《2018 入試対策》

千葉大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された千葉大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分　野　別　問　題　一　覧

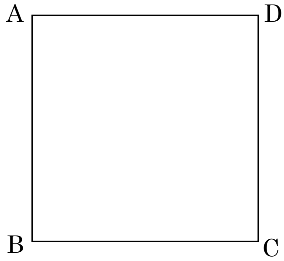
関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　右図のような 1 辺の長さ10cmの正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm 進む。また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒2cm 進む。点 R が A に達するまでに△PQR の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。　[2014]



2　a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

3　a を実数とする。x についての方程式 $|x^2+ax+2a|=a+1$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつような a の値の範囲を求めよ。　[2007]

4　実数 a に対し，2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通り，$1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

5　2 次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について以下の問いに答えよ。ただし，$a<0$ とする。

(1)　$f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき，$a=b$ になることを示せ。

(2)　(1)の関数が，さらに次の(i), (ii)を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

　(i)　曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=x$ と接する。

　(ii)　曲線 $y=f(x)$ と 3 直線 $y=0$，$x=-1$，$x=0$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{5}{6}$ である。　[2000]

■ 微分と積分

1　座標平面上の点$(a,\ b)$から曲線$y=x^3-3x$に引ける接線の本数をnとする。
(1)　$n=3$を満たすような点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。
(2)　$-3a<b$かつ$n\leqq 2$を満たすように点$(a,\ b)$が動くとき，$b-3a$の最小値を求めよ。　[2017]

2　aは$0<a<2$を満たす定数とする。$0\leqq t\leqq 1$を満たす実数tに対して，座標平面上の 4 点$\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ t^2)$，$\mathrm{C}(2-t,\ 2)$，$\mathrm{D}(0,\ 2-at)$を考える。このとき，四角形 ABCD の面積$S(t)$が最小となるようなtの値を求めよ。　[2016]

3　mを実数とする。xに関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$の実数解の個数を求めよ。　[2015]

4　実数aに対し，関数$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|\,dt+a$を考える。曲線$C: y=f(x)$が$x$軸と 2 点の共有点をもつための$a$の範囲を求めよ。またこのとき曲線$C$と$x$軸で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2014]

5　aとkを正の実数とする。$y=\dfrac{a}{2}x^2$のグラフを平行移動して得られる放物線C_1と$y=-\dfrac{2}{a}x^2$のグラフを平行移動して得られる放物線C_2が，ともに原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$で直線$y=kx$に接するものとする。原点 O を通り，直線$y=kx$に垂直な直線をlとする。放物線C_1と直線lによって囲まれる図形の面積をS_1，放物線C_2と直線lによって囲まれる図形の面積をS_2とおき，$S=S_1+S_2$とする。次の問いに答えよ。
(1)　Sをaとkを用いて表せ。
(2)　$k=\sqrt{2}-1$とする。Sを最小にするaの値と，そのときのSの値を求めよ。
[2009]

6　2 次関数$f(x)$は，$xf(x)=\dfrac{2}{3}x^3+(x^2+x)\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$を満たすとする。
(1)　$f(x)$を求めよ。
(2)　関数$xf(x)$の$x\geqq 0$における最小値を求めよ。　[2008]

7 関数 $f(x)$ を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases} x & (x \leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) $y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。 [2006]

8 a は実数とする。2 つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。 [2005]

9 3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点 $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{8}\right)$ で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) b, c を a を用いて表せ。

(2) $f(x)-g(x)$ の $0 \leqq x \leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。 [2004]

10 実数 t に対して，$f(t)$ を $f(t)=\int_0^1 |x^2-tx|\,dx$ と定める。$0 \leqq t \leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2002]

11 実数 a に対して，$f(x)=ax^2-2ax+a^2+1$ とおく。

(1) 定積分 $I(a)=\int_1^2 f(x)\,dx$ を a を用いて表せ。

(2) $f(x)$ が条件 $f(1) \leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3) a が(2)の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2001]

12 a, b を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，a, b の値を求めよ。 [2001]

13　三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D があり，$\angle \mathrm{BAD} = \angle \mathrm{CAD} = 30^\circ$ である。$\mathrm{AB} = p$，$\mathrm{AC} = q$ とおく。

(1)　AD の長さを p, q で表せ。

(2)　$p + q = 1$ を満たすとき，△ABD の面積と△ACD の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。　[2000]

14　与えられた実数 $a,\ b$ のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x) = x^3 - 7x$ に対して $g(x) = \min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1)　$0 \leqq x \leqq 3$ のとき，$y = g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのグラフ $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　座標平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ がある。点 E と点 $\mathrm{P}_1(s,\ 1)\ (0 < s < 1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y = 1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x = 1$ の交点を P_2 とする。さらに，直線 $x = 1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を P_3 とする。

(1)　直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2)　線分 DP_3 の長さを s を用いて表せ。

(3)　$\mathrm{EP}_1 + \mathrm{P}_1\mathrm{P}_2 + \mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の最大値と最小値を求めよ。　[2016]

2　座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点 $(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}\right)$ における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にする θ を求めよ。　[2014]

3　$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{a^2}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{b^2}{4}\right)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1)　b を a を用いて表せ。

(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

4　放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

5　a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

[2011]

6　放物線 $C: y=x^2$ 上の 2 点 A, B は，直線 AB と C で囲まれる図形の面積が $\dfrac{1}{6}$ になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき，直線 AB が通りうる点の範囲を求め，図示せよ。　[2003]

7　座標平面上に，中心がそれぞれ点$(0,\ 1)$，点$(2,\ 1)$で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円C_1とC_2がある。次の問いに答えよ。

(1)　2 円C_1，C_2と x 軸に接するように円C_3を描く。このとき円C_3の中心の座標を求めよ。

(2)　さらに，2 円C_1，C_3とx軸に接するように円C_2とは異なる円C_4を描く。このとき円C_4の中心の座標を求めよ。　[2002]

8　直線$y=-x$と放物線$y=x^2+2x$とで囲まれた図形をDとする。

(1)　Dの面積S_1を求めよ。

(2)　Dをx軸の正の方向に m だけ平行移動して，不等式$y \geqq -2x+3$の表す領域に含まれるように移す。mの最小値m_1を求めよ。

(3)　m_1を(2)で求めた最小値とする。D を x 軸の正の方向にm_1だけ平行移動するとき, Dが通過する範囲を図示し，その面積S_2を求めよ。　[1999]

■ 図形と計量

1　座標平面上に 3 点$\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ \sqrt{3})$，$\mathrm{B}(9,\ 0)$がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を$\angle \mathrm{PAQ}=90^\circ$となるようにとる。ただし，点 Q の$x$座標は点 P の$x$座標より大きいものとする。$\angle \mathrm{APQ}=\theta$とし，$\triangle \mathrm{APQ}$の面積を$S$とする。

(1)　Sをθを用いて表せ。

(2)　Sの最小値，およびそのときの点 P と点 Q のx座標を求めよ。

(3)　Sが$\triangle \mathrm{AOB}$の面積の$\dfrac{2}{3}$倍となるとき，点 P と点 Q のx座標を求めよ。　[2017]

2　1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を$1:2$に内分する点を D, CA を$1:2$に内分する点を E, AB を$1:2$に内分する点を F とし，さらに BE と CF の交点を P, CF と AD の交点を Q, AD と BE の交点を R とする。このとき，$\triangle \mathrm{PQR}$の面積を求めよ。　[2015]

3　1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を$1:2$に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1)　AD の長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3)　$\triangle\mathrm{ADE}$ の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

4　三角形 ABC の面積は$\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle\mathrm{BAC}=60^\circ$，$\mathrm{AB}>\mathrm{AC}$ である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。　[2011]

5　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは$\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。　[2010]

6　$\triangle\mathrm{ABC}$ は$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$の二等辺三角形とする。$\angle\mathrm{A}$，$\angle\mathrm{B}$ の大きさをそれぞれ A, B とおく。$A=30^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1)　頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし，H は辺 BC 上の点である。このとき$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$の値を求めよ。

(2)　$\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。　[2009]

7　$\triangle\mathrm{ABC}$ において，$\mathrm{AB}=5$，$\mathrm{BC}=5\sin A$，$\mathrm{CA}=3$ であるとする。

(1)　辺 BC の長さを求めよ。

(2)　$\triangle\mathrm{ABC}$ の内接円の半径を求めよ。　[2006]

8　1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし，AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1)　AD の長さが$\dfrac{3}{4}$であるとき，r の値を求めよ。

(2)　AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3)　$\angle\mathrm{DME}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。　[2004]

■ ベクトル

1　n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1)　$\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2)　t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3)　不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

2　座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$，$\overrightarrow{OD}=\vec{d}$ とおく。k は $0\leqq k\leqq 1$ を満たす定数とする。0 以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{OP}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1)　$E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

3　三角形 ABC の外心を O，重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{OG}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{OG}=k\overrightarrow{OA}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

4　平面上の△ABC において，辺 AB を $4:3$ に内分する点を D，辺 BC を $1:2$ に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$ とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AO}}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$ で表せ。

(2)　点 O が△ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。　[2008]

5　平面上で $\mathrm{AB}=3$ となる 2 点 A，B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし，点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C，D は円 S 上を動き，2 点 E，F は円 T 上を動く。ただし，線分 CD は点 A を通り，線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{\mathrm{CE}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DF}}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

6　xyz 空間内に点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。　[2004]

7　R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき，R の面積を求めよ。　[2003]

8　三辺の長さが $\mathrm{OA}=2$，$\mathrm{OB}=3$，$\mathrm{AB}=\sqrt{7}$ の三角形 OAB がある。OA の中点を M とし，B を始点とする半直線 BM 上に $\mathrm{BP}=t\mathrm{BM}$ となる点 P をとり，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(3)　$\mathrm{AP}\perp\mathrm{BM}$ となるとき t の値を求めよ。　[1999]

9 空間に，同一直線上にない 3 点 O, A, B と 1 点 P がある。O, A, B を通る平面を α とし，点 P は α 上にないとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$，$\vec{p}\cdot\vec{a}=2$，$\vec{p}\cdot\vec{b}=-2$ とする。

(1) $\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}$ が平面 α に垂直になるように実数 s, t を定めよ。

(2) 平面 α に関して点 P と対称な点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{p}$ を用いて表せ。

(3) 三角形 OPQ の面積が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\vec{p}$ の大きさ $|\vec{p}|$ を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1 k, m, n を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1) 2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2) $4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。 [2015]

2 整数 p，q $(p\geqq q\geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q=\dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0!=1$ とする。

(1) n，k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1}\times\left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k}-\dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3}+\dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3}+\cdots+\dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。 [2013]

3 p, q を互いに素な 2 以上の整数，m, n は $m<n$ なる正の整数とする。このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。 [2012]

4 　1 より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列$\{a_n\}$を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n\geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{Q}_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　[2012]

5 　放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

とし，D の面積が $\dfrac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　$a,\ b$ がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，$a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

6 　以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば，x は整数であることを示せ。

(2)　$a,\ b$ を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば，a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数，s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば，s は整数であることを示せ。　[2008]

7 　n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。　[2007]

8　数列$\{a_n\}$において，$a_1=2$，$a_2=4$である。$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおくとき，$\{b_n\}$は正の公比をもつ等比数列とする。

(1)　$\dfrac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}$を，$b_n$，$b_{n+1}$を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=-1456$が成り立つとき

(i)　一般項b_nを求めよ。

(ii)　一般項a_nを求めよ。　[2005]

9　数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$で定める。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$を求めよ。　[2003]

10　以下の問いに答えよ。

(1)　nを自然数とする。このとき，n^2を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。

(2)　3 つの自然数a, b, cが，$a^2+b^2=c^2$を満たしている。このとき, a, bの少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。　[2001]

11　数列$\{a_n\}$は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$a_1=\dfrac{1}{2}$　　　(ii)　$n\geqq 2$について，$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$である。

(1)　a_2を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$に対して，S_nをS_{n-1}で表せ。

(3)　S_nを求めよ。

(4)　$n\geqq 2$に対して，a_nを求めよ。　[2000]

12　$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_n={S_n}^2-{S_{n-1}}^2$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$で与えられる数列$\{a_n\}$がある。ただし，S_nは$\{a_n\}$の初項から第n項までの和である。

(1)　a_2を求めよ。

(2)　S_nを求めよ。

(3)　a_nを求めよ。　[1999]

13 座標平面において，2 点 P，Q をそれぞれ直線 $x=-1$，$x=2$ 上の点とし，直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき，2 点 P，Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。 [1998]

■ 確率

1 1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。
- 1 回目は，出た目が得点になる。
- 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。
- 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。 [2017]

2 1 個のさいころを 2 回投げ，最初に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2-ax+b=0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2) 実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。

(3) 実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。 [2016]

3 さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回においては 6 の目が偶数回出て，しかも最後の 2 回においては 6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めよ。ただし，6 の目が一度も出ない場合も 6 の目が出る回数を偶数回とみなす。 [2015]

4　A, B ふたりは，それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

・初めに A, B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。
・A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。
・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。
・A, B どちらかが 2 回勝てば，カードの取り出しはやめて，2 回勝った方をゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
(2)　A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。
(3)　A がゲームの勝者になる確率を求めよ。　[2014]

5　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。これらを無作為に 1 列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。
(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。
(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号 1 のカードと番号 2 のカードは隣り合わない。
(B)　番号 8 のカードと番号 9 のカードの間には，ちょうど 1 枚のカードがある。

[2013]

6　さいころを 7 回投げ，k 回目 $(1 \leqq k \leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。
(2)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。
(3)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。
(4)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

7　1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1，2 回目に出る目を a_2，3 回目に出る目を a_3 とし，整数 n を，$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定める。

(1)　$n=0$ である確率を求めよ。

(2)　$|n|=30$ である確率を求めよ。　[2011]

8　1 辺の長さが 2 の正六角形 $\mathrm{A_1A_2A_3A_4A_5A_6}$ を考える。さいころを 3 回投げ，出た目を順に $i,\ j,\ k$ とするとき，$\triangle \mathrm{A}_i\mathrm{A}_j\mathrm{A}_k$ の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし，i, j, k の中に互いに等しい数があるときは，得点は 0 であるとする。

(1)　得点が 0 となる確率を求めよ。

(2)　得点が 27 となる確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2010]

9　1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が 6 の倍数になる確率を求めよ。　[2009]

10　n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ，1 回目に出た目の数を x，2 回目に出た目の数を y とする。$|x-n|+|y-n|\leqq n$ となる確率を P_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　P_n が最大となる n を求め，そのときの P_n を求めよ。

(3)　$P_n=\dfrac{1}{36}$ となる n を求めよ。　[2008]

11　1 から 5 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 2 枚ずつ，合わせて 10 枚ある。この中からカードを 2 枚同時に取り出し，その数字を $X,\ Y$ とする。ただし，$X\leqq Y$ とする。

(1)　$X=Y$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=3$ となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。　[2005]

12　n 枚のカードの表に 1，2，…，n の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に 1，2，…，n の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

(1)　p_3 を求めよ。

(2)　$n=4$ のとき，表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。

(3)　p_5 を求めよ。　[2003]

13　次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。　[2002]

■ 論証

1　n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

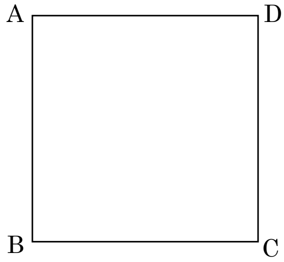
関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

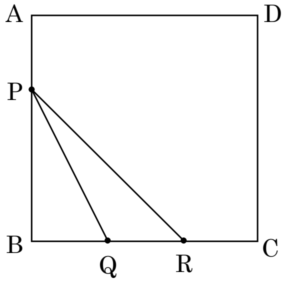
右図のような 1 辺の長さ10cmの正方形 ABCD がある。点 P および点 Q は時刻 0 に A および B をそれぞれ出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒1cm進む。また，点 R は時刻 0 に B を出発し，正方形 ABCD の周上を反時計回りに毎秒2cm進む。点 R が A に達するまでに△PQR の面積が 35cm^2 となる時刻をすべて求めよ。　　　　[2014]



解答例

点 R が C, D, A に達するのは，それぞれ 5 秒後，10 秒後，15 秒後である。そして，出発してから t 秒後の△PQR の面積を S とし，$S=35$ となる t を求める。

(i)　$0\leqq t\leqq 5$ のとき

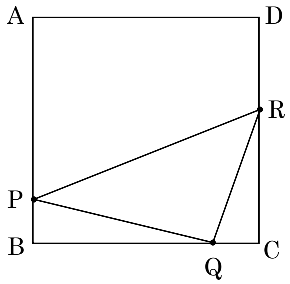


PB $=10-t$，QR $=2t-t=t$ より，

$$S=\frac{1}{2}t(10-t)=-\frac{1}{2}(t-5)^2+\frac{25}{2}$$

$S\leqq\dfrac{25}{2}$ より，$S=35$ となる場合はない。

(ii)　$5\leqq t\leqq 10$ のとき

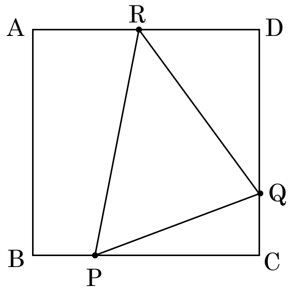


PB $=$ QC $=10-t$，BQ $=t$，CR $=2t-10$ より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-10+10-t)\cdot 10-\frac{1}{2}(10-t)(t+2t-10)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-15t+50$$

ここで，$S=35$ とすると，$t^2-10t+10=0$ となり，$5\leqq t\leqq 10$ から，$t=5+\sqrt{15}$

(iii) $10\leqq t\leqq 15$ のとき



PC $=$ QD $=20-t$，CQ $=t-10$，DR $=2t-20$ より，

$$S=\frac{1}{2}(2t-20+20-t)\cdot 10$$
$$-\frac{1}{2}(20-t)(t-10+2t-20)$$
$$=\frac{3}{2}t^2-40t+300$$

ここで，$S=35$ とすると，$3t^2-80t+530=0$ となり，$10\leqq t\leqq 15$ から，$t=\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$

(i)～(iii)より，$t=5+\sqrt{15}$，$\dfrac{40\pm\sqrt{10}}{3}$ である。

コメント

高校入試に出題されるようなタイプです。場合分けも難しくありません。

問　題

a を実数とする。関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ の最小値を a を用いて表せ。

[2010]

解答例

関数 $f(x)=x^2-a|x-2|+\dfrac{a^2}{4}$ に対して,

$$f(x)=x^2-a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x-\frac{a}{2}\right)^2+2a\quad(x\geqq 2)$$

$$f(x)=x^2+a(x-2)+\frac{a^2}{4}=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-2a\quad(x\leqq 2)$$

(i)　$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(a\geqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(\dfrac{a}{2}\right)=2a$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり，$2a>-2a$ から，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(ii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ $(a\leqq -4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ となり，$f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$ である。

(iii)　$\dfrac{a}{2}\leqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\leqq 2$ $(-4\leqq a\leqq 4)$ のとき

$x\geqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f(2)=4+\dfrac{a^2}{4}$，$x\leqq 2$ における $f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ となり,

$$4+\frac{a^2}{4}-(-2a)=\frac{1}{4}(a+4)^2\geqq 0,\ 4+\frac{a^2}{4}\geqq -2a$$

よって，$f(x)$ の最小値は $f\left(-\dfrac{a}{2}\right)=-2a$ である。

(i)〜(iii)より，$f(x)$ の最小値は，$a\leqq -4$ のとき $4+\dfrac{a^2}{4}$，$a\geqq -4$ のとき $-2a$ である。

コメント

放物線の軸 $x=\dfrac{a}{2}$ が $x\geqq 2$ の範囲に入っているかどうか，また $x=-\dfrac{a}{2}$ が $x\leqq 2$ の範囲に入っているかどうかで場合分けをしています。なお，$\dfrac{a}{2}\geqq 2$ かつ $-\dfrac{a}{2}\geqq 2$ のときは, a の値が存在しないので，記述を省きました。

問　題

　a を実数とする。x についての方程式$|x^2+ax+2a|=a+1$が異なる実数解をちょうど2個もつようなaの値の範囲を求めよ。　[2007]

解答例

$|x^2+ax+2a|=a+1$に対して，$\left|\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+2a\right|=a+1$ ………(＊)

(i)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a\geqq 0$ $(0\leqq a\leqq 8)$のとき

(＊)が異なる実数解を2個もつ条件は，$a+1>-\dfrac{a^2}{4}+2a$

$a^2-4a+4>0$，$(a-2)^2>0$，$a\neq 2$

よって，$0\leqq a<2$，$2<a\leqq 8$

(ii)　$-\dfrac{a^2}{4}+2a<0$ $(a<0,\ 8<a)$のとき

(＊)が異なる実数解を2個もつ条件は，$a+1=0$または$a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$

(ii-i)　$a+1=0$のとき　$a=-1$

(ii-ii)　$a+1>-\left(-\dfrac{a^2}{4}+2a\right)$のとき

$a^2-12a-4<0$，$6-2\sqrt{10}<a<6+2\sqrt{10}$

よって，$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<0$，$8<a<6+2\sqrt{10}$

(i)(ii)より, (＊)が異なる実数解を2個もつ条件は,

$a=-1$，$6-2\sqrt{10}<a<2$，$2<a<6+2\sqrt{10}$

コメント

　グラフをイメージしながら解いています。x 軸に関して折り返しのない場合が(i), ある場合が(ii)です。

問　題

実数 a に対し，2 次関数 $f(x)=x^2-ax-a^2+5a$ を考える。

(1)　方程式 $f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次関数 $y=f(x)$ のグラフが 2 点 $(\alpha,\ 0)$，$(\beta,\ 0)$ を通り，$1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ となるような a の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=0$ すなわち $x^2-ax-a^2+5a=0$ が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，

$$D=a^2-4(-a^2+5a)>0$$

まとめると，$5a(a-4)>0$ より，$a<0$，$4<a$

(2)　$y=f(x)$ のグラフと x 軸の交点 $x=\alpha,\ \beta$ が $1\leqq\alpha<\beta\leqq 3$ を満たす条件は，まず(1)から，$a<0$，$4<a$ ………①

また，$y=f(x)$ のグラフの軸が $x=\dfrac{a}{2}$ なので，$1<\dfrac{a}{2}<3$ より，

$$2<a<6 \text{ ………②}$$

さらに，$f(1)=1-a-a^2+5a\geqq 0$ より，$a^2-4a-1\leqq 0$

$$2-\sqrt{5}\leqq a\leqq 2+\sqrt{5} \text{ ………③}$$

$f(3)=9-3a-a^2+5a\geqq 0$ より，$a^2-2a-9\leqq 0$

$$1-\sqrt{10}\leqq a\leqq 1+\sqrt{10} \text{ ………④}$$

①～④の共通範囲をとって，$4<a\leqq 1+\sqrt{10}$

コメント

解の配置の基本問題です。共通範囲をとるところでミスをしないようにしましょう。

問　題

2次関数 $f(x)=ax^2+bx+c$ について以下の問いに答えよ。ただし，$a<0$ とする。

(1) $f(x)$ を x で割った余りと $x+1$ で割った余りとが一致しているとする。このとき，$a=b$ になることを示せ。

(2) (1)の関数が，さらに次の(i), (ii)を満たすとき，$f(x)$ を求めよ。

(i) 曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=x$ と接する。

(ii) 曲線 $y=f(x)$ と 3 直線 $y=0$，$x=-1$，$x=0$ で囲まれた部分の面積は $\dfrac{5}{6}$ である。 [2000]

解答例

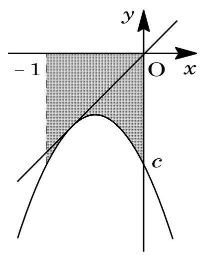
(1) 剰余の定理を利用して，$f(0)=f(-1)$，$c=a-b+c$ から，$a=b$

(2) (1)より，$f(x)=ax^2+ax+c$

ここで，条件(i)より，$y=f(x)$ と $y=x$ と接するので，

$$ax^2+ax+c=x,\ ax^2+(a-1)x+c=0$$

$$D=(a-1)^2-4ac=0 \cdots\cdots\cdots ①$$



条件(ii)より，$-\displaystyle\int_{-1}^{0}(ax^2+ax+c)\,dx=\frac{5}{6}$

$$-\left[\frac{a}{3}x^3+\frac{a}{2}x^2+cx\right]_{-1}^{0}=\frac{5}{6}$$

$$-\frac{a}{3}+\frac{a}{2}-c=\frac{5}{6},\ c=\frac{a}{6}-\frac{5}{6} \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$(a-1)^2-4a\left(\dfrac{a}{6}-\dfrac{5}{6}\right)=0$，$a^2+4a+3=0$ から，$a=-1,\ -3$

$a=-1$ のとき，②より $c=-1$ となり，$f(x)=-x^2-x-1$

$a=-3$ のとき，②より $c=-\dfrac{4}{3}$ となり，$f(x)=-3x^2-3x-\dfrac{4}{3}$

コメント

(1)の条件から，$y=f(x)$ の軸が $x=-\dfrac{1}{2}$ であることを見抜けば，場合分けなしに $f(x)$ が決定できます。

問　題

座標平面上の点$(a,\ b)$から曲線$y=x^3-3x$に引ける接線の本数をnとする。

(1)　$n=3$を満たすような点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。

(2)　$-3a<b$かつ$n\leqq 2$を満たすように点$(a,\ b)$が動くとき，$b-3a$の最小値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　曲線$y=x^3-3x$に対して，$y'=3x^2-3$となり，点$(t,\ t^3-3t)$における接線は，

$$y-(t^3-3t)=(3t^2-3)(x-t),\ \ y=(3t^2-3)x-2t^3$$

この接線が点$(a,\ b)$を通ることより，$b=(3t^2-3)a-2t^3$となり，

$$-2t^3+3at^2-3a=b\ \cdots\cdots\cdots①$$

接線が 3 本引ける条件は，複接線が存在しないことより，接点が 3 個すなわち①の異なる実数解が 3 個ある条件に等しい。

そこで，$f(t)=-2t^3+3at^2-3a$とおくと，①は$f(t)=b$となり，

$$f'(t)=-6t^2+6at=-6t(t-a)$$

(i)　$a>0$のとき

$f(t)$の増減は右表のようになり，①が 3 個の実数解をもつ条件は，

$$-3a<b<a^3-3a$$

t	$\cdots$	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-3a$	$\nearrow$	a^3-3a	$\searrow$

(ii)　$a=0$のとき

$f'(t)=-6t^2\leqq 0$となり，$f(t)$は単調減少するので，①が 3 個の異なる実数解をもつことはない。

(iii)　$a<0$のとき

$f(t)$の増減は右表のようになり，①が 3 個の実数解をもつ条件は，

$$a^3-3a<b<-3a$$

t	$\cdots$	a	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	a^3-3a	$\nearrow$	$-3a$	$\searrow$

(i)～(iii)より，点$(a,\ b)$の範囲を図示する。

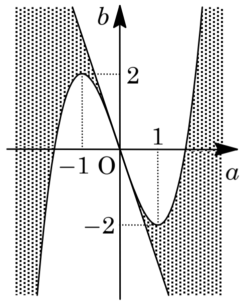
そこで，境界線$b=a^3-3a$に対して，

$$b'=3a^2-3=3(a+1)(a-1)$$

すると，bの値の変化は右表のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
b'	$+$	0	$-$	0	$+$
b	$\nearrow$	2	$\searrow$	-2	$\nearrow$

以上より，点$(a,\ b)$の範囲は右図の網点部となる。ただし，境界線は含まない。



(2)　まず，$-3a<b$のもとで，接線の本数が 2 本以下，すなわち①の異なる実数解が 2 個以下となる$(a,\ b)$の条件を求める。

(i)　$a>0$のとき

$-3a<b$なので, ①の実数解が 2 個以下となる条件は,

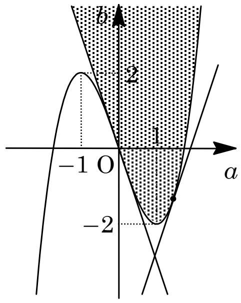
$$b \geqq a^3-3a$$

(ii)　$a=0$のとき

つねに①の実数解は 1 個となるので，$-3a<b$から,

$$b>0$$

(iii)　$a<0$のとき



$-3a<b$のとき, ①の実数解は 1 個なので,

$$b>-3a$$

(i)～(iii)より，点$(a,\ b)$の範囲は右図の網点部となる。

ただし，境界線は$a>0$の部分のみを含む。

さて，このとき$b-3a=k\ (b=3a+k)$が最小となるのは，右図から，曲線$b=a^3-3a$が傾き 3 の接線をもつときなので，$b'=3a^2-3=3$から，$a=\sqrt{2}$となる。

すると，$b=2\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-\sqrt{2}$から，接点の座標は$(\sqrt{2},\ -\sqrt{2})$となる。

以上より，$b-3a=k$の最小値は，$-\sqrt{2}-3\sqrt{2}=-4\sqrt{2}$である。

コメント

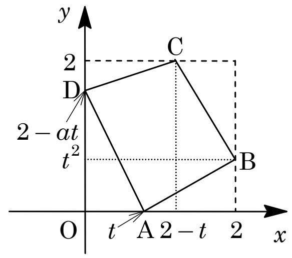
超頻出の 3 次曲線の接線の本数の問題に，領域と最大・最小の問題が付け加えられています。なお，(1)の結果を補集合として利用すると，(2)の記述量はやや減少します。

問　題

a は $0<a<2$ を満たす定数とする。$0 \leqq t \leqq 1$ を満たす実数 t に対して，座標平面上の 4 点 $A(t,\ 0)$，$B(2,\ t^2)$，$C(2-t,\ 2)$，$D(0,\ 2-at)$ を考える。このとき，四角形 ABCD の面積 $S(t)$ が最小となるような t の値を求めよ。　[2016]

解答例

定数 $a(0<a<2)$，および実数 $t(0 \leqq t \leqq 1)$ に対して，4 点 $A(t,\ 0)$，$B(2,\ t^2)$，$C(2-t,\ 2)$，$D(0,\ 2-at)$ を頂点とする四角形 ABCD の面積を $S(t)$ とおく。



$$S(t)=2^2-\frac{1}{2}(2-t)t^2-\frac{1}{2}(2-2+t)(2-t^2)$$
$$-\frac{1}{2}(2-t)(2-2+at)-\frac{1}{2}t(2-at)$$
$$=4-\frac{1}{2}\{-2t^3-2(a-1)t^2+2(a+2)t\}$$
$$=t^3+(a-1)t^2-(a+2)t+4$$

すると，$S'(t)=3t^2+2(a-1)t-(a+2)$ となり，$S'(t)=0$ を満たす正の解は，$S'(0)=-(a+2)<0$ から $t=\dfrac{-a+1+\sqrt{a^2+a+7}}{3}$ であり，これを $t=\alpha$ とおく。

(i)　$0<\alpha<1$ のとき

このとき $S'(1)=a-1>0$ より，$1<a<2$ となる。そして，$0 \leqq t \leqq 1$ における $S(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\alpha$ で最小となる。

t	0	$\cdots$	α	$\cdots$	1
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(ii)　$\alpha \geqq 1$ のとき

このとき $S'(1)=a-1 \leqq 0$ より，$0<a \leqq 1$ となる。そして，$0 \leqq t \leqq 1$ において $S'(t) \leqq 0$ から $S(t)$ は単調に減少し，$t=1$ で最小となる。

(i)(ii)より，$S(t)$ が最小となるような t の値は，

$$t=\frac{-a+1+\sqrt{a^2+a+7}}{3}\ (1<a<2),\quad t=1\ (0<a \leqq 1)$$

コメント

微分と最大・最小に関する標準的な問題です。なお，$S(t)$ の立式については，位置関係に場合分けが生じないので，普通に正方形から 4 つの直角三角形を除きました。

問　題

m を実数とする。x に関する方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ の実数解の個数を求めよ。

[2015]

解答例

方程式 $x^3-3x-|x-m|=0$ ……①に対して，$x^3-3x=|x-m|$ から，

$$y=x^3-3x\ \cdots\cdots\cdots ②,\quad y=|x-m|\ \cdots\cdots\cdots ③$$

すると，①の異なる実数解の個数は，②と③のグラフの共有点の個数に一致する。

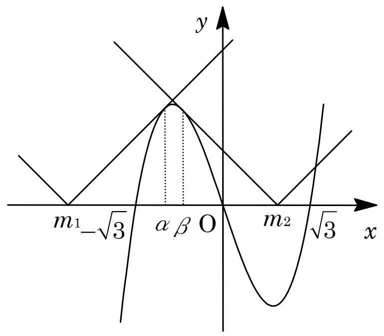
さて，②より，$y'=3x^2-3=3(x+1)(x-1)$

これより，②の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	↗	2	↘	-2	↗

また，③は $y\geqq 0$ で，点 $(m,\ 0)$ を頂点とする折れ線で，その傾きは 1 と -1 である。

ここで，点 $(\alpha,\ \alpha^3-3\alpha)$ において，②のグラフの接線の傾きが 1 になるとすると，$\alpha<0$ として，



$$3\alpha^2-3=1,\ \alpha^2=\frac{4}{3},\ \alpha=-\frac{2}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

すると，$\alpha^3-3\alpha=\dfrac{10}{3\sqrt{3}}=\dfrac{10}{9}\sqrt{3}$ となり，

$$\alpha^3-3\alpha=\alpha-m_1$$

よって，$m_1=-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}-\dfrac{10}{9}\sqrt{3}=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$

また，点 $(\beta,\ \beta^3-3\beta)$ において，②のグラフの接線の傾きが -1 になるとすると，$\beta<0$ として，

$$3\beta^2-3=-1,\ \beta^2=\frac{2}{3},\ \beta=-\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}=-\frac{\sqrt{6}}{3}$$

すると，$\beta^3-3\beta=\dfrac{7\sqrt{2}}{3\sqrt{3}}=\dfrac{7}{9}\sqrt{6}$ となり，$\beta^3-3\beta=-\beta+m_2$

よって，$m_2=-\dfrac{\sqrt{6}}{3}+\dfrac{7}{9}\sqrt{6}=\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$

以上より，②と③のグラフの共有点の個数，すなわち方程式①の異なる実数解の個数は，右上図から，

$m<-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$，$\dfrac{4}{9}\sqrt{6}<m$ のとき 1 個，$m=-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}$，$\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 2 個

$-\dfrac{16}{9}\sqrt{3}<m<\dfrac{4}{9}\sqrt{6}$ のとき 3 個

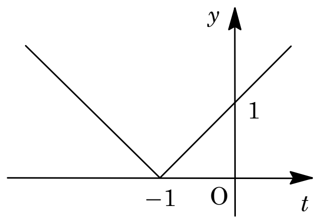
コメント

初めからグラフを用いて処理をしましたが，詰めの作業がやや煩雑です。まず，方程式①を同値変形した方がよかったかもしれません。

問　題

実数 a に対し，関数 $f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|dt+a$ を考える。曲線 $C: y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつための a の範囲を求めよ。またこのとき曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2014]

解答例



$f(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|dt+a$ に対し，右図は $y=|t+1|$ のグラフであり，さらに $g(x)=\displaystyle\int_x^{x+1}|t+1|dt$ とおくと，

(i)　$x<-2$ のとき

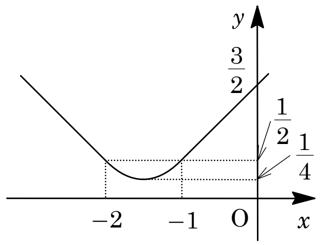
$$g(x)=\frac{1}{2}(-x-1-x-2)\cdot 1=-x-\frac{3}{2}$$

(ii)　$-2\leqq x<-1$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(-x-1)^2+\frac{1}{2}(x+2)^2=x^2+3x+\frac{5}{2}=\left(x+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

(iii)　$x\geqq -1$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(x+1+x+2)\cdot 1=x+\frac{3}{2}$$



(i)～(iii)より，$y=g(x)$ のグラフは右図のようになる。

すると，曲線 $C: y=f(x)$ が x 軸と 2 点の共有点をもつ条件は，$f(x)=0$ すなわち $g(x)=-a$ が異なる 2 実数解をもつことに対応し，$-a>\frac{1}{4}$ すなわち $a<-\frac{1}{4}$ である。曲線 C と x 軸で囲まれる部分の面積 S は，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=-a$ で囲まれる部分の面積に等しいので，

(a)　$\frac{1}{4}<-a\leqq\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{2}\leqq a<-\frac{1}{4}\right)$ のとき

$y=g(x)\ (-2\leqq x\leqq -1)$ と $y=-a$ を連立すると，$x^2+3x+\frac{5}{2}+a=0$ となり，この解 $x=\dfrac{-3\pm\sqrt{-4a-1}}{2}$ を $x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$S=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\sqrt{-4a-1})^3$$

(b)　$-a>\frac{1}{2}\left(a<-\frac{1}{2}\right)$ のとき

$y=g(x)\ (x<-2)$ と $y=-a$ を連立すると $x=a-\frac{3}{2}$，$y=g(x)\ (x>-1)$ と $y=-a$ を連立すると $x=-a-\frac{3}{2}$ となり，

$$S=\frac{1}{6}\{-1-(-2)\}^3+\frac{1}{2}\left[\{-1-(-2)\}+\left(-a-\frac{3}{2}\right)-\left(a-\frac{3}{2}\right)\right]\left(-a-\frac{1}{2}\right)$$
$$=\frac{1}{6}+\frac{1}{4}(-2a+1)(-2a-1)=a^2-\frac{1}{12}$$

コメント

絶対値つきの関数の定積分は，グラフを利用して，台形や三角形の面積を対応させて計算しています。

問　題

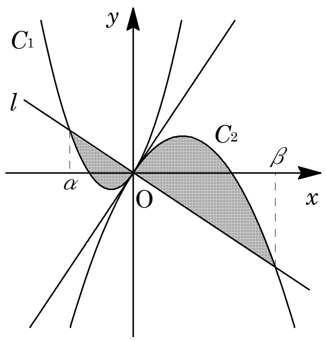
a と k を正の実数とする。$y=\frac{a}{2}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_1 と $y=-\frac{2}{a}x^2$ のグラフを平行移動して得られる放物線 C_2 が，ともに原点 O(0, 0) で直線 $y=kx$ に接するものとする。原点 O を通り，直線 $y=kx$ に垂直な直線を l とする。放物線 C_1 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_1，放物線 C_2 と直線 l によって囲まれる図形の面積を S_2 とおき，$S=S_1+S_2$ とする。次の問いに答えよ。

(1) S を a と k を用いて表せ。

(2) $k=\sqrt{2}-1$ とする。S を最小にする a の値と，そのときの S の値を求めよ。

[2009]

解答例



(1) 原点を通る放物線 C_1 の方程式を，$y=\frac{a}{2}x^2+px$ とおくと，$y'=ax+p$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$p=k$ となり，

$$y=\frac{a}{2}x^2+kx \cdots\cdots\cdots①$$

また，同様にして，原点を通る放物線 C_2 の方程式を，$y=-\frac{2}{a}x^2+qx$ とおくと，$y'=-\frac{4}{a}x+q$ となる。

条件より，$x=0$ のとき $y'=k$ から，$q=k$ となり，

$$y=-\frac{2}{a}x^2+kx \cdots\cdots\cdots②$$

さらに，直線 $y=kx$ に垂直な直線 l は，$y=-\frac{1}{k}x$ ……③である。

①③の交点 $x=\alpha\neq 0$ は，$\frac{a}{2}x^2+kx=-\frac{1}{k}x$ から，$\alpha=-\frac{2}{a}\left(k+\frac{1}{k}\right)$ となり，

$$S_1=\int_{\alpha}^{0}\left(-\frac{1}{k}x-\frac{a}{2}x^2-kx\right)dx=-\frac{a}{2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(-\alpha)^3=\frac{2}{3a^2}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

②③の交点 $x=\beta\neq 0$ は，$-\frac{2}{a}x^2+kx=-\frac{1}{k}x$ から，$\beta=\frac{a}{2}\left(k+\frac{1}{k}\right)$ となり，

$$S_2=\int_{0}^{\beta}\left(-\frac{2}{a}x^2+kx+\frac{1}{k}x\right)dx=-\frac{2}{a}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\beta^3=\frac{a^2}{24}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$$

よって，$S=S_1+S_2=\frac{2}{3a^2}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3+\frac{a^2}{24}\left(k+\frac{1}{k}\right)^3=\frac{1}{24}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)\left(k+\frac{1}{k}\right)^3$

(2) $k=\sqrt{2}-1$ のとき，$k+\frac{1}{k}=\sqrt{2}-1+\sqrt{2}+1=2\sqrt{2}$ より，

$$S=\frac{1}{24}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)(2\sqrt{2})^3=\frac{2\sqrt{2}}{3}\left(a^2+\frac{16}{a^2}\right)$$

ここで，$a^2>0$ より，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$a^2+\frac{16}{a^2}\geqq 2\sqrt{a^2\cdot\frac{16}{a^2}}=8$$

なお，等号は，$a^2=\dfrac{16}{a^2}$ すなわち $a=2$ のときに成立し，このとき S は最小値 $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}\cdot 8=\dfrac{16\sqrt{2}}{3}$ をとる。

コメント

放物線とその法線で囲まれる部分の面積について，その最小値を求めるという頻出問題です。

問　題

2 次関数 $f(x)$ は，$xf(x)=\dfrac{2}{3}x^3+(x^2+x)\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$ を満たすとする。

(1)　$f(x)$ を求めよ。

(2)　関数 $xf(x)$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$xf(x)=\dfrac{2}{3}x^3+(x^2+x)\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt+\int_0^x f(t)\,dt$ に対し，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=a$ とおくと，

$$xf(x)=\frac{2}{3}x^3+a(x^2+x)+\int_0^x f(t)\,dt\cdots\cdots\cdots①$$

①は $x=0$ のとき成立し，そこで両辺を微分すると，

$$f(x)+xf'(x)=2x^2+a(2x+1)+f(x),\quad xf'(x)=2x^2+a(2x+1)\cdots\cdots\cdots②$$

$f(x)$ は 2 次関数なので，②の両辺の定数項を比較すると，$a=0$ である。

②より，$xf'(x)=2x^2$，$f'(x)=2x$ となり, C を定数として,

$$f(x)=x^2+C$$

すると，$\displaystyle\int_0^1 f(t)\,dt=0$ より，$\dfrac{1}{3}+C=0$ となり，$C=-\dfrac{1}{3}$

以上より，$f(x)=x^2-\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　$g(x)=xf(x)=x^3-\dfrac{1}{3}x$ とおくと,

$$g'(x)=3x^2-\frac{1}{3}=\frac{1}{3}(3x+1)(3x-1)$$

$x\geqq 0$ における $g(x)$ の増減は右表のようになり，最小値は，$g\left(\dfrac{1}{3}\right)=-\dfrac{2}{27}$ である。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
$g'(x)$		$-$	0	$+$
$g(x)$		↘		↗

コメント

計算量を減少させるために，数Ⅱの範囲外ですが，積の微分法を利用して解いています。

問　題

関数 $f(x)$ を次のように定義する。

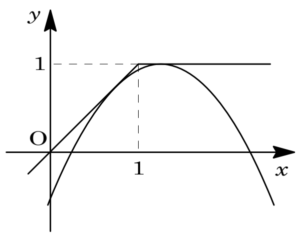
$$f(x)=\begin{cases} x & (x\leqq 1) \\ 1 & (x>1) \end{cases}$$

また，$g(x)=-x^2+ax+b$ とする。$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接するとき，次の問いに答えよ。

(1)　a,b の値を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

解答例



(1)　$y=g(x)$ のグラフが $y=f(x)$ のグラフと 2 点で接することより，$p>1$ として，

$$g(x)=-(x-p)^2+1$$

すると，$y=g(x)$ のグラフと直線 $y=x$ との共有点は，

$$x=-(x-p)^2+1,\ x^2-(2p-1)x+p^2-1=0$$

$x<1$ において接することより，

$$D=(2p-1)^2-4(p^2-1)=0\cdots\cdots\cdots①,\ x=\frac{2p-1}{2}<1\cdots\cdots\cdots②$$

①より，$1-4p+4=0$，$p=\dfrac{5}{4}$

この値は $p>1$ を満たし，しかも②は $x=\dfrac{3}{4}<1$ となり，成立しているので，

$$g(x)=-\left(x-\frac{5}{4}\right)^2+1=-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}$$

よって，$a=\dfrac{5}{2}$，$b=-\dfrac{9}{16}$

(2)　$x<1$ における接点は②より $x=\dfrac{3}{4}$，$x>1$ における接点は $x=p=\dfrac{5}{4}$ から，

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフで囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left\{x-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left\{1-\left(-x^2+\frac{5}{2}x-\frac{9}{16}\right)\right\}dx$$

$$=\int_{\frac{3}{4}}^{1}\left(x-\frac{3}{4}\right)^2dx+\int_{1}^{\frac{5}{4}}\left(x-\frac{5}{4}\right)^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{4}\right)^3\right]_{\frac{3}{4}}^{1}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{5}{4}\right)^3\right]_{1}^{\frac{5}{4}}$$

$$=\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}\right)^3-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{4}\right)^3=\frac{1}{96}$$

コメント

微積分の基本問題です。$y=f(x)$ のグラフが複雑ではないので，直感に依存した解となっています。

問　題

a は実数とする。2 つの曲線 $y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ と $y=ax^2-2a^2x-3a$ は，ある共有点で両方の曲線に共通な接線をもつ。このとき a を求めよ。　[2005]

解答例

$y=x^3+2ax^2-3a^2x-4$ ……①，$y=ax^2-2a^2x-3a$ ……②に対して，

①より $y'=3x^2+4ax-3a^2$，②より $y'=2ax-2a^2$

ここで，$x=t$ において，①と②が共通の接線をもつとき，

$$t^3+2at^2-3a^2t-4=at^2-2a^2t-3a \cdots\cdots\cdots③$$

$$3t^2+4at-3a^2=2at-2a^2 \cdots\cdots\cdots④$$

③より，$t^3+at^2-a^2t+3a-4=0$ ………③′

④より，$3t^2+2at-a^2=0$，$(3t-a)(t+a)=0$ となり，$t=\dfrac{a}{3}$，$-a$

(i)　$t=\dfrac{a}{3}$ のとき

③′より，$\dfrac{a^3}{27}+\dfrac{a^3}{9}-\dfrac{a^3}{3}+3a-4=0$，$5a^3-81a+108=0$

$$(a-3)(5a^2+15a-36)=0$$

よって，$a=3$，$\dfrac{-15\pm3\sqrt{105}}{10}$

(ii)　$t=-a$ のとき

③′より，$-a^3+a^3+a^3+3a-4=0$，$a^3+3a-4=0$

$$(a-1)(a^2+a+4)=0$$

a は実数より，$a=1$

(i)(ii)より，$a=1$，3，$\dfrac{-15\pm3\sqrt{105}}{10}$

コメント

微分法の基本問題です。(i)は係数の大きい 3 次方程式が出現し，計算ミスを疑ってしまいました。

問　題

3 次関数 $f(x)$ および 2 次関数 $g(x)$ を，$f(x)=x^3$，$g(x)=ax^2+bx+c$ とし，$y=f(x)$ と $y=g(x)$ のグラフが点$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{8}\right)$で共通の接線をもつとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) b, c を a を用いて表せ。

(2) $f(x)-g(x)$ の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を a を用いて表せ。 [2004]

解答例

(1) $f(x)=x^3$ より $f'(x)=3x^2$ となり，$f'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ である。

また，$g(x)=ax^2+bx+c$ より，$g'(x)=2ax+b$ となる。

条件より，$g\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{8}$ かつ $g'\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{3}{4}$ となるので，

$$\frac{1}{4}a+\frac{1}{2}b+c=\frac{1}{8},\quad a+b=\frac{3}{4}$$

よって，$b=\frac{3}{4}-a$，$c=\frac{1}{8}-\frac{1}{4}a-\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}-a\right)=-\frac{1}{4}+\frac{1}{4}a$

(2) $h(x)=f(x)-g(x)$ とおくと，(1)より，$h(x)=x^3-ax^2-\left(\frac{3}{4}-a\right)x+\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$

$$h'(x)=3x^2-2ax-\left(\frac{3}{4}-a\right)=\frac{1}{4}(2x-1)(6x-4a+3)$$

$h'(x)=0$ の解は，$x=\frac{1}{2}$，$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$ となり，

$$h\left(\frac{1}{2}\right)=0,\quad h\left(\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}\right)=-\frac{4}{27}a^3+\frac{2}{3}a^2-a+\frac{1}{2}$$

また，$h(0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$，$h(1)=\frac{1}{2}-\frac{1}{4}a$ から，$0\leqq x\leqq 1$ における $h(x)$ の最小値を m とおくと，

(i) $\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}<0$ $\left(a<\frac{3}{4}\right)$のとき

右表より，$m=h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(ii) $0\leqq\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}<\frac{1}{2}$ $\left(\frac{3}{4}\leqq a<\frac{3}{2}\right)$のとき

(ii-i) $\frac{1}{4}-\frac{a}{4}>0$ $(a<1)$のとき

右表より，$m=h\left(\frac{1}{2}\right)=0$

(ii-ii) $\frac{1}{4}-\frac{a}{4}\leqq 0$ $(a\geqq 1)$のとき

右表より，$m=h(0)=\frac{1}{4}-\frac{1}{4}a$

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	0	$\nearrow$	

(iii) $\frac{1}{2} \leqq \frac{2}{3}a - \frac{1}{2} < 1\ \left(\frac{3}{2} \leqq a < \frac{9}{4}\right)$のとき

$h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right)$と$h(0)$の大小関係を調べるために，差をとり，

$$d(a) = h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right) - h(0)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$		$\nearrow$	

すると，$d(a) = -\frac{4}{27}a^3 + \frac{2}{3}a^2 - \frac{3}{4}a + \frac{1}{4}$となり，

$$d'(a) = -\frac{4}{9}a^2 + \frac{4}{3}a - \frac{3}{4} = -\frac{1}{36}(4a-9)(4a-3)$$

このとき，$\frac{3}{2} \leqq a < \frac{9}{4}$において，$d'(a) > 0$より，$d(a) \geqq d\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1}{8} > 0$

よって，$h\left(\frac{2}{3}a - \frac{1}{2}\right) > h(0)$となり，$m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$である。

(iv) $\frac{2}{3}a - \frac{1}{2} \geqq 1\ \left(a \geqq \frac{9}{4}\right)$のとき

$h(1) = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}a > \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a = h(0)$より，

$$m = h(0) = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$h'(x)$		$+$	0	$-$	
$h(x)$		$\nearrow$	0	$\searrow$	

(i)～(iv)より，$a < 1$のとき$m = 0$，$a \geqq 1$のとき$m = \frac{1}{4} - \frac{1}{4}a$である。

コメント

とにかく朴訥に場合分けをし，それぞれの場合について$h(x)$の増減を調べました。難問ではないものの，かなりの時間を要します。

問　題

実数 t に対して，$f(t)$ を $f(t)=\int_0^1|x^2-tx|dx$ と定める。$0\leqq t\leqq 1$ のとき，$f(t)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2002]

解答例

$0\leqq t\leqq 1$ において，$x^2-tx=x(x-t)$ より，

$$f(t)=\int_0^1|x^2-tx|dx=\int_0^t|x^2-tx|dx+\int_t^1|x^2-tx|dx$$
$$=\int_0^t-(x^2-tx)dx+\int_t^1(x^2-tx)dx=-\Big[\frac{x^3}{3}-t\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_0^t+\Big[\frac{x^3}{3}-t\cdot\frac{x^2}{2}\Big]_t^1$$
$$=-\frac{t^3}{3}+\frac{t^3}{2}+\frac{1}{3}(1-t^3)-\frac{t}{2}(1-t^2)=\frac{1}{3}t^3-\frac{1}{2}t+\frac{1}{3}$$
$$f'(t)=t^2-\frac{1}{2}=\Big(t-\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)\Big(t+\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)$$

$f(t)$ の値の増減は右表のようになるので，最大値は $f(0)=\frac{1}{3}$，最小値は $f\Big(\frac{\sqrt{2}}{2}\Big)=\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$ となる。

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	$\frac{1}{3}$	$\searrow$	$\frac{1}{3}-\frac{\sqrt{2}}{6}$	$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

コメント

$0\leqq t\leqq 1$ という条件があるために，場合分けは必要ありません。微積分の基本問題です。

問　題

実数 a に対して，$f(x)=ax^2-2ax+a^2+1$ とおく。

(1)　定積分 $I(a)=\int_1^2 f(x)\,dx$ を a を用いて表せ。

(2)　$f(x)$ が条件 $f(1)\leqq 1$ を満たすような a の範囲を求めよ。

(3)　a が(2)の範囲を動くとき，$I(a)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$I(a)=\int_1^2(ax^2-2ax+a^2+1)\,dx=\left[\frac{a}{3}x^3-ax^2+(a^2+1)x\right]_1^2$

$$=\frac{7a}{3}-3a+a^2+1=a^2-\frac{2}{3}a+1$$

(2)　$f(1)=a-2a+a^2+1=a^2-a+1$ なので，$f(1)\leqq 1$ より，$a^2-a+1\leqq 1$

$$a^2-a\leqq 0,\ 0\leqq a\leqq 1$$

(3)　(1)より，$I(a)=\left(a-\frac{1}{3}\right)^2+\frac{8}{9}$

すると，(2)より $0\leqq a\leqq 1$ なので，$I(a)$ の最大値は $I(1)=\frac{4}{3}$ であり，最小値は $I\left(\frac{1}{3}\right)=\frac{8}{9}$ である。

コメント

計算がすべてという超基本レベルの問題です。

問　題

$a,\ b$ を整数とする。3 次関数 $f(x)=x^3+ax^2+2bx$ が，$0<x<2$ の範囲で極大値と極小値をもつとき，$a,\ b$ の値を求めよ。 [2001]

解答例

$f(x)=x^3+ax^2+2bx$ より，$f'(x)=3x^2+2ax+2b$

3 次関数 $f(x)$ が $0<x<2$ の範囲に極大値と極小値をもつ条件は，2 次方程式 $f'(x)=0$ が $0<x<2$ の範囲に異なる 2 実数解をもつ条件に一致する。

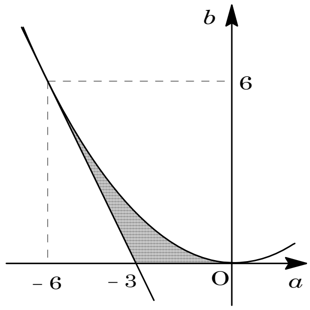
まず，$f'(x)=0$ の判別式 $D>0$ より，$a^2-6b>0$，$b<\dfrac{1}{6}a^2$ ………①

$y=f'(x)$ のグラフの軸が $x=-\dfrac{a}{3}$ より，

$$0<-\frac{a}{3}<2,\ -6<a<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，$f'(0)=2b>0$ より，$b>0$ ………③

$f'(2)=12+4a+2b>0$ より，$b>-2a-6$ ………④



①～④を満たす領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は含まない。

条件より，$a,\ b$ は整数なので，この領域内の格子点が求める $a,\ b$ の値となる。

よって，$(a,\ b)=(-3,\ 1)$ である。

コメント

①から④までの不等式は，簡単に求められます。しかし，この不等式を $a,\ b$ 平面上に図示して，領域内の格子点をさがす過程には時間がかかります。上の解ではその記述を省略しましたが。

問　題

三角形 ABC において，辺 BC 上に点 D があり，$\angle\mathrm{BAD} = \angle\mathrm{CAD} = 30^\circ$ である。$\mathrm{AB} = p$，$\mathrm{AC} = q$ とおく。

(1) AD の長さを p, q で表せ。

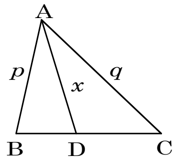
(2) $p+q=1$ を満たすとき，△ABD の面積と△ACD の面積の差の絶対値が最大になる p の値を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $\mathrm{AD} = x$ とすると，$\triangle\mathrm{ABD} + \triangle\mathrm{ACD} = \triangle\mathrm{ABC}$ となるので，

$$\frac{1}{2}px\sin 30^\circ + \frac{1}{2}qx\sin 30^\circ = \frac{1}{2}pq\sin 60^\circ$$

$$px + qx = \sqrt{3}pq\,,\ \ x = \frac{\sqrt{3}pq}{p+q}$$



(2) $S = \left|\triangle\mathrm{ABD} - \triangle\mathrm{ACD}\right|$ とおくと，(1)より，

$$S = \left|\frac{1}{2}px\sin 30^\circ - \frac{1}{2}qx\sin 30^\circ\right| = \frac{1}{4}\left|p-q\right|x = \frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{\left|pq(p-q)\right|}{p+q}$$

条件より，$q = 1-p$ なので，$S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|p(1-p)(2p-1)\right|$

ここで，$0<p<1$ で $f(p) = p(1-p)(2p-1) = -2p^3+3p^2-p$ とすると，

$$f'(p) = -6p^2+6p-1$$

$f'(p)=0$ の解は，$p = \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$

この解を $p=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，

p	0	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$	1
$f'(p)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(p)$	0	↘		↗		↘	0

$0<\alpha<\beta<1$ となり，$f(p)$ の増減は上表のようになる。

さて，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ であり，$f(1-p) = (1-p)p(1-2p) = -f(p)$ より，$y=f(p)$ のグラフは点$\left(\dfrac{1}{2},\ 0\right)$に関して対称となり，$-f(\alpha) = f(\beta)$ である。

すると，$S = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(p)\right|$ のグラフは，直線 $p = \dfrac{1}{2}$ に関して対称となるので，S の最大値は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(\alpha)\right| = \dfrac{\sqrt{3}}{4}\left|f(\beta)\right|$ である。

したがって，S が最大となる p は $p = \dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ となる。

コメント

S の最大値は求める必要がないので，対称性を利用した解を書きました。もし最大値を求めるのであれば，$f(p)$ を $f'(p)$ で割った余りを利用します。

問　題

与えられた実数 $a,\ b$ のうち，大きくない方を $\min\{a,\ b\}$ で表すことにする。関数 $f(x)=x^3-7x$ に対して $g(x)=\min\{f(x+1),\ f(x-1)\}$ とおく。

(1)　$0\leqq x\leqq 3$ のとき，$y=g(x)$ が最大となる x の値，および最小となる x の値をそれぞれ求めよ。

(2)　2 つのグラフ $y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-7x$，$f'(x)=3x^2-7=3\left(x-\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)\left(x+\dfrac{\sqrt{21}}{3}\right)$

$y=f(x+1)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に -1 だけ平行移動したもので，$y=f(x-1)$ のグラフは $y=f(x)$ のグラフを x 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

x	$\cdots$	$-\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$	$\dfrac{\sqrt{21}}{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

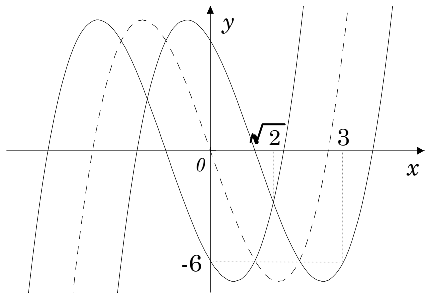
ここで，$f(x+1)=f(x-1)$ とすると，$(x+1)^3-7(x+1)=(x-1)^3-7(x-1)$

$$x^2-2=0,\ x=\sqrt{2}\ \ (x\geqq 0)$$

したがって，

$0\leqq x\leqq\sqrt{2}$ のとき，$g(x)=f(x+1)$

$\sqrt{2}\leqq x\leqq 3$ のとき，$g(x)=f(x-1)$



また，$0<\dfrac{\sqrt{21}}{3}-1<\sqrt{2}<\dfrac{\sqrt{21}}{3}+1<3$ より，

$0\leqq x\leqq 3$ における $y=g(x)$ が最小となる x は，

$x=\dfrac{\sqrt{21}}{3}\pm 1$ となる。

最大となる x は，$x=0,\ \sqrt{2},\ 3$ のいずれかである。

ここで，$g(0)=f(1)=-6$，$g(\sqrt{2})=f(\sqrt{2}+1)=(\sqrt{2}+1)(3+2\sqrt{2}-7)=-2\sqrt{2}$，$g(3)=f(2)=-6$ となることより，最大となる x は，$x=\sqrt{2}$ である。

(2)　$f(x)=f(x+1)$ とすると，$x^3-7x=(x+1)^3-7(x+1)$ より，

$$3x^2+3x-6=0,\ x=1\ \ (x\geqq 0)$$

また，$f(x)=f(x-1)$ とすると，$x^3-7x=(x-1)^3-7(x-1)$ より，

$$-3x^2+3x+6=0,\ x=2\ \ (x\geqq 0)$$

$y=f(x)$ と $y=g(x)$ で囲まれた部分は，$1\leqq x\leqq 2$ の範囲だけなので，

$$S_1=\int_1^{\sqrt{2}}\{f(x+1)-f(x)\}dx=\int_1^{\sqrt{2}}(3x^2+3x-6)dx=-4\sqrt{2}+\frac{13}{2}$$

$$S_2=\int_{\sqrt{2}}^{2}\{f(x-1)-f(x)\}dx=\int_{\sqrt{2}}^{2}(-3x^2+3x+6)dx=-4\sqrt{2}+7$$

求める面積は，$S_1+S_2=-8\sqrt{2}+\dfrac{27}{2}$

コメント

$y=f(x)$のグラフを丁寧に書いて，x軸方向に$+1$，および-1だけ平行移動すれば，結論は見えてきます。後はそれを計算で補うだけです。

問　題

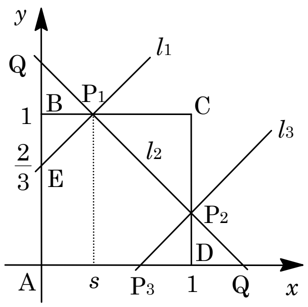
座標平面上に 5 点 $\mathrm{A}(0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$，$\mathrm{C}(1,\ 1)$，$\mathrm{D}(1,\ 0)$，$\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$がある。点 E と点 $\mathrm{P_1}(s,\ 1)\ (0<s<1)$ を通る直線を l_1 とする。直線 $y=1$ に関して l_1 と対称な直線を l_2 とし，l_2 と直線 $x=1$ の交点を $\mathrm{P_2}$ とする。さらに，直線 $x=1$ に関して l_2 と対称な直線 l_3 は，x 軸と線分 AD 上で交わるとし，その交点を $\mathrm{P_3}$ とする。

(1)　直線 l_2 が点 D を通るときの s の値を求めよ。

(2)　線分 $\mathrm{DP_3}$ の長さを s を用いて表せ。

(3)　$\mathrm{EP_1}+\mathrm{P_1P_2}+\mathrm{P_2P_3}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2016]

解答例



(1)　点 $\mathrm{E}\left(0,\ \dfrac{2}{3}\right)$ と点 $\mathrm{P_1}(s,\ 1)\ (0<s<1)$ を通る直線 l_1 を，$y=1$ に関して対称移動した直線を l_2 とする。

すると，l_2 は $\mathrm{P_1}$ と E を $y=1$ に関して対称移動した点 $\mathrm{Q_1}\left(0,\ \dfrac{4}{3}\right)$ を通ることより，その傾きが $-\dfrac{1}{3s}$ となり，

$$l_2 : y=-\frac{1}{3s}x+\frac{4}{3}$$

l_2 が $\mathrm{D}(1,\ 0)$ を通るとき，$0=-\dfrac{1}{3s}+\dfrac{4}{3}$ から，$s=\dfrac{1}{4}$

(2)　l_2 と x 軸との交点 $\mathrm{Q_2}$ は，$0=-\dfrac{1}{3s}x+\dfrac{4}{3}$ から $x=4s$ となり，$\mathrm{Q_2}(4s,\ 0)$ から，

$$\mathrm{DP_3}=\mathrm{DQ_2}=4s-1\ \cdots\cdots\cdots①$$

(3)　$\mathrm{P_3}$ は線分 AD 上にあることから，①より $0\leqq 4s-1\leqq 1$ となり，$\dfrac{1}{4}\leqq s\leqq\dfrac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$

このとき，$\mathrm{P_2}$ は線分 CD 上にある。そこで，$\mathrm{EP_1}=\mathrm{Q_1P_1}$，$\mathrm{P_2P_3}=\mathrm{P_2Q_2}$ から，$F=\mathrm{EP_1}+\mathrm{P_1P_2}+\mathrm{P_2P_3}$ とおくと，

$$F=\mathrm{Q_1P_1}+\mathrm{P_1P_2}+\mathrm{P_2Q_2}=\mathrm{Q_1Q_2}=\sqrt{(4s)^2+\left(\frac{4}{3}\right)^2}=\frac{4}{3}\sqrt{9s^2+1}$$

すると，②より $\dfrac{25}{16}\leqq 9s^2+1\leqq\dfrac{13}{4}$ となるので，F の最大値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{13}{4}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{13}$，最小値は $\dfrac{4}{3}\sqrt{\dfrac{25}{16}}=\dfrac{5}{3}$ である。

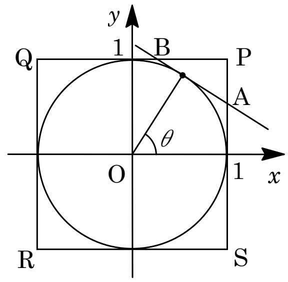
コメント

折れ線の長さの和に関する問題です。線対称移動がポイントですが，その誘導は問題文中に示されています。

問　題

座標平面上に，原点を中心とする半径 1 の円と，その円に外接し各辺が x 軸または y 軸に平行な正方形がある。円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(ただし\ 0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線と正方形の隣接する 2 辺がなす三角形の 3 辺の長さの和は一定であることを示せ。また，その三角形の面積を最大にするθを求めよ。 [2014]

解答例



原点を中心とする半径 1 の円周上の点$(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$における接線の方程式は，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1$$

直線$x=1$と連立して，$y\sin\theta=1-\cos\theta$，$y=\dfrac{1-\cos\theta}{\sin\theta}$

そこで，$L=\mathrm{AP}+\mathrm{PB}+\mathrm{BA}$とすると，$\angle\mathrm{PAB}=\theta$となることを用いて，

$$L=\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)\left(1+\tan\theta+\frac{1}{\cos\theta}\right)=\frac{\sin\theta+\cos\theta-1}{\sin\theta}\cdot\frac{\cos\theta+\sin\theta+1}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}{\sin\theta\cos\theta}=\frac{1+2\sin\theta\cos\theta-1}{\sin\theta\cos\theta}=2$$

また，$\triangle\mathrm{APB}$の面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1-\cos\theta}{\sin\theta}\right)^2\tan\theta=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin^2\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}$$

$$=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{2\sin\theta\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta-1)^2}{(\sin\theta+\cos\theta)^2-1}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$t=\sin\theta+\cos\theta=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より$1<t\leqq\sqrt{2}$となり，$(*)$から，

$$S=\frac{(t-1)^2}{t^2-1}=\frac{t-1}{t+1}=1-\frac{2}{t+1}$$

よって，Sが最大となるのは，$t=\sqrt{2}$すなわち$\theta=\dfrac{\pi}{4}$のときである。

コメント

三角関数の図形への応用問題です。問題文を丁寧に読まないと，円と正方形の位置関係について，ミスをしてしまいそうです。

問　題

$a,\ b$ を実数とし，$a>0$ とする。放物線 $y=\dfrac{x^2}{4}$ 上に 2 点 $\mathrm{A}\Big(a,\ \dfrac{a^2}{4}\Big)$，$\mathrm{B}\Big(b,\ \dfrac{b^2}{4}\Big)$ をとる。点 A における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{A} と n_{A}，点 B における放物線の接線と法線をそれぞれ l_{B} と n_{B} とおいたとき，l_{A} と l_{B} が直交しているものとする。2 つの接線 l_{A}，l_{B} の交点を P とし，2 つの法線 n_{A}，n_{B} の交点を Q とする。

(1)　b を a を用いて表せ。

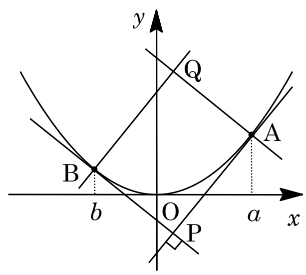
(2)　P, Q の座標を a を用いて表せ。

(3)　長方形 AQBP の面積が最小となるような a の値と，そのときの面積を求めよ。

[2013]

解答例

(1)　$y=\dfrac{x^2}{4}$ より $y'=\dfrac{x}{2}$ となり，点 $\mathrm{A}\Big(a,\ \dfrac{a^2}{4}\Big)$ における接線 l_{A}，$\mathrm{B}\Big(b,\ \dfrac{b^2}{4}\Big)$ における接線 l_{B} の傾きは，それぞれ $\dfrac{a}{2}$，$\dfrac{b}{2}$ である。



ここで，l_{A} と l_{B} が直交していることより，

$$\frac{a}{2}\cdot\frac{b}{2}=-1,\ b=-\frac{4}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$l_{\mathrm{A}}: y-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{a}{2}(x-a)$ より，$y=\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}\cdots\cdots\cdots②$

$$l_{\mathrm{B}}: y=\frac{b}{2}x-\frac{b^2}{4}\cdots\cdots\cdots③$$

②③を連立すると，$\dfrac{a}{2}x-\dfrac{a^2}{4}=\dfrac{b}{2}x-\dfrac{b^2}{4}$ より，$(a-b)x=\dfrac{a^2-b^2}{2}$ となり，

$$x=\frac{a+b}{2},\ y=\frac{a}{2}\cdot\frac{a+b}{2}-\frac{a^2}{4}=\frac{ab}{4}$$

①を代入すると，$x=\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a}$，$y=-1$ より，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ -1\Big)$ となる。

また，四角形 AQBP は長方形なので，対角線 AB の中点 $\Big(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{8}\Big)$ と対角線 PQ の中点が一致することより，$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，①から，

$$x=\frac{a+b}{2}=\frac{a}{2}-\frac{2}{a},\ y=2\cdot\frac{a^2+b^2}{8}-(-1)=\frac{1}{4}\Big(a^2+\frac{16}{a^2}\Big)+1=\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1$$

よって，$\mathrm{Q}\Big(\dfrac{a}{2}-\dfrac{2}{a},\ \dfrac{a^2}{4}+\dfrac{4}{a^2}+1\Big)$ となる。

(3)　長方形 AQBP の面積を S とおくと,

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+1-(-1)\right\}(a-b)=\frac{1}{2}\left(\frac{a^2}{4}+\frac{4}{a^2}+2\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)$$

$$=\frac{1}{8}\left(a^2+\frac{16}{a^2}+8\right)\left(a+\frac{4}{a}\right)=\frac{1}{8}\left(a+\frac{4}{a}\right)^3$$

ここで, 相加平均と相乗平均の関係より, $a+\frac{4}{a}\geqq 2\sqrt{4}=4$

なお, 等号は, $a=\frac{4}{a}$ すなわち $a=2$ のとき成立する。

以上より, S は $a=2$ のとき最小値 $\frac{1}{8}\cdot 4^3=8$ をとる。

コメント

放物線の接線と法線を題材とした問題ですが, 長方形の性質を利用して, 計算量を減らしています。

問　題

放物線 $y=x^2$ 上の点 $(a,\ a^2)$ における接線を l_a とする。

(1)　直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5$ の表す領域に含まれるような a の範囲を求めよ。

(2)　a が(1)で求めた範囲を動くとき，直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D を図示せよ。

(3)　連立不等式 $(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$，$y(y+5)\leqq 0$ の表す領域を E とする。D と E の共通部分の面積を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$y=x^2$ に対して，$y'=2x$ となり，点 $(a,\ a^2)$ における接線 l_a の方程式は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2\ \cdots\cdots\cdots①$$

直線 l_a が不等式 $y>-x^2+2x-5\cdots\cdots$②の表す領域に含まれることより，①を②に代入して,

$$2ax-a^2>-x^2+2x-5,\ \ x^2+2(a-1)x-a^2+5>0\ \cdots\cdots\cdots③$$

③が任意の x に対して成立することより,

$$D/4=(a-1)^2-(-a^2+5)=2(a^2-a-2)<0$$

すると，$(a-2)(a+1)<0$ より，$-1<a<2$ である。

(2)　直線 l_a が通らない点 $(x,\ y)$ は，①より，$a^2-2xa+y=0$ が $-1<a<2$ に実数解をもたない条件として求めることができる。

ここで，$f(a)=a^2-2xa+y=(a-x)^2-x^2+y$ とおくと,

(i)　$x\leqq -1$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\geqq 0$ より，$y\geqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より，$y\leqq 4x-4$

(ii)　$-1<x<2$ のとき

(a)　$f(x)=-x^2+y>0$ より，$y>x^2$

(b)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$，$f(2)=4-4x+y\leqq 0$ より,

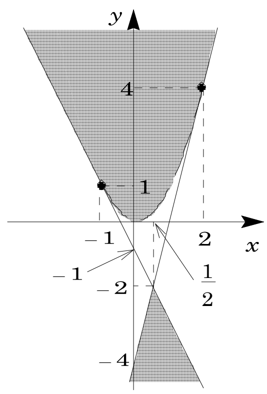
$y\leqq -2x-1$，$y\leqq 4x-4$

(iii)　$x\geqq 2$ のとき

(a)　$f(-1)=1+2x+y\leqq 0$ より，$y\leqq -2x-1$

(b)　$f(2)=4-4x+y\geqq 0$ より，$y\geqq 4x-4$

(i)～(iii)より，点 $(x,\ y)$ 全体の領域 D は右図の網点部となる。ただし，破線の境界線のみ領域に含まない。



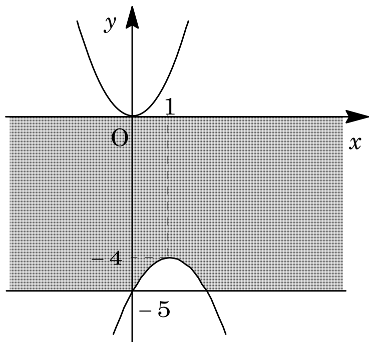
(3)　不等式$(y-x^2)(y+x^2-2x+5)\leqq 0$ を変形すると，

$x^2>-x^2+2x-5$ より，

$$-x^2+2x-5\leqq y\leqq x^2 \cdots\cdots\cdots ④$$

また，$y(y+5)\leqq 0$ より，

$$-5\leqq y\leqq 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$$



よって，連立不等式④⑤の表す領域 E は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

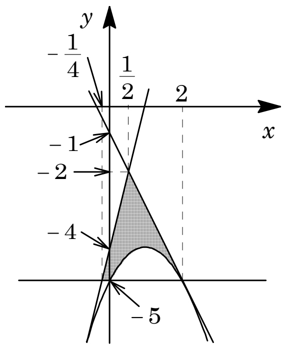
さて，直線$y=-2x-1$ と放物線$y=-x^2+2x-5$ を連立すると，

$$-2x-1=-x^2+2x-5,\ \ x^2-4x+4=0$$

重解$x=2$ をもつことより，$x=2$ で接する。

また，直線$y=4x-4$ と放物線$y=-x^2+2x-5$ を連立すると，

$$4x-4=-x^2+2x-5,\ \ x^2+2x+1=0$$



重解$x=-1$ をもつことより，$x=-1$ で接する。

これより，領域 D と E の共通部分を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

そこで，この共通部分の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\left(2+\frac{1}{4}\right)(-2+5)-\int_0^2(-x^2+2x-5+5)\,dx$$

$$=\frac{27}{8}-\int_0^2 -x(x-2)\,dx=\frac{27}{8}-\frac{1}{6}\cdot 2^3=\frac{49}{24}$$

コメント

計算量の多い問題で，時間はかなり必要です。(2)はオーソドックスに解きましたが，図形的に解くのが出題者の意図かもしれません。

問　題

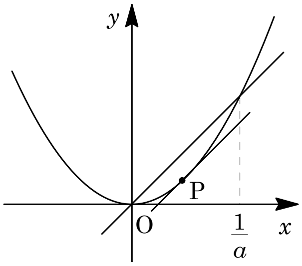
a は正の実数とし，座標平面上の直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ を考える。C 上の点 $(x,\ y)$ $\left(ただし\ 0<x<\dfrac{1}{a}\right)$ で l との距離を最大にする点を $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおく。また P と l との距離を d とおく。以下の問いに答えよ。

(1)　$d,\ s,\ t$ をそれぞれ a の式で表せ。また点 P での放物線 C の接線の傾きを求めよ。

(2)　実数 a を $a>0$ の範囲で動かしたとき，点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ の軌跡を求め，図示せよ。

[2011]

解答例



(1)　直線 $l: y=x$ と放物線 $C: y=ax^2$ ……①の交点は，

$$ax^2=x\,,\ \ x=0,\ \frac{1}{a}$$

さて，$0<x<\dfrac{1}{a}$ において，C 上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ と l との距離が最大になるのは，P における C の接線が l と平行になるときである。

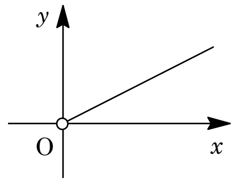
すなわち, C の接線の傾きが 1 であるときより，①から，$2ax=1$，$x=\dfrac{1}{2a}$ となり，

$$s=\frac{1}{2a}\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ t=a\left(\frac{1}{2a}\right)^2=\frac{1}{4a}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき, P と l との距離 d は，$d=\dfrac{\left|\dfrac{1}{2a}-\dfrac{1}{4a}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{1}{4\sqrt{2}a}=\dfrac{\sqrt{2}}{8a}$

(2)　②③より，$t=\dfrac{1}{2}s$ となり, $a>0$ から $s>0$ である。

よって，点 P の軌跡は，半直線 $y=\dfrac{1}{2}x$ $(x>0)$ である。また，これを図示すると，右図のようになる。



コメント

(1)は図形的に解きましたが，問題文から推測すると，出題者の意向に沿った解法とは言えないでしょう。

問　題

放物線$C: y = x^2$上の 2 点 A, B は, 直線 AB と C で囲まれる図形の面積が$\frac{1}{6}$になるという条件を満たしながら C 上を動くとする。このとき, 直線 AB が通りうる点の範囲を求め, 図示せよ。 [2003]

解答例

A$(\alpha,\ \alpha^2)$, B$(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$とおくと, 直線 AB の方程式は,

$$y-\alpha^2 = \frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha),\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta \cdots\cdots\cdots①$$

条件より, $\int_\alpha^\beta \{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx = \frac{1}{6}$, $-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}$

$$-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3 = \frac{1}{6},\quad \beta-\alpha=1,\quad \beta=\alpha+1 \cdots\cdots\cdots②$$

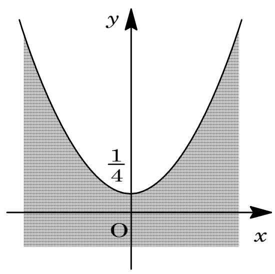
②を①に代入して, $y=(2\alpha+1)x-\alpha(\alpha+1) \cdots\cdots\cdots③$

αが任意の実数値をとるとき, 直線③が通過する点$(x,\ y)$は, ③をαについての 2 次方程式としてみたとき, 実数解をもつ$(x,\ y)$の条件として求められる。

③から, $y=2\alpha x+x-\alpha^2-\alpha$, $\alpha^2+(1-2x)\alpha-x+y=0$

$$D=(1-2x)^2-4(-x+y)=1+4x^2-4y \geqq 0$$

よって, $y \leqq x^2+\frac{1}{4}$より, 直線 AB が通りうる点の領域は右図の網点部である。ただし, 境界は領域に含む。



コメント

直線の通過領域を求める頻出問題です。なお, ③で x の値を固定して y の値の範囲を考えるときは, ③を$y=-\alpha^2+(2x-1)\alpha+x=-\left(\alpha-\frac{2x-1}{2}\right)^2+x^2+\frac{1}{4}$と変形をして, $y \leqq x^2+\frac{1}{4}$を導きます。

問　題

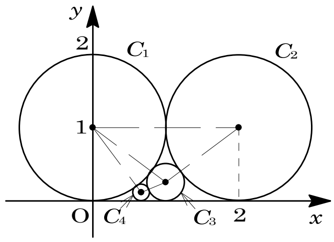
座標平面上に，中心がそれぞれ点$(0,\ 1)$，点$(2,\ 1)$で，同じ半径 1 をもつ 2 つの円 C_1 と C_2 がある。次の問いに答えよ。

(1) 2 円 C_1，C_2 と x 軸に接するように円 C_3 を描く。このとき円 C_3 の中心の座標を求めよ。

(2) さらに，2 円 C_1，C_3 と x 軸に接するように円 C_2 とは異なる円 C_4 を描く。このとき円 C_4 の中心の座標を求めよ。 [2002]

解答例

(1) 円 C_3 の半径を r とすると，2 円 C_1，C_2 は同じ半径なので，C_3 の中心の座標は$(1,\ r)$となる。



円 C_1 と C_3 が接することより，

$$(1+r)^2=(1-r)^2+1^2,\ 2r=-2r+1$$

よって，$r=\dfrac{1}{4}$ より，円 C_3 の中心の座標は$\left(1,\ \dfrac{1}{4}\right)$である。

(2) 円 C_4 の中心の座標を$(s,\ t)$とおくと，半径は t となる。

円 C_1 と C_4 が接することより，

$$(1+t)^2=(1-t)^2+s^2,\ 4t=s^2\cdots\cdots\cdots①$$

円 C_3 と C_4 が接することより，

$$\left(\frac{1}{4}+t\right)^2=\left(\frac{1}{4}-t\right)^2+(1-s)^2,\ t=1-2s+s^2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$4-8s+4s^2=s^2$，$3s^2-8s+4=0$，$(3s-2)(s-2)=0$

$0<s<1$ より $s=\dfrac{2}{3}$ となり，①より $t=\dfrac{1}{4}\cdot\dfrac{4}{9}=\dfrac{1}{9}$

よって，円 C_4 の中心の座標は$\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{1}{9}\right)$である。

コメント

頻出問題です。本年度は，名大・文系で同様な問題が出ています。

問　題

直線 $y=-x$ と放物線 $y=x^2+2x$ とで囲まれた図形を D とする。

(1) D の面積 S_1 を求めよ。

(2) D を x 軸の正の方向に m だけ平行移動して，不等式 $y \geqq -2x+3$ の表す領域に含まれるように移す。m の最小値 m_1 を求めよ。

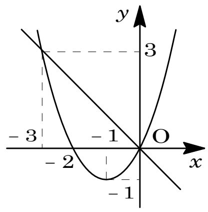
(3) m_1 を(2)で求めた最小値とする。D を x 軸の正の方向に m_1 だけ平行移動するとき, D が通過する範囲を図示し，その面積 S_2 を求めよ。 [1999]

解答例

(1) 直線 $y=-x$ ……①，放物線 $y=x^2+2x$ ……②

①②の交点は，$-x=x^2+2x$ より，$x=0,\ -3$

$$S_1=\int_{-3}^{0}(-x-x^2-2x)dx=-\int_{-3}^{0}x(x+3)dx$$
$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)\cdot 3^3=\frac{9}{2}$$



(2) ②を x 軸方向に m だけ平行移動すると,

$$y=(x-m)^2+2(x-m)=x^2-(2m-2)x+m^2-2m \cdots\cdots\cdots③$$

③と $y=-2x+3$ ……④が接するとき,

$$x^2-(2m-2)x+m^2-2m=-2x+3$$
$$x^2-(2m-4)x+m^2-2m-3=0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

重解条件より $D/4=(m-2)^2-(m^2-2m-3)=0$ なので，$m=\dfrac{7}{2}$ となる。

⑤の重解は $x=m-2=\dfrac{3}{2}$ となり，またこのとき④より $y=0$ なので，③と④の接点は図形 D の境界線上にある。

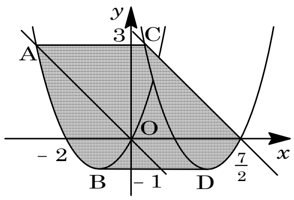
よって, m の最小値 m_1 は，$m_1=\dfrac{7}{2}$ である。

(3) 図形 D が通過する範囲の面積 S_2 は, D の面積 S_1 に線分 AC, BD と弧 AB, CD によって囲まれた図形の面積を加えたものである。

この図形 ABDC の面積は，平行四辺形 ABDC の面積に等しいので,

$$m_1\times\{3-(-1)\}=\frac{7}{2}\cdot 4=14$$

よって，$S_2=S_1+14=\dfrac{37}{2}$



コメント

(3)の通過範囲の面積は，移動距離に注目すると，積分するまでもありません。

問　題

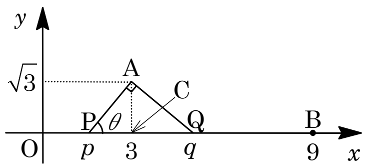
座標平面上に 3 点 $O(0,\ 0)$，$A(3,\ \sqrt{3})$，$B(9,\ 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle PAQ = 90°$ となるようにとる。ただし，点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。$\angle APQ = \theta$ とし，$\triangle APQ$ の面積を S とする。

(1) S を θ を用いて表せ。

(2) S の最小値，およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

(3) S が $\triangle AOB$ の面積の $\dfrac{2}{3}$ 倍となるとき，点 P と点 Q の x 座標を求めよ。　[2017]

解答例



(1) $O(0,\ 0)$，$A(3,\ \sqrt{3})$，$B(9,\ 0)$ に対し，線分 OB 上に点 $P(p,\ 0)$，$Q(q,\ 0)$ があり，$\angle PAQ = 90°$ を満たしている。ただし，$0 \leqq p < 3 < q \leqq 9$ である。

$\angle APQ = \theta$ とすると，$AP\sin\theta = \sqrt{3}$ ………①

$AQ\sin(90° - \theta) = \sqrt{3}$，$AQ\cos\theta = \sqrt{3}$ ………②

ここで，$\triangle APQ$ の面積を S とすると，①②から，

$$S = \frac{1}{2}AP\cdot AQ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\sin\theta}\cdot\frac{\sqrt{3}}{\cos\theta} = \frac{3}{\sin 2\theta}$$

(2) まず，(1)から $S = \dfrac{3}{\sin 2\theta} \geqq 3$ である。ここで，等号が成立するのは $\sin 2\theta = 1$，すなわち θ は鋭角から $\theta = 45°$ のときである。

このとき，$\triangle APQ$ は直角二等辺三角形となり，$C(3,\ 0)$ とおくと $PC = QC = \sqrt{3}$ から，P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって，S の最小値は 3 であり，このとき P の x 座標は $3 - \sqrt{3}$，Q の x 座標は $3 + \sqrt{3}$ となる。

(3) まず，$\triangle AOB = \dfrac{1}{2}\cdot 9\cdot\sqrt{3} = \dfrac{9}{2}\sqrt{3}$ となり，条件より $S = \dfrac{2}{3}\triangle AOB$ から，

$$\frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{3}\cdot\frac{9}{2}\sqrt{3},\ \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}},\ \sin\theta\cos\theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \cdots\cdots\cdots ③$$

ここで，$\sin^2\theta + \cos^2\theta = 1$ なので，③と合わせると，

$$\frac{\sin^2\theta + \cos^2\theta}{\sin\theta\cos\theta} = 2\sqrt{3},\ \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} = 2\sqrt{3},\ \tan^2\theta - 2\sqrt{3}\tan\theta + 1 = 0$$

よって，$\tan\theta = \sqrt{3} \pm \sqrt{2}$ ……④となる。

さて，$PC = \sqrt{3}\tan(90° - \theta) = \dfrac{\sqrt{3}}{\tan\theta}$，$QC = \sqrt{3}\tan\theta$ で，条件から，$0 < PC \leqq 3$，$0 < QC \leqq 6$ であるので，

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{\tan\theta} \leqq 3 \cdots\cdots\cdots ⑤,\ 0 < \sqrt{3}\tan\theta \leqq 6 \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤より $\tan\theta \geqq \dfrac{\sqrt{3}}{3}$，⑥より $0 < \tan\theta \leqq 2\sqrt{3}$ となり $\dfrac{\sqrt{3}}{3} \leqq \tan\theta \leqq 2\sqrt{3}$

すると，④から $\tan\theta = \sqrt{3}+\sqrt{2}$ となり，このとき，

$$\mathrm{PC} = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3}+\sqrt{2}} = 3-\sqrt{6}\,,\ \ \mathrm{QC} = \sqrt{3}(\sqrt{3}+\sqrt{2}) = 3+\sqrt{6}$$

よって，P の x 座標 $3-(3-\sqrt{6}) = \sqrt{6}$，Q の x 座標 $3+(3+\sqrt{6}) = 6+\sqrt{6}$ である。

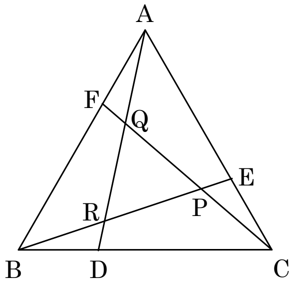
コメント

三角関数の図形への応用問題で，いろいろな解法が考えられます。

問　題

1 辺の長さ 1 の正三角形 ABC において，BC を$1:2$に内分する点を D，CA を$1:2$に内分する点を E，AB を$1:2$に内分する点を F とし，さらに BE と CF の交点を P，CF と AD の交点を Q，AD と BE の交点を R とする。このとき，△PQR の面積を求めよ。 [2015]

解答例



△ABC において，$AB=BC=CA=1$

$$AF:FB=BD:DC=CE:EA=1:2$$

これより，△ABD と△CAF は合同になり，

$$\angle BAD=\angle ACF$$

すると，$\angle PQR=\angle DAC+\angle ACF=\angle DAC+\angle BAD=60^\circ$

同様に，$\angle QRP=60^\circ$ となり，△PQR は正三角形である。

ここで，△ABD に余弦定理を適用すると，

$$AD^2=1^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2-2\cdot1\cdot\frac{1}{3}\cos60^\circ=\frac{7}{9},\ \ AD=\frac{\sqrt{7}}{3}$$

さて，△ABD と直線 CF についてメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{AF}{FB}\cdot\frac{BC}{CD}\cdot\frac{DQ}{QA}=1,\ \ \frac{1}{2}\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{DQ}{QA}=1,\ \ \frac{DQ}{QA}=\frac{4}{3}\cdots\cdots\cdots①$$

また，△ADC と直線 BE についてメネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{AR}{RD}\cdot\frac{DB}{BC}\cdot\frac{CE}{EA}=1,\ \ \frac{AR}{RD}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}=1,\ \ \frac{AR}{RD}=6\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$AQ:QR:RD=\frac{3}{7}:\left(1-\frac{3}{7}-\frac{1}{7}\right):\frac{1}{7}=3:3:1$ となり，

$$QR=\frac{3}{7}AD=\frac{3}{7}\cdot\frac{\sqrt{7}}{3}=\frac{\sqrt{7}}{7}$$

よって，$\triangle PQR=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{7}}{7}\right)^2\sin60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{28}$

コメント

平面図形の計量についての基本問題です。△PQR が正三角形であるのは対称性から明らかですが，少しだけ説明を付け加えておきました。なお，記述量がやや増えるでしょうが，ベクトルを利用する解法も考えられます。

問　題

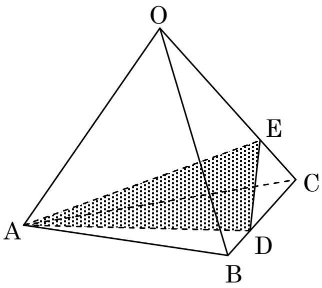
1 辺の長さが 3 の正四面体 OABC において，辺 BC を$1:2$に内分する点を D とする。また，辺 OC 上に点 E をとり，$\mathrm{CE}=t$ とする。

(1)　AD の長さを求めよ。

(2)　$\cos\angle\mathrm{DAE}$ を t を用いて表せ。

(3)　△ADE の面積が最小になるときの t の値とそのときの面積を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　△ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2=3^2+1^2-2\cdot3\cdot1\cdot\cos60^\circ=7$$

よって，$\mathrm{AD}=\sqrt{7}$ となる。

(2)　△ACE に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AE}^2=3^2+t^2-2\cdot3\cdot t\cdot\cos60^\circ=t^2-3t+9$$

また，△CDE に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{DE}^2=2^2+t^2-2\cdot2\cdot t\cdot\cos60^\circ=t^2-2t+4$$

さらに，△ADE に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle\mathrm{DAE}=\frac{7+(t^2-3t+9)-(t^2-2t+4)}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}=\frac{12-t}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$$

(3)　(2)より，$\sin\angle\mathrm{DAE}=\sqrt{1-\dfrac{(12-t)^2}{28(t^2-3t+9)}}=\dfrac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}$

すると，△ADE の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}\cdot\frac{\sqrt{27t^2-60t+108}}{2\sqrt{7}\sqrt{t^2-3t+9}}=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9t^2-20t+36}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{9\left(t-\frac{10}{9}\right)^2+\frac{224}{9}}$$

よって，S は $t=\dfrac{10}{9}$ のとき，最小値 $\dfrac{\sqrt{3}}{4}\sqrt{\dfrac{224}{9}}=\dfrac{\sqrt{42}}{3}$ をとる。

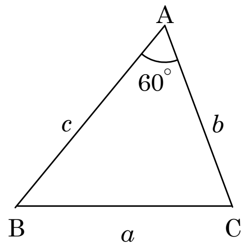
コメント

三角比の空間図形への適用問題です。基本的な定理の確認となっています。

問　題

三角形 ABC の面積は $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$，外接円の半径は 1，$\angle\mathrm{BAC}=60°$，AB＞AC である。このとき，三角形 ABC の各辺の長さを求めよ。 [2011]

解答例



まず，$\mathrm{AB}=c$，$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおく。

すると，△ABC の外接円の半径が 1 から，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin 60°}=2\times1,\ \ a=\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

△ABC の面積が $\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$ より，$\dfrac{1}{2}bc\sin 60°=\dfrac{3+\sqrt{3}}{4}$

$$bc=\frac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}}=\sqrt{3}+1\cdots\cdots\cdots②$$

また，△ABC に余弦定理を適用すると，①より，

$$3=b^2+c^2-2bc\cos 60°,\ \ (b+c)^2-3bc=3$$

②より，$(b+c)^2=6+3\sqrt{3}$，$b+c=\sqrt{6+3\sqrt{3}}=\sqrt{\dfrac{12+2\sqrt{27}}{2}}=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{2}}\cdots\cdots\cdots③$

②③より，b, c は，2 次方程式 $\sqrt{2}x^2-(3+\sqrt{3})x+\sqrt{2}(\sqrt{3}+1)=0$ の 2 つの解となり，

$$(\sqrt{2}x-\sqrt{3}-1)(x-\sqrt{2})=0,\ \ t=\frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}},\ \sqrt{2}$$

条件より，$c>b$ なので，$b=\sqrt{2}$，$c=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{2}}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{2}$ である。

コメント

三角比の三角形への応用についての基本問題です。

問　題

△ABC において，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の長さは 1，頂点 B から直線 CA に下ろした垂線の長さは$\sqrt{2}$，頂点 C から直線 AB に下ろした垂線の長さは 2 である。このとき，△ABC の面積と，内接円の半径，および，外接円の半径を求めよ。

[2010]

解答例

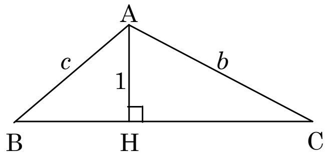
$a=\mathrm{BC}$，$b=\mathrm{CA}$，$c=\mathrm{AB}$とし，△ABC の面積を S とおくと，条件より，

$$S=\frac{1}{2}\cdot a\cdot 1=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ S=\frac{1}{2}\cdot b\cdot\sqrt{2}=\frac{\sqrt{2}}{2}b\cdots\cdots②,\ S=\frac{1}{2}\cdot c\cdot 2=c\cdots\cdots③$$

①②③より，$\dfrac{a}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}b=c$ となり，$a=2c\cdots\cdots④$，$b=\sqrt{2}c\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$a>b>c$ すなわち∠A が最大角となる。

すると，頂点 A から直線 BC に下ろした垂線の足 H は，辺 BC 上にあるので，BH＋CH＝a から，



$$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{b^2-1}=a$$

④⑤を代入して，$\sqrt{c^2-1}+\sqrt{2c^2-1}=2c$，$\sqrt{2c^2-1}=2c-\sqrt{c^2-1}$

ここで，$2c>c>\sqrt{c^2-1}$ から，$2c-\sqrt{c^2-1}>0$ となり，

$$2c^2-1=4c^2-4c\sqrt{c^2-1}+c^2-1,\ 4\sqrt{c^2-1}=3c$$

これより，$16(c^2-1)=9c^2$ となり，$c=\dfrac{4}{\sqrt{7}}=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$ である。

よって，③から，$S=\dfrac{4}{7}\sqrt{7}$

さて，△ABC の内接円の半径を r とおくと，③④⑤より，

$$\frac{1}{2}(2c+\sqrt{2}c+c)r=c,\ r=\frac{2}{3+\sqrt{2}}=\frac{2}{7}(3-\sqrt{2})$$

また，△ABC の外接円の半径を R とおき，$\sin B=\dfrac{1}{c}$ から，⑤と合わせると，

$$2R=\frac{\sqrt{2}c}{\sin B}=\sqrt{2}c^2=\frac{16}{7}\sqrt{2},\ R=\frac{8}{7}\sqrt{2}$$

コメント

いろいろな解法が考えられる三角比の応用問題です。上の解では，③に注目して，c の値を求めることを最優先としたものです。ただ，r の値を求めるときには不要でしたが。

問　題

$\triangle$ABC は AB = AC の二等辺三角形とする。$\angle$A, $\angle$B の大きさをそれぞれ A, B とおく。$A = 30^\circ$ のとき，次の問いに答えよ。

(1) 頂点 A から対辺 BC に下ろした垂線を AH とする。ただし，H は辺 BC 上の点である。このとき $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}}$ の値を求めよ。

(2) $\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B$ の値を求めよ。　[2009]

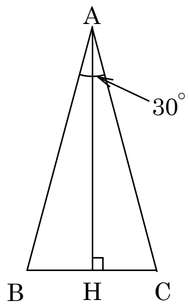
解答例

(1) $A = 30^\circ$ より，$B = \dfrac{1}{2}(180^\circ - 30^\circ) = 75^\circ$ から，

$$\tan B = \tan(45^\circ + 30^\circ) = \frac{\tan 45^\circ + \tan 30^\circ}{1 - \tan 45^\circ \tan 30^\circ}$$

$$= \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{3}}}{1 - 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}} = \frac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{3}-1} = 2 + \sqrt{3}$$

これから，$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{BC}} = \dfrac{\mathrm{AH}}{2\mathrm{BH}} = \dfrac{1}{2}\tan B = \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$



(2) (1)より，

$$\cos^2 75^\circ = \frac{1}{1+\tan^2 75^\circ} = \frac{1}{1+(2+\sqrt{3})^2} = \frac{1}{4(2+\sqrt{3})} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$$

よって，$\sin\left(\dfrac{A}{2}\right)\cos B = \sin(90^\circ - B)\cos B = \cos^2 B = \cos^2 75^\circ = \dfrac{2-\sqrt{3}}{4}$

コメント

三角比の定義についての基本問題です。いろいろな解法が考えられますが，加法定理を利用すると，上のようになります。

問　題

△ABC において，AB = 5，BC = 5 sin A，CA = 3 であるとする。

(1)　辺 BC の長さを求めよ。

(2)　△ABC の内接円の半径を求めよ。　[2006]

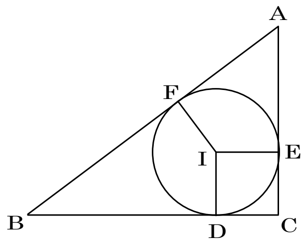
解答例

(1)　正弦定理より，

$$\frac{5\sin A}{\sin A}=\frac{5}{\sin C}$$

すると，$\sin C=1$ より，$C=90^\circ$ となる。

よって，$\mathrm{BC}=\sqrt{5^2-3^2}=4$



(2)　内接円の中心を I，半径を r とする。また，I から辺 BC，CA，AB に下ろした垂線の足をそれぞれ D，E，F とする。

このとき，四角形 IDCE は正方形となり，CD = CE = r である。

これより，BF = BD = $4-r$，AF = AE = $3-r$ となり，

$$(4-r)+(3-r)=5$$

よって，$r=1$

コメント

△ABC が直角三角形であるのは，問題文から予測できます。しかし，筋道を立てて示すということは必要です。

問　題

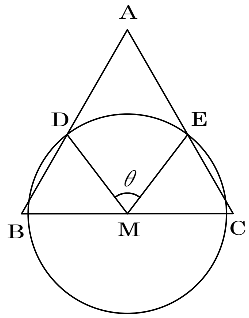
1 辺の長さが 1 の正三角形 ABC がある。辺 BC の中点 M を中心とする半径 r の円が辺 AB および辺 AC と共有点をもつとき，AB との共有点のうち頂点 A に近い方の点を D とし，AC との共有点のうち頂点 A に近い方の点を E とする。

(1) AD の長さが $\dfrac{3}{4}$ であるとき，r の値を求めよ。

(2) AD の長さを x とおくとき，r^2 を x の式で表せ。

(3) $\angle\mathrm{DME}=\theta$ とおくとき，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ となる r の値を求めよ。　[2004]

解答例



(1) $\mathrm{BD}=\mathrm{AB}-\mathrm{AD}=\dfrac{1}{4}$ から，△BMD に余弦定理を適用し，

$$r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{4}\cos 60^\circ=\frac{3}{16}$$

よって，$r=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(2) $\mathrm{AD}=x$ のとき，(1)と同様にして，

$$r^2=\left(\frac{1}{2}\right)^2+(1-x)^2-2\cdot\frac{1}{2}(1-x)\cos 60^\circ$$
$$=x^2-\frac{3}{2}x+\frac{3}{4}$$

(3) $\angle\mathrm{BDM}=\angle\mathrm{DAM}+\angle\mathrm{DMA}=30^\circ+\dfrac{\theta}{2}$ となり，△BMD に正弦定理を適用すると，

$$\frac{r}{\sin 60^\circ}=\frac{\frac{1}{2}}{\sin\left(30^\circ+\frac{\theta}{2}\right)},\quad r=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin\left(30^\circ+\frac{\theta}{2}\right)}=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sin\left(30^\circ+\frac{\theta}{2}\right)}$$

ここで，$\cos\theta=\dfrac{1}{3}$ より，$\sin^2\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{3}$，$\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

$$\cos^2\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{3}\right)=\frac{2}{3},\quad \cos\frac{\theta}{2}=\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

すると，$\sin\left(30^\circ+\dfrac{\theta}{2}\right)=\sin 30^\circ\cos\dfrac{\theta}{2}+\cos 30^\circ\sin\dfrac{\theta}{2}=\dfrac{\sqrt{2}+\sqrt{3}}{2\sqrt{3}}$ より，

$$r=\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{2\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}=\frac{3}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

コメント

(3)では，(2)の結論を利用していません。なお，問題文中の「頂点 A に近い方の点」という表現を，円と辺 AB，AC との共有点の個数がそれぞれ 2 個ずつであると読み込めば，その場合の r の範囲は $\dfrac{\sqrt{3}}{4}<r\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，(1)が解なしとなってしまいます。

問　題

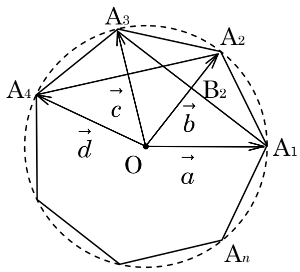
n を 4 以上の整数とする。座標平面上で正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ は点 O を中心とする半径 1 の円に内接している。$\vec{a}=\overrightarrow{OA_1}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OA_2}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OA_3}$，$\vec{d}=\overrightarrow{OA_4}$ とし，$k=2\cos\dfrac{2\pi}{n}$ とおく。そして，線分 A_1A_3 と線分 A_2A_4 との交点 P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するとする。

(1) $\vec{a}$ および $\vec{d}$ を，$\vec{b}$，$\vec{c}$，k を用いて表せ。

(2) t を k を用いて表し，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ を示せ。

(3) 不等式 $\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4}>\dfrac{1}{12}$ を示せ。　[2017]

解答例



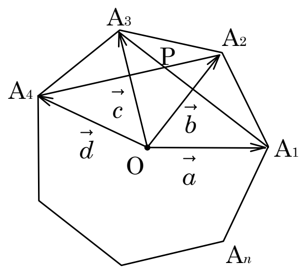
(1) 点 O を中心とする半径 1 の円に内接する正 n 角形 $A_1A_2\cdots A_n$ に対し，直線 OA_2 は線分 A_1A_3 の垂直二等分線であり，OA_2 と A_1A_3 との交点を B_2 とおくと，

$$OB_2=\cos\frac{2\pi}{n}=\frac{k}{2}$$

すると，$\dfrac{\vec{a}+\vec{c}}{2}=\dfrac{k}{2}\vec{b}$ より，$\vec{a}=k\vec{b}-\vec{c}$ である。

同様に，直線 OA_3 は線分 A_2A_4 の垂直二等分線なので，$\vec{d}=k\vec{c}-\vec{b}$ である。

なお，$n=4$ のときは $k=0$ であるが，このときも成立している。



(2) まず，P は線分 A_1A_3 を $t:1-t$ に内分するので，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{a}+t\vec{c}=(1-t)(k\vec{b}-\vec{c})+t\vec{c}$$
$$=(1-t)k\vec{b}+(2t-1)\vec{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，対称性より，P は線分 A_4A_2 を $t:1-t$ に内分するので，同様にすると，

$$\overrightarrow{OP}=(1-t)\vec{d}+t\vec{b}=(1-t)(k\vec{c}-\vec{b})+t\vec{b}$$
$$=(2t-1)\vec{b}+(1-t)k\vec{c}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$ と $\vec{c}$ は 1 次独立なので，$(1-t)k=2t-1$ となり，

$$(k+2)t=k+1,\quad t=\frac{k+1}{k+2}$$

ここで，$n\geqq 4$ より $0<\dfrac{2\pi}{n}\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，これより $0\leqq k<2$ なので，

$$t-\frac{1}{2}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{1}{2}=\frac{k}{2(k+2)}\geqq 0,\quad t-\frac{3}{4}=\frac{k+1}{k+2}-\frac{3}{4}=\frac{k-2}{4(k+2)}<0$$

よって，$\dfrac{1}{2}\leqq t<\dfrac{3}{4}$ である。

(3)　条件から，$A_1P : PA_3 = t : 1-t$ より，$\triangle PA_2A_3 = \dfrac{1-t}{t}\triangle PA_1A_2$ ………③

また，$A_2P : PA_4 = 1-t : t$ より，$\triangle PA_1A_2 = (1-t)\triangle A_1A_2A_4$ ………④

③④より，$\triangle PA_2A_3 = \dfrac{(1-t)^2}{t}\triangle A_1A_2A_4$ となり，(2)から，

$$\frac{(1-t)^2}{t} - \frac{1}{12} = \frac{12t^2 - 25t + 12}{12t} = \frac{(3t-4)(4t-3)}{12t} > 0$$

よって，$\dfrac{\triangle PA_2A_3}{\triangle A_1A_2A_4} = \dfrac{(1-t)^2}{t} > \dfrac{1}{12}$ である。

コメント

ベクトルの図形への応用です。(2), (3)は分数関数の値域を調べる方法もあります。

問　題

座標平面上にすべての内角が180°未満の四角形 ABCD がある。原点を O とし，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。k は$0\leqq k\leqq 1$を満たす定数とする。0以上の実数 s, t, u が $k+s+t+u=1$ を満たしながら変わるとき

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$$

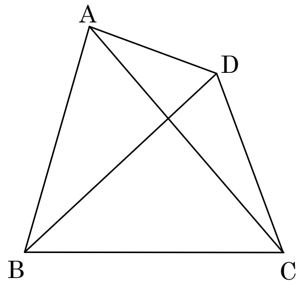
で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

(1)　$E(1)$ および $E(0)$ を求めよ。

(2)　$E\left(\dfrac{1}{3}\right)$ を求めよ。

(3)　対角線 AC, BD の交点を M とする。どの $E(k)$ $\left(\dfrac{1}{3}\leqq k\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ にも属するような点 P を考える。このような点 P が存在するための必要十分条件を，線分 AC, AM の長さを用いて答えよ。　[2016]

解答例



(1)　原点 O, 四角形 ABCD に対し，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$ とおく。定数 k は$0\leqq k\leqq 1$，0 以上の実数 s, t, u は $k+s+t+u=1$ を満たす。

そして，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+u\vec{d}$ で定められる点 P の存在範囲を $E(k)$ とする。

まず，$k=1$ のとき $s+t+u=0$ から $s=t=u=0$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}$ となる。すなわち，$E(1)$ は点 A である。

次に，$k=0$ のとき $s+t+u=1$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-s-t\geqq 0$ となり，

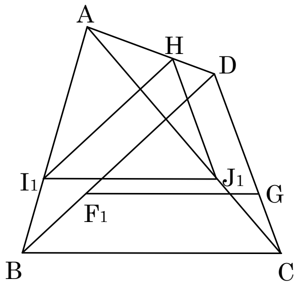
$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\vec{b}+t\vec{c}+(1-s-t)\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\vec{d}=s(\vec{b}-\vec{d})+t(\vec{c}-\vec{d})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}\quad (s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ s+t\leqq 1)$$

よって，$E(0)$ は△DBC の内部または辺上となる。

(2)　$k=\dfrac{1}{3}$ のとき，$s+t+u=\dfrac{2}{3}$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=\dfrac{2}{3}-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{3}\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+\left(\frac{2}{3}-s-t\right)\vec{d},\quad \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{\vec{a}+2\vec{d}}{3}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$



ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$ とおき，DB, DC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ $\mathrm{F_1}$，$\mathrm{G_1}$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{DF_1}}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{DG_1}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

これより，点 Q は$\triangle\mathrm{DF_1G_1}$の内部または辺上にある。

さらに，AD，AB，AC を $2:1$ に内分する点を，それぞれ H_1，I_1，J_1 とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{DF}_1}=\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1}$，$\overrightarrow{\mathrm{DG}_1}=\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{J}_1}$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}_1}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{P}}=\frac{3}{2}s\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1}+\frac{3}{2}t\overrightarrow{\mathrm{H}_1\mathrm{J}_1}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{3}{2}s+\frac{3}{2}t\leqq 1\right)$$

よって，$E\left(\frac{1}{3}\right)$ は $\triangle\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1\mathrm{J}_1$ の内部または辺上となる。

(3)　(2)と同様にして，$s+t+u=1-k$ から $s\geqq 0$，$t\geqq 0$，$u=1-k-s-t\geqq 0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}+(1-k-s-t)\vec{d},\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}-\{k\vec{a}+(1-k)\vec{d}\}=s\overrightarrow{\mathrm{DB}}+t\overrightarrow{\mathrm{DC}}$$

ここで，AD, AB, AC を $1-k:k$ に内分する点を，それぞれ H, I, J とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{DQ}},\ \overrightarrow{\mathrm{HP}}=\frac{s}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HI}}+\frac{t}{1-k}\overrightarrow{\mathrm{HJ}}\ \left(s\geqq 0,\ t\geqq 0,\ \frac{s}{1-k}+\frac{t}{1-k}\leqq 1\right)$$

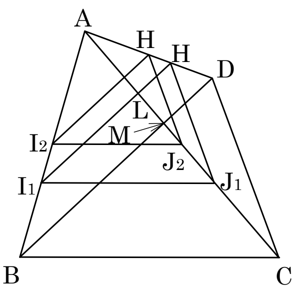
よって，$E(k)$ は $\triangle\mathrm{HIJ}$ の内部または辺上となる。

さて，$k=\frac{1}{2}$ のとき，AD，AB，AC の中点を，それぞれ H_2，I_2，J_2 とおくと，$E\left(\frac{1}{2}\right)$ は $\triangle\mathrm{H}_2\mathrm{I}_2\mathrm{J}_2$ の内部または辺上となる。

すると，$\frac{1}{3}\leqq k\leqq\frac{1}{2}$ において，どの $E(k)$ にも属するような点 P が存在する条件は，$E\left(\frac{1}{3}\right)$ と $E\left(\frac{1}{2}\right)$ に共通部分が存在することである。すなわち，対角線 AC, BD の交点を M, AC と $\mathrm{H}_1\mathrm{I}_1$ の交点を L とすると，

$$\mathrm{AJ}_2\geqq\mathrm{AL},\ \frac{1}{2}\mathrm{AC}\geqq\frac{2}{3}\mathrm{AM}$$

よって，求める条件は，$3\mathrm{AC}\geqq 4\mathrm{AM}$ である。



コメント

平面ベクトルと領域に関する問題です。解答例が書きにくいタイプで，やや冗長な感じもします。また，丁寧な誘導のため，後半になるに従い省略ぎみに記しましたが，それでもボリュームはかなりのものとなっています。

問　題

三角形 ABC の外心を O，重心を G とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は直角三角形であることを証明せよ。

(2)　k が $k\neq\dfrac{1}{3}$ を満たす実数で，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が成り立つならば，三角形 ABC は二等辺三角形であることを証明せよ。　[2011]

解答例

(1)　G は△ABC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ………①

条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$$

ここで，辺 BC の中点を M とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$ ……②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\vec{0}$ となり，△ABC の外心 O は M と一致する。

したがって，△ABC は $\angle\mathrm{A}=90^\circ$ の直角三角形である。

(2)　条件から，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ なので，①に代入すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(3k-1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

ここで，②から，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\dfrac{3k-1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ となり，$k\neq\dfrac{1}{3}$ より，3 点 O，A，M は同一直線上にある。一方，O は△ABC の外心なので，辺 BC の垂直二等分線上にあり，$\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$ である。

したがって，$\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ となるので，△ABC は $\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ の二等辺三角形である。

コメント

図形の性質とベクトルがうまくかみ合った基本的な問題です。

問　題

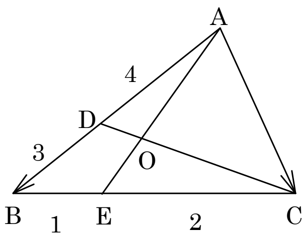
平面上の△ABC において，辺 AB を$4:3$に内分する点を D，辺 BC を$1:2$に内分する点を E とし，線分 AE と CD の交点を O とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{p}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{q}$とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{AO}}$を$\vec{p}$，$\vec{q}$で表せ。

(2)　点 O が△ABC の外接円の中心になるとき，3 辺 AB, BC, CA の長さの 2 乗の比を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　△ABE と直線 CD に対して，メネラウスの定理を適用すると，



$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=1,\quad \frac{\mathrm{EO}}{\mathrm{OA}}=\frac{\mathrm{DB}}{\mathrm{AD}}\cdot\frac{\mathrm{CE}}{\mathrm{BC}}=\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}=\frac{1}{2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AO}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2\vec{p}+\vec{q}}{3}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}$$

(2)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{BO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}-\vec{p}=-\frac{5}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}$

$$\overrightarrow{\mathrm{CO}}=\overrightarrow{\mathrm{AO}}-\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{4}{9}\vec{p}+\frac{2}{9}\vec{q}-\vec{q}=\frac{4}{9}\vec{p}-\frac{7}{9}\vec{q}$$

条件より，点 O は△ABC の外心なので，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BO}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{AO}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CO}}|$

$$|4\vec{p}+2\vec{q}|=|-5\vec{p}+2\vec{q}|\cdots\cdots①,\quad |4\vec{p}+2\vec{q}|=|4\vec{p}-7\vec{q}|\cdots\cdots②$$

①より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=25|\vec{p}|^2-20\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2$，$|\vec{p}|^2=4\vec{p}\cdot\vec{q}$

②より，$16|\vec{p}|^2+16\vec{p}\cdot\vec{q}+4|\vec{q}|^2=16|\vec{p}|^2-56\vec{p}\cdot\vec{q}+49|\vec{q}|^2$，$5|\vec{q}|^2=8\vec{p}\cdot\vec{q}$

さて，$\vec{p}\cdot\vec{q}=k$とおくと，$\mathrm{AB}^2=|\vec{p}|^2=4k$，$\mathrm{CA}^2=|\vec{q}|^2=\frac{8}{5}k$となり，

$$\mathrm{BC}^2=|\vec{p}-\vec{q}|^2=4k-2k+\frac{8}{5}k=\frac{18}{5}k$$

よって，$\mathrm{AB}^2:\mathrm{BC}^2:\mathrm{CA}^2=4k:\frac{18}{5}k:\frac{8}{5}k=10:9:4$

コメント

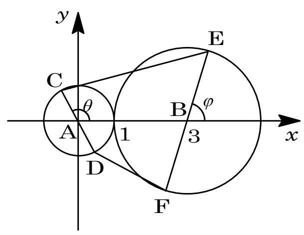
平面ベクトルの三角形への応用についての基本問題です。

問　題

平面上で$AB=3$となる 2 点 A, B をとる。点 A を中心とする半径 1 の円を S とし，点 B を中心とする半径 2 の円を T とする。2 点 C, D は円 S 上を動き，2 点 E, F は円 T 上を動く。ただし，線分 CD は点 A を通り，線分 EF は点 B を通る。このとき内積 $\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$ の最大値と最小値を求めよ。　[2007]

解答例

まず，右図のように，点 A を原点として，点$B(3,\ 0)$であるように座標系を設定する。



さて，条件より，点 C, D は A を中心とする半径 1 の円上にあるので，$C(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$D(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ とおくことができる。

また，点 E, F は B を中心とする半径 2 の円上にあるので，$E(3+2\cos\varphi,\ 2\sin\varphi)$，$F(3-2\cos\varphi,\ -2\sin\varphi)$とおくことができる。

これより，$\overrightarrow{CE}=(3+2\cos\varphi-\cos\theta,\ 2\sin\varphi-\sin\theta)$

$$\overrightarrow{DF}=(3-2\cos\varphi+\cos\theta,\ -2\sin\varphi+\sin\theta)$$

よって，
$$\begin{aligned}\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}&=9-(2\cos\phi-\cos\theta)^2-(2\sin\phi-\sin\theta)^2\\&=9-4-1+4(\cos\phi\cos\theta+\sin\phi\sin\theta)\\&=4+4\cos(\phi-\theta)\end{aligned}$$

以上より，$\overrightarrow{CE}\cdot\overrightarrow{DF}$は，$\cos(\varphi-\theta)=1$のとき最大値 8 をとり，$\cos(\varphi-\theta)=-1$のとき最小値 0 をとる。

コメント

座標系を設定し，内積の成分計算をしましたが，計算は予想外と言ってもよいほど少なめでした。

問　題

xyz 空間内に点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(-5,\ 4,\ 0)$ がある。点 C が y 軸上を動くとき，三角形 ABC の面積の最小値を求めよ。 [2004]

解答例

点 $\mathrm{C}(0,\ t,\ 0)$ とし，$\triangle\mathrm{ABC}$ の面積を S とする。

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-6,\ 3,\ -2)$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ t-1,\ -2)$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{36+9+4}=7,\ |\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=\sqrt{1+(t-1)^2+4}=\sqrt{t^2-2t+6}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=6+3(t-1)+4=3t+7$$

すると，$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{49(t^2-2t+6)-(3t+7)^2}$

$$=\frac{1}{2}\sqrt{40t^2-140t+245}=\frac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{8\left(t-\frac{7}{4}\right)^2+\frac{49}{2}}$$

よって，$t=\dfrac{7}{4}$ のとき, S は最小値 $\dfrac{\sqrt{5}}{2}\sqrt{\dfrac{49}{2}}=\dfrac{7\sqrt{10}}{4}$ をとる。

コメント

三角形の面積公式への代入練習とも思える問題です。

問　題

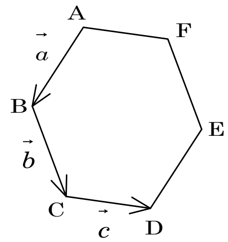
R を平面上の凸六角形とし，その頂点を順に A, B, C, D, E, F とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ とおく。R が $\overrightarrow{\mathrm{ED}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{FE}}=\vec{b}$ を満たすとする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\vec{c}$ であることを示せ。

(2)　三角形 ACE と三角形 BDF の重心が一致するとき，$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ の間の関係を求めよ。

(3)　R が(2)の条件を満たし，さらに内積に関して $\vec{a}\cdot\vec{b}=4$，$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ を満たすとき, R の面積を求めよ。　[2003]

解答例



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{BC}}+\overrightarrow{\mathrm{CD}}+\overrightarrow{\mathrm{DE}}+\overrightarrow{\mathrm{EF}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}-\vec{a}-\vec{b}=\vec{c}$

(2)　条件より，△ACE と△BDF は重心が一致するので,

$$\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\overrightarrow{\mathrm{AE}})=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\overrightarrow{\mathrm{AD}}+\overrightarrow{\mathrm{AF}})$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{a}+\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AE}}=\vec{b}+\vec{c}$ より，

$$(\vec{a}+\vec{b})+(\vec{b}+\vec{c})=\vec{a}+(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})+\vec{c}$$

よって，$\vec{b}=\vec{a}+\vec{c}$ ………(＊)

(3)　(1)より，対角線 AD の中点を中心として，四角形 ABCD を 180° 回転すると，四角形 DEFA に重なるので，六角形 R の面積は四角形 ABCD の面積の 2 倍である。

さて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=4$ なので, (＊)から $\vec{a}\cdot(\vec{a}+\vec{c})=4$，$|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{c}=4$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より，

$$|\vec{a}|^2=5,\ |\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\vec{a}|=\sqrt{5}$$

$\vec{b}\cdot\vec{c}=1$ なので, (＊)から $(\vec{a}+\vec{c})\cdot\vec{c}=1$，$\vec{a}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=1$ で，$\vec{a}\cdot\vec{c}=-1$ より，

$$|\vec{c}|^2=2,\ |\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=|\vec{c}|=\sqrt{2}$$

また，$|\vec{b}|^2=|\vec{a}+\vec{c}|^2=5+2\cdot(-1)+2=5$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=|\vec{b}|=\sqrt{5}$

さらに，$|\vec{a}+\vec{b}|^2=5+2\cdot4+5=18$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\vec{a}+\vec{b}|=3\sqrt{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AC}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=(\vec{a}+\vec{b})\cdot\vec{c}=-1+1=0$$

よって，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{BA}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{BA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}})^2}=\dfrac{1}{2}\sqrt{5\times5-(-4)^2}=\dfrac{3}{2}$

$$\triangle\mathrm{ACD}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|\cdot|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|=\frac{1}{2}\cdot3\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}=3$$

以上より, R の面積は，$(\triangle\mathrm{ABC}+\triangle\mathrm{ACD})\times2=\left(\dfrac{3}{2}+3\right)\times2=9$ である。

コメント

(3)では，AB = BC であることが気になりましたが，この点は無視して，普通に三角形の面積を計算しました。

問　題

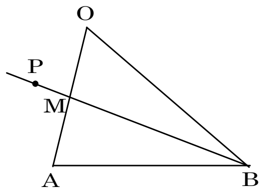
三辺の長さが $OA=2$, $OB=3$, $AB=\sqrt{7}$ の三角形 OAB がある。OA の中点を M とし，B を始点とする半直線 BM 上に $BP=t\mathrm{BM}$ となる点 P をとり，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$, $\overrightarrow{OB}=\vec{b}$ とする。

(1) $\overrightarrow{OP}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$ と t を用いて表せ。

(2) $\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(3) $AP\perp BM$ となるとき t の値を求めよ。 [1999]

解答例



(1) $BP=t\mathrm{BM}$ より，

$$\overrightarrow{OP}=\overrightarrow{OB}+t\overrightarrow{BM}=\vec{b}+t\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=\frac{1}{2}t\vec{a}+(1-t)\vec{b}$$

(2) △OAB に余弦定理を適用して，

$$7=2^2+3^2-2\vec{a}\cdot\vec{b},\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=3$$

(3) $AP\perp BM$ より，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{BM}=0$

(1)より，$\left(\left(\frac{1}{2}t-1\right)\vec{a}+(1-t)\vec{b}\right)\cdot\left(\frac{1}{2}\vec{a}-\vec{b}\right)=0$

$$\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}t-1\right)|\vec{a}|^2+\left(-t+\frac{3}{2}\right)(\vec{a}\cdot\vec{b})-(1-t)|\vec{b}|^2=0$$

$|\vec{a}|=2$, $|\vec{b}|=3$，また(2)より $\vec{a}\cdot\vec{b}=3$ なので，

$$7t-\frac{13}{2}=0,\ \ t=\frac{13}{14}$$

コメント

コメントのしようがないくらいの基本問題です。

問　題

空間に，同一直線上にない 3 点 O, A, B と 1 点 P がある。O, A, B を通る平面をαとし，点 P はα上にないとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおき，$|\vec{a}|=\sqrt{2}$, $|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=-1$, $\vec{p}\cdot\vec{a}=2$, $\vec{p}\cdot\vec{b}=-2$ とする。

(1) $\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}$ が平面αに垂直になるように実数 s, t を定めよ。

(2) 平面αに関して点 P と対称な点を Q とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$を$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{p}$を用いて表せ。

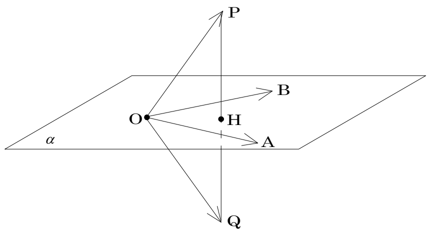
(3) 三角形 OPQ の面積が $\dfrac{2\sqrt{2}}{3}$ のとき，$\vec{p}$の大きさ$|\vec{p}|$を求めよ。　[1998]

解答例

(1) 条件より，$(\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{a}=0$ から

$$\vec{p}\cdot\vec{a}-s|\vec{a}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

$$2-2s+t=0\cdots\cdots\cdots①$$



また，$(\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b})\cdot\vec{b}=0$ から

$$\vec{p}\cdot\vec{b}-s\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{b}|^2=0$$

$$-2+s-2t=0\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{2}{3}$, $t=-\dfrac{2}{3}$

(2) (1)から，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}=\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}$ とおくと，点 H は平面α上の点であり，しかも，$\vec{p}-s\vec{a}-t\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\overrightarrow{\mathrm{HP}}$ がαに垂直なので，点 H は点 P からαに下ろした垂線の足となる。

すると, 2 点 P, Q の中点が H より，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{2}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{4}{3}\vec{a}-\frac{4}{3}\vec{b}-\vec{p}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|^2=\left|\dfrac{2}{3}\vec{a}-\dfrac{2}{3}\vec{b}\right|^2=\dfrac{4}{9}\left(|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2\right)=\dfrac{4}{9}(2+2+2)=\dfrac{8}{3}$

ここで，$\triangle\mathrm{OPH}=\dfrac{1}{2}\triangle\mathrm{OPQ}=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$

また，$\triangle\mathrm{OPH}=\dfrac{1}{2}\cdot\mathrm{OH}\cdot\mathrm{PH}=\dfrac{1}{2}\cdot\sqrt{\dfrac{8}{3}}\cdot\mathrm{PH}=\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\mathrm{PH}$

よって，$\sqrt{\dfrac{2}{3}}\cdot\mathrm{PH}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ から，$\mathrm{PH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$

三平方の定理から，$|\vec{p}|=\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2}=\sqrt{\dfrac{8}{3}+\dfrac{1}{3}}=\sqrt{3}$

コメント

P からαに下ろした垂線の足を表す位置ベクトルを求めることが(1)の意味です。これに気づくことが，(2)の解法のポイントです。また，(3)ではベクトルだけの計算で OP を求めてもよいのですが，上の解では直角に注目して図形的に考えてみました。

問　題

$k,\ m,\ n$ を自然数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　2^k を 7 で割った余りが 4 であるとする。このとき，k を 3 で割った余りは 2 であることを示せ。

(2)　$4m+5n$ が 3 で割り切れるとする。このとき，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではないことを示せ。　[2015]

解答例

(1)　k を自然数，$l,\ N$ を 0 以上の整数とするとき，

(i)　$k=3l+1$ のとき　$2^k=2^{3l+1}=2\cdot 8^l=2(7+1)^l=2(7N+1)=7\cdot 2N+2$

これより，2^k を 7 で割った余りは 2 である。

(ii)　$k=3l+2$ のとき　$2^k=2^{3l+2}=4\cdot 8^l=4(7+1)^l=4(7N+1)=7\cdot 4N+4$

これより，2^k を 7 で割った余りは 4 である。

(iii)　$k=3l+3$ のとき　$2^k=2^{3l+3}=8\cdot 8^l=8(7+1)^l=8(7N+1)=7(8N+1)+1$

これより，2^k を 7 で割った余りは 1 である。

(i)～(iii)より，2^k を 7 で割った余りが 4 のとき，k を 3 で割った余りは 2 である。

(2)　$m,\ n$ を自然数で，$4m+5n$ が 3 で割り切れるとき，

$$4m+5n=3(m+2n)+(m-n)$$

これより，$m-n$ は 3 で割り切れる，すなわち m を 3 で割った余りと n を 3 で割った余りは等しくなる。そこで，$m',\ n'$ を 0 以上の整数として，

(i)　$m,\ n$ を 3 で割った余りが 1 のとき　$m=3m'+1$，$n=3n'+1$

$$mn=(3m'+1)(3n'+1)=3(3m'n'+m'+n')+1$$

これより，mn を 3 で割った余りは 1 である。

(ii)　$m,\ n$ を 3 で割った余りが 2 のとき　$m=3m'+2$，$n=3n'+2$

$$mn=(3m'+2)(3n'+2)=3(3m'n'+2m'+2n'+1)+1$$

これより，mn を 3 で割った余りは 1 である。

(iii)　$m,\ n$ を 3 で割った余りが 0 のとき　$m=3m'+3$，$n=3n'+3$

$$mn=(3m'+3)(3n'+3)=3(3m'n'+3m'+3n'+3)$$

これより，mn を 3 で割った余りは 0 である。

(i)～(iii)より，mn を 3 で割った余りは 0 または 1 であり，2 ではない。

したがって，(1)より，2^{mn} を 7 で割った余りは 4 ではない。

コメント

テーマは整数の余りによる分類です。(2)の最後の行は，(1)で証明した命題の対偶を利用しています。なお，合同式を用いて記述しても構いません。

問　題

整数 p, $q\,(p \geqq q \geqq 0)$ に対して 2 項係数を ${}_p\mathrm{C}_q = \dfrac{p!}{q!(p-q)!}$ と定める。なお，$0! = 1$ とする。

(1) n, k が 0 以上の整数のとき，${}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\dfrac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \dfrac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right)$ を計算し，n によらない値になることを示せ。

(2) m が 3 以上の整数のとき，和 $\dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1)

$$
\begin{aligned}
{}_{n+k+1}\mathrm{C}_{k+1} \times \left(\frac{1}{{}_{n+k}\mathrm{C}_k} - \frac{1}{{}_{n+k+1}\mathrm{C}_k}\right) &= \frac{(n+k+1)!}{(k+1)!\,n!}\left\{\frac{k!\,n!}{(n+k)!} - \frac{k!\,(n+1)!}{(n+k+1)!}\right\} \\
&= \frac{n+k+1}{k+1} - \frac{n+1}{k+1} = \frac{k}{k+1}
\end{aligned}
$$

(2) (1)の等式について，$k = 2$ とすると，

$$
{}_{n+3}\mathrm{C}_3 \times \left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right) = \frac{2}{3},\quad \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right)
$$

これより，m が 3 以上の整数のとき，$S = \dfrac{1}{{}_3\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_4\mathrm{C}_3} + \dfrac{1}{{}_5\mathrm{C}_3} + \cdots + \dfrac{1}{{}_m\mathrm{C}_3}$ とおくと，

$$
\begin{aligned}
S &= \sum_{n=0}^{m-3} \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_3} = \frac{3}{2}\sum_{n=0}^{m-3}\left(\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_{n+3}\mathrm{C}_2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right) + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right) + \cdots + \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_{m-1}\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right) \\
&= \frac{3}{2}\left(\frac{1}{{}_2\mathrm{C}_2} - \frac{1}{{}_m\mathrm{C}_2}\right) = \frac{3}{2}\left\{1 - \frac{2}{m(m-1)}\right\} = \frac{3(m+1)(m-2)}{2m(m-1)}
\end{aligned}
$$

コメント

二項係数の計算問題です。(1)の誘導の利用の方法については，迷いはあまりないと思えます。

問　題

p, q を互いに素な 2 以上の整数，m, n は $m<n$ なる正の整数とする。このとき，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数のうち，m よりも大きく n よりも小さいものの総数を求めよ。　[2012]

解答例

互いに素な 2 以上の整数 p，q に対して，分母が p^2q^2 である分数で，0 より大きく 1 以下の数は，

$$\frac{1}{p^2q^2},\ \frac{2}{p^2q^2},\ \frac{3}{p^2q^2},\ \cdots\cdots,\ \frac{p^2q^2-1}{p^2q^2},\ \frac{p^2q^2}{p^2q^2}$$

この分数の中で，分子が p の倍数であるものは $\frac{p}{p^2q^2}$，$\frac{2p}{p^2q^2}$　…，$\frac{p^2q^2}{p^2q^2}$ より pq^2 個，分子が q の倍数であるものは $\frac{q}{p^2q^2}$，$\frac{2q}{p^2q^2}$　…，$\frac{p^2q^2}{p^2q^2}$ より p^2q 個，また分子が pq の倍数であるものは $\frac{pq}{p^2q^2}$，$\frac{2pq}{p^2q^2}$　…，$\frac{p^2q^2}{p^2q^2}$ より pq 個ある。

すると，分子が p でも q でも割り切れない分数の個数は，

$$p^2q^2-(pq^2+p^2q-pq)=pq(pq-p-q+1)=pq(p-1)(q-1)$$

よって，正の整数 m，$n\,(m<n)$ に対して，m よりも大きく n よりも小さく，分母が p^2q^2 で，分子が p でも q でも割り切れない分数の総数は，$pq(p-1)(q-1)(n-m)$ である。

コメント

0 より大きく 1 以下の分数について調べた後，m より大きく $m+1$ 以下の数，$m+1$ より大きく $m+2$ 以下の数，…と同様に考えています。

問　題

1より小さい正の実数 a に対して，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ と定める。そのうえで，数列 $\{a_n\}$ を以下の方法によって定める。

(i)　$n=1$ のときは，円 $C(a)$ が x 軸と接するような定数 a の値を a_1 とする。さらに，円 $C(a_1)$ と x 軸との接点を P_1 とし，円 $C(a_1)$ の中心を Q_1 とおく。

(ii)　$n\geqq 2$ のときは，円 $C(a)$ が直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ と接するような定数 a の値を a_n とする。さらに，円 $C(a_n)$ と直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ との接点を P_n とし，円 $C(a_n)$ の中心を Q_n とおく。

このとき，以下の問いに答えよ。

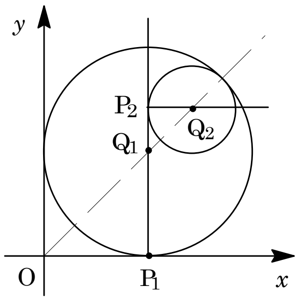
(1)　a_1 を求めよ。

(2)　a_2 を求めよ。

(3)　$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$0<a<1$ から，円 $C(a):(x+a-1)^2+(y+a-1)^2=2a^2$ は，中心 $(1-a,\ 1-a)$ で半径 $\sqrt{2}a$ である。



ここで，$a=a_1$ のとき，$C(a_1)$ が x 軸と接する条件は，

$$1-a_1=\sqrt{2}a_1,\ (\sqrt{2}+1)a_1=1$$

よって，$a_1=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

(2)　(1)より，$P_1(2-\sqrt{2},\ 0)$，$Q_1(2-\sqrt{2},\ 2-\sqrt{2})$ となり，直線 P_1Q_1 は $x=2-\sqrt{2}$ である。

条件より，円 $C(a_2)$ は直線 P_1Q_1 と接することより，

$$\left|(1-a_2)-(2-\sqrt{2})\right|=\sqrt{2}a_2,\ \sqrt{2}-1-a_2=\pm\sqrt{2}a_2$$

(i)　$\sqrt{2}-1-a_2=\sqrt{2}a_2$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=\sqrt{2}-1$ より，$a_2=\dfrac{\sqrt{2}-1}{\sqrt{2}+1}=(\sqrt{2}-1)^2=3-2\sqrt{2}$

(ii)　$\sqrt{2}-1-a_2=-\sqrt{2}a_2$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_2=\sqrt{2}-1$ となり，$0<a_2<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_2=3-2\sqrt{2}$ である。

(3)　円 $C(a_n)$ は中心 $(1-a_n,\ 1-a_n)$ で半径 $\sqrt{2}a_n$ であり，直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ は $x=1-a_{n-1}$ または $y=1-a_{n-1}$ である。

条件より，円 $C(a_n)$ と直線 $P_{n-1}Q_{n-1}$ が接するので，

$$\left|(1-a_n)-(1-a_{n-1})\right|=\sqrt{2}a_n,\ a_{n-1}-a_n=\pm\sqrt{2}a_n$$

(i)　$a_{n-1}-a_n=\sqrt{2}a_n$ のとき

$(\sqrt{2}+1)a_2=a_{n-1}$ より，$a_n=\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}a_{n-1}=(\sqrt{2}-1)a_{n-1}=a_1(\sqrt{2}-1)^{n-1}$

(1)より，$a_1=\sqrt{2}-1$ なので，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$

(ii)　$a_{n-1}-a_n=-\sqrt{2}a_n$ のとき

$-(\sqrt{2}-1)a_n=a_{n-1}$ となり，$0<a_n<1$，$0<a_{n-1}<1$ に反する。

(i)(ii)より，$a_n=(\sqrt{2}-1)^n$ である。

コメント

(3)では，n を偶奇に分けて処理が必要かとも思いましたが，対称性から不要でした。なお，円 $C(a)$ は a の値にかかわらず定点 $(1,\ 1)$ を通ることに注目すると，場合分けが必要ありません。

問　題

放物線 $y=x^2$ と直線 $y=ax+b$ によって囲まれる領域を

$$D=\{(x,\ y)\mid x^2\leqq y\leqq ax+b\}$$

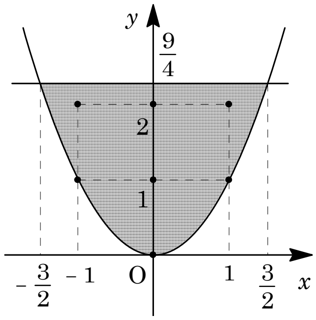
とし，D の面積が $\frac{9}{2}$ であるとする。座標平面上で，x 座標，y 座標がともに整数である点を格子点と呼ぶ。

(1)　$a=0$ のとき，D に含まれる格子点の個数を求めよ。

(2)　$a,\ b$ がともに整数であるとき，D に含まれる格子点の個数は，$a,\ b$ の値によらず一定であることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　$a=0$ のとき，$D: x^2\leqq y\leqq b$ であり，境界線 $y=x^2$ と $y=b$ の交点は，$x=\pm\sqrt{b}$ となる。



これより，D の面積は，

$$\int_{-\sqrt{b}}^{\sqrt{b}}(b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\sqrt{b}+\sqrt{b})^3=\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3$$

条件より，$\frac{4}{3}(\sqrt{b})^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{b}=\frac{3}{2}$，$b=\frac{9}{4}$

よって，D に含まれる格子点は，$(-1,\ 1)$，$(-1,\ 2)$，$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(0,\ 2)$，$(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ となり，その個数は 7 個である。

(2)　$D: x^2\leqq y\leqq ax+b$ に対して，境界線 $y=x^2$ と $y=ax+b$ の交点は，

$$x^2-ax-b=0,\quad x=\frac{a\pm\sqrt{a^2+4b}}{2}$$

ここで，$\alpha=\frac{a-\sqrt{a^2+4b}}{2}$，$\beta=\frac{a+\sqrt{a^2+4b}}{2}$ とおくと，D の面積は，

$$\int_{\alpha}^{\beta}(ax+b-x^2)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3$$

条件より，$\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2+4b}\right)^3=\frac{9}{2}$ となり，$\sqrt{a^2+4b}=3$，$a^2+4b=9$ ………(＊)

このとき，$\alpha=\frac{a-3}{2}$，$\beta=\frac{a+3}{2}$ である。

さて，$a,\ b$ は整数なので，(＊)から a は奇数となり，α，β はともに整数である。

すると，D に含まれる格子点の個数は，$\frac{a-3}{2}=\alpha\leqq x\leqq\beta=\frac{a+3}{2}$ において，

(i)　$x=\frac{a-3}{2}$ のとき　格子点は $(\alpha,\ \alpha^2)$ のみより，1 個である。

(ii)　$x=\dfrac{a-1}{2}$ のとき　(＊)より，$b=\dfrac{9-a^2}{4}$ となり，格子点の個数は，

$$a\cdot\frac{a-1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a-1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2-2a+9-a^2-a^2+2a-1+4)=3$$

(iii)　$x=\dfrac{a+1}{2}$ のとき　(ii)と同様にすると，格子点の個数は，

$$a\cdot\frac{a+1}{2}+\frac{9-a^2}{4}-\left(\frac{a+1}{2}\right)^2+1=\frac{1}{4}(2a^2+2a+9-a^2-a^2-2a-1+4)=3$$

(iv)　$x=\dfrac{a+3}{2}$ のとき　格子点は$(\beta,\ \beta^2)$のみより，1 個である。

(i)～(iv)より，格子点の個数は，a, b の値によらず，$1+3+3+1=8$ 個である。

コメント

(1)は(2)の誘導ではありませんが，うまくまとまった格子点の個数の問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　x を有理数とする。$7x^2$ が整数ならば, x は整数であることを示せ。

(2)　a, b を整数とする。a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数であることを示せ。

(3)　r は整数, s は有理数とする。$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2$ が整数ならば, s は整数であることを示せ。　[2008]

解答例

(1)　x は有理数より, $p\,(>0)$, q を互いに素な整数として, $x=\dfrac{q}{p}$ とおくことができ,

$$7x^2=\frac{7q^2}{p^2}$$

条件より, $7x^2$ は整数なので, p^2 は $7q^2$ の約数である。

ところが, p と q は互いに素なので, p^2 と q^2 も互いに素であり, p^2 は素数 7 の約数, すなわち $p^2=1$ または $p^2=7$ である。

すると, p は自然数より, $p=1$ となり, つまり x は整数である。

(2)　k, l を整数とし, a, b を偶数, 奇数に分けて考える。

(i)　$a=2k$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l)^2=4(k^2-7l^2)$$

(ii)　$a=2k$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k)^2-7(2l+1)^2=4(k^2-7l^2-7l-2)+1$$

(iii)　$a=2k+1$, $b=2l$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l)^2=4(k^2+k-7l^2)+1$$

(iv)　$a=2k+1$, $b=2l+1$ のとき

$$a^2-7b^2=(2k+1)^2-7(2l+1)^2=4(k^2+k-7l^2-7l-2)+2$$

(i)～(iv)より, a^2-7b^2 が 4 の倍数ならば, a と b はともに偶数である。

(3)　$\left(\dfrac{r}{2}\right)^2-7s^2=\dfrac{r^2-7(2s)^2}{4}$ が整数のとき, $r^2-7(2s)^2$ は 4 の倍数となり, しかも r が整数より, $7(2s)^2$ は整数となる。

すると, s は有理数なので, (1)から, $2s$ は整数である。

そこで, (2)の結果を用いると, r と $2s$ はともに偶数となり, s は整数である。

コメント

(1)と(2)が, (3)の巧みな誘導となっています。演習するに価値ある 1 題です。

問　題

n を奇数とする。

(1)　n^2-1 は 8 の倍数であることを証明せよ。

(2)　n^5-n は 3 の倍数であることを証明せよ。

(3)　n^5-n は 120 の倍数であることを証明せよ。　[2007]

解答例

(1)　$n^2-1=(n-1)(n+1)$ より, n が奇数のとき, $n-1$, $n+1$ は連続する偶数となり, 一方は 4 の倍数, もう一方は 4 の倍数でない偶数である。

よって, n^2-1 は 8 の倍数である。

(2)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)$ より, $n-1$, n, $n+1$ は連続する 3 つの整数なので, いずれか 1 つは 3 の倍数である。

よって, n^5-n は 3 の倍数である。

(3)　$n^5-n=(n-1)n(n+1)(n^2+1)=(n-1)n(n+1)(n^2-4+5)$

$$=(n-1)n(n+1)\{(n+2)(n-2)+5\}$$

$$=(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)+5(n-1)n(n+1)$$

これより, $n-2$, $n-1$, n, $n+1$, $n+2$ は連続する 5 つの整数なので, いずれか 1 つは 5 の倍数である。また, $5(n-1)n(n+1)$ は 5 の倍数である。

よって, n^5-n は 5 の倍数となる。

そこで, (1)から $n^5-n=(n^2-1)n(n^2+1)$ は 8 の倍数, (2)から n^5-n は 3 の倍数であることを考え合わせると, 8, 3, 5 が互いに素より, n^5-n は $8\times3\times5=120$ の倍数となる。

コメント

(3)では, n を 5 で割った余りで場合分けをする解法もあります。しかし, 記述量が多くなるため, (2)をヒントに式変形を考えたのが上の解です。

問　題

数列$\{a_n\}$において，$a_1=2$，$a_2=4$である。$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$とおくとき，$\{b_n\}$は正の公比をもつ等比数列とする。

(1) $\dfrac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}$を，$b_n$，$b_{n+1}$を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\sum_{n=1}^{6}\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=-1456$が成り立つとき

　(i) 一般項b_nを求めよ。

　(ii) 一般項a_nを求めよ。　[2005]

解答例

(1) 条件より，$b_n=\dfrac{a_{n+1}}{a_n}$なので，

$$\frac{(a_{n+1})^2-a_na_{n+2}}{a_na_{n+1}}=\frac{a_{n+1}}{a_n}-\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=b_n-b_{n+1}$$

(2) (i) 条件より，$\displaystyle\sum_{n=1}^{6}(b_n-b_{n+1})=-1456$から，$b_1-b_7=-1456$ ………(＊)

また，$b_1=\dfrac{a_2}{a_1}=\dfrac{4}{2}=2$なので，$b_7=2+1456=1458$

ここで，$\{b_n\}$の公比をrとすると，$b_7=2r^6$なので，

$$2r^6=1458,\ r^6=3^6$$

$r>0$から，$r=3$となり，$b_n=2\cdot3^{n-1}$である。

(ii) $\dfrac{a_{n+1}}{a_n}=2\cdot3^{n-1}$より，$a_{n+1}=2\cdot3^{n-1}a_n$となり，$n\geqq2$において，

$$a_n=a_1(2\cdot3^0)(2\cdot3^1)(2\cdot3^2)\cdots\cdots(2\cdot3^{n-2})=2^n\cdot3^{\frac{1}{2}(n-2)(n-1)}$$

$n=1$をあてはめると，$a_1=2^1\cdot3^0=2$となり，成立する。

コメント

$a_{n+1}=f(n)a_n$のタイプの漸化式です。詳細はピンポイントレクチャー「漸化式の解法」第2講を参照してください。

問　題

数列$\{a_n\}$を，$a_1=2$，$a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$ $(n=2,\ 3,\ \cdots)$で定める。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k$を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$a_n=\dfrac{1}{n}+\left(1-\dfrac{1}{n}\right)a_{n-1}$より，$na_n=1+(n-1)a_{n-1}$

数列$\{na_n\}$は，公差 1 の等差数列なので，

$$na_n=1\cdot a_1+(n-1)\cdot 1=2+n-1=n+1$$

よって，$a_n=\dfrac{n+1}{n}$

(2)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2a_k=\sum_{k=1}^{n}k^2\cdot\frac{k+1}{k}=\sum_{k=1}^{n}(k^2+k)=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{1}{2}n(n+1)$

$$=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1+3)=\frac{1}{3}n(n+1)(n+2)$$

コメント

落とすことのできない漸化式の基本問題です。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数とする。このとき，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 であることを証明せよ。

(2) 3 つの自然数 $a,\ b,\ c$ が，$a^2+b^2=c^2$ を満たしている。このとき, $a,\ b$ の少なくとも一方は偶数であることを証明せよ。 [2001]

解答例

(1) n を偶数と奇数で分類する。

(i) $n=2k\ (k\geqq 1)$ のとき

$n^2=4k^2$ より，n^2 を 4 で割った余りは 0 である。

(ii) $n=2k-1\ (k\geqq 1)$ のとき

$n^2=4k^2-4k+1=4(k^2-k)+1$ より，n^2 を 4 で割った余りは 1 である。

(i)(ii)より，n^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

(2) $a^2+b^2=c^2$ において, $a,\ b$ がともに奇数と仮定する。

すると，(1)より，左辺の a^2+b^2 を 4 で割った余りは $1+1=2$ である。しかし，右辺の c^2 を 4 で割った余りは 0 または 1 である。

よって，$a^2+b^2=c^2$ は成立しない。

以上より, $a,\ b$ の少なくとも一方は偶数である。

コメント

整数の余りによる分類という分野の基本問題です。(2)も(1)の誘導があるため，方針はすぐに決まります。

問　題

数列$\{a_n\}$は次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$a_1=\dfrac{1}{2}$　　　(ii)　$n\geqq 2$ について，$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$

ただし，$S_n=a_1+a_2+\cdots+a_n$ である。

(1)　a_2を求めよ。

(2)　$n\geqq 2$ に対して，S_n を S_{n-1} で表せ。

(3)　S_n を求めよ。

(4)　$n\geqq 2$ に対して，a_n を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$a_n=\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}$ ……①に $n=2$ を代入すると，$a_2=\dfrac{2{S_2}^2}{2S_2-1}=\dfrac{2(a_1+a_2)^2}{2(a_1+a_2)-1}$

$a_1=\dfrac{1}{2}$ より，$2a_2\left(\dfrac{1}{2}+a_2\right)-a_2=2\left(\dfrac{1}{2}+a_2\right)^2$ となり，$a_2=-\dfrac{1}{4}$

(2)　$n\geqq 2$ で，$a_n=S_n-S_{n-1}$ より，①から，$\dfrac{2{S_n}^2}{2S_n-1}=S_n-S_{n-1}$

$$2{S_n}^2=(S_n-S_{n-1})(2S_n-1),\ (2S_{n-1}+1)S_n=S_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$S_{n-1}=-\dfrac{1}{2}$ とすると②は不成立なので，$S_n=\dfrac{S_{n-1}}{2S_{n-1}+1}$ ………③

(3)　ある n で $S_n=0$ とすると，③より $S_{n-1}=0$ となり，帰納的に $S_1=0$ となるが，これは $S_1=a_1=\dfrac{1}{2}$ に反する。よって，どんな n に対しても $S_n\neq 0$ である。

③より，$\dfrac{1}{S_n}=\dfrac{2S_{n-1}+1}{S_{n-1}}=2+\dfrac{1}{S_{n-1}}$ なので，

$$\frac{1}{S_n}=\frac{1}{S_1}+2(n-1)=2+2(n-1)=2n,\ S_n=\frac{1}{2n}$$

(4)　①より, $n\geqq 2$ で，$a_n=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{4n^2}}{2\cdot\dfrac{1}{2n}-1}=\dfrac{1}{2n-2n^2}=\dfrac{1}{2n(1-n)}$

コメント

いわゆる和と一般項の関係を用いる問題です。(1)から(3)まで，親切すぎるほどの誘導がついています。

問　題

$a_1=1$，$a_n\neq 0$，$a_n=S_n{}^2-S_{n-1}{}^2$ $(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ で与えられる数列$\{a_n\}$がある。ただし，S_n は$\{a_n\}$の初項から第 n 項までの和である。

(1) a_2 を求めよ。

(2) S_n を求めよ。

(3) a_n を求めよ。 [1999]

解答例

(1) 条件より，$a_n=S_n{}^2-S_{n-1}{}^2=(S_n-S_{n-1})(S_n+S_{n-1})=a_n(S_n+S_{n-1})$

$a_n\neq 0$ より，$S_n+S_{n-1}=1$ $(n\geqq 2)$ ………①

①に $n=2$ を代入すると，$S_2+S_1=1$，$(a_2+a_1)+a_1=1$

$a_1=1$ より，$a_2=-1$

(2) ①より $S_n=-S_{n-1}+1$ なので，$S_n-\dfrac{1}{2}=-\left(S_{n-1}-\dfrac{1}{2}\right)$

$$S_n-\frac{1}{2}=\left(S_1-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1}=\left(a_1-\frac{1}{2}\right)(-1)^{n-1}=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}$$

よって，$S_n=\dfrac{1}{2}\left\{1+(-1)^{n-1}\right\}$

(3) $n\geqq 2$ で，$a_n=S_n-S_{n-1}=\dfrac{1}{2}\left\{1+(-1)^{n-1}\right\}-\dfrac{1}{2}\left\{1+(-1)^{n-2}\right\}$

$$=\frac{1}{2}(-1)^{n-1}(1+1)=(-1)^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$n=1$ を②にあてはめると，$a_1=(-1)^0=1$ となり成立する。

よって，$a_n=(-1)^{n-1}$ $(n\geqq 1)$

コメント

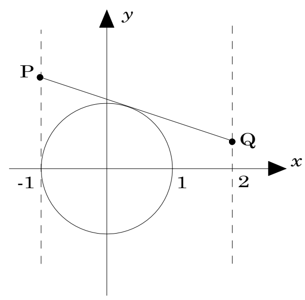
与えられた漸化式を予め変形しておくと, (1)の a_2 の値も簡単に求まります。

問　題

座標平面において, 2 点 P, Q をそれぞれ直線 $x=-1$, $x=2$ 上の点とし, 直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するように動くものとする。このとき, 2 点 P, Q の y 座標がともに整数であるような P, Q の組をすべて求めよ。 [1998]

解答例

$\mathrm{P}(-1,\ a)$, $\mathrm{Q}(2,\ b)$ とする。



$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(3,\ b-a)$ から, 直線 PQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a-b,\ 3)$ とおくことができる。

直線 PQ の方程式は,

$$(a-b)(x+1)+3(y-a)=0$$

$$(a-b)x+3y-2a-b=0$$

直線 PQ が円 $x^2+y^2=1$ に接するので,

$\dfrac{|-2a-b|}{\sqrt{(a-b)^2+9}}=1$ から, $|-2a-b|=\sqrt{(a-b)^2+9}$

両辺 2 乗して, $(2a+b)^2=(a-b)^2+9$, $(2a+b+a-b)(2a+b-a+b)=9$

$$a(a+2b)=3$$

a, b は整数より, a は 3 の約数となり, $a=\pm1,\ \pm3$

$a=1$ のとき $a+2b=3$ から, $b=1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ 1)$, $\mathrm{Q}(2,\ 1)$

$a=-1$ のとき $a+2b=-3$ から, $b=-1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ -1)$, $\mathrm{Q}(2,\ -1)$

$a=3$ のとき $a+2b=1$ から, $b=-1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ 3)$, $\mathrm{Q}(2,\ -1)$

$a=-3$ のとき $a+2b=-1$ から, $b=1$ となる。よって, $\mathrm{P}(-1,\ -3)$, $\mathrm{Q}(2,\ 1)$

コメント

円と直線が接する条件を整理すると, 約数・倍数の関係の使える数式がすんなりと導けました。意外なくらい簡単に P, Q の座標が求まってしまいます。

問　題

1 個のさいころを 3 回投げて，以下のルールで各回の得点を決める。

・ 1 回目は，出た目が得点になる。

・ 2 回目は，出た目が 1 回目と同じならば得点は 0，異なれば出た目が得点になる。

・ 3 回目は，出た目が 1 回目または 2 回目と同じならば得点は 0，どちらとも異なれば出た目が得点になる。

3 回の得点の和を総得点とし，総得点が n となる確率を p_n とする。

(1) 総得点 n の最大値，最小値と，それらの n に対する p_n を求めよ。

(2) p_6 を求めよ。 [2017]

解答例

(1) 題意の総得点 n が最大となるのは，3 回の出た目が 6，5，4 の場合で，最大値は $n=6+5+4=15$ である。このときの確率 p_{15} は，

$$p_{15}=3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{36}$$

また，総得点 n が最小となるのは，3 回の出た目が 1，1，1 の場合で，最小値は $n=1+0+0=1$ である。このときの確率 p_1 は，

$$p_1=\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(2) 総得点が 6 のとき，3 回の出た目について同じ目の出方で場合分けをする。

(i) 同じ目が出なかったとき

3 回の出た目は 1, 2, 3 の場合だけであり，このときの確率は，

$$3!\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{6}{216}$$

(ii) 同じ目が 2 回出たとき

3 回の出た目は 1，1，5 または 1，5，5 または 2，2，4 または 2，4，4 の場合であり，このときの確率は，

$$\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{3!}{2!}\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{12}{216}$$

(iii) 同じ目が 3 回出たとき

3 回の出た目は 6, 6, 6 の場合だけであり，このときの確率は，

$$\left(\frac{1}{6}\right)^3=\frac{1}{216}$$

(i)～(iii)より，総得点 6 の確率 p_6 は，$p_6=\frac{6}{216}+\frac{12}{216}+\frac{1}{216}=\frac{19}{216}$

コメント

確率の基本的な問題です。ミスに要注意です。

問　題

1 個のさいころを 2 回投げ，最初に出た目を a，2 回目に出た目を b とする。2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1) 実数解は存在すれば正であることを示せ。

(2) 実数解の個数が 1 となる確率を求めよ。

(3) 実数解の個数が 2 となる確率を求めよ。 [2016]

解答例

(1) $1 \leqq a \leqq 6$，$1 \leqq b \leqq 6$ に対して，2 次方程式 $x^2 - ax + b = 0$ が実数解をもつとき，この実数解を α，β とすると，

$$\alpha + \beta = a > 0,\ \alpha\beta = b > 0$$

よって，α，β はともに正である。

(2) 実数解の個数が 1 となるとき，$D = a^2 - 4b = 0$ すなわち $a^2 = 4b$ から，

$$(a,\ b) = (2,\ 1),\ (4,\ 4)$$

よって，この場合の確率は，$\dfrac{2}{6^2} = \dfrac{1}{18}$ である。

(3) 実数解の個数が 2 となるとき，$D = a^2 - 4b > 0$ すなわち $a^2 > 4b$ から，

(i) $b = 1$ のとき　$a^2 > 4$ から，$a = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ で 4 通り。

(ii) $b = 2$ のとき　$a^2 > 8$ から，$a = 3,\ 4,\ 5,\ 6$ で 4 通り。

(iii) $b = 3$ のとき　$a^2 > 12$ から，$a = 4,\ 5,\ 6$ で 3 通り。

(iv) $b = 4$ のとき　$a^2 > 16$ から，$a = 5,\ 6$ で 2 通り。

(v) $b = 5$ のとき　$a^2 > 20$ から，$a = 5,\ 6$ で 2 通り。

(vi) $b = 6$ のとき　$a^2 > 24$ から，$a = 5,\ 6$ で 2 通り。

(i)～(iv)より，この場合の確率は，$\dfrac{4+4+3+2+2+2}{6^2} = \dfrac{17}{36}$ である。

コメント

よく見かける確率に関する基本題です。

問　題

さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回においては 6 の目が偶数回出て，しかも最後の 2 回においては 6 の目がちょうど 1 回出る確率を求めよ。ただし，6 の目が一度も出ない場合も 6 の目が出る回数を偶数回とみなす。　[2015]

解答例

さいころを 5 回振るとき，初めの 4 回に 6 の目の出る回数で場合分けをし，確率を求めると，

(i)　初めの 4 回に 6 の目が出ず，5 回目に 6 の目が出るとき

$$\left(\frac{5}{6}\right)^4\times\frac{1}{6}=\frac{5^4}{6^5}$$

(ii)　初めの 4 回に 6 の目が 2 回出るとき

(ii-i)　初めの 3 回に 6 が 1 回，4 回目に 6，5 回目に 6 が出ないとき

$$ {}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{6}\left(\frac{5}{6}\right)^2\times\frac{1}{6}\times\frac{5}{6}=\frac{3\cdot 5^3}{6^5}$$

(ii-ii)　初めの 3 回に 6 が 2 回，4 回目に 6 が出ず，5 回目に 6 が出るとき

$$ {}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{5}{6}\times\frac{5}{6}\times\frac{1}{6}=\frac{3\cdot 5^2}{6^5}$$

(iii)　初めの 4 回に 6 の目が 4 回，5 回目に 6 の目が出ないとき

$$\left(\frac{1}{6}\right)^4\times\frac{5}{6}=\frac{5}{6^5}$$

(i)～(iii)より，求める確率は，

$$\frac{5^4}{6^5}+\frac{3\cdot 5^3}{6^5}+\frac{3\cdot 5^2}{6^5}+\frac{5}{6^5}=\frac{5(5^3+3\cdot 5^2+3\cdot 5+1)}{6^5}=\frac{5\cdot 216}{6^5}=\frac{5}{36}$$

コメント

センター試験に出題されるような確率の基本問題です。

問　題

A, B ふたりは，それぞれ 1 から 4 までの番号のついた 4 枚のカードを持ち，それを用いて何回かの勝負からなる次のゲームをする。

・初めに A, B はそれぞれ 4 枚のカードを自分の袋に入れ，よくかきまぜる。

・A, B はそれぞれ自分の袋から無作為に 1 枚ずつカードを取り出し，そのカードを比較して 1 回の勝負を行う。すなわち，大きい番号のついたカードを取り出した方がこの回は勝ちとし，番号が等しいときはこの回は引き分けとする。

・袋から取り出したカードは袋に戻さないものとする。

・A, B どちらかが 2 回勝てば，カードの取り出しはやめて，2 回勝った方をゲームの勝者とする。4 枚すべてのカードを取り出してもいずれも 2 回勝たなければゲームは引き分けとする。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　A が 0 勝 0 敗 4 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(2)　A が 1 勝 1 敗 2 引き分けしてゲームが引き分けになる確率を求めよ。

(3)　A がゲームの勝者になる確率を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　A が 0 勝 0 敗 4 引き分けして，ゲームが引き分けになるのは，A と B が同じ番号のカードを 4 回出した場合より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\right)^2\times 4! = \frac{1}{24}$$

(2)　A が 1 勝 1 敗 2 引き分けして，ゲームが引き分けになるのは，A と B が同じ番号のカードを 2 回，異なる番号のカードを 2 回出した場合である。同じ番号の選び方が ${}_4C_2 = 6$ 通りより，その確率は，

$$6\times\left(\frac{1}{4}\times\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}\times 1\right)^2\times 4! = \frac{1}{4}$$

(3)　まず，引き分けの回数が 1 または 3 で，ゲームが引き分けになるの場合はありえない。さらに，A と B の勝負は対等なので，A がゲームの勝者になる確率は，

$$\frac{1}{2}\times\left(1-\frac{1}{24}-\frac{1}{4}\right) = \frac{17}{48}$$

コメント

条件設定は複雑ですが，内容は確率の基本問題です。

問　題

1から9までの番号をつけた9枚のカードがある。これらを無作為に1列に並べる試行を行う。

(1)　下記の条件(A)が成り立つ確率を求めよ。

(2)　下記の条件(B)が成り立つ確率を求めよ。

(3)　条件(A), (B)が同時に成り立つ確率を求めよ。

ただし，条件(A), (B)は次のとおりである。

(A)　番号1のカードと番号2のカードは隣り合わない。

(B)　番号8のカードと番号9のカードの間には，ちょうど1枚のカードがある。

[2013]

解答例

(1)　9枚のカードを無作為に1列に並べる$9!$通りが同様に確からしい。

さて，番号1のカードと番号2のカードが隣り合うのは，この2枚のカードの位置も考えると，$2!\times 8!$通りとなる。

よって，番号1のカードと番号2のカードは隣り合わない確率は，

$$1-\frac{2!\times 8!}{9!}=1-\frac{2}{9}=\frac{7}{9}$$

(2)　番号8のカードと番号9のカードの間の1枚のカードの選び方が7通りなので，番号8と番号9のカードの間にちょうど1枚のカードがある場合は，この2枚のカードの位置も考えると，$7\times 2!\times 7!$通りとなる。すると，その確率は，

$$\frac{7\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{7}{36}$$

(3)　番号1と2のカードが隣り合わず，しかも番号8と9のカードの間にちょうど1枚のカードがあるのは，番号8と9のカードの間にあるカードで場合分けをして，

(i)　番号1または2のカードがあるとき

番号1と2のカードは隣り合わないので，$2\times 2!\times 7!$通りとなり，この確率は，

$$\frac{2\times 2!\times 7!}{9!}=\frac{1}{18}$$

(ii)　番号3から7までのカードのいずれかがあるとき

番号3から7までの5枚のカードのいずれかがあるのは，$5\times 2!\times 7!$通りとなる。この中で，番号1と2のカードが隣り合うのは，$5\times 2!\times(2!\times 6!)$通りより，この場合の確率は，

$$\frac{5\times 2!\times 7!}{9!}-\frac{5\times 2!\times(2!\times 6!)}{9!}=\frac{5}{36}-\frac{5}{126}=\frac{25}{252}$$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{18}+\dfrac{25}{252}=\dfrac{13}{84}$ である。

コメント

確率の基本的な問題ですが，それがかえって，数えもれなどの不安を抱え込んでしまいます。

問　題

さいころを 7 回投げ, k 回目 $(1\leqq k\leqq 7)$ に出る目を X_k とする。

(1)　積 X_1X_2 が 18 以下である確率を求めよ。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が偶数である確率を求めよ。

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率を求めよ。

(4)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 である確率を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　積 X_1X_2 が 18 より大となるのは, $X_1=X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(5,\ 5)$, $(6,\ 6)$ である。また, $X_1<X_2$ のとき $(X_1,\ X_2)=(4,\ 5)$, $(4,\ 6)$, $(5,\ 6)$, $X_1>X_2$ のときも同様になる。

よって, 積 X_1X_2 が 18 以下である確率は, $1-\dfrac{2+3\cdot 2}{6^2}=\dfrac{7}{9}$ である。

(2)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が奇数である確率は $\left(\dfrac{3}{6}\right)^7=\dfrac{1}{128}$ から, 偶数である確率は,

$$1-\frac{1}{128}=\frac{127}{128}$$

(3)　積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数でない偶数であるのは, X_1, X_2, $\cdots$, X_7 のうちの 1 つが 2 または 6, 残りが奇数の場合より, その確率は, ${}_7\mathrm{C}_1\dfrac{2}{6}\left(\dfrac{3}{6}\right)^6=\dfrac{7}{192}$ である。

よって, 積 $X_1X_2\cdots X_7$ が 4 の倍数である確率は, (2)より,

$$\frac{127}{128}-\frac{7}{192}=\frac{367}{384}$$

(4)　さいころの出る目を 3 で割った余りが 0, 1, 2 の場合をそれぞれ R_0, R_1, R_2 とおくと, いずれの場合も起こる確率は $\dfrac{2}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

ここで, 自然数を 3 で割った余りについて, 2 数とその積の関係をまとめると右表のようになる。

	R_0	R_1	R_2
R_0	R_0	R_0	R_0
R_1	R_0	R_1	R_2
R_2	R_0	R_2	R_1

すると, 積 $X_1X_2\cdots X_7$ を 3 で割ったときの余りが 1 であるのは, X_1, X_2, $\cdots$, X_7 のうち, R_1 が 7 回, または R_1 が 5 回で R_2 が 2 回, または R_1 が 3 回で R_2 が 4 回, または R_1 が 1 回で R_2 が 6 回という 4 通りの場合があり, その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^7+{}_7\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^5\left(\frac{1}{3}\right)^2+{}_7\mathrm{C}_4\left(\frac{1}{3}\right)^3\left(\frac{1}{3}\right)^4+{}_7\mathrm{C}_6\frac{1}{3}\left(\frac{1}{3}\right)^6=64\left(\frac{1}{3}\right)^7=\frac{64}{2187}$$

コメント

確率の頻出問題です。(4)は, 積が R_1 となるのは, R_0 が 0 回で, R_2 が 0 または偶数回という意味です。

問　題

1 個のさいころを 3 回投げる。1 回目に出る目を a_1, 2 回目に出る目を a_2, 3 回目に出る目を a_3 とし，整数 n を，$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定める。

(1)　$n=0$ である確率を求めよ。

(2)　$|n|=30$ である確率を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$n=(a_1-a_2)(a_2-a_3)(a_3-a_1)$ と定めるとき，$n\neq 0$ であるのは，a_1，a_2，a_3 がすべて異なる場合より，その確率は，$\dfrac{{}_6\mathrm{P}_3}{6^3}=\dfrac{5}{9}$ である。

よって，$n=0$ である確率は，$1-\dfrac{5}{9}=\dfrac{4}{9}$ である。

(2)　$|n|=|a_1-a_2||a_2-a_3||a_3-a_1|$ より，$|n|=30$ となるためには，$30=5\times3\times2$ から，$|a_1-a_2|=5$，$|a_2-a_3|=5$，$|a_3-a_1|=5$ のいずれかが成り立つ。

(i)　$|a_1-a_2|=5$ のとき　$(a_1,\ a_2)=(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$

$(a_1,\ a_2)=(1,\ 6)$ では，$|6-a_3||a_3-1|=3\times2$ から，$a_3=3,\ 4$

$(a_1,\ a_2)=(6,\ 1)$ では，$|1-a_3||a_3-6|=3\times2$ から，$a_3=3,\ 4$

よって，$(a_1,\ a_2,\ a_3)$ の組は，$2\times2=4$ 通りとなる。

(ii)　$|a_2-a_3|=5$ のとき　(i)と同様に 4 通りである。

(iii)　$|a_3-a_1|=5$ のとき　(i)と同様に 4 通りである。

(i)～(iii)より，$|n|=30$ である確率は，$\dfrac{4\times3}{6^3}=\dfrac{1}{18}$ である。

コメント

(2)の設問では，場合分けがかなり繁雑ではないかと思いましたが，差が 5 に注目すると，それほどではありませんでした。

問　題

1 辺の長さが 2 の正六角形$A_1A_2A_3A_4A_5A_6$を考える。さいころを 3 回投げ，出た目を順に i, j, k とするとき，$\triangle A_iA_jA_k$の面積を 2 乗した値を得点とする試行を行う。ただし，i, j, k の中に互いに等しい数があるときは，得点は 0 であるとする。

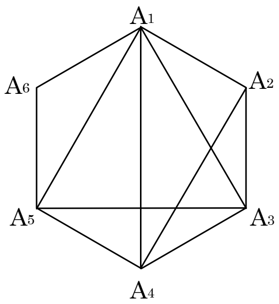
(1)　得点が 0 となる確率を求めよ。

(2)　得点が 27 となる確率を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　さいころを 3 回投げて出た目 i, j, k の組は6^3通りあり，これらは同様に確からしい。



さて，得点が 0 でないのは，i, j, k がすべて異なるときであり，その確率は，

$$\frac{{}_6P_3}{6^3}=\frac{5}{9}$$

よって，得点が 0 となる確率は，$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ である。

(2)　得点を X とおき，$X=n$ のときの確率を$P(n)$で表すと，$X\neq 0$であるのは，次の 3 種類である。

(i)　$\triangle A_iA_jA_k$が 3 辺の長さ2，2，$2\sqrt{3}$の二等辺三角形の場合

$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_2A_3A_4$，$\triangle A_3A_4A_5$，$\triangle A_4A_5A_6$，$\triangle A_5A_6A_1$，$\triangle A_6A_1A_2$の場合が対応し，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin\frac{2}{3}\pi\right)^2=3,\ P(3)=\frac{6\times 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$$

(ii)　$\triangle A_iA_jA_k$が 3 辺の長さ2，$2\sqrt{3}$，4の直角三角形の場合

長さ 4 の斜辺はA_1A_4，A_2A_5，A_3A_6の 3 種類あり，それぞれに対して，もう 1 つの頂点は 4 通りずつ決まることより，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sqrt{3}\right)^2=12,\ P(12)=\frac{3\times 4\times 3!}{6^3}=\frac{1}{3}$$

(iii)　$\triangle A_iA_jA_k$が辺の長さ$2\sqrt{3}$の正三角形の場合

$\triangle A_1A_3A_5$，$\triangle A_2A_4A_6$の場合が対応し，

$$X=\left(\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}\sin\frac{1}{3}\pi\right)^2=27,\ P(27)=\frac{2\times 3!}{6^3}=\frac{1}{18}$$

(i)～(iii)より，得点が 27 となる確率は，$\frac{1}{18}$ である。

(3)　Xの期待値を$E(X)$とおくと, (1), (2)から,

$$E(X) = 0\times\frac{4}{9} + 3\times\frac{1}{6} + 12\times\frac{1}{3} + 27\times\frac{1}{18} = 6$$

コメント

正六角形を題材とした確率の基本題です。ケアレスミスを防ぐために, すべての場合の確率の和が 1 となっていることの確認が必要です。

問　題

1 から 9 までの番号をつけた 9 枚のカードがある。このなかから無作為に 4 枚のカードを同時に取り出し，カードに書かれた 4 つの番号の積を X とおく。

(1)　X が 5 の倍数になる確率を求めよ。

(2)　X が 10 の倍数になる確率を求めよ。

(3)　X が 6 の倍数になる確率を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　まず，9 枚のカードから 4 枚のカードを取り出す ${}_9\mathrm{C}_4$ 通りが同様に確からしいとし，事象 E の起こる確率を $P(E)$ とおく。

さて，X が 5 の倍数になる事象を A とすると，$P(\overline{A})=\dfrac{{}_8\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{9}$ から，

$$P(A)=1-P(\overline{A})=1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$$

(2)　X が 2 の倍数になる事象を B とすると，X が 10 の倍数になる事象は $A\cap B$ となり，$P(\overline{B})=\dfrac{{}_5\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{126}$，$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\dfrac{{}_4\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{1}{126}$ から，

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$
$$=1-\frac{5}{9}-\frac{5}{126}+\frac{1}{126}=\frac{26}{63}$$

(3)　X が 3 の倍数になる事象を C とすると，X が 6 の倍数になる事象は $B\cap C$ となり，$P(\overline{C})=\dfrac{{}_6\mathrm{C}_4}{{}_9\mathrm{C}_4}=\dfrac{5}{42}$，$P(\overline{B}\cap\overline{C})=0$ から，

$$P(B\cap C)=1-P(\overline{B\cap C})=1-P(\overline{B}\cup\overline{C})=1-P(\overline{B})-P(\overline{C})+P(\overline{B}\cap\overline{C})$$
$$=1-\frac{5}{126}-\frac{5}{42}=\frac{53}{63}$$

コメント

余事象の確率が求めやすく，これを起点に計算を進めていくタイプの有名題の 1 つです。3 つの設問は，同じスタイルで解いています。

問　題

n を自然数とする。1 個のさいころを続けて 2 回投げ，1 回目に出た目の数を x，2 回目に出た目の数を y とする。$|x-n|+|y-n| \leqq n$ となる確率を P_n で表すとき，次の問いに答えよ。

(1)　P_1 を求めよ。

(2)　P_n が最大となる n を求め，そのときの P_n を求めよ。

(3)　$P_n = \dfrac{1}{36}$ となる n を求めよ。　[2008]

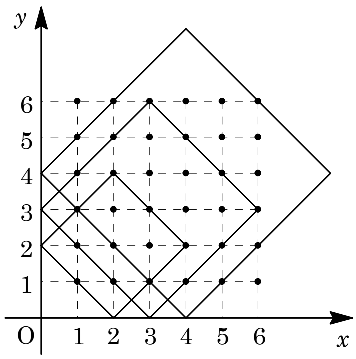
解答例

(1)　$|x-1|+|y-1| \leqq 1$ を満たす $(x,\ y)$ は，$(x,\ y)=(1,\ 1)$，$(2,\ 1)$，$(1,\ 2)$

よって，$P_1 = \dfrac{3}{36} = \dfrac{1}{12}$ である。

(2)　$n \geqq 2$ に対し，$|x-n|+|y-n| \leqq n$ ……(＊)を満たす 1 以上 6 以下の整数 $(x,\ y)$ の個数を求める。

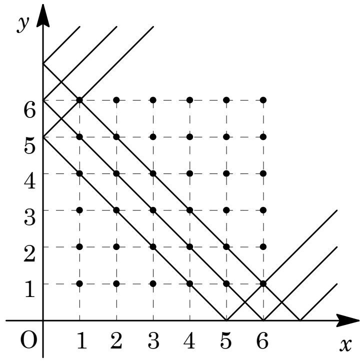
(i)　$n=2,\ 3,\ 4$ のとき



右図において，(＊)を満たす正方形の内部または辺上にある格子点 $(x,\ y)$ は，$n=2$ のとき 11 個，$n=3$ のとき 23 個，$n=4$ のとき 31 個であり，

$$P_2 = \frac{11}{36},\ P_3 = \frac{23}{36},\ P_4 = \frac{31}{36}$$

(ii)　$n \geqq 5$ のとき



右図において，(＊)を満たす $(x,\ y)$ は，直線 $x+y=n$ の上側または線上にある格子点となり，$n=5$ のとき 30 個，$n=6$ のとき 26 個，$n=7$ のとき 21 個，…となり，

$$P_5 = \frac{30}{36},\ P_6 = \frac{26}{36},\ P_7 = \frac{21}{36},\ \cdots$$

また，(＊)を満たす格子点の個数は，n の増加に伴って，明らかに単調に減少する。

(i)(ii)より，P_n は $n=4$ のとき最大となり，$P_4 = \dfrac{31}{36}$ である。

(3)　(2)より，$P_n = \dfrac{1}{36}$ となるのは，(＊)を満たす $(x,\ y)$ が 1 個の場合であり，

$(x,\ y)=(6,\ 6)$

よって，$n=12$ である。

コメント

(＊)を満たす$(x,\ y)$の個数をすばやく数えるためには，上の解のように，図示するのが最も安全でしょう。ただ，その実行を決断するには，時間がかかります。

問　題

1 から 5 までの数字が書かれたカードが，それぞれ 2 枚ずつ，合わせて 10 枚ある。この中からカードを 2 枚同時に取り出し，その数字を X，Y とする。ただし，$X \leqq Y$ とする。

(1)　$X=Y$ となる確率を求めよ。

(2)　$X=3$ となる確率を求めよ。

(3)　X の期待値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　10 枚から 2 枚を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$ 通りが，同様に確からしい。

$X=Y$ となる場合は 5 通りより，その確率は，

$$\frac{5}{45}=\frac{1}{9}$$

(2)　$X=3$ となるとき，Y は $Y=3,\ 4,\ 5$ のいずれかである。

(i)　$X=3,\ Y=3$ のとき　その確率は $\dfrac{1}{45}$

(ii)　$X=3,\ Y=4$ のとき　その確率は $\dfrac{2\times2}{45}=\dfrac{4}{45}$

(iii)　$X=3,\ Y=5$ のとき　その確率は $\dfrac{2\times2}{45}=\dfrac{4}{45}$

(i)～(iii)より，$X=3$ となる確率は，

$$\frac{1}{45}+\frac{4}{45}+\frac{4}{45}=\frac{9}{45}=\frac{1}{5}$$

(3)　$X=k$ となる確率を $P(k)$ とおくと，(2)から，$P(3)=\dfrac{9}{45}$ である。

すると，同様に考えて，$P(1)=\dfrac{1}{45}+\dfrac{4}{45}+\dfrac{4}{45}+\dfrac{4}{45}+\dfrac{4}{45}=\dfrac{17}{45}$

$$P(2)=\frac{1}{45}+\frac{4}{45}+\frac{4}{45}+\frac{4}{45}=\frac{13}{45},\quad P(4)=\frac{1}{45}+\frac{4}{45}=\frac{5}{45},\quad P(5)=\frac{1}{45}$$

よって，X の期待値 E は，

$$E=1\times\frac{17}{45}+2\times\frac{13}{45}+3\times\frac{9}{45}+4\times\frac{5}{45}+5\times\frac{1}{45}=\frac{19}{9}$$

コメント

確率と期待値に関する基本問題です。

問　題

n 枚のカードの表に 1, 2, …, n の数をそれぞれ 1 つずつ書く。この n 枚のカードを裏返しにして，よくまぜ，重ねて，上から順に 1, 2, …, n の数を書く。表と裏に書かれた数が一致するカードが 1 枚もない確率を p_n とする。

(1)　p_3 を求めよ。

(2)　$n=4$ のとき，表と裏に書かれた数が一致するカードの枚数の期待値を求めよ。

(3)　p_5 を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　3 枚のカードの表と裏の数の組合せは $3!=6$ 通りであり，この中で，表と裏の数が一致していないのは，右表の 2 通りである。よって，この確率 p_3 は，$p_3=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$ である。

表	1	2	3
裏	3	1	2
裏	2	3	1

(2)　4 枚のカードの表と裏の数が一致する枚数を X とすると，$X=4,\ 2,\ 1,\ 0$ の場合がある。

(i)　$X=4$ のとき

4 枚とも一致する場合は 1 通りより，この確率は $\frac{1}{4!}=\frac{1}{24}$ である。

(ii)　$X=2$ のとき

一致する 2 枚のカードの選び方は ${}_4C_2=6$ 通りで，一致しない 2 枚については表と裏の対応が 1 通りしかないので，この確率は $\frac{6\times 1}{4!}=\frac{6}{24}$ である。

(iii)　$X=1$ のとき

一致する 1 枚のカードの選び方は ${}_4C_1=4$ 通りで，一致しない 3 枚については表と裏の対応が, (1)より 2 通りなので，この確率は $\frac{4\times 2}{4!}=\frac{8}{24}$ である。

以上より, X の期待値は，$0\times\left(1-\frac{8}{24}-\frac{6}{24}-\frac{1}{24}\right)+1\times\frac{8}{24}+2\times\frac{6}{24}+4\times\frac{1}{24}=1$

(3)　まず, 表の数 5 に，裏の数 1 が対応する場合を考える。

(i)　表の数 1 に裏の数 5 が対応するとき

表の数 2, 3, 4 に対して，裏の数は 2, 3, 4 より, (1)から 2 通りの場合がある。

表	1	2	3	4	5
裏	5	＊	＊	＊	1

(ii)　表の数 1 に裏の数 5 が対応しないとき

表の数 2 に裏の数 5 が対応するとき，右表より 3 通りの場合がある。表の数 3 に裏の数 5, 表の数 4 に裏の数 5 が対応するときも同様なので，合わせて $3\times 3=9$ 通りの場合がある。

表	1	2	3	4	5
裏	2	5	4	3	1
裏	3	5	4	2	1
裏	4	5	2	3	1

(i)(ii)より，表の数 5 に裏の数 1 が対応する場合は，$2+9=11$ 通りになる。

よって，表の数 5 に，裏の数 2，3，4 が対応する場合も同様に考えると，5 枚のカードの表と裏の数が一致しない確率 p_5 は，$p_5=\dfrac{11\times 4}{5!}=\dfrac{11}{30}$ である。

コメント

有名な撹乱順列の問題です。ただ，$n\leqq 5$ なので，個別に数え上げても，たいしたことはありません。

問　題

次の問いに答えよ。ただし同じ色の玉は区別できないものとし，空の箱があってもよいとする。

(1)　赤玉 10 個を区別ができない 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(2)　赤玉 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。

(3)　赤玉 6 個と白玉 4 個の合計 10 個を区別ができる 4 個の箱に分ける方法は何通りあるのか求めよ。　[2002]

解答例

(1)　4 個の箱に入っている玉の個数を $a,\ b,\ c,\ d\,(0\leqq a\leqq b\leqq c\leqq d)$ とする。

条件より，$a+b+c+d=10$ となり，これを満たす $(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は,

$(0,\ 0,\ 0,\ 10)$，$(0,\ 0,\ 1,\ 9)$，$(0,\ 0,\ 2,\ 8)$，$(0,\ 0,\ 3,\ 7)$

$(0,\ 0,\ 4,\ 6)$，$(0,\ 0,\ 5,\ 5)$，$(0,\ 1,\ 1,\ 8)$，$(0,\ 1,\ 2,\ 7)$

$(0,\ 1,\ 3,\ 6)$，$(0,\ 1,\ 4,\ 5)$，$(0,\ 2,\ 2,\ 6)$，$(0,\ 2,\ 3,\ 5)$

$(0,\ 2,\ 4,\ 4)$，$(0,\ 3,\ 3,\ 4)$，$(1,\ 1,\ 1,\ 7)$，$(1,\ 1,\ 2,\ 6)$

$(1,\ 1,\ 3,\ 5)$，$(1,\ 1,\ 4,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 2,\ 5)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 4)$

$(1,\ 3,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 2,\ 4)$，$(2,\ 2,\ 3,\ 3)$

以上より，求める分け方は 23 通りとなる。

(2)　4 個の箱に入っている玉の個数を $a,\ b,\ c,\ d\,(a\geqq 0,\ b\geqq 0,\ c\geqq 0,\ d\geqq 0)$ とする。ここで，$a'=a+1$，$b'=b+1$，$c'=c+1$，$d'=d+1$ とおくと，$a'\geqq 1,\ b'\geqq 1$，$c'\geqq 1,\ d'\geqq 1$ となる。

条件より，$a+b+c+d=10$ なので，$a'+b'+c'+d'=14$ となり，これを満たす $(a',\ b',\ c',\ d')$ の組は，14 個のボールを 1 列に並べて，その間の 13 か所から 3 か所を選んで仕切りを入れる場合の数に等しいので，${}_{13}\mathrm{C}_3=286$ 通りとなる。

$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組の数も同じなので，求める分け方は 286 通りである。

(3)　(2)と同様に考えて，赤玉については，$a+b+c+d=6$ より，

$$a'+b'+c'+d'=10\quad(a'\geqq 1,\ b'\geqq 1,\ c'\geqq 1,\ d'\geqq 1)$$

この場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3=84$ 通りである。

また，白玉については，$a+b+c+d=4$ より，

$$a'+b'+c'+d'=8\quad(a'\geqq 1,\ b'\geqq 1,\ c'\geqq 1,\ d'\geqq 1)$$

この場合の数は，${}_7\mathrm{C}_3=35$ 通りである。

以上より，求める分け方は，$84\times 35=2940$ 通りとなる。

コメント

(2)と(3)はよく見かけますが, (1)は難問です。というのも，時間がかかるからです。

問　題

n を自然数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　k を $1 \leqq k \leqq n$ を満たす自然数とするとき，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ が成り立つことを示せ。ただし ${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数である。

(2)　不等式 $\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$ が成り立つことを示せ。

(3)　不等式 $\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

解答例

(1)　$1 \leqq k \leqq n$ に対して，

$$ {}_n\mathrm{C}_k = \frac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} = \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} $$

ここで，$0 \leqq l \leqq k-1$ とすると，$n(k-l) \leqq k(n-l)$ より，$\dfrac{n-l}{k-l} \geqq \dfrac{n}{k}$ となり，

$$ \frac{n}{k}\cdot\frac{n-1}{k-1}\cdot\frac{n-2}{k-2}\cdot\cdots\cdot\frac{n-k+2}{2}\cdot\frac{n-k+1}{1} \geqq \frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k}\cdot\cdots\cdot\frac{n}{k}\cdot\frac{n}{k} = \left(\frac{n}{k}\right)^k $$

さらに，$\dfrac{n(n-1)(n-2)\cdots(n-k+1)}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{k!} \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ から，

$$ \left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k \leqq \frac{n^k}{2^{k-1}} $$

(2)　(1)より，$\left(\dfrac{n}{k}\right)^k \leqq {}_n\mathrm{C}_k$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{n}{k}\right)^k \leqq \sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k < \sum_{k=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_k = (1+1)^n = 2^n $$

よって，$\dfrac{1}{2^n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\dfrac{n}{k}\right)^k < 1$

(3)　(1)より，${}_n\mathrm{C}_k \leqq \dfrac{n^k}{2^{k-1}}$ なので，二項定理を利用すると，

$$ \left(1+\frac{1}{n}\right)^n = 1+\sum_{k=1}^{n}{}_n\mathrm{C}_k\left(\frac{1}{n}\right)^k \leqq 1+\sum_{k=1}^{n}\frac{n^k}{2^{k-1}}\left(\frac{1}{n}\right)^k = 1+\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} $$

ここで，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} = \frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^n}{1-\frac{1}{2}} = 2-2\left(\frac{1}{2}\right)^n < 2$ となるので，$\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n < 1+2 = 3$

コメント

3 題構成の並列型の設問の場合，(1)と(2)が独立で，ともに(3)への誘導というのが一般的です。ところが，本問では，(1)が，独立な(2)と(3)への誘導となっており，変わった構図です。なお，内容は二項定理の応用として，著名なものです。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆