《2018 入試対策》

東京大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された東京大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 東大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
　　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分野別問題一覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　座標平面上の点$(x,\ y)$が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ。　[2012]

2　C を半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻$t=0$に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻$t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は$1\leqq m\leqq 10$を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。

[2010]

3　0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$を満たしながら動くとき, 方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。　[2005]

4　2 つの放物線 $y=2\sqrt{3}(x-\cos\theta)^2+\sin\theta$, $y=-2\sqrt{3}(x+\cos\theta)^2-\sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるようなθ の範囲を求めよ。ただし, $0^\circ\leqq\theta<360^\circ$ とする。　[2002]

■ 微分と積分

1　座標平面において 2 つの放物線$A: y=s(x-1)^2$と$B: y=-x^2+t^2$を考える。ただし s, t は実数で, $0<s$, $0<t<1$を満たすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし, 放物線 B の $x\geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき, $\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

[2017]

2 座標平面上の 2 つの放物線 $A: y=x^2$，$B: y=-x^2+px+q$ が点$(-1,\ 1)$で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t)=0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t>0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。 [2016]

3 以下の問いに答えよ。

(1) t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2) (1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t \geqq -\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。 [2014]

4 関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C，原点 O を通る傾き t の直線を l とし，C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O，P，Q とし，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし，それら共有点の 1 つが接点である場合は，O，P，Q のうちの 2 つが一致して，その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ，その極値を求めよ。 [2013]

5 座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める。s，t は実数とし $t<0$ を満たすとする。点$(s,\ t)$から放物線 C へ引いた接線を l_1，l_2 とする。

(1) l_1，l_2 の方程式を求めよ。

(2) a を正の実数とする。放物線 C と直線 l_1，l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ をすべて求めよ。 [2012]

6 x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)dx=1$$

をすべて満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\displaystyle\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。 [2011]

7　2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。　[2010]

8　2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2|f'(x)|\,dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

[2009]

9　$0\leqq\alpha\leqq\beta$ を満たす実数 α，β と，2 次式 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ について，$\int_{-1}^1 f(x)\,dx=1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S=\int_0^\alpha f(x)\,dx$ を α の式で表し，S がとりうる値の最大値を求めよ。　[2008]

10　θ は，$0°<\theta<45°$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1\leqq x\leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。　[2006]

11　$f(x)$ を $f(0)=0$ を満たす 2 次関数とする。$a,\ b$ を実数として，関数 $g(x)$ を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\leqq 0)\\ bx & (x>0)\end{cases}$$

$a,\ b$ をいろいろ変化させ，$\int_{-1}^0\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_0^1\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$ が最小になるようにする。このとき，$g(-1)=f(-1)$，$g(1)=f(1)$ であることを示せ。

[2005]

12　関数 $f(x)$，$g(x)$，$h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\quad g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\quad h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(3)　$h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。　[2004]

13　a, b, c を実数とし，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$，$f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。　[2003]

14　2 つの関数 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx$，$g(x) = px^3 + qx^2 + rx$ が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0) = g'(0),\quad f(-1) = -1,\quad f'(-1) = 0,\quad g(1) = 3,\quad g'(1) = 0$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分 $\int_{-1}^{0} \{f''(x)\}^2 dx + \int_{0}^{1} \{g''(x)\}^2 dx$ の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。ただし $f''(x)$，$g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ の導関数を表す。　[2002]

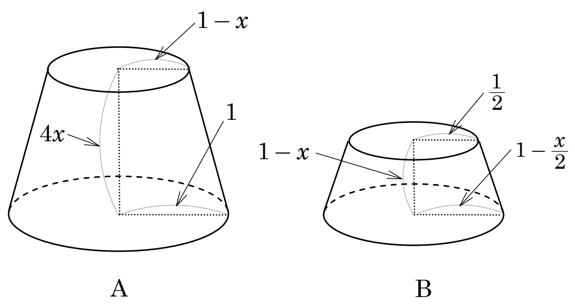
15　時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は，最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 C$(0,\ 3)$ に到達した後は，その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

$t>0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　関数 $S(t)$ $(t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2)　u を正の実数とするとき，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数 $M(u)$ $(u>0)$ のグラフの概形を描け。　[2001]

16　図のように底面の半径 1，上面の半径 $1-x$，高さ $4x$ の直円すい台 A と，底面の半径 $1-\frac{x}{2}$，上面の半径 $\frac{1}{2}$，高さ $1-x$ の直円すい台 B がある。ただし，$0\leqq x\leqq 1$ である。A と B の体積の和を $V(x)$ とするとき，$V(x)$ の最大値を求めよ。　[2000]



17　a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

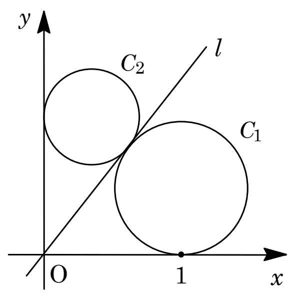
1　座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$, $\mathrm{Q}(-x,\ -y)$, $\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また, その条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。　[2016]

2　座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$, $\mathrm{B}(1,\ -1)$ を考える。また, P を座標平面上の点とし, その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し, その面積を求めよ。

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで, 点 A, P, B をすべて通るものがある。

(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある。　[2015]

3　l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに, 以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1, C_2 を考える。



(i)　円 C_1, C_2 は 2 つの不等式 $x\geqq 0$, $y\geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii)　円 C_1, C_2 は直線 l と同一点で接する。

(iii)　円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し, 円 C_2 は y 軸と接する。

円 C_1 の半径を r_1, 円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と, その最小値を求めよ。　[2015]

4　座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x\ (0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と, 線分 $y=-\sqrt{3}x\ \ (-3\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が, 線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき, 線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1)　s を $-3\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき, 点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

(2)　D を図示せよ。　[2014]

5 座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$ $(0 \leqq a \leqq 1)$ を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

[2013]

6 $a,\ b$ を実数の定数とする。実数 $x,\ y$ が $x^2+y^2 \leqq 25$，$2x+y \leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。 [2013]

7 実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。 [2012]

8 座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，$\triangle\mathrm{PQR}$ の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。 [2011]

9 座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が，C_1 に内接し，かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし, b は正の実数とする。

(1) $a,\ b$ を t を用いて表せ。また, t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき, b の最大値を求めよ。 [2009]

10 座標平面上の 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ -1)$ に対し，$\angle\mathrm{APC}=\angle\mathrm{BPC}$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$\mathrm{P} \neq \mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C}$ とする。 [2008]

11 連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4) \leqq 0$，$y+x^2-2x-3 \leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。 [2007]

12　xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。　[2004]

13　a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。

$$y \geqq x^2,\quad y \leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

領域 D における $x+y$ の最大値，最小値を求めよ。　[2004]

14　a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点 $(x,\ y)$ 全体からなる領域を D とする。

$$x+3y \geqq a,\quad 3x+y \geqq b,\quad x \geqq 0,\quad y \geqq 0$$

領域 D における $x+y$ の最小値を求めよ。　[2003]

15　xy 平面内の領域 $-1 \leqq x \leqq 1$，$-1 \leqq y \leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。　[2000]

16　c を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。　[1999]

17　a, b は実数で，$b \neq 0$ とする。xy 平面に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および 2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ をとる。

(1)　△OPQ が鋭角三角形となるための a, b の条件を不等式で表し，点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2)　m, n を整数とする。a, b が(1)で求めた条件をみたすとき，不等式

$$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2 \geqq 0$$

が成り立つことを示せ。　[1998]

■ 図形と計量

1　O を原点とする座標平面上に点 $A(-3,\ 0)$ をとり，$0° < \theta < 120°$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i), (ii)を満たす 2 点 B, C を考える。

(i)　B は $y > 0$ の部分にあり，$OB = 2$ かつ $\angle AOB = 180° - \theta$ である。

(ii)　C は $y < 0$ の部分にあり，$OC = 1$ かつ $\angle BOC = 120°$ である。ただし $\triangle ABC$ は O を含むものとする。

以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2)　θ を $0° < \theta < 120°$ の範囲で動かすとき，$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。　[2010]

2　四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。　[2006]

3　半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$AB = \sqrt{3}$，$AC = AD = BC = BD = CD = 2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。　[2001]

■ ベクトル

1　1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。　[2017]

2　xyz 空間に 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3},\ 0)$ をとる。$\triangle ABC$ を 1 つの面とし，$z \geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる。さらに $\triangle ABD$ を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる。

(1)　点 E の座標を求めよ。

(2)　正四面体 ABDE の $y \leqq 0$ の部分の体積を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1 $p = 2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n = p^n + \left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1) a_1，a_2 の値を求めよ。

(2) $n \geqq 2$ とする。積 $a_1 a_n$ を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3) a_n は自然数であることを示せ。

(4) a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。 [2017]

2 以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1) n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2) n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3) 数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\quad x_{n+1} = 3^{x_n} \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。 [2016]

3 r を 0 以上の整数とし，数列 $\{a_n\}$ を次のように定める。

$$a_1 = r,\quad a_2 = r+1,\quad a_{n+2} = a_{n+1}(a_n + 1) \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n + 1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r = 2$，$p = 17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1} = b_{m+1} > 0,\quad b_{n+2} = b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n = b_m$ が成り立つことを示せ。 [2014]

4 実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

[2011]

5 $p,\ q$ を 2 つの正の整数とする。整数 $a,\ b,\ c$ で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p\ ,\ \ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\,;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\,;c]$ に対して

$$w([a,\ b\,;c]) = p-q-(a+b)$$

とおく。

(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\,;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p=q$ の場合を考える。

(2)　s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。　[2011]

6 自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，$\cdots$，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。　[2009]

7　p を自然数とする。次の関係式で定められる数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を考える。

$$a_1 = p,\ b_1 = p+1$$
$$a_{n+1} = a_n + pb_n,\ b_{n+1} = pa_n + (p+1)b_n \quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の 2 つの数がともに p^3 で割り切れることを示せ。

$$a_n - \frac{n(n-1)}{2}p^2 - np,\ b_n - n(n-1)p^2 - np - 1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_p は p^2 で割り切れるが，p^3 では割り切れないことを示せ。　[2008]

8　r は $0<r<1$ を満たす実数，n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を，次の条件①，②を満たす 2 つの円で置き換える操作(P)を考える。

①　新しい 2 つの円の半径の比は $r : 1-r$ で，半径の和はもとの円の半径に等しい。

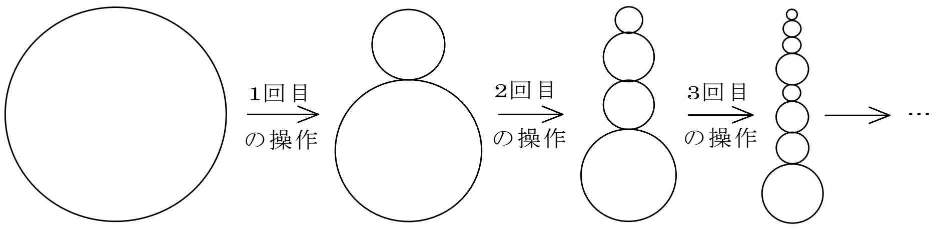
②　新しい 2 つの円は互いに外接し，もとの円に内接する。

以下のようにして，平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に，平面上に半径 1 の円を描く。

・次に，この円に対して操作(P)を行い，2 つの円を得る(これを 1 回目の操作という)。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて，操作(P)を行い，2^{k+1} 個の円を得る $(1 \leqq k \leqq n-1)$。



(1)　n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2)　2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

(3)　n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。　[2007]

9　正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば，2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。　[2007]

10　n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式 $x^n + y^n + z^n = xyz$ ……①を考える。

(1)　$n=1$ のとき，①を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，①を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

[2006]

11　3 以上 9999 以下の奇数 a で，$a^2 - a$ が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。　[2005]

12　2 次方程式 $x^2 - 4x + 1 = 0$ の 2 つの実数解のうち大きいものを α，小さいものを β とする。$n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$s_n = \alpha^n + \beta^n$ とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3 を求めよ。また，$n \geqq 3$ に対し，s_n を s_{n-1} と s_{n-2} で表せ。

(2)　s_n は正の整数であることを示し，s_{2003} の 1 の位の数を求めよ。

(3)　α^{2003} 以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　[2003]

13　n は正の整数とする。x^{n+1} を $x^2 - x - 1$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とおく。

(1)　数列 a_n，b_n $(n = 1,\ 2,\ 3 \cdots)$ は，$a_{n+1} = a_n + b_n$，$b_{n+1} = a_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$n = 1,\ 2,\ 3 \cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　[2002]

14　(1)　x は $0° \leqq x \leqq 90°$ をみたす角とする。

$$\sin y = |\sin 4x|,\ \cos y = |\cos 4x|,\ 0° \leqq y \leqq 90°$$

となる y を x で表し，そのグラフを xy 平面上に図示せよ。

(2)　α は $0° \leqq \alpha \leqq 90°$ をみたす角とする。$0° \leqq \theta_n \leqq 90°$ をみたす角 θ_n，$n = 1,\ 2, \cdots$ を

$$\theta_1 = \alpha,\ \sin\theta_{n+1} = |\sin 4\theta_n|,\ \cos\theta_{n+1} = |\cos 4\theta_n|$$

で定める。k を 2 以上の整数として，$\theta_k = 0°$ となる α の個数を k で表せ。　[1998]

■ 確率

1　座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a), (b)に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に, 点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点$(m,\ n)$にあるとき, その 1 秒後の点 P の位置は, 隣接する格子点$(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$のいずれかであり, また, これらの点に移動する確率は, それぞれ$\dfrac{1}{4}$である。

(1)　最初から 1 秒後の点 P の座標を$(s,\ t)$とする。$t-s=-1$となる確率を求めよ。

(2)　点 P が, 最初から 6 秒後に直線$y=x$上にある確率を求めよ。　[2017]

2　A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い, 2 連勝したチームが出た時点で, そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で, 1 試合目の勝者と, 1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は, k 試合目の勝者と, k 試合目で待機していたチームが$k+1$試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお, すべての対戦において, それぞれのチームが勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$で, 引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

[2016]

3 投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。　[2015]

4 a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii) 取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が$a+2$個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1) p_1，p_2 を求めよ。

(2) $n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。　[2014]

5　A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

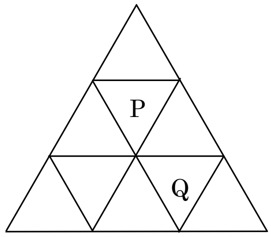
(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。　[2013]

6　図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。　[2012]



7　2 つの箱 L と R，ボール 30 個，コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個，R に $30-x$ 個のボールを入れ，次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ，表が出れば箱 R から箱 L に，裏が出れば箱 L から箱 R に，$K(z)$ 個のボールを移す。ただし，$0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$，$16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後，箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき，x に対してうまく y を選び，$P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき，$P_{2n}(10)$ を求めよ。　[2010]

8　スイッチを 1 回押すごとに，赤，青，黄，白のいずれかの色の玉が 1 個，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し，出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し，出てきた玉と同じ色の玉が，L になければその玉を L に入れ, L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い，さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\dfrac{P_3}{P_1}$ を求めよ。　[2009]

9　白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1), (2)に答えよ。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。　[2008]

10 表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R)
① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0 \leqq m \leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。[2007]

11 コンピュータの画面に, 記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき, 各操作で, 直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は, それまでの経過に関係なく, p であるとする。

最初に, コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い, 記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に, 記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし, 記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1) P_2 を p で表せ。

(2) P_3 を p で表せ。

(3) $n \geqq 4$ のとき, P_n を p と n で表せ。 [2006]

12 Nを1以上の整数とする。数字1, 2, …, Nが書かれたカードを1枚ずつ，計N枚用意し，甲，乙の2人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。

(ii) 甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は，そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は，$b=0$とする。$a+b>N$の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iii) $a+b\leqq N$の場合は，乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$の場合は乙の勝ちとし，ゲームは終了する。

(iv) $a+b\geqq c$の場合は，乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数をdとする。$a+b<c+d\leqq N$の場合は乙の勝ちとし，それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で，甲にとってどちらの選択が有利であるかを，a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が2回目にカードを引かないことにしたとき，甲の勝つ確率をaを用いて表せ。

(2)　甲が2回目にカードを引くことにしたとき，甲の勝つ確率をaを用いて表せ。

ただし，各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

13 片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が1, 2であれば左端の板を裏返し，3, 4であればまん中の板を裏返し，5, 6であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1回目の操作で出たさいころの目が1であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに2回目の操作を行って出たさいころの目が5であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率をp_nとする。p_{2k+1}（kは自然数）を求めよ。

注意 : さいころは1から6までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

14　さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りを X_1 とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数で X_1 を割った余りを X_2 とする。以下同様にして，X_n が決まればさいころを振り，出た目の数で X_n を割った余りを X_{n+1} とする。

このようにして，X_n，$n=1,\ 2,\ \cdots$ を定める。

(1)　$X_3=0$ となる確率を求めよ。

(2)　各 n に対し，$X_n=5$ となる確率を求めよ。

(3)　各 n に対し，$X_n=1$ となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

15　コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A, B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは, A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A, B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

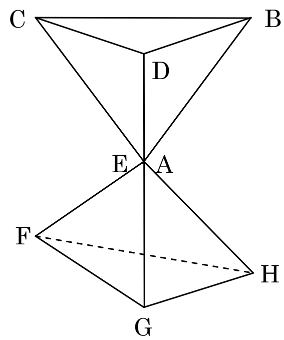
(2)　X_n を求めよ。　[2001]

16　正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で表す。

$P_1(0)=\dfrac{1}{4}$，$P_2(0)=\dfrac{1}{2}$，$P_3(0)=\dfrac{1}{8}$，$P_4(0)=\dfrac{1}{8}$ とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。　[2000]

17 (1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率 $\frac{1}{2}$ で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2)　(1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。　[1999]



■ 論証

1　以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100 \geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ を満たすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。　[2015]

2　円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m \geqq 1$, $n \geqq 1$ であるとする。　[2002]

3　白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも 1 つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が 1 つも残らない場合も同数とみなす。　[2001]

4 (1)　一般角 θ に対して $\sin\theta$，$\cos\theta$ の定義を述べよ。

(2)　(1)で述べた定義にもとづき，一般角 α，β に対して

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。　[1999]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

座標平面上の点$(x,\ y)$が次の方程式を満たす。

$$2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$$

このとき, x のとりうる最大の値を求めよ。 [2012]

解答例

条件式 $2x^2+4xy+3y^2+4x+5y-4=0$ を y についてまとめると,

$$3y^2+(4x+5)y+(2x^2+4x-4)=0$$

y の実数条件から, x のとりうる範囲が決まり,

$$D=(4x+5)^2-12(2x^2+4x-4)=-8x^2-8x+73\geqq 0$$

これより, $8x^2+8x-73\leqq 0$ となり, $\dfrac{-2-5\sqrt{6}}{4}\leqq x\leqq\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$

よって, x のとりうる最大の値は, $\dfrac{-2+5\sqrt{6}}{4}$ である。

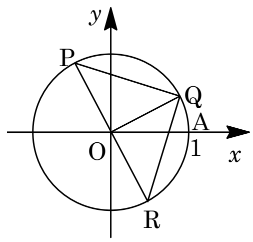
コメント

x と y が等式で関係づけられたときの x のとりうる範囲を求める基本題です。なお, 現在は範囲外ですが, 与えられた式は楕円を表します。

問　題

C を半径 1 の円周とし, A を C 上の 1 点とする。3 点 P, Q, R が A を時刻 $t=0$ に出発し, C 上を各々一定の速さで, P, Q は反時計回りに, R は時計回りに, 時刻 $t=2\pi$ まで動く。P, Q, R の速さは, それぞれ m, 1, 2 であるとする(したがって, Q は C をちょうど一周する)。ただし, m は $1 \leqq m \leqq 10$ を満たす整数である。△PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形となるような速さ m と時刻 t の組をすべて求めよ。 [2010]

解答例



A(1, 0)のとき, P, Q, R の速さがそれぞれ m, 1, 2 であり, P, Q が反時計回りに, R が時計回りに動くことより, 時刻 t での位置は,

$$\mathrm{P}(\cos mt,\ \sin mt),\ \mathrm{Q}(\cos t,\ \sin t),\ \mathrm{R}(\cos 2t,\ -\sin 2t)$$

さて, △PQR が PR を斜辺とする直角二等辺三角形であるので, PR の中点は原点であり, しかも $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ は垂直である。

ここで, PR の中点は, $\left(\dfrac{\cos mt+\cos 2t}{2},\ \dfrac{\sin mt-\sin 2t}{2}\right)$から,

$$\cos mt=-\cos 2t \cdots\cdots\text{①},\quad \sin mt=\sin 2t \cdots\cdots\text{②}$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$ より, $\cos t\cos 2t-\sin t\sin 2t=0$ となり, $\cos 3t=0 \cdots\cdots$③

③から, $0\leqq t\leqq 2\pi$ より, $3t=\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{3}{2}\pi,\ \dfrac{5}{2}\pi,\ \dfrac{7}{2}\pi,\ \dfrac{9}{2}\pi,\ \dfrac{11}{2}\pi$ となり,

$$t=\frac{\pi}{6},\ \frac{\pi}{2},\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

そこで, k を整数とするとき, ①②より,

(i) $t=\dfrac{\pi}{6}$ のとき

$$\cos\frac{m}{6}\pi=-\cos\frac{\pi}{3}=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{m}{6}\pi=\sin\frac{\pi}{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{m}{6}\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi,\ m=4+12k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4$

(ii) $t=\dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$\cos\frac{m}{2}\pi=-\cos\pi=1,\ \sin\frac{m}{2}\pi=\sin\pi=0\ \text{より,}\ \frac{m}{2}\pi=2k\pi,\ m=4k$$

すると, $1\leqq m\leqq 10$ より, $m=4,\ 8$

(iii) $t=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{5m}{6}\pi=-\cos\frac{5}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \sin\frac{5m}{6}\pi=\sin\frac{5}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\ \text{より,}$$

$$\frac{5}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{5}\Big(\frac{4}{3}+2k\Big)=\frac{8+12k}{5}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(iv)　$t=\frac{7}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{7m}{6}\pi=-\cos\frac{7}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ \sin\frac{7m}{6}\pi=\sin\frac{7}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ より，}$$

$$\frac{7}{6}m\pi=\frac{2}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{7}\Big(\frac{2}{3}+2k\Big)=\frac{4+12k}{7}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

(v)　$t=\frac{3}{2}\pi$ のとき

$$\cos\frac{3m}{2}\pi=-\cos 3\pi=1,\ \ \sin\frac{3m}{2}\pi=\sin 3\pi=0\text{ より，}\ \frac{3}{2}m\pi=2k\pi\,,\ \ m=\frac{4}{3}k$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4,\ 8$

(vi)　$t=\frac{11}{6}\pi$ のとき

$$\cos\frac{11m}{6}\pi=-\cos\frac{11}{3}\pi=-\frac{1}{2},\ \ \sin\frac{11m}{6}\pi=\sin\frac{11}{3}\pi=-\frac{\sqrt{3}}{2}\text{ より，}$$

$$\frac{11}{6}m\pi=\frac{4}{3}\pi+2k\pi\,,\ \ m=\frac{6}{11}\Big(\frac{4}{3}+2k\Big)=\frac{8+12k}{11}$$

すると，$1\leqq m\leqq 10$ より，$m=4$

コメント

t の値はすぐに求まるのですが，t の各々の値に対して，m の値を 1 つずつチェックしながら求めていくと，予想以上に計算時間がかかります。

問　題

0 以上の実数 s, t が $s^2+t^2=1$ を満たしながら動くとき，方程式

$$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$$

の解のとる値の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

$s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$s^2+t^2=1$ のとき，$x^4-2(s+t)x^2+(s-t)^2=0$ ……①に対して，$x^2=X$ とおくと，①は，

$$X^2-2(s+t)X+(s-t)^2=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

②の解 $X=\alpha$，β について，

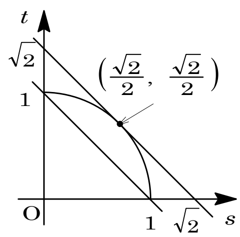
$$D/4=(s+t)^2-(s-t)^2=4st\geqq 0,\ \alpha+\beta=2(s+t)\geqq 0,\ \alpha\beta=(s-t)^2\geqq 0$$

これより，②の 2 つの解はともに 0 以上であり，①の解はすべて実数となる。

さて，$s+t=u$ とすると，

$$(s-t)^2=2(s^2+t^2)-(s+t)^2=2-u^2$$

よって，①は，$x^4-2ux^2+(2-u^2)=0$ ……③となる。



また，u のとりうる値の範囲は，st 平面上において，右図の四分円と直線 $s+t=u$ が共有点をもつ条件から，$1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ である。

したがって，①の解 x のとる値の範囲は，③が $1\leqq u\leqq\sqrt{2}$ に少なくとも 1 つの解をもつ x の条件として求められる。

③より，$u^2+2x^2u-2-x^4=0$ として，$f(u)=u^2+2x^2u-2-x^4$ とおくと，

$$f(0)=-2-x^4<0$$

また，$v=f(u)$ のグラフの軸は，$u=-x^2\leqq 0$ より，求める条件は，

$$f(1)=1+2x^2-2-x^4\leqq 0 \cdots\cdots\cdots ④$$

$$f(\sqrt{2})=2+2\sqrt{2}x^2-2-x^4\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

④より，$x^4-2x^2+1\geqq 0$，$(x^2-1)^2\geqq 0$ となり，つねに成立する。

⑤より，$x^4-2\sqrt{2}x^2\leqq 0$，$x^2(x^2-2\sqrt{2})\leqq 0$ より，$x^2-2\sqrt{2}\leqq 0$ となり，

$$x^2-2^{\frac{3}{2}}\leqq 0,\ -2^{\frac{3}{4}}\leqq x\leqq 2^{\frac{3}{4}}$$

以上より，①の解 x のとる値の範囲は，$-2^{\frac{3}{4}}\leqq x\leqq 2^{\frac{3}{4}}$ である。

コメント

後半，場合分けが必要かとも思いましたが，不要であるように式が設定されていました。

問　題

2 つの放物線 $y = 2\sqrt{3}(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$，$y = -2\sqrt{3}(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$ が相異なる 2 点で交わるような θ の範囲を求めよ。ただし，$0° \leqq \theta < 360°$ とする。　[2002]

解答例

$y = 2\sqrt{3}(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta$ ……①，$y = -2\sqrt{3}(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$ ……②に対して，

$$2\sqrt{3}(x - \cos\theta)^2 + \sin\theta = -2\sqrt{3}(x + \cos\theta)^2 - \sin\theta$$

$$4\sqrt{3}x^2 + 4\sqrt{3}\cos^2\theta + 2\sin\theta = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②が相異なる 2 点で交わる条件は，③が異なる 2 実数解をもつことなので，

$$D/4 = -4\sqrt{3}(4\sqrt{3}\cos^2\theta + 2\sin\theta) > 0,\ 2\sqrt{3}(1 - \sin^2\theta) + \sin\theta < 0$$

$$2\sqrt{3}\sin^2\theta - \sin\theta - 2\sqrt{3} > 0,\ (\sqrt{3}\sin\theta - 2)(2\sin\theta + \sqrt{3}) > 0$$

$\sqrt{3}\sin\theta - 2 < 0$ より，$2\sin\theta + \sqrt{3} < 0$，$\sin\theta < -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$0° \leqq \theta < 360°$ より，$240° < \theta < 300°$

コメント

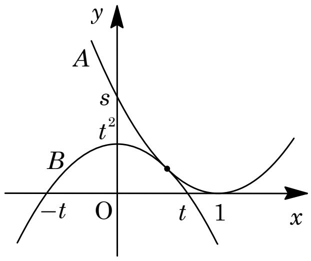
あまりにも簡単すぎて不気味です。

問　題

座標平面において 2 つの放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を考える。ただし s, t は実数で，$0<s$，$0<t<1$ を満たすとする。放物線 A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を P とし，放物線 B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積を Q とする。A と B がただ 1 点を共有するとき，$\dfrac{Q}{P}$ の最大値を求めよ。

[2017]

解答例



放物線 $A: y=s(x-1)^2$ と $B: y=-x^2+t^2$ を連立して，

$$s(x-1)^2=-x^2+t^2,\ (s+1)x^2-2sx+s-t^2=0$$

$0<s$，$0<t<1$ で，A と B が 1 点を共有することより，

$$D/4=s^2-(s+1)(s-t^2)=0,\ (t^2-1)s+t^2=0$$

よって，$s=\dfrac{t^2}{1-t^2}\cdots\cdots\cdots(*)$

さて，A と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 P は，

$$P=\int_0^1 s(x-1)^2dx=\Big[\frac{s}{3}(x-1)^3\Big]_0^1=\frac{s}{3}$$

また，B の $x \geqq 0$ の部分と x 軸および y 軸で囲まれる領域の面積 Q は，

$$Q=\int_0^t(-x^2+t^2)dx=\Big[-\frac{x^3}{3}+t^2x\Big]_0^t=-\frac{t^3}{3}+t^3=\frac{2}{3}t^3$$

すると，$\dfrac{Q}{P}=\dfrac{2}{3}t^3\cdot\dfrac{3}{s}=\dfrac{2t^3}{s}$ となり，$(*)$を代入すると，

$$\frac{Q}{P}=2t^3\cdot\frac{1-t^2}{t^2}=2t(1-t^2)=2t-2t^3$$

ここで，$f(t)=2t-2t^3\ (0<t<1)$ とおくと，

$$f'(t)=2-6t^2=-2(3t^2-1)$$

これより，$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ で最大となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	
$f(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$\dfrac{Q}{P}=f(t)$ の最大値は，$2\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}\Big(1-\dfrac{1}{3}\Big)=\dfrac{4}{3\sqrt{3}}=\dfrac{4}{9}\sqrt{3}$ である。

コメント

微積分の融合した基本問題です。計算も易しめです。

問　題

座標平面上の 2 つの放物線 $A: y = x^2$，$B: y = -x^2 + px + q$ が点$(-1,\ 1)$で接している。ここで，p と q は実数である。さらに，t を正の実数とし，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線を C とする。

(1) p と q の値を求めよ。

(2) 放物線 A と C が囲む領域の面積を $S(t)$ とする。ただし，A と C が領域を囲まないときは $S(t) = 0$ と定める。$S(t)$ を求めよ。

(3) $t > 0$ における $S(t)$ の最大値を求めよ。　[2016]

解答例

(1) 放物線 $A: y = x^2$ ……①，$B: y = -x^2 + px + q$ ……②

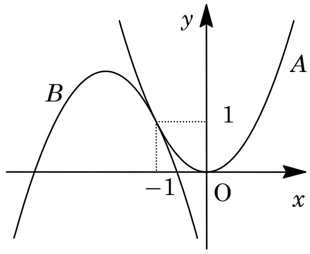
に対して，①②を連立すると，

$$x^2 = -x^2 + px + q,\quad 2x^2 - px - q = 0 \cdots\cdots\cdots ③$$

A と B が点$(-1,\ 1)$で接していることより，③から，

$$D = p^2 + 8q = 0,\quad x = \frac{p}{4} = -1$$

よって，$p = -4$，$q = -2$



(2) (1)より，$B: y = -x^2 - 4x - 2$ となり，$t > 0$ のとき，放物線 B を x 軸の正の向きに $2t$，y 軸の正の向きに t だけ平行移動して得られる放物線 C は，

$$y - t = -(x - 2t)^2 - 4(x - 2t) - 2$$

$$y = -x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2 \cdots\cdots\cdots ④$$

そこで，①④を連立すると，$x^2 = -x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2$ から

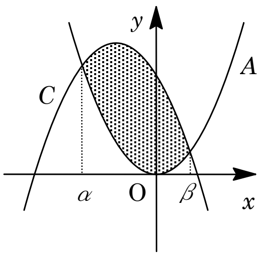
$$2x^2 - (4t - 4)x + 4t^2 - 9t + 2 = 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで，⑤から $D/4 = (2t^2 - 2) - 2(4t^2 - 9t + 2) = -4t^2 + 10t$ なので，

(i) $-4t^2 + 10t > 0 \left(0 < t < \frac{5}{2}\right)$ のとき　⑤から交点は，

$$x = \frac{2t - 2 \pm \sqrt{-4t^2 + 10t}}{2}$$

この値を $x = \alpha,\ \beta\ (\alpha < \beta)$ とおくと，A と C が囲む領域の面積 $S(t)$ は，



$$S(t) = \int_\alpha^\beta \{-x^2 + (4t - 4)x - 4t^2 + 9t - 2 - x^2\}dx$$

$$= \int_\alpha^\beta -2(x - \alpha)(x - \beta)dx = \frac{1}{3}(\beta - \alpha)^3 = \frac{1}{3}(-4t^2 + 10t)^{\frac{3}{2}}$$

(ii) $-4t^2 + 10t \leqq 0 \left(t \geqq \frac{5}{2}\right)$ のとき　A と C は領域を囲まないので，$S(t) = 0$

(3)　(2)より，$-4t^2+10t=-4\left(t-\dfrac{5}{4}\right)^2+\dfrac{25}{4}$ であり，$S(t)$ は $t>0$ で連続なので，

$t=\dfrac{5}{4}$ のとき最大となる。その最大値は,

$$S\left(\frac{5}{4}\right)=\frac{1}{3}\left(\frac{25}{4}\right)^{\frac{3}{2}}=\frac{1}{3}\cdot\frac{125}{8}=\frac{125}{24}$$

コメント

定積分と面積について，センター試験でよく問われるタイプの基本題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　t を実数の定数とする。実数全体を定義域とする関数 $f(x)$ を

$$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$$

と定める。このとき，関数 $f(x)$ の最大値を t を用いて表せ。

(2)　(1)の「関数 $f(x)$ の最大値」を $g(t)$ とする。t が $t\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の範囲を動くとき，$g(t)$ の最小値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$f(x)=-2x^2+8tx-12x+t^3-17t^2+39t-18$ に対して，

$$f(x)=-2(x-2t+3)^2+t^3-9t^2+15t$$

よって，$f(x)$ は，$t=2t-3$ のとき最大値 t^3-9t^2+15t をとる。

(2)　(1)より，$g(t)=t^3-9t^2+15t$ となり，

$$g'(t)=3t^2-18t+15$$
$$=3(t-1)(t-5)$$

すると，$t\geqq-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき，$g(t)$ の増減は右表のようになる。ここで，$g(5)=-25$ であり，

t	$-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$	$\cdots$	1	$\cdots$	5	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$g\Big(-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)=-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big(\frac{1}{2}+\frac{9}{\sqrt{2}}+15\Big)=-\frac{31\sqrt{2}+18}{4}$$

そこで，$-\dfrac{31\sqrt{2}+18}{4}-(-25)=\dfrac{82-31\sqrt{2}}{4}=\dfrac{\sqrt{6724}-\sqrt{1922}}{4}>0$ なので，$g(t)$ の最小値は $g(5)=-25$ となる。

コメント

関数値の増減についての計算問題です。

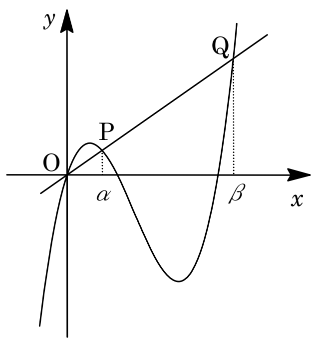
問　題

関数 $y=x(x-1)(x-3)$ のグラフを C, 原点 O を通る傾き t の直線を l とし, C と l が O 以外に共有点をもつとする。C と l の共有点を O, P, Q とし, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積を $g(t)$ とおく。ただし, それら共有点の 1 つが接点である場合は, O, P, Q のうちの 2 つが一致して, その接点であるとする。関数 $g(t)$ の増減を調べ, その極値を求めよ。

[2013]

解答例

$C: y=x(x-1)(x-3)$ ……①, $l: y=tx$ ……②に対して, 共有点の x 座標は,



$$x(x-1)(x-3)=tx\ ,\ \ x(x^2-4x+3-t)=0$$

$x\neq 0$ とすると, $x^2-4x+3-t=0$ ………③

さて, C と l が O 以外の共有点をもつ条件は, ③が $x\neq 0$ の解をもつことである。さらに, ③が重解として $x=0$ をもつ場合はないことに注意すると, 条件は,

$$D/4=4-(3-t)=1+t\geqq 0\ ,\ \ t\geqq -1\ \text{………④}$$

ここで, ④のとき, ③の解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(\alpha,\ t\alpha)\ ,\ \ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(\beta,\ t\beta)$$

これより, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ と $|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|$ の積 $g(t)$ は,

$$g(t)=\sqrt{1+t^2}\,|\alpha|\cdot\sqrt{1+t^2}\,|\beta|=(1+t^2)|\alpha\beta|=(1+t^2)|3-t|$$

(i)　$t\geqq 3$ のとき

$$g(t)=-(1+t^2)(3-t)=t^3-3t^2+t-3\ ,\ \ g'(t)=3t^2-6t+1$$

$g'(t)=0$ の解は, $t=\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}$ となり, ともに $t<3$ である。

(ii)　$-1\leqq t<3$ のとき

$$g(t)=(1+t^2)(3-t)=-(t^3-3t^2+t-3)\ ,\ \ g'(t)=-(3t^2-6t+1)$$

(i)(ii)より, $g(t)$ の増減は右表のようになる。

t	-1	$\cdots$	$\frac{3-\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	$\frac{3+\sqrt{6}}{3}$	$\cdots$	3	$\cdots$
$g'(t)$		$-$	0	$+$	0	$-$		$+$
$g(t)$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$

さて, $-1\leqq t<3$ のとき, $g(t)$ を $g'(t)$ で割ると,

$$g(t)=g'(t)\Big(\frac{1}{3}t-\frac{1}{3}\Big)+\Big(\frac{4}{3}t+\frac{8}{3}\Big)$$

すると, $g\Big(\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}\Big)=\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{3\pm\sqrt{6}}{3}+\dfrac{8}{3}=\dfrac{36\pm4\sqrt{6}}{9}$　(複号同順)

よって，$g(t)$ の極大値は $\dfrac{36+4\sqrt{6}}{9}\left(t=\dfrac{3+\sqrt{6}}{3}\right)$，極小値は $\dfrac{36-4\sqrt{6}}{9}\left(t=\dfrac{3-\sqrt{6}}{3}\right)$，および $0\,(t=3)$ である。

コメント

微分と増減についての標準的な問題です。

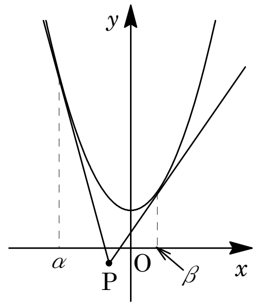
問　題

座標平面上の放物線 C を $y=x^2+1$ で定める。s, t は実数とし $t<0$ を満たすとする。点 $(s,\ t)$ から放物線 C へ引いた接線を l_1, l_2 とする。

(1) l_1, l_2 の方程式を求めよ。

(2) a を正の実数とする。放物線 C と直線 l_1, l_2 で囲まれる領域の面積が a となる $(s,\ t)$ をすべて求めよ。 [2012]

解答例



(1) 放物線 C の方程式は，$y=x^2+1$ ………①

また，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ を通る直線の傾きを m としたとき，その方程式は，

$$y-t=m(x-s),\ \ y=mx-ms+t\ \text{………②}$$

①②を連立すると，$x^2+1=mx-ms+t$

$$x^2-mx+ms-t+1=0\ \text{………③}$$

①②が接するとき，③から，$D=m^2-4(ms-t+1)=0$

$$m^2-4sm+4t-4=0,\ \ m=2s\pm2\sqrt{s^2-t+1}$$

よって，接線 l_1, l_2 の方程式は，$y=2\left(s\pm\sqrt{s^2-t+1}\right)(x-s)+t$

(2) C と l_1, l_2 の接点は，③より，$x=\dfrac{m}{2}=s\pm\sqrt{s^2-t+1}$

ここで，$\alpha=s-\sqrt{s^2-t+1}$，$\beta=s+\sqrt{s^2-t+1}$ とおくと，C と l_1, l_2 で囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^s(x-\alpha)^2dx+\int_s^\beta(x-\beta)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_\alpha^s+\frac{1}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_s^\beta$$

$$=\frac{1}{3}(s-\alpha)^3-\frac{1}{3}(s-\beta)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{s^2-t+1}\right)^3$$

条件より，$\dfrac{2}{3}\left(\sqrt{s^2-t+1}\right)^3=a$ から，$\sqrt{s^2-t+1}=\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{1}{3}}$ となり，

$$s^2-t+1=\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}},\ \ t=s^2+1-\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\ \text{………④}$$

④より，$t<0$ に注意すると

(i) $1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}\geqq0\ \left(0<a\leqq\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

つねに $t\geqq0$ となるので，$(s,\ t)$ は存在しない。

(ii) $1-\left(\dfrac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}<0\ \left(a>\dfrac{2}{3}\right)$ のとき

$(s,\ t)$ は④を満たす任意の値をとる。ただし，$t<0$ から，

$$-\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}<s<\sqrt{\left(\frac{3}{2}a\right)^{\frac{2}{3}}-1}$$

コメント

文字は多いですが，問われている内容は，センター試験にも出題されたことがある有名なものです。

問　題

x の 3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ が，3 つの条件

$$f(1)=1,\ f(-1)=-1,\ \int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$$

をすべて満たしているとする。このような $f(x)$ の中で定積分 $I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx$ を最小にするものを求め，そのときの I の値を求めよ。ただし，$f''(x)$ は $f'(x)$ の導関数を表す。 [2011]

解答例

3 次関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ に対して，$f(1)=1$，$f(-1)=-1$ より，

$$a+b+c+d=1\cdots\cdots\cdots①,\ -a+b-c+d=-1\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\int_{-1}^{1}(bx^2+cx+d)\,dx=1$ より，$2\int_{0}^{1}(bx^2+d)\,dx=1$ となり，

$$2\left(\frac{b}{3}+d\right)=1,\ 2b+6d=3\cdots\cdots\cdots③$$

①＋②より，$b+d=0$ となり，③と合わせて，$b=-\frac{3}{4}$，$d=\frac{3}{4}$

①－②より，$a+c=1$，$c=1-a$

このとき，$f(x)=ax^3-\frac{3}{4}x^2+(1-a)x+\frac{3}{4}$，$f'(x)=3ax^2-\frac{3}{2}x+(1-a)$ から，

$$I=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\{f''(x)\}^2dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(6ax-\frac{3}{2}\right)^2dx=\int_{-1}^{\frac{1}{2}}\left(36a^2x^2-18ax+\frac{9}{4}\right)dx$$

$$=\left[12a^2x^3-9ax^2+\frac{9}{4}x\right]_{-1}^{\frac{1}{2}}=12a^2\left(\frac{1}{8}+1\right)-9a\left(\frac{1}{4}-1\right)+\frac{9}{4}\left(\frac{1}{2}+1\right)$$

$$=\frac{27}{2}a^2+\frac{27}{4}a+\frac{27}{8}=\frac{27}{2}\left(a+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{81}{32}$$

これより，$a=-\frac{1}{4}$ のとき，すなわち $f(x)=-\frac{1}{4}x^3-\frac{3}{4}x^2+\frac{5}{4}x+\frac{3}{4}$ のとき，I の値は最小となり，最小値は $\frac{81}{32}$ である。

コメント

定積分の計算問題からスタートです。計算量は少なめです。

問　題

2 次関数 $f(x)=x^2+ax+b$ に対して，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式になるような定数 $a,\ b,\ c$ の組をすべて求めよ。 [2010]

解答例

$f(x)=x^2+ax+b$ に対して，

$$f(x+1)=(x+1)^2+a(x+1)+b=x^2+(a+2)x+a+b+1$$

また，$\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt=x\int_0^1(3x+4t)(2t+a)\,dt$

$$=x\int_0^1\{8t^2+(6x+4a)t+3ax\}\,dt=x\left[\frac{8}{3}t^3+(3x+2a)t^2+3axt\right]_0^1$$

$$=\frac{8}{3}x+(3x+2a)x+3ax^2=3(a+1)x^2+\left(2a+\frac{8}{3}\right)x$$

ここで，$f(x+1)=c\int_0^1(3x^2+4xt)f'(t)\,dt$ が x についての恒等式であることより，

$$3(a+1)c=1\cdots\cdots\cdots①,\ \left(2a+\frac{8}{3}\right)c=a+2\cdots\cdots\cdots②,\ a+b+1=0\cdots\cdots\cdots③$$

①より，$c=\dfrac{1}{3(a+1)}$ となり，②に代入すると，$\dfrac{6a+8}{3}\cdot\dfrac{1}{3(a+1)}=a+2$

$$6a+8=9(a^2+3a+2),\ 9a^2+21a+10=0,\ (3a+2)(3a+5)=0$$

(i)　$a=-\dfrac{2}{3}$ のとき　①より $c=1$，③より $b=-\dfrac{1}{3}$

(ii)　$a=-\dfrac{5}{3}$ のとき　①より $c=-\dfrac{1}{2}$，③より $b=\dfrac{2}{3}$

コメント

定積分の計算についての基本題です。計算量も少なめです。

問　題

2 次以下の整式 $f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$S=\int_0^2 |f'(x)|dx$ を考える。

(1)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ のとき S を a の関数として表せ。

(2)　$f(0)=0$，$f(2)=2$ を満たしながら f が変化するとき，S の最小値を求めよ。

[2009]

解答例

(1)　$f(x)=ax^2+bx+c$ に対し，$f(0)=0$，$f(2)=2$ より，

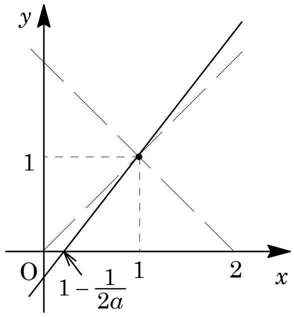
$$c=0,\ \ 4a+2b+c=2$$

よって，$b=1-2a$ から，$f(x)=ax^2-(2a-1)x$

$$f'(x)=2ax-(2a-1)=2a(x-1)+1$$

また，$a\neq 0$ のとき，$f'(x)=0$ とおくと，$x=1-\dfrac{1}{2a}$

これより，$y=f'(x)$ のグラフは右図のようになる。



(i)　$2a\geqq 1\left(a\geqq\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=-\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx+\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx$$

$$=-\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^{1-\frac{1}{2a}}+\Big[a(x-1)^2+x\Big]_{1-\frac{1}{2a}}^2$$

$$=-a\left(\frac{1}{4a^2}-1\right)-\left(1-\frac{1}{2a}\right)+a\left(1-\frac{1}{4a^2}\right)+\left(1+\frac{1}{2a}\right)=2a+\frac{1}{2a}$$

(ii)　$-1<2a<1\left(-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^2 f'(x)dx=\Big[a(x-1)^2+x\Big]_0^2=2$$

(iii)　$2a\leqq -1\left(a\leqq -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき

$$S=\int_0^2|f'(x)|dx=\int_0^{1-\frac{1}{2a}}f'(x)dx-\int_{1-\frac{1}{2a}}^2 f'(x)dx=-2a-\frac{1}{2a}$$

(2)　(i)　$a\geqq\dfrac{1}{2}$ のとき　相加平均と相乗平均の関係より，

$$S=2a+\frac{1}{2a}\geqq 2\sqrt{2a\cdot\frac{1}{2a}}=2$$

等号は $2a=\dfrac{1}{2a}\left(a=\dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

(ii)　$-\dfrac{1}{2}<a<\dfrac{1}{2}$ のとき　$S=2$

(iii)　$a\leqq -\dfrac{1}{2}$ のとき　$a'=-a\geqq\dfrac{1}{2}$ とおくと，

$$S = -2a - \frac{1}{2a} = 2a' + \frac{1}{2a'} \geqq 2\sqrt{2a' \cdot \frac{1}{2a'}} = 2$$

等号は$2a' = \frac{1}{2a'}$ $\left(a = -\frac{1}{2}\right)$のときに成立する。

(i)～(iii)より, S は$-\frac{1}{2} \leqq a \leqq \frac{1}{2}$ のとき，最小値 2 をとる。

コメント

定積分の計算問題ですが，三角形や台形の面積計算と読み直しても可です。

問　題

$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ を満たす実数 α，β と，2 次式 $f(x)=x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta$ について，$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=1$ が成立しているとする。このとき定積分 $S=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx$ を α の式で表し, S がとりうる値の最大値を求めよ。 [2008]

解答例

$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx=\int_{-1}^{1}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx=1$ より，$2\int_0^1 (x^2+\alpha\beta)\,dx=1$ となり，

$$2\left(\frac{1}{3}+\alpha\beta\right)=1,\ \ \alpha\beta=\frac{1}{6}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$S=\int_0^{\alpha} f(x)\,dx=\int_0^{\alpha}\{x^2-(\alpha+\beta)x+\alpha\beta\}dx$

$$=\frac{\alpha^3}{3}-(\alpha+\beta)\cdot\frac{\alpha^2}{2}+\alpha^2\beta=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2\beta$$

さて, $(*)$より，$\beta=\frac{1}{6\alpha}$ となり，$0 \leqq \alpha \leqq \beta$ から,

$$0<\alpha \leqq \frac{1}{6\alpha},\ \ 0<\alpha \leqq \frac{1}{\sqrt{6}}$$

このとき，$S=-\frac{1}{6}\alpha^3+\frac{1}{2}\alpha^2\cdot\frac{1}{6\alpha}=-\frac{1}{12}(2\alpha^3-\alpha)$

$$\frac{dS}{d\alpha}=-\frac{1}{12}(6\alpha^2-1)$$

これより，S の増減は右表のようになり，$\alpha=\frac{1}{\sqrt{6}}$ のとき, S は最大値 $\frac{\sqrt{6}}{108}$ をとる。

α	0	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{6}}$
$\frac{dS}{d\alpha}$		$+$	0
S		$\nearrow$	$\frac{\sqrt{6}}{108}$

コメント

微積分で味付けされた条件付きの最大・最小問題です。

問　題

θ は，$0°<\theta<45°$ の範囲の角度を表す定数とする。$-1 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，関数 $f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3$ が最小値をとるときの変数 x の値を，$\cos\theta$ で表せ。　[2006]

解答例

$-1 \leqq x \leqq 1$ のとき，$|x+1|=x+1$，$|x-1|=-(x-1)$ より，

$$f(x)=|x+1|^3+|x-\cos 2\theta|^3+|x-1|^3=(x+1)^3+|x-\cos 2\theta|^3-(x-1)^3$$
$$=6x^2+2+|x-\cos 2\theta|^3$$

また，$0°<\theta<45°$ から，$0<\cos 2\theta<1$ である。

(i)　$-1 \leqq x<\cos 2\theta$ のとき

$|x-\cos 2\theta|=-(x-\cos 2\theta)$ より，$f(x)=6x^2+2-(x-\cos 2\theta)^3$

$$f'(x)=12x-3(x-\cos 2\theta)^2=-3\{x^2-2(\cos 2\theta+2)x+\cos^2 2\theta\}$$

ここで，$f'(x)=0$ とすると，

$$x=\cos 2\theta+2\pm\sqrt{(\cos 2\theta+2)^2-\cos^2 2\theta}=2\cos^2\theta+1\pm 2\sqrt{\cos 2\theta+1}$$
$$=2\cos^2\theta+1\pm 2\sqrt{2}\cos\theta$$

まず，$2\cos^2\theta+1+2\sqrt{2}\cos\theta>1$ であり，また $\alpha=2\cos^2\theta+1-2\sqrt{2}\cos\theta$ とおくと，$f'(-1)=-12-3(-1-\cos 2\theta)^2<0$，しかも $f'(\cos 2\theta)=12\cos 2\theta>0$ なので，$-1<\alpha<\cos 2\theta$ である。

これより，$f(x)$ の値の増減は右表のようになる。

x	-1	$\cdots$	α	$\cdots$	$\cos 2\theta$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		↘		↗	

(ii)　$\cos 2\theta \leqq x \leqq 1$ のとき

$|x-\cos 2\theta|=x-\cos 2\theta$ より，$f(x)=6x^2+2+(x-\cos 2\theta)^3$

$$f'(x)=12x+3(x-\cos 2\theta)^2>0$$

よって，$f(x)$ は単調に増加する。

(i)(ii)より，$f(x)$ は $x=\cos 2\theta$ で連続なので，最小値をとるときの x は，

$$x=2\cos^2\theta+1-2\sqrt{2}\cos\theta$$

コメント

絶対値付きの関数の最大・最小問題です。三角関数も絡んでいるので，きめ細かい論理が必要です。

問　題

$f(x)$を$f(0)=0$を満たす2次関数とする。$a,\ b$を実数として，関数$g(x)$を次で与える。

$$g(x)=\begin{cases} ax & (x\leqq 0) \\ bx & (x>0) \end{cases}$$

$a,\ b$ をいろいろ変化させ，$\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$が最小になるようにする。このとき，$g(-1)=f(-1)$，$g(1)=f(1)$であることを示せ。

[2005]

解答例

$f(x)$は$f(0)=0$を満たす2次関数なので，$f(x)=px^2+qx\ \ (p\neq 0)$とおくと，

$$f'(x)=2px+q$$

また，$x<0$のとき$g'(x)=a$，$x>0$のとき$g'(x)=b$である。

さて，$I(a)=\displaystyle\int_{-1}^{0}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$，$J(b)=\displaystyle\int_{0}^{1}\{f'(x)-g'(x)\}^2dx$とすると，

$$I(a)=\int_{-1}^{0}(2px+q-a)^2dx=\frac{1}{6p}\Big[(2px+q-a)^3\Big]_{-1}^{0}$$
$$=\frac{1}{6p}\{(q-a)^3-(-2p+q-a)^3\}$$

また，$J(b)=\displaystyle\int_{0}^{1}(2px+q-b)^2dx=\frac{1}{6p}\Big[(2px+q-b)^3\Big]_{0}^{1}$

$$=\frac{1}{6p}\{(2p+q-b)^3-(q-b)^3\}$$

すると，$I'(a)=\dfrac{1}{6p}\{-3(q-a)^2+3(-2p+q-a)^2\}$

$$=\frac{1}{2p}(-2p+q-a+q-a)(-2p)$$
$$=2(a+p-q)$$

a	$\cdots$	$-p+q$	$\cdots$
$I'(a)$	$-$	0	$+$
$I(a)$	↘		↗

右の増減表より，$a=-p+q$ ……①のとき，$I(a)$は最小となる。

さらに，$J'(b)=\dfrac{1}{6p}\{-3(2p+q-b)^2+3(q-b)^2\}$

$$=\frac{1}{2p}(q-b+2p+q-b)(-2p)$$
$$=2(b-p-q)$$

b	$\cdots$	$p+q$	$\cdots$
$J'(b)$	$-$	0	$+$
$J(b)$	↘		↗

右の増減表より，$b=p+q$ ……②のとき，$J(b)$は最小となる。

したがって，$I(a)+J(b)$が最小となるのは，$a,\ b$が任意の実数より，①と②がとも

に成立するときである。

このとき，①②より，

$$f(-1)=p-q=-a=g(-1)\,,\ f(1)=p+q=b=g(1)$$

コメント

普通に$f(x)$を設定して，式変形を進めました。ただ，$I(a)$，$J(b)$を展開するのは面倒そうだったので，微分法を利用しました。

問　題

関数 $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ を次で定める。

$$f(x)=x^3-3x,\ g(x)=\{f(x)\}^3-3f(x),\ h(x)=\{g(x)\}^3-3g(x)$$

このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$f(x)=a$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$g(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

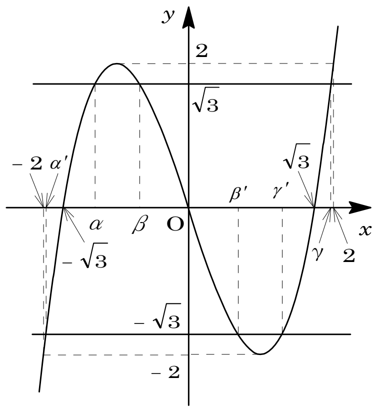
(3)　$h(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-3x$ より, $f'(x)=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

$f(x)=a$ を満たす異なる実数 x の個数は, $y=f(x)$ と $y=a$ のグラフの共有点の個数に等しいので, 右表より, $a<-2$, $2<a$ のとき 1 個, $a=\pm 2$ のとき 2 個, $-2<a<2$ のとき 3 個である。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	↗	2	↘	-2	↗



(2)　$f(x)=a$ とおくと, $g(x)=0$ は,

$$a^3-3a=0,\ a=0,\ \pm\sqrt{3}$$

(i)　$a=0$ のとき　$f(x)=0$ より $x=0,\ \pm\sqrt{3}$

(ii)　$a=\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=\sqrt{3}$ となり, これを満たす実数 x は, (1)より 3 個存在し, $x=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおく。

(iii)　$a=-\sqrt{3}$ のとき

$f(x)=-\sqrt{3}$ となり, これを満たす実数 x は, (1)より 3 個存在し, $x=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ とおく。

すると, $-2<\alpha'<-\sqrt{3}<\alpha<\beta<0<\beta'<\gamma'<\sqrt{3}<\gamma<2$ ……(＊)が成立するので, $g(x)=0$ を満たす実数 x は合計 9 個存在する。

(3)　$h(x)=0$ より, $\{g(x)\}^3-3g(x)=0$ となり, $g(x)=0,\ \pm\sqrt{3}$ である。

$g(x)=0$ のとき, $a=0,\ \pm\sqrt{3}$ であり, (2)より実数 x は 9 個存在する。

$g(x)=\sqrt{3}$ のとき, $a^3-3a=\sqrt{3}$ より $a=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ となり, それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

同様に, $g(x)=-\sqrt{3}$ のとき, $a^3-3a=-\sqrt{3}$ より $a=\alpha',\ \beta',\ \gamma'$ となり, それぞれの a の値に対し, (1)より実数 x は 3 個ずつ合計 9 個存在する。

さらに, (＊)から a の値に重複は存在しないので, x の値も重複はない。

よって, $h(x)=0$ を満たす実数 x は合計 27 個存在する。

コメント

実数解の個数を調べる頻出問題ですが，ひねりが加わっているために表現方法に難しさが感じられます。図をたくさん書いて，思考過程を述べた方が明快です。

問　題

a, b, c を実数とし，$a \neq 0$ とする。

2 次関数 $f(x) = ax^2 + bx + c$ が次の条件(A), (B)を満たすとする。

(A)　$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$，$f'(1) \leqq 6$

(B)　$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$f(x) \leqq 3x^2 - 1$

このとき，積分 $I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx$ の値のとりうる範囲を求めよ。　　[2003]

解答例

$f(x) = ax^2 + bx + c$ に対して，$f'(x) = 2ax + b$

$f(-1) = -1$，$f(1) = 1$，$f'(1) \leqq 6$ より，

$$a - b + c = -1 \cdots\cdots ①,\quad a + b + c = 1 \cdots\cdots ②,\quad 2a + b \leqq 6 \cdots\cdots ③$$

①②より，$b = 1$，$c = -a$

③に代入して，$2a \leqq 5$，$a \leqq \dfrac{5}{2} \cdots\cdots\cdots ④$

さて，$g(x) = 3x^2 - 1 - f(x)$ とおくと，

$$g(x) = 3x^2 - 1 - (ax^2 + x - a) = (3 - a)x^2 - x + (a - 1)$$

ここで，$-1 \leqq x \leqq 1$ を満たすすべての x に対し，$g(x) \geqq 0$ である条件は，$g(-1) = 3$，$g(1) = 1$ であり，しかも④より $0 < \dfrac{1}{2(3 - a)} \leqq 1$ となることを考え合わせると，$g(x) = 0$ の判別式が 0 以下であることと等しい。

$$D = 1 - 4(3 - a)(a - 1) \leqq 0,\quad 4a^2 - 16a + 13 \leqq 0$$

よって，$\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{4 + \sqrt{3}}{2}$ となり，④と合わせて $\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2} \leqq a \leqq \dfrac{5}{2} \cdots\cdots\cdots ⑤$

このとき，$I = \int_{-1}^{1} (f'(x))^2 dx = \int_{-1}^{1} (2ax + 1)^2 dx = 2\int_{0}^{1} (4a^2x^2 + 1) dx$

$$= 2\left[\frac{4}{3}a^2x^3 + x\right]_0^1 = \frac{8}{3}a^2 + 2$$

すると，⑥より，$\dfrac{8}{3}\left(\dfrac{4 - \sqrt{3}}{2}\right)^2 + 2 \leqq I \leqq \dfrac{8}{3}\left(\dfrac{5}{2}\right)^2 + 2$ なので，$\dfrac{44 - 16\sqrt{3}}{3} \leqq I \leqq \dfrac{56}{3}$ となる。

コメント

③の条件があるために，場合分けが不要となります。正確な計算力だけで片付きます。

問　題

2 つの関数 $f(x)=ax^3+bx^2+cx$，$g(x)=px^3+qx^2+rx$ が次の 5 つの条件を満たしているとする。

$$f'(0)=g'(0),\ f(-1)=-1,\ f'(-1)=0,\ g(1)=3,\ g'(1)=0$$

ここで，$f(x)$，$g(x)$ の導関数をそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ で表している。

このような関数のうちで，定積分 $\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$ の値を最小にするような $f(x)$ と $g(x)$ を求めよ。ただし $f''(x)$，$g''(x)$ はそれぞれ $f'(x)$，$g'(x)$ の導関数を表す。 [2002]

解答例

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ より，$f'(x)=3ax^2+2bx+c$，$f''(x)=6ax+2b$

また，$g(x)=px^3+qx^2+rx$ より，$g'(x)=3px^2+2qx+r$，$g''(x)=6px+2q$

ここで，$f'(0)=g'(0)$，$f(-1)=-1$，$f'(-1)=0$ より，

$$c=r\cdots\cdots①,\ -a+b-c=-1\cdots\cdots②,\ 3a-2b+c=0\cdots\cdots③$$

$g(1)=3$，$g'(1)=0$ より，

$$p+q+r=0\cdots\cdots④,\ 3p+2q+r=0\cdots\cdots⑤$$

②③より，$a=c-2$，$b=a+c-1=2c-3\cdots\cdots\cdots⑥$

①④⑤より，$p=r-6=c-6$，$q=-p-r+3=-2c+9\cdots\cdots\cdots⑦$

さて，$I=\int_{-1}^{0}\{f''(x)\}^2dx+\int_{0}^{1}\{g''(x)\}^2dx$

$$=\int_{-1}^{0}(36a^2x^2+24abx+4b^2)dx+\int_{0}^{1}(36p^2x^2+24pqx+4q^2)dx$$

$$=\Big[12a^2x^3+12abx^2+4b^2x\Big]_{-1}^{0}+\Big[12p^2x^3+12pqx^2+4q^2x\Big]_{0}^{1}$$

$$=12a^2-12ab+4b^2+12p^2+12pq+4q^2$$

⑥⑦より，$I=12(c-2)^2-12(c-2)(2c-3)+4(2c-3)^2$

$$+12(c-6)^2+12(c-6)(-2c+9)+4(-2c+9)^2$$

$$=8c^2-48c+120=8(c-3)^2+48$$

よって，$c=3$ のとき I は最小値 48 をとる。

このとき①⑥⑦より，$a=1$，$b=3$，$p=-3$，$q=3$，$r=3$ なので，

$$f(x)=x^3+3x^2+3x,\ g(x)=-3x^3+3x^2+3x$$

コメント

まず，工夫とかは考えずに普通に解きました。それでもややこしい計算はありませんでした。

問　題

時刻 0 に原点を出発した 2 点 A, B が xy 平面上を動く。点 A の時刻 t での座標は $(t^2,\ 0)$ で与えられる。点 B は，最初は y 軸上を y 座標が増加する方向に一定の速さ 1 で動くが，点 C$(0,\ 3)$ に到達した後は，その点から x 軸に平行な直線上を x 座標が増加する方向に同じ速さ 1 で動く。

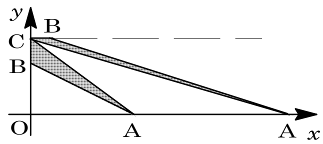
$t>0$ のとき，三角形 ABC の面積を $S(t)$ とおく。

(1)　関数 $S(t)\ (t>0)$ のグラフの概形を描け。

(2)　u を正の実数とするとき，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とおく。関数 $M(u)\ (u>0)$ のグラフの概形を描け。　[2001]

解答例

(1)　$0<t\leqq 3$ のとき点 B$(0,\ t)$ であり，$3\leqq t$ のとき B$(t-3,\ 3)$ となる。



(i)　$0<t\leqq 3$ のとき

$$S(t)=\frac{1}{2}(3-t)t^2=-\frac{1}{2}t^3+\frac{3}{2}t^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

(ii)　$3\leqq t$ のとき

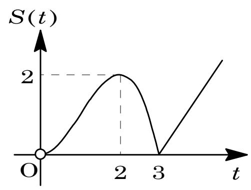
$$S(t)=\frac{1}{2}(t-3)\cdot 3=\frac{3}{2}t-\frac{9}{2} \cdots\cdots\cdots ②$$

t	0	$\cdots$	2	$\cdots$	3
$S'(t)$	0	+	0	−	
$S(t)$	0	↗	2	↘	0

①より，$S'(t)=-\frac{3}{2}t^2+3t=-\frac{3}{2}t(t-2)$

$0<t\leqq 3$ における $S(t)$ の増減は右表のようになる。

②と合わせて $S(t)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　②において $S(t)=2$ とすると，

$$\frac{3}{2}t-\frac{9}{2}=2,\quad t=\frac{13}{3}$$

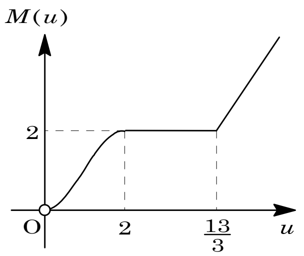
したがって，$0<t\leqq u$ における $S(t)$ の最大値を $M(u)$ とすると，

(i)　$0<u\leqq 2$ のとき　$M(u)=S(u)=-\frac{1}{2}u^3+\frac{3}{2}u^2$

(ii)　$2\leqq u\leqq \frac{13}{3}$ のとき　$M(u)=S(2)=2$

(iii)　$\frac{13}{3}\leqq u$ のとき　$M(u)=S(u)=\frac{3}{2}u-\frac{9}{2}$

よって，$M(u)$ のグラフは右図のようになる。

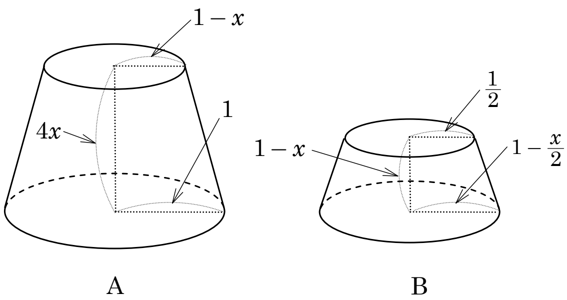


コメント

気をつけるのはミスだけという基本題です。

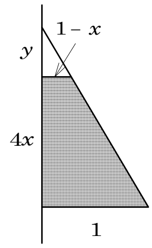
問　題

図のように底面の半径 1，上面の半径$1-x$，高さ$4x$の直円すい台 A と，底面の半径$1-\dfrac{x}{2}$，上面の半径$\dfrac{1}{2}$，高さ$1-x$の直円すい台 B がある。ただし，$0 \leqq x \leqq 1$ である。A と B の体積の和を$V(x)$とするとき，$V(x)$の最大値を求めよ。　[2000]



解答例

まず，$0<x<1$ のとき，直円すい台 A は，右図のような台形を軸のまわりに回転したとき得られ，その体積をV_aとすると，



$$(1-x):1 = y:(y+4x)$$

$y=(1-x)(y+4x)$より，$xy=4x-4x^2$，$y=4-4x$

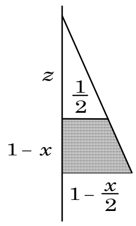
このとき，$V_a = \dfrac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot(y+4x)-\dfrac{1}{3}\pi(1-x)^2y$

$$= \frac{1}{3}\pi\left\{y+4x-(1-x)^2y\right\} = \frac{1}{3}\pi\left\{4-4(1-x)^3\right\}$$

$$= \frac{4}{3}\pi(x^3-3x^2+3x)$$

$x=0$をあてはめると$V_a=0$，$x=1$をあてはめると$V_a=\dfrac{4}{3}\pi$となり，ともに題意に適する。

また，$0\leqq x<1$ のとき，直円すい台 B は，右図のような台形を軸のまわりに回転したとき得られ，その体積をV_bとすると，



$$\frac{1}{2}:\left(1-\frac{x}{2}\right) = z:(z+1-x)$$

$z+1-x=(2-x)z$より，$(1-x)z=1-x$，$z=1$

このとき，$V_b=\dfrac{1}{3}\pi\left(1-\dfrac{x}{2}\right)^2(2-x)-\dfrac{1}{3}\pi\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\cdot 1$

$$= \frac{1}{12}\pi\left\{(2-x)^3-1\right\} = \frac{1}{12}\pi(-x^3+6x^2-12x+7)$$

$x=1$をあてはめると$V_b=0$となり適する。

よって，$0\leqq x\leqq 1$ で，$V(x)=V_a+V_b=\dfrac{1}{12}\pi(15x^3-42x^2+36x+7)$

$$V'(x)=\frac{1}{12}\pi(45x^2-84x+36)$$
$$=\frac{1}{4}\pi(3x-2)(5x-6)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$V'(x)$		$+$	0	$-$	
$V(x)$		↗		↘	

右表より $x=\dfrac{2}{3}$ のとき $V(x)$ は最大となる。

このとき，$V\left(\dfrac{2}{3}\right)=\dfrac{1}{12}\pi\left(15\cdot\dfrac{8}{27}-42\cdot\dfrac{4}{9}+36\cdot\dfrac{2}{3}+7\right)=\dfrac{151}{108}\pi$

コメント

計算は面倒ですが，内容は基本的です。必要なのは忍耐力という問題です。

問　題

a は 0 でない実数とする。関数 $f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ の極大値と極小値の差が最小となる a の値を求めよ。 [1998]

解答例

$f(x)=(3x^2-4)\left(x-a+\dfrac{1}{a}\right)$ より,

$$f'(x)=6x\left(x-a+\frac{1}{a}\right)+(3x^2-4)=9x^2-6\left(a-\frac{1}{a}\right)x-4$$

$f'(0)=-4<0$ から, $f'(x)=0$ は 2 つの実数解をもち, これを $x=\alpha$, β $(\alpha<\beta)$ とおくと,

$$\alpha=\frac{a-\frac{1}{a}-\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3},\quad \beta=\frac{a-\frac{1}{a}+\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}}{3}$$

極大値と極小値の差を $g(a)$ とすると,

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\begin{aligned}g(a)&=f(\alpha)-f(\beta)\\&=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx\\&=\int_\beta^\alpha 9(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\\&=9\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{3}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{3}{2}\left\{\frac{2}{3}\sqrt{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4}\right\}^3\\&=\frac{4}{9}\left\{\left(a-\frac{1}{a}\right)^2+4\right\}^{\frac{3}{2}}\end{aligned}$$

$g(a)$ は $a-\dfrac{1}{a}=0$, すなわち $a=\pm1$ のとき最小になる。

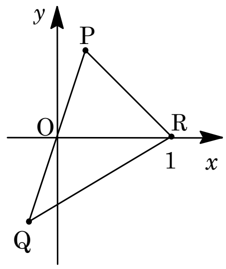
コメント

3 次関数の極大値と極小値の差を求めるという頻出問題です。上のような特殊な解法があります。ただし本問では, $f'(x)=0$ の解が $x=\dfrac{2}{3}a$, $-\dfrac{2}{3a}$ となりますので, a の正負で場合分けをして, 直接 $g(a)$ を求めても, 計算量がやや増える程度ですみます。

問　題

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ が鋭角三角形をなすための $(x,\ y)$ についての条件を求めよ。また，その条件を満たす点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲を図示せよ。　[2016]

解答例



3 点 $\mathrm{P}(x,\ y)$，$\mathrm{Q}(-x,\ -y)$，$\mathrm{R}(1,\ 0)$ に対し，

$$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=2(x,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RP}}=(x-1,\ y),\ \overrightarrow{\mathrm{RQ}}=-(x+1,\ y)$$

条件より，$\triangle\mathrm{PQR}$ は鋭角三角形なので，まず $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\neq\vec{0}$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\neq\vec{0}$ となり，

$$(x,\ y)\neq(0,\ 0),\ (x,\ y)\neq(1,\ 0),\ (x,\ y)\neq(-1,\ 0)$$

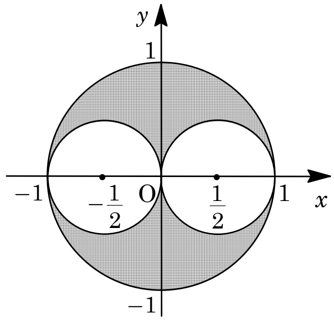
この条件のもとで，$\angle\mathrm{RPQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RP}}>0$ となり，

$$x(x-1)+y^2>0,\ x^2+y^2-x>0,\ \left(x-\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{PQR}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QR}}>0$ すなわち $\overrightarrow{\mathrm{QP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}<0$ となり，

$$-x(x+1)-y^2<0,\ x^2+y^2+x>0$$

$$\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+y^2>\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots②$$



さらに，$\angle\mathrm{PRQ}<90^\circ$ から，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}>0$ となり，

$$-(x-1)(x+1)-y^2>0,\ x^2+y^2-1<0$$

$$x^2+y^2<1\ \cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ の範囲は右図の網点部である。ただし，境界は含まない。なお，3 点 $(0,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ を除く条件は満たされている。

コメント

点と座標に関する基本問題です。解答例ではベクトルを利用していますが，余弦定理の適用でも構いません。

問　題

座標平面上の 2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ を考える。また，P を座標平面上の点とし，その x 座標の絶対値は 1 以下であるとする。次の条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲を図示し，その面積を求めよ。

(i)　頂点の x 座標の絶対値が 1 以上の 2 次関数のグラフで，点 A，P，B をすべて通るものがある。

(ii)　点 A, P, B は同一直線上にある。　[2015]

解答例

2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(1,\ -1)$ および点 $P(x,\ y)$ $(|x|\leqq 1)$ に対して，まず条件(ii)から，点 A, P, B は同一直線上にあることより，点 P の範囲は，$y=-x$ $(|x|\leqq 1)$ である。

次に，条件(i)から，2 次関数を $y=ax^2+bx+c$ $(a\neq 0)$ ……①とおくと，2 点 A, B を通ることより，

$$a-b+c=1\ \cdots\cdots\text{②},\quad a+b+c=-1\ \cdots\cdots\text{③}$$

②③より，$b=-1$，$c=-a$ となり，①に代入すると，

$$y=ax^2-x-a=a\left(x-\frac{1}{2a}\right)^2-a-\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\text{④}$$

すると，頂点の x 座標の絶対値が 1 以上より，$\left|\dfrac{1}{2a}\right|\geqq 1$ から $0<|a|\leqq\dfrac{1}{2}$ ………⑤

そこで，点 P の範囲は，⑤の条件のもとで曲線④の $|x|\leqq 1$ における通過領域である。

まず，④を $(x^2-1)a-(x+y)=0$ ……⑥と変形すると，点 $P(x,\ y)$ の範囲を表す不等式は，この a についての方程式⑥が，⑤の範囲に実数解をもつ条件として得られる。

(a)　$x=\pm 1$ のとき　$x+y=0$ のとき，任意の a に対して⑥は成立するので，

$$(x,\ y)=(1,\ -1),\ (-1,\ 1)$$

(b)　$x\neq\pm 1$ のとき　⑥より $a=\dfrac{x+y}{x^2-1}$ となり，⑤に代入すると，$0<\left|\dfrac{x+y}{x^2-1}\right|\leqq\dfrac{1}{2}$

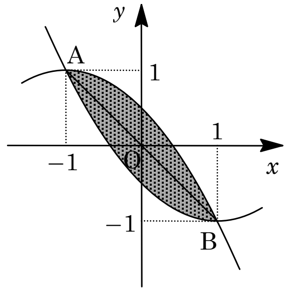
$$0<|x+y|\leqq\frac{1}{2}|x^2-1|,\quad 0<|x+y|\leqq-\frac{1}{2}(x^2-1)\ (|x|\leqq 1)$$

(b-i)　$x+y>0$ のとき　$x+y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\leqq-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}=-\frac{1}{2}(x+1)^2+1$$

(b-ii)　$x+y<0$ のとき　$-x-y\leqq-\dfrac{1}{2}(x^2-1)$ より，

$$y\geqq\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}(x-1)^2-1$$



以上より，条件(i)または(ii)を満たす点 P の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

この領域の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}\left\{\left(-\frac{1}{2}x^2-x+\frac{1}{2}\right)-\left(\frac{1}{2}x^2-x-\frac{1}{2}\right)\right\}dx$$

$$=-\int_{-1}^{1}(x+1)(x-1)\,dx=\frac{1}{6}(1+1)^3=\frac{4}{3}$$

コメント

放物線の通過領域の問題です。すばやく結論の導ける条件(ii)から記しています。

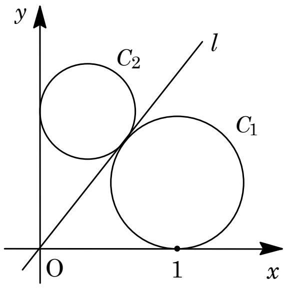
問　題

l を座標平面上の原点を通り傾きが正の直線とする。さらに，以下の 3 条件(i), (ii), (iii)で定まる円 C_1，C_2 を考える。

(i)　円 C_1，C_2 は 2 つの不等式 $x \geqq 0$，$y \geqq 0$ で定まる領域に含まれる。

(ii)　円 C_1，C_2 は直線 l と同一点で接する。

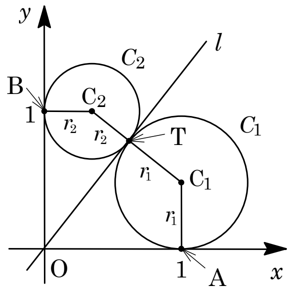
(iii) 円 C_1 は x 軸と点 $(1,\ 0)$ で接し，円 C_2 は y 軸と接する。



円 C_1 の半径を r_1，円 C_2 の半径を r_2 とする。$8r_1+9r_2$ が最小となるような直線 l の方程式と，その最小値を求めよ。　[2015]

解答例

円 C_1 と x 軸，円 C_2 と y 軸，C_1 と C_2 の接点を，それぞれ A, B, T とおくと，$\mathrm{OB}=\mathrm{OT}=\mathrm{OA}=1$ より，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ となる。



すると，円 C_1 の半径 r_1，円 C_2 の半径 r_2 より，円 C_1 の中心 $\mathrm{C_1}(1,\ r_1)$，円 C_2 の中心 $\mathrm{C_2}(r_2,\ 1)$ と表せる。

ここで，円 C_1 と C_2 が接する条件は，$\mathrm{C_1C_2}=r_1+r_2$ より，

$$\sqrt{(r_2-1)^2+(1-r_1)^2}=r_1+r_2$$

これより，$(r_2-1)^2+(1-r_1)^2=(r_1+r_2)^2$ となり，

$$r_1r_2+r_1+r_2=1,\ (1+r_1)r_2=1-r_1,\ r_2=\frac{1-r_1}{1+r_1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

よって，$0<r_1<1$ のもとで，$(*)$から，

$$8r_1+9r_2=8r_1+\frac{9-9r_1}{1+r_1}=8r_1+\frac{-9(1+r_1)+18}{1+r_1}=8r_1-9+\frac{18}{1+r_1}$$

$$=8+8r_1+\frac{18}{1+r_1}-17=8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17$$

そこで，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$8(1+r_1)+\frac{18}{1+r_1}-17 \geqq 2\sqrt{8(1+r_1)\cdot\frac{18}{1+r_1}}-17=2\sqrt{2^3\cdot 2\cdot 3^2}-17=7$$

等号は，$8(1+r_1)=\dfrac{18}{1+r_1}$ すなわち $1+r_1=\dfrac{3}{2}$ $\left(r_1=\dfrac{1}{2}\right)$ のとき成り立ち，この値は $0<r_1<1$ を満たしている。

以上より，$8r_1+9r_2$ の最小値は 7 である。

このとき，$r_1=\dfrac{1}{2}$，$(*)$から $r_2=\dfrac{1}{3}$ となり，$\mathrm{C_1}\left(1,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{C_2}\left(\dfrac{1}{3},\ 1\right)$ である。そして，接点 T は線分 $\mathrm{C_1C_2}$ を $r_1:r_2=\dfrac{1}{2}:\dfrac{1}{3}=3:2$ に内分する点より，$\mathrm{T}(p,\ q)$ とおくと，

$$p=\frac{2+1}{5}=\frac{3}{5},\ q=\frac{1+3}{5}=\frac{4}{5}$$

よって，線分 OT の傾きは$\dfrac{q}{p}=\dfrac{4}{3}$となり，直線 l の方程式は $y=\dfrac{4}{3}x$ である。

コメント

解法のポイントは，冒頭に記した点 B の y 座標が 1 という点です。当然といえば当然ですが……。ただ，ここを外すとシビアな結果になります。なお，分数関数の微分法は範囲外ですので，最小値を求める際には，相加平均と相乗平均の関係を利用するように式変形をしています。

問　題

座標平面の原点を O で表す。線分 $y=\sqrt{3}x$ $(0\leqq x\leqq 2)$ 上の点 P と，線分 $y=-\sqrt{3}x$ $(-3\leqq x\leqq 0)$ 上の点 Q が，線分 OP と線分 OQ の長さの和が 6 となるように動く。このとき，線分 PQ の通過する領域を D とする。

(1) s を $-3\leqq s\leqq 2$ を満たす実数とするとき，点 $(s,\ t)$ が D に入るような t の範囲を求めよ。

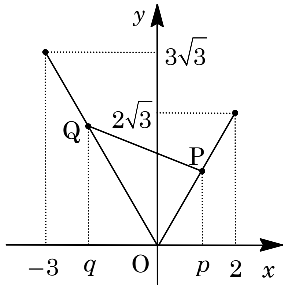
(2) D を図示せよ。 [2014]

解答例

(1) 条件より，$\mathrm{P}(p,\ \sqrt{3}p)$，$\mathrm{Q}(q,\ -\sqrt{3}q)$ とおくと，$\mathrm{OP}+\mathrm{OQ}=6$ から，

$$2p-2q=6,\ q=p-3\cdots\cdots\cdots①$$

ただし，$-3\leqq q\leqq 0$ より $-3\leqq p-3\leqq 0$ となり，$0\leqq p\leqq 2$ と合わせて $0\leqq p\leqq 2$ である。



ここで，直線 PQ の傾きは，①より，

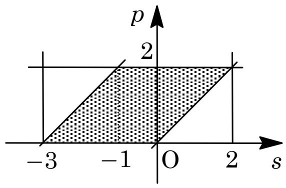
$$\frac{\sqrt{3}p+\sqrt{3}q}{p-q}=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)$$

これより，線分 PQ の方程式は，$y-\sqrt{3}p=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)(x-p)$　$(p-3\leqq x\leqq p)$

$$y=\frac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)x-\frac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，点 $(s,\ t)$ は直線②上にあるので，$t=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)\cdots\cdots\cdots③$

ただし，$-3\leqq s\leqq 2$，$p-3\leqq s\leqq p$，$0\leqq p\leqq 2$ であり，これを sp 平面上に図示すると，右図の網点部となる。



そこで，$f(p)=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(2p-3)s-\dfrac{2\sqrt{3}}{3}p(p-3)$ とおき，この領域における $f(p)$ のとり得る値の範囲を求める。

$$f(p)=\frac{\sqrt{3}}{3}\{-2p^2+(2s+6)p-3s\}=\frac{\sqrt{3}}{3}\left\{-2\left(p-\frac{s+3}{2}\right)^2+\frac{s^2+9}{2}\right\}$$

(i) $-3\leqq s\leqq -1$ のとき

右上図より $0\leqq p\leqq s+3$ となり，$\dfrac{s+3}{2}=\dfrac{0+(s+3)}{2}$ なので，

$$f(0)=f(s+3)\leqq f(p)\leqq f\left(\frac{s+3}{2}\right),\ -\sqrt{3}s\leqq f(p)\leqq\frac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$$

(ii) $-1\leqq s\leqq 0$ のとき　右上図より，$0\leqq p\leqq 2$ となり，$1\leqq\dfrac{s+3}{2}\leqq\dfrac{3}{2}$ から，

$f(0) \leqq f(p) \leqq f\left(\dfrac{s+3}{2}\right)$, $-\sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$

(iii) $0 \leqq s \leqq 2$ のとき　右上図より，$s \leqq p \leqq 2$ となり，$\dfrac{3}{2} \leqq \dfrac{s+3}{2} \leqq \dfrac{5}{2}$ である。

(iii-i) $\dfrac{s+3}{2} \leqq 2$ $(0 \leqq s \leqq 1)$ のとき

$f(s) \leqq f(p) \leqq f\left(\dfrac{s+3}{2}\right)$, $\sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$

(iii-ii) $\dfrac{s+3}{2} \geqq 2$ $(1 \leqq s \leqq 2)$ のとき

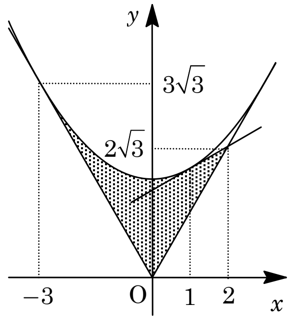
$f(s) \leqq f(p) \leqq f(2)$, $\sqrt{3}s \leqq f(p) \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$

以上より，D に入るような t の範囲は，③から $t = f(p)$ なので，

$-\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$ $(-3 \leqq s \leqq 0)$

$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{6}(s^2+9)$ $(0 \leqq s \leqq 1)$

$\sqrt{3}s \leqq t \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}(s+4)$ $(1 \leqq s \leqq 2)$



(2) 領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

コメント

線分の通過領域の問題ですが，まとめていくのに，かなりの時間を費やします。上の解答例では，条件の不等式を sp 平面上に領域として示し，それを見ながら計算を進めています。なお，この図にグラフの軸となる $p = \dfrac{s+3}{2}$ も書き込んでおくのも，1 つの方法です。

問　題

座標平面上の 3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$ $(0\leqq a\leqq 1)$ を考える。

(1) 2 つの線分の長さの差 $\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

(2) Q を端点とし A を通る半直線と放物線 $y=\dfrac{\sqrt{2}}{8}x^2$ との交点を B とする。点 B から直線 $y=2$ へ下ろした垂線と直線 $y=2$ との交点を C とする。このとき，線分の長さの和 $\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}$ は a によらない定数であることを示し，その値を求めよ。

[2013]

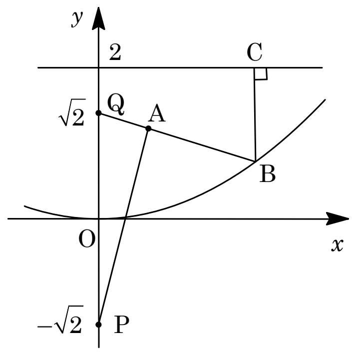
解答例

(1) $0\leqq a\leqq 1$ のとき，3 点 $\mathrm{P}(0,\ -\sqrt{2})$，$\mathrm{Q}(0,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{A}(a,\ \sqrt{a^2+1})$ に対して，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}-\mathrm{AQ}&=\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}+\sqrt{2})^2}-\sqrt{a^2+(\sqrt{a^2+1}-\sqrt{2})^2}\\&=\sqrt{2a^2+3+2\sqrt{2a^2+2}}-\sqrt{2a^2+3-2\sqrt{2a^2+2}}\\&=\sqrt{2a^2+2}+1-\left(\sqrt{2a^2+2}-1\right)=2\end{aligned}$$

(2) (1)より，$\mathrm{PA}=\mathrm{AQ}+2$ となり，

$$\begin{aligned}\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}&=\mathrm{AQ}+2+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}\\&=\mathrm{BQ}+\mathrm{BC}+2\ \cdots\cdots\cdots①\end{aligned}$$



ここで，$\mathrm{B}\left(t,\ \dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)$ とおくと，

$$\mathrm{BC}=2-\frac{\sqrt{2}}{8}t^2\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$\begin{aligned}\mathrm{BQ}^2&=t^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2-\sqrt{2}\right)^2\\&=t^2+2\left(\frac{t^4}{64}-\frac{t^2}{4}+1\right)=2\left(\frac{t^4}{64}+\frac{t^2}{4}+1\right)=\left(\frac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)^2\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{BQ}=\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots③$

①②③より，$\mathrm{PA}+\mathrm{AB}+\mathrm{BC}=\left(\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2+\sqrt{2}\right)+\left(2-\dfrac{\sqrt{2}}{8}t^2\right)+2=4+\sqrt{2}$

コメント

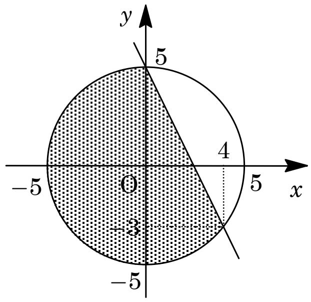
数 C の範囲になりますが，双曲線と放物線の定義を題材にしたものです。この点を利用すると，計算はほとんど不要になります。

問　題

a, b を実数の定数とする。実数 x, y が $x^2+y^2\leqq 25$，$2x+y\leqq 5$ をともに満たすとき，$z=x^2+y^2-2ax-2by$ の最小値を求めよ。　[2013]

解答例

まず，連立不等式 $x^2+y^2\leqq 25$，$2x+y\leqq 5$ の満たす領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



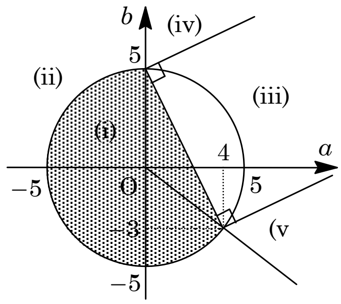
また，実数 a，b に対して，

$$z=x^2+y^2-2ax-2by$$
$$=(x-a)^2+(y-b)^2-(a^2+b^2)$$

これより，z が最小値をとるのは，点 $(x,\ y)$ と点 $(a,\ b)$ の距離が最小になるときである。

ここで，境界線 $2x+y=5$，すなわち $y=-2x+5$ に垂直で，点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$y=\frac{1}{2}x+5,\quad y=\frac{1}{2}x-5$$



さらに，原点 O と点 $(0,\ 5)$，点 $(4,\ -3)$ を通る直線の方程式は，それぞれ，

$$x=0,\quad y=-\frac{3}{4}x$$

(i)　$a^2+b^2\leqq 25$ かつ $b\leqq -2a+5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(a,\ b)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=-(a^2+b^2)=-a^2-b^2$$

(ii)　$a^2+b^2\geqq 25$ かつ $\left(a\leqq 0\text{ または }b\leqq -\frac{3}{4}a\right)$ のとき

z は，O と点 $(a,\ b)$ を結ぶ線分と円 $x^2+y^2=25$ の交点において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\sqrt{a^2+b^2}-5\right)^2-(a^2+b^2)=25-10\sqrt{a^2+b^2}$$

(iii)　$b\geqq -2a+5$ かつ $b\leqq \frac{1}{2}a+5$ かつ $b\geqq \frac{1}{2}a-5$ のとき

z は，点 $(a,\ b)$ から直線 $2x+y=5$ に下ろした垂線の足において最小値をとり，その値は，

$$z=\left(\frac{|2a+b-5|}{\sqrt{2^2+1^2}}\right)^2-(a^2+b^2)=\frac{1}{5}(2a+b-5)^2-(a^2+b^2)$$
$$=\frac{1}{5}(-a^2-4b^2+4ab-20a-10b+25)$$

(iv)　$a \geqq 0$ かつ $b \geqq \frac{1}{2}a+5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(0,\ 5)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=25-10b$$

(v)　$b \geqq -\frac{3}{4}a$ かつ $b \leqq \frac{1}{2}a-5$ のとき

z は，$(x,\ y)=(4,\ -3)$ において最小値をとり，その値は，

$$z=16+9-8a+6b=25-8a+6b$$

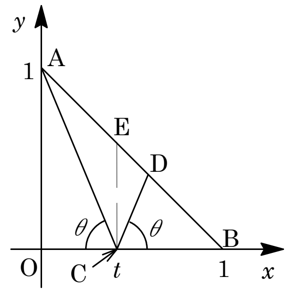
コメント

点 $(a,\ b)$ が領域の外部にあるときは，境界線に沿って，円を滑らないように転がせながら，考えをまとめています。

問　題

実数 t は $0<t<1$ を満たすとし，座標平面上の 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(0,\ 1)$，$\mathrm{B}(1,\ 0)$，$\mathrm{C}(t,\ 0)$ を考える。また線分 AB 上の点 D を $\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}$ となるように定める。t を動かしたときの三角形 ACD の面積の最大値を求めよ。 [2012]

解答例



まず，直線 AB の方程式は，$y=1-x$ ………①

そこで，点 C を通り，x 軸に垂直な直線と直線 AB との交点を E とすると，

$$\mathrm{CE}=1-t$$

また，$\angle\mathrm{ACO}=\angle\mathrm{BCD}=\theta$ とおくと，$\tan\theta=\dfrac{1}{t}$ より，直線 CD の方程式は，

$$y=\frac{1}{t}(x-t)\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$1-x=\dfrac{1}{t}(x-t)$ から，$t-tx=x-t$，$(t+1)x=2t$

よって，点 D の x 座標は，$x=\dfrac{2t}{t+1}$ となる。

すると，△ACD の面積 S は，$S=\dfrac{1}{2}(1-t)\cdot\dfrac{2t}{t+1}=\dfrac{-t^2+t}{t+1}$

ここで，$u=t+1$ とおくと，$0<t<1$ から $1<u<2$ となり，

$$S=\frac{-(u-1)^2+u-1}{u}=\frac{-u^2+3u-2}{u}=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)$$

さて，相加平均と相乗平均の関係より，$u+\dfrac{2}{u}\geqq 2\sqrt{2}$

等号は，$u=\dfrac{2}{u}$ すなわち $u=\sqrt{2}$ のとき成立し，これは $1<u<2$ を満たすことより，

$$S=3-\left(u+\frac{2}{u}\right)\leqq 3-2\sqrt{2}$$

以上より，△ACD の面積の最大値は，$3-2\sqrt{2}$ である。

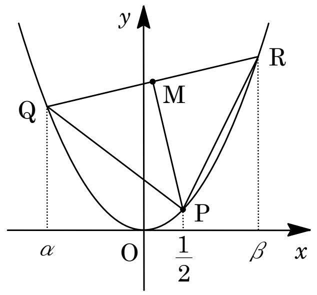
コメント

分数関数の最大・最小は，微分法を利用するのが一般的ですが，範囲外です。このようなときは，次に相加平均と相乗平均の関係が使えないかと考えます。

問　題

座標平面上の 1 点 $\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ をとる。放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を，3 点 P, Q, R が QR を底辺とする二等辺三角形をなすように動かすとき，△PQR の重心 $\mathrm{G}(X,\ Y)$ の軌跡を求めよ。 [2011]

解答例



点 $\mathrm{Q}(\alpha,\ \alpha^2)$，$\mathrm{R}(\beta,\ \beta^2)$ を結ぶ線分の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\frac{\alpha+\beta}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}\right)$ となり，$\mathrm{P}\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ に対して，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}=(\beta-\alpha,\ \beta^2-\alpha^2)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\left(\frac{\alpha+\beta}{2}-\frac{1}{2},\ \frac{\alpha^2+\beta^2}{2}-\frac{1}{4}\right)$$

$$=\frac{1}{4}(2\alpha+2\beta-2,\ 2\alpha^2+2\beta^2-1)$$

さて，△PQR が QR を底辺とする二等辺三角形である条件は，$\mathrm{QR}\perp\mathrm{PM}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{QR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PM}}=(\beta-\alpha)(2\alpha+2\beta-2)+(\beta^2-\alpha^2)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$$

$\alpha\neq\beta$ から，$(2\alpha+2\beta-2)+(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2-1)=0$

$$(\alpha+\beta)(2\alpha^2+2\beta^2+1)=2\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，△PQR の重心を $\mathrm{G}(X,\ Y)$ とおくと，

$$X=\frac{1}{3}\left(\alpha+\beta+\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots②,\ \ Y=\frac{1}{3}\left(\alpha^2+\beta^2+\frac{1}{4}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

②より $\alpha+\beta=3X-\frac{1}{2}\cdots\cdots$④，③より $\alpha^2+\beta^2=3Y-\frac{1}{4}\cdots\cdots$⑤

④⑤を①に代入すると，

$$\left(3X-\frac{1}{2}\right)\left(6Y+\frac{1}{2}\right)=2,\ \ \left(X-\frac{1}{6}\right)\left(Y+\frac{1}{12}\right)=\frac{1}{9}$$

よって，$Y=\dfrac{1}{9\left(X-\frac{1}{6}\right)}-\dfrac{1}{12}\cdots\cdots\cdots$⑥

ところで，α，β は，④⑤を満たす異なる実数であり，

$$\alpha\beta=\frac{1}{2}\{(\alpha+\beta)^2-(\alpha^2+\beta^2)\}=\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}\cdots\cdots\cdots⑦$$

④⑦より，α，β を解とする t に関する 2 次方程式は，

$$t^2-\left(3X-\frac{1}{2}\right)t+\frac{1}{2}\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=0$$

この方程式が，異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-2\left\{\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2-\left(3Y-\frac{1}{4}\right)\right\}=-\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2+2\left(3Y-\frac{1}{4}\right)>0$$

よって，$3Y-\frac{1}{4}>\frac{1}{2}\left(3X-\frac{1}{2}\right)^2$，$Y>\frac{3}{2}\left(X-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\cdots\cdots\cdots$⑧

⑥⑧より，△PQR の重心 G の軌跡は，

$$y=\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}\ \cdots\cdots\cdots ⑥',\quad y>\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}\ \cdots\cdots\cdots ⑧'$$

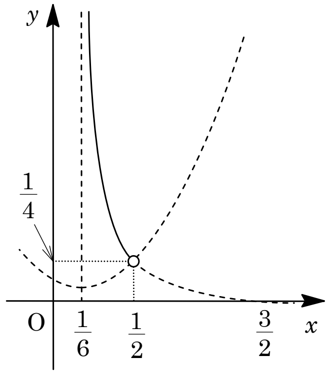
さらに，曲線⑥′と領域⑧′の境界線の交点は，

$$\frac{1}{9\left(x-\frac{1}{6}\right)}-\frac{1}{12}=\frac{3}{2}\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$$\left(x-\frac{1}{6}\right)^3+\frac{1}{9}\left(x-\frac{1}{6}\right)-\frac{2}{27}=0$$

$$\left(x-\frac{1}{6}-\frac{1}{3}\right)\left\{\left(x-\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{3}\left(x-\frac{1}{6}\right)+\frac{2}{9}\right\}=0$$

この方程式の実数解は $x=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}=\frac{1}{2}$ であるので，重心 G の軌跡を図示すると，右図の実線部となる。ただし，点 $\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4}\right)$ は除く。



コメント

少し前になりますが，2004 年の文理共通の第 1 問を思い浮かべながら解きました。このときは，題材が正三角形でしたが，本年は二等辺三角形です。ただ，点 P が固定されている本年の方が，方針は定まりやすかったと思います。なお，問題文が「軌跡を図示せよ」となっていないのは，分数関数のグラフが数Ⅲであることに配慮したためでしょうか。

問　題

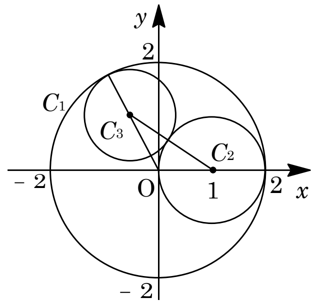
座標平面において原点を中心とする半径 2 の円を C_1 とし，点 $(1,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円を C_2 とする。また，点 $(a,\ b)$ を中心とする半径 t の円 C_3 が，C_1 に内接し，かつ C_2 に外接すると仮定する。ただし，b は正の実数とする。

(1)　$a,\ b$ を t を用いて表せ。また，t がとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　t が(1)で求めた範囲を動くとき，b の最大値を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　中心 $(a,\ b)$，半径 t の円 C_3 は，円 C_1 の内部にあり，しかも C_2 の外部にあることより，$0<t\leqq 1$ ……①である。



さて，C_1 に C_3 が内接することより，

$$\sqrt{a^2+b^2}=2-t$$

①のもとで，$a^2+b^2=(2-t)^2$ ………②

また，C_2 に C_3 が外接することより，

$$\sqrt{(a-1)^2+b^2}=1+t$$

①のもとで，$(a-1)^2+b^2=(1+t)^2$ ………③

②－③より，$2a-1=3-6t$ となり，

$$a=-3t+2$$

②に代入して，$(-3t+2)^2+b^2=(2-t)^2$，$b^2=-8t^2+8t$

$b>0$ から，①のもとで，$b=\sqrt{-8t^2+8t}$

すると，t がとり得る値の範囲は，$b=\sqrt{-8t(t-1)}>0$ より，

$$0<t<1$$

(2)　(1)より，$b=\sqrt{-8\left(t-\frac{1}{2}\right)^2+2}$

すると，$0<t<1$ から，$t=\frac{1}{2}$ のとき，b は最大値 $\sqrt{2}$ をとる。

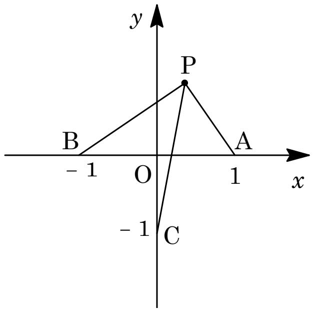
コメント

2 円の内接・外接についての基本問題です。

問　題

座標平面上の 3 点 A(1, 0)，B(−1, 0)，C(0, −1) に対し，$\angle APC = \angle BPC$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。ただし，$P \neq A$, B, C とする。 [2008]

解答例



A(1, 0)，B(−1, 0)，C(0, −1) に対し，P(x, y) とおくと，

$$\overrightarrow{PA} = (1-x,\ -y),\ \overrightarrow{PB} = (-1-x,\ -y)$$

$$\overrightarrow{PC} = (-x,\ -1-y)$$

$\angle APC = \angle BPC$ より，$\cos\angle APC = \cos\angle BPC$ となり，

$$\frac{\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PC}|} = \frac{\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PB}||\overrightarrow{PC}|}$$

$$(\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PB}| = (\overrightarrow{PB}\cdot\overrightarrow{PC})|\overrightarrow{PA}|$$

$$(x^2+y^2-x+y)\sqrt{x^2+y^2+2x+1} = (x^2+y^2+x+y)\sqrt{x^2+y^2-2x+1}$$

$(x^2+y^2-x+y)(x^2+y^2+x+y) \geqq 0$ ……①のもとで，

$$(x^2+y^2-x+y)^2(x^2+y^2+2x+1) = (x^2+y^2+x+y)^2(x^2+y^2-2x+1)$$

ここで，$u = x^2+y^2$ とおくと，

$$(u-x+y)^2(u+2x+1) = (u+x+y)^2(u-2x+1) \cdots\cdots\cdots ②$$

②の左辺 $= \{(u+y)^2 - 2x(u+y) + x^2\}\{(u+1)+2x\}$

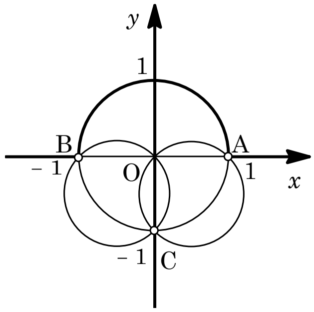
②の右辺 $= \{(u+y)^2 + 2x(u+y) + x^2\}\{(u+1)-2x\}$

これから，②をまとめると，$-4x(u+y)(u+1) + 4x\{(u+y)^2 + x^2\} = 0$ となり，

$$x(-u+yu-y+x^2+y^2) = 0$$

$u = x^2+y^2$ より，$xy(x^2+y^2-1) = 0$ となり，$x = 0$，$y = 0$，$x^2+y^2 = 1$ ………③

①より，$\left\{\left(x-\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right\}\left\{\left(x+\frac{1}{2}\right)^2 + \left(y+\frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}\right\} \geqq 0$ ……… ①′



以上より，$P \neq A$, B, C に注意して，①′かつ③を図示すると，点 P の軌跡は右図の太線部となり，これを表す方程式は，

$$x = 0\ (y \neq -1)$$

$$y = 0\ (x < -1,\ 1 < x)$$

$$x^2 + y^2 = 1\ (y > 0)$$

コメント

条件を満たす点 P の軌跡の一部が，y 軸上や原点中心の単位円周上にあることは，問題の設定からわかります。これをもとに，計算を押し進めました。

問　題

連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$，$y+x^2-2x-3\leqq 0$ の表す領域を D とする。

(1) D を図示せよ。

(2) D の面積を求めよ。 [2007]

解答例

(1) 連立不等式 $y(y-|x^2-5|+4)\leqq 0$ ……①，$y+x^2-2x-3\leqq 0$ ……②に対して，

①より，$y\geqq 0$ かつ $y\leqq |x^2-5|-4$，または $y\leqq 0$ かつ $y\geqq |x^2-5|-4$

ここで，境界線 $y=|x^2-5|-4$ は，

$$y=-(x^2-5)-4=-x^2+1\quad(-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5})$$
$$y=(x^2-5)-4=x^2-9\quad(x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x)$$

これより，①をまとめると，

(i) $y\geqq 0$ のとき

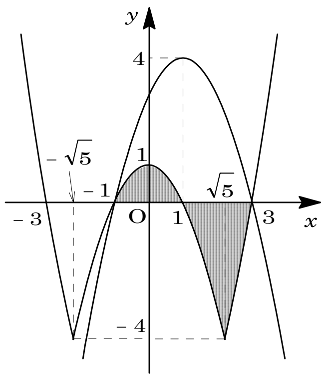
$$y\leqq -x^2+1\quad(-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5})$$
$$y\leqq x^2-9\quad(x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x)$$

(ii) $y\leqq 0$ のとき

$$y\geqq -x^2+1\quad(-\sqrt{5}\leqq x\leqq\sqrt{5})$$
$$y\geqq x^2-9\quad(x\leqq-\sqrt{5},\ \sqrt{5}\leqq x)$$

また，②より，$y\leqq -x^2+2x+3=-(x-1)^2+4$

以上より，不等式①②を満たす領域 D は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2) D の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{1}(-x^2+1)\,dx+\int_{1}^{\sqrt{5}}-(-x^2+1)\,dx+\int_{\sqrt{5}}^{3}-(x^2-9)\,dx$$
$$=\Big[-\frac{x^3}{3}+x\Big]_{-1}^{1}+\Big[\frac{x^3}{3}-x\Big]_{1}^{\sqrt{5}}+\Big[-\frac{x^3}{3}+9x\Big]_{\sqrt{5}}^{3}$$
$$=-\frac{2}{3}+2+\frac{1}{3}(5\sqrt{5}-1)-(\sqrt{5}-1)-\frac{1}{3}(27-5\sqrt{5})+9(3-\sqrt{5})$$
$$=20-\frac{20}{3}\sqrt{5}$$

コメント

不等式と領域に関する基本問題です。手堅くゲットしたい１題です。

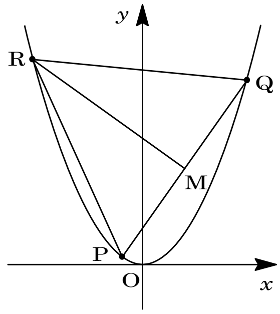
問　題

xy 平面の放物線 $y=x^2$ 上の 3 点 P, Q, R が次の条件を満たしている。

△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形であり，点 P，Q を通る直線の傾きは $\sqrt{2}$ である。

このとき, a の値を求めよ。 [2004]

解答例



$p<q$ として，$\mathrm{P}(p,\ p^2)$，$\mathrm{Q}(q,\ q^2)$ とおく。

直線 PQ の傾きが $\sqrt{2}$ より，

$$\frac{q^2-p^2}{q-p}=\sqrt{2}\,,\ q+p=\sqrt{2}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\mathrm{PQ}=a$ より，$(q-p)^2+(q^2-p^2)^2=a^2$

$$(q-p)^2+(q-p)^2(q+p)^2=a^2$$

①より，$3(q-p)^2=a^2$，$q-p=\dfrac{a}{\sqrt{3}}\ \cdots\cdots\cdots ②$

さて，線分 PQ の中点を M とすると，$\mathrm{M}\left(\dfrac{p+q}{2},\ \dfrac{p^2+q^2}{2}\right)$

①②より，$q=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}+\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$，$p=\dfrac{1}{2}\left(\sqrt{2}-\dfrac{a}{\sqrt{3}}\right)$なので,

$$p^2+q^2=(p+q)^2-2pq=2-2\cdot\frac{1}{4}\left(2-\frac{a^2}{3}\right)=1+\frac{a^2}{6}$$

よって，$\mathrm{M}\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{a^2}{12}\right)$である。

ここで，△PQR は 1 辺の長さ a の正三角形より，$\mathrm{RM}\perp\mathrm{PQ}$，$\mathrm{RM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a$

さて，直線 PQ の方向ベクトルは，その成分を$(1,\ \sqrt{2})$とすることができるので，それに垂直な単位ベクトルは$\vec{e}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$である。以下，複号同順として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\vec{e}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2},\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}a\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}(-\sqrt{2},\ 1)$$

$$=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}\right)$$

R は放物線 $y=x^2$ 上にあるので,

$$\frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\mp\frac{\sqrt{2}}{2}a\right)^2,\ \frac{1}{2}+\frac{a^2}{12}\pm\frac{a}{2}=\frac{1}{2}(1\mp 2a+a^2)$$

まとめると，$5a^2\mp 18a=0$ となり, $a>0$ から $a=\dfrac{18}{5}$ である。

コメント

まず，複素数平面上での回転を用いて考えました。しかし，計算がかなり複雑になってしまい，方向転換をした結果が上の解です。

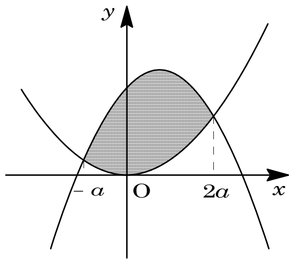
問　題

a を正の実数とする。次の 2 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域をDとする。

$$y \geqq x^2,\ \ y \leqq -2x^2+3ax+6a^2$$

領域Dにおける$x+y$の最大値，最小値を求めよ。　[2004]

解答例



領域D：$y \geqq x^2$，$y \leqq -2x^2+3ax+6a^2$の境界を表す 2 つの放物線$y=x^2$……①，$y=-2x^2+3ax+6a^2$……②の交点は$x^2=-2x^2+3ax+6a^2$より，$x^2-ax-2a^2=0$

$$(x+a)(x-2a)=0,\ \ x=-a,\ 2a$$

また，$x+y=k$とおくと，$y=-x+k$……③となり，傾き-1の直線を表す。

まず，直線③が領域 D と共有点をもつkの最大値を求める。放物線②の接線の傾きが-1となるのは，②より$y'=-4x+3a$なので，

$$-4x+3a=-1,\ \ x=\frac{3a+1}{4}$$

(i)　$\dfrac{3a+1}{4} \leqq 2a\ \left(a \geqq \dfrac{1}{5}\right)$のとき

接点$\left(\dfrac{3a+1}{4},\ -2\left(\dfrac{3a+1}{4}\right)^2+3a\cdot\dfrac{3a+1}{4}+6a^2\right)$で$k$は最大となり，最大値は，

$$k=\frac{3a+1}{4}-2\left(\frac{3a+1}{4}\right)^2+3a\cdot\frac{3a+1}{4}+6a^2=\frac{57}{8}a^2+\frac{3}{4}a+\frac{1}{8}$$

(ii)　$\dfrac{3a+1}{4} > 2a\ \left(0 < a < \dfrac{1}{5}\right)$のとき

①と②の交点$(2a,\ 4a^2)$でkは最大となり，最大値は$k=2a+4a^2$である。

次に，直線③が領域Dと共有点をもつkの最小値を求める。放物線①の接線の傾きが-1となるのは，①より$y'=2x$なので，

$$2x=-1,\ \ x=-\frac{1}{2}$$

(iii)　$-a \leqq -\dfrac{1}{2}\ \left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right)$のとき

接点$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$で$k$は最小となり，最小値は$k=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=-\dfrac{1}{4}$である。

(iv)　$-a > -\dfrac{1}{2}\ \left(0 < a < \dfrac{1}{2}\right)$のとき

①と②の交点$(-a,\ a^2)$でkは最小となり，最小値は$k=-a+a^2$である。

以上より，最大値 M，最小値 m は，$0 < a < \dfrac{1}{5}$のとき$M=2a+4a^2$，$m=-a+a^2$，

また $\frac{1}{5} \leqq a < \frac{1}{2}$ のとき $M = \frac{57}{8}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{1}{8}$，$m = -a + a^2$，さらに $a \geqq \frac{1}{2}$ のとき $M = \frac{57}{8}a^2 + \frac{3}{4}a + \frac{1}{8}$，$m = -\frac{1}{4}$ である。

コメント

最大値，最小値をとる $(x,\ y)$ が接点か交点かで場合分けをします。注意力と計算力が要求されます。

問　題

a, b を実数とする。次の 4 つの不等式を同時に満たす点$(x,\ y)$全体からなる領域をDとする。

$$x+3y \geqq a,\ 3x+y \geqq b,\ x \geqq 0,\ y \geqq 0$$

領域Dにおける$x+y$の最小値を求めよ。　[2003]

解答例

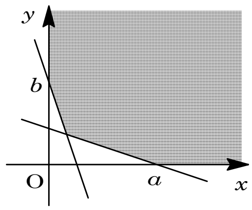
領域$D: x+3y \geqq a$, $3x+y \geqq b$, $x \geqq 0$, $y \geqq 0$に対して，境界$x+3y=a$……①，$3x+y=b$……②とおく。

すると，①と両軸との交点は$(a,\ 0)$と$\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$，②と両軸との交点は$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$と$(0,\ b)$である。

(i)　$a \geqq 0, b \geqq 0$, $a \geqq \dfrac{b}{3}$, $b \geqq \dfrac{a}{3}$ $\left(\dfrac{a}{3} \leqq b \leqq 3a\right)$のとき

①と②の交点は，$x+3(b-3x)=a$，$x=\dfrac{-a+3b}{8}$

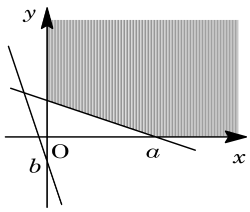
$$y=b-3\cdot\frac{-a+3b}{8}=\frac{3a-b}{8}$$



右図より，この交点$\left(\dfrac{-a+3b}{8},\ \dfrac{3a-b}{8}\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{-a+3b}{8}+\frac{3a-b}{8}=\frac{a+b}{4}$$

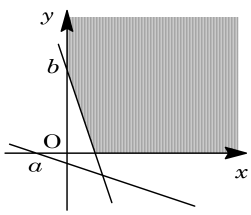
(ii)　$a \geqq 0$, $a \geqq \dfrac{b}{3}$, $\dfrac{a}{3} \geqq b$ $\left(a \geqq 0,\ b \leqq \dfrac{a}{3}\right)$のとき



右図より，点$\left(0,\ \dfrac{a}{3}\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{a}{3}$$

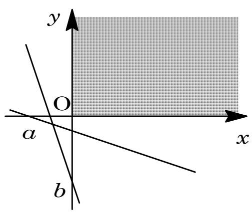
(iii)　$b \geqq 0$, $\dfrac{b}{3} \geqq a$, $b \geqq \dfrac{a}{3}$ $(b \geqq 0,\ b \geqq 3a)$のとき



右図より，点$\left(\dfrac{b}{3},\ 0\right)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=\frac{b}{3}$$

(iv)　$a \leqq 0, b \leqq 0$ のとき



右図より，原点$(0,\ 0)$において，$x+y$は最小となり，その最小値は，

$$x+y=0$$

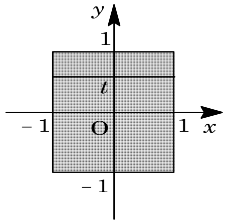
コメント

場合分けの基準を確定するのに苦労します。2 つの境界線の交点の存在する位置だけでなく，それぞれの x 切片，y 切片の関係も考慮しなくてはいけません。なお，このように複雑になったときには，場合分けについて，ab 平面でチェックすると，ミスを防ぐことができます。

問　題

xy 平面内の領域 $-1\leqq x\leqq 1$，$-1\leqq y\leqq 1$ において，$1-ax-by-axy$ の最小値が正となるような定数 a, b を座標とする点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。 [2000]

解答例



$P=1-ax-by-axy$ とおき，まず y の値を固定し，$y=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ において, P の最小値を求める。

$$P=1-ax-bt-axt=-a(1+t)x+1-bt$$

$-1\leqq t\leqq 1$ のとき，$1+t\geqq 0$ となるので,

(i)　$-a\geqq 0$　$(a\leqq 0)$ のとき，$x=-1$ で P は最小となる。

このとき，$P=a(1+t)+1-bt=(a-b)t+a+1$

(i-i)　$a-b\geqq 0$　$(b\leqq a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=-(a-b)+a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i-ii)　$a-b<0$　$(b>a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=(a-b)+a+1=2a-b+1$ をとるので，条件より，$2a-b+1>0$

(ii)　$-a<0$　$(a>0)$ のとき，$x=1$ で P は最小となる。

このとき，$P=-a(1+t)+1-bt=-(a+b)t-a+1$

(ii-i)　$a+b\geqq 0$　$(b\geqq -a)$ のとき，$t=1$ で最小値 $P=-(a+b)-a+1=-2a-b+1$ をとるので，条件より，$-2a-b+1>0$

(ii-ii)　$a+b<0$　$(b<-a)$ のとき，$t=-1$ で最小値 $P=(a+b)-a+1=b+1$ をとるので，条件より，$b+1>0$

(i)(ii)をまとめると,

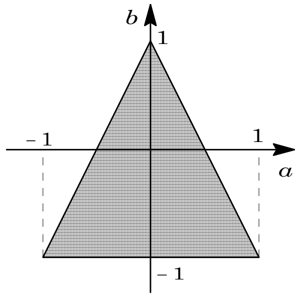
$a\leqq 0$ かつ $b\leqq a$ のとき，$b>-1$

$a\leqq 0$ かつ $b>a$ のとき，$b<2a+1$

$a>0$ かつ $b\geqq -a$ のとき，$b<-2a+1$

$a>0$ かつ $b<-a$ のとき，$b>-1$

この条件を満たす点 $(a,\ b)$ の範囲は右図の網点部になる。ただし，境界は含まない。



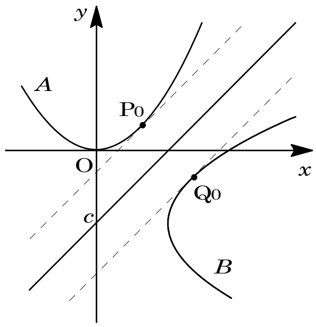
コメント

今年もまた出ましたという感のある 1 文字固定の最大・最小問題です。しかし，対象が 1 次関数のため，そんなに複雑ではありません。

問　題

c を $c>\dfrac{1}{4}$ を満たす実数とする。xy 平面上の放物線 $y=x^2$ を A とし，直線 $y=x-c$ に関して A と対称な放物線を B とする。点 P が放物線 A 上を動き，点 Q が放物線 B 上を動くとき，線分 PQ の長さの最小値を c を用いて表せ。　[1999]

解答例



放物線 A と，A と線対称な放物線 B に，対称軸 $y=x-c$ に平行な直線を引き，放物線 A との接点を P_0，放物線 B との接点を Q_0 としたとき，線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$ は対称軸と直交する。

すると，線分 PQ の長さの最小値は線分 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$ の長さとなる。

ここで，放物線 $A : y=x^2$ ……①と対称軸に平行な直線 $y=x+k$ ……②が接するとき，①②より，

$$x^2-x-k=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

判別式 $D=1+4k=0$ より，$k=-\dfrac{1}{4}$

このとき，接点は③から $x=\dfrac{1}{2}$，①から $y=\dfrac{1}{4}$

よって，$\mathrm{P}_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$

点 P_0 と点 Q_0 は対称軸 $y=x-c$ に関して対称なので，線分 PQ の長さの最小値 $\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0$ は点 $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ と対称軸 $x-y-c=0$ との距離の 2 倍となるので，

$$\mathrm{P}_0\mathrm{Q}_0=2\cdot\frac{\left|\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{4}-c\right|}{\sqrt{1+1}}=\sqrt{2}\left|\frac{1}{4}-c\right|=\sqrt{2}\left(c-\frac{1}{4}\right)$$

コメント

本問は求値問題ですので，直観に依存した解にしました。

問　題

$a,\ b$ は実数で，$b\neq 0$ とする。xy 平面に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および 2 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(a,\ b)$ をとる。

(1)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ が鋭角三角形となるための $a,\ b$ の条件を不等式で表し，点 $(a,\ b)$ の範囲を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$m,\ n$ を整数とする。$a,\ b$ が(1)で求めた条件をみたすとき，不等式

$$(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2\geqq 0$$

が成り立つことを示せ。　[1998]

解答例

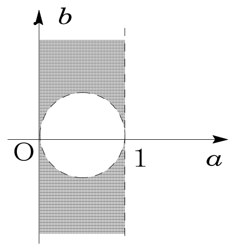
(1)　$b\neq 0$ より，3 点 O, P, Q を結ぶと，三角形ができる。

$\angle\mathrm{QOP}<90^\circ$ より $a>0$，$\angle\mathrm{QPO}<90^\circ$ より $a<1$

$\angle\mathrm{OQP}<90^\circ$ より，Q は OP を直径とする円の外部にある。

すなわち，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2>\dfrac{1}{4}$

以上より，$0<a<1$，$\left(a-\dfrac{1}{2}\right)^2+b^2>\dfrac{1}{4}$



（境界は含まない）

(2)　$f(m,\ n)=(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2$ とおく。

$m=k$（k は整数）と固定して考えると，

$$f(k,\ n)=(k+na)^2-(k+na)+n^2b^2=\left(na+k-\frac{1}{2}\right)^2+(nb)^2-\frac{1}{4}$$

(i)　$n\neq 0$ のとき

$na=a'$，$nb=b'$ とおくと，$f(k,\ n)=\left(a'+k-\dfrac{1}{2}\right)^2+b'^2-\dfrac{1}{4}$

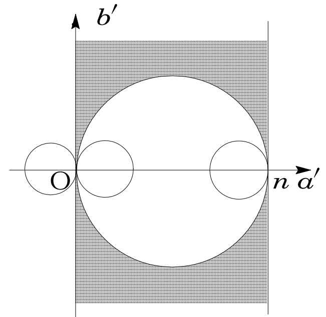
(1)より $0<\dfrac{a'}{n}<1$，$\left(\dfrac{a'}{n}-\dfrac{1}{2}\right)^2+\left(\dfrac{b'}{n}\right)^2>\dfrac{1}{4}$

$$0<|a'|<|n|,\ \left(a'-\frac{1}{2}n\right)^2+b'^2>\frac{1}{4}n^2\cdots\cdots(*)$$

$|n|\geqq 1$ で，k が整数より，中心 $\left(-k+\dfrac{1}{2},\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}$ の円と，中心 $\left(\dfrac{1}{2}n,\ 0\right)$，半径 $\dfrac{1}{2}|n|$ の円が異なる 2 点で交わることはない。

(*)の条件のもとで

$f(k,\ n)>0$，すなわち $f(m,\ n)>0$



（$n>0$ のとき）

(ii)　$n=0$ のとき

$$f(m,\ 0)=m^2-m=\left(m-\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

m は整数より，$f(m,\ n)\geqq 0$（等号は$m=0,\ 1$のとき成立）

(i)(ii)より，$f(m,\ n)=(m+na)^2-(m+na)+n^2b^2\geqq 0$

コメント

(1)は基本的ですが，(2)は $m,\ n$ と 2 つの文字が入っているためにかなり難しめです。上の解法は，$f(m,\ n)$ の形と(1)の円の式との類似性に注目したものです。なお，昨年，東京工大で似た問題が出ています。

問　題

O を原点とする座標平面上に点 $A(-3,\ 0)$ をとり，$0° < \theta < 120°$ の範囲にある θ に対して，次の条件(i), (ii)を満たす 2 点 B, C を考える。

(i)　B は $y > 0$ の部分にあり，$OB = 2$ かつ $\angle AOB = 180° - \theta$ である。

(ii)　C は $y < 0$ の部分にあり，$OC = 1$ かつ $\angle BOC = 120°$ である。ただし $\triangle ABC$ は O を含むものとする。

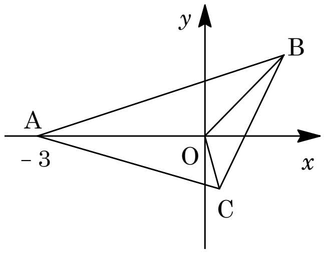
以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積が等しいとき，θ の値を求めよ。

(2)　θ を $0° < \theta < 120°$ の範囲で動かすとき，$\triangle OAB$ と $\triangle OAC$ の面積の和の最大値と，そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$0° < \theta < 120°$ で，条件(i)より，B は $y > 0$ の部分にあり，$OB = 2$ かつ $\angle AOB = 180° - \theta$ から，$B(2\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ となる。



また，条件(ii)より，C は $y < 0$ の部分にあり，$OC = 1$ かつ $\angle BOC = 120°$，しかも $\triangle ABC$ は O を含むので，C は直線 OB に関して A と反対側にある。これから，$C(\cos(\theta - 120°),\ \sin(\theta - 120°))$ となる。

さて，$A(-3,\ 0)$ から，

$$\triangle OAB = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot 2\sin\theta = 3\sin\theta$$

$$\triangle OAC = \frac{1}{2}\cdot 3\cdot\left|\sin(\theta - 120°)\right| = -\frac{3}{2}\sin(\theta - 120°)$$

条件より，$\triangle OAB = \triangle OAC$ なので，$2\sin\theta = -\sin(\theta - 120°)$

$$2\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\theta,\quad 3\sin\theta = \sqrt{3}\cos\theta$$

よって，$\tan\theta = \dfrac{\sqrt{3}}{3}$ となり，$0° < \theta < 120°$ から $\theta = 30°$ である。

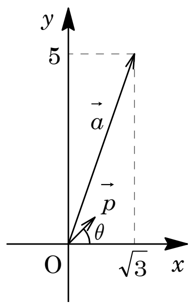
(2)　$S = \triangle OAB + \triangle OAC$ とおくと，

$$S = 3\sin\theta - \frac{3}{2}\sin(\theta - 120°) = \frac{15}{4}\sin\theta + \frac{3\sqrt{3}}{4}\cos\theta$$

$$= \frac{3}{4}(\sqrt{3}\cos\theta + 5\sin\theta)$$

ここで，$\vec{a} = (\sqrt{3},\ 5)$，$\vec{p} = (\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

$$S = \frac{3}{4}\vec{a}\cdot\vec{p} \leqq \frac{3}{4}|\vec{a}||\vec{p}| = \frac{3}{4}\sqrt{3 + 5^2}\cdot 1 = \frac{3}{4}\cdot 2\sqrt{7} = \frac{3}{2}\sqrt{7}$$



等号が成立するのは，$\vec{a}$ と $\vec{p}$ が同じ向きのときである。

よって, S は最大値 $\frac{3}{2}\sqrt{7}$ をとり，このとき $\sin\theta=\frac{5}{2\sqrt{7}}=\frac{5\sqrt{7}}{14}$ である。

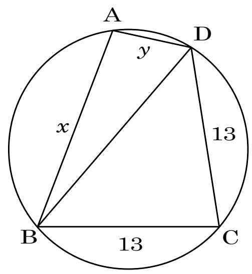
コメント

△ABC が O を含むという条件のため，場合分けが回避できました。なお，(2)は合成でもできますが，内積利用の方が簡明です。

問　題

四角形 ABCD が，半径 $\dfrac{65}{8}$ の円に内接している。この四角形の周の長さが 44 で，辺 BC と辺 CD の長さがいずれも 13 であるとき，残りの 2 辺 AB と DA の長さを求めよ。　[2006]

解答例



$\triangle$BCD において，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{BD}}{\sin C} = 2\times\frac{65}{8},\ \ \mathrm{BD} = \frac{65}{4}\sin C \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，余弦定理より，

$$\begin{aligned}\mathrm{BD}^2 &= 13^2 + 13^2 - 2\cdot 13^2\cos C\\ &= 2\cdot 13^2(1-\cos C)\cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①②より，$\dfrac{65^2}{4^2}\sin^2 C = 2\cdot 13^2(1-\cos C)$

$$5^2\cdot 13^2(1+\cos C)(1-\cos C) = 2\cdot 13^2\cdot 4^2(1-\cos C)$$

$1-\cos C > 0$ より，$25(1+\cos C) = 32$，$\cos C = \dfrac{7}{25}\cdots\cdots\cdots③$

②より，$\mathrm{BD}^2 = 2\times 13^2\times\dfrac{18}{25}$，$\mathrm{BD} = \dfrac{6\times 13}{5} = \dfrac{78}{5}$

ここで，$\mathrm{AB} = x$，$\mathrm{DA} = y$ とおくと，条件より，

$$x + y = 44 - 13\times 2,\ \ x + y = 18\cdots\cdots\cdots④$$

$\triangle$ABD に余弦定理を適用して，$\dfrac{78^2}{25} = x^2 + y^2 - 2xy\cos(180^\circ - C)$

$$\frac{6^2\times 13^2}{25} = (x+y)^2 - 2xy + 2xy\cos C$$

③より，$\dfrac{6^2\times 13^2}{25} = (x+y)^2 - \dfrac{36}{25}xy$，$6^2\times 13^2 = 25(x+y)^2 - 36xy\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$36xy = -6^2\times 13^2 + 5^2\times 18^2$，$36xy = (78+90)(-78+90)$

$$xy = \frac{168\times 12}{36} = 56\cdots\cdots\cdots⑥$$

④⑥より，x, y は方程式 $t^2 - 18t + 56 = 0$ の 2 つの解となるので，

$$(t-4)(t-14) = 0,\ \ t = 4,\ 14$$

よって，$(\mathrm{AB},\ \mathrm{DA}) = (4,\ 14),\ (14,\ 4)$

コメント

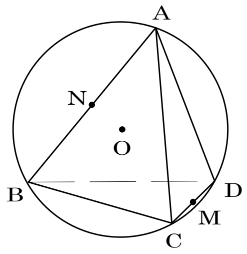
センター試験でよく見かける構図の問題ですが，いろいろな考え方が浮かび，方針の決めにくい良問です。また，計算にも工夫が必要です。

問　題

半径 r の球面上に 4 点 A, B, C, D がある。四面体 ABCD の各辺の長さは，$AB=\sqrt{3}$，$AC=AD=BC=BD=CD=2$ を満たしている。このとき r の値を求めよ。

[2001]

解答例



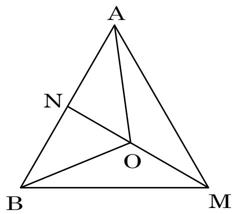
球面の中心を O, CD の中点を M, AB の中点を N とすると，対称性から，中心 O は△ABM 上にある。

まず，$AM=BM=2\sin 60^\circ=\sqrt{3}$ より，△ABM は正三角形となる。

$$OA=OB=r,\ \ OM=\sqrt{OC^2-CM^2}=\sqrt{r^2-1}$$

また，$MN=\sqrt{3}\sin 60^\circ=\dfrac{3}{2}$ より，

$$ON=\frac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}$$



△ONA に対して，$r^2=\left(\dfrac{3}{2}-\sqrt{r^2-1}\right)^2+\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)^2$

$$r^2=\frac{9}{4}-3\sqrt{r^2-1}+r^2-1+\frac{3}{4}$$

よって，$3\sqrt{r^2-1}=2$ より，$r=\dfrac{\sqrt{13}}{3}$

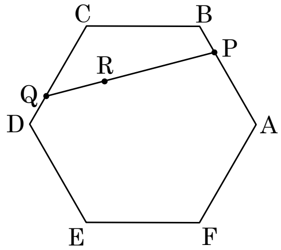
コメント

三角比の空間図形への応用問題です。正四面体ではないものの，対称性から，どの切断面を考えればよいのかは，自然に決まります。

問　題

1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF が与えられている。点 P が辺 AB 上を，点 Q が辺 CD 上をそれぞれ独立に動くとき，線分 PQ を $2:1$ に内分する点 R が通りうる範囲の面積を求めよ。　　　　[2017]

解答例



1 辺の長さが 1 の正六角形 ABCDEF の辺 AB 上を点 P，辺 CD 上を点 Q が独立に動くとき，$0\leqq p\leqq 1$，$0\leqq q\leqq 1$ として，$\mathrm{AP}:\mathrm{PB}=p:1-p$，$\mathrm{DQ}:\mathrm{QC}=q:1-q$ とおく。

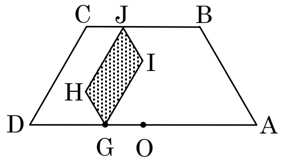
さて，AD の中点を O とし，$\mathrm{PR}:\mathrm{RQ}=2:1$ から，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OR}}&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\\&=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\overrightarrow{\mathrm{AB}})+\frac{2}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OD}}+q\overrightarrow{\mathrm{DC}})\\&=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}+\frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}\end{aligned}$$

ここで，AD を $2:1$ に内分する点を G とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}+\frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}},\quad \overrightarrow{\mathrm{GR}}=\frac{1}{3}p\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}q\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

そこで，$0\leqq\frac{1}{3}p\leqq\frac{1}{3}$，$0\leqq\frac{2}{3}q\leqq\frac{2}{3}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{GI}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおくと，点 R は右図の平行四辺形 GIJH の内部または辺上を動く。



$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\frac{1}{3}$，$|\overrightarrow{\mathrm{GI}}|=\frac{2}{3}$，$\angle\mathrm{HGI}=\frac{\pi}{3}$ より，その面積は，

$$2\Big(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}\sin\frac{\pi}{3}\Big)=\frac{\sqrt{3}}{9}$$

コメント

平面ベクトルと領域の問題です。成分表示を利用するかどうかで，2 つの解法があります。この問題ではどちらでも可能ですが，前者は後者に比べ，記述量がかなり増えます。

問　題

xyz 空間に 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$，$C(0,\ \sqrt{3},\ 0)$ をとる。$\triangle ABC$ を 1 つの面とし，$z \geqq 0$ の部分に含まれる正四面体 ABCD をとる。さらに $\triangle ABD$ を 1 つの面とし，点 C と異なる点 E をもう 1 つの頂点とする正四面体 ABDE をとる。

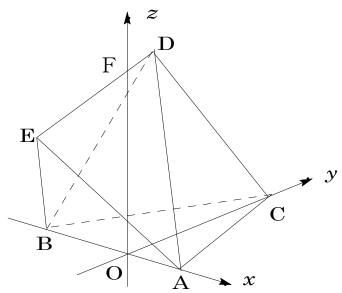
(1) 点 E の座標を求めよ。

(2) 正四面体 ABDE の $y \leqq 0$ の部分の体積を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $\triangle ABC$ の重心 $G_1\left(0,\ \frac{1}{3}\sqrt{3},\ 0\right)$

$$DG_1 = \sqrt{OD^2 - OG_1{}^2} = \sqrt{3 - \frac{1}{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{6}$$



よって，$D\left(0,\ \frac{1}{3}\sqrt{3},\ \frac{2}{3}\sqrt{6}\right)$ となる。

すると，$\triangle ABD$ の重心 $G_2\left(0,\ \frac{1}{9}\sqrt{3},\ \frac{2}{9}\sqrt{6}\right)$

$\overrightarrow{G_2E} = -\overrightarrow{G_2C}$ から，

$$\overrightarrow{OE} = \overrightarrow{OG_2} - \overrightarrow{G_2C}$$
$$= \left(0,\ \frac{1}{9}\sqrt{3},\ \frac{2}{9}\sqrt{6}\right) - \left(0,\ \frac{8}{9}\sqrt{3},\ -\frac{2}{9}\sqrt{6}\right) = \left(0,\ -\frac{7}{9}\sqrt{3},\ \frac{4}{9}\sqrt{6}\right)$$

以上より，$E\left(0,\ -\frac{7}{9}\sqrt{3},\ \frac{4}{9}\sqrt{6}\right)$

(2) 線分 DE と z 軸との交点を F とすると，

$$EF : FD = \frac{7}{9}\sqrt{3} : \frac{1}{3}\sqrt{3} = 7 : 3$$

正四面体 ABDE の体積を V_0 とすると，

$$V_0 = \frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\cdot \sin 60^\circ\right)\cdot\frac{2}{3}\sqrt{6} = \frac{2}{3}\sqrt{2}$$

求める正四面体 ABDE の $y \leqq 0$ の部分の体積 V は，

$$V = \frac{7}{10}V_0 = \frac{7}{15}\sqrt{2}$$

コメント

合同な正四面体を 2 つ合わせた立体についての設問です。(1)の E の座標を求めるにはいろいろな方法がありますが，$\triangle AED$ の重心に注目するのが，計算量が一番少なくてすむでしょう。(2)も体積ということで一瞬構えてしまいますが，内容的には簡単です。なお，昨年，岡山大で類題が出ています。

問　題

$p=2+\sqrt{5}$ とおき，自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ と定める。

以下の問いに答えよ。ただし設問(1)は結論のみを書けばよい。

(1)　a_1，a_2 の値を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ とする。積 a_1a_n を，a_{n+1} と a_{n-1} を用いて表せ。

(3)　a_n は自然数であることを示せ。

(4)　a_{n+1} と a_n の最大公約数を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$p=2+\sqrt{5}$，$a_n=p^n+\left(-\dfrac{1}{p}\right)^n$ に対し，$q=-\dfrac{1}{p}=-\dfrac{1}{2+\sqrt{5}}=2-\sqrt{5}$ とおくと，

$$a_n=p^n+q^n=(2+\sqrt{5})^n+(2-\sqrt{5})^n$$

これより，$a_1=(2+\sqrt{5})+(2-\sqrt{5})=4$，$a_2=(2+\sqrt{5})^2+(2-\sqrt{5})^2=18$ となる。

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_1a_n=(p+q)(p^n+q^n)=p^{n+1}+q^{n+1}+pq(p^{n-1}+q^{n-1})$

すると，$pq=-1$ より，$a_1a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$

(3)　(2)より，$4a_n=a_{n+1}-a_{n-1}$ となり，$a_{n+1}=4a_n+a_{n-1}\ (n\geqq 2)$ ………①

ここで，a_n は自然数であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1,\ 2$ のとき　(1)より a_n は自然数である。

(ii)　$n=k-1,\ k\ (k\geqq 2)$ のとき　a_{k-1}，a_k がともに自然数であると仮定する。

①より，$a_{k+1}=4a_k+a_{k-1}$ となるので，a_{k+1} も自然数である。

(i)(ii)より，a_n は自然数である。

(4)　まず，(1)より，a_2 と a_1 の最大公約数は 2 である。

そして，a_1 と a_2 がともに偶数のとき，①から，帰納的に，すべての a_n は偶数であることがわかる。

そこで，$a_n=2b_n$ とおくと，すべての b_n は自然数となり，$2b_1=4$，$2b_2=18$，$2b_{n+1}=4\cdot 2b_n+2b_{n-1}$ から，

$$b_1=2,\ b_2=9,\ b_{n+1}=4b_n+b_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \text{………②}$$

さて，b_{n+1} と b_n が互いに素でないと仮定すると，2 以上の自然数 g を用いて，

$$b_{n+1}=gb_{n+1}',\ b_n=gb_n'\ \ (b_{n+1}',\ b_n'\ \text{は自然数})$$

②より，$b_{n-1}=b_{n+1}-4b_n=g(b_{n+1}'-4b_n')$ となり，b_{n-1} も約数 g をもつ。

同様に繰り返すと，b_2 と b_1 はともに 2 以上の約数 g をもつことになるが，$b_1=2$，$b_2=9$ より不適である。よって，b_{n+1} と b_n は互いに素である。

以上より，a_{n+1} と a_n の最大公約数は 2 である。

コメント

a_n の式から隣接 3 項間型漸化式を導き，この式と最大公約数を絡めた頻出問題です。たとえば，昨年は神戸大・理で類題が出ています。

問　題

以下の問いに答えよ。ただし，(1)については，結論のみを書けばよい。

(1)　n を正の整数とし，3^n を 10 で割った余りを a_n とする。a_n を求めよ。

(2)　n を正の整数とし，3^n を 4 で割った余りを b_n とする。b_n を求めよ。

(3)　数列 $\{x_n\}$ を次のように定める。

$$x_1 = 1,\ x_{n+1} = 3^{x_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

x_{10} を 10 で割った余りを求めよ。　[2016]

解答例

(1)　3^n を 10 で割った余りを a_n とすると，数列 $\{a_n\}$ は，3, 9, 7, 1, 3, 9, 7, 1, 3, ……

すると，$\{a_n\}$ は 3, 9, 7, 1 を繰り返す周期 4 の周期数列となるので，

$a_n = 3$　(n を 4 で割った余りが 1 のとき)

$a_n = 9$　(n を 4 で割った余りが 2 のとき)

$a_n = 7$　(n を 4 で割った余りが 3 のとき)

$a_n = 1$　(n を 4 で割った余りが 0 のとき)

(2)　3^n を 4 で割った余りを b_n とすると，数列 $\{b_n\}$ は，3, 1, 3, 1, 3, 1, ……

すると，$\{b_n\}$ は 3, 1 を繰り返す周期 2 の周期数列と予測できる。

そこで，3^{n+2} と 3^n の関係を調べると，

$$3^{n+2} = 9\cdot 3^n = (4\cdot 2+1)\cdot 3^n = 4\cdot 2\cdot 3^n + 3^n \cdots\cdots\cdots(*)$$

(*)より，$4\cdot 2\cdot 3^n$ は 4 の倍数であるので，3^{n+2} を 4 で割った余りと 3^n を 4 で割った余りは等しい。これより，$\{b_n\}$ は周期 2 の周期数列となり，

$b_n = 3$　(n を 2 で割った余りが 1 のとき)

$b_n = 1$　(n を 2 で割った余りが 0 のとき)

(3)　$x_1 = 1$，$x_{n+1} = 3^{x_n}$ で定義された数列 $\{x_n\}$ に対して，

$$x_2 = 3^{x_1} = 3^1 = 3,\ x_3 = 3^{x_2} = 3^3 = 27,\ x_4 = 3^{x_3} = 3^{27},\ \cdots\cdots$$

すると，3 の奇数乗は奇数より，帰納的に x_n は奇数である。

よって，(2)の結論から，3^{x_n} を 4 で割った余りは 3 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n ($n \geqq 2$) を 4 で割った余りは 3 である。

さらに，この結果を(1)の結論に適用すると，3^{x_n} を 10 で割った余りは 7 である。すなわち $x_{n+1} = 3^{x_n}$ から，x_n ($n \geqq 3$) を 10 で割った余りは 7 である。

したがって，x_{10} を 10 で割った余りは 7 である。

コメント

整数と数列の融合問題です。一見，関連のわからない(1)と(2)の結果が，(3)でうまく利用できる誘導となっています。

問　題

r を 0 以上の整数とし，数列$\{a_n\}$を次のように定める。

$$a_1=r,\ a_2=r+1,\ a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

また，素数 p を 1 つとり，a_n を p で割った余りを b_n とする。ただし，0 を p で割った余りは 0 とする。

(1) 自然数 n に対し，b_{n+2} は $b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致することを示せ。

(2) $r=2$，$p=17$ の場合に，10 以下のすべての自然数 n に対して，b_n を求めよ。

(3) ある 2 つの相異なる自然数 $n,\ m$ に対して，

$$b_{n+1}=b_{m+1}>0,\ b_{n+2}=b_{m+2}$$

が成り立ったとする。このとき，$b_n=b_m$ が成り立つことを示せ。　[2014]

解答例

(1) b_n は a_n を素数 p で割った余りなので，商を q_n とすると $a_n=p\cdot q_n+b_n$ となり，

$$a_{n+1}(a_n+1)=(p\cdot q_{n+1}+b_{n+1})(p\cdot q_n+b_n+1)$$
$$=p(p\cdot q_nq_{n+1}+q_{n+1}b_n+q_{n+1}+q_nb_{n+1})+b_{n+1}(b_n+1)$$

すると，条件から，$a_{n+2}=a_{n+1}(a_n+1)$ なので，a_{n+2} を p で割った余り b_{n+2} は，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りと一致する。

(2) $r=2$，$p=17$ のとき，$a_1=r=2$ より $b_1=2$，$a_2=r+1=3$ より $b_2=3$

以下，(1)の結論から，b_3 は $b_2(b_1+1)=9$ を 17 で割った余りより $b_3=9$ である。

b_4 は $b_3(b_2+1)=36$ を 17 で割った余りより $b_4=2$ である。

b_5 は $b_4(b_3+1)=20$ を 17 で割った余りより $b_5=3$ である。

すると，$b_4=b_1$，$b_5=b_2$ から，帰納的に，$b_6=b_3=9$，$b_7=b_4=2$，$b_8=b_5=3$，$b_9=b_6=9$，$b_{10}=b_7=2$ となる。

(3) まず，$b_{n+2}=b_{m+2}$ より，$b_{n+1}(b_n+1)$ を p で割った余りは，$b_{m+1}(b_m+1)$ を p で割った余りに等しい。すなわち，k を整数として，

$$b_{n+1}(b_n+1)-b_{m+1}(b_m+1)=pk$$

ここで，$b_{n+1}=b_{m+1}>0$ より，$b_{n+1}(b_n+1)-b_{n+1}(b_m+1)=pk$

$$b_{n+1}(b_n-b_m)=pk$$

$0<b_{n+1}<p$ より，b_{n+1} は p の倍数でないので，b_n-b_m が p の倍数となる。

すると，$0\leqq b_n<p$，$0\leqq b_m<p$ から，$-p<b_n-b_m<p$ となり，$b_n-b_m=0$ である。すなわち，$b_n=b_m$ が成り立つ。

コメント

漸化式と整数の融合問題で，周期数列が現れます。(1)の設問が，続く(2)，(3)への誘導として利いています。

問　題

実数 x の小数部分を，$0 \leqq y < 1$ かつ $x-y$ が整数となる実数 y のこととし，これを記号 $\langle x \rangle$ で表す。実数 a に対して，無限数列 $\{a_n\}$ の各項 a_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を次のように順次定める。

(i)　$a_1 = \langle a \rangle$

(ii)　$\begin{cases} a_n \neq 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = \left\langle \dfrac{1}{a_n} \right\rangle \\ a_n = 0 \text{ のとき，} a_{n+1} = 0 \end{cases}$

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，数列 $\{a_n\}$ を求めよ。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ となるような $\dfrac{1}{3}$ 以上の実数 a をすべて求めよ。

[2011]

解答例

(1)　$a=\sqrt{2}$ のとき，$1<\sqrt{2}<2$ より，$a_1 = \langle \sqrt{2} \rangle = \sqrt{2}-1$

$$a_2 = \left\langle \frac{1}{\sqrt{2}-1} \right\rangle = \langle \sqrt{2}+1 \rangle = \sqrt{2}-1$$

すると，帰納的に，$a_n = \sqrt{2}-1$ である。

(2)　任意の自然数 n に対して $a_n = a$ である条件を求めると，まず $n=1,\ 2$ に対して成立する必要があるので，

$$a_1 = \langle a \rangle = a \cdots\cdots\cdots ①,\quad a_2 = \left\langle \frac{1}{a} \right\rangle = a \cdots\cdots\cdots ②$$

逆に，①②が成立すると，任意の自然数 n に対して，帰納的に $a_n = a$ が成り立つ。

さて，$a \geqq \dfrac{1}{3}$ のとき，①より $\dfrac{1}{3} \leqq a < 1$ であり，$1 < \dfrac{1}{a} \leqq 3$ となる。

(i)　$1 < \dfrac{1}{a} < 2 \left(\dfrac{1}{2} < a < 1 \right)$ のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 1$ となるので，②より，$\dfrac{1}{a} - 1 = a$，$a^2 + a - 1 = 0$

$\dfrac{1}{2} < a < 1$ から，$a = \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

(ii)　$\dfrac{1}{a} = 2 \left(a = \dfrac{1}{2} \right)$ のとき　$a_2 = \langle 2 \rangle = 0$ となり，$a_n = a$ に反する。

(iii)　$2 < \dfrac{1}{a} < 3 \left(\dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2} \right)$ のとき

$a_2 = \left\langle \dfrac{1}{a} \right\rangle = \dfrac{1}{a} - 2$ となるので，②より，$\dfrac{1}{a} - 2 = a$，$a^2 + 2a - 1 = 0$

$\dfrac{1}{3} < a < \dfrac{1}{2}$ から，$a = -1 + \sqrt{2}$

(iv)　$\dfrac{1}{a} = 3 \left(a = \dfrac{1}{3} \right)$ のとき　$a_2 = \langle 3 \rangle = 0$ となり，$a_n = a$ に反する。

(i)～(iv)より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$，$-1+\sqrt{2}$

コメント

実数の小数部分が題材です。記号の意味を把握し，具体的な問題に適用する力が問われています。なお，(1)は(2)のヒントになっています。

問　題

p, q を 2 つの正の整数とする。整数 a, b, c で条件

$$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p\ ,\ b \leqq c \leqq a$$

を満たすものを考え，このような $a,\ b,\ c$ を $[a,\ b\,;c]$ の形に並べたものを $(p,\ q)$ パターンと呼ぶ。各 $(p,\ q)$ パターン $[a,\ b\,;c]$ に対して

$$w([a,\ b\,;c]) = p - q - (a+b)$$

とおく。

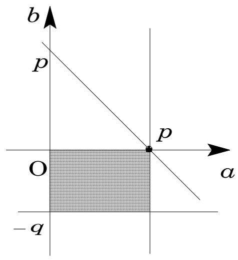
(1)　$(p,\ q)$ パターンのうち，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ となるものの個数を求めよ。また，$w([a,\ b\,;c]) = p$ となる $(p,\ q)$ パターンの個数を求めよ。

以下，$p = q$ の場合を考える。

(2)　s を p 以下の整数とする。$(p,\ p)$ パターンで $w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ となるものの個数を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　正の整数 $p,\ q$，整数 $a,\ b,\ c$ に対して，$-q \leqq b \leqq 0 \leqq a \leqq p$，$b \leqq c \leqq a$ とする。

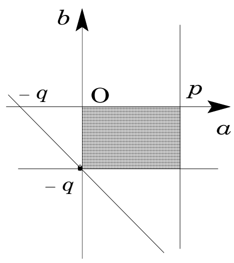


まず，$w([a,\ b\,;c]) = -q$ ……①であるとき，

$$p - q - (a+b) = -q\ ,\ a+b = p$$

よって，①を満たす a, b は，$(a,\ b) = (p,\ 0)$ のみである。

すると，$0 \leqq c \leqq p$ を満たす c は $p+1$ 個存在するので，①となるものの個数は $p+1$ である。



次に，$w([a,\ b\,;c]) = p$ ……②であるとき，

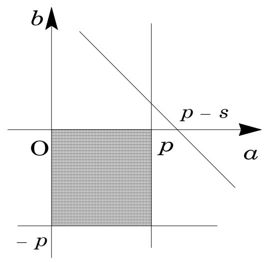
$$p - q - (a+b) = p\ ,\ a+b = -q$$

よって，②を満たす $a,\ b$ は，$(a,\ b) = (0,\ -q)$ のみである。

すると，$-q \leqq c \leqq 0$ を満たす c は $q+1$ 個存在するので，②となるものの個数は $q+1$ である。

(2)　s を $s \leqq p$ である整数とし，$q = p$ のときを考える。

$w([a,\ b\,;c]) = -p+s$ ……③に対して，



$$p - p - (a+b) = -p+s,\ a+b = p-s$$

(i)　$p-s > p\ (s<0)$ のとき

③を満たす $a,\ b$ は存在しないので，③となるものの個数は 0 である。

(ii)　$p-s \leqq p\ (s \geqq 0)$ のとき

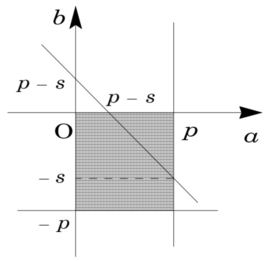
③を満たす $a,\ b$ は $(a,\ b) = (p-s,\ 0)$，$(p-s+1,\ -1)$，$(p-s+2,\ -2)$，…，

$(p,\ -s)$ である。

すると，$b \leqq c \leqq a$ を満たす c は，それぞれ $p-s+1$ 個，$p-s+3$ 個，$p-s+5$ 個，…，$p+s+1$ 個存在し，その和は，

$$\frac{(p-s+1)+(p+s+1)}{2}\times(s+1)=(p+1)(s+1)$$

よって，③となるものの個数は，$(p+1)(s+1)$ である。



コメント

東大らしい読解力が要求される問題です。上の解答例では，与えられた条件を満たす場合の数を，格子点の個数に対応させて考えています。なお，(2)の(i)のときは，当たり前すぎて，うっかり忘れてしまいそうです。

問　題

自然数 $m \geqq 2$ に対し，$m-1$ 個の二項係数 ${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ を考え，これらすべての最大公約数を d_m とする。すなわち d_m はこれらすべてを割り切る最大の自然数である。

(1)　m が素数ならば，$d_m = m$ であることを示せ。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，k に関する数学的帰納法よって示せ。　[2009]

解答例

(1)　$m \geqq 2$ のとき，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて自然数であり，$m \geqq 3$ では，$2 \leqq k \leqq m-1$ において，

$$ {}_m\mathrm{C}_k = \frac{m(m-1)(m-2)\cdots(m-k+1)}{k!} $$

ここで，m が素数のとき，m は $k!\,(k=2,\ 3,\ \cdots,\ m-1)$ では割り切れないので，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は，すべて m の倍数となる。

すると，${}_m\mathrm{C}_1 = m$ であることから，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ の最大公約数 d_m は，$d_m = m$ である。

なお，$m=2$ のときは，${}_2\mathrm{C}_1 = 2$ となり，$d_m = m$ を満たしている。

(2)　すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れることを，数学的帰納法よって示す。

(i)　$k=1$ のとき

$k^1 - k = 0$ は，明らかに d_m で割り切れる。

(ii)　$k=l$ のとき

$l^m - l$ が d_m で割り切れると仮定すると，

$$ \begin{aligned} (l+1)^m-(l+1) &= l^m + {}_m\mathrm{C}_1\,l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\,l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\,l^2 + ({}_m\mathrm{C}_{m-1}-1)\,l \\ &= (l^m - l) + {}_m\mathrm{C}_1\,l^{m-1} + {}_m\mathrm{C}_2\,l^{m-2} + \cdots + {}_m\mathrm{C}_{m-2}\,l^2 + {}_m\mathrm{C}_{m-1}\,l \end{aligned} $$

(1)より，${}_m\mathrm{C}_1$，${}_m\mathrm{C}_2$，…，${}_m\mathrm{C}_{m-1}$ は d_m で割り切れるので，$(l+1)^m-(l+1)$ は d_m で割り切れる。

(i)(ii)より，すべての自然数 k に対し，$k^m - k$ が d_m で割り切れる。

コメント

1999 年に理系で出された二項係数の問題を思い出しました。この過去問に比べると，内容は基本的です。

問　題

p を自然数とする。次の関係式で定められる数列$\{a_n\}$，$\{b_n\}$を考える。

$$a_1=p,\ b_1=p+1$$
$$a_{n+1}=a_n+pb_n,\ b_{n+1}=pa_n+(p+1)b_n\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，次の 2 つの数がともにp^3で割り切れることを示せ。

$$a_n-\frac{n(n-1)}{2}p^2-np,\ b_n-n(n-1)p^2-np-1$$

(2)　p を 3 以上の奇数とする。このとき，a_pはp^2で割り切れるが，p^3では割り切れないことを示せ。　[2008]

解答例

(1)　$x_n=a_n-\dfrac{n(n-1)}{2}p^2-np,\ y_n=b_n-n(n-1)p^2-np-1\cdots\cdots(*)$とおくと，

$$a_n=x_n+\frac{n(n-1)}{2}p^2+np,\ b_n=y_n+n(n-1)p^2+np+1$$

(i)　$n=1$のとき

$a_1=p,\ b_1=p+1$より，$x_1=a_1-p=0,\ y_1=b_1-p-1=0$

よって，x_1，y_1はともにp^3で割り切れる。

(ii)　$n=k$のとき

x_k，y_kがともにp^3で割り切れると仮定する。

条件より，$a_{n+1}=a_n+pb_n,\ b_{n+1}=pa_n+(p+1)b_n$から，

$$\begin{aligned}x_{k+1}&=a_{k+1}-\frac{(k+1)k}{2}p^2-(k+1)p\\&=a_k+pb_k-\frac{(k+1)k}{2}p^2-(k+1)p\\&=x_k+\frac{k(k-1)}{2}p^2+kp+p\{y_k+k(k-1)p^2+kp+1\}\\&\quad-\frac{(k+1)k}{2}p^2-(k+1)p\\&=x_k+py_k+k(k-1)p^3\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}y_{k+1}&=b_{k+1}-(k+1)kp^2-(k+1)p-1\\&=pa_k+(p+1)b_k-(k+1)kp^2-(k+1)p-1\\&=p\left\{x_k+\frac{k(k-1)}{2}p^2+kp\right\}+(p+1)\{y_k+k(k-1)p^2+kp+1\}\\&\quad-(k+1)kp^2-(k+1)p-1\\&=px_k+(p+1)y_k+\frac{3k(k-1)}{2}p^3\end{aligned}$$

$k(k-1)$は偶数なので，x_{k+1}，y_{k+1}はともにp^3で割り切れる。

(i)(ii)より，x_n，y_nはともにp^3で割り切れる。

(2)　(＊)より，$a_p = x_p + \dfrac{p(p-1)}{2}p^2 + p^2 = x_p + \dfrac{p-1}{2}p^3 + p^2$

(1)より，x_p は p^3 で割り切れ，また p は奇数より $\dfrac{p-1}{2}$ は整数となり，a_p は p^2 で割り切れる。さらに，p は 3 以上なので，p^2 は p^3 で割り切れないことより，a_p は p^3 では割り切れない。

コメント

整数と漸化式の融合という頻出タイプの 1 題です。数学的帰納法を利用すると，明快に証明することができます。

問　題

r は $0<r<1$ を満たす実数, n は 2 以上の整数とする。平面上に与えられた 1 つの円を, 次の条件①, ②を満たす 2 つの円で置き換える操作(P)を考える。

① 新しい 2 つの円の半径の比は $r:1-r$ で, 半径の和はもとの円の半径に等しい。

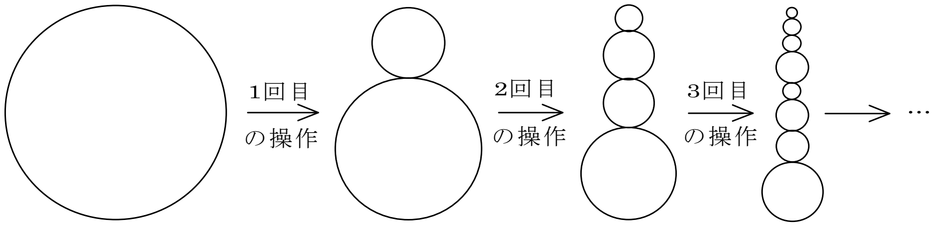
② 新しい 2 つの円は互いに外接し, もとの円に内接する。

以下のようにして, 平面上に 2^n 個の円を作る。

・最初に, 平面上に半径 1 の円を描く。

・次に, この円に対して操作(P)を行い 2 つの円を得る(これを 1 回目の操作という)。

・k 回目の操作で得られた 2^k 個の円のそれぞれについて, 操作(P)を行い, 2^{k+1} 個の円を得る $(1\leqq k\leqq n-1)$。



(1) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和を求めよ。

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円の面積の和を求めよ。

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和を求めよ。　　　　[2007]

解答例

(1) n 回の操作で得られる円のうち, 半径が $r^k(1-r)^{n-k}$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ である円は, 半径が r 倍になる k 回の操作を選ぶ場合の数に一致するので, ${}_n\mathrm{C}_k$ 個ある。

これより, n 回の操作で得られる 2^n 個の円の周の長さの和 l_n は,

$$l_n = 2\pi\{{}_n\mathrm{C}_0(1-r)^n + {}_n\mathrm{C}_1 r(1-r)^{n-1} + {}_n\mathrm{C}_2 r^2(1-r)^{n-2} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n r^n\}$$
$$= 2\pi(1-r+r)^n = 2\pi$$

(2) 2 回目の操作で得られる 4 つの円は, 半径 r^2 のものが 1 個, $r(1-r)$ のものが 2 個, $(1-r)^2$ のものが 1 個より, それらの面積の和 S_2 は,

$$S_2 = \pi r^4 + 2\pi r^2(1-r)^2 + \pi(1-r)^4 = \pi\{r^2+(1-r)^2\}^2 = \pi(2r^2-2r+1)^2$$

(3) n 回目の操作で得られる 2^n 個の円の面積の和 S_n は, (1)と同様に考え,

$$S_n = \pi\{{}_n\mathrm{C}_0(1-r)^{2n} + {}_n\mathrm{C}_1 r^2(1-r)^{2n-2} + {}_n\mathrm{C}_2 r^4(1-r)^{2n-4} + \cdots + {}_n\mathrm{C}_n r^{2n}\}$$
$$= \pi\{(1-r)^2+r^2\}^n = \pi(2r^2-2r+1)^n$$

コメント

題意を把握した後の立式は容易です。残るは二項定理の適用に気付くことだけです。

問　題

正の整数の下 2 桁とは，100 の位以上を無視した数をいう。たとえば，2000，12345 の下 2 桁はそれぞれ 0，45 である。m が正の整数全体を動くとき，$5m^4$ の下 2 桁として現れる数をすべて求めよ。　[2007]

解答例

a を 0 以上の整数, b を 0 以上 9 以下の整数とし，$m=10a+b$ とおくと，

$$\begin{aligned}5m^4 &= 5(10a+b)^4\\ &= 5(10^4a^4+4\cdot10^3a^3b+6\cdot10^2a^2b^2+4\cdot10ab^3+b^4)\\ &= 10^2(500a^4+200a^3b+30a^2b^2+2ab^3)+5b^4\end{aligned}$$

これより，$5m^4$ の下 2 桁の数は $5b^4$ の下 2 桁の数と一致する。

そこで，b のそれぞれの値に対して，$5b^4$ の下 2 桁の数を計算すると，右表のようになる。

b	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9
b^4 の下 2 桁	0	1	16	81	56	25	96	1	96	61
$5b^4$ の下 2 桁	0	5	80	5	80	25	80	5	80	5

以上より，$5m^4$ の下 2 桁は 0, 5, 25, 80 である。

コメント

整数 m を $m=10a+b$ とおくことがすべてといっても，過言ではありません。

問　題

n を正の整数とする。実数 x, y, z に対する方程式 $x^n + y^n + z^n = xyz$ ……①を考える。

(1)　$n=1$ のとき，①を満たす正の整数の組 $(x,\ y,\ z)$ で，$x \leqq y \leqq z$ となるものをすべて求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，①を満たす正の実数の組 $(x,\ y,\ z)$ は存在しないことを示せ。

[2006]

解答例

(1)　正の整数 x, y, z に対して，$x^n + y^n + z^n = xyz$ ……①より，$n=1$ のとき，

$$x+y+z = xyz\,,\ \ \frac{1}{yz}+\frac{1}{zx}+\frac{1}{xy}=1 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

$1 \leqq x \leqq y \leqq z$ より，$1=\dfrac{1}{yz}+\dfrac{1}{zx}+\dfrac{1}{xy} \leqq \dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}+\dfrac{1}{x^2}=\dfrac{3}{x^2}$

$x^2 \leqq 3$ から，$x=1$ となり，このとき②から，

$$yz = y+z+1\,,\ \ (y-1)(z-1)=2$$

$0 \leqq y-1 \leqq z-1$ より，$y-1=1$，$z-1=2$ となり，$(y,\ z)=(2,\ 3)$ から，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 2,\ 3)$$

(2)　正の実数 x, y, z に対して，$x^n + y^n + z^n = xyz$ ……①より，$n=3$ のとき，

$$x^3+y^3+z^3 = xyz\,,\ \ \frac{x^2}{yz}+\frac{y^2}{zx}+\frac{z^2}{xy}=1 \ \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで, $0 < x \leqq y \leqq z$ と大小関係を設定すると，

$$\frac{z^2}{xy} \geqq \frac{z^2}{z\cdot z}=1\,,\ \ \frac{x^2}{yz}>0\,,\ \ \frac{y^2}{zx}>0$$

これより, ③は成立しない。

すると，③式が $x,\ y,\ z$ について対称なので，他の大小関係においても，③を満たす $(x,\ y,\ z)$ は存在しない。

コメント

(2)は(3)と同じ方針で式変形をしました。見かけと異なり，意外なほどスムーズに証明できました。

問　題

3 以上 9999 以下の奇数 a で，a^2-a が 10000 で割り切れるものをすべて求めよ。

[2005]

解答例

$a^2-a=a(a-1)$ であり，条件より, a は奇数，$a-1$ は偶数となる。

ここで, a と $a-1$ の公約数を g とし, b, c を正の整数とすると,

$$a=gb\cdots\cdots\cdots①,\quad a-1=gc\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$g(b-c)=1$

よって, g は 1 の正の約数から $g=1$ となり, a と $a-1$ は互いに素である。

さて，$10000=2^4\times5^4$ なので，a^2-a が 10000 で割り切れるとき，偶数 $a-1$ は 2^4 という約数をもち, k を整数として,

$$a-1=2^4\times k\cdots\cdots\cdots③$$

すると, $3\leqq a\leqq9999$ より，$2\leqq2^4\times k\leqq9998$ となり，$1\leqq k\leqq624$ である。

よって, k が 5^4 を約数としてもつことはない。

また, k が約数として，5^i $(i=1,\ 2,\ 3)$ をもつと仮定すると, a はそれぞれ 5^{4-i} という約数をもつことになり, a と $a-1$ が互いに素であることに反する。

以上より, l を奇数として,

$$a=5^4\times l\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$5^4\times l-1=2^4\times k$，$625l-16k=1\cdots\cdots\cdots⑤$

⑤を満たす 1 つの $(l,\ k)$ は，$(l,\ k)=(1,\ 39)$ なので,

$$625\times1-16\times39=1\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤⑥より，$625(l-1)-16(k-39)=0$，$625(l-1)=16(k-39)$

625 と 16 は互いに素なので, n を整数として,

$$l-1=16n,\quad l=16n+1$$

④から，$a=5^4(16n+1)=625(16n+1)$

そこで, $3\leqq a\leqq9999$ より, $0<16n+1<16$ となり，$n=0$ のみ満たされる。

よって，求める a は，$a=625$ である。

コメント

当然ですが，a と $a-1$ は互いに素です。この事実と a の範囲に制限があることが，本問を解くうえでのポイントとなっています。

問　題

2 次方程式$x^2-4x+1=0$の 2 つの実数解のうち大きいものをα，小さいものをβとする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対し，$s_n=\alpha^n+\beta^n$とおく。

(1)　s_1，s_2，s_3を求めよ。また, $n\geqq 3$に対し，s_nをs_{n-1}とs_{n-2}で表せ。

(2)　s_nは正の整数であることを示し，s_{2003}の 1 の位の数を求めよ。

(3)　α^{2003}以下の最大の整数の 1 の位の数を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$x^2-4x+1=0$の解は$x=2\pm\sqrt{3}$で，$\alpha>\beta$から$\alpha=2+\sqrt{3}$，$\beta=2-\sqrt{3}$となる。

$$s_1=\alpha+\beta=4$$

$$s_2=\alpha^2+\beta^2=(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta=16-2=14$$

$$s_3=\alpha^3+\beta^3=(\alpha+\beta)^3-3\alpha\beta(\alpha+\beta)=64-12=52$$

また，α，βは$x^2-4x+1=0$の解なので，$\alpha^2-4\alpha+1=0$となり，

$$\alpha^2=4\alpha-1,\ \alpha^n=4\alpha^{n-1}-\alpha^{n-2}$$

同様にして，$\beta^n=4\beta^{n-1}-\beta^{n-2}$なので,

$$s_n=\alpha^n+\beta^n=4(\alpha^{n-1}+\beta^{n-1})-(\alpha^{n-2}+\beta^{n-2})=4s_{n-1}-s_{n-2}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$\alpha>\beta>0$より，$s_n=\alpha^n+\beta^n>0$である。また, (1)よりs_1，s_2がともに整数なので, (*)から帰納的にs_nは整数である。すなわち，s_nは正の整数である。

さて, 数列$\{s_n\}$の 1 の位の数をs_1から順に並べてみると, 4, 4, 2, 4, 4, 2, …と周期 3 の周期数列であることが予測できる。

以下, この予測の正しいことを, (*)を用いて示す。

$$s_{n+3}=4s_{n+2}-s_{n+1}=4(4s_{n+1}-s_n)-s_{n+1}=15s_{n+1}-4s_n=5(3s_{n+1}-s_n)+s_n$$

ここで，s_1，s_2はともに偶数なので, (*)より帰納的にs_nも偶数となる。

すると，$5(3s_{n+1}-s_n)$は 10 の倍数となり，s_{n+3}を 10 で割った余りとs_nを 10 で割った余りは等しくなる。すなわち，s_{n+3}の 1 の位の数とs_nの 1 の位の数は一致し, 数列$\{s_n\}$の 1 の位の数は周期 3 の周期数列となる。

したがって，$2003=3\times 667+2$から，s_{2003}の 1 の位の数はs_2の 1 の位の数と等しく, 4 である。

(3)　$0<\beta<1$なので$0<\beta^{2003}<1$となる。

また，$\alpha^{2003}=s_{2003}-\beta^{2003}$であり, (2)より$s_{2003}$の 1 の位の数は 4 なので，$\alpha^{2003}$以下の最大の整数の 1 の位の数は 3 である。

コメント

どこかで見たような問題ですが，そっくりそのままというのは記憶になく，何か有名問題を組み合わせたような感じがします。

問　題

n は正の整数とする。x^{n+1} を x^2-x-1 で割った余りを a_nx+b_n とおく。

(1)　数列 a_n, b_n $(n=1,\ 2,\ 3\cdots)$ は，$a_{n+1}=a_n+b_n$，$b_{n+1}=a_n$ を満たすことを示せ。

(2)　$n=1,\ 2,\ 3\cdots$ に対して，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素であることを証明せよ。　[2002]

解答例

(1)　x^{n+1} を x^2-x-1 で割った商を $q(x)$ とすると，条件より，

$$x^{n+1}=(x^2-x-1)q(x)+a_nx+b_n$$

すると，

$$\begin{aligned}x^{n+2}&=(x^2-x-1)xq(x)+a_nx^2+b_nx\\&=(x^2-x-1)xq(x)+a_n(x^2-x-1)+a_nx+a_n+b_nx\\&=(x^2-x-1)\{xq(x)+a_n\}+(a_n+b_n)x+a_n\end{aligned}$$

x^{n+2} を x^2-x-1 で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ なので，

$$a_{n+1}=a_n+b_n,\quad b_{n+1}=a_n$$

(2)　a_n，b_n がともに正の整数で，互いに素であることを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=1$ のとき

$x^2=(x^2-x-1)\cdot 1+x+1$ より，$a_1=b_1=1$ となり，a_1，b_1 はともに正の整数で，互いに素である。

(ii)　$n=k$ のとき

a_k，b_k がともに正の整数で，互いに素であると仮定する。

(1)より，$a_{k+1}=a_k+b_k$，$b_{k+1}=a_k$ なので，a_{k+1}，b_{k+1} はともに正の整数である。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1} に 2 以上の公約数が存在するとしたとき，

$$a_k=b_{k+1},\quad b_k=a_{k+1}-a_k=a_{k+1}-b_{k+1}$$

これより，a_k，b_k にも 2 以上の公約数が存在することになり，a_k，b_k が互いに素であることに反する。

よって，a_{k+1}，b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より，a_n，b_n はともに正の整数で，互いに素である。

コメント

互いに素であることの証明も，最大公約数を設定してゴチャゴチャ計算するまでもありませんでした。

問　題

(1)　x は $0° \leqq x \leqq 90°$ をみたす角とする。

$$\sin y = |\sin 4x|,\ \cos y = |\cos 4x|,\ 0° \leqq y \leqq 90°$$

となる y を x で表し，そのグラフを xy 平面上に図示せよ。

(2)　α は $0° \leqq \alpha \leqq 90°$ をみたす角とする。$0° \leqq \theta_n \leqq 90°$ をみたす角 θ_n，$n = 1,\ 2, \cdots$ を

$$\theta_1 = \alpha,\ \sin\theta_{n+1} = |\sin 4\theta_n|,\ \cos\theta_{n+1} = |\cos 4\theta_n|$$

で定める。k を 2 以上の整数として，$\theta_k = 0°$ となる α の個数を k で表せ。　[1998]

解答例

(1)　$0° < y < 90°$ なので，

(i)　$0° \leqq 4x \leqq 90° \left(0° \leqq x \leqq \dfrac{45°}{2}\right)$ のとき

$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 4x$

(ii)　$90° \leqq 4x \leqq 180° \left(\dfrac{45°}{2} \leqq x \leqq 45°\right)$ のとき

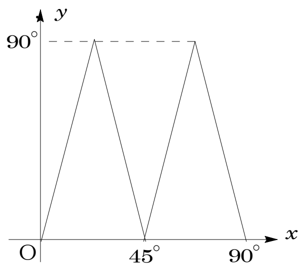
$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 180° - 4x$

(iii)　$180° \leqq 4x \leqq 270° \left(45° \leqq x \leqq \dfrac{135°}{2}\right)$ のとき

$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 4x - 180°$

(iv)　$270° \leqq 4x \leqq 360° \left(\dfrac{135°}{2} \leqq x \leqq 90°\right)$ のとき

$\sin y = \sin 4x$，$\cos y = \cos 4x$ より，$y = 360° - 4x$



(2)　(1)のグラフを $y = f(x)$ とすると，

$$\theta_1 = \alpha,\ \theta_{n+1} = f(\theta_n)$$

(1)のグラフより，$\theta_{n+1} = 90°$ となる θ_n は 2 個，$\theta_{n+1} = 0°$ となる θ_n は 3 個，$\theta_{n+1} = \beta\ (0° < \beta < 90°)$ となる θ_n は 4 個

$n \leqq k-1$ に対して，$\theta_k = 0°$ となる θ_n の個数を a_n とすると，$a_{k-1} = 3$ となり，

$$a_{n-1} = 4(a_n - 2) + 2 + 3 = 4a_n - 3$$

$$a_{n-1} - 1 = 4(a_n - 1)$$

$a_1 - 1 = 4^{k-2}(a_{k-1} - 1)$ より，$a_1 = 4^{k-2}(a_{k-1} - 1) + 1 = 2 \cdot 4^{k-2} + 1$

$\theta_k = 0°$ となる θ_1，すなわち α の個数は，$2 \cdot 4^{k-2} + 1$

コメント

(1)は基本的なのですが，(2)は題意を把握するのにまず苦労します。こんなときは具体的に考え，試行錯誤することが必要です。この考え方を一般化すると，上の解になります。

問　題

座標平面上で x 座標と y 座標がいずれも整数である点を格子点という。格子点上を次の規則(a), (b)に従って動く点 P を考える。

(a)　最初に, 点 P は原点 O にある。

(b)　ある時刻で点 P が格子点 $(m,\ n)$ にあるとき, その 1 秒後の点 P の位置は, 隣接する格子点 $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ のいずれかであり, また, これらの点に移動する確率は, それぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

(1)　最初から 1 秒後の点 P の座標を $(s,\ t)$ とする。$t-s=-1$ となる確率を求めよ。

(2)　点 P が, 最初から 6 秒後に直線 $y=x$ 上にある確率を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　点 P が最初に原点 O にあるとき, 1 秒後に移る点 $(s,\ t)$ は, $(1,\ 0)$, $(0,\ 1)$, $(-1,\ 0)$, $(0,\ -1)$ のいずれかであり, その移動確率はそれぞれ $\dfrac{1}{4}$ である。

ここで, $t-s=-1$ を満たすのは, $(1,\ 0)$, $(0,\ -1)$ なので, その確率は,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

(2)　点 P が $(m,\ n)$ にあるとき, 1 秒後に $(m+1,\ n)$, $(m,\ n+1)$, $(m-1,\ n)$, $(m,\ n-1)$ に移る事象を, それぞれ A, B, C, D とする。そして, 6 秒後に O から直線 $y=x$ 上に移り, A, B, C, D がそれぞれ a 回, b 回, c 回, d 回起こったとすると,

$$a+b+c+d=6 \cdots\cdots\cdots ①,\ \ b-d=a-c \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より, $a+d=3$, $b+c=3$

つまり, A または D が 3 回, B または C が 3 回起こったことより, その確率は,

$$_6\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)^3=20\cdot\frac{1}{2^6}=\frac{5}{16}$$

コメント

ランダムウォークのついての基本問題です。なお, (2)は(1)の結果を利用せずに解いています。

問　題

A, B, C の 3 つのチームが参加する野球の大会を開催する。以下の方式で試合を行い，2 連勝したチームが出た時点で，そのチームを優勝チームとして大会は終了する。

(a)　1 試合目で A と B が対戦する。

(b)　2 試合目で，1 試合目の勝者と，1 試合目で待機していた C が対戦する。

(c)　k 試合目で優勝チームが決まらない場合は，k 試合目の勝者と，k 試合目で待機していたチームが $k+1$ 試合目で対戦する。ここで k は 2 以上の整数とする。

なお，すべての対戦において，それぞれのチームが勝つ確率は $\frac{1}{2}$ で，引き分けはないものとする。

(1)　ちょうど 5 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(2)　n を 2 以上の整数とする。ちょうど n 試合目で A が優勝する確率を求めよ。

(3)　m を正の整数とする。総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を求めよ。

[2016]

解答例

(1)　5 試合目で A が優勝するのは，4 試合目の対戦までどのチームも 2 連勝せず，しかも 4 試合目と 5 試合目に A が勝つ場合である。

そこで，各試合の勝者を 1 試合目から並べて書くと，

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBAA の場合となり，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCAB…となり，この場合は不適。

(i)(ii)より，5 試合目で A が優勝する確率は $\frac{1}{32}$ である。

(2)　n 試合目 $(n\geqq 2)$ で A が優勝する場合，その確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^n$ である。

(i)　1 試合目に A が勝つとき　ACBACBACB…ACBAA となる場合で，n を 3 で割った余りは 2 となる。

(ii)　1 試合目に B が勝つとき　BCABCABCA…BCAA となる場合で，n を 3 で割った余りは 1 となる。

(i)(ii)以外は起こりえないことより，n 試合目で A が優勝する確率を $p(n)$ とすると，

$$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^n\ (n \text{ が 3 の倍数でないとき}),\quad p(n)=0\ (n \text{ が 3 の倍数のとき})$$

(3)　l を正の整数とするとき，(2)より，

(i)　n を 3 で割った余りが 2 $(n=3l-1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}$

(ii)　n を 3 で割った余りが 1 $(n=3l+1)$ のとき　$p(n)=\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}$

(iii) n を 3 で割った余りが 0 $(n=3l)$ のとき　$p(n)=0$

さて，m を正の整数とするとき，総試合数が $3m$ 回以下で A が優勝する確率を P_m とすると，$m\geqq 2$ のとき，

$$P_m=\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l-1}+\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{3l+1}+0=2\sum_{l=1}^{m}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}+\frac{1}{2}\sum_{l=1}^{m-1}\left(\frac{1}{8}\right)^{l}$$

$$=2\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{8}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}\left(1-\frac{1}{8}\right)^{-1}$$

$$=\frac{2}{7}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m}\right\}+\frac{1}{14}\left\{1-\left(\frac{1}{8}\right)^{m-1}\right\}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{8}\right)^{m}=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$$

ここで，$m=1$ をあてはめると，$P_1=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3}=\frac{1}{4}$ となり，成立している。

したがって，$P_m=\frac{5}{14}-\frac{6}{7}\left(\frac{1}{2}\right)^{3m}$ である。

コメント

巴戦を題材にした有名問題です。誘導がたいへん丁寧です。

問　題

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って，AA，B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から$n-1$番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。　[2015]

解答例

(1) まず，文字列 AA について，左右を区別し A_1A_2 とする。

さて，表と裏の出る確率がそれぞれ$\frac{1}{2}$のコインを投げ，表が出たときは文字列 A_1A_2，裏が出たときは文字 B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして，n 回コインを投げ，文字列の左から n 番目の文字が A_1，A_2，B である確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。すると，$p_1=r_1=\frac{1}{2}$，$q_1=0$ で，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}q_n+\frac{1}{2}r_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=p_n\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$p_{n+1}=\frac{1}{2}(q_n+r_n)=\frac{1}{2}(1-p_n)=-\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{2}$ となり，

$$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right),\quad p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，②より，$n\geqq 2$ において，

$$q_n=p_{n-1}=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なお，この式は，$n=1$ のときも満たしている。

以上より，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 p_n+q_n は，

$$p_n+q_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2) $n\geqq 2$ のとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，文字列が A_2B となる場合より，その確率は，

$$q_{n-1}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\}=\frac{1}{6}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

コメント

直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったん AA の文字列について左側と右側を区別し，3 つの状態に分けて考えたわけです。

問　題

a を自然数（すなわち 1 以上の整数）の定数とする。白球と赤球があわせて 1 個以上入っている袋 U に対して，次の操作(＊)を考える。

(＊)　袋 U から球を 1 個取り出し，

(i)　取り出した球が白球のときは，袋 U の中身が白球 a 個，赤球 1 個となるようにする。

(ii)　取り出した球が赤球のときは，その球を袋 U へ戻すことなく，袋 U の中身はそのままにする。

はじめに袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているとする。この袋 U に対して操作(＊)を繰り返し行う。たとえば，1 回目の操作で白球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個，赤球 1 個となり，さらに 2 回目の操作で赤球が出たとすると，袋 U の中身は白球 a 個のみとなる。

n 回目に取り出した球が赤球である確率を p_n とする。ただし，袋 U の中の個々の球の取り出される確率は等しいものとする。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ に対して p_n を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　はじめ袋 U の中に，白球が $a+2$ 個，赤球が 1 個入っているので，1 回目に取り出した球が赤球である確率 p_1 は，$p_1 = \dfrac{1}{a+3}$ である。

次に，2 回目に取り出した球が赤球であるのは，1 回目に取り出した球が白球のときだけなので，その確率 p_2 は，$p_2 = \dfrac{a+2}{a+3}\cdot\dfrac{1}{a+1} = \dfrac{a+2}{(a+3)(a+1)}$ である。

(2)　n を自然数として，$n+1$ 回目に取り出した球が赤球であるのは，n 回目に取り出した球が白球のときだけなので，

$$p_{n+1} = \frac{1}{a+1}(1-p_n),\quad p_{n+1} = -\frac{1}{a+1}p_n + \frac{1}{a+1}$$

変形すると，$p_{n+1} - \dfrac{1}{a+2} = -\dfrac{1}{a+1}\left(p_n - \dfrac{1}{a+2}\right)$ となり，

$$p_n - \frac{1}{a+2} = \left(p_1 - \frac{1}{a+2}\right)\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1} = -\frac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\frac{1}{a+1}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n = -\dfrac{1}{(a+3)(a+2)}\left(-\dfrac{1}{a+1}\right)^{n-1} + \dfrac{1}{a+2}$ である。

コメント

確率と漸化式についての頻出題です。与えられた条件が扱いやすいので，すんなりと立式できます。

問　題

A, B の 2 人がいる。投げたとき表裏が出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインが 1 枚あり，最初は A がそのコインを持っている。次の操作を繰り返す。

(i)　A がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば A に 1 点を与え，コインは A がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，A はコインを B に渡す。

(ii)　B がコインを持っているときは，コインを投げ，表が出れば B に 1 点を与え，コインは B がそのまま持つ。裏が出れば，両者に点を与えず，B はコインを A に渡す。

そして A, B のいずれかが 2 点を獲得した時点で，2 点を獲得した方の勝利とする。たとえば，コインが表，裏，表，表と出た場合，この時点で A は 1 点，B は 2 点を獲得しているので B の勝利となる。

A, B あわせてちょうど n 回コインを投げ終えたときに A の勝利となる確率 $p(n)$ を求めよ。　[2013]

解答例

A が n 回目にコインを投げ，それが 2 回目の表である場合を考える。

(i)　B が得点を獲得せず，A が勝利するとき

まず，A が 1 点目を獲得するのは 1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-1$回目のいずれかであり，2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると，n は偶数となり，1 点目の獲得回の選び方が$\dfrac{n}{2}$通りより，この確率は，

$$\frac{n}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

(ii)　A, B の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

A, B の順に 1 点ずつを獲得するのは，1 回目，3 回目，5 回目，…，$n-2$ 回目から 2 回を選び，前を A が 1 点目を獲得する回，後を B が 1 点目を獲得する回に対応させる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると，n は奇数となり，1 点目の獲得回の選び方が${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$通りより，この確率は，

$$ {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n = (n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}$$

これは，$n=1,\ 3$ のときも成立している。

(iii)　B, A の順に 1 点ずつを獲得した後，A が勝利するとき

B, A の順に 1 点ずつを獲得するのは，2 回目，4 回目，6 回目，…，$n-1$回目から 2 回を選び，前を B が 1 点目を獲得する回，後を A が 1 点目を獲得する回に対応さ

せる。また，A が 2 点目を獲得するのは n 回目である。

すると，n は奇数となり，1 点目の獲得回の選び方が ${}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2$ 通りより，この確率は，

$$ {}_{\frac{n-1}{2}}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2!}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\frac{n-3}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3} $$

これは，$n=1,\ 3$ のときも成立している。

以上より，A の勝利となる確率 $p(n)$ は，n を偶奇に分けて，

$$ p(n)=n\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}\quad(n\ \text{が偶数}) $$

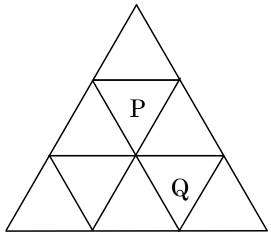
$$ p(n)=2\times(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+3}=(n-1)(n-3)\left(\frac{1}{2}\right)^{n+2}\quad(n\ \text{が奇数}) $$

コメント

具体的に考えていきましたが，問題の設定状況を把握するのにたいへん時間がかかってしまい，難度がかなり高く感じられました。

問　題

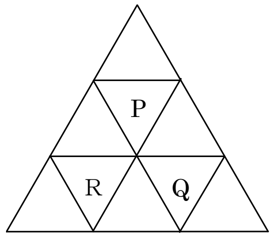
図のように，正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り，部屋 P, Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し，1 秒ごとに，そのままその部屋にとどまることなく，辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



[2012]

解答例

まず，部屋 R を右図のように決め，球が n 秒後に P, Q, R にある確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。



さて，球は P より出発し，1 秒ごとに辺を共有する隣の部屋に移動することより，奇数秒後には P, Q, R 以外の部屋，偶数秒後には P, Q, R のいずれかの部屋にある。

これより，k を 1 以上の整数として，

$$p_{2k-1}=q_{2k-1}=r_{2k-1}=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ p_{2k}+q_{2k}+r_{2k}=1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，球が $2k$ 秒後に部屋 P, Q, R のいずれかにあり，$2k+2$ 秒後に部屋 Q に移動する確率は，

(i)　部屋 P にあるとき　P→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(ii)　部屋 Q にあるとき　Q→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}+\frac{1}{3}\times1=\frac{2}{3}$

(iii)　部屋 R にあるとき　R→Q と移動する確率は，$\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$

(i)(ii)(iii)より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{2}{3}q_{2k}+\frac{1}{6}r_{2k}\cdots\cdots\cdots③$

また，Q, R の対称性より，$q_{2k}=r_{2k}$ なので，②③に代入すると，

$$p_{2k}+2q_{2k}=1\cdots\cdots\cdots④,\ \ q_{2k+2}=\frac{1}{6}p_{2k}+\frac{5}{6}q_{2k}\cdots\cdots\cdots⑤$$

④⑤より，$q_{2k+2}=\frac{1}{6}(1-2q_{2k})+\frac{5}{6}q_{2k}=\frac{1}{2}q_{2k}+\frac{1}{6}$ となり，$q_0=0$ に注意して，

$$q_{2k+2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{2}\Big(q_{2k}-\frac{1}{3}\Big),\ \ q_{2k}-\frac{1}{3}=\Big(q_0-\frac{1}{3}\Big)\Big(\frac{1}{2}\Big)^k=-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k$$

よって，$q_{2k}=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^k\cdots\cdots\cdots⑥$

①⑥から，n が奇数のとき $q_n=0$，n が偶数のとき $q_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}\Big)^{\frac{n}{2}}$ となる。

コメント

確率と漸化式の融合問題です。最初は，すべての部屋に名称をつけましたが，そうするまでもありませんでした。

問　題

2 つの箱 L と R, ボール 30 個, コイン投げで表と裏が等確率 $\frac{1}{2}$ で出るコイン 1 枚を用意する。x を 0 以上 30 以下の整数とする。L に x 個, R に $30-x$ 個のボールを入れ, 次の操作(#)を繰り返す。

(#)　箱 L に入っているボールの個数を z とする。コインを投げ, 表が出れば箱 R から箱 L に, 裏が出れば箱 L から箱 R に, $K(z)$ 個のボールを移す。ただし, $0 \leqq z \leqq 15$ のとき $K(z)=z$, $16 \leqq z \leqq 30$ のとき $K(z)=30-z$ とする。

m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とする。たとえば $P_1(15)=P_2(15)=\frac{1}{2}$ となる。以下の問(1), (2)に答えよ。

(1)　$m \geqq 2$ のとき, x に対してうまく y を選び, $P_m(x)$ を $P_{m-1}(y)$ で表せ。

(2)　n を自然数とするとき, $P_{2n}(10)$ を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　箱 L, R に入っているボールの個数が, それぞれ z, $30-z$ であるとき, 操作(#)を行うと, コインの表, 裏の出方によって, 箱 L に入っているボールの個数は次のように変化する。

(i)　$0 \leqq z \leqq 15$ のとき

表が出ると $z \to z+z=2z$, 裏が出ると $z \to z-z=0$

(ii)　$16 \leqq z \leqq 30$ のとき

表が出ると $z \to z+(30-z)=30$, 裏が出ると $z \to z-(30-z)=2z-30$

これより, $z=0$ のとき操作(#)を行っても, 箱 L のボールの個数には変化がない。同様に, $z=30$ のとき操作(#)を行っても, 箱 L のボールの個数には変化がない。

さて, m 回の操作の後, 箱 L のボールの個数が 30 である確率を $P_m(x)$ とすると, コインの表, 裏の出る確率が, ともに $\frac{1}{2}$ であることより,

(i)　$0 \leqq x \leqq 15$ のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x)$

(ii)　$16 \leqq x \leqq 30$ のとき　$P_m(x)=\frac{1}{2}P_{m-1}(2x-30)+\frac{1}{2}$

(2)　(1)より, $P_{2n}(10)=\frac{1}{2}P_{2n-1}(20)$, $P_{2n-1}(20)=\frac{1}{2}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{2}$ となり,

$$P_{2n}(10)=\frac{1}{4}P_{2n-2}(10)+\frac{1}{4}$$

これより, $P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left\{P_{2n-2}(10)-\frac{1}{3}\right\}$ となり,

$$P_{2n}(10)-\frac{1}{3}=\left\{P_2(10)-\frac{1}{3}\right\}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，$P_{2n}(10)=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^n$

コメント

まとめると，上のような解になりますが，ここまで至る道は平坦なものではありません。最も要求されるのは，具体例を考えながら，題意を把握する読解力です。

問　題

スイッチを 1 回押すごとに, 赤, 青, 黄, 白のいずれかの色の玉が 1 個, 等確率$\dfrac{1}{4}$で出てくる機械がある。2 つの箱 L と R を用意する。次の 3 種類の操作を考える。

(A)　1 回スイッチを押し, 出てきた玉を L に入れる。

(B)　1 回スイッチを押し, 出てきた玉を R に入れる。

(C)　1 回スイッチを押し, 出てきた玉と同じ色の玉が, L になければその玉を L に入れ, L にあればその玉を R に入れる。

(1)　L と R は空であるとする。操作(A)を 5 回行い, さらに操作(B)を 5 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 を求めよ。

(2)　L と R は空であるとする。操作(C)を 5 回行う。このとき L に 4 色すべての玉が入っている確率 P_2 を求めよ。

(3)　L と R は空であるとする。操作(C)を 10 回行う。このとき L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率を P_3 とする。$\dfrac{P_3}{P_1}$ を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　まず, 操作(A)を 5 回行い, L に 4 色すべての玉が入っているのは, いずれかの色の玉が 2 回出て, 他の色の玉は 1 回ずつ出る場合より, その確率は,

$$ {}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{4^3} $$

また, 同様に, 操作(B)を 5 回行い, R に 4 色すべての玉が入っている確率も$\dfrac{15}{4^3}$から, 操作(A)を 5 回行い, さらに操作(B)を 5 回行ったとき, L にも R にも 4 色すべての玉が入っている確率 P_1 は,

$$ P_1=\frac{15}{4^3}\times\frac{15}{4^3}=\frac{225}{4096} $$

(2)　操作(C)を 5 回行い, L に 4 色すべての玉が入っているのは, 操作(A)を 5 回行い, L に 4 色すべての玉が入っている場合より, その確率 P_2 は,

$$ P_2=\frac{15}{4^3}=\frac{15}{64} $$

(3)　操作(C)を 10 回行い, L にも R にも 4 色すべての玉が入っているのは, 操作(A)を 10 回行い, 4 色すべての玉が少なくとも 2 回ずつ出る場合である。

(i)　いずれかの色の玉が 4 回出て, 他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$$ {}_4\mathrm{C}_1\cdot\frac{10!}{4!2!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8} $$

(ii)　2 つの色の玉が 3 回ずつ出て, 他の色の玉は 2 回ずつ出るときの確率

$$ {}_4\mathrm{C}_2\cdot\frac{10!}{3!3!2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^{10}=\frac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8} $$

(i)(ii)より，$P_3=\dfrac{3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}+\dfrac{2\cdot3^3\cdot5^2\cdot7}{4^8}=\dfrac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}$ となり，

$$ \frac{P_3}{P_1}=\frac{3^4\cdot5^2\cdot7}{4^8}\cdot\frac{4^6}{3^2\cdot5^2}=\frac{63}{16} $$

コメント

どういう訳か，最初は余事象で考えようとして深みにはまってしまいました。考え直した普通の解を上に記しました。なお，(2)は(3)の誘導でしょうが，不安になってしまう設問です。

問　題

白黒 2 種類のカードがたくさんある。そのうち 4 枚を手もとにもっているとき，次の操作(A)を考える。

(A)　手もちの 4 枚の中から 1 枚を，等確率 $\dfrac{1}{4}$ で選び出し，それを違う色のカードにとりかえる。

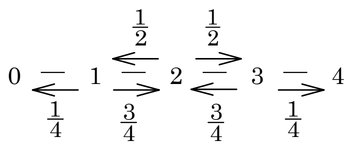
最初にもっている 4 枚のカードは，白黒それぞれ 2 枚であったとする。以下の(1), (2)に答えよ。

(1)　操作(A)を 4 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。

(2)　操作(A)を n 回繰り返した後に初めて，4 枚とも同じ色のカードになる確率を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　まず操作(A)を 4 回繰り返した後, 4 回目に初めて白が 4 枚になるのは，白の枚数に注目して場合分けをすると，その確率は，



(i)　2→1→2→3→4 のとき　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{64}$

(ii)　2→3→2→3→4 のとき　$\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{4}\times\dfrac{1}{2}\times\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{64}$

(i)(ii)より，$\dfrac{3}{64}+\dfrac{3}{64}=\dfrac{3}{32}$

(A)を 4 回繰り返した後，4 回目に初めて黒が 4 枚となる確率も同じく $\dfrac{3}{32}$ より，4 枚とも同じ色のカードになる確率は,

$$\frac{3}{32}+\frac{3}{32}=\frac{3}{16}$$

(2)　まず，操作(A)を n 回繰り返した後，白が 1 枚または 3 枚の確率を a_n，白が 2 枚の確率を b_n とおくと，

$$a_{n+1}=b_n\ \cdots\cdots\cdots①,\quad b_{n+1}=\frac{3}{4}a_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b_{n+1}=\dfrac{3}{4}b_{n-1}$

ここで，条件より，$b_0=1$，$b_1=0$ なので,

(i)　n が奇数のとき，$b_n=0$

(ii)　n が偶数のとき，$b_n=b_0\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}}$

さて，操作(A)を n 回繰り返した後, n 回目に初めて 4 枚とも同じ色になる確率は,

$\frac{1}{4}a_{n-1}=\frac{1}{4}b_{n-2}$ から，

(i)　n が奇数のとき，$\frac{1}{4}b_{n-2}=0$（$n=1$ のときも成立している）

(ii)　n が偶数のとき，$\frac{1}{4}b_{n-2}=\frac{1}{4}\left(\frac{3}{4}\right)^{\frac{n-2}{2}}$

コメント

状態の推移の対称性を利用して, (2)では漸化式を立てました。

問　題

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるような硬貨がある。ただし, $0<p<1$ とする。この硬貨を投げて, 次のルール(R)の下で, ブロック積みゲームを行う。

(R) ① ブロックの高さは, 最初は 0 とする。
② 硬貨を投げて表が出れば高さ 1 のブロックを 1 つ積み上げ, 裏が出ればブロックをすべて取り除いて高さ 0 に戻す。

n を正の整数, m を $0\leqq m\leqq n$ を満たす整数とする。

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となる確率を求めよ。

(2) (1)で, 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m を求めよ。

(3) ルール(R)の下で, n 回硬貨投げを独立に 2 度行い, それぞれ最後のブロックの高さを考える。2 度のうち, 高い方のブロックの高さが m である確率 r_m を求めよ。ただし, 最後のブロックの高さが等しいときはその値を考えるものとする。[2007]

解答例

(1) n 回硬貨を投げたとき, 最後にブロックの高さが m となるのは, 最初 $n-m-1$ 回は任意, 次の 1 回が裏で, その後 m 回続けて表が出る場合より, その確率 p_m は,

$$p_m=(1-p)p^m \quad (0\leqq m<n)$$

ただし, $m=n$ のとき, $p_m=p^m$ である。

(2) 最後にブロックの高さが m 以下となる確率 q_m は, (1)より,

(i) $0\leqq m<n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m}(1-p)p^k=(1-p)\cdot\frac{1-p^{m+1}}{1-p}=1-p^{m+1}$$

(ii) $m=n$ のとき

$$q_m=\sum_{k=0}^{m-1}(1-p)p^k+p^m=(1-p)\cdot\frac{1-p^m}{1-p}+p^m=1$$

(3) 2 度のゲームにおいて, 高い方のブロックの高さが m であるのは, 1 度目 m で 2 度目 $m-1$ 以下, または 1 度目 $m-1$ 以下で 2 度目 m, または 1 度目 2 度目とも m のいずれかである。その確率 r_m は, (1)(2)より,

(i) $0\leqq m<n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=p_m(2q_{m-1}+p_m)$$
$$=(1-p)p^m(2-2p^m+p^m-p^{m+1})=(1-p)p^m(2-p^m-p^{m+1})$$

(ii) $m=n$ のとき

$$r_m=p_mq_{m-1}+q_{m-1}p_m+{p_m}^2=2p^m(1-p^m)+p^{2m}=2p^m-p^{2m}$$

コメント

裏がでれば，過去を清算できるタイプのゲームです。ただ，$m=n$ の場合を特別に考えなくてはいけない点が要注意です。

問　題

コンピュータの画面に，記号○と×のいずれかを表示させる操作をくり返し行う。このとき，各操作で，直前の記号と同じ記号を続けて表示する確率は，それまでの経過に関係なく，p であるとする。

最初に，コンピュータの画面に記号×が表示された。操作をくり返し行い，記号×が最初のものも含めて 3 個出るよりも前に，記号○が n 個出る確率を P_n とする。ただし，記号○が n 個出た段階で操作は終了する。

(1)　P_2 を p で表せ。

(2)　P_3 を p で表せ。

(3)　$n\geqq 4$ のとき，P_n を p と n で表せ。　[2006]

解答例

(1)　×が 3 個出る前に○が 2 個出る場合は，×○○，××○○，×○×○のいずれかなので，その確率 P_2 は，

$$P_2=(1-p)p+p(1-p)p+(1-p)^3=(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=(1-p)(1-p+2p^2)$$

(2)　×が 3 個出る前に○が 3 個出る場合は，×○○○，××○○○，×○×○○，×○○×○のいずれかなので，その確率 P_3 は，

$$P_3=(1-p)p^2+p(1-p)p^2+(1-p)^3p+(1-p)p(1-p)^2$$
$$=p(1-p)(p+p^2+1-2p+p^2+1-2p+p^2)$$
$$=p(1-p)(2-3p+3p^2)$$

(3)　×が 3 個出る前に○が n 個出る場合は，

(i)　最初の×の後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$(1-p)p^{n-1}$ である。

(ii)　最初×が 2 個出た後，○が続けて n 個出るとき
このときの確率は，$p(1-p)p^{n-1}=(1-p)p^n$ である。

(iii)　最初の×の後，○が続けて k 個，次に×さらに○が続けて $n-k$ 個出るとき
このときの確率は，$1\leqq k\leqq n-1$ として，

$$(1-p)p^{k-1}(1-p)^2p^{n-k-1}=(1-p)^3p^{n-2}$$

(i)～(iii)より，×が 3 個出る前に○が n 個出る確率 P_n は，

$$P_n=(1-p)p^{n-1}+(1-p)p^n+\sum_{k=1}^{n-1}(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-1}(1+p)+(n-1)(1-p)^3p^{n-2}$$
$$=(1-p)p^{n-2}\{p(1+p)+(n-1)(1-p)^2\}$$

$$= (1-p)\,p^{n-2}\{\,np^2 - (2n-3)\,p + n - 1\,\}$$

コメント

(1)と(2)で具体例を練習し，(3)で一般化する問題です。注意深く考えていけば，完答できます。

問　題

N を 1 以上の整数とする。数字 1, 2, …, N が書かれたカードを 1 枚ずつ, 計 N 枚用意し, 甲, 乙の 2 人が次の手順でゲームを行う。

(i)　甲が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を a とする。引いたカードはもとに戻す。

(ii)　甲はもう 1 回カードを引くかどうかを選択する。引いた場合は, そのカードに書かれた数を b とする。引いたカードはもとに戻す。引かなかった場合は, $b=0$ とする。$a+b>N$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iii)　$a+b\leqq N$ の場合は, 乙が 1 枚カードを引く。そのカードに書かれた数を c とする。引いたカードはもとに戻す。$a+b<c$ の場合は乙の勝ちとし, ゲームは終了する。

(iv)　$a+b\geqq c$ の場合は, 乙はもう 1 回カードを引く。そのカードに書かれた数を d とする。$a+b<c+d\leqq N$ の場合は乙の勝ちとし, それ以外の場合は甲の勝ちとする。

(ii)の段階で, 甲にとってどちらの選択が有利であるかを, a の値に応じて考える。以下の問いに答えよ。

(1)　甲が 2 回目にカードを引かないことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

(2)　甲が 2 回目にカードを引くことにしたとき, 甲の勝つ確率を a を用いて表せ。

ただし, 各カードが引かれる確率は等しいものとする。　[2005]

解答例

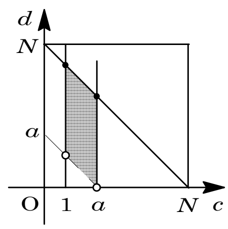
(1)　まず, $b=0$ のとき, $a+b>N$ となることはありえないので, 乙が勝つのは次の 2 通りとなる。

(i)　$c>a$ のとき

$a<c\leqq N$ より, 条件を満たす整数 c は $N-a$ 個存在するので, このときの乙の勝つ確率は, $\dfrac{N-a}{N}$ である。

(ii)　$c\leqq a$ かつ $a<c+d\leqq N$ のとき

条件を満たす整数$(c,\ d)$は, 右図の網点部の格子点が対応し, その個数が $a(N-a)$ より, このときの乙の勝つ確率は, $\dfrac{a(N-a)}{N^2}$ である。



(i)(ii)より, 乙が勝つ確率は, $\dfrac{N-a}{N}+\dfrac{a(N-a)}{N^2}=\dfrac{N^2-a^2}{N^2}$

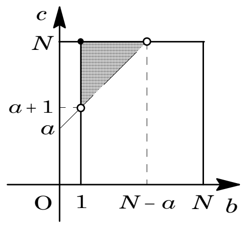
よって, 甲が勝つ確率は, $1-\dfrac{N^2-a^2}{N^2}=\dfrac{a^2}{N^2}$ である。

(2)　$b \geqq 1$ のとき，乙が勝つ場合は次の 3 通りである。

(i)　$a+b>N$ のとき

$N-a<b \leqq N$ より，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{N-(N-a)}{N}=\dfrac{a}{N}$ である。

(ii)　$a+b \leqq N$ かつ $a+b<c$ のとき



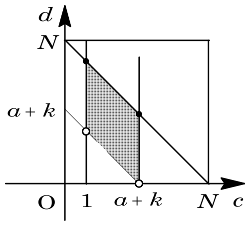
条件を満たす整数 $(b,\ c)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は，

$$1+2+\cdots\cdots+(N-a-1)=\frac{1}{2}(N-a-1)(N-a)$$

よって，このときの乙の勝つ確率は，$\dfrac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}$

(iii)　$a+b \leqq N$ かつ $a+b \geqq c$ かつ $a+b<c+d \leqq N$ のとき

まず b を固定し，$b=k\ (1 \leqq k \leqq N-a)$ における乙の勝つ確率を p_k とおく。



条件を満たす整数 $(c,\ d)$ は，右図の網点部の格子点が対応し，その個数は $(a+k)(N-a-k)$ となるので，

$$p_k=\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}$$

ここで，甲が数字 k の書かれたカードを引く確率はつねに $\dfrac{1}{N}$ なので，このとき乙の勝つ確率 P は，

$$P=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}p_k=\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N-a}\frac{(a+k)(N-a-k)}{N^2}=\frac{1}{N^3}\sum_{k=1}^{N-a}(a+k)(N-a-k)$$

ここで，$a+k=l$ とおくと，

$$P=\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l(N-l)=\frac{1}{N^2}\sum_{l=a+1}^{N}l-\frac{1}{N^3}\sum_{l=a+1}^{N}l^2$$

$$=\frac{(N+a+1)(N-a)}{2N^2}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

(i)(ii)(iii)より，乙が勝つ確率は，

$$\frac{a}{N}+\frac{(N-a-1)(N-a)}{2N^2}+P$$

$$=\frac{a}{N}+\frac{N-a}{N}-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

$$=1-\frac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$$

よって，甲が勝つ確率は，$\dfrac{1}{6N^3}\{N(N+1)(2N+1)-a(a+1)(2a+1)\}$ である。

コメント

問題文で乙の勝つ場合が設定されているので，(1)(2)とも乙が勝つ事象の余事象として，甲の勝つ確率を求めました。格子点の個数を対応させ，朴訥に解いてみました。

問　題

片面を白色に，もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ，次の操作をくり返し行う。

さいころを振り，出た目が 1，2 であれば左端の板を裏返し，3，4 であればまん中の板を裏返し，5, 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば，最初，板の表の色の並び方が「白白白」であったとし，1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば，色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば，色の並び方は「黒白黒」となる。

(1)　「白白白」から始めて，3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2)　「白白白」から始めて，n 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」または「白黒白」または「白白黒」となる確率を p_n とする。p_{2k+1}（k は自然数）を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2004]

解答例

(1)　正方形の 3 枚の板を，左から A，B，C とする。3 回の操作の結果，色の並び方が「黒白白」となるのは 3 つの場合があり，確率はそれぞれ次のようになる。

(i)　A を 3 回裏返す場合　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{1}{27}$

(ii)　A を 1 回裏返し B を 2 回裏返す場合　${}_3\mathrm{C}_1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

(iii)　A を 1 回裏返し C を 2 回裏返す場合　${}_3\mathrm{C}_1\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{1}{9}$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{27}+\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{27}$ である。

(2)　n 回の操作の結果，黒の板が 1 枚である確率が p_n であり，また 2 枚，3 枚，0 枚である確率をそれぞれ q_n，r_n，s_n とおくと，

$$p_{n+1}=s_n+\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots①,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+r_n\cdots\cdots\cdots②$$

$$r_{n+1}=\frac{1}{3}q_n\cdots\cdots\cdots③,\quad s_{n+1}=\frac{1}{3}p_n\cdots\cdots\cdots④$$

①②に③④を代入すると，$n\geqq 2$ として，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_{n-1}+\frac{2}{3}q_n\cdots\cdots\cdots⑤,\quad q_{n+1}=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}q_{n-1}\cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より，$q_n=\dfrac{3}{2}\left(p_{n+1}-\dfrac{1}{3}p_{n-1}\right)=\dfrac{3}{2}p_{n+1}-\dfrac{1}{2}p_{n-1}$

⑥に代入すると，$n\geqq 3$ として，

$$\frac{3}{2}p_{n+2}-\frac{1}{2}p_n=\frac{2}{3}p_n+\frac{1}{3}\left(\frac{3}{2}p_n-\frac{1}{2}p_{n-2}\right),\quad 9p_{n+2}=10p_n-p_{n-2}$$

ここで，$n=2k-1$ $(k \geqq 2)$ とおくと，

$$9p_{2k+1}=10p_{2k-1}-p_{2k-3},\quad p_{2k+1}=\frac{10}{9}p_{2k-1}-\frac{1}{9}p_{2k-3}\cdots\cdots\cdots⑦$$

さて，$p_1=1$ で，(1)より $p_3=\dfrac{7}{27}\times 3=\dfrac{7}{9}$ から，⑦を変形すると，

$$p_{2k+1}-p_{2k-1}=\frac{1}{9}(p_{2k-1}-p_{2k-3})=(p_3-p_1)\left(\frac{1}{9}\right)^{k-1}=-2\left(\frac{1}{9}\right)^{k}\cdots\cdots\cdots⑧$$

$$p_{2k+1}-\frac{1}{9}p_{2k-1}=p_{2k-1}-\frac{1}{9}p_{2k-3}=p_3-\frac{1}{9}p_1=\frac{2}{3}\cdots\cdots\cdots⑨$$

⑨×9－⑧より，$8p_{2k+1}=6+2\left(\dfrac{1}{9}\right)^k$，$p_{2k+1}=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\left(\dfrac{1}{9}\right)^k$

$k=1$ をあてはめると $p_3=\dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{1}{9}=\dfrac{7}{9}$ となり，このときも満たされている。

コメント

奇数回だけに限定せずに，一般的に漸化式を立てて解きました。なお，理系に類題が出ています。

問　題

さいころを振り，出た目の数で 17 を割った余りをX_1とする。ただし，1 で割った余りは 0 である。

さらにさいころを振り，出た目の数でX_1を割った余りをX_2とする。以下同様にして，X_nが決まればさいころを振り，出た目の数でX_nを割った余りをX_{n+1}とする。

このようにして，X_n，$n=1$，2，…を定める。

(1)　$X_3=0$となる確率を求めよ。

(2)　各nに対し，$X_n=5$となる確率を求めよ。

(3)　各nに対し，$X_n=1$となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。　[2003]

解答例

(1)　17 を 1 から 6 までの数で割った余りがX_1より，X_1の各々の値に対する確率は右表のようになる。

X_1	0	1	2	5
確率	$\frac{1}{6}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{6}$

次に，X_nを 1 から 6 までの数で割った余りがX_{n+1}より，$X_n=0$のとき，どんな場合も$X_{n+1}=0$である。

$X_n=1$のとき，$X_{n+1}=0$となる確率は$\frac{1}{6}$，$X_{n+1}=1$となる確率は$\frac{5}{6}$である。

$X_n=2$のとき，$X_{n+1}=0$となる確率は$\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$となる確率は$\frac{2}{3}$である。

さらに，$X_n=5$のとき，$X_{n+1}=0$となる確率は$\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=1$となる確率は$\frac{1}{3}$，$X_{n+1}=2$となる確率は$\frac{1}{6}$，$X_{n+1}=5$となる確率は$\frac{1}{6}$である。

ここで，$X_n=0$，$X_n=1$，$X_n=2$，$X_n=5$となる確率を，それぞれa_n，b_n，c_n，d_nとおくと，$a_1=\frac{1}{6}$，$b_1=\frac{1}{3}$，$c_1=\frac{1}{3}$，$d_1=\frac{1}{6}$であり，

$$a_2=a_1+\frac{1}{6}b_1+\frac{1}{3}c_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{7}{18},\quad b_2=\frac{5}{6}b_1+\frac{1}{3}d_1=\frac{1}{3}$$

$$c_2=\frac{2}{3}c_1+\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{4},\quad d_2=\frac{1}{6}d_1=\frac{1}{36}$$

よって，$X_3=0$となる確率は,

$$a_3=a_2+\frac{1}{6}b_2+\frac{1}{3}c_2+\frac{1}{3}d_2=\frac{29}{54}$$

(2)　(1)と同様にすると，$d_{n+1}=\frac{1}{6}d_n$となり，$X_n=5$となる確率は,

$$d_n=d_1\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(3)　(1)と同様にし, (2)の結果を用いると，$b_{n+1}=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3}d_n=\frac{5}{6}b_n+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{6}\right)^n$

$$b_{n+1}+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{5}{6}\left\{b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}$$

$$b_n+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(b_1+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6}\right)\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{5}{12}\left(\frac{5}{6}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

よって，$X_n=1$となる確率は,

$$b_n=\frac{1}{2}\left(\frac{5}{6}\right)^n-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

コメント

(1)で一般的に考えておくと, (2)と(3)は漸化式を解くだけで済みます。

問　題

コインを投げる試行の結果によって，数直線上にある 2 点 A，B を次のように動かす。

表が出た場合：点 A の座標が点 B の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, A のみ正の方向に 1 動かす。

裏が出た場合：点 B の座標が点 A の座標より大きいときは，A と B を共に正の方向に 1 動かす。そうでないときは, B のみ正の方向に 1 動かす。

最初 2 点 A，B は原点にあるものとし，上記の試行を n 回繰り返して A と B を動かしていった結果, A, B の到達した点の座標をそれぞれ a, b とする。

(1)　n 回コインを投げたときの表裏の出方の場合の数 2^n 通りのうち，$a=b$ となる場合の数を X_n とおく。X_{n+1} と X_n の間の関係式を求めよ。

(2)　X_n を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　最初，2 点 A，B はともに原点にあるので，n 回の試行の後，2 点 A，B の距離は 1 以下である。すなわち，$a=b$ または $a=b\pm1$ となる。

ここで，n 回の試行の後，$a=b$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表，裏のいずれでも $a\neq b$ となる。

また，n 回の試行の後，$a=b+1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが裏のとき $a=b$ となり，n 回の試行の後，$a=b-1$ であるとき，$n+1$ 回目に投げたコインが表のとき $a=b$ となる。

条件より，n 回の試行の後 $a=b$ となる場合の数が X_n，$a\neq b$ となる場合の数が 2^n-X_n より，

$$X_{n+1}=2^n-X_n$$

(2)　1 回目の試行の後, A, B の位置は $(a,\ b)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$ より $X_1=0$ となる。

(1)より，$X_{n+1}-\frac{1}{3}\cdot2^{n+1}=-\left(X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n\right)$

$$X_n-\frac{1}{3}\cdot2^n=\left(X_1-\frac{1}{3}\cdot2^1\right)(-1)^{n-1}=-\frac{2}{3}(-1)^{n-1}=\frac{2}{3}(-1)^n$$

よって，$X_n=\frac{2}{3}(-1)^n+\frac{1}{3}\cdot2^n$

コメント

コインの表裏がどんな出方をしても，A，B の距離の差は，つねに 1 以下です。この点を見つけるのがポイントとなっています。

問　題

正四面体の各頂点を A_1, A_2, A_3, A_4 とする。ある頂点にいる動点 X は，同じ頂点にとどまることなく，1 秒ごとに他の 3 つの頂点に同じ確率で移動する。X が A_i に n 秒後に存在する確率を $P_i(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ で表す。

$P_1(0)=\frac{1}{4}$，$P_2(0)=\frac{1}{2}$，$P_3(0)=\frac{1}{8}$，$P_4(0)=\frac{1}{8}$ とするとき，$P_1(n)$ と $P_2(n)$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。 [2000]

解答例

$P_1(n)=a_n$，$P_2(n)=b_n$，$P_3(n)=c_n$，$P_4(n)=d_n$ とおくと，$a_0=\frac{1}{4}$，$b_0=\frac{1}{2}$，$c_0=\frac{1}{8}$，$d_0=\frac{1}{8}$ となる。すると，条件より，

$$a_{n+1}=\frac{1}{3}(b_n+c_n+d_n)\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+c_n+d_n)\cdots\cdots\cdots②$$

①－②より，$a_{n+1}-b_{n+1}=-\frac{1}{3}(a_n-b_n)$

$$a_n-b_n=(a_0-b_0)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=-\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n\cdots\cdots\cdots③$$

①＋②より，$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+b_n+2c_n+2d_n)$

ここで，$a_n+b_n+c_n+d_n=1$ なので，$c_n+d_n=1-a_n-b_n$ より，

$$a_{n+1}+b_{n+1}=\frac{1}{3}(a_n+b_n+2-2a_n-2b_n)=-\frac{1}{3}(a_n+b_n)+\frac{2}{3}$$

変形して，$a_{n+1}+b_{n+1}-\frac{1}{2}=-\frac{1}{3}\left(a_n+b_n-\frac{1}{2}\right)$

$$a_n+b_n-\frac{1}{2}=\left(a_0+b_0-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$a_n+b_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots④$

③④より，$a_n=\frac{1}{4}$，$b_n=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$

すなわち，$P_1(n)=\frac{1}{4}$，$P_2(n)=\frac{1}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n+\frac{1}{4}$

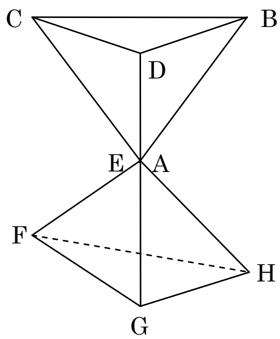
コメント

最初に考えた解を書きましたが，①と②に全確率の和が 1 を適用すると，解が簡単になります。ついつい連立風に解いてしまいました。

問　題

(1)　四面体 ABCD の各辺はそれぞれ確率$\dfrac{1}{2}$で電流を通すものとする。このとき，頂点 A から B に電流が流れる確率を求めよ。ただし，各辺が電流を通すか通さないかは独立で，辺以外は電流を通さないものとする。

(2)　(1)で考えたような 2 つの四面体 ABCD と EFGH を図のように頂点 A と E でつないだとき，頂点 B から F に電流が流れる確率を求めよ。　[1999]

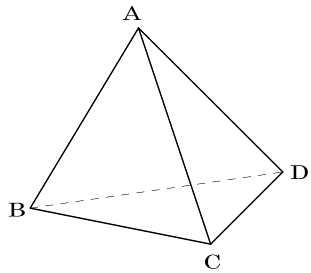


解答例

(1)　辺 AB が電流を通すかどうかで場合分けをする。

(i)　辺 AB が電流を通すとき

点 A から B に電流が流れる確率は$\dfrac{1}{2}$である。

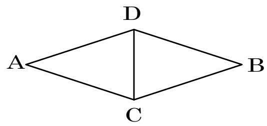


(ii)　辺 AB が電流を通さないとき

点 A から B に電流が流れない確率は$\dfrac{1}{2}$である。

(ii-i)　辺 CD が電流を通さないとき

辺 CD が電流を通さない確率は$\dfrac{1}{2}$で，そのとき点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD と DB がともに電流を通すか，または辺 AC と CB がともに電流を通す場合である。その確率は，



$$\frac{1}{2}\times\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^4\right\}=\frac{7}{32}$$

(ii-ii)　辺 CD が電流を通すとき

辺 CD が電流を通す確率は$\dfrac{1}{2}$で，そのとき点 A から B に電流が流れるのは，辺 AD, AC の少なくとも一方が電流を通し，しかも辺 DB, CB の少なくとも一方が電流を通す場合である。その確率は，

$$\frac{1}{2}\times\left[\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\times\left\{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}\right]=\frac{9}{32}$$

(ii-i)(ii-ii)より，点 A から B に電流が流れる確率は，$\dfrac{1}{2}\times\left(\dfrac{7}{32}+\dfrac{9}{32}\right)=\dfrac{1}{4}$

(i)(ii)より，求める点 A から B に電流が流れる確率は$\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{3}{4}$である。

(2)　(1)より点 B から A に電流が流れる確率は$\dfrac{3}{4}$で，同様に考えると，点 E から F に

電流が流れる確率も$\dfrac{3}{4}$となる。

よって，点 B から F に電流が流れる確率は$\dfrac{3}{4}\times\dfrac{3}{4}=\dfrac{9}{16}$となる。

コメント

点 A から B に電流が流れる確率を求めようか，それとも流れない確率を求めようかと迷ってしまいました。結局，前者の方で解を考えましたが，辺 AB の状態，さらに辺 CD の状態で場合分けが必要でした。

問　題

以下の命題 A, B それぞれに対し，その真偽を述べよ。また，真ならば証明を与え，偽ならば反例を与えよ。

命題 A　n が正の整数ならば，$\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ が成り立つ。

命題 B　整数 n，m，l が $5n+5m+3l=1$ を満たすならば，$10nm+3ml+3nl<0$ が成り立つ。　[2015]

解答例

(a)　命題 A については，偽となり，反例は $n=17$ である。

$f(n)=n^2(n-26)+2600$ とすると，

$$f(17)=17^2(17-26)+2600=-1<0$$

よって，$n=17$ のとき，$n^3+2600<26n^2$ となり，$\dfrac{n^3}{26}+100\geqq n^2$ は成立しない。

(b)　命題 B については，真となり，証明は以下の通りである。

整数 n, m, l に対して $5n+5m+3l=1$ より，$3l=1-5(n+m)$ ……(＊)となり，

$$10nm+3ml+3nl=10nm+\{1-5(n+m)\}(m+n)$$

$$=10mn-5(m+n)^2+(m+n)=-5m^2-5n^2+m+n$$

$$=-5\left\{\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{50}\right\}$$

ここで，n, m は整数より，$\left(m-\dfrac{1}{10}\right)^2\geqq\dfrac{1}{100}$ かつ $\left(n-\dfrac{1}{10}\right)^2\geqq\dfrac{1}{100}$ より，

$$-5\left\{\left(m-\frac{1}{10}\right)^2+\left(n-\frac{1}{10}\right)^2-\frac{1}{50}\right\}\leqq 0$$

等号が成立するのは，$m=n=0$ の場合だけであるが，このとき(＊)から，l が整数という条件に反する。

すなわち，$-5\left\{\left(m-\dfrac{1}{10}\right)^2+\left(n-\dfrac{1}{10}\right)^2-\dfrac{1}{50}\right\}<0$ より，$10nm+3ml+3nl<0$ となる。

コメント

命題 A については，x を正の実数として，関数 $f(x)=x^2(x-26)+2600$ を設定し，微分して増減を調べると，$x=\dfrac{52}{3}=17+\dfrac{1}{3}$ において極小値をとることがわかります。これより，$f(17)$ と $f(18)$ の値を調べるということになり，$f(17)<0$ が判明したわけです。また，命題 B については，証明の締めを mn 平面上で示すという手も考えられます。

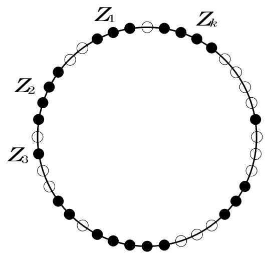
問　題

円周上に m 個の赤い点と n 個の青い点を任意の順序に並べる。これらの点により，円周は $m+n$ 個の弧に分けられる。このとき，これらの弧のうち両端の点の色が異なるものの数は偶数であることを証明せよ。ただし，$m\geqq 1$, $n\geqq 1$ であるとする。

[2002]

解答例

m 個の赤い点に注目して，隣り合って並んでいるものを 1 つのゾーンとして考え，順に Z_1，Z_2，…，Z_k とする。ただし，$k\leqq m$ である。



すると，これらのゾーンの内部には両端の色の異なる弧は存在しない。しかも，これらのゾーンの両側に 1 つずつだけ両端の色の異なる弧が存在する。

これより，両端の色の異なる弧の数は $2k$ 個であり，偶数となる。

コメント

上のような図を書いて，両端の色の異なる弧がどこにあるかを調べました。それをまとめて書くと，このような解になります。

問　題

白石 180 個と黒石 181 個の合わせて 361 個の碁石が横に一列に並んでいる。碁石がどのように並んでいても，次の条件を満たす黒の碁石が少なくとも 1 つあることを示せ。

その黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる。ただし，碁石が 1 つも残らない場合も同数とみなす。　[2001]

解答例

まず，左端が黒石の場合，この左端の黒の碁石とその右にある碁石をすべて除くと，1 つの碁石も残らないので，条件より白石と黒石が同数となる。

次に，右端が黒石の場合，この右端の黒の碁石を除くと，残りは白石 180 個と黒石 180 個となり，白石と黒石が同数となる。

したがって，以下，両端が白石の場合について考える。

ここで，左端から k 番目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ 181)$ の黒石とそれより右側にある碁石をすべて取り除いたとき，どんな k に対しても白黒同数とならないのは，左端が白石ということより，白石の個数が黒石の個数よりつねに大きい場合である。

すなわち，左端から k 番目の黒石の左側にある白石の個数を a_k とすると，

$$a_k > k-1,\ a_k \geqq k$$

すると，$a_{180} \geqq 180$ となるが，右端が白石なので $a_{180} \leqq 179$ である。

以上より，両端が白石の場合についても，黒の碁石とそれより右にある碁石をすべて除くと，残りは白石と黒石が同数となる場合がある。

コメント

パズルのような問題です。まず，碁石の数を少なくして考え，題意の成立を確認しました。しかし，この証明をどのように記述すればよいのか，その方法にずいぶん時間を費やしてしまいました。

問　題

(1)　一般角θに対して$\sin\theta$，$\cos\theta$の定義を述べよ。

(2)　(1)で述べた定義にもとづき，一般角α，βに対して

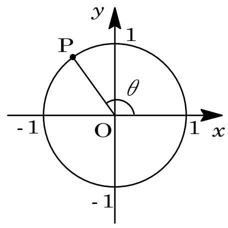
$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta,\quad \cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

を証明せよ。 [1999]

解答例

(1)　単位円周上の点を$\mathrm{P}(x,\ y)$とし，動径 OP に対してx軸の正の部分から反時計まわりに測った角をθとする。

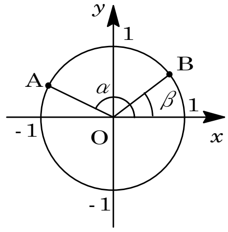
このとき，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$



(2)　単位円周上の 2 点 A, B について, OA, OB に対してx軸の正の部分から反時計まわりに測った角をそれぞれα，βとすると，$\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$，$\mathrm{B}(\cos\beta,\ \sin\beta)$となる。

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$より$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=\cos^2\beta+\sin^2\beta=1$

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2&=(\cos\alpha-\cos\beta)^2+(\sin\alpha-\sin\beta)^2\\&=2-2(\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta)\end{aligned}$$



このとき, 2 点 A, B を O を中心として時計まわりにβだけ回転すると，点 A は点$\mathrm{A}'\big(\cos(\alpha-\beta),\ \sin(\alpha-\beta)\big)$，点 B は点$\mathrm{B}'(1,\ 0)$にうつる。

$$\begin{aligned}\mathrm{A}'\mathrm{B}'^2&=\left\{\cos(\alpha-\beta)-1\right\}^2+\sin^2(\alpha-\beta)\\&=2-2\cos(\alpha-\beta)\end{aligned}$$

$\mathrm{AB}=\mathrm{A}'\mathrm{B}'$より，$\cos(\alpha-\beta)=\cos\alpha\cos\beta+\sin\alpha\sin\beta$………①

①においてβを$-\beta$に置き換えると

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos(-\beta)+\sin\alpha\sin(-\beta)\text{………②}$$

さて，単位円周上の点を$\mathrm{Q}(x',\ y')$とし，動径 OQ に対してx軸の正の部分から時計まわりに測った角をθとすると，$x'=\cos(-\theta)$，$y'=\sin(-\theta)$

ここで，点 Q は(1)の点 P とx軸対称となるので，$x'=x$，$y'=-y$

よって，$\cos(-\theta)=\cos\theta$，$\sin(-\theta)=-\sin\theta$となり，②より，

$$\cos(\alpha+\beta)=\cos\alpha\cos\beta-\sin\alpha\sin\beta$$

①においてαを$90°-\alpha$に置き換えると

$$\cos\big(90°-(\alpha+\beta)\big)=\cos(90°-\alpha)\cos\beta+\sin(90°-\alpha)\sin\beta\text{………③}$$

さらに，単位円周上の点を$\mathrm{R}(x'',\ y'')$とし，動径 OR に対してy軸の正の部分から時計まわりに測った角をθとすると，$x''=\cos(90°-\theta)$，$y''=\sin(90°-\theta)$

点 R は(1)の点 P と直線$y=x$について対称となるので，$x''=y$，$y''=x$

よって，$\cos(90°-\theta)=\sin\theta$，$\sin(90°-\theta)=\cos\theta$ となり，③より，

$$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$$

コメント

この問題で，三角関数の公式の証明が 30 年前に京大で出たのを思い出しました。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆