1　　［筑波大］

α を実数でない複素数とし，β を正の実数とする。以下の問いに答えよ。ただし，複素数 w に対してその共役複素数を $\overline{w}$ で表す。

(1)　複素数平面上で，関係式 $\alpha\overline{z}+\overline{\alpha}z=|z|^2$ を満たす複素数 z の描く図形を C とする。このとき，C は原点を通る円であることを示せ。

(2)　複素数平面上で，$(z-\alpha)(\beta-\overline{\alpha})$ が純虚数となる複素数 z の描く図形を L とする。L は(1)で定めた C と 2 つの共有点をもつことを示せ。また，その 2 点を P，Q とするとき，線分 PQ の長さを α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

(3)　β の表す複素数平面上の点を R とする。(2)で定めた点 P，Q と点 R を頂点とする三角形が正三角形であるとき，β を α と $\overline{\alpha}$ を用いて表せ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［筑波大］

(1)　$\alpha\bar{z}+\bar{\alpha}z=|z|^2$ より，$|z|^2-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z=0$ となり，$|z|^2-\alpha\bar{z}-\bar{\alpha}z+\alpha\bar{\alpha}=\alpha\bar{\alpha}$ から，

$$(z-\alpha)(\bar{z}-\bar{\alpha})=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|^2=|\alpha|^2,\ |z-\alpha|=|\alpha|$$

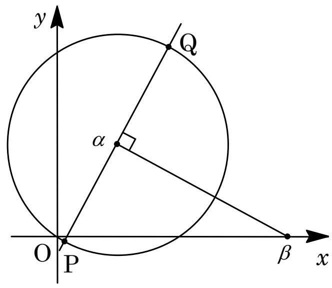
よって，z の描く図形 C は，点 α を中心とし半径が $|\alpha|$ の円である。すなわち，原点を通る円となる。

(2)　α は虚数，β は正の実数より，$\beta-\bar{\alpha}=\overline{\beta-\alpha}$ である。

さて，$w=(z-\alpha)(\beta-\bar{\alpha})$ とおくと，

$$w=(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})=\frac{(z-\alpha)(\overline{\beta-\alpha})(\beta-\alpha)}{(\beta-\alpha)}=\frac{z-\alpha}{\beta-\alpha}|\beta-\alpha|^2$$

ここで，w は純虚数より，$\dfrac{z-\alpha}{\beta-\alpha}$ は純虚数となる。



すると，z の描く図形 L は，点 α を通り，点 α と点 β を結ぶ線分に垂直な直線 $(z\neq\alpha)$ であり，C と L は 2 つの共有点をもつ。この 2 点を P, Q とすると，P, Q は円 C の直径の両端となるので，

$$\mathrm{PQ}=2|\alpha|=2\sqrt{\alpha\bar{\alpha}}$$

(3)　$\mathrm{R}(\beta)$ としたとき，$\mathrm{RP}=\mathrm{RQ}$ から，$\triangle\mathrm{PQR}$ が正三角形になる条件は，$\angle\mathrm{PQR}=\dfrac{\pi}{3}$ より，

$$|\beta-\alpha|=\sqrt{3}|\alpha|,\ (\beta-\alpha)(\beta-\bar{\alpha})=3\alpha\bar{\alpha},\ \beta^2-(\alpha+\bar{\alpha})\beta-2\alpha\bar{\alpha}=0$$

すると，$\beta>0$ より，$\beta=\dfrac{\alpha+\bar{\alpha}+\sqrt{(\alpha+\bar{\alpha})^2+8\alpha\bar{\alpha}}}{2}=\dfrac{\alpha+\bar{\alpha}+\sqrt{\alpha^2+10\alpha\bar{\alpha}+\bar{\alpha}^2}}{2}$

［解　説］

現行課程で復活した複素数と図形の問題です。複素数平面上で，円と直線の表現方法が問われています。