1．数列

$\boxed{1}$

［A］

次の値を求めよ。

(1) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+2)}$

(2) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k(k+1)(k+2)}$

(3) $\displaystyle\sum_{k=1}^{9}\frac{18}{k(k+1)(k+2)(k+3)}$

［B］

数列 $\{a_k\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n が $S_n=3n^2+4n+2$ $(n=1, 2, 3, \cdots\cdots)$ と表されている。

(1) 一般項 a_k を求めよ。

(2) 数列 $\{(a_k)^2\}$ の初項から第 n 項までの和を n で表せ。

［C］

$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(k\cdot 2^{k+2})=\square+(n-\square)\square^{n+\square}$ である。

（頻出問題）

$\boxed{2}$

次の漸化式で定義される数列 $\{a_n\}$ の一般項 a_n を求めよ。ただし, $n\geqq 1$ とする。

(1) $a_1=-1$, $a_{n+1}=-3a_n+2$

(2) $a_1=1$, $a_{n+1}=4a_n+3^n$

(3) $a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+2n-3$

(4) $a_1=1$, $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{3a_n-1}$

(5) $a_1=1$, $a_{n+1}=a_n+\dfrac{1}{(n+1)(n+2)}$

(6) $a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}+2a_{n+1}-3a_n=0$

(7) $a_1=0$, $a_2=1$, $a_{n+2}-4a_{n+1}+4a_n=0$

(8) $a_1=1$, $a_2=2$, $a_{n+1}^5=a_{n+2}a_n^4$

・この人生をそっくりそのままもう一度繰り返してもよい,
　そう思える生き方をせよ。

$\boxed{3}$

次の条件によって定義される数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ の一般項を求めよ。ただし, $n \geqq 1$ とする。

(1) $\begin{cases} a_1 = 3 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + b_n \\ b_{n+1} = a_n + 2b_n \end{cases}$

(2) $\begin{cases} a_1 = 2 \\ b_1 = 1 \end{cases}$ $\begin{cases} a_{n+1} = a_n + 2b_n \\ b_{n+1} = -a_n + 4b_n \end{cases}$

$\boxed{4}$

つぼ A , B があり, つぼ A には赤球 5 個と黒球 3 個, つぼ B には赤球 1 個と黒球 3 個が入っている。最初に, つぼ A の中をよくかき混ぜて球を 1 つ取り出し, 色を見て元へ戻す。次に, この球の色が赤ならばつぼ A から, 黒ならばつぼ B から, つぼの中をよく混ぜて球を 1 つ取り出し, 色を見て元に戻す。以後同様に, 前回取り出した球の色によってつぼを選び, 球を取り出す操作を繰り返す。このとき, n 回目に赤球が出る確率を p_n とする。

(1) $p_1 = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$, $p_2 = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}$ である。

(2) p_{n+1} を p_n で表すと, $p_{n+1} = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} p_n + \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}(1 - p_n)$ である。これより

$p_n = \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}} + \dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\left(\dfrac{\boxed{}}{\boxed{}}\right)^n$ $(n = 1, 2, 3, \cdots\cdots)$ が得られる。

（東京理科大）

・山を動かす人は, まず, 小石を動かすことから始める。

$\boxed{5}$

2 辺の長さが 1 と 2 の長方形と 1 辺の長さが 2 の正方形の 2 種類のタイルがある。縦 2 , 横 n の長方形の部屋をこれらのタイルで過不足なく敷きつめることを考える。そのような並べ方の総数を A_n で表す。ただし n は正の整数である。たとえば $A_1=1$, $A_2=3$, $A_3=5$ である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) $n \geqq 3$ のとき, A_n を A_{n-1} , A_{n-2} を用いて表せ。

(2) A_n を n で表せ。

（東京大）

$\boxed{6}$

箱 A , 箱 B のそれぞれに赤玉が 1 個, 白玉が 3 個, 合計 4 個ずつ入っている。1 回の試行で箱 A の玉 1 個と箱 B の玉 1 個を無作為に選び交換する。この試行を n 回繰り返した後, 箱 A に赤玉が 1 個, 白玉が 3 個入っている確率 p_n を求めよ。

（一橋大）

・志望校を変えるな！　自分を変えろ！

$\boxed{7}$

AとBの2人が, 1個のサイコロを次の手順により投げ合う。

1回目はAが投げる。

1, 2, 3の目が出たら, 次の回には同じ人が投げる。

4, 5の目が出たら, 次の回には別の人が投げる。

6の目が出たら, 投げた人を勝ちとし, それ以降は投げない。

(1) n 回目にAがサイコロを投げる確率 a_n を求めよ。

(2) ちょうど n 回目のサイコロ投げでAが勝つ確率 p_n を求めよ。

(3) n 回以内のサイコロ投げでAが勝つ確率 q_n を求めよ。

(一橋大)

$\boxed{8}$

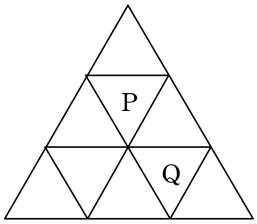
先頭車両から順に1から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n \geqq 2$ とする。各車両を赤色, 青色, 黄色のいずれか一色で塗るとき, 隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。

(京都大)

・今あるもので, 今いる場所で, できることをやりなさい。

$\boxed{9}$

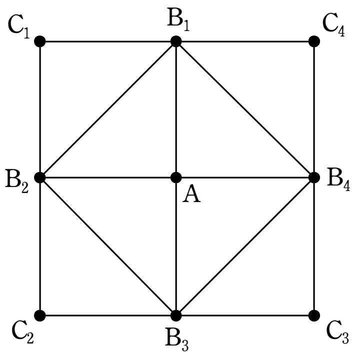
図のように, 正三角形を 9 つの部屋に辺で区切り, 部屋 P , Q を定める。1 つの球が部屋 P を出発し, 1 秒ごとに, そのままその部屋にとどまることなく, 辺を共有する隣の部屋に等確率で移動する。球が n 秒後に部屋 Q にある確率を求めよ。



（東京大）

$\boxed{10}$

下図のように 9 個の点 A , B_1 , B_2 , B_3 , B_4 , C_1 , C_2 , C_3 , C_4 とそれらを結ぶ 16 本の線分からなる図形がある。この図形上にある物体 U は, 毎秒ひとつの点から線分で結ばれている別の点へ移動する。ただし U は線分で結ばれているどの点にも等確率で移動するとする。最初に点 A にあった物体 U が, n 秒後に点 A にある確率を a_n とすると, $a_0=1$, $a_1=0$ である。このとき $a_n\,(n\geqq 2)$ を求めよ。



（早稲田大）

・Choose your future !!

$\boxed{11}$

片面を白色に, もう片面を黒色に塗った正方形の板が 3 枚ある。この 3 枚の板を机の上に横に並べ, 次の操作を繰り返し行う。

さいころを振り, 出た目が 1 , 2 であれば左端の板を裏返し, 3 , 4 であればまん中の板を裏返し, 5 , 6 であれば右端の板を裏返す。

たとえば, 最初, 板の表の色の並び方が「白白白」であったとし, 1 回目の操作で出たさいころの目が 1 であれば, 色の並び方は「黒白白」となる。さらに 2 回目の操作を行って出たさいころの目が 5 であれば, 色の並び方は「黒白黒」となる。

(1) 「白白白」から始めて, 3 回の操作の結果, 色の並び方が「黒白白」となる確率を求めよ。

(2) 「白白白」から始めて, n 回の操作の結果, 色の並び方が「白白白」または「白黒白」となる確率を求めよ。

注意：さいころは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。

（東京大）

$\boxed{12}$

円 $x^2+(y-1)^2=1$ と外接し, x 軸と接する円で中心の x 座標が正であるものを条件 P を満たす円ということにする。

(1) 条件 P を満たす円の中心は, 曲線 $y=\boxed{\text{(カ)}}$ $(x>0)$ の上にある。また, 条件 P を満たす半径 9 の円を C_1 とし, その中心の x 座標を a_1 とすると, $a_1=\boxed{\text{(キ)}}$ である。

(2) 条件 P を満たし円 C_1 に外接する円を C_2 とする。また, $n=3,4,5,\cdots$ に対し, 条件 P を満たし, 円 C_{n-1} に外接し, かつ円 C_{n-2} と異なる円を C_n とする。円 C_n の中心の x 座標を a_n とするとき, 自然数 n に対し a_{n+1} を a_n を用いて表しなさい。求める過程も書きなさい。

(3) (1) , (2) で定めた数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めなさい。求める過程も書きなさい。

（慶応大）

・一つも馬鹿なことをしないで生きている人間は,
自分で考えているほど賢明ではない。

$\boxed{13}$

座標平面上で, x 座標と y 座標がいずれも整数である点 (x, y) を格子点という。

(1) $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 (x, y) の個数を求めよ。

(2) $y \geqq 0$, $y \leqq 2x$, $x+2y \leqq 20$ を同時に満たす格子点 (x, y) の個数を求めよ。

(頻出問題)

$\boxed{14}$

座標平面上で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n は自然数であるとして, 不等式 $x>0$, $y>0$, $\log_2 \dfrac{y}{x} \leqq x \leqq n$ を満たす格子点の個数を求めよ。

(京都大)

・過去の失敗したやり方には, 必ず自分を知るヒントがある。

$\boxed{15}$

(1) n を自然数とする。不等式

$$y \leqq 2n^2,\ y \geqq \frac{1}{2}x^2,\ x \geqq 0$$

を同時に満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ。

(2) n を自然数とする。不等式

$$y \geqq 0,\ y \leqq \sqrt{x},\ 0 \leqq x \leqq n^2$$

を同時に満たす整数の組 (x, y) の個数を求めよ。

（お茶の水女子大）

$\boxed{16}$

N を正の整数とする。$2N$ 以下の正の整数 m, n からなる組 (m, n) で方程式 $x^2 - nx + m = 0$ が N 以上の実数解をもつようなものは何組あるか。

（東工大）

・事実がわからなくても，前進するのだ。
　やっているうちに事実が見えてくる。

$\boxed{17}$

二つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を次の漸化式によって定める。

$$a_1=3,\ b_1=1$$

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}(3a_n+5b_n)$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}(a_n+3b_n)$$

(1) すべての自然数 n について, $a_n^2-5b_n^2=4$ であることを示せ。

(2) すべての自然数 n について, a_n, b_n は自然数かつ a_n+b_n は偶数であることを証明せよ。

（筑波大）

$\boxed{18}$

p が素数であれば, どんな自然数 n についても n^p-n は p で割り切れる。このことを, n についての数学的帰納法で証明せよ。

（京都大）

・偉大なチャンピオンになるには, 自分が一番強いと信じることだ。
そうでないなら, 強いフリをしろ。

$\boxed{19}$

n を正の整数とする。数列 $\{a_k\}$ を

$$a_1=\frac{1}{n(n+1)}, \quad a_{k+1}=-\frac{1}{k+n+1}+\frac{n}{k}\sum_{i=1}^{k}a_i \quad (k=1,2,3,\cdots)$$

によって定める。

(1) a_2 および a_3 を求めよ。

(2) 一般項 a_k を求めよ。

(3) $b_n=\sum_{k=1}^{n}\sqrt{a_k}$ とおくとき, $\lim_{n\to\infty}b_n=\log 2$ を示せ。

（東工大）

（＊） (3) のみ数学Ⅲの内容を含みます。

$\boxed{20}$

整数 $a_n=19^n+(-1)^{n-1}2^{4n-3}$ $(n=1,2,\cdots\cdots)$ のすべてを割り切る素数を求めよ。

（東工大）

・涙とともにパンを食べた者でなければ, 人生の味はわからない。

$\boxed{21}$

整数からなる数列 $\{a_n\}$ を漸化式

$$\begin{cases} a_1=1\,,\,a_2=3 \\ a_{n+2}=3a_{n+1}-7a_n\ (n=1\,,2\,,3\,,\cdots) \end{cases}$$

によって定める。

(1) a_n が偶数となることと, n が 3 の倍数となることは同値であることを示せ。

(2) a_n が 10 の倍数となるための条件を (1) と同様の形式で求めよ。

(東京大)

$\boxed{22}$

数列 $\{a_n\}$ を, 2 でも 3 でも 5 でも割り切れない自然数を小さい順に並べて出来た数列とする。すなわち, $a_1=1$, $a_2=7$, …… である。このとき,

(1) 第10項 a_{10} を求めよ。

(2) 第500項 a_{500} を求めよ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 $8k$ 項までの和を求めよ。ただし, k は自然数とする。

(お茶の水女子大)

・がむしゃらにやれ。
創造主は, 我々を, 試行錯誤によってのみ, 学んでいくように
創られたのだから。

$\boxed{23}$

(1) n が 2 以上の自然数のとき, $1, 2, 3, \cdots, n$ の中から異なる 2 個の自然数を取り出してつくった積のすべての和 S を求めよ。

(2) n が 3 以上の自然数のとき, $1, 2, 3, \cdots, n$ の中から異なる 3 個の自然数を取り出してつくった積のすべての和 T を求めよ。

$\boxed{24}$

場所 1 から場所 n に異なる n 個のものが並んでいる。これらを並べ替えてどれもが元の位置にならないようにする方法の総数を $D(n)$ とする。ただし $n \geqq 2$ とする。

(1) $n=4$ の場合の並べ替え方をすべて書き出して, $D(4)$ を求めよ。

(2) $n \geqq 4$ に対して $D(n)=(n-1)\{D(n-2)+D(n-1)\}$ を証明せよ。

（東工大）

・焦る必要などない。あなたの物語はまだ,
「はじめに」に過ぎないのだから。

２. ベクトル

$\boxed{1}$

三角形 ABC の外心を O , 外接円の半径を 1 とする。

$$4\overrightarrow{OA}+5\overrightarrow{OB}+6\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

であるとき, 辺 AB の長さを求めよ。

（お茶の水女子大）

$\boxed{2}$

△ABC の外心 O から直線 BC , CA , AB に下ろした垂線の足をそれぞれ P , Q , R とするとき, $\overrightarrow{OP}+2\overrightarrow{OQ}+3\overrightarrow{OR}=\vec{0}$ が成立しているとする。

(1) $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$, $\overrightarrow{OC}$ の関係式を求めよ。

(2) ∠A の大きさを求めよ。

（京都大）

・自分の未来に挑戦状を叩きつけろ！！
　それこそがお前の求める生き様だろ！？

$\boxed{3}$

$\triangle ABC$において $\angle BAC=90^\circ$, $|\overrightarrow{AB}|=1$, $|\overrightarrow{AC}|=\sqrt{3}$ とする。$\triangle ABC$の内部の点 P が

$$\frac{\overrightarrow{PA}}{|\overrightarrow{PA}|}+\frac{\overrightarrow{PB}}{|\overrightarrow{PB}|}+\frac{\overrightarrow{PC}}{|\overrightarrow{PC}|}=\vec{0}$$

を満たすとする。

(1) $\angle APB$, $\angle APC$ を求めよ。

(2) $|\overrightarrow{PA}|$, $|\overrightarrow{PB}|$, $|\overrightarrow{PC}|$ を求めよ。

（東京大）

$\boxed{4}$

円に内接する四角形 ABPC は次の条件 (イ) , (ロ) を満たすとする。

(イ) 三角形 ABC は正三角形である。

(ロ) AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{AP}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AC}$, p を用いて表せ。

（京都大）

・不安と楽しみは, いつも同じ場所にある。
どちらに目を向けるかは自分次第だ。

$\boxed{5}$

平面上の 3 つのベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$ が, $|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{3}$, $|\vec{p}|=\sqrt{5}$, $\vec{a}\cdot\vec{p}=2$, $\vec{b}\cdot\vec{p}=3$ を満たすとき, $|\vec{a}-\vec{b}|$ を求めよ。ただし, ベクトル $\vec{u}$, $\vec{v}$ に対して, $\vec{u}\cdot\vec{v}$ は $\vec{u}$ と $\vec{v}$ の内積を表す。

(一橋大)

$\boxed{6}$

O を原点とする座標平面上の 4 点 P_1 , P_2 , P_3 , P_4 で, 条件

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}_{n-1}+\overrightarrow{\mathrm{OP}}_{n+1}=\frac{3}{2}\overrightarrow{\mathrm{OP}}_n \quad (n=2\,,3)$$

を満たすものを考える。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) P_1 , P_2 が曲線 $xy=1$ 上にあるとき, P_3 はこの曲線上にはないことを示せ。

(2) P_1 , P_2 , P_3 が円周 $x^2+y^2=1$ 上にあるとき, P_4 もこの円周上にあることを示せ。

(東京大)

・人生が長かろうと短かろうと,
その価値は「何を目的に生きたか」により決まる。

$\boxed{7}$

平面上の 4 点 O , A , B , C が

$$\mathrm{OA}=4,\ \mathrm{OB}=3,\ \mathrm{OC}=2,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=3$$

を満たすとき, △ABC の面積の最大値を求めよ。

（一橋大）

$\boxed{8}$

点 O を原点とする座標平面上に, 2 点 A$(1, 0)$, B$(\cos\theta, \sin\theta)$ $(90° < \theta < 180°)$ をとり, 以下の条件をみたす 2 点 C , D を考える。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=0,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OD}}=1$$

また, △OAB の面積を S_1 , △OCD の面積を S_2 とおく。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の成分を求めよ。

(2) $S_2=2S_1$ が成り立つとき, θ と S_1 の値を求めよ。

(3) $S=4S_1+3S_2$ を最小にする θ と, そのときの S の値を求めよ。

（筑波大）

・何度敗れてもよい。傷つき, 敗れるたびに,
命の素材は, 底光りを増すのである。

$\boxed{9}$

三角形 ABC において $|\overrightarrow{AC}|=1$, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=k$ である。辺 AB 上に $\overrightarrow{AD}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{AB}$ を満たす点 D をとる。辺 AC 上に $|\overrightarrow{DP}|=\dfrac{1}{3}|\overrightarrow{BC}|$ を満たす点 P が 2 つ存在するための k の条件を求めよ。ただし, $|\overrightarrow{AC}|$, $|\overrightarrow{DP}|$, $|\overrightarrow{BC}|$ はベクトルの長さを表し, $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$ はベクトルの内積を表す。

（一橋大）

$\boxed{10}$

4 点 O$(0,0,0)$, A$(1,2,0)$, B$(2,0,-1)$, C$(0,-2,4)$ を頂点とする四面体 OABC について考える。

(1) 点 D$(3,-2,7)$ に対し, 直線 OD と平面 ABC の交点 P の座標を求めよ。

(2) 頂点 O から平面 ABC に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

（東京理科大）

（＊）この問題の解説後, 外積・平面の方程式について扱います。

・何のために生きるか？　何のために学ぶのかって？
単純なことだ。　人生のラスト 1 秒に笑うためさ。

$\boxed{11}$

空間内の 4 点 $O(0,0,0)$, $A(-1,1,0)$, $B(1,0,0)$, $C(0,1,1)$ をとる。

(1) 直線 OA 上の点 H をとって CH と OA が垂直であるようにする。H の座標を求めよ。$\angle CHC'=\theta$ として $\cos\theta$ の値を求めよ。ただし, $C'(0,1,0)$ とする。

(2) 直線 OA 上の点 P と直線 BC 上の点 Q との距離 PQ が最小となる P , Q の座標を求めよ。

（北海道大）

$\boxed{12}$

θ を $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし, 空間の 4 点 O , A , B , C が, $OA=OB=OC=1$ かつ$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=\theta$ をみたすとする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle ABC$ の重心を G とするとき, AG とOG をそれぞれ θ で表せ。

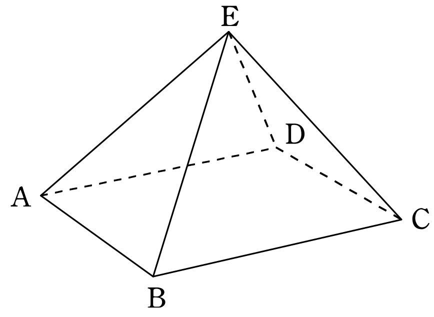
(2) θ を動かしたとき, O , A , B , C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

（東北大）

・「愛情」とは自らの時間を犠牲にしてでも
相手のために時間を創ることである。

$\boxed{13}$

ABCDE を 1 辺の長さが 1 の正方形 ABCD を底面とし, 4 個の正三角形を側面とする正四角錐とする。



(1) △CDE の重心を G とする。ベクトル $\overrightarrow{AG}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ で表すと, $\overrightarrow{AG}=\boxed{\text{(セ)}}$ となる。

(2) $\vec{0}$ でないベクトル $\vec{p}$ が平面 α 上の任意のベクトルと垂直なとき, $\vec{p}$ は平面 α と垂直であるという。$\vec{p}=a\overrightarrow{AB}+b\overrightarrow{AD}+c\overrightarrow{AE}$ (a , b , c は実数) が△CDE を含む平面と垂直なとき, $a:b:c=\boxed{\text{(ソ)}}$ である。よって, $|\vec{p}|=1$ かつ $\vec{p}\cdot\overrightarrow{AD}>0$ となるように a , b , c を定めると, $\vec{p}=\boxed{\text{(タ)}}$ となる。

(3) 正四角錐 ABCDE の△CDE に, 各辺の長さが 1 の正四面体 CDEF を貼り付ける。ベクトル $\overrightarrow{AF}$ を $\overrightarrow{AB}$, $\overrightarrow{AD}$, $\overrightarrow{AE}$ で表すと, $\overrightarrow{AF}=\boxed{\text{(チ)}}$ となる。また, H を辺 EC の中点とすると, $\overrightarrow{HA}\cdot\overrightarrow{HF}=\boxed{\text{(ツ)}}$ であり, △AHF の面積は $\boxed{\text{(テ)}}$ である。

(慶応大)

$\boxed{14}$

t を正の定数とする。原点を O とする空間内に, 2 点 A$(2t , 2t , 0)$, B$(0 , 0 , t)$ がある。また動点 P は

$$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BP}=3$$

を満たすように動く。OP の最大値が 3 となるような t の値を求めよ。

(一橋大)

・生きられる時間は限られている。
だから, 他人の人生を生きることで君の人生を空費してはならない。

$\boxed{15}$

xyz 空間の原点 O と, O を中心とし半径 1 の球面上の異なる 4 点 A , B , C , D を考える。点 $\mathrm{A}\left(\cos\dfrac{\alpha}{2}, \sin\dfrac{\alpha}{2}, 0\right)$, $\mathrm{B}\left(\cos\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right), \sin\left(-\dfrac{\alpha}{2}\right), 0\right)$, $(0<\alpha<\pi)$ とする。点 C , D は $\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{COB}=\angle\mathrm{DOA}=\angle\mathrm{DOB}$ を満たし, 点 C の z 座標は正, 点 D の z 座標は負とする。

(1) 点 C の座標を α と $\theta=\angle\mathrm{COA}$ $(0<\theta<\pi)$ で表せ。

(2) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}, \overrightarrow{\mathrm{OB}}, \overrightarrow{\mathrm{OC}}, \overrightarrow{\mathrm{OD}}$ の相異なる 2 つのベクトルのなす角がすべて等しいとき, 点 C の座標を求めよ。

（北海道大）

$\boxed{16}$

空間ベクトル $\vec{a}=(1,0,0)$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, $\vec{d}$ を考える。$|\vec{b}|=|\vec{c}|=|\vec{d}|=1$ で, $\vec{b}$ は xy 平面上にあり, その y 成分は正とする。また, $\vec{a}\cdot\vec{b}=p$ とおく。

(1) $|p|<1$ であることを示せ。また, p を用いて $\vec{b}$ の成分表示を書け。

(2) $\vec{c}$ と $\vec{d}$ は相異なり,

$$\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{d}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}=p$$

をみたすとする。$\vec{c}$ の z 成分が正のとき, p を用いて $\vec{c}$ と $\vec{d}$ の成分表示を書け。

(3) 上の条件に加えて $\vec{c}\cdot\vec{d}=p$ であるとき p の値を求めよ。

（北海道大）

・「何々になろう」とする者は多いが,
「何々をしよう」とする者は少ない。

$\boxed{17}$

xyz 空間において, 原点 O を中心とする半径 1 の球面 S : $x^2+y^2+z^2=1$, および S 上の点 $\mathrm{A}(0\,,0\,,1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0\,,y_0\,,z_0)$ に対して, 2 点 A , P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分を $x_0\,,y_0\,,z_0$ を用いて表せ。

(2) 球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき, xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。

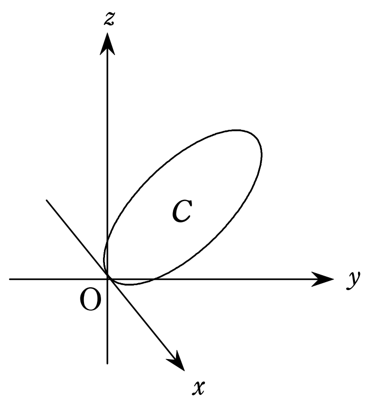
（頻出問題）

$\boxed{18}$

空間内の点の集合

$$\{(x\,,y\,,z)\mid 0\leqq y\,,0\leqq z\}$$

に含まれ, 原点 O において x 軸に接し, xy 平面と 45° の傾きをなす, 半径 1 の円板 C がある。座標が $(0\,,0\,,2\sqrt{2})$ の位置にある点光源 P により, xy 平面上に投ぜられた円板 C の影を S とする。



(1) S の輪郭を表す xy 平面上の曲線の方程式を求めよ。

(2) 円板 C と影 S の間にはさまれ, 光の届かない部分のつくる立体の体積を求めよ。

（東京大）

・世界は苦しみに満ちているが, それに打ち勝つものにも満ちている。

$\boxed{19}$

xyz 空間内の平面 $z=2$ 上に点 P があり, 平面 $z=1$ 上に点 Q がある。直線 PQ と xy 平面の交点を R とする。

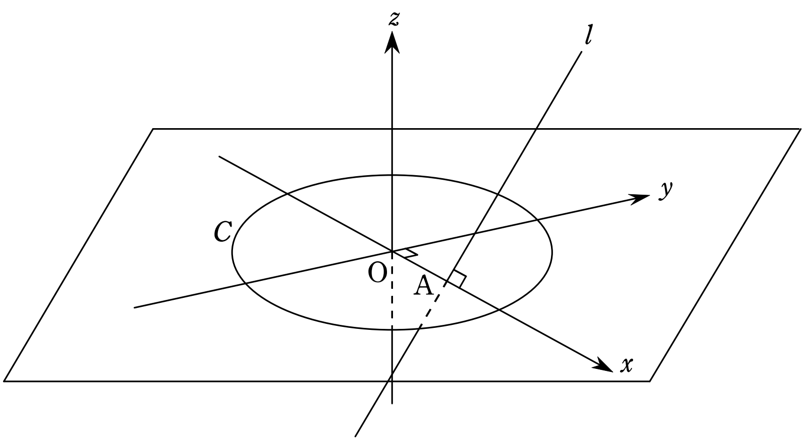
(1) $\mathrm{P}(0,0,2)$ とする。点 Q が平面 $z=1$ 上で点 $(0,0,1)$ を中心とする半径 1 の円周上を動くとき, 点 R の軌跡を求めよ。

(2) 平面 $z=1$ 上に 4 点 $\mathrm{A}(1,1,1)$, $\mathrm{B}(1,-1,1)$, $\mathrm{C}(-1,-1,1)$, $\mathrm{D}(-1,1,1)$ をとる。点 P が平面 $z=2$ 上で点 $(0,0,2)$ を中心とする半径 1 の円周上を動き, 点 Q が正方形 ABCD の周上を動くとき, 点 R が動きうる領域を xy 平面上に図示し, その面積を求めよ。

（一橋大）

$\boxed{20}$

xy 平面上に原点 O を中心とする半径 1 の円 C がある。また, x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,0,0)$ と空間直線 l があり, l は点 A において x 軸と垂直に交わり, xy 平面とのなす角が $45°$ である。$a>0$ とするとき, 円 C と直線 l の最短距離を a を用いて表せ。



（東京大）

・明日, しっかり学ぶための最高の準備とは, 今日しっかり学ぶことだ。

$\boxed{21}$

半径 1 の球に A , B , C , D を頂点とする正四面体が内接している。

(1) 正四面体の一辺の長さを求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+2\overrightarrow{\mathrm{PB}}+\overrightarrow{\mathrm{PC}}+3\overrightarrow{\mathrm{PD}}=\vec{0}$ を満たすように, 点 P をとるとき, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と球との交点で点 A でない方を点 Q とする。
$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}, \overrightarrow{\mathrm{AC}}, \overrightarrow{\mathrm{AD}}$ を用いて表せ。

(2010 , 2 , 7)

$\boxed{22}$

xyz 空間で, 原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4, 0, 0), (0, 4, 0), (0, 0, 4)$ を通る平面 α が共有点を持つことを示し, 点 (x, y, z) がその共有点全体の集合を動くとき, 積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。

(京都大)

（＊） この問題の中で, 点と平面の距離・正射影ベクトルについて扱います。

・まわりのことを, 気にする前に, ひたすらに生き, やるべきことをなせ。

$\boxed{23}$

xyz 空間内の原点を中心とする半径 1 の球面

$$S=\{(x\ ,\ y\ ,\ z)\mid x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x\ ,\ y\ ,\ z\ \text{は実数}\}$$

を考え, S 上の定点 $(0\ ,0\ ,1)$ を A とする。A と異なる S 上の点 $\mathrm{P}(x\ ,\ y\ ,\ z)$ に対し, 直線 AP と xy 平面の交点を $\mathrm{Q}(u\ ,\ v\ ,0)$ とする。k を正の定数とし, 点 P が

$$x^2+y^2+z^2=1\ ,\ x\geqq\frac{1}{k}\ ,\ y\geqq\frac{1}{k}\ ,\ z\geqq\frac{1}{k}$$

を満たしながら動くとき, 対応する点 Q の動く範囲を uv 平面上に図示せよ。

（東京大）

$\boxed{24}$

xyz 空間内で, 平面 $z=1$ 上に円 $(x-1)^2+(y-1)^2=4$, 平面 $z=2$ 上に直線 $x=1$ がある。点 $\mathrm{A}(0\ ,0\ ,t)$, $t>2$, にある光源が xy 平面に映すこれらの円と直線の影を, それぞれ C , l とする。

(1) C と l が相異なる 2 点で交わるような t の範囲を求めよ。

(2) C と l の 2 交点を結ぶ線分の中点を P とする。t が (1) の範囲を動くときの点 P の軌跡を図示せよ。

（名古屋大）

・偉大なことを成し遂げる人は, いつも大胆な冒険者である。