1　　　　［広島大・理］

m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\}$，

$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\}$，$\{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$

の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である。

(4)　(3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。

$\boxed{2}$ ［名古屋大・理］

数直線上にある $1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ の 5 つの点と 1 つの石を考える。石がいずれかの点にあるとき,

$$\begin{cases}\text{石が点 } 1 \text{ にあるならば, 確率 } 1 \text{ で点 } 2 \text{ に移動する} \\ \text{石が点 } k\ (k=2,\ 3,\ 4) \text{ にあるならば, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k-1 \text{ に, 確率 } \dfrac{1}{2} \text{ で点 } k+1 \text{ に} \\ \text{移動する} \\ \text{石が点 } 5 \text{ にあるならば, 確率 } 1 \text{ で点 } 4 \text{ に移動する}\end{cases}$$

という試行を行う。石が点 1 にある状態から始め, この試行を繰り返す。また, 石が移動した先の点に印をつけていく(点 1 には初めから印がついているものとする)。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 試行を 6 回繰り返した後に, 石が点 k $(k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5)$ にある確率をそれぞれ求めよ。

(2) 試行を 6 回繰り返した後に, 5 つの点すべてに印がついている確率を求めよ。

(3) 試行を n 回 $(n \geqq 1)$ 繰り返した後に, ちょうど 3 つの点に印がついている確率を求めよ。

$\boxed{3}$ ［東京大・文］

投げたとき表と裏の出る確率がそれぞれ$\dfrac{1}{2}$のコインを 1 枚用意し，次のように左から順に文字を書く。

コインを投げ，表が出たときは文字列 AA を書き，裏が出たときは文字 B を書く。さらに繰り返しコインを投げ，同じ規則に従って, AA, B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。たとえば，コインを 5 回投げ，その結果が順に表，裏，裏，表，裏であったとすると，得られる文字列は，AABBAAB となる。このとき，左から 4 番目の文字は B，5 番目の文字は A である。

(1) n を正の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率を求めよ。

(2) n を 2 以上の整数とする。n 回コインを投げ，文字列を作るとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となる確率を求めよ。

4　　［京都大・理］

2 つの関数を，$f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。

1　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［広島大・理］

(1)　異なる m 種類の文字から 2 種類の文字を選ぶ方法は，${}_m\mathrm{C}_2=\dfrac{m(m-1)}{2}$ 通り。

そして，この文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，2^n 通り。この中で，2 種類の文字を含むのは, 1 種類が 2 通りあるので，2^n-2 通りである。

よって，求める場合は，$\dfrac{m(m-1)}{2}(2^n-2)=m(m-1)(2^{n-1}-1)$ 通りである。

(2)　3 種類の文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，3^n 通り。

この中で，1 種類となるのは 3 通り，2 種類となるのは ${}_3\mathrm{C}_2(2^n-2)=3(2^n-2)$ 通りなので, 3 種類の文字を含む方法は,

$$3^n-3-3(2^n-2)=3^n-3\cdot 2^n+3\ \text{（通り）}$$

(3)　(i)　n 人を 1 組にグループ分けするとき　明らかに 1 通り。

(ii)　n 人を 2 組にグループ分けするとき

2 組のグループを区別したとき，その分け方は, 2 種類の文字を 1 列に並べ，2 種類とも含む場合に一致するので，(1)から 2^n-2 通りとなる。これより，グループを区別しないときは，$\dfrac{2^n-2}{2!}=2^{n-1}-1$ 通りである。

(iii) n 人を 3 組にグループ分けするとき

3 組のグループを区別したとき，その分け方は, 3 種類の文字を 1 列に並べ，3 種類とも含む場合に一致するので, (2)から　$3^n-3\cdot 2^n+3$ 通りとなる。そして，グループを区別しないときは，$\dfrac{3^n-3\cdot 2^n+3}{3!}=\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$ 通りである。

(i)～(iii)より, n 人を最大 3 組までグループ分けする方法は,

$$1+(2^{n-1}-1)+\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}=\frac{3^{n-1}+1}{2}\ \text{（通り）}$$

すると，このときグループ数が 2 である確率 p_n は，$p_n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}+1}=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}$

(4)　$p_n\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}\leqq\dfrac{1}{3}$ となり，$3^{n-1}-3\cdot 2^n+7\geqq 0$ ………(＊)

ここで，$f(n)=3^{n-1}-3\cdot 2^n+7=3^{n-1}-6\cdot 2^{n-1}+7$ とおくと,

$$f(3)=-8<0,\ f(4)=-14<0,\ f(5)=-8<0,\ f(6)=58>0$$

さて，$n\geqq 6$ において，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\geqq\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}>6$ より，$f(n)>7>0$ である。

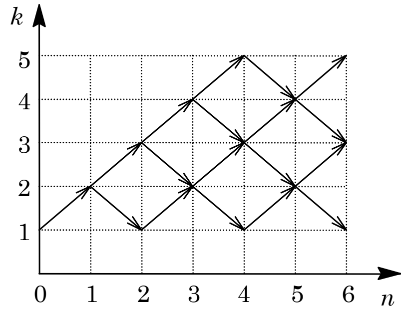
よって，(＊)が成り立つ n の値の範囲は，$n\geqq 6$ である。

［解　説］

ポイントは，(1)(2)が(3)の誘導となっていることです。樹形図で要確認。

$\boxed{2}$　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［名古屋大・理］

(1)　与えられた試行により，石が点 k にある確率を $P_n(k)$ とすると，初めは点 1 にあることより，右図より計算すると，



$P_1(1)=0$，$P_1(2)=1$，$P_1(3)=0$，

$P_1(4)=0$，$P_1(5)=0$

$P_2(1)=\dfrac{1}{2}$，$P_2(2)=0$，$P_2(3)=\dfrac{1}{2}$，

$P_2(4)=0$，$P_2(5)=0$

$P_3(1)=0$，$P_3(2)=\dfrac{3}{4}$，$P_3(3)=0$，$P_3(4)=\dfrac{1}{4}$，$P_3(5)=0$

$P_4(1)=\dfrac{3}{8}$，$P_4(2)=0$，$P_4(3)=\dfrac{1}{2}$，$P_4(4)=0$，$P_4(5)=\dfrac{1}{8}$

$P_5(1)=0$，$P_5(2)=\dfrac{5}{8}$，$P_5(3)=0$，$P_5(4)=\dfrac{3}{8}$，$P_5(5)=0$

$P_6(1)=\dfrac{5}{16}$，$P_6(2)=0$，$P_6(3)=\dfrac{1}{2}$，$P_6(4)=0$，$P_6(5)=\dfrac{3}{16}$

(2)　試行を 6 回繰り返した後に，5 つの点にすべてに印がついているのは，

(i)　4 回目に 5 のとき　5 回目以降は任意なので，その確率は $P_4(5)\cdot 1=\dfrac{1}{8}$ となる。

(ii)　4 回目に 3 のとき　5 回目に 4 で，6 回目に 5 のときだけなので，その確率は $P_4(3)\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{8}$ となる。

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{8}=\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　まず，試行を n 回繰り返した後に，印が 3 つの点についているとき，点 1 と 2 は必ず印がつくことより，印のつく 3 つの点は 1 と 2 と 3 である。言い換えると，点 3 に少なくとも 1 回印がつき，点 4 と 5 には印がつかない場合となる。

さて，点 2→点 3→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{4}$，点 2→点 1→点 2 となる確率は $\dfrac{1}{2}\cdot 1=\dfrac{1}{2}$ である。これより，点 1 と 2 と 3 に印がつく確率は，l を自然数として，

(i)　n が奇数 $(n=2l+1)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^l-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n-1}{2}}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n-1}{2}}$

なお，$n=1$ のときも成立している。

(ii)　n が偶数 $(n=2l)$ のとき　$\left(\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{2}\right)^{l-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^l=\left(\dfrac{3}{4}\right)^{\frac{n}{2}-1}-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{\frac{n}{2}}$

［解　説］

頻出のランダムウォークが題材になっている確率の問題です。具体的な(1)を誘導として考えていくタイプです。

3　　［東京大・文］

(1)　まず，文字列 AA について，左右を区別し A_1A_2 とする。

さて，表と裏の出る確率がそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ のコインを投げ，表が出たときは文字列 A_1A_2，裏が出たときは文字 B をすでにある文字列の右側につなげて書いていく。そして，n 回コインを投げ，文字列の左から n 番目の文字が A_1，A_2，B である確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおく。すると，$p_1 = r_1 = \dfrac{1}{2}$，$q_1 = 0$ で，

$$p_{n+1} = \frac{1}{2}q_n + \frac{1}{2}r_n \cdots\cdots\cdots ①,\quad q_{n+1} = p_n \cdots\cdots\cdots ②$$

①より，$p_{n+1} = \dfrac{1}{2}(q_n + r_n) = \dfrac{1}{2}(1 - p_n) = -\dfrac{1}{2}p_n + \dfrac{1}{2}$ となり，

$$p_{n+1} - \frac{1}{3} = -\frac{1}{2}\left(p_n - \frac{1}{3}\right),\quad p_n - \frac{1}{3} = \left(p_1 - \frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

よって，$p_n = \dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{6}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$ となり，②より，$n \geqq 2$ において，

$$q_n = p_{n-1} = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2} = \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

なお，この式は，$n = 1$ のときも満たしている。

以上より，文字列の左から n 番目の文字が A となる確率 $p_n + q_n$ は，

$$p_n + q_n = \frac{1}{3} + \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} - \frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \frac{2}{3} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

(2)　$n \geqq 2$ のとき，文字列の左から $n-1$ 番目の文字が A で，かつ n 番目の文字が B となるのは，文字列が A_2B となる場合より，その確率は，

$$q_{n-1} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{2}\left\{\frac{1}{3} - \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-2}\right\} = \frac{1}{6} + \frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

［解　説］

直接的に求めるのは難しそうだったので，漸化式を立てました。そして，いったん AA の文字列について左側と右側を区別し，3 つの状態に分けて考えたわけです。

4　　　　　　　　［京都大・理］

まず，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2}$ または $x_n=\dfrac{x_{n-1}+1}{2}$ から，帰納的に $0<x_n<1$ である。

そこで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となる確率を Q_n とおくと，条件より $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率が P_n より，$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率は P_n-Q_n，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となる確率は $1-P_n$ である。

さて，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となるのは，$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ のときより，

$$Q_n=\frac{1}{2}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1}),\ Q_n=\frac{1}{2}P_{n-1}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となるのは，$\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ または $\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ のときより，

$$1-P_n=\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1})+\frac{1}{2}(1-P_{n-1}),\ Q_{n-1}=-1+2P_n\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-1+2P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n-1}$，$P_{n+1}=\dfrac{1}{4}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$$P_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_1=f_0(x_0)=\dfrac{1}{4}$ または $x_1=f_1(x_0)=\dfrac{3}{4}$ から，$P_0=1$，$P_1=\dfrac{1}{2}$

(i)　$n=2k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k}-\dfrac{2}{3}=\left(P_0-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii)　$n=2k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k+1}-\dfrac{2}{3}=\left(P_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+1}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

［解　説］

与えられた関数は，数直線上で，点 x と原点との中点または点 x と点 1 との中点を出力するという意味をもちます。このことに着目して，初めは樹形図を書いたり，さらに 2^n を 3 で割った余りを考えたりして，大雑把に結論は出ました。ただ，突っ込みどころが多すぎたため，考えを改め，状態を 3 つに分けて確率漸化式の出番となったわけです。