連立すると，$-\frac{a}{b}x+\frac{1}{b}=\frac{c}{b}x-\frac{1}{b}$ より，

$$(a+c)x=2,\ x=\frac{2}{a+c}$$

よって，領域 D の面積を S とおくと，対称性より，

$$S=2\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{b}\cdot\frac{2}{a+c}\right)=\frac{4}{b(a+c)}=\frac{4}{b(1-b)}=\frac{4}{-b^2+b}$$

ここで，$f(b)=-b^2+b$ とおくと，$f(b)=-\left(b-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$ より，$0<b<1$ において，

$$0<f(b)\leqq\frac{1}{4}\ \left(\text{等号は}\ b=\frac{1}{2}\ \text{のとき成立}\right)$$

したがって，S は $b=\frac{1}{2}$ のとき最小値 16 をとる。

［解　説］

領域についての問題です。ただ，平行四辺形の 1 つの対角線が y 軸上にあったり，また面積が 1 文字で表せたり，かなり解きやすい設定になっています。