

《2018 入試対策》

名古屋大学

文系数学



電送数学舎

まえがき

本書には、1998 年度以降に出題された名古屋大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために、現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は、鍵となっている分野です。

また、利便性の向上のため、対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の **1**, **2**, … などの問題番号、解答編の **問題** の文字がリンク元です。

なお、2013 年度以降に出題された過去問について、その解答例の映像解説を、YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで、下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 名大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

- 1 本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。
- 2 標準的な活用方法については、以下のように想定しています。
 - (1) 「分野別問題一覧」から問題を選び、答案をつくる。
 - (2) 「分野別問題と解答例」で、答案をチェックする。
 - (3) 1 つの分野で、(1)と(2)を繰り返す。
 - (4) 完答できなかった問題だけを、再度、繰り返す。
 - (5) 出題の流れをウェブサイトの入試直前に確認する。

注 「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目 次

分野別問題一覧	3
分野別問題と解答例	19
関 数	20
微分と積分	24
図形と式	40
図形と計量	60
ベクトル	61
整数と数列	66
確 率	78
論 証	104

分野別問題一覧

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

■ 関数 |||||

1 次の問いに答えよ。

- (1) $(\sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}})^2$ を計算し、2重根号を用いない形で表せ。
- (2) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき、整数係数の4次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち、 x^4 の係数が1であるものを求めよ。
- (3) 8つの実数 $\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ (ただし、複号 \pm はすべての可能性にわたる) の中で、(2)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求めよ。 [2015]

2 p を実数とする。方程式 $x^4 + (8-2p)x^2 + p = 0$ が相異なる4個の実数解をもち、これらの解を小さい順に並べたとき、それらは等差数列をなすとする。この p を求めよ。 [2007]

- 3 (1) 複素数 z を未知数とする方程式 $z^6 = 64$ の解をすべて求めよ。
- (2) (1)で求めた解 $z = p + qi$ (p, q は実数) のうち、次の条件を満たすものをすべて求めよ。
- 条件: x を未知数とする3次方程式 $x^3 + \sqrt{3}qx + q^2 - p = 0$ が、整数の解を少なくとも1つもつ。 [2005]

4 関数 $f(x) = -|2x-1|+1$ ($0 \leq x \leq 1$) を用いて、関数 $g(x) = -|2f(x)-1|+1$ ($0 \leq x \leq 1$) を考える。 $0 < c < 1$ のとき、 $g(x) = c$ を満たす x を求めよ。 [2001]

■ 微分と積分 |||||

- 1 a を正の定数とする。2次関数 $f(x) = ax^2$ と3次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について、次の問いに答えよ。
- (1) 関数 $y = g(x)$ について、極値を求め、そのグラフを描け。
- (2) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる3点で交わることを示せ。
- (3) 2つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた2つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき、2つの曲線の交点の x 座標を求めよ。 [2017]

2 平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり、 C_1 の周上に定点 A がある。点 P, Q はそれぞれ C_1, C_2 の周上を反時計回りに動き、ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t=0$ において、 P は A の位置にあつて O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる。 $0 \leq t \leq 4\pi$ のとき $\triangle APQ$ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。 [2013]

3 (1) 関数 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ。
 (2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ の接線で、点 $(\frac{3}{2}, 0)$ を通るものをすべて求めよ。
 (3) p を定数とする。 x の 3 次方程式 $x^3 - x^2 = p(x - \frac{3}{2})$ の異なる実数解の個数を求めよ。 [2011]

4 関数 $f(x)$ を、 $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ により定める。
 (1) a, b は実数とする。 $y = ax + b$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための a, b に対する条件を求めよ。
 (2) p, q は実数で $p > 0$ とする。 $y = x^3 + 6px^2 + 9p^2x + q$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための p, q に対する条件を求め、 pq 平面上に図示せよ。 [2010]

5 2 つの放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2, D: y = -(x-a)^2$ を考える。 a は正の実数である。
 (1) C 上の点 $P(t, \frac{1}{2}t^2)$ における C の接線 l を求めよ。
 (2) l がさらに D と接するとき、 l を C と D の共通接線という。 2 本の (C と D の) 共通接線 l_1, l_2 を求めよ。
 (3) 共通接線 l_1, l_2 と C で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2007]

6 $0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k に対して、 xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geq x^2, y \leq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leq x^2, y \geq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leq -x^2 + 2x, y \geq kx$ で表される領域

(1) 領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。
 (2) (1) で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と、その最小値を求めよ。 [2006]

7 放物線 $R: y = -x^2 + 6$ と直線 $l: y = x$ との交点を A, B とする。直線 $y = x + t$ ($t > 0$) は放物線 R と相異なる 2 点 $C(t), D(t)$ で交わるものとする。

(1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2) 4 つの点 $A, B, C(t), D(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし、 $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ とおく。 $f(t)$ の最大値を求めよ。 [2005]

8 a を実数とする。 $f(x) = x^3 + ax^2 + (3a - 6)x + 5$ について以下の問いに答えよ。

(1) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a に対して、関数 $y = f(x)$ は $x = p$ で極大値、 $x = q$ で極小値をとるとする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上の 2 点 $P(p, f(p)), Q(q, f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ。 [2004]

9 放物線 $C: y = ax^2$ ($a > 0$) を考える。放物線 C 上の点 $P(p, ap^2)$ ($p \neq 0$) における C の接線と直交し、 P を通る直線を l とする。直線 l と放物線 C で囲まれる図形の面積を $S(P)$ とする。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) 点 P を $p > 0$ の範囲で動かす。 $S(P)$ が最小となるときの、直線 l の傾き m と $S(P)$ を求めよ。 [2003]

10 a, b, c は定数とし、 $a > 0$ とする。

(1) 曲線 $y = -ax^3 + bx + c$ の接線で、点 $(0, t)$ (t は実数) を通るものがただ 1 本存在することを示せ。

(2) (1) の接線が正の傾きをもつための t の範囲を求めよ。 [2001]

11 a, b を実数とする。 xy 平面上で、直線 $l: y = ax + b$ は曲線 $C: y = (x+1)(2-x)$ と、 x 座標が $0 \leq x \leq 2$ を満たす点で接しているとする。

(1) このときの点 (a, b) の存在範囲を求め、 ab 平面上に図示せよ。

(2) 曲線 C および 3 つの直線 $l, x = 0, x = 2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と、このときの面積を求めよ。 [2000]

12 曲線 $C: y = x|x-1|$ と、直線 $l: y = kx$ に関して、以下の問いに答えよ。

- (1) C と l が $x > 0$ で 2 つの交点をもつような k の範囲を求めよ。
- (2) k が (1) で求めた範囲を動くとき、 C と l によって囲まれる図形全体の面積を最小にする k の値を求めよ。
- [1999]

[1999]

13 座標平面上に放物線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $l: y = x + k$ を考える。

- (1) 放物線と直線 l が異なる 2 個の共有点をもつような k の範囲を求めよ。
- (2) k は(1)で求めた条件をみたすとして、さらに $k > 0$ とする。(1)の 2 つの共有点を P, Q とし、 O を原点とするとき、三角形 OPQ の面積を最大にする k の値、およびそのときの面積を求めよ。
- [1998]

[1998]

■ 図形と式 |||||

□1 曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-1, 1)$, $B(b, b^2)$ をとる。ただし $b > -1$ とする。このとき、次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y = x^2$ 上の点 $T(t, t^2)$ ($-1 < t < b$) で、 $\angle ATB$ が直角になるものが存在する。

[2016]

2 座標平面上の円 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ と、 x 軸上の 2 点 $P(-a, 0)$, $Q(b, 0)$ を考える。ただし、 $a > 0$, $b > 0$, $ab \neq 1$ とする。点 P , Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き、その 2 つの接線の交点を R とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 QR の方程式を求めよ。
 - (2) R の座標を a, b で表せ。
 - (3) R の y 座標が正であるとき、 $\triangle PQR$ の周の長さを T とする。 T を a, b で表せ。
 - (4) 2 点 P, Q が、条件「 $PQ = 4$ であり、 R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき、 T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ。
- [2015]

[2015]

〔3〕 原点を中心とする半径 1 の円を C とし、 x 軸上に点 $P(a, 0)$ をとる。ただし $a > 1$ とする。 P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする。

(1) Q の x 座標を求めよ。

(2) 点 R が C 上にあるとき、 $\frac{PR}{QR}$ が R によらず一定であることを示し、その値を a を用いて表せ。

(3) C 上の点 R が $\angle PRQ = 90^\circ$ を満たすとする。このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ。 [2014]

〔4〕 実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。

(1) 2 点 P, Q を通る直線 l の方程式を求めよ。

(2) a を定数とし、直線 $x = a$ と l の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。 t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ。

(3) t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。 [2014]

〔5〕 xy 平面上に、点 $(0, 1)$ を通り、傾きが h の直線 l がある。

(1) xy 平面において、 l に関して点 $P(a, b)$ と対称な点を $Q(s, t)$ とする。このとき、 a, b, h を用いて s, t を表せ。ただし、点 $P(a, b)$ は l 上にないとする。

(2) xy 平面において、 l に関して原点 $O(0, 0)$ と対称な点を A とする。 h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くとき、線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。

(3) h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする。 C と直線 $y = 1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2012]

〔6〕 xy 平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ がある。

(1) $a > 0$ とする。 $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。

(2) $a > 1 > b > 0$ とする。 $OP : AP : BP = 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。 [2011]

7 xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。

(a) 対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b) 直線 AB の傾きは 2 である。

(c) A の y 座標は, B, C, D の y 座標より大きい。

このとき, $a > 0, b > 0$ として, 辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

(1) A, B, C, D の座標を a, b で表せ。

(2) 長方形 ABCD が領域 $x^2 + (y-5)^2 \leq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。 [2010]

8 放物線 $y = ax^2$ ($a > 0$) と円 $(x-b)^2 + (y-1)^2 = 1$ ($b > 0$) が, 点 $P(p, q)$ で接しているとする。ただし, $0 < p < b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき, $\angle PQR = 120^\circ$ であるとする。ここで, 放物線と円が点 P で接するとは, P が放物線と円の共有点であり, かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸, および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2009]

9 2 つの円 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ と $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$ に外接し, 直線 $x = 6$ に接する円を求めよ。ただし, 2 つの円がただ 1 点を共有し, 互いに外部にあるとき, 外接するという。 [2008]

10 次の不等式の表す領域を D とする。 $(x-2)^2 + |2x+3y-1| \leq 4$

(1) D の概形を描き, その面積を求めよ。

(2) 点 (x, y) が D 内を動くとき, $x+y$ の最大値と最小値およびそれらの値をとる点の座標を求めよ。 [2008]

11 xy 平面上に点 $A(2, 4)$ がある。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が x 軸上にあるとき, 直線 l をピッタリ直線と呼ぶことにする。

(1) 点 $P(p, q)$ を通るピッタリ直線 l があるとし, l に関して A と対称な点を $A'(t, 0)$ とするとき, p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) ピッタリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ。

(3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピッタリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め, それを図示せよ。 [2006]

12 O を原点とする座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上の 2 点 A, B に対し, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t$ とおく。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $t = 2$ のとき, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ となる点 P の軌跡を求め, 図示せよ。 [2002]

13 a, b を正定数とし, 平面ベクトル $\overrightarrow{OA} = (2a, a)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 2b)$ を考える。線分 OB の中点を C とする。直線 OA, OB 上にない平面上の点 P に対し, 点 P を通り, 直線 OB に平行な直線と直線 OA との交点を Q とし, 点 P を通り, 直線 OA に平行な直線と直線 OB との交点を R とすると, $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OB}$ と表される。ただし, s, t は実数である。

(1) k を正定数とすると, $t = (s - k)^2$ を満たす点 P のなす曲線 F の方程式を求めよ。

(2) 直線 AC が F と接するとき, k の値を求めよ。 [2001]

■ 図形と計量 |||||

1 辺の長さがそれぞれ $AB = 10$, $BC = 6$, $AC = 8$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB 上に点 P , 辺 AC 上の点 Q を, $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ になるようにとる。

(1) 2 辺の長さの和 $AP + AQ$ を u とおく。 $\triangle APQ$ の周の長さ l を u を用いて表せ。

(2) l が最小になるときの AP, AQ, l の値を求めよ。 [2002]

■ ベクトル |||||

1 空間のベクトル $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (a, b, 0)$, \overrightarrow{OC} が, 条件

$$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{5}{6}$$

を満たしているとする。ただし, a, b は正の数とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ。

(3) 四面体 $OABC$ の体積 V を求めよ。 [2009]

2 $\triangle ABC$ の辺 AB, BC, CA を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A', B', C' とし、 $\triangle A'B'C'$ の辺 $A'B', B'C', C'A'$ を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A'', B'', C'' とする。このとき直線 AA'', BB'', CC'' は $\triangle ABC$ の重心で交わることを証明せよ。 [2007]

3 $\triangle OAB$ の頂角 $\angle O$ の二等分線と辺 AB との交点を P 、点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする。以下では、 $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$ 、 $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。

(1) P は線分 AB を $|\vec{a}|:|\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ。

(2) 線分の長さ OQ を \vec{a}, \vec{b} を用いて表せ。 [2003]

4 座標空間内に 4 点 $P(3, 1, 4), A(1, 2, 3), B(1, 1, 2), C(2, 1, 1)$ がある。直線 PA と xy 平面の交点を A' 、直線 PB と xy 平面の交点を B' 、直線 PC と xy 平面の交点を C' とする。

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) $\triangle A'B'C'$ の面積を求めよ。 [2000]

5 (1) ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ が次の条件(*)を満たすとき、点 (a_1, a_2) の存在範囲を図示せよ。

(*) あるベクトル $\vec{b} = (b_1, b_2)$ が存在して、 $(\vec{a} \cdot \vec{p})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$ が 任意のベクトル \vec{p} に対して成り立つ。

(2) (1) で求めた $\vec{a} = (a_1, a_2)$ に対して、条件(*)にあるベクトル $\vec{b} = (b_1, b_2)$ を求めよ。 [1999]

■ 整数と数列 |||||

1 次の問いに答えよ。

(1) 次の条件(*)を満たす 3 つの自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

(*) $a < b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ である。

(2) 偶数 $2n$ ($n \geq 1$) の 3 つの正の約数 p, q, r で、 $p > q > r$ と $p + q + r = n$ を満たす組 (p, q, r) の個数を $f(n)$ とする。ただし、条件を満たす組が存在しない場合は、 $f(n) = 0$ とする。 n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また、 $f(n) = M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。 [2017]

2 正の整数 n に対して、その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) k を正の整数, p を 3 以上の素数とするととき, $s(2^k p)$ を求めよ。
- (2) $s(2016)$ を求めよ。
- (3) 2016 の正の約数 n で, $s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ。 [2016]

3 k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする。 ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n)$, $T_m(n)$ を以下のように定める。

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ。
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ。
- (3) p が 7 以上の素数のとき, $S_1(p-1)$, $S_2(p-1)$, $S_3(p-1)$, $S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ。 [2013]

4 m を正の奇数とする。

- (1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。
- (2) p を正の整数とするととき, $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) r を正の整数とし, $s = 3^{r-1} m$ とする。 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。 [2012]

5 次の問いに答えよ。

- (1) $3x + 2y \leq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ。
- (2) $3x + 2y \leq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ。 [2008]

6 n を自然数とするととき, $m \leq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする。

- (1) $f(15)$ を求めよ。
- (2) p, q を互いに異なる素数とする。このとき $f(pq)$ を求めよ。 [2003]

7 次のように円 C_n を定める。まず、 C_0 は $(0, \frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円、 C_1 は $(1, \frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円とする。次に C_0, C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする。さらに、 $n = 3, 4, 5, \dots$ に対し、順に、 C_0, C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする。 C_n ($n \geq 1$) の中心の座標を (a_n, b_n) とするとき、次の問いに答えよ。ただし、2 つの円が外接するとは、中心間の距離がそれぞれ円の半径の和に等しいことをいう。

(1) $n \geq 1$ に対し、 $b_n = \frac{a_n^2}{2}$ を示せ。

(2) a_n を求めよ。

[2002]

8 自然数 n に対して、不等式 $0 \leq a \leq 2b \leq c \leq n$ を満たす整数の組 (a, b, c) の個数を $P(n)$ とする。

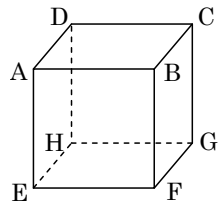
(1) $P(5)$ を求めよ。

(2) 奇数 n に対して、 $P(n)$ を求めよ。

[2000]

■ 確率 |||||

1 右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のい



ずれかにいる。自然数 $n \geq 1$ に対して、(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n , (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n , (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n , とする。このとき、次の問いに答えよ。

(1) p_2, q_2, r_2 と p_3, q_3, r_3 を求めよ。

(2) $n \geq 2$ のとき、 p_n, q_n, r_n を求めよ。

(3) 自然数 $m \geq 1$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

[2017]

2 n を正の整数とし, k を $1 \leq k \leq n+2$ を満たす整数とする。 $n+2$ 枚のカードがあり, そのうちの 1 枚には数字 0 が, 他の 1 枚には数字 2 が, 残りの n 枚には数字 1 が書かれている。この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする。このとき, 次の問いに答えよ。

- (1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ。
- (2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ。
- (3) 与えられた n に対して, 確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と, その最大値を求めよ。

[2016]

3 数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{石が点 1 にあるならば, 確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k \ (k=2, 3, 4) \text{ にあるならば, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば, 確率 1 で点 4 に移動する} \end{array} \right.$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め, この試行を繰り返す。試行を n 回繰り返した後に, 石が点 k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) にある確率を $P_n(k)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

- (1) $n=6$ のときの確率 $P_6(k)$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$) をそれぞれ求めよ。
- (2) 石が移動した先の点に印をつける(点 1 には初めから印がついているものとする)。試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。
- (3) $n \geq 1$ のとき, $P_n(3)$ を求めよ。

[2015]

4 3 人でジャンケンをする。各人はグー, チョキ, パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し, 残った人で次回のジャンケンを行い(アイコの場合は誰も脱落しない), 勝ち残りが 1 人になるまでジャンケンを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3 人でジャンケンを始め, ジャンケンが n 回目まで続いて n 回目終了時に 2 人が残っている確率を p_n , 3 人が残っている確率を q_n とおく。

- (1) p_1, q_1 を求めよ。
- (2) p_n, q_n が満たす漸化式を導き, p_n, q_n の一般項を求めよ。
- (3) ちょうど n 回目で 1 人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。

[2013]

5 n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし、異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから、1 枚のカードを無作為に取り出して、書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し、取り出したカードに書かれた整数の最小値を X 、最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし、 j と k は正の整数で、 $j+k \leq n$ を満たすとする。また、 s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j+k$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。 $P(s)$ を求めよ。
- (4) n が偶数のとき、 $P(s)$ を最大にする s を求めよ。 [2012]

6 数字の 2 を書いた玉が 1 個、数字の 1 を書いた玉が 3 個、数字の 0 を書いた玉が 4 個あり、これら合計 8 個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて、この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し、取り出した玉は袋に戻さないものとする。

- (1) 玉を 2 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ。
- (2) 玉を 4 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ。
- (3) 玉を 8 度取り出すとき、次の条件が満たされる確率を求めよ。

条件：すべての $n = 1, 2, \dots, 8$ に対して、1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。 [2011]

7 はじめに、A が赤玉を 1 個、B が白玉を 1 個、C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ、表が出れば A と B の玉を交換し、裏が出れば B と C の玉を交換する、という操作を考える。この操作を n 回 ($n = 1, 2, 3, \dots$) くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

- (1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ。
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ。
- (3) n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$ が成り立ち、 n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ が成り立つことを示せ。
- (4) b_n を求めよ。 [2010]

8 サイコロを投げると、1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 ($n=1, 2, 3, \dots$) 投げるとき、出る目の積の一の位が j ($j=0, 1, 2, \dots, 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする。

(1) $p_2(0)$, $p_2(1)$, $p_2(2)$ を求めよ。

(2) $p_{n+1}(1)$ を、 $p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。

(3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。 [2009]

9 袋の中に赤と白の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し、出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後、赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1) $p_3(m)$ を求めよ。

(2) 一般の N に対し $p_N(m)$ を求めよ。 [2007]

10 正六面体の各面に 1 つずつ、サイコロのように、1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて、向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて、次の試行を繰り返す。行。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし、これらの 4 面の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき、それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1:a_2:a_3:a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後、底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ ($n \geq 1$) で表す。 $q_n = p_n(1) + p_n(6)$ ($n=1, 2, 3, \dots$) とおく。

(1) q_1, q_2 を求めよ。

(2) q_n を q_{n-1} で表し、 q_n を求めよ。

(3) $p_n(1)$ を求めよ。 [2006]

11 1 から 13 までの数が 1 つ書かれているカードが 52 枚あり、各数について 4 枚ずつある。この 52 枚のカードから、戻さずに続けて 2 枚とりだし、そのカードに書かれた数を順に x, y とする。関数 $f(x, y) = \log_3(x+y) - \log_3 x - \log_3 y + 1$ を考える。

(1) カードに書かれた数 x, y で、 $f(x, y) = 0$ となるものをすべて求めよ。

(2) $f(x, y) = 0$ となる確率を求めよ。 [2005]

12 サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし、8をゴールとしてちょうど8の位置へ移動したときにゲームを終了し、8をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば、7の位置で3が出た場合、8から2戻って6へ移動する。なお、サイコロは1から6までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて、サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_3 を求めよ。
- (3) p_4 を求めよ。

[2004]

13 1つの箱の中に1から10までの数が書かれたカードが4枚ずつ計40枚入っている。この箱から k 枚 ($3 \leq k \leq 12$) のカードを同時に取り出す。このうちの3枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする。

- (1) $p(k)$ を求めよ。
- (2) $4 \leq k \leq 12$ のとき、 $f(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ。

- (3) $p(k)$ を最大にする k の値を求めよ。

[2003]

14 サイレンを断続的に鳴らして16秒の信号を作る。ただし、サイレンは1秒または2秒鳴り続けて1秒休み、これをくり返す。また、信号はサイレンの音で始まり、サイレンの音で終わるものとする。

- (1) 1秒または2秒鳴り続ける回数をそれぞれ m 回、 n 回とすると、 m, n の満たす関係式を求めよ。
- (2) 信号は何通りできるか。

[2001]

15 A と B がゲームをくり返す。それぞれの最初の持ち点は2で、ゲームごとに勝者は敗者から1点をもらい、どちらか一方の持ち点が0になるまで続ける。ただし、各ゲームにおいて、Aが勝つ確率を p , Bが勝つ確率を $1-p$ とする。

- (1) ちょうど4回目のゲームでどちらか一方の持ち点が0になる確率を求めよ。
- (2) $2n$ 回目までのゲームで、Aの持ち点が0になる確率を求めよ。

[1999]

16 座標平面上に 4 点 $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 1)$ を頂点とする正方形を考え, この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに, 点 Q は, x 軸と平行な方向の移動について確率 p , y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとすると, n 秒後に頂点 A, C にいる確率をそれぞれ a_n, c_n とする。

(1) a_2, c_2, a_4, c_4 を求めよ。

(2) a_{2n} を求めよ。 [1998]

■ 論証 |||||

1 n を自然数とすると, 3 つの数 $a = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{n}} - 1$, $b = 1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}}$, $c = \frac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ。 [2002]

分野別問題と解答例

関 数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確 率／論 証

問題

次の問いに答えよ。

- (1) $(\sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}})^2$ を計算し、2重根号を用いない形で表せ。
- (2) $\alpha = \sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ とするとき、整数係数の4次多項式 $f(x)$ で $f(\alpha) = 0$ となるもののうち、 x^4 の係数が1であるものを求めよ。
- (3) 8つの実数 $\pm\sqrt{13} \pm \sqrt{9+2\sqrt{17}} \pm \sqrt{9-2\sqrt{17}}$ (ただし、複号 \pm はすべての可能性にわたる) の中で、(2)で求めた $f(x)$ に対して方程式 $f(x) = 0$ の解となるものをすべて求めよ。

[2015]

解答例

$$(1) (\sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}})^2 = 9+2\sqrt{17} + 9-2\sqrt{17} + 2\sqrt{9^2 - 2^2 \cdot 17} = 18 + 2\sqrt{13}$$

$$(2) \alpha - \sqrt{13} = \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}} \text{ より、両辺を2乗すると、(1)から、}$$

$$\alpha^2 - 2\sqrt{13}\alpha + 13 = 18 + 2\sqrt{13}, \quad \alpha^2 - 5 = 2\sqrt{13}(\alpha + 1)$$

さらに、両辺を2乗すると、 $\alpha^4 - 10\alpha^2 + 25 = 52(\alpha^2 + 2\alpha + 1)$ となり、

$$\alpha^4 - 62\alpha^2 - 104\alpha - 27 = 0$$

よって、 α は4次方程式 $x^4 - 62x^2 - 104x - 27 = 0$ の解である。

$$(3) (2) \text{より、} f(x) = x^4 - 62x^2 - 104x - 27 \text{ であり、}$$

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2 - 5)^2 - \{2\sqrt{13}(x+1)\}^2 \\ &= \{x^2 - 5 - 2\sqrt{13}(x+1)\}\{x^2 - 5 + 2\sqrt{13}(x+1)\} \end{aligned}$$

ここで、 $f(x) = 0$ とすると、

$$x^2 - 5 - 2\sqrt{13}(x+1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad x^2 - 5 + 2\sqrt{13}(x+1) = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より、} x^2 - 2\sqrt{13}x - 2\sqrt{13} - 5 = 0 \text{ となり、}$$

$$x = \sqrt{13} \pm \sqrt{18 + 2\sqrt{13}} = \sqrt{13} \pm (\sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}})$$

$$\textcircled{2} \text{より、} x^2 + 2\sqrt{13}x + 2\sqrt{13} - 5 = 0 \text{ となり、}$$

$$x = -\sqrt{13} \pm \sqrt{18 - 2\sqrt{13}} = -\sqrt{13} \pm (\sqrt{9+2\sqrt{17}} - \sqrt{9-2\sqrt{17}})$$

以上より、方程式 $f(x) = 0$ の解は、

$$\begin{aligned} &\sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}}, \quad \sqrt{13} - \sqrt{9+2\sqrt{17}} - \sqrt{9-2\sqrt{17}} \\ &-\sqrt{13} + \sqrt{9+2\sqrt{17}} - \sqrt{9-2\sqrt{17}}, \quad -\sqrt{13} - \sqrt{9+2\sqrt{17}} + \sqrt{9-2\sqrt{17}} \end{aligned}$$

コメント

高次方程式の問題です。(2)はよくみかけるものですが、そのプロセスを誘導として(3)に適用させるところが、問題のねらいになっています。

問 題

p を実数とする。方程式 $x^4 + (8-2p)x^2 + p = 0$ が相異なる 4 個の実数解をもち、これらの解を小さい順に並べたとき、それらは等差数列をなすとする。この p を求めよ。 [2007]

解答例

方程式 $x^4 + (8-2p)x^2 + p = 0$ ……①に対し、 $x^2 = t$ とおくと、

$$t^2 + (8-2p)t + p = 0 \dots\dots\dots②$$

①が相異なる 4 個の実数解をもつ条件は、②が異なる 2 つの正の解をもつことに対応する。この解を $t = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$D/4 = (4-p)^2 - p > 0 \dots\dots\dots③$$

$$\alpha + \beta = -(8-2p) > 0 \dots\dots\dots④, \quad \alpha\beta = p > 0 \dots\dots\dots⑤$$

$$\text{③より, } p^2 - 9p + 16 > 0 \text{ となり, } p < \frac{9-\sqrt{17}}{2}, \frac{9+\sqrt{17}}{2} < p$$

$$\text{④より } p > 4 \text{ となり, ③④⑤をまとめると, } p > \frac{9+\sqrt{17}}{2} \dots\dots\dots⑥$$

このとき、①の解は、 $\pm\sqrt{\alpha}$ 、 $\pm\sqrt{\beta}$ となり、 $-\sqrt{\beta}$ 、 $-\sqrt{\alpha}$ 、 $\sqrt{\alpha}$ 、 $\sqrt{\beta}$ が等差数列をなすことより、

$$\sqrt{\beta} - \sqrt{\alpha} = 2\sqrt{\alpha}, \quad \sqrt{\beta} = 3\sqrt{\alpha}$$

よって、 $\beta = 9\alpha$ となり、④⑤から、

$$\alpha + 9\alpha = -(8-2p) \dots\dots\dots⑦, \quad \alpha \cdot 9\alpha = p \dots\dots\dots⑧$$

$$\text{⑦⑧より, } 10\alpha = -8 + 18\alpha^2, \quad 9\alpha^2 - 5\alpha - 4 = 0, \quad (9\alpha + 4)(\alpha - 1) = 0$$

$\alpha > 0$ より $\alpha = 1$ となり、⑧から $p = 9$ である。

なお、この値は⑥を満たしている。

コメント

複 2 次方程式の解の条件についての問題です。なお、⑦⑧から α を消去して p の 2 次方程式をつくると、因数分解に時間がかかってしまいます。

問題

- (1) 複素数 z を未知数とする方程式 $z^6 = 64$ の解をすべて求めよ。
 (2) (1)で求めた解 $z = p + qi$ (p, q は実数) のうち、次の条件を満たすものをすべて求めよ。

条件: x を未知数とする 3 次方程式 $x^3 + \sqrt{3}qx + q^2 - p = 0$ が、整数の解を少なくとも 1 つもつ。 [2005]

解答例

- (1) $z^6 = 64$ より, $z^6 - 8^2 = 0$ から,
 $(z^3 - 8)(z^3 + 8) = 0, (z - 2)(z + 2)(z^2 + 2z + 4)(z^2 - 2z + 4) = 0$
 よって, $z = \pm 2, -1 \pm \sqrt{3}i, 1 \pm \sqrt{3}i$
- (2) (i) $z = \pm 2$ のとき
 複号同順で, $x^3 \mp 2 = 0$ となり, 整数解は存在しない。
- (ii) $z = -1 + \sqrt{3}i$ のとき
 $x^3 + 3x + 4 = 0, (x + 1)(x^2 - x + 4) = 0$
 よって, 整数解 $x = -1$ をもつ。
- (iii) $z = -1 - \sqrt{3}i$ のとき
 $x^3 - 3x + 4 = 0, x(3 - x^2) = 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$
 これより, $\textcircled{1}$ が整数解をもつならば 4 の約数となり, 整数解として $x = \pm 1, \pm 2, \pm 4$ の場合を調べればよい。ここで, $f(x) = x^3 - 3x + 4$ とおくと,
 $f(1) = 2, f(-1) = 6, f(2) = 6, f(-2) = 2, f(4) = 56, f(-4) = -48$
 よって, $f(x) = 0$ は整数解をもたない。
- (iv) $z = 1 + \sqrt{3}i$ のとき
 $x^3 + 3x + 2 = 0, x(-3 - x^2) = 2 \cdots \cdots \textcircled{2}$
 これより, $\textcircled{2}$ が整数解をもつならば 2 の約数となり, 整数解として $x = \pm 1, \pm 2$ の場合を調べればよい。ここで, $g(x) = x^3 + 3x + 2$ とおくと,
 $g(1) = 6, g(-1) = -2, g(2) = 16, g(-2) = -12$
 よって, $g(x) = 0$ は整数解をもたない。
- (v) $z = 1 - \sqrt{3}i$ のとき
 $x^3 - 3x + 2 = 0, (x - 1)^2(x + 2) = 0$
 よって, 整数解 $x = 1, -2$ をもつ。
- (i)~(v)より, 求める z は, $z = -1 + \sqrt{3}i, 1 - \sqrt{3}i$

コメント

すべての場合をチェックするのは面倒です。しかし, 時間の問題にすぎません。

問題

関数 $f(x) = -|2x-1|+1$ ($0 \leq x \leq 1$) を用いて、関数 $g(x) = -|2f(x)-1|+1$ ($0 \leq x \leq 1$) を考える。 $0 < c < 1$ のとき、 $g(x) = c$ を満たす x を求めよ。 [2001]

解答例

$f(x) = -|2x-1|+1$ ($0 \leq x \leq 1$) から、

$0 \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $f(x) = (2x-1)+1 = 2x$

$\frac{1}{2} \leq x \leq 1$ のとき、 $f(x) = -(2x-1)+1 = -2x+2$

よって、 $y = f(x)$ を図示すると、右図のようになる。

次に、 $g(x) = -|2f(x)-1|+1$ ($0 \leq x \leq 1$) に対して、

$0 \leq x \leq \frac{1}{4}$ のとき、 $f(x) \leq \frac{1}{2}$ より、

$$g(x) = 2f(x) = 2 \cdot 2x = 4x$$

$\frac{1}{4} \leq x \leq \frac{1}{2}$ のとき、 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ より、

$$g(x) = -2f(x) + 2 = -2 \cdot 2x + 2 = -4x + 2$$

$\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{3}{4}$ のとき、 $f(x) \geq \frac{1}{2}$ より、

$$g(x) = -2f(x) + 2 = -2(-2x+2) + 2 = 4x - 2$$

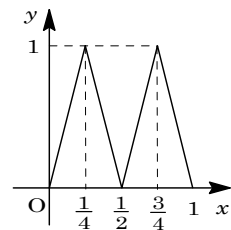
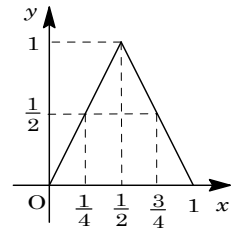
$\frac{3}{4} \leq x \leq 1$ のとき、 $f(x) \leq \frac{1}{2}$ より、

$$g(x) = 2f(x) = 2(-2x+2) = -4x + 4$$

以上より、 $y = g(x)$ を図示すると、右図のようになる。

すると、 $0 < c < 1$ のとき $g(x) = c$ の解は、 $4x = c$, $-4x + 2 = c$, $4x - 2 = c$, $-4x + 4 = c$ より、

$$x = \frac{c}{4}, \quad -\frac{c-2}{4}, \quad \frac{c+2}{4}, \quad -\frac{c-4}{4}$$



コメント

合成関数についての頻出問題です。内容的には数Ⅲなのですが。

問 題

a を正の定数とする。2 次関数 $f(x) = ax^2$ と 3 次関数 $g(x) = x(x-4)^2$ について、次の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = g(x)$ について、極値を求め、そのグラフを描け。
- (2) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わることを示せ。
- (3) 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるように a の値を定めよ。またそのとき、2 つの曲線の交点の x 座標を求めよ。 [2017]

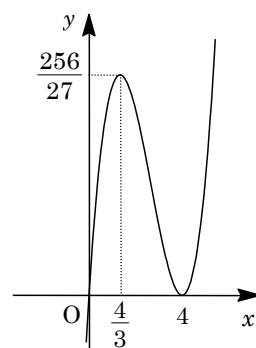
解答例

- (1) $g(x) = x(x-4)^2$ に対して、

$$\begin{aligned} g'(x) &= (x-4)^2 + 2x(x-4) \\ &= (x-4)(3x-4) \end{aligned}$$

すると、 $g(x)$ の増減は右表のようになり、極大値は $\frac{256}{27}$ ($x = \frac{4}{3}$)、極小値は 0 ($x = 4$) である。

x	\cdots	$\frac{4}{3}$	\cdots	4	\cdots
$g'(x)$	+	0	-	0	+
$g(x)$	\nearrow	$\frac{256}{27}$	\searrow	0	\nearrow



- (2) $f(x) = ax^2$ ($a > 0$) に対し、 $g(x) = f(x)$ とおくと、

$$x(x-4)^2 = ax^2, \quad x\{x^2 - (a+8)x + 16\} = 0$$

これより、 $x = 0$, $x^2 - (a+8)x + 16 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$ となる。

ここで、 $x = 0$ は $\textcircled{1}$ を満たさず、判別式 D は、

$$D = (a+8)^2 - 64 = a(a+16) > 0$$

したがって、 $g(x) = f(x)$ は異なる 3 つの実数解をもつ。すなわち、2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ は相異なる 3 点で交わる。

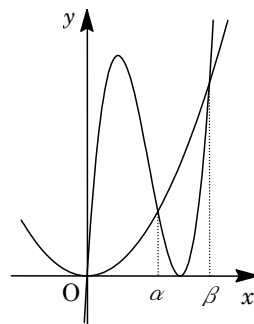
- (3) $\textcircled{1}$ の解を $x = \alpha$, β ($\alpha < \beta$) とおくと、

$$\alpha + \beta = a + 8 \cdots \cdots \textcircled{2}, \quad \alpha\beta = 16 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた 2 つの部分の面積が等しくなるので、

$$\begin{aligned} \int_0^\alpha \{g(x) - f(x)\} dx &= \int_\alpha^\beta \{f(x) - g(x)\} dx \\ \int_0^\alpha \{g(x) - f(x)\} dx + \int_\alpha^\beta \{g(x) - f(x)\} dx &= 0 \end{aligned}$$

よって、 $\int_0^\beta \{g(x) - f(x)\} dx = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$ となり、 $\textcircled{4}$ の左辺を I とおくと、



$$\begin{aligned}
 I &= \int_0^\beta \{x^3 - (a+8)x^2 + 16x\} dx = \left[\frac{x^4}{4} - \frac{a+8}{3}x^3 + 8x^2 \right]_0^\beta \\
 &= \frac{\beta^4}{4} - \frac{a+8}{3}\beta^3 + 8\beta^2 = \frac{\beta^2}{12} \{3\beta^2 - 4(a+8)\beta + 96\}
 \end{aligned}$$

すると、 $\beta > 0$ なので、④から、 $3\beta^2 - 4(a+8)\beta + 96 = 0 \cdots \cdots \textcircled{5}$

そこで、②⑤から $3\beta^2 - 4(\alpha + \beta)\beta + 96 = 0$ となり、 $-\beta^2 - 4\alpha\beta + 96 = 0$

③を代入すると $-\beta^2 - 64 + 96 = 0$ となり、 $\beta^2 = 32$ から $\beta = 4\sqrt{2}$ である。

そして、③から $\alpha = \frac{16}{4\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$ なので、②から、

$$a = 2\sqrt{2} + 4\sqrt{2} - 8 = 6\sqrt{2} - 8$$

このとき、2つの曲線の交点の x 座標は、 $x = 0, \alpha, \beta$ から、

$$x = 0, 2\sqrt{2}, 4\sqrt{2}$$

コメント

定積分と面積に関する有名な設定が題材になっています。ポイントは④式を導くところで、それ以降は②③⑤の連立方程式を解いているにすぎません。

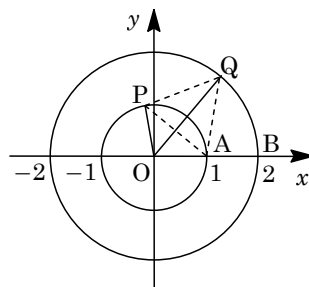
問題

平面上に同じ点 O を中心とする半径 1 の円 C_1 と半径 2 の円 C_2 があり、 C_1 の周上に定点 A がある。点 P, Q はそれぞれ C_1, C_2 の周上を反時計回りに動き、ともに時間 t の間に弧長 t だけ進む。時刻 $t=0$ において、 P は A の位置にあつて O, P, Q はこの順に同一直線上に並んでいる。 $0 \leq t \leq 4\pi$ のとき $\triangle APQ$ の面積の 2 乗の最大値を求めよ。

[2013]

解答例

右図のように、点 O を原点とし、 $A(1, 0), B(2, 0)$ とおくと、弧 AP, BQ の長さがともに t より、 OP, OQ を x 軸の正の部分から測った角は、それぞれ $t, \frac{t}{2}$ である。



すると、 $P(\cos t, \sin t), Q(2\cos \frac{t}{2}, 2\sin \frac{t}{2})$ となり、

$$\overrightarrow{AP} = (\cos t - 1, \sin t)$$

$$\overrightarrow{AQ} = (2\cos \frac{t}{2} - 1, 2\sin \frac{t}{2})$$

さて、 $\triangle APQ$ の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} |(\cos t - 1) \cdot 2\sin \frac{t}{2} - \sin t \cdot (2\cos \frac{t}{2} - 1)| \\ &= \frac{1}{2} |2\cos t \sin \frac{t}{2} - 2\sin t \cos \frac{t}{2} - 2\sin \frac{t}{2} + \sin t| \\ &= \frac{1}{2} |-2\sin(t - \frac{t}{2}) - 2\sin \frac{t}{2} + \sin t| = \frac{1}{2} |\sin t - 4\sin \frac{t}{2}| \end{aligned}$$

$$S^2 = \frac{1}{4} (2\sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2} - 4\sin \frac{t}{2})^2 = \sin^2 \frac{t}{2} (\cos \frac{t}{2} - 2)^2$$

$u = \cos \frac{t}{2}$ とおくと、 $0 \leq t \leq 4\pi$ から $-1 \leq u \leq 1$ であり、さらに $f(u) = S^2$ とすると、

$$f(u) = (1 - u^2)(u - 2)^2 = -u^4 + 4u^3 - 3u^2 - 4u + 4$$

$$f'(u) = -4u^3 + 12u^2 - 6u - 4$$

$$= -2(u - 2)(2u^2 - 2u - 1)$$

すると、右表の $f(u)$ の増減から、 $f(u)$

は $u = \frac{1 - \sqrt{3}}{2}$ で最大となり、最大値は、

u	-1	...	$\frac{1 - \sqrt{3}}{2}$...	1
$f'(u)$		+	0	-	
$f(u)$			↗	↘	

$$f\left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2}\right) = \left(1 - \frac{4 - 2\sqrt{3}}{4}\right) \left(\frac{1 - \sqrt{3}}{2} - 2\right)^2 = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{6 + 3\sqrt{3}}{2} = \frac{6\sqrt{3} + 9}{4}$$

コメント

三角関数の微分法は利用できないので、 S^2 を考えるという誘導をつけて、最大値にアプローチするという形式になっています。

問題

- (1) 関数 $y = x^3 - x^2$ のグラフをかけ。
- (2) 曲線 $y = x^3 - x^2$ の接線で、点 $(\frac{3}{2}, 0)$ を通るものをすべて求めよ。
- (3) p を定数とする。 x の 3 次方程式 $x^3 - x^2 = p(x - \frac{3}{2})$ の異なる実数解の個数を求めよ。

[2011]

解答例

- (1) $y = x^3 - x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、
 $y' = 3x^2 - 2x = x(3x - 2)$

よって、 $\textcircled{1}$ のグラフは右下図のようになる。

- (2) 接点を $(t, t^3 - t^2)$ とおくと、接線の方程式は、

$$y - (t^3 - t^2) = (3t^2 - 2t)(x - t)$$

$$y = (3t^2 - 2t)x - 2t^3 + t^2 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\textcircled{2}$ が点 $(\frac{3}{2}, 0)$ を通るので、 $\frac{3}{2}(3t^2 - 2t) - 2t^3 + t^2 = 0$

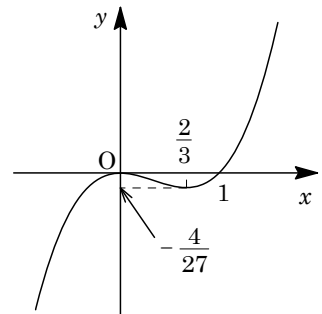
$$4t^3 - 11t^2 + 6t = 0, \quad t(4t - 3)(t - 2) = 0$$

よって、 $t = 0, \frac{3}{4}, 2$ となり、接線の方程式は $\textcircled{2}$ から、

それぞれ

$$y = 0, \quad y = \frac{3}{16}x - \frac{9}{32}, \quad y = 8x - 12$$

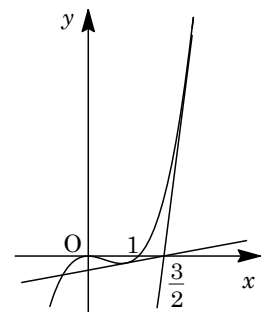
x	\cdots	0	\cdots	$\frac{2}{3}$	\cdots
y'	+	0	-	0	+
y	\nearrow	0	\searrow	$-\frac{4}{27}$	\nearrow



- (3) x の 3 次方程式 $x^3 - x^2 = p(x - \frac{3}{2})$ の異なる実数解の個数は、曲線 $\textcircled{1}$ と点 $(\frac{3}{2}, 0)$ を通る直線 $y = p(x - \frac{3}{2}) \cdots \cdots \textcircled{3}$ の共有点の個数に一致する。

そして、(2) より、 $p = 0, \frac{3}{16}, 8$ のとき、 $\textcircled{1}$ と $\textcircled{3}$ は接する。

よって、求める実数解の個数は、図より $p < 0$ のとき 1 個、
 $p = 0$ のとき 2 個、 $0 < p < \frac{3}{16}$ のとき 3 個、 $p = \frac{3}{16}$ のとき 2 個、
 $\frac{3}{16} < p < 8$ のとき 1 個、 $p = 8$ のとき 2 個、 $p > 8$ のとき 3 個である。



コメント

方程式の異なる実数解の個数を、対応するグラフの共有点の個数に翻訳して考える頻出の問題です。

問 題

関数 $f(x)$ を, $f(x) = \begin{cases} 1 & (x \geq 0) \\ 0 & (x < 0) \end{cases}$ により定める。

- (1) a, b は実数とする。 $y = ax + b$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 2 つの交点をもつための a, b に対する条件を求めよ。
- (2) p, q は実数で $p > 0$ とする。 $y = x^3 + 6px^2 + 9p^2x + q$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつための p, q に対する条件を求め, pq 平面上に図示せよ。

[2010]

解答例

- (1) $y = f(x)$ のグラフは右図のようになり, $y = ax + b$ のグラフとちょうど 2 つの交点をもつのは, $x < 0, x \geq 0$

で 1 回ずつ交わる場合より,

$$a > 0, 0 < b \leq 1$$

- (2) $y = x^3 + 6px^2 + 9p^2x + q \cdots (*)$ に対して,

$$y' = 3x^2 + 12px + 9p^2$$

$$= 3(x + 3p)(x + p)$$

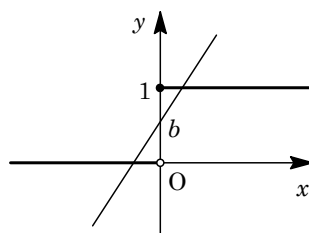
$p > 0$ から, 関数値の増減は右表のようになり, $x \geq 0$ では単調に増加する。

すると, $(*)$ のグラフと $y = f(x)$ のグラフがちょうど 4 つの交点をもつためには, $x < 0$ で 3 回, $x \geq 0$ で 1 回交わる場合となる。その条件は, $p > 0$ のもとで,

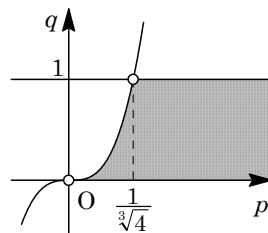
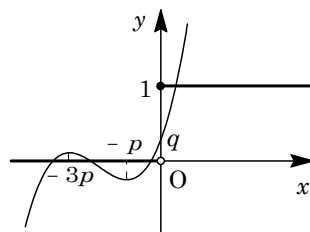
$$q > 0, -4p^3 + q < 0, 0 < q \leq 1$$

まとめると, $p > 0, q < 4p^3, 0 < q \leq 1$ である。

これを, pq 平面上に図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 半直線 $q = 1$ ($p > \frac{1}{\sqrt[3]{4}}$) 以外の境界線は領域に含まない。



x	\cdots	$-3p$	\cdots	$-p$	\cdots
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	\nearrow	q	\searrow	$-4p^3 + q$	\nearrow



コメント

グラフの位置関係の問題ですが, かなり感覚的なものに頼っています。(1)(2)ともに, もう少し詳しく書いた方がよかったかもしれません。

問 題

2つの放物線 $C: y = \frac{1}{2}x^2$, $D: y = -(x-a)^2$ を考える。 a は正の実数である。

- (1) C 上の点 $P(t, \frac{1}{2}t^2)$ における C の接線 l を求めよ。
- (2) l がさらに D と接するとき, l を C と D の共通接線という。2本の (C と D の) 共通接線 l_1, l_2 を求めよ。
- (3) 共通接線 l_1, l_2 と C で囲まれた図形の面積を求めよ。 [2007]

解答例

- (1) $C: y = \frac{1}{2}x^2$ より $y' = x$ となり, $P(t, \frac{1}{2}t^2)$ における接線 l の方程式は,

$$y - \frac{1}{2}t^2 = t(x - t), \quad y = tx - \frac{1}{2}t^2 \dots\dots\dots ①$$

- (2) $D: y = -(x-a)^2$ と l の共有点は, $-(x-a)^2 = tx - \frac{1}{2}t^2$ から,

$$x^2 + (t-2a)x + a^2 - \frac{1}{2}t^2 = 0$$

D と l が接するので, 判別式の値が 0 となり,

$$(t-2a)^2 - 4(a^2 - \frac{1}{2}t^2) = 0$$

$$3t^2 - 4at = 0, \quad t = 0, \quad \frac{4}{3}a$$

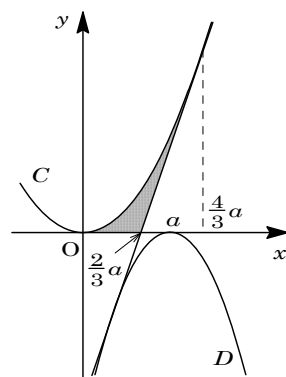
よって, 共通接線 l_1, l_2 の方程式は, ①より,

$$y = 0, \quad y = \frac{4}{3}ax - \frac{8}{9}a^2 \dots\dots\dots ②$$

- (3) ②と x 軸との交点は, $\frac{4}{3}ax - \frac{8}{9}a^2 = 0$ から, $x = \frac{2}{3}a$

すると, l_1, l_2 と C で囲まれた図形の面積 S は,

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2} \int_0^{\frac{4}{3}a} x^2 dx - \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}a - \frac{2}{3}a \right) \cdot \frac{1}{2} \left(\frac{4}{3}a \right)^2 = \frac{1}{6} [x^3]_0^{\frac{4}{3}a} - \frac{8}{27}a^3 \\ &= \frac{32}{81}a^3 - \frac{8}{27}a^3 = \frac{8}{81}a^3 \end{aligned}$$



コメント

微積分の頻出問題です。形式を変えて, センター試験にそのまま出題されても, 違和感はありません。

問 題

$0 \leq k \leq 1$ を満たす実数 k に対して, xy 平面上に次の連立不等式で表される 3 つの領域 D, E, F を考える。

D は連立不等式 $y \geq x^2$, $y \leq kx$ で表される領域

E は連立不等式 $y \leq x^2$, $y \geq kx$ で表される領域

F は連立不等式 $y \leq -x^2 + 2x$, $y \geq kx$ で表される領域

(1) 領域 $D \cup (E \cap F)$ の面積 $m(k)$ を求めよ。

(2) (1) で求めた面積 $m(k)$ を最小にする k の値と, その最小値を求めよ。 [2006]

解答例

(1) $D: y \geq x^2$, $y \leq kx$, $E: y \leq x^2$, $y \geq kx$, $F: y \leq -x^2 + 2x$, $y \geq kx$ より, これらの 3 つの領域の境界線は, $y = x^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = kx \cdots \cdots \textcircled{2}$, $y = -x^2 + 2x \cdots \cdots \textcircled{3}$ である。

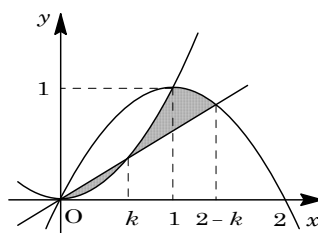
①と②の交点は, $x^2 = kx$ より, $x = 0, k$

①と③の交点は, $x^2 = -x^2 + 2x$ より, $x = 0, 1$

②と③の交点は, $kx = -x^2 + 2x$ より,

$$x = 0, 2-k$$

これより, 領域 $D \cup (E \cap F)$ を図示すると, 右図の網点部となり, その面積 $m(k)$ は,



$$\begin{aligned} m(k) &= \int_0^{2-k} (-x^2 + 2x - kx) dx - \int_0^1 (-x^2 + 2x - x^2) dx + 2 \int_0^k (kx - x^2) dx \\ &= -\int_0^{2-k} x(x - 2 + k) dx + 2 \int_0^1 x(x - 1) dx - 2 \int_0^k x(x - k) dx \\ &= \frac{1}{6}(2-k)^3 - 2 \cdot \frac{1}{6} \cdot 1^3 + 2 \cdot \frac{1}{6} k^3 = \frac{1}{6}(k^3 + 6k^2 - 12k + 6) \\ &= \frac{1}{6}k^3 + k^2 - 2k + 1 \end{aligned}$$

(2) (1) より, $m'(k) = \frac{1}{2}k^2 + 2k - 2 = \frac{1}{2}(k^2 + 4k - 4)$

$m'(k) = 0$ とすると, $k = -2 \pm 2\sqrt{2}$

$0 \leq k \leq 1$ より, $m(k)$ の値の変化は右表のようになり, $k = -2 + 2\sqrt{2}$ のとき最小となる。

k	0	...	$-2 + 2\sqrt{2}$...	1
$m'(k)$		—	0	+	
$m(k)$		↘		↗	

ここで, $k^3 + 6k^2 - 12k + 6$ を $k^2 + 4k - 4$ で割ると,

$$k^3 + 6k^2 - 12k + 6 = (k^2 + 4k - 4)(k + 2) - 16k + 14$$

これより, 最小値 $m(-2+2\sqrt{2})$ は,

$$m(-2+2\sqrt{2}) = \frac{1}{6} \{-16(-2+2\sqrt{2})+14\} = \frac{1}{3}(23-16\sqrt{2})$$

コメント

1999 年に続き, いわゆる $\frac{1}{6}$ 公式の適用パズルが出題されました。ただ, 本年の問題は, ひねりが加わっています。

問題

放物線 $R: y = -x^2 + 6$ と直線 $l: y = x$ との交点を A, B とする。直線 $y = x + t$ ($t > 0$) は放物線 R と相異なる 2 点 $C(t), D(t)$ で交わるものとする。

(1) 放物線 R と直線 l とで囲まれた図形の面積 T を求めよ。

(2) 4 つの点 $A, B, C(t), D(t)$ を頂点とする台形の面積を $S(t)$ とし、 $f(t) = \frac{S(t)}{T}$ とおく。 $f(t)$ の最大値を求めよ。 [2005]

解答例

(1) $R: y = -x^2 + 6 \cdots \cdots \textcircled{1}$, $l: y = x \cdots \cdots \textcircled{2}$ の交点は、

$$-x^2 + 6 = x, \quad x^2 + x - 6 = 0$$

よって、 $x = -3, 2$ となり、

$$\begin{aligned} T &= \int_{-3}^2 (-x^2 + 6 - x) dx = \int_{-3}^2 -(x+3)(x-2) dx \\ &= -\left(-\frac{1}{6}\right)(2+3)^3 = \frac{125}{6} \end{aligned}$$

(2) 直線 $y = x + t \cdots \cdots \textcircled{3}$ と $\textcircled{1}$ が異なる 2 点で交わる条件は、

$$-x^2 + 6 = x + t, \quad x^2 + x + t - 6 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{4}$ の判別式 $D = 1 - 4(t - 6) > 0$, $t < \frac{25}{4}$

$t > 0$ と合わせて、 $0 < t < \frac{25}{4}$

このとき $\textcircled{4}$ の解は、 $x = \frac{-1 \pm \sqrt{-4t + 25}}{2}$ となる。これを $x = \alpha, \beta$ ($\alpha < \beta$) とす

ると、 $C(\alpha, \alpha + t), D(\beta, \beta + t)$ となることより、

$$CD = \sqrt{(\beta - \alpha)^2 + (\beta + t - \alpha - t)^2} = \sqrt{2}(\beta - \alpha) = \sqrt{2} \cdot \sqrt{-4t + 25}$$

直線 $\textcircled{2}$ と直線 $\textcircled{3}$ の距離は、原点と直線 $\textcircled{3}$ の距離に等しく、 $\frac{t}{\sqrt{2}}$ となるので、

$$S = \frac{1}{2}(\sqrt{2} \cdot \sqrt{-4t + 25} + 5\sqrt{2}) \cdot \frac{t}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}t(\sqrt{-4t + 25} + 5)$$

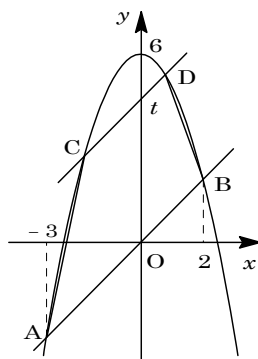
すると、 $f(t) = \frac{S(t)}{T} = \frac{6}{125} \cdot \frac{1}{2}t(\sqrt{-4t + 25} + 5) = \frac{3}{125}t(\sqrt{-4t + 25} + 5)$

ここで、 $s = \sqrt{-4t + 25}$ とおくと、 $0 < t < \frac{25}{4}$ から $0 < s < 5$ であり、

$$s^2 = -4t + 25, \quad t = \frac{25 - s^2}{4}$$

さらに、 $f(t) = g(s)$ とおくと、



$$g(s) = \frac{3}{125} \cdot \frac{25 - s^2}{4} (s + 5) = \frac{3}{500} (-s^3 - 5s^2 + 25s + 125)$$



$$g'(s) = \frac{3}{500}(-3s^2 - 10s + 25)$$

$$= -\frac{3}{500}(3s - 5)(s + 5)$$

右表より, $s = \frac{5}{3}$ のとき, $g(s) = f(t)$ は最大となり, 最大値 $\frac{8}{9}$ をとる。

s	0	...	$\frac{5}{3}$...	5
$g'(s)$		+	0	-	
$g(s)$			$\frac{8}{9}$		

コメント

文系問題なので, 置きかえをしなくては範囲外になってしまいます。

問 題

a を実数とする。 $f(x) = x^3 + ax^2 + (3a-6)x + 5$ について以下の問いに答えよ。

- (1) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a の範囲を求めよ。
- (2) 関数 $y = f(x)$ が極値をもつ a に対して、関数 $y = f(x)$ は $x = p$ で極大値、 $x = q$ で極小値をとるとする。関数 $y = f(x)$ のグラフ上の 2 点 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ を結ぶ直線の傾き m を a を用いて表せ。 [2004]

解答例

- (1) $f(x) = x^3 + ax^2 + (3a-6)x + 5$ より、 $f'(x) = 3x^2 + 2ax + (3a-6)$
 $y = f(x)$ が極値をもつ条件は、 $f'(x) = 0$ が異なる 2 実数解をもつことなので、
 $D/4 = a^2 - 3(3a-6) = a^2 - 9a + 18 > 0$
 $(a-3)(a-6) > 0$ より、 $a < 3$, $6 < a$

- (2) $f'(x) = 0$ の異なる 2 実数解が $x = p$, q ($p < q$) なので、

$$p+q = -\frac{2}{3}a, \quad pq = \frac{3a-6}{3} = a-2 \cdots \cdots (*)$$

さて、2 点 $P(p, f(p))$, $Q(q, f(q))$ を結ぶ直線の傾きが m より、(*) から、

$$\begin{aligned} m &= \frac{f(p) - f(q)}{p - q} = \frac{(p^3 - q^3) + a(p^2 - q^2) + (3a-6)(p-q)}{p - q} \\ &= (p^2 + pq + q^2) + a(p+q) + (3a-6) \\ &= (p+q)^2 - pq + a(p+q) + (3a-6) \\ &= \frac{4}{9}a^2 - a + 2 - \frac{2}{3}a^2 + 3a - 6 = -\frac{2}{9}a^2 + 2a - 4 \end{aligned}$$

コメント

定積分を利用する有名な解法もありますが、ここでは普通に解きました。

問題

放物線 $C: y = ax^2$ ($a > 0$) を考える。放物線 C 上の点 $P(p, ap^2)$ ($p \neq 0$) における C の接線と直交し、 P を通る直線を l とする。直線 l と放物線 C で囲まれる図形の面積を $S(P)$ とする。

- (1) 直線 l の方程式を求めよ。
 (2) 点 P を $p > 0$ の範囲で動かす。 $S(P)$ が最小となるときの、直線 l の傾き m と $S(P)$ を求めよ。 [2003]

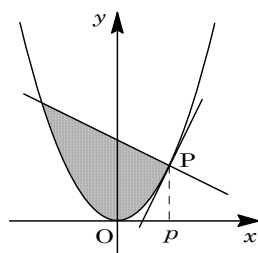
解答例

- (1) $y = ax^2$ ……①より、 $y' = 2ax$

点 $P(p, ap^2)$ における接線の傾きは $y' = 2ap$ より、直線 l は傾きが $-\frac{1}{2ap}$ となり、その方程式は、

$$y - ap^2 = -\frac{1}{2ap}(x - p)$$

$$y = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 \dots\dots\dots ②$$



- (2) ①②の交点は、 $ax^2 = -\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2$

$$ax^2 + \frac{1}{2ap}x - p\left(\frac{1}{2ap} + ap\right) = 0, \quad (x - p)\left(ax + \frac{1}{2ap} + ap\right) = 0$$

$x = p, -\frac{1}{2a^2p} - p$ となり、 $-\frac{1}{2a^2p} - p = \alpha$ とおくと、 $p > 0$ から $\alpha < p$ であり、

$$S(P) = \int_{\alpha}^p \left(-\frac{1}{2ap}x + \frac{1}{2a} + ap^2 - ax^2\right) dx = -a \int_{\alpha}^p (x - \alpha)(x - p) dx$$

$$= \frac{a}{6}(p - \alpha)^3 = \frac{a}{6}\left(2p + \frac{1}{2a^2p}\right)^3$$

ここで、相加平均と相乗平均の関係を用いて、

$$2p + \frac{1}{2a^2p} \geq 2\sqrt{2p \cdot \frac{1}{2a^2p}} = \frac{2}{a}$$

なお、等号は $2p = \frac{1}{2a^2p}$, $p^2 = \frac{1}{4a^2}$, すなわち $p = \frac{1}{2a}$ のときに成立する。

よって、 $S(P)$ の最小値は $\frac{a}{6}\left(\frac{2}{a}\right)^3 = \frac{4}{3a^2}$ であり、このとき直線 l の傾き m は、

$$m = -\frac{1}{2a \cdot \frac{1}{2a}} = -1 \text{ となる。}$$

コメント

面積の最小値を相加平均と相乗平均を用いて求めるという典型問題の1つです。

問題

a, b, c は定数とし, $a > 0$ とする。

- (1) 曲線 $y = -ax^3 + bx + c$ の接線で, 点 $(0, t)$ (t は実数) を通るものがただ 1 本存在することを示せ。
- (2) (1) の接線が正の傾きをもつための t の範囲を求めよ。 [2001]

解答例

- (1) $y = -ax^3 + bx + c$ より, $y' = -3ax^2 + b$

接点 $(k, -ak^3 + bk + c)$ とおくと, 接線の方程式は,

$$y - (-ak^3 + bk + c) = (-3ak^2 + b)(x - k), \quad y = (-3ak^2 + b)x + 2ak^3 + c$$

点 $(0, t)$ を通ることより, $t = 2ak^3 + c \cdots \cdots \textcircled{1}$

ここで, $f(k) = 2ak^3 + c$ とおくと, $f'(k) = 6ak^2 \geq 0$

よって, $f(k)$ は単調増加となり, $\textcircled{1}$ の実数解はただ 1 つ存在する。すなわち, 点 $(0, t)$ を通る接線はただ 1 本だけ存在する。

- (2) 接線が正の傾きをもつことより, $-3ak^2 + b > 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$

ここで, $\textcircled{1}$ と $\textcircled{2}$ を満たす k が存在する条件を求める。

$$\textcircled{1} \text{ より, } k^3 = \frac{t-c}{2a} \text{ なので, } k = \sqrt[3]{\frac{t-c}{2a}}$$

$$\textcircled{2} \text{ に代入して, } -3a\sqrt[3]{\left(\frac{t-c}{2a}\right)^2} + b > 0, \quad \sqrt[3]{\left(\frac{t-c}{2a}\right)^2} < \frac{b}{3a}$$

$$\left(\frac{t-c}{2a}\right)^2 < \left(\frac{b}{3a}\right)^3, \quad (t-c)^2 < \frac{4b^3}{27a}$$

$a > 0$ なので, $b \leq 0$ のときは満たす t は存在しない。

$$b > 0 \text{ のときは, } -\sqrt{\frac{4b^3}{27a}} < t - c < \sqrt{\frac{4b^3}{27a}}, \quad c - \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}} < t < c + \frac{2b}{3}\sqrt{\frac{b}{3a}}$$

コメント

(1) は 3 次曲線の接線の本数という頻出題ですが, (2) は t の存在しない場合があったりして, 後味がスッキリしません。

問 題

a, b を実数とする。 xy 平面上で、直線 $l: y = ax + b$ は曲線 $C: y = (x+1)(2-x)$ と、 x 座標が $0 \leq x \leq 2$ を満たす点で接しているとする。

- (1) このときの点 (a, b) の存在範囲を求め、 ab 平面上に図示せよ。
 (2) 曲線 C および 3 つの直線 $l, x = 0, x = 2$ で囲まれた図形の面積を最小にする a, b の値と、このときの面積を求めよ。 [2000]

解答例

- (1) $l: y = ax + b \cdots \cdots \textcircled{1}$, $C: y = (x+1)(2-x) \cdots \cdots \textcircled{2}$

②より, $y = -x^2 + x + 2, y' = -2x + 1$

接点 $(t, -t^2 + t + 2)$ とすると, 条件より $0 \leq t \leq 2 \cdots \cdots \textcircled{3}$

接線の方程式は, $y = (-2t+1)(x-t) + (-t^2 + t + 2)$
 $= (-2t+1)x + t^2 + 2$

これが①と一致するので,

$$a = -2t+1 \cdots \cdots \textcircled{4}, b = t^2 + 2 \cdots \cdots \textcircled{5}$$

④より, $t = -\frac{1}{2}(a-1)$

⑤に代入して, $b = \frac{1}{4}(a-1)^2 + 2$

③より, $-3 \leq -2t+1 \leq 1$ から $-3 \leq a \leq 1$

以上より, 点 (a, b) の存在範囲は右図のようになる。

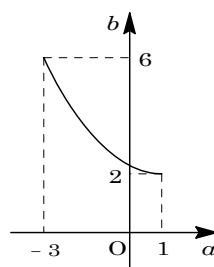
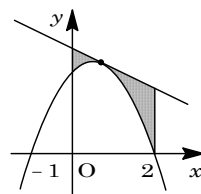
- (2) ④⑤を①に代入して, $y = (-2t+1)x + (t^2 + 2)$

右上図の網点部の面積を S とすると,

$$\begin{aligned} S &= \int_0^2 \{ (-2t+1)x + (t^2 + 2) - (-x^2 + x + 2) \} dx \\ &= \int_0^2 (x^2 - 2tx + t^2) dx = \left[\frac{1}{3}x^3 - tx^2 + t^2x \right]_0^2 \\ &= \frac{8}{3} - 4t + 2t^2 = 2(t-1)^2 + \frac{2}{3} \end{aligned}$$

③より, $t = 1$ のとき S は最小値 $\frac{2}{3}$ をとる。

このとき, ④⑤より, $a = -1, b = 3$



コメント

微積分の基本題です。特に工夫もせず、普通に解きました。

問題

曲線 $C: y = x|x-1|$ と、直線 $l: y = kx$ に関して、以下の問いに答えよ。

- (1) C と l が $x > 0$ で 2 つの交点をもつような k の範囲を求めよ。
 (2) k が (1) で求めた範囲を動くとき、 C と l によって囲まれる図形全体の面積を最小にする k の値を求めよ。 [1999]

解答例

- (1) $y = x|x-1| \cdots \cdots \textcircled{1}$, $y = kx \cdots \cdots \textcircled{2}$

①より、 $x < 1$ で $y = -x(x-1) \cdots \cdots \textcircled{3}$, また $x \geq 1$ で $y = x(x-1) \cdots \cdots \textcircled{4}$

③より $y' = -2x + 1$ なので、 $x = 0$ における微分係数は、 $y' = 1$ となる。

右図より、①と②が $x > 0$ で 2 つの交点をもつ条件は、
 $0 < k < 1$ となる。

- (2) ②と③の $x \neq 0$ の交点 $x = \alpha$ は、 $-x(x-1) = kx$ より $x = \alpha = 1 - k$

②と④の $x \neq 0$ の交点 $x = \beta$ は、 $x(x-1) = kx$ より $x = \beta = 1 + k$

C と l によって囲まれる面積を S 、上図の各領域の面積を S_1, S_2, S_3, S_4 とおくと、 $S_3 = S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4$ より、

$$\begin{aligned} S &= S_1 + \{ S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4 \} \\ &= 2S_1 + (S_2 + S_3 + S_4) - 2S_4 \\ &= 2 \int_0^\alpha -x(x-\alpha) dx + \int_0^\beta -x(x-\beta) dx - 2 \int_0^1 -x(x-1) dx \\ &= \frac{1}{3} \alpha^3 + \frac{1}{6} \beta^3 - \frac{1}{3} \\ &= \frac{1}{3} (1-k)^3 + \frac{1}{6} (1+k)^3 - \frac{1}{3} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{すると、} S' &= -(1-k)^2 + \frac{1}{2} (1+k)^2 \\ &= -\frac{1}{2} (k^2 - 6k + 1) \end{aligned}$$

k	0	...	$3 - 2\sqrt{2}$...	1
S'		-	0	+	
S		\searrow		\nearrow	

右表より、 $k = 3 - 2\sqrt{2}$ のとき、 S は最小となる。

コメント

毎年、見かける超有名パズルです。パズルとして解かず、普通に積分計算をしても S は求まりますが、ミスの頻度はかなり高くなるでしょう。

問題

座標平面上に放物線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $l: y = x + k$ を考える。

- (1) 放物線と直線 l が異なる 2 個の共有点をもつような k の範囲を求めよ。
 (2) k は(1)で求めた条件をみたすとして、さらに $k > 0$ とする。(1)の 2 つの共有点を P, Q とし、 O を原点とするとき、三角形 OPQ の面積を最大にする k の値、およびそのときの面積を求めよ。 [1998]

解答例

- (1) 放物線 $y = -x^2 + 4$ と直線 $y = x + k$ の

共有点が 2 個存在することより、

$$-x^2 + 4 = x + k, \quad x^2 + x + k - 4 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$D/4 = 1 - 4(k - 4) > 0 \text{ から, } k < \frac{17}{4}$$

- (2) P, Q の x 座標をそれぞれ p, q とすると、
 p, q は①の異なる実数解となる。

$$p + q = -1, \quad pq = k - 4 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$\triangle OPQ$ の面積を S とすると、

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{2}k(p - q) = \frac{1}{2}k\sqrt{(p + q)^2 - 4pq} = \frac{1}{2}k\sqrt{1 - 4(k - 4)} \\ &= \frac{1}{2}\sqrt{-4k^3 + 17k^2} \end{aligned}$$

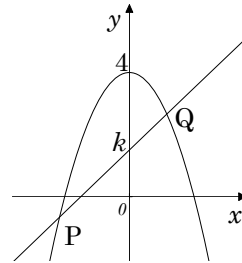
ここで、 $f(k) = -4k^3 + 17k^2$ とおくと、

$$f'(k) = -12k^2 + 34k = -2k(6k - 17)$$

よって、 $k = \frac{17}{6}$ のとき $f(k)$ は最大、

すなわち S は最大となる。

$$\text{最大値は, } S = \frac{1}{2} \cdot \frac{17}{6} \sqrt{17 - 4 \cdot \frac{17}{6}} = \frac{17}{36} \sqrt{51}$$



k	0	...	$\frac{17}{6}$...	$\frac{17}{4}$
$f'(k)$	0	+	0	-	
$f(k)$		\nearrow		\searrow	

コメント

センター試験レベルの基本的な問題です。

問題

曲線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-1, 1)$, $B(b, b^2)$ をとる。ただし $b > -1$ とする。このとき、次の条件を満たす b の範囲を求めよ。

条件： $y = x^2$ 上の点 $T(t, t^2)$ ($-1 < t < b$) で、 $\angle ATB$ が直角になるものが存在する。

[2016]

解答例

$A(-1, 1)$, $B(b, b^2)$, $T(t, t^2)$ ($-1 < t < b$) に対し、

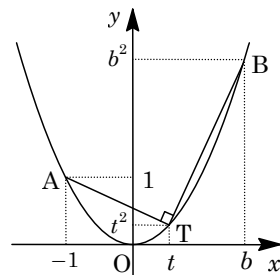
$$\overrightarrow{AT} = (t+1, t^2-1) = (t+1)(1, t-1)$$

$$\overrightarrow{BT} = (t-b, t^2-b^2) = (t-b)(1, t+b)$$

さて、条件から、ある t に対して、 $\overrightarrow{AT} \perp \overrightarrow{BT}$ より、

$$\overrightarrow{AT} \cdot \overrightarrow{BT} = 0, \quad 1 + (t-1)(t+b) = 0$$

$$t^2 + (b-1)t - b + 1 = 0 \cdots \cdots (*)$$



これより、(*)を満たす t が $-1 < t < b$ に少なくとも 1 つ存在する条件を求める。

ここで、 $f(t) = t^2 + (b-1)t - b + 1 = \left(t + \frac{b-1}{2}\right)^2 - \frac{b^2 + 2b - 3}{4}$ とおくと、

$$f(-1) = -2b + 3, \quad f(b) = 2b^2 - 2b + 1 = 2\left(b - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} > 0$$

(i) $-2b + 3 \geq 0$ ($-1 < b \leq \frac{3}{2}$) のとき

(*)を満たす t が $-1 < t < b$ に少なくとも 1 つ存在する条件は、 $f(-1) \geq 0$ かつ $f(b) > 0$ より、

$$-1 < -\frac{b-1}{2} < b \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad -\frac{b^2 + 2b - 3}{4} \leq 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①より、 $-2b < b-1 < 2$ となり、 $\frac{1}{3} < b < 3$

②より、 $(b+3)(b-1) \geq 0$ となり、 $b \leq -3$, $1 \leq b$

よって、 $-1 < b \leq \frac{3}{2}$ と合わせると、 $1 \leq b \leq \frac{3}{2}$ となる。

(ii) $-2b + 3 < 0$ ($b > \frac{3}{2}$) のとき

$f(-1) < 0$ かつ $f(b) > 0$ より、(*)を満たす t が $-1 < t < b$ に存在する。

(i)(ii)より、求める条件は、 $b \geq 1$ である。

コメント

図形的な条件を数式化した後は、2 次方程式の解の配置の問題になります。ここでは、 $f(b) > 0$ を見つけることがポイントとなっています。

問題

座標平面上の円 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ と、 x 軸上の 2 点 $P(-a, 0)$, $Q(b, 0)$ を考える。ただし、 $a > 0$, $b > 0$, $ab \neq 1$ とする。点 P , Q のそれぞれから C に x 軸とは異なる接線を引き、その 2 つの接線の交点を R とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 直線 QR の方程式を求めよ。
- (2) R の座標を a, b で表せ。
- (3) R の y 座標が正であるとき、 $\triangle PQR$ の周の長さを T とする。 T を a, b で表せ。
- (4) 2 点 P, Q が、条件「 $PQ = 4$ であり、 R の y 座標は正である」を満たしながら動くとき、 T を最小とする a の値とそのときの T の値を求めよ。

[2015]

解答例

- (1) 直線 QR は x 軸に平行でないので、その法線ベクトルの成分を $(1, m)$ とおくと、その方程式は、

$$(x-b) + my = 0, \quad x + my - b = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

①は、円 $C: x^2 + (y-1)^2 = 1$ に接することより、

$$\frac{|m-b|}{\sqrt{1+m^2}} = 1, \quad (m-b)^2 = 1+m^2$$

よって、 $2bm = b^2 - 1$ より、 $m = \frac{b^2-1}{2b}$ となり、①に代入すると、

$$x + \frac{b^2-1}{2b}y - b = 0, \quad 2bx + (b^2-1)y - 2b^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

- (2) 直線 PR の方程式は、(1)の結果から、 $-2ax + (a^2-1)y - 2a^2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$

②③を連立すると、 $\{a(b^2-1) + b(a^2-1)\}y = 2ab^2 + 2a^2b$ となり、

$$\{ab(a+b) - (a+b)\}y = 2ab(a+b), \quad y = \frac{2ab}{ab-1} \quad (ab \neq 1, a+b > 0)$$

②に代入すると、 $2bx + \frac{2ab}{ab-1}(b^2-1) - 2b^2 = 0$ となり、

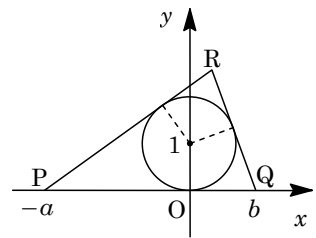
$$x + \frac{a}{ab-1}(b^2-1) - b = 0, \quad x = -\frac{a}{ab-1}(b^2-1) + b = \frac{a-b}{ab-1}$$

これより、 $R\left(\frac{a-b}{ab-1}, \frac{2ab}{ab-1}\right)$ である。

- (3) R の y 座標が正より、 $\frac{2ab}{ab-1} > 0$ すなわち $ab > 1$ であり、このとき、

$$QR^2 = \left(\frac{a-b}{ab-1} - b\right)^2 + \left(\frac{2ab}{ab-1}\right)^2 = \frac{a^2(1-b^2)^2 + 4a^2b^2}{(ab-1)^2} = \frac{a^2(1+b^2)^2}{(ab-1)^2}$$

よって、 $QR = \frac{a(1+b^2)}{ab-1}$ となり、同様にすると $PR = \frac{b(1+a^2)}{ab-1}$ となる。



そこで、 $\triangle PQR$ の周の長さを T とすると、 $PQ = a + b$ より、

$$T = a + b + \frac{a(1+b^2)}{ab-1} + \frac{b(1+a^2)}{ab-1} = \frac{2ab(a+b)}{ab-1} \dots\dots\dots \textcircled{4}$$

(4) $PQ = 4$ で R の y 座標が正より、 $a + b = 4$ 、 $ab > 1$ である。

ここで、 $\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2} = 2$ より $ab \leq 4$ となり、 $1 < ab \leq 4$ である。すると、 $\textcircled{4}$ から、

$$T = \frac{8ab}{ab-1} = \frac{8}{1-\frac{1}{ab}} \geq \frac{8}{1-\frac{1}{4}} = \frac{32}{3}$$

これより、 $ab = 4$ ($a = b = 2$) のとき T は最小値 $\frac{32}{3}$ をとる。

コメント

別解もいろいろ可能な円と直線に関する標準的な問題です。特に(3)は……。

問 題

原点を中心とする半径 1 の円を C とし、 x 軸上に点 $P(a, 0)$ をとる。ただし $a > 1$ とする。 P から C へ引いた 2 本の接線の接点を結ぶ直線が x 軸と交わる点を Q とする。

(1) Q の x 座標を求めよ。

(2) 点 R が C 上にあるとき、 $\frac{PR}{QR}$ が R によらず一定であることを示し、その値を a

を用いて表せ。

(3) C 上の点 R が $\angle PRQ = 90^\circ$ を満たすとする。このような R の座標と線分 PR の長さを求めよ。

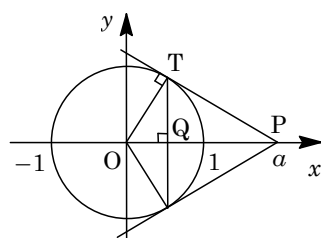
[2014]

解答例

(1) 2 つの接点は x 軸対称の位置にあり、その一方を T とおくと、

$$\frac{OQ}{OT} = \frac{OT}{OP}, \quad OQ = \frac{OT^2}{OP} = \frac{1}{a}$$

よって、 Q の x 座標は $\frac{1}{a}$ である。



(2) $R(\cos \theta, \sin \theta)$ とおくと、

$$\begin{aligned} \left(\frac{PR}{QR}\right)^2 &= \frac{(\cos \theta - a)^2 + \sin^2 \theta}{\left(\cos \theta - \frac{1}{a}\right)^2 + \sin^2 \theta} = \frac{1 - 2a \cos \theta + a^2}{1 - \frac{2}{a} \cos \theta + \frac{1}{a^2}} = \frac{a^2(1 - 2a \cos \theta + a^2)}{a^2 - 2a \cos \theta + 1} \\ &= a^2 \end{aligned}$$

よって、 $\frac{PR}{QR} = a$ である。

(3) $\angle PRQ = 90^\circ$ を満たす C 上の点 R は 2 つあり、 x 軸対称となっている。また、 R から x 軸に垂線 RH を引く。

ここで、 $\angle PQR = \varphi$ とおくと $\angle PRH = \varphi$ となり、(2) から $\tan \varphi = a$ より、

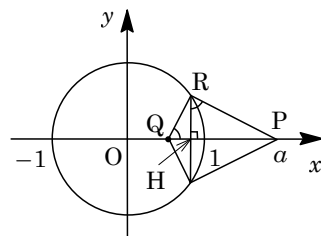
$$RH = QH \tan \varphi = aQH, \quad PH = RH \tan \varphi = a^2QH$$

$$QH + PH = PQ \text{ より, } (a^2 + 1)QH = a - \frac{1}{a} \text{ となり,}$$

$$QH = \frac{a^2 - 1}{a(a^2 + 1)}, \quad RH = \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}$$

$$\text{また, } OH = OQ + QH = \frac{1}{a} + \frac{a^2 - 1}{a(a^2 + 1)} = \frac{2a^2}{a(a^2 + 1)} = \frac{2a}{a^2 + 1} \text{ から, } R \text{ の座標は,}$$

$$\left(\frac{2a}{a^2 + 1}, \frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right), \left(\frac{2a}{a^2 + 1}, -\frac{a^2 - 1}{a^2 + 1}\right)$$



$$\text{さらに, } QR = \sqrt{QH^2 + a^2 QH^2} = \sqrt{a^2 + 1} QH = \frac{a^2 - 1}{a\sqrt{a^2 + 1}} \text{ より,}$$

$$PR = aQR = \frac{a^2 - 1}{\sqrt{a^2 + 1}}$$

コメント

円と直線に関する問題ですが、位置関係がはっきりしているため、平面図形の知識が援用できます。なお、どの設問もいろいろな方法が考えられます。

問 題

実数 t に対して 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を考える。

- (1) 2 点 P, Q を通る直線 l の方程式を求めよ。
- (2) a を定数とし、直線 $x=a$ と l の交点の y 座標を t の関数と考えて $f(t)$ とおく。 t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を a を用いて表せ。
- (3) t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くとき、線分 PQ が通過してできる図形を図示し、その面積を求めよ。

[2014]

解答例

- (1) 2 点 $P(t, t^2)$, $Q(t+1, (t+1)^2)$ を通る直線 l の方程式は、

$$y - t^2 = \frac{(t+1)^2 - t^2}{(t+1) - t} (x - t), \quad y = (2t+1)x - t^2 - t \cdots \cdots (*)$$

- (2) (*) に $x=a$ を代入し、 $y=f(t)$ とおくと、

$$f(t) = (2t+1)a - t^2 - t = -t^2 + (2a-1)t + a = -\left(t - \frac{2a-1}{2}\right)^2 + a^2 + \frac{1}{4}$$

すると、 t が $-1 \leq t \leq 0$ の範囲を動くときの $f(t)$ の最大値を求めると、

$$(i) \quad \frac{2a-1}{2} \leq -1 \quad \left(a \leq -\frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad \text{最大値は、} f(-1) = -a$$

$$(ii) \quad -1 \leq \frac{2a-1}{2} \leq 0 \quad \left(-\frac{1}{2} \leq a \leq \frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad \text{最大値は、} f\left(\frac{2a-1}{2}\right) = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$(iii) \quad \frac{2a-1}{2} \geq 0 \quad \left(a \geq \frac{1}{2}\right) \text{ のとき} \quad \text{最大値は、} f(0) = a$$

- (3) 線分 PQ が通過してできる図形は、直線 l が通過してできる領域の放物線 $y=x^2$ の上側にある部分である。さて、(2) から、

$$(i) \quad a \leq -\frac{1}{2} \text{ のとき} \quad a = f(0) \leq f(t) \leq f(-1) = -a$$

$$(ii-i) \quad -\frac{1}{2} \leq a \leq 0 \text{ のとき} \quad a = f(0) \leq f(t) \leq f\left(\frac{2a-1}{2}\right) = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$(ii-ii) \quad 0 \leq a \leq \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad -a = f(-1) \leq f(t) \leq f\left(\frac{2a-1}{2}\right) = a^2 + \frac{1}{4}$$

$$(iii) \quad a \geq \frac{1}{2} \text{ のとき} \quad -a = f(-1) \leq f(t) \leq f(0) = a$$

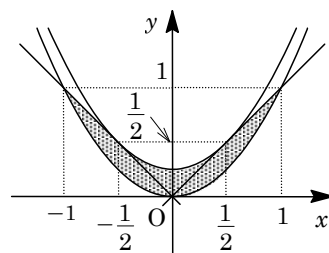
- (i)~(iii) より、直線 l が通過してできる領域は、

$$x \leq y \leq -x \quad \left(x \leq -\frac{1}{2} \text{ のとき}\right), \quad x \leq y \leq x^2 + \frac{1}{4} \quad \left(-\frac{1}{2} \leq x \leq 0 \text{ のとき}\right)$$

$$-x \leq y \leq x^2 + \frac{1}{4} \quad \left(0 \leq x \leq \frac{1}{2} \text{ のとき}\right), \quad -x \leq y \leq x \quad \left(x \geq \frac{1}{2} \text{ のとき}\right)$$

以上より，線分 PQ が通過してできる図形は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。この図形の面積を S とすると， y 軸に関する対称性より，

$$\begin{aligned} S &= 2 \int_0^{\frac{1}{2}} \left(x^2 + \frac{1}{4} - x^2 \right) dx + 2 \int_{\frac{1}{2}}^1 (x - x^2) dx \\ &= 2 \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{2} + 2 \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} \right]_{\frac{1}{2}}^1 = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{7}{12} = \frac{5}{12} \end{aligned}$$



コメント

線分の通過領域の問題です。誘導の付け方が，今年の東大のほぼ文理共通題と同じようになっています。

問題

xy 平面上に、点 $(0, 1)$ を通り、傾きが h の直線 l がある。

- (1) xy 平面において、 l に関して点 $P(a, b)$ と対称な点を $Q(s, t)$ とする。このとき、 a, b, h を用いて s, t を表せ。ただし、点 $P(a, b)$ は l 上にないとする。
- (2) xy 平面において、 l に関して原点 $O(0, 0)$ と対称な点を A とする。 h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くとき、線分 OA の長さの最大値と最小値を求めよ。
- (3) h が $-1 \leq h \leq 1$ の範囲を動くときの点 A の軌跡を C とする。 C と直線 $y=1$ で囲まれた図形の面積を求めよ。

[2012]

解答例

- (1) 直線 $l: y = hx + 1$ から、 $hx - y + 1 = 0$ となり、法線ベクトルの成分が $(h, -1)$ となる。

ここで、条件より、線分 PQ の垂直二等分線が l なので、 k を実数として、 $\overrightarrow{PQ} = k(h, -1)$ から、

$$s = a + kh \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad t = b - k \cdots \cdots \textcircled{2}$$

また、線分 PQ の中点 $(a + \frac{k}{2}h, b - \frac{k}{2})$ が l 上にあるので、

$$h(a + \frac{k}{2}h) - (b - \frac{k}{2}) + 1 = 0, \quad (h^2 + 1)k + 2ah - 2b + 2 = 0$$

よって、 $k = \frac{-2ah + 2b - 2}{h^2 + 1}$ となり、 $\textcircled{1}$ 、 $\textcircled{2}$ に代入すると、

$$s = a + \frac{-2ah + 2b - 2}{h^2 + 1}h = \frac{-ah^2 + (2b - 2)h + a}{h^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$t = b - \frac{-2ah + 2b - 2}{h^2 + 1} = \frac{bh^2 + 2ah - b + 2}{h^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

- (2) $A(x, y)$ とすると、 $\textcircled{3}$ $\textcircled{4}$ において $a = b = 0$ 、 $x = s$ 、 $y = t$ となり、

$$x = \frac{-2h}{h^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{5}, \quad y = \frac{2}{h^2 + 1} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

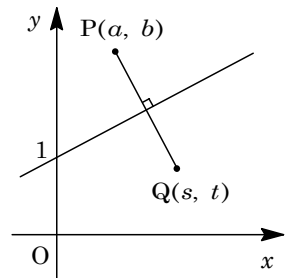
$$\text{これより、} OA^2 = \left(\frac{-2h}{h^2 + 1}\right)^2 + \left(\frac{2}{h^2 + 1}\right)^2 = \frac{4(h^2 + 1)}{(h^2 + 1)^2} = \frac{4}{h^2 + 1}$$

ここで、 $-1 \leq h \leq 1$ から $1 \leq h^2 + 1 \leq 2$ となるので、 $2 \leq OA^2 \leq 4$ となり、 OA の最大値は 2 、最小値は $\sqrt{2}$ である。

- (3) $\textcircled{5}$ $\textcircled{6}$ より、 $x = -hy$ となり、 $y > 0$ から、 $h = -\frac{x}{y} \cdots \cdots \textcircled{7}$

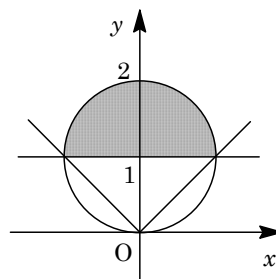
$\textcircled{7}$ を $\textcircled{6}$ に代入すると、 $y\left(\frac{x^2}{y^2} + 1\right) = 2$ から、 $x^2 + y^2 = 2y$ となり、

$$x^2 + (y - 1)^2 = 1$$



また, $-1 \leq h \leq 1$ から, ⑦に代入すると, $-1 \leq -\frac{x}{y} \leq 1$

よって, $y \geq x$ かつ $y \geq -x$ となり, 点 A の軌跡 C と直線 $y=1$ に囲まれた図形は右図の網点部となり, その面積 S は, $S = \frac{1}{2} \times \pi \cdot 1^2 = \frac{\pi}{2}$ である。



コメント

線対称移動を題材にした頻出問題です。ただ, 計算が繁雑という(1)の印象が, (2)と(3)で一変しました。

問 題

xy 平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(1, 0)$, $B(0, 1)$ がある。

- (1) $a > 0$ とする。 $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 P の軌跡を求めよ。
 (2) $a > 1 > b > 0$ とする。 $OP : AP : BP = 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための a, b に対する条件を求め、 ab 平面上に図示せよ。 [2011]

解答例

- (1) $O(0, 0)$, $A(1, 0)$ に対し、 $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 $P(x, y)$ は、 $AP = aOP$,

$AP^2 = a^2 OP^2$ より、

$$(x-1)^2 + y^2 = a^2(x^2 + y^2), (a^2-1)(x^2 + y^2) + 2x - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

- (i) $a = 1$ のとき

①より、 $2x - 1 = 0$ となり、点 P の軌跡は、直線 $x = \frac{1}{2}$ である。

- (ii) $a \neq 1$ のとき

①より、 $x^2 + y^2 + \frac{2}{a^2-1}x - \frac{1}{a^2-1} = 0$ となり、点 P の軌跡は円であり、

$$\left(x + \frac{1}{a^2-1}\right)^2 + y^2 = \frac{a^2}{(a^2-1)^2}$$

- (2) (1)より、 $OP : AP = 1 : a$ を満たす点 P の軌跡は、 $a > 1$ から、中心 $\left(-\frac{1}{a^2-1}, 0\right)$,

半径 $\frac{a}{a^2-1}$ の円である。また、 $O(0, 0)$, $B(0, 1)$ に対し、 $OP : BP = 1 : b$ を満たす

点 P の軌跡は、 $0 < b < 1$ から、中心 $\left(0, -\frac{1}{b^2-1}\right)$, 半径 $\frac{b}{1-b^2}$ の円である。

よって、 $OP : AP : BP = 1 : a : b$ を満たす点 P が存在するための条件は、

$$\left|\frac{a}{a^2-1} - \frac{b}{1-b^2}\right| \leq \sqrt{\left(-\frac{1}{a^2-1}\right)^2 + \left(\frac{1}{b^2-1}\right)^2} \leq \frac{a}{a^2-1} + \frac{b}{1-b^2}$$

$$|a(1-b^2) - b(a^2-1)| \leq \sqrt{(a^2-1)^2 + (b^2-1)^2} \leq a(1-b^2) + b(a^2-1)$$

$a > 1 > b > 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$ のもとで、この不等式を変形していくと、

$$\{a(1-b^2) - b(a^2-1)\}^2 \leq (a^2-1)^2 + (b^2-1)^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$(a^2-1)^2 + (b^2-1)^2 \leq \{a(1-b^2) + b(a^2-1)\}^2 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

- ③より、 $(a^2-1)(1-b^2)^2 + (b^2-1)(a^2-1)^2 - 2ab(a^2-1)(1-b^2) \leq 0$

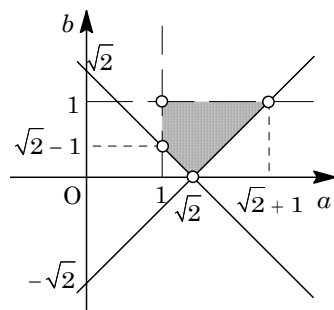
$$(1-b^2) - (a^2-1) - 2ab \leq 0, a^2 + b^2 + 2ab \geq 2, a + b \geq \sqrt{2} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

- ④より、 $(a^2-1)(1-b^2)^2 + (b^2-1)(a^2-1)^2 + 2ab(a^2-1)(1-b^2) \geq 0$

$$(1-b^2) - (a^2-1) + 2ab \geq 0, a^2 + b^2 - 2ab \leq 2, a - b \leq \sqrt{2} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

以上より，求める条件は②⑤⑥であり，これを ab 平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，破線の境界線および白丸は領域に含まない。



コメント

アポロニウスの円を題材として，さらに 2 円が共有点をもつ条件が味付けされています。計算に工夫が必要な問題です。

問題

xy 平面上の長方形 ABCD が次の条件(a), (b), (c)を満たしているとする。

(a) 対角線 AC と BD の交点は原点 O に一致する。

(b) 直線 AB の傾きは 2 である。

(c) A の y 座標は, B, C, D の y 座標より大きい。

このとき, $a > 0, b > 0$ として, 辺 AB の長さを $2\sqrt{5}a$, BC の長さを $2\sqrt{5}b$ とおく。

(1) A, B, C, D の座標を a, b で表せ。

(2) 長方形 ABCD が領域 $x^2 + (y-5)^2 \leq 100$ に含まれるための a, b に対する条件を求め, ab 平面上に図示せよ。 [2010]

解答例

(1) まず, 条件(a)(c)から, 頂点の y 座標は, A が最大, C が最小である。

さて, 条件(b)より, 直線 AB の \overrightarrow{AB} と同じ向きの方
向ベクトルの成分は $(-1, -2)$ とおくことができ,

$$\overrightarrow{AB} = 2\sqrt{5}a \times \frac{1}{\sqrt{5}}(-1, -2) = -2a(1, 2)$$

ここで, $A(p, q)$ とすると,

$$\overrightarrow{OB} = (p, q) - 2a(1, 2) = (p-2a, q-4a)$$

次に, 辺 BC は AB と垂直なので, 直線 BC の \overrightarrow{BC} と同じ
向きの方向ベクトルの成分は $(2, -1)$ とおくことができ,

$$\overrightarrow{BC} = 2\sqrt{5}b \times \frac{1}{\sqrt{5}}(2, -1) = 2b(2, -1)$$

すると, $B(p-2a, q-4a)$ より,

$$\overrightarrow{OC} = (p-2a, q-4a) + 2b(2, -1) = (p-2a+4b, q-4a-2b)$$

条件(a)から, C は A と原点对称なので,

$$p-2a+4b = -p \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad q-4a-2b = -q \cdots \cdots \textcircled{2}$$

①②より, $p = a-2b, q = 2a+b$ となり,

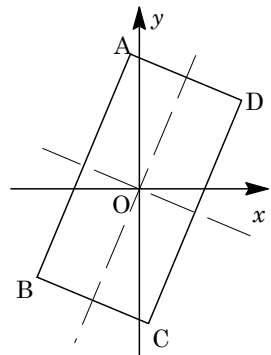
$$A(a-2b, 2a+b), \quad C(-a+2b, -2a-b)$$

また, $p-2a = -a-2b, q-4a = -2a+b$ であり, D は B と原点对称なので,

$$B(-a-2b, -2a+b), \quad D(a+2b, 2a-b)$$

(2) $E(0, 5)$ とおくと, E は辺 AD, BC の垂直二等分線 $y = 2x$ の上側, 辺 AB, DC の
垂直二等分線 $y = -\frac{1}{2}x$ の上側にあることより,

$$EA < EB < EC, \quad EA < ED < EC$$



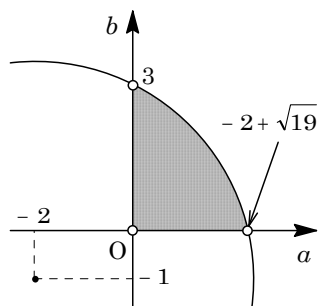
よって、長方形 ABCD が領域 $x^2 + (y-5)^2 \leq 100$ ……③に含まれる条件は、点 C が領域③に含まれる条件に等しく、 $(-a+2b)^2 + (-2a-b-5)^2 \leq 100$

$$(-a+2b)^2 + (-2a-b)^2 - 10(-2a-b) + 25 \leq 100$$

$$5a^2 + 5b^2 + 20a + 10b - 75 \leq 0$$

$$(a+2)^2 + (b+1)^2 \leq 20$$

よって、 $a > 0$, $b > 0$ と合わせて、 a , b に対する条件を ab 平面上に図示すると、右図の網点部となる。ただし、両軸以外の境界線は領域に含む。



コメント

図形の配置が指定されているため、単位ベクトルを利用した解で記しています。

問 題

放物線 $y = ax^2$ ($a > 0$) と円 $(x-b)^2 + (y-1)^2 = 1$ ($b > 0$) が、点 $P(p, q)$ で接しているとする。ただし、 $0 < p < b$ とする。この円の中心 Q から x 軸に下ろした垂線と x 軸との交点を R としたとき、 $\angle PQR = 120^\circ$ であるとする。ここで、放物線と円が点 P で接するとは、 P が放物線と円の共有点であり、かつ点 P における放物線の接線と点 P における円の接線が一致することである。

- (1) a, b の値を求めよ。
 (2) 点 P と点 R を結ぶ短い方の弧と x 軸、および放物線で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2009]

解答例

- (1) まず、条件より、 $|\overrightarrow{PQ}| = 1$ 、 $\angle PQR = 120^\circ$ より、

$$\overrightarrow{PQ} = \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1)$$

さて、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PQ}$ より、

$$(b, 1) = (p, ap^2) + \frac{1}{2}(\sqrt{3}, -1)$$

$$b = p + \frac{\sqrt{3}}{2} \dots\dots\dots ①, \quad 1 = ap^2 - \frac{1}{2} \dots\dots\dots ②$$

また、 $y = ax^2$ より $y' = 2ax$ となり、 $P(p, ap^2)$ における接線の方角ベクトル \vec{u} は、 $\vec{u} = (1, 2ap)$ と表せ、 $\vec{u} \cdot \overrightarrow{PQ} = 0$ から、

$$\sqrt{3} - 2ap = 0 \dots\dots\dots ③$$

$$②③ \text{ より, } \frac{3}{2} = \frac{\sqrt{3}}{2}p, \quad p = \sqrt{3} \text{ となり, } a = \frac{\sqrt{3}}{2p} = \frac{1}{2}$$

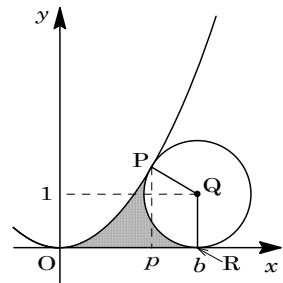
$$① \text{ に代入して, } b = \sqrt{3} + \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{3}{2}\sqrt{3}$$

- (2) (1)より、放物線 $y = \frac{1}{2}x^2$ 、 $P(\sqrt{3}, \frac{3}{2})$ 、 $Q(\frac{3}{2}\sqrt{3}, 1)$ 、 $R(\frac{3}{2}\sqrt{3}, 0)$ となり、求める網点部の面積 S は、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^{\sqrt{3}} \frac{1}{2}x^2 dx + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2} + 1\right) \cdot \left(\frac{3}{2}\sqrt{3} - \sqrt{3}\right) - \pi \cdot 1^2 \cdot \frac{120}{360} \\ &= \left[\frac{1}{6}x^3\right]_0^{\sqrt{3}} + \frac{5}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi = \frac{9}{8}\sqrt{3} - \frac{1}{3}\pi \end{aligned}$$

コメント

(1)では、文字の値を決定するのに、いろいろな方針が考えられます。上の解は、与えられた条件から決定している \overrightarrow{PQ} に注目し、そこを出発点として計算を進めたものです。



問 題

2 つの円 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ と $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$ に外接し、直線 $x=6$ に接する円を求めよ。ただし、2 つの円がただ 1 点を共有し、互いに外部にあるとき、外接するという。
[2008]

解答例

まず、求める円 C の半径を r とすると、条件より、直線 $x=6$ に左側から接することから、 k を定数として、中心の座標を $(6-r, k)$ とおくことができる。

すると、 C の方程式は、

$$(x-6+r)^2 + (y-k)^2 = r^2$$

さて、 C は、中心 $(0, 2)$ 、半径 3 の円 $x^2 + (y-2)^2 = 9$ に外接することより、

$$\sqrt{(6-r)^2 + (k-2)^2} = 3+r \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 C は、中心 $(4, -4)$ 、半径 1 の円 $(x-4)^2 + (y+4)^2 = 1$ に外接することより、

$$\sqrt{(6-r-4)^2 + (k+4)^2} = 1+r \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{より、} (6-r)^2 + (k-2)^2 = (3+r)^2, 18r = k^2 - 4k + 31 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{2} \text{より、} (2-r)^2 + (k+4)^2 = (1+r)^2, 6r = k^2 + 8k + 19 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

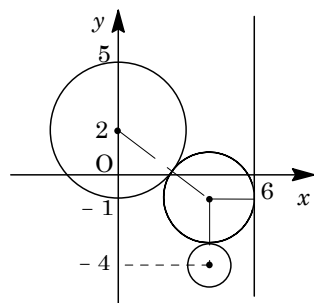
$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{より、} k^2 - 4k + 31 = 3(k^2 + 8k + 19) \text{ となり、まとめて、} k^2 + 14k + 13 = 0$$

$$(k+1)(k+13) = 0, k = -1, -13$$

$$\textcircled{4} \text{より、} k = -1 \text{ のとき } r = 2, k = -13 \text{ のとき } r = 14$$

以上より、求める円 C は、

$$(x-4)^2 + (y+1)^2 = 4, (x+8)^2 + (y+13)^2 = 196$$



コメント

円と直線および 2 円の位置関係についての基本問題です。

問 題

次の不等式の表す領域を D とする。 $(x-2)^2 + |2x+3y-1| \leq 4$

- (1) D の概形を描き、その面積を求めよ。
 (2) 点 (x, y) が D 内を動くとき、 $x+y$ の最大値と最小値およびそれらの値をとる点の座標を求めよ。 [2008]

解答例

- (1) $D : (x-2)^2 + |2x+3y-1| \leq 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$ に対して、

- (i) $2x+3y-1 \geq 0$ のとき

$\textcircled{1}$ は、 $(x-2)^2 + (2x+3y-1) \leq 4$ となり、 $x^2 - 2x + 3y \leq 1$

$$y \leq -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad y \leq -\frac{1}{3}(x-1)^2 + \frac{2}{3}$$

- (ii) $2x+3y-1 < 0$ のとき

$\textcircled{1}$ は、 $(x-2)^2 - (2x+3y-1) \leq 4$ となり、

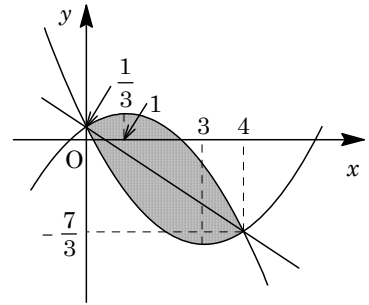
$$x^2 - 6x - 3y \leq -1$$

$$y \geq \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{3}, \quad y \geq \frac{1}{3}(x-3)^2 - \frac{8}{3}$$

よって、領域 D を図示すると、右図の網点部のようになる。ただし、境界は領域に含む。

ここで、領域 D の面積を S とおくと、

$$\begin{aligned} S &= \int_0^4 \left\{ \left(-\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3} \right) - \left(\frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{3} \right) \right\} dx \\ &= \int_0^4 \left(-\frac{2}{3}x^2 + \frac{8}{3}x \right) dx = \left[-\frac{2}{9}x^3 + \frac{4}{3}x^2 \right]_0^4 = -\frac{2}{9} \cdot 64 + \frac{4}{3} \cdot 16 = \frac{64}{9} \end{aligned}$$



- (2) $x+y=k$ とおくと、 $y=-x+k \cdots \cdots \textcircled{2}$

さて、直線 $\textcircled{2}$ と領域 D の境界線 $y = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}$ との共有点は、

$$-x+k = -\frac{1}{3}x^2 + \frac{2}{3}x + \frac{1}{3}, \quad x^2 - 5x + 3k - 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

接する条件は、 $D = 25 - 4(3k - 1) = 0$, $k = \frac{29}{12}$

このとき、接点の x 座標は $\textcircled{3}$ の重解より、 $x = \frac{5}{2}$ となり、 $0 < x < 4$ を満たす。

$\textcircled{2}$ より、 $y = -\frac{5}{2} + \frac{29}{12} = -\frac{1}{12}$ となり、点 $(\frac{5}{2}, -\frac{1}{12})$ において最大値 $\frac{29}{12}$ をとる。

また、直線 $\textcircled{2}$ と領域 D の境界線 $y = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{3}$ との共有点は、

$$-x+k = \frac{1}{3}x^2 - 2x + \frac{1}{3}, \quad x^2 - 3x - 3k + 1 = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

接する条件は、 $D = 9 - 4(-3k + 1) = 0$, $k = -\frac{5}{12}$

このとき、接点の x 座標は③の重解より、 $x = \frac{3}{2}$ となり、 $0 < x < 4$ を満たす。

②より、 $y = -\frac{3}{2} - \frac{5}{12} = -\frac{23}{12}$ となり、点 $(\frac{3}{2}, -\frac{23}{12})$ において最小値 $-\frac{5}{12}$ をとる。

コメント

領域の最大・最小問題への応用です。正確な計算がすべてです。

問題

xy 平面上に点 $A(2, 4)$ がある。平面上の直線 l に関して点 A と対称な点が x 軸上にあるとき、直線 l をピタリ直線と呼ぶことにする。

- (1) 点 $P(p, q)$ を通るピタリ直線 l があるとし、 l に関して A と対称な点を $A'(t, 0)$ とするとき、 p, q, t の間に成り立つ関係式を求めよ。
- (2) ピタリ直線が 2 本通る点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。
- (3) 点 $P(p, q)$ を通る 2 本のピタリ直線が直交するような点 $P(p, q)$ の存在範囲を求め、それを図示せよ。

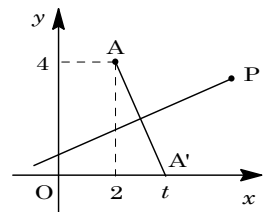
[2006]

解答例

- (1) ピタリ直線 l は、線分 AA' の垂直二等分線より、
 $PA = PA'$ となり、

$$\begin{aligned}(p-2)^2 + (q-4)^2 &= (p-t)^2 + q^2 \\ -4p + 4 - 8q + 16 &= -2pt + t^2\end{aligned}$$

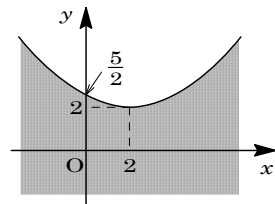
$$\text{まとめると、} t^2 - 2pt + 4p + 8q - 20 = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$



- (2) ①が異なる 2 つの実数解をもつとき点 $A'(t, 0)$ は 2 つ存在し、このときピタリ直線は 2 本存在することより、

$$\begin{aligned}D/4 &= p^2 - (4p + 8q - 20) > 0 \\ 8q &< p^2 - 4p + 20, \quad q < \frac{1}{8}(p-2)^2 + 2\end{aligned}$$

点 $P(p, q)$ の存在範囲は、右図の網点部となる。ただし、境界は含まない。



- (3) ①の異なる 2 つの実数解を $t = t_1, t_2$ とおき、 $A'_1(t_1, 0), A'_2(t_2, 0)$ とする。

$$\overrightarrow{AA'_1} = (t_1 - 2, -4), \quad \overrightarrow{AA'_2} = (t_2 - 2, -4)$$

2 本のピタリ直線が直交することより、 $\overrightarrow{AA'_1} \cdot \overrightarrow{AA'_2} = 0$ となり、

$$(t_1 - 2)(t_2 - 2) + 16 = 0, \quad t_1 t_2 - 2(t_1 + t_2) + 20 = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

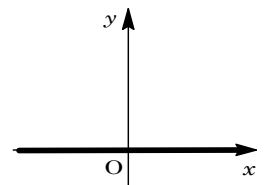
ここで、①に対して、解と係数の関係を用いると、

$$t_1 + t_2 = 2p, \quad t_1 t_2 = 4p + 8q - 20$$

②に代入して、 $4p + 8q - 20 - 4p + 20 = 0$

よって、 $q = 0$ となり、点 $P(p, q)$ は x 軸上に存在する。

図示すると、右図の太線部となる。



コメント

線対称を題材にした問題です。対称な 2 点を結ぶ線分の垂直二等分線が対称軸ということに注目するとクリアーです。

問題

O を原点とする座標平面上の曲線 $y = x^2$ 上の 2 点 A, B に対し, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = t$ とおく。

(1) t のとり得る値の範囲を求めよ。

(2) $t = 2$ のとき, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ となる点 P の軌跡を求め, 図示せよ。 [2002]

解答例

(1) $A(a, a^2)$, $B(b, b^2)$ とおくと, $\overrightarrow{OA} = (a, a^2)$, $\overrightarrow{OB} = (b, b^2)$ より,

$$t = \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = ab + a^2b^2 = \left(ab + \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}$$

ab は任意の値をとるので, $t \geq -\frac{1}{4}$

(2) $t = 2$ のとき, $a^2b^2 + ab - 2 = 0$, $(ab + 2)(ab - 1) = 0$

よって, $ab = -2$ または $ab = 1$

ここで, $P(x, y)$ とおくと, $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB}$ から,

$$x = a + b, \quad y = a^2 + b^2$$

(i) $ab = -2$ のとき $x = a - \frac{2}{a}$, $y = a^2 + \frac{4}{a^2}$

$$a^2 + \frac{4}{a^2} = \left(a - \frac{2}{a}\right)^2 + 4 \text{ より, } y = x^2 + 4$$

なお, x はすべての値をとりうる。

(ii) $ab = 1$ のとき $x = a + \frac{1}{a}$, $y = a^2 + \frac{1}{a^2}$

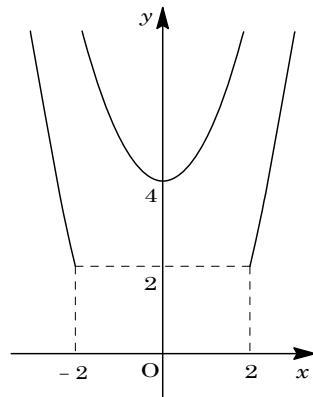
$$a^2 + \frac{1}{a^2} = \left(a + \frac{1}{a}\right)^2 - 2 \text{ より, } y = x^2 - 2$$

ただし, $a > 0$ のとき $a + \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{a \cdot \frac{1}{a}} = 2$, また $a < 0$

のとき $-a - \frac{1}{a} \geq 2\sqrt{-a \cdot \left(-\frac{1}{a}\right)} = 2$ より, $a + \frac{1}{a} \leq -2$ と

なるので, $x \leq -2$, $2 \leq x$ である。

(i)(ii) より, 点 P の軌跡は右図のようになる。



コメント

軌跡についての基本的な問題ですが, その限界が現れる点に注意が必要です。

問 題

a, b を正定数とし、平面ベクトル $\overrightarrow{OA} = (2a, a)$, $\overrightarrow{OB} = (0, 2b)$ を考える。線分 OB の中点を C とする。直線 OA, OB 上にない平面上の点 P に対し、点 P を通り、直線 OB に平行な直線と直線 OA との交点を Q とし、点 P を通り、直線 OA に平行な直線と直線 OB との交点を R とすると、 $\overrightarrow{OQ} = s\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OR} = t\overrightarrow{OB}$ と表される。ただし、 s, t は実数である。

(1) k を正定数とすると、 $t = (s - k)^2$ を満たす点 P のなす曲線 F の方程式を求めよ。

(2) 直線 AC が F と接するとき、 k の値を求めよ。 [2001]

解答例

(1) $P(x, y)$ とおくと、 $\overrightarrow{OP} = s\overrightarrow{OA} + t\overrightarrow{OB}$ より、

$$(x, y) = s(2a, a) + t(0, 2b)$$

$$x = 2as \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad y = as + 2bt \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ より } s = \frac{x}{2a}, \textcircled{2} \text{ に代入して } t = \frac{1}{2b} \left(y - \frac{x}{2} \right)$$

$$\text{条件より, } t = (s - k)^2 \text{ なので, } \frac{1}{2b} \left(y - \frac{x}{2} \right) = \left(\frac{x}{2a} - k \right)^2$$

$$y = \frac{x}{2} + \frac{b}{2a^2} (x - 2ak)^2, \quad y = \frac{b}{2a^2} x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2bk}{a} \right) x + 2bk^2 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(2) 直線 AC の方程式は、 $y = \frac{a-b}{2a}x + b \cdots \cdots \textcircled{4}$

$$\textcircled{3} \text{ と } \textcircled{4} \text{ の共有点は, } \frac{b}{2a^2} x^2 + \left(\frac{1}{2} - \frac{2bk}{a} \right) x + 2bk^2 = \frac{a-b}{2a} x + b$$

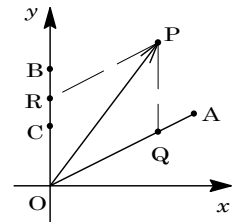
$$\frac{b}{2a^2} x^2 + \frac{b-4bk}{2a} x + 2bk^2 - b = 0$$

$$b > 0 \text{ より, } x^2 + a(1-4k)x + 2a^2(2k^2-1) = 0$$

$$\textcircled{3} \text{ と } \textcircled{4} \text{ が接することより, } D = a^2(1-4k)^2 - 8a^2(2k^2-1) = 0$$

$$a > 0 \text{ より, } (1-4k)^2 - 8(2k^2-1) = 0$$

これから $k = \frac{9}{8}$ となり、この値は $k > 0$ を満たす。



コメント

大がかりな設定ですが、曲線 F の方程式も、 F と直線 AC が接する条件も簡単に求まります。

問 題

辺の長さがそれぞれ $AB = 10$, $BC = 6$, $AC = 8$ の $\triangle ABC$ がある。辺 AB 上に点 P , 辺 AC 上の点 Q を, $\triangle APQ$ の面積が $\triangle ABC$ の面積の $\frac{1}{2}$ になるようにとる。

(1) 2 辺の長さの和 $AP + AQ$ を u とおく。 $\triangle APQ$ の周の長さ l を u を用いて表せ。

(2) l が最小になるときの AP, AQ, l の値を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $\triangle ABC$ は $\angle C = 90^\circ$ の直角三角形なので,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$$

また, $\sin A = \frac{3}{5}$, $\cos A = \frac{4}{5}$ で, $AP = p$, $AQ = q$ とすると,

$$\triangle APQ = \frac{1}{2} pq \sin A = \frac{3}{10} pq$$

条件より, $\frac{3}{10} pq = 24 \times \frac{1}{2}$, $pq = 40 \cdots \cdots (*)$

さて, $\triangle APQ$ に余弦定理を適用すると, $(*)$ より,

$$PQ^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos A = (p + q)^2 - 2pq - \frac{8}{5} pq$$

$$= u^2 - \frac{18}{5} \cdot 40 = u^2 - 144$$

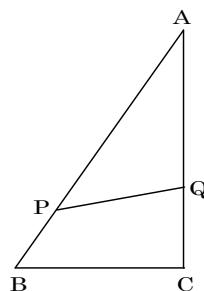
よって, $l = p + q + PQ = u + \sqrt{u^2 - 144}$

(2) (1) より, l は u についての増加関数なので, u の値が最小になるとき l も最小になり, $(*)$ より,

$$u = p + q \geq 2\sqrt{pq} = 2\sqrt{40} = 4\sqrt{10}$$

等号成立は $p = q = 2\sqrt{10}$ のとき, すなわち $AP = AQ = 2\sqrt{10}$ のときである。

このとき, l は最小値 $4\sqrt{10} + \sqrt{(4\sqrt{10})^2 - 144} = 4\sqrt{10} + 4$ をとる。



コメント

有名問題です。 $\triangle ABC$ が直角三角形なので, 計算が少し簡単になります。

問 題

空間のベクトル $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (a, b, 0)$, \overrightarrow{OC} が, 条件

$$|\overrightarrow{OB}| = |\overrightarrow{OC}| = 1, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}, \overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}, \overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{5}{6}$$

を満たしているとする。ただし, a, b は正の数とする。

- (1) a, b の値を求めよ。
- (2) 三角形 OAB の面積 S を求めよ。
- (3) 四面体 OABC の体積 V を求めよ。

[2009]

解答例

- (1) $\overrightarrow{OA} = (1, 0, 0)$, $\overrightarrow{OB} = (a, b, 0)$ について, $|\overrightarrow{OB}| = 1$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB} = \frac{1}{3}$ より,

$$a^2 + b^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad a = \frac{1}{3} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1}\textcircled{2} \text{より, } b^2 = \frac{8}{9} \text{ となり, } b > 0 \text{ から } b = \frac{2\sqrt{2}}{3}$$

- (2) $\triangle OAB$ の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{OA}|^2 |\overrightarrow{OB}|^2 - (\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OB})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{1^2 \times 1^2 - \left(\frac{1}{3}\right)^2} = \frac{\sqrt{2}}{3}$$

- (3) $\overrightarrow{OC} = (p, q, r)$ とおくと, $|\overrightarrow{OC}| = 1$, $\overrightarrow{OA} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{1}{2}$, $\overrightarrow{OB} \cdot \overrightarrow{OC} = \frac{5}{6}$ より,

$$p^2 + q^2 + r^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}, \quad p = \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{4}, \quad \frac{1}{3}p + \frac{2\sqrt{2}}{3}q = \frac{5}{6} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4}\textcircled{5} \text{より, } \frac{2\sqrt{2}}{3}q = \frac{2}{3}, \quad q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\textcircled{3} \text{に代入して, } r^2 = \frac{1}{4}, \quad r = \pm \frac{1}{2}$$

すると, 四面体 OABC の体積 V は, $\triangle OAB$ が xy 平面上にあることより,

$$V = \frac{1}{3} S \cdot |r| = \frac{\sqrt{2}}{18}$$

コメント

空間ベクトルの基本問題です。底面が xy 平面上にあるため, 構図は単純です。

問題

$\triangle ABC$ の辺 AB , BC , CA を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A' , B' , C' とし,
 $\triangle A'B'C'$ の辺 $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ を $2:1$ に内分する点をそれぞれ A'' , B'' , C'' とする。
 このとき直線 AA'' , BB'' , CC'' は $\triangle ABC$ の重心で交わることを証明せよ。 [2007]

解答例

点 A, B, C の位置ベクトルをそれぞれ \vec{a} , \vec{b} , \vec{c} と表す。

A' , B' , C' は、それぞれ辺 AB , BC , CA を $2:1$ に内分する点なので、同様な記法をとると、

$$\vec{a'} = \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}), \quad \vec{b'} = \frac{1}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}), \quad \vec{c'} = \frac{1}{3}(\vec{c} + 2\vec{a})$$

さらに、 A'' , B'' , C'' は、それぞれ辺 $A'B'$, $B'C'$, $C'A'$ を $2:1$ に内分する点なので、

$$\vec{a''} = \frac{1}{3}(\vec{a'} + 2\vec{b'}), \quad \vec{b''} = \frac{1}{3}(\vec{b'} + 2\vec{c'})$$

$$\vec{c''} = \frac{1}{3}(\vec{c'} + 2\vec{a'})$$

$$\text{まとめると, } \vec{a''} = \frac{1}{3} \left\{ \frac{1}{3}(\vec{a} + 2\vec{b}) + \frac{2}{3}(\vec{b} + 2\vec{c}) \right\} = \frac{1}{9}(\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c})$$

$$\vec{b''} = \frac{1}{9}(4\vec{a} + \vec{b} + 4\vec{c}), \quad \vec{c''} = \frac{1}{9}(4\vec{a} + 4\vec{b} + \vec{c})$$

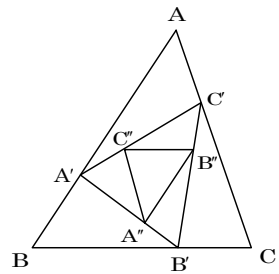
さて、 $\triangle ABC$ の重心を G とすると、 $\vec{g} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$ となり、

$$\overrightarrow{AA''} = \frac{1}{9}(\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c}) - \vec{a} = \frac{4}{9}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

$$\overrightarrow{AG} = \frac{1}{3}(\vec{a} + \vec{b} + \vec{c}) - \vec{a} = \frac{1}{3}(-2\vec{a} + \vec{b} + \vec{c})$$

よって、 $\overrightarrow{AA''} = \frac{4}{3}\overrightarrow{AG}$ となり、点 G は AA'' を $3:1$ に内分する。

同様に、 $\overrightarrow{BB''} = \frac{4}{3}\overrightarrow{BG}$, $\overrightarrow{CC''} = \frac{4}{3}\overrightarrow{CG}$ となり、直線 AA'' , BB'' , CC'' は G で交わる。



コメント

平面上のベクトルについての基本問題です。なお、 $\vec{a''} = \frac{1}{9}(\vec{a} + 4\vec{b} + 4\vec{c})$ の式を見て、
 $\vec{g} = \frac{1}{4}(\vec{a} + 3\vec{a''})$ が発見できれば、記述量を減らすことができます。

問 題

$\triangle OAB$ の頂角 $\angle O$ の二等分線と辺 AB との交点を P , 点 P から直線 OA へ下ろした垂線の足を Q とする。以下では, $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$ とする。

(1) P は線分 AB を $|\vec{a}| : |\vec{b}|$ に内分する点であることを証明せよ。

(2) 線分の長さ OQ を \vec{a} , \vec{b} を用いて表せ。 [2003]

解答例

(1) まず, $\triangle OAP : \triangle OBP = AP : PB \cdots \cdots \textcircled{1}$

また, $\angle AOP = \angle BOP = \theta$ とおくと,

$$\triangle OAP = \frac{1}{2} OA \cdot OP \cdot \sin \theta$$

$$\triangle OBP = \frac{1}{2} OB \cdot OP \cdot \sin \theta$$

よって, $\triangle OAP : \triangle OBP = OA : OB \cdots \cdots \textcircled{2}$

$\textcircled{1}\textcircled{2}$ より, $AP : PB = OA : OB$

したがって, P は線分 AB を $|\vec{a}| : |\vec{b}|$ に内分する点である。

(2) $\overrightarrow{OQ} = k\vec{a}$ とおくと, $\overrightarrow{PQ} \perp \overrightarrow{OA}$ より, $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{a} = 0$ となり,

$$(k\vec{a} - \overrightarrow{OP}) \cdot \vec{a} = 0, \quad k|\vec{a}|^2 = \overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}, \quad k = \frac{\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a}}{|\vec{a}|^2} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(1) より, $\overrightarrow{OP} = \frac{|\vec{b}||\vec{a}| + |\vec{a}||\vec{b}|}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$ なので,

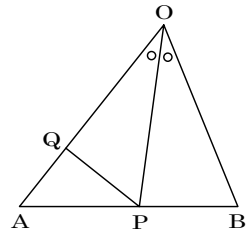
$$\overrightarrow{OP} \cdot \vec{a} = \frac{1}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \{ |\vec{b}||\vec{a}|^2 + |\vec{a}|(\vec{a} \cdot \vec{b}) \} = \frac{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}| + |\vec{b}|} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3}\textcircled{4} \text{ より, } k = \frac{|\vec{a}|(|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b})}{|\vec{a}|^2(|\vec{a}| + |\vec{b}|)} = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}|(|\vec{a}| + |\vec{b}|)}$$

$$\text{よって, } |\overrightarrow{OQ}| = |k\vec{a}| = |k||\vec{a}| = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$

ここで, $|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}||\vec{b}|(1 + \cos 2\theta) > 0$ なので,

$$OQ = \frac{|\vec{a}||\vec{b}| + \vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| + |\vec{b}|}$$



コメント

(2)ではいろいろな解法が思い浮かんだため, どれを採用しようかと迷ってしまい, ブリュダンの驢馬のような状態になってしまいました。結局, 最もありふれた解法に落ち着きましたが……。

問題

座標空間内に 4 点 $P(3, 1, 4)$, $A(1, 2, 3)$, $B(1, 1, 2)$, $C(2, 1, 1)$ がある。
直線 PA と xy 平面の交点を A' , 直線 PB と xy 平面の交点を B' , 直線 PC と xy 平面の交点を C' とする。

(1) $\triangle ABC$ の面積を求めよ。

(2) $\triangle A'B'C'$ の面積を求めよ。

[2000]

解答例

(1) 条件より, $\overrightarrow{AB} = (0, -1, -1)$, $\overrightarrow{AC} = (1, -1, -2)$ となるので, $|\overrightarrow{AB}|^2 = 2$,
 $|\overrightarrow{AC}|^2 = 6$, $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = 3$ から,

$$\triangle ABC = \frac{1}{2} \sqrt{|\overrightarrow{AB}|^2 |\overrightarrow{AC}|^2 - (\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC})^2} = \frac{1}{2} \sqrt{2 \times 6 - 3^2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2) 直線 PA の方程式は, $\overrightarrow{PA} = (-2, 1, -1)$ より,

$$(x, y, z) = (3, 1, 4) + t_1(-2, 1, -1) = (3 - 2t_1, 1 + t_1, 4 - t_1)$$

$z = 0$ とすると $t_1 = 4$ となり, このとき $x = -5$, $y = 5$ から $A'(-5, 5, 0)$ となる。

直線 PB の方程式は, $\overrightarrow{PB} = (-2, 0, -2) = 2(-1, 0, -1)$ より,

$$(x, y, z) = (3, 1, 4) + t_2(-1, 0, -1) = (3 - t_2, 1, 4 - t_2)$$

$z = 0$ とすると $t_2 = 4$ となり, このとき $x = -1$, $y = 1$ から $B'(-1, 1, 0)$ となる。

直線 PC の方程式は, $\overrightarrow{PC} = (-1, 0, -3)$ より,

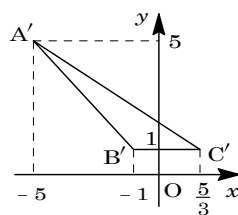
$$(x, y, z) = (3, 1, 4) + t_3(-1, 0, -3) = (3 - t_3, 1, 4 - 3t_3)$$

$z = 0$ とすると, $t_3 = \frac{4}{3}$ となり, このとき $x = \frac{5}{3}$, $y = 1$

から $C'(\frac{5}{3}, 1, 0)$ となる。

ここで, 3 点 A' , B' , C' を xy 平面に図示すると, 右図のようになるので,

$$\triangle A'B'C' = \frac{1}{2} \times \left(\frac{5}{3} + 1 \right) \times (5 - 1) = \frac{16}{3}$$



コメント

(1)は公式で処理しましたので, 単なる数値代入だけです。(2)も同様にしようかと思いましたが, 3 点 A' , B' , C' の配置を考えて, 底辺×高さ÷2 で計算しました。

問題

- (1) ベクトル $\vec{a} = (a_1, a_2)$ が次の条件(*)を満たすとき、点 (a_1, a_2) の存在範囲を図示せよ。

(*) あるベクトル $\vec{b} = (b_1, b_2)$ が存在して、 $(\vec{a} \cdot \vec{p})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$ が 任意のベクトル \vec{p} に対して成り立つ。

- (2) (1)で求めた $\vec{a} = (a_1, a_2)$ に対して、条件(*)にあるベクトル $\vec{b} = (b_1, b_2)$ を求めよ。 [1999]

解答例

- (1) x, y を任意の実数として、 $\vec{p} = (x, y)$ とおく。

条件より、 $(\vec{a} \cdot \vec{p})^2 + (\vec{b} \cdot \vec{p})^2 = |\vec{p}|^2$ なので、

$$(a_1x + a_2y)^2 + (b_1x + b_2y)^2 = x^2 + y^2 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$(x, y) = (1, 0) \text{ に対して } \textcircled{1} \text{ が成立することより, } a_1^2 + b_1^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(x, y) = (0, 1) \text{ に対して } \textcircled{1} \text{ が成立することより, } a_2^2 + b_2^2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$(x, y) = (1, 1) \text{ に対して } \textcircled{1} \text{ が成立することより, } (a_1 + a_2)^2 + (b_1 + b_2)^2 = 2$$

$$\textcircled{2}\textcircled{3} \text{ を代入して, } a_1a_2 + b_1b_2 = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

逆に $\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$ が成立するとき、任意の実数 x, y に対して、 $\textcircled{1}$ は明らかに成立する。

よって、求める条件は、ある (b_1, b_2) に対して、 $\textcircled{2}\textcircled{3}\textcircled{4}$ が成立する条件となる。

まず、 $\textcircled{2}$ より $a_1 = \cos \theta$, $b_1 = \sin \theta$, $\textcircled{3}$ より $a_2 = \cos \varphi$, $b_2 = \sin \varphi$ とおくことができる。

$$\textcircled{4} \text{ に代入して, } \cos \theta \cos \varphi + \sin \theta \sin \varphi = 0, \cos(\theta - \varphi) = 0$$

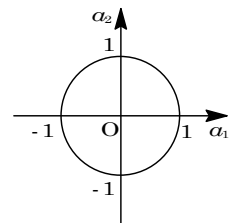
すると $\theta - \varphi = \pm 90^\circ$ より、 $\varphi = \theta \mp 90^\circ$ となる。

以下、複号同順で、

$$a_1 = \cos \theta, a_2 = \cos(\theta \mp 90^\circ) = \pm \sin \theta \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\theta \text{ は任意より, } a_1^2 + a_2^2 = 1$$

以上より、点 (a_1, a_2) は原点中心の単位円周上に存在し、図示すると右図のようになる。



- (2) (1)より、 $b_1 = \sin \theta$, $b_2 = \sin(\theta \mp 90^\circ) = \mp \cos \theta$

$$\textcircled{5} \text{ より, } b_1 = \pm a_2, b_2 = \mp a_1$$

$$\text{よって, } \vec{b} = (a_2, -a_1) \text{ または } \vec{b} = (-a_2, a_1)$$

コメント

かなり丁寧に解を書きました。任意の x, y に対し、 $\textcircled{1}$ が成立する必要十分条件については、もっとあっさり書いても構わないと思います。

問 題

次の問いに答えよ。

- (1) 次の条件(*)を満たす3つの自然数の組 (a, b, c) をすべて求めよ。

$$(*) \quad a < b < c \text{ かつ } \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2} \text{ である。}$$

- (2) 偶数 $2n$ ($n \geq 1$) の3つの正の約数 p, q, r で、 $p > q > r$ と $p + q + r = n$ を満たす組 (p, q, r) の個数を $f(n)$ とする。ただし、条件を満たす組が存在しない場合は、 $f(n) = 0$ とする。 n が自然数全体を動くときの $f(n)$ の最大値 M を求めよ。また、 $f(n) = M$ となる自然数 n の中で最小のものを求めよ。 [2017]

解答例

- (1) 条件(*)から、自然数 a, b, c に対し、 $a < b < c$ かつ $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ …………①

すると、 $\frac{1}{a} > \frac{1}{b} > \frac{1}{c} > 0$ となるので、①から $\frac{3}{a} > \frac{1}{2}$ 、すなわち $a < 6$ …………②

また、 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} > 0$ なので、①から $\frac{1}{a} < \frac{1}{2}$ 、すなわち $a > 2$ …………③

②③より $2 < a < 6$ となり、 $a = 3, 4, 5$ である。

- (i) $a = 3$ のとき ①より $\frac{1}{3} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ から、 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{6}$ となり、

$$bc - 6b - 6c = 0, (b-6)(c-6) = 36$$

ここで、 $3 < b < c$ から $-3 < b-6 < c-6$ となり、

$$(b-6, c-6) = (1, 36), (2, 18), (3, 12), (4, 9)$$

よって、 $(b, c) = (7, 42), (8, 24), (9, 18), (10, 15)$

- (ii) $a = 4$ のとき ①より $\frac{1}{4} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ から、 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{4}$ となり、

$$bc - 4b - 4c = 0, (b-4)(c-4) = 16$$

ここで、 $4 < b < c$ から $0 < b-4 < c-4$ となり、

$$(b-4, c-4) = (1, 16), (2, 8)$$

よって、 $(b, c) = (5, 20), (6, 12)$

- (iii) $a = 5$ のとき ①より $\frac{1}{5} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ から、 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{3}{10}$ となり、

$$3bc - 10b - 10c = 0, 9bc - 30b - 30c = 0, (3b-10)(3c-10) = 100$$

$5 < b < c$ から $5 < 3b-10 < 3c-10$ となり、適する $(3b-10, 3c-10)$ はない。

- (i)~(iii)より、自然数の組 (a, b, c) は、

$$(a, b, c) = (3, 7, 42), (3, 8, 24), (3, 9, 18), (3, 10, 15),$$

$$(4, 5, 20), (4, 6, 12)$$

- (2) $2n$ の正の約数 p, q, r に対し, $p > q > r$ かつ $p + q + r = n \cdots \cdots$ ④を満たす (p, q, r) の個数を $f(n)$ とすると, ④から,

$$\frac{p}{2n} + \frac{q}{2n} + \frac{r}{2n} = \frac{1}{2} \cdots \cdots \text{⑤}$$

ここで, $\frac{2n}{p} = a, \frac{2n}{q} = b, \frac{2n}{r} = c$ とおくと, a, b, c は自然数となり, さらに, $p > q > r$ から, $\frac{2n}{p} < \frac{2n}{q} < \frac{2n}{r}$ すなわち $a < b < c$ である。

さらに, ⑤を a, b, c で表すと, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$ である。

すなわち, 自然数の組 (p, q, r) は, 条件(*)を満たす自然数の組 (a, b, c) に対応し, その個数 $f(n)$ の最大値 M は, (1)の結果から $M \leq 6$ である。

以下, この 6 つの場合について, n の条件を求める。

- (i) $(a, b, c) = (3, 7, 42)$ のとき $\frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 7, \frac{2n}{r} = 42$ より,

$$3p = 2n, 7q = 2n, 21r = n$$

よって, このとき n は 21 の倍数である。

- (ii) $(a, b, c) = (3, 8, 24)$ のとき $\frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 8, \frac{2n}{r} = 24$ より,

$$3p = 2n, 4q = n, 12r = n$$

よって, このとき n は 12 の倍数である。

- (iii) $(a, b, c) = (3, 9, 18)$ のとき $\frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 9, \frac{2n}{r} = 18$ より,

$$3p = 2n, 9q = 2n, 9r = n$$

よって, このとき n は 9 の倍数である。

- (iv) $(a, b, c) = (3, 10, 15)$ のとき $\frac{2n}{p} = 3, \frac{2n}{q} = 10, \frac{2n}{r} = 15$ より,

$$3p = 2n, 5q = n, 15r = 2n$$

よって, このとき n は 15 の倍数である。

- (v) $(a, b, c) = (4, 5, 20)$ のとき $\frac{2n}{p} = 4, \frac{2n}{q} = 5, \frac{2n}{r} = 20$ より,

$$2p = n, 5q = 2n, 10r = n$$

よって, このとき n は 10 の倍数である。

- (vi) $(a, b, c) = (4, 6, 12)$ のとき $\frac{2n}{p} = 4, \frac{2n}{q} = 6, \frac{2n}{r} = 12$ より,

$$2p = n, 3q = n, 6r = n$$

よって, このとき n は 6 の倍数である。

- (i)~(vi)より, 自然数 n が上記の条件をすべて満たすとき $M = 6$ となる。

ここで, $21 = 3 \times 7$, $12 = 2^2 \times 3$, $9 = 3^2$, $15 = 3 \times 5$, $10 = 2 \times 5$, $6 = 2 \times 3$ から, n が $2^2 \times 3^2 \times 5 \times 7 = 1260$ の倍数のとき, 条件をすべて満たす。

以上より, $M = 6$ で, $f(n) = 6$ となる最小の n は $n = 1260$ である。

コメント

質, 量ともにかなりハードな整数問題です。ただ, (1)が(2)への秀逸な誘導となっており, 入試までに演習したい 1 題です。なお, (1)は, 場合分けしたあと分母を払って因数分解をしていますが, 不等式を用いて評価しても構いません。

問 題

正の整数 n に対して、その(1 と自分自身も含めた)すべての正の約数の和を $s(n)$ とかくことにする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) k を正の整数, p を 3 以上の素数とするととき, $s(2^k p)$ を求めよ。
- (2) $s(2016)$ を求めよ。
- (3) 2016 の正の約数 n で, $s(n) = 2016$ となるものをすべて求めよ。 [2016]

解答例

- (1) k を正の整数, p を 3 以上の素数とするととき, $2^k p$ の正の約数は,

$$1, 2, 2^2, \dots, 2^k, p, 2p, 2^2 p, \dots, 2^k p$$

したがって、その和 $s(2^k p)$ は,

$$s(2^k p) = (1 + 2 + 2^2 + \dots + 2^k)(1 + p) = \frac{2^{k+1} - 1}{2 - 1}(1 + p) = (2^{k+1} - 1)(1 + p)$$

- (2) $2016 = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$ より、その正の約数の和 $s(2016)$ は,

$$s(2016) = (1 + 2 + 2^2 + 2^3 + 2^4 + 2^5)(1 + 3 + 3^2)(1 + 7) = 63 \cdot 13 \cdot 8 = 6552$$

- (3) 2016 の正の約数 n は、(2)から a, b, c を整数として、

$$n = 2^a \cdot 3^b \cdot 7^c \quad (0 \leq a \leq 5, 0 \leq b \leq 2, 0 \leq c \leq 1)$$

すると、 n の正の約数の和 $s(n)$ は,

$$s(n) = \frac{2^{a+1} - 1}{2 - 1} \cdot \frac{3^{b+1} - 1}{3 - 1} \cdot \frac{7^{c+1} - 1}{7 - 1} = \frac{1}{12}(2^{a+1} - 1)(3^{b+1} - 1)(7^{c+1} - 1)$$

条件より、 $s(n) = 2016$ なので、 $\frac{1}{12}(2^{a+1} - 1)(3^{b+1} - 1)(7^{c+1} - 1) = 2^5 \cdot 3^2 \cdot 7$

$$(2^{a+1} - 1)(3^{b+1} - 1)(7^{c+1} - 1) = 2^7 \cdot 3^3 \cdot 7 \dots\dots\dots (*)$$

ここで、 $2^{a+1} - 1$ は奇数で $3^{b+1} - 1$ と $7^{c+1} - 1$ は偶数、そして $3^{b+1} - 1$ と $7^{c+1} - 1$ は 7 の倍数とはなりえないので、 $2^{a+1} - 1$ が 7 の倍数となる。

すると、 $2^{a+1} - 1$ の値として、7, $3 \cdot 7$, $3^2 \cdot 7$, $3^3 \cdot 7$ があげられる。

- (i) $2^{a+1} - 1 = 7$ のとき $a = 2$ となり、(*)は $(3^{b+1} - 1)(7^{c+1} - 1) = 2^7 \cdot 3^3$

$c = 0$ のとき、 $3^{b+1} - 1 = 2^6 \cdot 3^2$ となり、 $3^{b+1} = 577$ より整数 b は存在しない。

$c = 1$ のとき、 $3^{b+1} - 1 = 2^3 \cdot 3^2$ となり、 $3^{b+1} = 73$ より整数 b は存在しない。

- (ii) $2^{a+1} - 1 = 3 \cdot 7$ のとき $2^{a+1} = 22$ より整数 a は存在しない。

- (iii) $2^{a+1} - 1 = 3^2 \cdot 7$ のとき $a = 5$ となり、(*)は $(3^{b+1} - 1)(7^{c+1} - 1) = 2^7 \cdot 3$

$c = 0$ のとき、 $3^{b+1} - 1 = 2^6$ となり、 $3^{b+1} = 65$ より整数 b は存在しない。

$c = 1$ のとき、 $3^{b+1} - 1 = 2^3$ となり、 $b = 1$ である。

- (iv) $2^{a+1} - 1 = 3^3 \cdot 7$ のとき $2^{a+1} = 190$ より整数 a は存在しない。

- (i)~(iv)より、 $(a, b, c) = (5, 1, 1)$ となり、 $n = 2^5 \cdot 3^1 \cdot 7^1 = 672$ である。

コメント

正の約数すべての和という頻出事項が題材になっています。(3)については、まず偶奇でふるいにかけてところ絞り込みが足らず、まだ候補が多いので、次に 7 の倍数に注目しています。

問題

k, m, n は整数とし, $n \geq 1$ とする. ${}_m C_k$ を二項係数として, $S_k(n)$, $T_m(n)$ を以下のように定める.

$$S_k(n) = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k, \quad S_k(1) = 1 \quad (k \geq 0)$$

$$\begin{aligned} T_m(n) &= {}_m C_1 S_1(n) + {}_m C_2 S_2(n) + {}_m C_3 S_3(n) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(n) \\ &= \sum_{k=1}^{m-1} {}_m C_k S_k(n) \quad (m \geq 2) \end{aligned}$$

- (1) $T_m(1)$ と $T_m(2)$ を求めよ.
- (2) 一般の n に対して $T_m(n)$ を求めよ.
- (3) p が 7 以上の素数のとき, $S_1(p-1)$, $S_2(p-1)$, $S_3(p-1)$, $S_4(p-1)$ は p の倍数であることを示せ. [2013]

解答例

- (1) 二項定理を利用すると, $S_k(1) = 1$, $S_k(2) = 1^k + 2^k$ より,

$$\begin{aligned} T_m(1) &= {}_m C_1 S_1(1) + {}_m C_2 S_2(1) + {}_m C_3 S_3(1) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(1) \\ &= {}_m C_1 + {}_m C_2 + {}_m C_3 + \cdots + {}_m C_{m-1} = (1+1)^m - {}_m C_0 - {}_m C_m = 2^m - 2 \\ T_m(2) &= {}_m C_1 S_1(2) + {}_m C_2 S_2(2) + {}_m C_3 S_3(2) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(2) \\ &= {}_m C_1 (1+2^1) + {}_m C_2 (1+2^2) + {}_m C_3 (1+2^3) + \cdots + {}_m C_{m-1} (1+2^{m-1}) \\ &= T_m(1) + \{ (1+2)^m - {}_m C_0 2^0 - {}_m C_m 2^m \} \\ &= 2^m - 2 + 3^m - 1 - 2^m = 3^m - 3 \end{aligned}$$

- (2) $T_m(n) = (n+1)^m - (n+1)$ であることを, 以下, 数学的帰納法で証明する.

(i) $n=1$ のとき (1)より成立する.

(ii) $n=l$ のとき $T_m(l) = (l+1)^m - (l+1)$ であると仮定すると,

$$\begin{aligned} T_m(l+1) &= {}_m C_1 S_1(l+1) + {}_m C_2 S_2(l+1) + \cdots + {}_m C_{m-1} S_{m-1}(l+1) \\ &= {}_m C_1 \{1+2+\cdots+l+(l+1)\} + {}_m C_2 \{1^2+2^2+\cdots+l^2+(l+1)^2\} \\ &\quad + \cdots + {}_m C_{m-1} \{1^{m-1}+2^{m-1}+\cdots+l^{m-1}+(l+1)^{m-1}\} \\ &= T_m(l) + {}_m C_1 (l+1) + {}_m C_2 (l+1)^2 + \cdots + {}_m C_{m-1} (l+1)^{m-1} \\ &= (l+1)^m - (l+1) + \{ (1+l+1)^m - {}_m C_0 (l+1)^0 - {}_m C_m (l+1)^m \} \\ &= (l+1)^m - (l+1) + (l+2)^m - 1 - (l+1)^m = (l+2)^m - (l+2) \end{aligned}$$

(i)(ii)より, $T_m(n) = (n+1)^m - (n+1)$

- (3) $m=2$, $n=p-1$ のとき, $T_2(p-1) = {}_2 C_1 S_1(p-1)$ となり, (2)から,

$$(p-1+1)^2 - (p-1+1) = 2S_1(p-1), \quad 2S_1(p-1) = p(p-1)$$

p は 7 以上の素数より, $S_1(p-1)$ は p の倍数である.

また, $m=3$, $n=p-1$ のとき, $T_3(p-1) = {}_3C_1 S_1(p-1) + {}_3C_2 S_2(p-1)$ から,

$$p^3 - p = 3S_1(p-1) + 3S_2(p-1), \quad 3S_2(p-1) = p(p^2 - 1) - 3S_1(p-1)$$
 p は 7 以上の素数より, $S_2(p-1)$ は p の倍数である。

同様にして, $m=4$, $m=5$ のときも考えると,

$$T_4(p-1) = {}_4C_1 S_1(p-1) + {}_4C_2 S_2(p-1) + {}_4C_3 S_3(p-1)$$

$$T_5(p-1) = {}_5C_1 S_1(p-1) + {}_5C_2 S_2(p-1) + {}_5C_3 S_3(p-1) + {}_5C_4 S_4(p-1)$$

よって, $4S_3(p-1) = p(p^3 - 1) - 4S_1(p-1) - 6S_2(p-1)$

$$5S_4(p-1) = p(p^4 - 1) - 5S_1(p-1) - 10S_2(p-1) - 10S_3(p-1)$$

p は 7 以上の素数より, $S_3(p-1)$, $S_4(p-1)$ はともに p の倍数である。

コメント

(3)では, 直接的に和を求めることを避けて(2)を利用させるために, p は 7 以上の素数となっているのでしょう。

問題

m を正の奇数とする。

- (1) $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の項の係数を求めよ。
- (2) p を正の整数とすると、 $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れることを示せ。
- (3) r を正の整数とし、 $s = 3^{r-1}m$ とする。 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを示せ。

[2012]

解答例

- (1) 二項定理より、 $(x-1)^{101}$ の展開式における x^2 の係数は、

$${}_{101}C_2 \cdot (-1)^{99} = -\frac{101 \times 100}{2} = -5050$$

- (2) p は正の整数、 m は正の奇数から、二項定理を用いると、

$$\begin{aligned} (p-1)^m + 1 &= \sum_{k=0}^m {}_mC_k (-1)^{m-k} p^k + 1 = \sum_{k=1}^m {}_mC_k (-1)^{m-k} p^k + (-1)^m + 1 \\ &= \sum_{k=1}^m {}_mC_k (-1)^{m-k} p^k = p \sum_{k=1}^m {}_mC_k (-1)^{m-k} p^{k-1} \end{aligned}$$

よって、 $(p-1)^m + 1$ は p で割り切れる。

- (3) r を正の整数、 $s = 3^{r-1}m$ のとき、 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れることを、 r に関する数学的帰納法で示す。

- (i) $r=1$ のとき

$s = 3^0 m = m$ となり、(2)の結論に $p=3$ を適用すると、 $2^m + 1 = (3-1)^m + 1$ は 3 すなわち 3^1 で割り切れる。よって、 $r=1$ のとき成立する。

- (ii) $r=l$ のとき

$2^{3^{l-1}m} + 1$ が 3^l で割り切れると仮定し、 n を整数として、 $2^{3^{l-1}m} + 1 = 3^l n$ とおく。

$$\begin{aligned} 2^{3^l m} + 1 &= 2^{3^{l-1} \cdot 3m} + 1 = \left(2^{3^{l-1}m} \right)^3 + 1 = (3^l n - 1)^3 + 1 \\ &= (3^l n)^3 - 3(3^l n)^2 + 3(3^l n) - 1 + 1 = 3^{l+1}(3^{2l-1}n^3 - 3^l n^2 + n) \end{aligned}$$

よって、 $2^{3^l m} + 1$ は 3^{l+1} で割り切れる。

- (i)(ii)より、 $s = 3^{r-1}m$ のとき、 $2^s + 1$ は 3^r で割り切れる。

コメント

二項定理の応用問題です。(3)は数学的帰納法という手段を決めれば、スムーズに論理が展開できます。

問題

次の問いに答えよ。

- (1) $3x + 2y \leq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ。
 (2) $3x + 2y \leq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を求めよ。 [2008]

解答例

- (1) 不等式 $3x + 2y \leq 8$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を、 x を固定して数える。

右図より、 $x = 0$ 上では $0 \leq y \leq 4$ より 5 個、 $x = 1$ 上では $0 \leq y \leq 2$ より 3 個、 $x = 2$ 上では $0 \leq y \leq 1$ より 2 個ある。

すると、整数の組 (x, y) の個数は、

$$5 + 3 + 2 = 10$$

- (2) (1) と同様に、不等式 $3x + 2y \leq 2008$ を満たす 0 以上の整数の組 (x, y) の個数を、 x を固定して数える。

- (i) $x = 2k$ ($0 \leq k \leq 334$) のとき

境界線 $3x + 2y = 2008$ との交点は、

$$y = \frac{1}{2}(2008 - 3 \cdot 2k) = 1004 - 3k$$

よって、0 以上の整数の組 (x, y) は、直線 $x = 2k$ 上で、 $0 \leq y \leq 1004 - 3k$ より、 $1005 - 3k$ 個ある。

- (ii) $x = 2k + 1$ ($0 \leq k \leq 334$) のとき

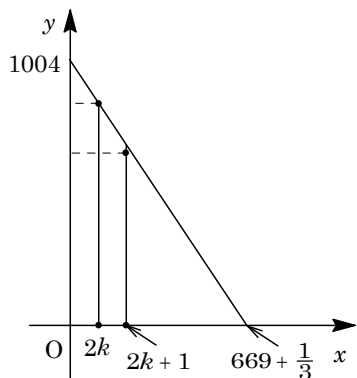
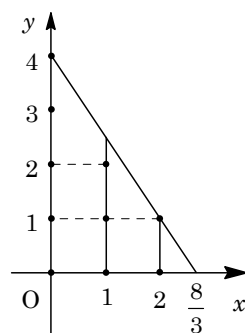
境界線 $3x + 2y = 2008$ との交点は、

$$y = \frac{1}{2}\{2008 - 3(2k + 1)\} = 1004 - 3k - \frac{3}{2}$$

よって、0 以上の整数の組 (x, y) は、直線 $x = 2k + 1$ 上で、 $0 \leq y \leq 1004 - 3k - 2$ より、 $1003 - 3k$ 個ある。

- (i)(ii) より、求める整数の組 (x, y) の個数 N は、

$$\begin{aligned} N &= \sum_{k=0}^{334} (1005 - 3k) + \sum_{k=0}^{334} (1003 - 3k) = \sum_{k=0}^{334} (2008 - 6k) \\ &= 2008 \times 335 - 6 \times \frac{1}{2} \cdot 334 \cdot 335 = 337010 \end{aligned}$$



コメント

格子点の個数を数える有名問題です。(2)では場合分けが必要なので、慎重な処理が必要です。

問 題

n を自然数とすると、 $m \leq n$ で m と n の最大公約数が 1 となる自然数 m の個数を $f(n)$ とする。

- (1) $f(15)$ を求めよ。
 (2) p, q を互いに異なる素数とする。このとき $f(pq)$ を求めよ。 [2003]

解答例

- (1) $m \leq 15 = 3 \times 5$ で、 m と 15 の最大公約数が 1 であるのは、

$$m = 1, 2, 4, 7, 8, 11, 13, 14$$

よって、 $f(15) = 8$ である。

- (2) p, q を互いに異なる素数とすると、1 から pq までの整数で、 p の倍数の個数は q 個、 q の倍数の個数は p 個、 pq の倍数の個数は 1 個より、 p の倍数または q の倍数の個数は $p + q - 1$ 個となる。

すると、 $m \leq pq$ で、 m と pq の最大公約数が 1 である m の個数は、1 から pq までの整数の個数から、 p の倍数または q の倍数の個数を引いたものであるので、

$$f(pq) = pq - (p + q - 1) = (p - 1)(q - 1)$$

コメント

読解力が試される問題です。見た目は難しいのですが、内容は基本的です。

問題

次のように円 C_n を定める。まず、 C_0 は $(0, \frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円、 C_1 は $(1, \frac{1}{2})$ を中心とする半径 $\frac{1}{2}$ の円とする。次に C_0, C_1 に外接し x 軸に接する円を C_2 とする。さらに、 $n = 3, 4, 5, \dots$ に対し、順に、 C_0, C_{n-1} に外接し x 軸に接する円で C_{n-2} でないものを C_n とする。 C_n ($n \geq 1$) の中心の座標を (a_n, b_n) とするとき、次の問いに答えよ。ただし、2 つの円が外接するとは、中心間の距離がそれぞれ円の半径の和に等しいことをいう。

(1) $n \geq 1$ に対し、 $b_n = \frac{a_n^2}{2}$ を示せ。

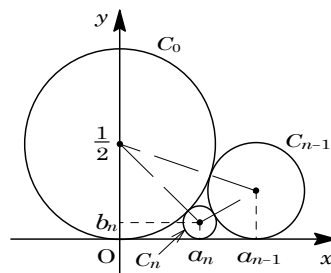
(2) a_n を求めよ。

[2002]

解答例

(1) 円 C_n の半径は b_n なので、円 C_0 と C_n が外接することより、

$$\begin{aligned} \left(\frac{1}{2} + b_n\right)^2 &= \left(\frac{1}{2} - b_n\right)^2 + a_n^2 \\ \frac{1}{4} + b_n + b_n^2 &= \frac{1}{4} - b_n + b_n^2 + a_n^2 \\ 2b_n &= a_n^2 \text{ より, } b_n = \frac{a_n^2}{2} \end{aligned}$$



(2) 円 C_n と C_{n-1} が外接することより、

$$\begin{aligned} (b_{n-1} + b_n)^2 &= (b_{n-1} - b_n)^2 + (a_{n-1} - a_n)^2 \\ b_{n-1}^2 + 2b_{n-1}b_n + b_n^2 &= b_{n-1}^2 - 2b_{n-1}b_n + b_n^2 + (a_{n-1} - a_n)^2 \\ (a_{n-1} - a_n)^2 - 4b_{n-1}b_n &= 0 \end{aligned}$$

(1) より、 $(a_{n-1} - a_n)^2 - a_{n-1}^2 a_n^2 = 0$

$$(a_{n-1} - a_n + a_{n-1}a_n)(a_{n-1} - a_n - a_{n-1}a_n) = 0$$

ここで、 $a_n < a_{n-1}$ なので、 $a_{n-1} - a_n + a_{n-1}a_n > 0$

$$a_{n-1} - a_n - a_{n-1}a_n = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-1}}{1 + a_{n-1}}$$

$$\frac{1}{a_n} = \frac{1 + a_{n-1}}{a_{n-1}} = \frac{1}{a_{n-1}} + 1 \text{ より, } \frac{1}{a_n} = \frac{1}{a_1} + (n-1) \cdot 1 = 1 + n - 1 = n$$

以上より、 $a_n = \frac{1}{n}$

コメント

よく見かける構図の問題です。三平方の定理が鍵です。

問 題

自然数 n に対して、不等式 $0 \leq a \leq 2b \leq c \leq n$ を満たす整数の組 (a, b, c) の個数を $P(n)$ とする。

(1) $P(5)$ を求めよ。

(2) 奇数 n に対して、 $P(n)$ を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $0 \leq a \leq 2b \leq c \leq 5$ のとき、 $b = 0, 1, 2$ となる。

(i) $b = 0$ のとき

$a = 0, 0 \leq c \leq 5$ より、 (a, b, c) の組の個数は、 $1 \times 6 = 6$ となる。

(ii) $b = 1$ のとき

$0 \leq a \leq 2, 2 \leq c \leq 5$ より、 (a, b, c) の組の個数は、 $3 \times 4 = 12$ となる。

(iii) $b = 2$ のとき

$0 \leq a \leq 4, 4 \leq c \leq 5$ より、 (a, b, c) の組の個数は、 $5 \times 2 = 10$ となる。

(i)(ii)(iii)より、 $P(5) = 6 + 12 + 10 = 28$

(2) n が奇数なので $n = 2m - 1$ ($m \geq 1$) とすると、 $0 \leq a \leq 2b \leq c \leq 2m - 1$ なので、 b のとりうる値は、 $b = 0, 1, \dots, m - 1$ となる。

さて、 $b = k$ ($0 \leq k \leq m - 1$) のとき、 $0 \leq a \leq 2k, 2k \leq c \leq 2m - 1$ より、 (a, b, c) の組の個数は、 $(2k + 1)(2m - 1 - 2k + 1) = (2k + 1)(2m - 2k)$ となるので、

$$\begin{aligned} P(2m - 1) &= \sum_{k=0}^{m-1} (2k + 1)(2m - 2k) = \sum_{k=0}^{m-1} \{ -4k^2 + 2(2m - 1)k + 2m \} \\ &= -4 \cdot \frac{1}{6} (m - 1)m(2m - 1) + 2(2m - 1) \cdot \frac{1}{2} (m - 1)m + 2m^2 \\ &= \frac{1}{3} m(2m^2 + 3m + 1) = \frac{1}{3} m(2m + 1)(m + 1) \end{aligned}$$

ここで、 $n = 2m - 1$ より、 $m = \frac{n + 1}{2}$ となり、

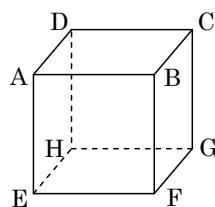
$$P(n) = \frac{1}{3} \cdot \frac{n + 1}{2} \cdot (n + 2) \cdot \frac{n + 3}{2} = \frac{1}{12} (n + 1)(n + 2)(n + 3)$$

コメント

(1)は(2)の誘導となっています。まず(1)で b の値を固定すれば数えやすいということを見つけ、それを(2)で一般化するわけです。

問題

右図のような立方体がある。この立方体の 8 つの頂点の上を点 P が次の規則で移動する。時刻 0 では点 P は頂点 A にいる。時刻が 1 増えるごとに点 P は、今いる頂点と辺で結ばれている頂点に等確率で移動する。たとえば時刻 n で点 P が頂点 H にいるとすると、時刻 $n+1$ では、それぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で頂点 D, E, G のいずれ



かにいる。自然数 $n \geq 1$ に対して、(i) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 B, D, E のいずれかにいる確率を p_n , (ii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 C, F, H のいずれかにいる確率を q_n , (iii) 点 P が時刻 n までの間一度も頂点 A に戻らず、かつ時刻 n で頂点 G にいる確率を r_n , とする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) p_2, q_2, r_2 と p_3, q_3, r_3 を求めよ。
- (2) $n \geq 2$ のとき、 p_n, q_n, r_n を求めよ。
- (3) 自然数 $m \geq 1$ に対して、点 P が時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m を求めよ。

[2017]

解答例

- (1) 時刻 0 で A にいた点 P が、時刻 n において、A に戻らず B, D, E のいずれかにいる確率 p_n , A に戻らず C, F, H のいずれかにいる確率 q_n , A に戻らず G にいる確率 r_n について、

$$p_{n+1} = \frac{2}{3}q_n \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad q_{n+1} = \frac{2}{3}p_n + r_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$r_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

ここで、 $p_1 = 1, q_1 = r_1 = 0$ なので、 $\textcircled{1}\textcircled{2}\textcircled{3}$ より、

$$p_2 = \frac{2}{3}q_1 = 0, \quad q_2 = \frac{2}{3}p_1 + r_1 = \frac{2}{3}, \quad r_2 = \frac{1}{3}q_1 = 0$$

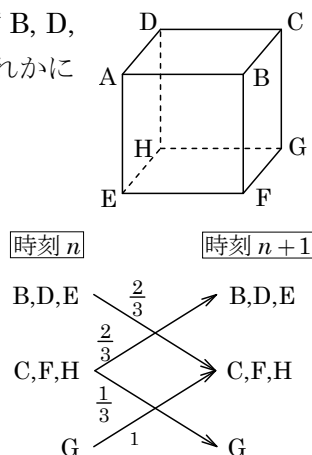
$$p_3 = \frac{2}{3}q_2 = \frac{4}{9}, \quad q_3 = \frac{2}{3}p_2 + r_2 = 0, \quad r_3 = \frac{1}{3}q_2 = \frac{2}{9}$$

- (2) $n \geq 2$ のとき、 $\textcircled{1}$ より $p_n = \frac{2}{3}q_{n-1}$, $\textcircled{3}$ より $r_n = \frac{1}{3}q_{n-1}$

$$\textcircled{2} \text{ に代入すると, } q_{n+1} = \frac{2}{3} \cdot \frac{2}{3}q_{n-1} + \frac{1}{3}q_{n-1}, \quad q_{n+1} = \frac{7}{9}q_{n-1} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

さて、 $\textcircled{4}$ に $n = 2k$ を代入すると $q_{2k+1} = \frac{7}{9}q_{2k-1}$ となり、 $q_{2k-1} = q_1 \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1} = 0$

$$p_{2k} = \frac{2}{3}q_{2k-1} = 0, \quad r_{2k} = \frac{1}{3}q_{2k-1} = 0$$



④に $n = 2k + 1$ を代入すると $q_{2k+2} = \frac{7}{9}q_{2k}$ となり, $q_{2k} = q_2 \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1} = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$

$$p_{2k+1} = \frac{2}{3}q_{2k} = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}, \quad r_{2k+1} = \frac{1}{3}q_{2k} = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{k-1}$$

以上より, $q_n = 0$ (n が奇数), $q_n = \frac{2}{3} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n}{2}-1}$ (n が偶数)

また, $n = 2k + 1$ のとき, $k - 1 = \frac{n-3}{2}$ から,

$$p_n = \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} \quad (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数}), \quad p_n = 0 \quad (n \text{ が偶数})$$

$$r_n = \frac{2}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{\frac{n-3}{2}} \quad (n \text{ が } 3 \text{ 以上の奇数}), \quad r_n = 0 \quad (n \text{ が偶数})$$

(3) 時刻 $2m$ で頂点 A に初めて戻る確率 s_m は, $m \geq 2$ のとき,

$$s_m = \frac{1}{3}p_{2m-1} = \frac{1}{3} \cdot \frac{4}{9} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2} = \frac{4}{27} \left(\frac{7}{9}\right)^{m-2}$$

なお, $m = 1$ のときは, $s_1 = \frac{1}{3}p_1 = \frac{1}{3}$ である。

コメント

確率と漸化式の頻出問題です。漸化式をまとめると隣接 3 項間型になりましたが、特別な形でしたので, n を偶奇に分けて記しています。

問 題

n を正の整数とし、 k を $1 \leq k \leq n+2$ を満たす整数とする。 $n+2$ 枚のカードがあり、そのうちの 1 枚には数字 0 が、他の 1 枚には数字 2 が、残りの n 枚には数字 1 が書かれている。この $n+2$ 枚のカードのうちから無作為に k 枚のカードを取り出すとする。このとき、次の問いに答えよ。

- (1) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 1 以上になる確率を求めよ。
- (2) 取り出した k 枚のカードに書かれているすべての数字の積が 2 となる確率 $Q_n(k)$ を求めよ。
- (3) 与えられた n に対して、確率 $Q_n(k)$ が最大となる k の値と、その最大値を求めよ。

[2016]

解答例

- (1) 数字 0, 数字 2, 数字 1 のカードがそれぞれ 1 枚, 1 枚, n 枚の合計 $n+2$ 枚あり、そのうちから k 枚のカードを取り出す ${}_{n+2}C_k$ 通りが同様に確からしいとする。

このとき、 k 枚のカードの数字の積が 1 以上になるのは、数字 0 以外の $n+1$ 枚のカードから k 枚取り出す場合より、その確率は、

$$\frac{{}_{n+1}C_k}{{}_{n+2}C_k} = \frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{n+2-k}{n+2}$$

- (2) k 枚のカードの数字の積が 2 になるのは、数字 2 のカード 1 枚と数字 1 のカードを $k-1$ 枚取り出す場合より、その確率 $Q_n(k)$ は、 $k \leq n+1$ のとき、

$$Q_n(k) = \frac{1 \times {}_nC_{k-1}}{{}_{n+2}C_k} = \frac{n!}{(k-1)!(n-k+1)!} \cdot \frac{k!(n+2-k)!}{(n+2)!} = \frac{k(n+2-k)}{(n+1)(n+2)}$$

なお、 $k = n+2$ をあてはめると $Q_n(k) = 0$ となり、このときも成立している。

- (3) (2) より、 $Q_n(k) = \frac{-k^2 + (n+2)k}{(n+1)(n+2)} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \left\{ -\left(k - \frac{n+2}{2}\right)^2 + \frac{(n+2)^2}{4} \right\}$

- (i) n が偶数のとき $Q_n(k)$ は $k = \frac{n+2}{2}$ のとき最大となり、最大値は、

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+2)^2}{4} = \frac{n+2}{4(n+1)}$$

- (ii) n が奇数のとき $Q_n(k)$ は $k = \frac{n+1}{2}$, $\frac{n+3}{2}$ のとき最大となり、最大値は、

$$\frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{-1 + (n+2)^2}{4} = \frac{1}{(n+1)(n+2)} \cdot \frac{(n+1)(n+3)}{4} = \frac{n+3}{4(n+2)}$$

コメント

確率についての基本的な問題です。なお、(3)の解答例については平方完成で処理しましたが、 $\frac{Q_n(k+1)}{Q_n(k)}$ の値と 1 との大小関係を利用する有名な方法もあります。

問 題

数直線上にある 1, 2, 3, 4, 5 の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき、

- $$\left\{ \begin{array}{l} \text{石が点 1 にあるならば, 確率 1 で点 2 に移動する} \\ \text{石が点 } k \ (k=2, 3, 4) \text{ にあるならば, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \frac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 5 にあるならば, 確率 1 で点 4 に移動する} \end{array} \right.$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め、この試行を繰り返す。試行を n 回繰り返した後に、石が点 k ($k=1, 2, 3, 4, 5$) にある確率を $P_n(k)$ とするとき、次の問いに答えよ。

- (1) $n=6$ のときの確率 $P_6(k)$ ($k=1, 2, 3, 4, 5$) をそれぞれ求めよ。
- (2) 石が移動した先の点に印をつける(点 1 には初めから印がついているものとする)。
試行を 6 回繰り返した後に、5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。
- (3) $n \geq 1$ のとき、 $P_n(3)$ を求めよ。 [2015]

解答例

- (1) 与えられた試行により、石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とすると、

$$P_{n+1}(1) = \frac{1}{2}P_n(2), \quad P_{n+1}(2) = P_n(1) + \frac{1}{2}P_n(3), \quad P_{n+1}(3) = \frac{1}{2}P_n(2) + \frac{1}{2}P_n(4)$$

$$P_{n+1}(4) = \frac{1}{2}P_n(3) + P_n(5), \quad P_{n+1}(5) = \frac{1}{2}P_n(4)$$

初めは、石が点 1 にあることより、漸化式を適用すると、

$$P_1(1)=0, \quad P_1(2)=1, \quad P_1(3)=0, \quad P_1(4)=0, \quad P_1(5)=0$$

$$P_2(1)=\frac{1}{2}, \quad P_2(2)=0, \quad P_2(3)=\frac{1}{2}, \quad P_2(4)=0, \quad P_2(5)=0$$

$$P_3(1)=0, \quad P_3(2)=\frac{3}{4}, \quad P_3(3)=0, \quad P_3(4)=\frac{1}{4}, \quad P_3(5)=0$$

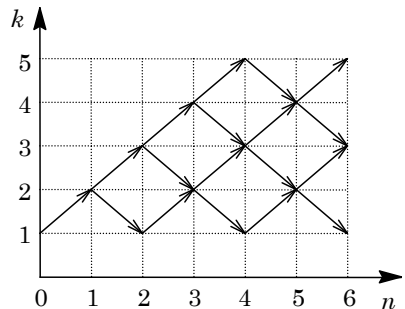
$$P_4(1)=\frac{3}{8}, \quad P_4(2)=0, \quad P_4(3)=\frac{1}{2}, \quad P_4(4)=0, \quad P_4(5)=\frac{1}{8}$$

$$P_5(1)=0, \quad P_5(2)=\frac{5}{8}, \quad P_5(3)=0, \quad P_5(4)=\frac{3}{8}, \quad P_5(5)=0$$

$$P_6(1)=\frac{5}{16}, \quad P_6(2)=0, \quad P_6(3)=\frac{1}{2},$$

$$P_6(4)=0, \quad P_6(5)=\frac{3}{16}$$

- (2) 試行を 6 回繰り返した後に、5 つの点にすべてに印がついているのは、右図より、次の 2 つの場合がある。



(i) 4 回目に 5 のとき

5 回目以降は任意なので、その確率は $P_4(5) \cdot 1 = \frac{1}{8}$ となる。

(ii) 4 回目に 3 のとき

5 回目に 4 で、6 回目に 5 より、その確率は $P_4(3) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$ となる。

(i)(ii)より、求める確率は、 $\frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}$ である。

$$(3) \quad (1) \text{より, } P_{n+1}(3) = \frac{1}{2}P_n(2) + \frac{1}{2}P_n(4) = \frac{1}{2}\{P_n(2) + P_n(4)\} \cdots \cdots (*)$$

さて、与えられた条件より、石の位置は、奇数回目には点 2 または点 4、偶数回目には点 1 または点 3 または点 5 にある。これより、

$$P_n(2) + P_n(4) = 0 \quad (n \text{ が偶数}), \quad P_n(2) + P_n(4) = 1 \quad (n \text{ が奇数})$$

$$\text{すると, } (*) \text{から, } P_n(3) = 0 \quad (n \text{ が奇数}), \quad P_n(3) = \frac{1}{2} \quad (n \text{ が偶数})$$

コメント

確率と漸化式の融合問題です。ただ、漸化式を解くというわけではなく、具体的な (1) を誘導として考えていくタイプです。なお、(3) の石の位置についての記述は結論だけですが、丁寧に行うならば漸化式を用います。

問 題

3人でじゃんけんをする。各人はグー、チョキ、パーをそれぞれ $\frac{1}{3}$ の確率で出すものとする。負けた人は脱落し、残った人で次のじゃんけんを行い(アイコの場合は誰も脱落しない)、勝ち残りが1人になるまでじゃんけんを続ける。このとき各回の試行は独立とする。3人でじゃんけんを始め、じゃんけんが n 回目まで続いて n 回目終了時に2人が残っている確率を p_n 、3人が残っている確率を q_n とおく。

- (1) p_1, q_1 を求めよ。
- (2) p_n, q_n が満たす漸化式を導き、 p_n, q_n の一般項を求めよ。
- (3) ちょうど n 回目で1人の勝ち残りが決まる確率を求めよ。 [2013]

解答例

- (1) 3人で1回じゃんけんをすると、手の出方は $3^3 = 27$ 通りあり、これらの場合が同様に確からしい。

さて、2人勝ち残るのは、勝った人の選び方が ${}_3C_2 = 3$ 通りで、その手の出方が3通りであるので、確率 p_1 は、 $p_1 = \frac{3 \times 3}{27} = \frac{1}{3}$ である。

また、3人残るのは、3人とも同じ手を出す3通りか、3人とも異なる手を出す $3! = 6$ 通りのいずれかより、その確率 q_1 は、 $q_1 = \frac{3+6}{27} = \frac{1}{3}$ である。

- (2) まず、2人で1回じゃんけんをすると、手の出方は $3^2 = 9$ 通りあり、これらの場合が同様に確からしい。そこで、2人残るのは、2人とも同じ手を出すアイコの3通りの場合だけであり、その確率は、 $\frac{3}{9} = \frac{1}{3}$ である。

さて、 $n+1$ 回目終了時に2人が残っているのは、 n 回目終了時に2人が残ってアイコの時か、 n 回目終了時に3人が残って2人が勝ち残るときのいずれかより、

$$p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \frac{1}{3}q_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、 $n+1$ 回目終了時に3人が残っているのは、 n 回目終了時に3人が残ってアイコの時より、

$$q_{n+1} = \frac{1}{3}q_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{2} \text{より、} q_n = q_1 \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

①に代入して、 $p_{n+1} = \frac{1}{3}p_n + \left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}$ となり、 $3^{n+1}p_{n+1} = 3^n p_n + 1$ と変形すると、

$$3^n p_n = 3^1 p_1 + (n-1) = 1 + n - 1 = n, \quad p_n = n \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3) $n \geq 2$ のとき, ちょうど n 回目で 1 人勝ち残りが決まるのは, 次の場合である。

(i) $n-1$ 回目終了時に 2 人が残って n 回目にアイコでないとき

$$p_{n-1} \times \left(1 - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{3}(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = 2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(ii) $n-1$ 回目終了時に 3 人が残って n 回目に 1 人勝ち残るとき

$$q_{n-1} \times (1 - p_1 - q_1) = \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(i)(ii)より, 求める確率は, $2(n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n + \left(\frac{1}{3}\right)^n = (2n-1)\left(\frac{1}{3}\right)^n$

なお, この式は $n=1$ のときも成立する。

コメント

有名問題ですが, 漸化式を立てるメリットがほとんど感じられないものです。

問 題

n を 2 以上の整数とする。1 から n までの整数が 1 つずつ書かれている n 枚のカードがある。ただし、異なるカードには異なる整数が書かれているものとする。この n 枚のカードから、1 枚のカードを無作為に取り出して、書かれた整数を調べてからもとに戻す。この試行を 3 回繰り返し、取り出したカードに書かれた整数の最小値を X 、最大値を Y とする。次の問いに答えよ。ただし、 j と k は正の整数で、 $j+k \leq n$ を満たすとする。また、 s は $n-1$ 以下の正の整数とする。

- (1) $X \geq j$ かつ $Y \leq j+k$ となる確率を求めよ。
- (2) $X = j$ かつ $Y = j+k$ となる確率を求めよ。
- (3) $Y - X = s$ となる確率を $P(s)$ とする。 $P(s)$ を求めよ。
- (4) n が偶数のとき、 $P(s)$ を最大にする s を求めよ。 [2012]

解答例

- (1) n 枚のカードをもとに戻しながら 1 枚ずつ取り出す試行を 3 回繰り返すとき、 n^3 通りの場合が同様に確からしい。

さて、書かれた整数の最小値を X 、最大値を Y とするとき、 $j \leq X$ かつ $Y \leq j+k$ であるのは、 j 以上 $j+k$ 以下の $k+1$ 枚のカードを 3 回取り出すことより、その確率 $P(j \leq X \text{ かつ } Y \leq j+k)$ は、

$$P(j \leq X \text{ かつ } Y \leq j+k) = \frac{(k+1)^3}{n^3}$$

- (2) 「 $X = j$ かつ $Y = j+k$ 」となるのは、「 $j \leq X$ かつ $Y \leq j+k$ 」の場合から「 $j+1 \leq X$ または $Y \leq j+k-1$ 」の場合を除いたものになる。

ここで、(1)と同様に考えると、 $P(j+1 \leq X \text{ かつ } Y \leq j+k) = \frac{k^3}{n^3}$

$$P(j \leq X \text{ かつ } Y \leq j+k-1) = \frac{k^3}{n^3}, \quad P(j+1 \leq X \text{ かつ } Y \leq j+k-1) = \frac{(k-1)^3}{n^3}$$

すると、求める確率 $P(j = X \text{ かつ } Y = j+k)$ は、

$$\begin{aligned} & P(j \leq X \text{ かつ } Y \leq j+k) - P(j+1 \leq X \text{ または } Y \leq j+k-1) \\ &= \frac{(k+1)^3}{n^3} - \left\{ \frac{k^3}{n^3} + \frac{k^3}{n^3} - \frac{(k-1)^3}{n^3} \right\} = \frac{(k+1)^3}{n^3} - \frac{2k^3}{n^3} + \frac{(k-1)^3}{n^3} = \frac{6k}{n^3} \end{aligned}$$

- (3) (2)より、 $X = j$ かつ $Y = j+s$ ($1 \leq j \leq n-s$) となる確率は、それぞれ $\frac{6s}{n^3}$ であり、

$Y - X = s$ となる確率 $P(s)$ は、

$$P(s) = \frac{6s}{n^3} \times (n-s) = -\frac{6}{n^3}(s^2 - ns)$$

(4) (3)より,
$$P(s) = -\frac{6}{n^3} \left(s - \frac{n}{2}\right)^2 + \frac{3}{2n}$$

すると, n は偶数より, $s = \frac{n}{2}$ のとき $P(s)$ は最大となる。

コメント

最大, 最小の確率を問う有名問題です。(2)の考え方はオーソドックスなものです。

問 題

数字の 2 を書いた玉が 1 個、数字の 1 を書いた玉が 3 個、数字の 0 を書いた玉が 4 個あり、これら合計 8 個の玉が袋に入っている。以下の(1)から(3)のそれぞれにおいて、この状態の袋から 1 度に 1 個ずつ玉を取り出し、取り出した玉は袋に戻さないものとする。

- (1) 玉を 2 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 2 である確率を求めよ。
- (2) 玉を 4 度取り出すとき、取り出した玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率を求めよ。
- (3) 玉を 8 度取り出すとき、次の条件が満たされる確率を求めよ。

条件：すべての $n = 1, 2, \dots, 8$ に対して、1 個目から n 個目までの玉に書かれた数字の合計は n 以下である。

[2011]

解答例

- (1) 玉を 2 度取り出すとき、数字の合計が 2 であるのは、 $2+0$ 、 $1+1$ 、 $0+2$ の 3 通りより、その確率は、

$$\frac{1}{8} \times \frac{4}{7} + \frac{3}{8} \times \frac{2}{7} + \frac{4}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{1}{4}$$

- (2) 玉を 4 度取り出すとき、玉に書かれた数字の合計が 5 以上となるのは、2 を 1 度、1 を 3 度取り出す場合より、その確率は、

$$\left(\frac{1}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6} \times \frac{1}{5} \right) \times \frac{4!}{3!} = \frac{1}{70}$$

よって、玉を 4 度取り出すとき、玉に書かれた数字の合計が 4 以下である確率は、

$$1 - \frac{1}{70} = \frac{69}{70}$$

- (3) まず、8 個の玉の数字の合計が 5 より、与えられた条件が満たされないのは、次の 4 つの場合である。

- (i) 玉を 1 度取り出したとき、その数字が 2 以上

このときの確率は、 $\frac{1}{8}$ である。

- (ii) 玉を 2 度取り出したとき、1 度目の数字が 1 以下、2 度目までの合計が 3 以上

$1+2$ の場合より、このときの確率は、 $\frac{3}{8} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{56}$ である。

- (iii) 玉を 3 度取り出したとき、1 度目の数字が 1 以下、2 度目までの合計が 2 以下、3 度目までの合計が 4 以上

$1+1+2$ の場合より、このときの確率は、 $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} = \frac{1}{56}$ である。

- (iv) 玉を 4 度取り出したとき, 1 度目の数字が 1 以下, 2 回目までの合計が 2 以下, 3 回目までの合計が 3 以下, 4 回目までの合計が 5 以上

1+1+1+2 の場合より, このときの確率は, $\frac{3}{8} \times \frac{2}{7} \times \frac{1}{6} \times \frac{1}{5} = \frac{1}{280}$ である。

- (i)~(iv) より, 与えられた条件が満たされる確率は,

$$1 - \left(\frac{1}{8} + \frac{3}{56} + \frac{1}{56} + \frac{1}{280} \right) = 1 - \frac{1}{5} = \frac{4}{5}$$

コメント

- (3)は読解力がポイントです。具体的に考えて, 題意を言い換える力が必要です。

問 題

はじめに、A が赤玉を 1 個、B が白玉を 1 個、C が青玉を 1 個持っている。表裏の出る確率がそれぞれ $\frac{1}{2}$ の硬貨を投げ、表が出れば A と B の玉を交換し、裏が出れば B と C の玉を交換する、という操作を考える。この操作を n 回 ($n=1, 2, 3, \dots$) くり返した後に A, B, C が赤玉を持っている確率をそれぞれ a_n, b_n, c_n とおく。

- (1) $a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, c_2$ を求めよ。
- (2) $a_{n+1}, b_{n+1}, c_{n+1}$ を a_n, b_n, c_n で表せ。
- (3) n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$ が成り立ち、 n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ が成り立つことを示せ。
- (4) b_n を求めよ。

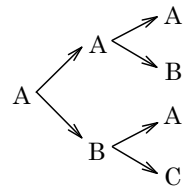
[2010]

解答例

- (1) はじめに、A が赤玉を持っていて、題意の操作をしたところ、赤玉は右図のように移動する。その確率は、いずれも $\frac{1}{2}$ なので、

$$a_1 = b_1 = \frac{1}{2}, c_1 = 0$$

$$a_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}, b_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}, c_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

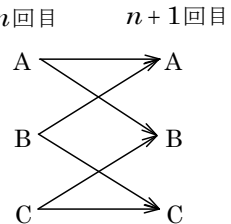


- (2) n 回目の操作後から、 $n+1$ 回目の操作後への赤玉の移動は 右図のようになり、移動の確率は、いずれも $\frac{1}{2}$ から、

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}b_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{1}{2}c_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{2}c_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$



- (3) n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$, n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ であることを数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$ のとき

(1)から、 $a_1 = b_1 > c_1$, $a_2 > b_2 = c_2$ となり、成立する。

(ii) $n=k$ のとき

$a_{2k-1} = b_{2k-1} > c_{2k-1}$, $a_{2k} > b_{2k} = c_{2k}$ であると仮定すると、①②③より、

$$a_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}b_{2k}, b_{2k+1} = \frac{1}{2}a_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k}, c_{2k+1} = \frac{1}{2}b_{2k} + \frac{1}{2}c_{2k}$$

よって、 $a_{2k+1} = b_{2k+1} > c_{2k+1}$ となり、さらに、

$$a_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}b_{2k+1}, b_{2k+2} = \frac{1}{2}a_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1}, c_{2k+2} = \frac{1}{2}b_{2k+1} + \frac{1}{2}c_{2k+1}$$

よって, $a_{2k+2} > b_{2k+2} = c_{2k+2}$ である。

(i)(ii) より, n が奇数ならば $a_n = b_n > c_n$, n が偶数ならば $a_n > b_n = c_n$ である。

(4) $a_n + b_n + c_n = 1$ なので, ②から, $b_{n+1} = \frac{1}{2}(1 - b_n)$ となり,

$$b_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(b_n - \frac{1}{3}\right)$$

よって, $b_n - \frac{1}{3} = \left(b_0 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^n = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$ より, $b_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^n$

コメント

確率と連立漸化式についての有名問題です。当たり前すぎて忘れがちなポイントは, $a_n + b_n + c_n = 1$ です。

問 題

さいころを投げると、1 から 6 までの整数の目が等しい確率で出るとする。さいころを n 回 ($n=1, 2, 3, \dots$) 投げるとき、出る目の積の一の位が j ($j=0, 1, 2, \dots, 9$) となる確率を $p_n(j)$ とする。

- (1) $p_2(0)$, $p_2(1)$, $p_2(2)$ を求めよ。
 (2) $p_{n+1}(1)$ を、 $p_n(1)$ と $p_n(7)$ を用いて表せ。
 (3) $p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)$ を求めよ。

[2009]

解答例

- (1) さいころを 2 回投げるとき、出る目と出る目の積の一の位の対応をまとめると、右表のようになる。

1 回 \ 2 回	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6
2	2	4	6	8	0	2
3	3	6	9	2	5	8
4	4	8	2	6	0	4
5	5	0	5	0	5	0
6	6	2	8	4	0	6

これより、 $p_2(0)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$, $p_2(1)=\frac{1}{36}$,

$p_2(2)=\frac{6}{36}=\frac{1}{6}$ である。

- (2) さいころを $n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 1 となるのは、次の 2 つの場合である。

(i) n 回までの積の一の位が 1 で、 $n+1$ 回目が 1 のとき

(ii) n 回までの積の一の位が 7 で、 $n+1$ 回目が 3 のとき

(i)(ii) より、 $p_{n+1}(1)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(7)\cdots\cdots\textcircled{1}$

- (3) $n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 3 となるのは、 n 回までの積の一の位が 1 で $n+1$ 回目が 3、 n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 1 のときであり、

$$p_{n+1}(3)=\frac{1}{6}p_n(1)+\frac{1}{6}p_n(3)\cdots\cdots\textcircled{2}$$

$n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 7 となるのは、 n 回までの積の一の位が 7 で $n+1$ 回目が 1、 n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 3 のときであり、

$$p_{n+1}(7)=\frac{1}{6}p_n(7)+\frac{1}{6}p_n(9)\cdots\cdots\textcircled{3}$$

$n+1$ 回投げるとき、出る目の積の一の位が 9 となるのは、 n 回までの積の一の位が 3 で $n+1$ 回目が 3、 n 回までの積の一の位が 9 で $n+1$ 回目が 1 のときであり、

$$p_{n+1}(9)=\frac{1}{6}p_n(3)+\frac{1}{6}p_n(9)\cdots\cdots\textcircled{4}$$

①+②+③+④より、

$$p_{n+1}(1)+p_{n+1}(3)+p_{n+1}(7)+p_{n+1}(9)=\frac{1}{3}\{p_n(1)+p_n(3)+p_n(7)+p_n(9)\}$$

ここで, $p_1(1) = p_1(3) = \frac{1}{6}$, $p_1(7) = p_1(9) = 0$ より,

$$p_n(1) + p_n(3) + p_n(7) + p_n(9) = \left(\frac{1}{6} + \frac{1}{6} + 0 + 0\right) \left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

コメント

センター試験に向かうときと同様に, まず一覧表を作成した方がミスが少なくなります。なお, (3)は(2)と同様に考えた解法です。

問題

袋の中に赤と白の玉が 1 個ずつ入っている。「この袋から玉を 1 個取り出して戻し、出た玉と同じ色の玉を袋の中に 1 個追加する」という操作を N 回繰り返した後、赤の玉が袋の中に m 個ある確率を $p_N(m)$ とする。

(1) $p_3(m)$ を求めよ。

(2) 一般の N に対し $p_N(m)$ を求めよ。

[2007]

解答例

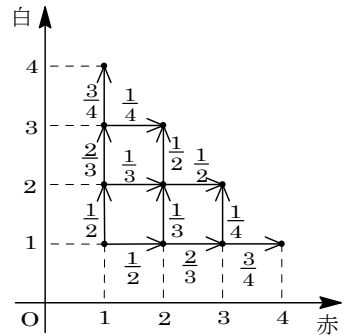
(1) 赤玉と白玉の個数を、(赤, 白)の順に記し、座標平面上の格子点を対応させると、右図のようになり、

$$p_3(1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p_3(2) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) \times \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

$$p_3(3) = \left(\frac{1}{2} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \right) \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{4}$$

$$p_3(4) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$



なお, $m \geq 5$ のとき, $p_3(m) = 0$ である。

(2) まず, $m \geq N+2$ のとき, 明らかに $p_N(m) = 0$ である。

ここで, $1 \leq m \leq N+1$ のとき, $p_N(m) = \frac{1}{N+1}$ であることを, N について数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $N=1$ のとき $p_1(1) = p_1(2) = \frac{1}{2}$ より, 成立している。

(ii) $N=k$ のとき $p_k(m) = \frac{1}{k+1}$ ($1 \leq m \leq k+1$) と仮定する。

$N=k+1$ のとき $m=1$ となるのは, (赤, 白) = (1, $k+1$) で白を取り出す場合より,

$$p_{k+1}(1) = \frac{k+1}{k+2} p_k(1) = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2}$$

$N=k+1$ のとき $m=l$ ($2 \leq l \leq k+1$) となるのは, (赤, 白) = (l , $k+2-l$) で白を取り出すか, (赤, 白) = ($l-1$, $k+3-l$) で赤を取り出す場合より,

$$\begin{aligned} p_{k+1}(l) &= \frac{k+2-l}{k+2} p_k(l) + \frac{l-1}{k+2} p_k(l-1) = \frac{k+2-l}{k+2} \cdot \frac{1}{k+1} + \frac{l-1}{k+2} \cdot \frac{1}{k+1} \\ &= \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2} \end{aligned}$$

$N=k+1$ のとき $m=k+2$ となるのは, (赤, 白) = ($k+1$, 1) で赤を取り出す場合より,

$$p_{k+1}(k+2) = \frac{k+1}{k+2} p_k(k+1) = \frac{k+1}{k+2} \cdot \frac{1}{k+1} = \frac{1}{k+2}$$

以上より, $p_{k+1}(m) = \frac{1}{k+2}$ ($1 \leq m \leq k+2$) である。

(i)(ii)より, $p_N(m) = \frac{1}{N+1}$ ($1 \leq m \leq N+1$)

コメント

状態の推移を座標平面上の点を対応させて考えました。(2)の証明は, 上の図を見ながら行いましたが, それでも注意力がかなり要求されます。

問 題

正六面体の各面に 1 つずつ、サイコロのように、1 から 6 までの整数がもれなく書かれていて、向かい合う面の数の和は 7 である。このような正六面体が底面の数字が 1 であるように机の上におかれている。この状態から始めて、次の試行を繰り返し行う。「現在の底面と隣り合う 4 面のうちの 1 つを新しい底面にする」。ただし、これらの 4 面の数字が a_1, a_2, a_3, a_4 のとき、それぞれの面が新しい底面となる確率の比は $a_1 : a_2 : a_3 : a_4$ とする。この試行を n 回繰り返した後、底面の数字が m である確率を $p_n(m)$ ($n \geq 1$) で表す。 $q_n = p_n(1) + p_n(6)$ ($n = 1, 2, 3, \dots$) とおく。

- (1) q_1, q_2 を求めよ。
- (2) q_n を q_{n-1} で表し、 q_n を求めよ。
- (3) $p_n(1)$ を求めよ。

[2006]

解答例

(1) まず、試行後の新しい底面の数字と、その数値になる確率を表にまとめる。

(i) 底面の数字が 1 または 6 のとき

新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかとなる。

新しい底面	2	3	4	5
確 率	$\frac{2}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{5}{14}$

(ii) 底面の数字が 2 または 5 のとき

新しい底面の数字は 1, 3, 4, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	3	4	6
確 率	$\frac{1}{14}$	$\frac{3}{14}$	$\frac{4}{14}$	$\frac{6}{14}$

(iii) 底面の数字が 3 または 4 のとき

新しい底面の数字は 1, 2, 5, 6 のいずれかとなる。

新しい底面	1	2	5	6
確 率	$\frac{1}{14}$	$\frac{2}{14}$	$\frac{5}{14}$	$\frac{6}{14}$

さて、底面の数字が 1 であるとき、試行を 1 回行くと、新しい底面の数字は 2, 3, 4, 5 のいずれかであるので、

$$q_1 = p_1(1) + p_1(6) = 0$$

次に、試行を 2 回行ったとき、底面が 1 となるのは、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 1$, $1 \rightarrow 5 \rightarrow 1$ の場合、底面が 6 となるのは、 $1 \rightarrow 2 \rightarrow 6$, $1 \rightarrow 3 \rightarrow 6$, $1 \rightarrow 4 \rightarrow 6$, $1 \rightarrow 5 \rightarrow 6$ の場合で、それぞれの確率は、

$$p_2(1) = \frac{2}{14} \times \frac{1}{14} + \frac{3}{14} \times \frac{1}{14} + \frac{4}{14} \times \frac{1}{14} + \frac{5}{14} \times \frac{1}{14} = \frac{1}{14}$$

$$p_2(6) = \frac{2}{14} \times \frac{6}{14} + \frac{3}{14} \times \frac{6}{14} + \frac{4}{14} \times \frac{6}{14} + \frac{5}{14} \times \frac{6}{14} = \frac{6}{14}$$

$$\text{よって、} q_2 = p_2(1) + p_2(6) = \frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$$

(2) n 回の試行の後、底面の数字が 1 または 6 となるのは、 $n-1$ 回の試行後、底面の数字が 1 または 6 でないときである。

$n-1$ 回の試行後、底面の数字が 2 または 5 のときも、3 または 4 のときも、 n 回の試行後、底面の数字が 1 または 6 となる確率は、 $\frac{1}{14} + \frac{6}{14} = \frac{1}{2}$ なので、

$$q_n = \frac{1}{2}(1 - q_{n-1}), \quad q_n - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(q_{n-1} - \frac{1}{3}\right) \quad (n \geq 2)$$

$$q_1 = 0 \text{ より, } q_n - \frac{1}{3} = \left(q_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = -\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \text{ となり,}$$

$$q_n = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{3}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \cdots \cdots (*)$$

(*) に $n=1$ をあてはめると $q_1 = 0$ となり、 $n=1$ のときも満たしている。

(3) n 回の試行の後、底面の数字が 1 となるのは、 $n-1$ 回の試行後、底面の数字が 1 または 6 でないときである。 $n-1$ 回の試行後、底面の数字が 2 または 5 のときも、3 または 4 のときも、 n 回の試行後、底面の数字が 1 になる確率は $\frac{1}{14}$ なので、

$$p_n(1) = \frac{1}{14}(1 - q_{n-1}) \quad (n \geq 2)$$

$$\text{すると, (2) より, } p_n(1) = \frac{1}{14} \cdot 2q_n = \frac{1}{21}\left\{1 - \left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\} \cdots \cdots (**)$$

(**) に $n=1$ をあてはめると $p_1(1) = 0$ となり、 $n=1$ のときも満たしている。

コメント

一見、難しそうな題意を把握するために、(1)では、考えた順にやや詳しく書きました。なお、漸化式の威力が発揮されるこの手の問題は頻出です。

問 題

1 から 13 までの数が 1 つ書かれているカードが 52 枚あり、各数について 4 枚ずつある。この 52 枚のカードから、戻さずに続けて 2 枚とりだし、そのカードに書かれた数を順に x, y とする。関数 $f(x, y) = \log_3(x+y) - \log_3 x - \log_3 y + 1$ を考える。

(1) カードに書かれた数 x, y で、 $f(x, y) = 0$ となるものをすべて求めよ。

(2) $f(x, y) = 0$ となる確率を求めよ。 [2005]

解答例

(1) $f(x, y) = 0$ より、 $\log_3(x+y) - \log_3 x - \log_3 y + 1 = 0$

$$\log_3(x+y) = \log_3 xy$$

$$3(x+y) = xy \text{ より、 } (x-3)(y-3) = 9$$

$1 \leq x \leq 13, 1 \leq y \leq 13$ より、 $-2 \leq x-3 \leq 10, -2 \leq y-3 \leq 10$ となり、

$$(x-3, y-3) = (1, 9), (3, 3), (9, 1)$$

よって、 $(x, y) = (4, 12), (6, 6), (12, 4)$

(2) x, y のとりだし方の総数は、 ${}_{52}P_2 = 52 \times 51$ 通りである。

$(x, y) = (4, 12)$ となるカードのとりだし方は $4 \times 4 = 16$ 通り。

$(x, y) = (6, 6)$ となるカードのとりだし方は $4 \times 3 = 12$ 通り。

$(x, y) = (12, 4)$ となるカードのとりだし方は $4 \times 4 = 16$ 通り。

よって、 $f(x, y) = 0$ となる確率は、

$$\frac{16+12+16}{52 \times 51} = \frac{11}{663}$$

コメント

見かけよりははるかに簡単な基本問題です。

問題

サイコロの出た目の数だけ数直線を正の方向に移動するゲームを考える。ただし、8 をゴールとしてちょうど 8 の位置へ移動したときにゲームを終了し、8 をこえた分についてはその数だけ戻る。たとえば、7 の位置で 3 が出た場合、8 から 2 戻って 6 へ移動する。なお、サイコロは 1 から 6 までの目が等確率で出るものとする。原点から始めて、サイコロを n 回投げ終えたときに 8 へ移動してゲームを終了する確率を p_n とおく。

- (1) p_2 を求めよ。
- (2) p_3 を求めよ。
- (3) p_4 を求めよ。

[2004]

解答例

- (1) サイコロを 2 回投げて 8 に進むとき、1 回目と 2 回目に出る数の組合せは、
(2, 6), (3, 5), (4, 4), (5, 3), (6, 2)

$$\text{よって、} p_2 = \frac{5}{6^2} = \frac{5}{36}$$

- (2) サイコロを 1 回投げて 8 に進む場合はないので、 $p_1 = 0$ である。

また、サイコロを 2 回投げてゴールに移動していないとき、その位置を k とすると $2 \leq k \leq 7$ なので、3 回目に $8-k$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-k$ の出る確率が $\frac{1}{6}$ より、

$$p_3 = (1 - p_2) \times \frac{1}{6} = \frac{31}{36} \times \frac{1}{6} = \frac{31}{216}$$

- (3) (2)と同様に考えて、サイコロを 3 回投げてゴールに移動していないとき、その位置を l とすると $3 \leq l \leq 7$ なので、4 回目に $8-l$ の目が出ればゴールに移動する。その $8-l$ の出る確率が $\frac{1}{6}$ より、

$$p_4 = (1 - p_2 - p_3) \times \frac{1}{6} = \frac{155}{216} \times \frac{1}{6} = \frac{155}{1296}$$

コメント

サイコロを 2 回以上投げたとき、0 や 1 に移動している可能性はありません。つまり、あと 1 回投げてゴールに進むことができるわけです。この状況の把握がポイントです。

問 題

1 つの箱の中に 1 から 10 までの数が書かれたカードが 4 枚ずつ計 40 枚入っている。この箱から k 枚 ($3 \leq k \leq 12$) のカードを同時に取り出す。このうちの 3 枚のカードが同じ数で残りはこれとは違う互いに異なる数となる確率を $p(k)$ とする。

(1) $p(k)$ を求めよ。

(2) $4 \leq k \leq 12$ のとき、 $f(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)}$ を求めよ。

(3) $p(k)$ を最大にする k の値を求めよ。 [2003]

解答例

(1) 異なる 40 枚のカードから k 枚を取り出すとき、 ${}_{40}C_k$ 通りの場合がある。

この中で、3 枚が同じ数で、残り $k-3$ 枚が異なる数である場合を数える。まず、同じ数の選び方は 10 通りで、その 3 枚のカードの取り出し方が ${}_4C_3$ 通りずつある。次に、異なる数の選び方は ${}_9C_{k-3}$ 通りで、その $k-3$ 枚のカードの取り出し方が、それぞれの数で 4 通りずつあることから 4^{k-3} 通りである。

これより、3 枚が同じ数で、残り $k-3$ 枚が異なる数である確率は、

$$\begin{aligned} p(k) &= \frac{10 \times {}_4C_3 \times {}_9C_{k-3} \times 4^{k-3}}{{}_{40}C_k} = \frac{40 \times {}_9C_{k-3} \times 4^{k-3}}{{}_{40}C_k} \\ &= \frac{40 \cdot \frac{9!}{(k-3)!(12-k)!} \cdot 4^{k-3}}{\frac{40!}{k!(40-k)!}} = \frac{9!(40-k)!k(k-1)(k-2)4^{k-3}}{39!(12-k)!} \end{aligned}$$

(2) $p(k-1) = \frac{9!(41-k)!(k-1)(k-2)(k-3)4^{k-4}}{39!(13-k)!}$ より、

$$f(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)} = \frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)}$$

(3) $f(k) = \frac{p(k-1)}{p(k)} > 1$ とすると、(2)より、 $\frac{(41-k)(k-3)}{4k(13-k)} > 1$

$4 \leq k \leq 12$ より、 $(41-k)(k-3) > 4k(13-k)$ 、 $3k^2 - 8k - 123 > 0 \cdots \cdots (*)$

ここで、 $g(k) = k(3k-8)$ とおくと、 $g(7) = 91$ 、 $g(8) = 128$ より、 $(*)$ を満たす 4 以上の自然数 k の条件は、 $k \geq 8$ である。

よって、 $8 \leq k \leq 12$ のとき $p(k-1) > p(k)$ となり、また、これから $4 \leq k \leq 7$ のとき $p(k-1) < p(k)$ となるので、

$$p(3) < p(4) < \cdots < p(6) < p(7) > p(8) > \cdots > p(12)$$

したがって、 $k=7$ のとき、 $p(k)$ は最大となる。

コメント

確率の最大値を求める有名問題で、解の流れは明快です。

問 題

サイレンを断続的に鳴らして 16 秒の信号を作る。ただし、サイレンは 1 秒または 2 秒鳴り続けて 1 秒休み、これをくり返す。また、信号はサイレンの音で始まり、サイレンの音で終わるものとする。

- (1) 1 秒または 2 秒鳴り続ける回数をそれぞれ m 回, n 回とすると、 m, n の満たす関係式を求めよ。
- (2) 信号は何通りできるか。 [2001]

解答例

- (1) 1 秒鳴るのが m 回, 2 秒なるのが n 回とすると、休みは $m+n-1$ 回となるので、

$$m+2n+m+n-1=16, \quad 2m+3n=17 \cdots \cdots (*)$$
- (2) $(*)$ を満たす 0 以上の整数 (m, n) の組は、 $(*)$ より $2m=17-3n \geq 0$ なので、
 $n \leq 5$ であり、さらに $17-3n$ が偶数なので n は奇数となり、 $n=1, 3, 5$ である。
 すると、 $(m, n)=(7, 1), (4, 3), (1, 5)$ となる。
 $(m, n)=(7, 1)$ のとき、信号は ${}_8C_7=8$ 通り、 $(m, n)=(4, 3)$ のとき、信号は ${}_7C_4=35$ 通り、 $(m, n)=(1, 5)$ のとき、信号は ${}_6C_1=6$ 通りとなる。
 以上より、信号は $8+35+6=49$ 通りできる。

コメント

現実的にありそうな問題です。予想したより簡単に結論が導けます。

問題

A と B がゲームをくり返す。それぞれの最初の持ち点は 2 で、ゲームごとに勝者は敗者から 1 点をもらい、どちらか一方の持ち点が 0 になるまで続ける。ただし、各ゲームにおいて、A が勝つ確率を p , B が勝つ確率を $1-p$ とする。

- (1) ちょうど 4 回目のゲームでどちらか一方の持ち点が 0 になる確率を求めよ。
 (2) $2n$ 回目までのゲームで、A の持ち点が 0 になる確率を求めよ。 [1999]

解答例

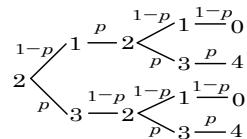
- (1) A の勝つ確率は p , 負ける確率は $1-p$ である。

ここで、ちょうど 4 回目でゲームが終了するのは、4 回目に A の持ち点が 0 または 4 になったときである。

A の持ち点の変化は右図のようになるので、求める

確率は、

$$\begin{aligned} & 2(1-p)^3 p + 2p^3(1-p) \\ &= 2p(1-p) \{ (1-p)^2 + p^2 \} \\ &= 2p(1-p)(1-2p+2p^2) \end{aligned}$$



- (2) $2n$ 回目のゲームで、A の持ち点が 0, 2, 4 になる確率をそれぞれ a_n , b_n , c_n とおくと、

$$b_n = \{ (1-p)p + p(1-p) \} b_{n-1} = 2p(1-p)b_{n-1}$$

ここで、 $b_0 = 1$ より、

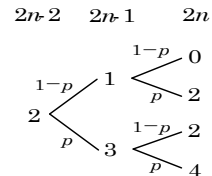
$$b_n = b_0 \{ 2p(1-p) \}^n = \{ 2p(1-p) \}^n$$

すると、 $n \geq 1$ で、

$$a_n = (1-p)^2 b_{n-1} = (1-p)^2 \{ 2p(1-p) \}^{n-1}$$

求める $2n$ 回目までのゲームで A の持ち点が 0 になる確率は、

$$\sum_{k=1}^n a_k = (1-p)^2 \sum_{k=1}^n \{ 2p(1-p) \}^{k-1} = \frac{(1-p)^2}{1-2p+2p^2} \left[1 - \{ 2p(1-p) \}^n \right]$$



コメント

状態の遷移の様子を図として表し、それに従って確率計算をしていけばよい問題です。本問も頻出題の一つです。

問題

座標平面上に 4 点 $A(0, 1)$, $B(0, 0)$, $C(1, 0)$, $D(1, 1)$ を頂点とする正方形を考え、この正方形の頂点上を点 Q が 1 秒ごとに 1 つの頂点から隣の頂点に移動しているとする。さらに、点 Q は、 x 軸と平行な方向の移動について確率 p , y 軸と平行な方向の移動について確率 $1-p$ で移動しているものとする。最初に点 Q が頂点 A にいたとすると、 n 秒後に頂点 A , C にいる確率をそれぞれ a_n , c_n とする。

(1) a_2 , c_2 , a_4 , c_4 を求めよ。

(2) a_{2n} を求めよ。

[1998]

解答例

(1) $A \rightarrow B \rightarrow A$ の確率は $(1-p)^2$, $A \rightarrow D \rightarrow A$ の

確率は p^2 より、

$$a_2 = (1-p)^2 + p^2 = 2p^2 - 2p + 1$$

$A \rightarrow D \rightarrow C$ の確率は $p(1-p)$, $A \rightarrow B \rightarrow C$ の

確率は $(1-p)p$ より、

$$c_2 = p(1-p) + (1-p)p = -2p^2 + 2p$$

また、 $C \rightarrow B \rightarrow A$ または $C \rightarrow D \rightarrow A$ の確率は合わせて $c_2 = -2p^2 + 2p$, $C \rightarrow B \rightarrow C$ または $C \rightarrow D \rightarrow C$ の確率は合わせて $a_2 = 2p^2 - 2p + 1$

ここで、2 秒後に点 Q が A または C にいることに注意して

$$\begin{aligned} a_4 &= a_2 \cdot a_2 + c_2 \cdot c_2 = (2p^2 - 2p + 1)^2 + (-2p^2 + 2p)^2 \\ &= 8p^4 - 16p^3 + 12p^2 - 4p + 1 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_4 &= c_2 \cdot a_2 + a_2 \cdot c_2 = 2(2p^2 - 2p + 1)(-2p^2 + 2p) \\ &= -8p^4 + 16p^3 - 12p^2 + 4p \end{aligned}$$

(2) (1)と同様に考えて、

$$a_{2(n+1)} = a_2 \cdot a_{2n} + c_2 \cdot c_{2n} \cdots \cdots \textcircled{1}$$

$$c_{2(n+1)} = c_2 \cdot a_{2n} + a_2 \cdot c_{2n} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} + \textcircled{2} \text{ より, } a_{2(n+1)} + c_{2(n+1)} = (a_2 + c_2)(a_{2n} + c_{2n}) = a_{2n} + c_{2n}$$

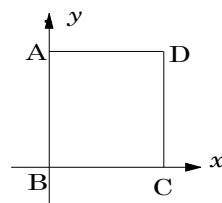
$$\text{よって, } a_{2n} + c_{2n} = a_2 + c_2 = 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{ より, } a_{2(n+1)} - c_{2(n+1)} = (a_2 - c_2)(a_{2n} - c_{2n}) = (4p^2 - 4p + 1)(a_{2n} - c_{2n})$$

$$\text{よって, } a_{2n} - c_{2n} = (a_2 - c_2)(4p^2 - 4p + 1)^{n-1} = (4p^2 - 4p + 1)^n \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$$\textcircled{3} + \textcircled{4} \text{ より, } 2a_{2n} = 1 + (4p^2 - 4p + 1)^n$$

$$a_{2n} = \frac{1}{2} \{ 1 + (4p^2 - 4p + 1)^n \} = \frac{1}{2} \{ 1 + (2p-1)^{2n} \}$$



コメント

(2)の連立漸化式は対称型なので、両辺の和と差を考えるという常套手段で結論が導けます。なお、偶数秒後に点 Q は A または C にいることに注目すれば、全確率の和が 1 という③を明らかとして扱っても構いません。

問 題

n を自然数とすると、3 つの数 $a = \sqrt[5]{1 + \frac{1}{n}} - 1$, $b = 1 - \sqrt[5]{1 - \frac{1}{n}}$, $c = \frac{1}{5n}$ の大きさを比較せよ。 [2002]

解答例

$$\begin{aligned}
 1+a &= \sqrt[5]{1+\frac{1}{n}}, \quad 1-b = \sqrt[5]{1-\frac{1}{n}}, \quad c = \frac{1}{5n} \text{ より,} \\
 \left(1-\frac{1}{5n}\right)^5 &= 1 - {}_5C_1 \frac{1}{5n} + {}_5C_2 \left(\frac{1}{5n}\right)^2 - {}_5C_3 \left(\frac{1}{5n}\right)^3 + {}_5C_4 \left(\frac{1}{5n}\right)^4 - \left(\frac{1}{5n}\right)^5 \\
 &= 1 - \frac{1}{n} + 10\left(\frac{1}{5n}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{5n}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{5n}\right)^4 - \left(\frac{1}{5n}\right)^5 \\
 (1-c)^5 - (1-b)^5 &= \left(1-\frac{1}{5n}\right)^5 - \left(1-\frac{1}{n}\right) \\
 &= 10\left(\frac{1}{5n}\right)^2 - 10\left(\frac{1}{5n}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{5n}\right)^4 - \left(\frac{1}{5n}\right)^5 \\
 &= 10\left(\frac{1}{5n}\right)^2 \left(1-\frac{1}{5n}\right) + 4\left(\frac{1}{5n}\right)^4 + \left(\frac{1}{5n}\right)^4 \left(1-\frac{1}{5n}\right) \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

よって、 $(1-c)^5 > (1-b)^5$ となり、 $1-c > 0$, $1-b > 0$ より、

$$1-c > 1-b, \quad b > c$$

$$\begin{aligned}
 \text{また, } \left(1+\frac{1}{5n}\right)^5 &= 1 + {}_5C_1 \frac{1}{5n} + {}_5C_2 \left(\frac{1}{5n}\right)^2 + {}_5C_3 \left(\frac{1}{5n}\right)^3 + {}_5C_4 \left(\frac{1}{5n}\right)^4 + \left(\frac{1}{5n}\right)^5 \\
 &= 1 + \frac{1}{n} + 10\left(\frac{1}{5n}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{5n}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{5n}\right)^4 + \left(\frac{1}{5n}\right)^5 \\
 (1+c)^5 - (1+a)^5 &= \left(1+\frac{1}{5n}\right)^5 - \left(1+\frac{1}{n}\right) \\
 &= 10\left(\frac{1}{5n}\right)^2 + 10\left(\frac{1}{5n}\right)^3 + 5\left(\frac{1}{5n}\right)^4 + \left(\frac{1}{5n}\right)^5 \\
 &> 0
 \end{aligned}$$

よって、 $(1+c)^5 > (1+a)^5$ となり、 $1+c > 0$, $1+a > 0$ より、

$$1+c > 1+a, \quad c > a$$

以上より、 $b > c > a$

コメント

まず、 $n=1$ を代入して、大小関係を推測してから、計算にとりかかりました。