1

解答解説のページへ

△OAB において，OA $=5$，OB $=6$，AB $=7$ とする。t を $0<t<1$ を満たす実数とする。辺 OA を $t:(1-t)$ に内分する点を P, 辺 OB を $1:t$ に外分する点を Q, 辺 AB と線分 PQ の交点を R とする。点 R から直線 OB へ下ろした垂線を RS とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ を t, $\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を t, $\vec{b}$ を用いて表せ。

(4) 線分 OS の長さが 4 となる t の値を求めよ。

2

解答解説のページへ

3 が書かれたカードが 10 枚，5 が書かれたカードが 10 枚，10 が書かれたカードが 10 枚，全部で 30 枚のカードが箱の中にある。この中から 1 枚ずつカードを取り出していき，取り出したカードに書かれている数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。ただし各カードには必ず 3, 5, 10 いずれかの数が 1 つ書かれているものとし，取り出したカードは箱の中に戻さないものとする。次の問いに答えよ。

(1) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 1 回である確率を求めよ。

(2) 操作が終了するまでに，カードを取り出した回数が 2 回である確率を求めよ。

(3) 操作が終了したときに，取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率を求めよ。

3

解答解説のページへ

a を $0<a<1$ を満たす実数として x の関数 $f(x)=ax-\log(1+e^x)$ の最大値を $M(a)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし必要があれば，$\lim_{x\to+0} x\log x=0$ が成り立つことを用いてよい。

(1) $M(a)$ を a を用いて表せ。

(2) a の関数 $y=M(a)$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。

(3) a の関数 $y=M(a)$ のグラフをかけ。

4

解答解説のページへ

一般項が $a_n = \dfrac{n!}{n^n}$ で表される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

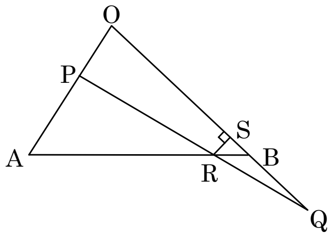
(1) $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ を示せ。

(2) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{a_n}{a_{n+1}}$ を求めよ。

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}}$ を k を用いて表せ。

1

問題のページへ



(1)　$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=7$である△OAB において，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とすると，余弦定理から，

$$5^2+6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}=7^2,\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{25+36-49}{2}=6$$

(2)　△OAB と直線 PQ にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{OP}}{\mathrm{PA}}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1,\ \ \frac{t}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{t}{1}=1$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}=\dfrac{1-t}{t^2}$より，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\dfrac{t^2}{t^2-t+1}\vec{a}+\dfrac{1-t}{t^2-t+1}\vec{b}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OS}}$は$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の OB への正射影ベクトルであり，$|\vec{b}|=6$から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\Big(\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\frac{\vec{b}}{6}\Big)\frac{\vec{b}}{6}=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\big\{(t^2\vec{a}+(1-t)\vec{b})\cdot\vec{b}\big\}\vec{b}$$

$$=\frac{1}{36(t^2-t+1)}\{6t^2+36(1-t)\}\vec{b}=\frac{t^2-6t+6}{6(t^2-t+1)}\vec{b}$$

(4)　$|\overrightarrow{\mathrm{OS}}|=4$なので，(3)の結果から，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{6|t^2-t+1|}\cdot 6=4$，$\dfrac{|t^2-6t+6|}{|t^2-t+1|}=4$

$0<t<1$のとき，$t^2-6t+6=t^2+6(1-t)>0$，$t^2-t+1=t^2+(1-t)>0$から，

$$\frac{t^2-6t+6}{t^2-t+1}=4,\ \ t^2-6t+6=4(t^2-t+1),\ \ 3t^2+2t-2=0$$

すると，$0<t<1$から，$t=\dfrac{-1+\sqrt{7}}{3}$

［解　説］

平面ベクトルの図形への応用問題です。(2)は分点ベクトル表示，(3)は$\overrightarrow{\mathrm{RS}}\cdot\vec{b}=0$を用いる解法でも，少し記述量が多くなるだけです。

2

問題のページへ

(1)　3 のカード, 5 のカード, 10 のカードがそれぞれ 10 枚ずつ, 全部で 30 枚のカードが箱の中にあり, この中から 1 枚ずつカードを取り出していき, 取り出したカードの数の合計が 10 以上になった時点で操作を終了する。

さて, 1 回取り出したとき操作が終了するのは, 10 のカードを取り出した場合だけより, その確率は, $\dfrac{10}{30}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　2 回取り出したとき操作が終了するのは, 次の場合がある。

(i)　1 回目が 3 のカードで, 2 回目が 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{10}{29}=\dfrac{10}{3\cdot 29}$ である。

(ii)　1 回目が 5 のカードで, 2 回目が 5 または 10 のカードを取り出したとき

その確率は, $\dfrac{10}{30}\cdot\dfrac{9+10}{29}=\dfrac{19}{3\cdot 29}$ である。

(i)(ii)より, 2 回取り出したとき操作が終了する確率は, $\dfrac{10}{3\cdot 29}+\dfrac{19}{3\cdot 29}=\dfrac{1}{3}$

(3)　まず, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する場合を考える。

(i)　数の合計が 10 で操作が終了する場合

1 回目が 10, または 1 回目と 2 回目がともに 5 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30}+\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}=\frac{38}{3\cdot 29}$$

(ii)　数の合計が 11 で操作が終了する場合

1 回目, 2 回目, 3 回目の数が, 3→3→5 または 3→5→3 または 5→3→3 の場合より, その確率は,

$$\frac{10}{30}\cdot\frac{9}{29}\cdot\frac{10}{28}+\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28}+\frac{10}{30}\cdot\frac{10}{29}\cdot\frac{9}{28}=\frac{45}{14\cdot 29}$$

(i)(ii)より, 数の合計が 10 または 11 で操作が終了する確率は,

$$\frac{38}{3\cdot 29}+\frac{45}{14\cdot 29}=\frac{667}{3\cdot 14\cdot 29}=\frac{23}{42}$$

すると, カードを多くとも 4 回取り出せば, 操作は必ず終了するので, 操作が終了したときに, 取り出したカードに書かれている数の合計が 12 以上である確率は,

$$1-\frac{23}{42}=\frac{19}{42}$$

［解　説］

確率の基本的な問題です。(3)は, 取り出した回数で場合分けをしても構いませんが, 数値計算がややこしくなります。

3

問題のページへ

(1)　$0<a<1$ のとき，$f(x)=ax-\log(1+e^x)$ に対して，

$$f'(x)=a-\frac{e^x}{1+e^x}=\frac{a+ae^x-e^x}{1+e^x}=-\frac{(1-a)e^x-a}{1+e^x}$$

ここで，$\dfrac{a}{1-a}>0$ より $e^x=\dfrac{a}{1-a}$ を満たす x がただ 1 つ存在し，これを $x=\alpha$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$

すると，最大値 $M(a)$ は，$e^\alpha=\dfrac{a}{1-a}$ から，

$$M(a)=f(\alpha)=a\alpha-\log(1+e^\alpha)=a\log\frac{a}{1-a}-\log\Bigl(1+\frac{a}{1-a}\Bigr)$$
$$=a\log a-a\log(1-a)-\log\frac{1}{1-a}=a\log a-a\log(1-a)+\log(1-a)$$
$$=a\log a+(1-a)\log(1-a)$$

(2)　(1)より，$0<a<1$ において，

$$M'(a)=\log a+1-\log(1-a)-1$$
$$=\log a-\log(1-a)$$

$M'(a)=0$ とすると，$a=1-a$ から $a=\dfrac{1}{2}$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$M'(a)$		$-$	0	$+$	
$M(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すると，$M(a)$ は $a=\dfrac{1}{2}$ のとき最小となり，最小値は，

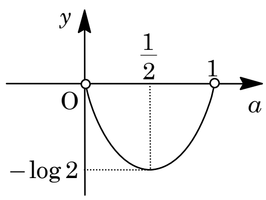
$$M\Bigl(\frac{1}{2}\Bigr)=\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}=\log\frac{1}{2}=-\log 2$$

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to+0}x\log x=0$ より，$\displaystyle\lim_{a\to+0}M(a)=\lim_{a\to+0}\{a\log a+(1-a)\log(1-a)\}=0$

$$\lim_{a\to1-0}M(a)=\lim_{a\to1-0}\{a\log a+(1-a)\log(1-a)\}=0$$

また，$M''(a)=\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{1-a}>0$ となるので，$y=M(a)$ のグラフは下に凸である。

以上より，$y=M(a)$ のグラフは右図のようになる。



［解　説］

微分法に関する総合的な問題です。計算は易しめです。

4

問題のページへ

(1) $n \geqq 2$ のとき，$n! = 1\cdot 2\cdot 3\cdot\cdots\cdot(n-1)n \leqq 1\cdot n\cdot n\cdot\cdots\cdot n\cdot n = n^{n-1}$ となり，

$$0 < \frac{n!}{n^n} \leqq \frac{n^{n-1}}{n^n} = \frac{1}{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n} = 0$

(2) $\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{n!}{n^n}\cdot\frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n(n+1)} = \frac{(n+1)^n}{n^n} = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}} = \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n = e$$

(3) 2 以上の整数 k に対して，$\displaystyle b_n = \log\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{n}\log\frac{a_{kn}}{a_n}$ とおくと，

$$\begin{aligned}
b_n &= \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{(kn)^{kn}}\cdot\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!}\left(\frac{1}{k^k n^{k-1}}\right)^n = \frac{1}{n}\log\frac{(kn)!}{n!} - \log k^k n^{k-1}\\
&= \frac{1}{n}\log\{(n+1)(n+2)\cdots(kn)\} - k\log k - (k-1)\log n\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn)\} - (k-1)\log n - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn) - (k-1)n\log n\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\{\log(n+1)+\log(n+2)+\cdots+\log(kn) - (kn-n)\log n\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\left\{\log\frac{n+1}{n}+\log\frac{n+2}{n}+\cdots+\log\frac{n+(k-1)n}{n}\right\} - k\log k\\
&= \frac{1}{n}\left\{\log\left(1+\frac{1}{n}\right)+\log\left(1+\frac{2}{n}\right)+\cdots+\log\left(1+\frac{(k-1)n}{n}\right)\right\} - k\log k
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} b_n &= \int_0^{k-1}\log(1+x)\,dx - k\log k\\
&= \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^{k-1} - \int_0^{k-1}dx - k\log k\\
&= k\log k - (k-1) - k\log k = 1-k
\end{aligned}$$

よって，$\displaystyle\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{b_n}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{kn}}{a_n}\right)^{\frac{1}{n}} = e^{1-k}$ である。

［解 説］

誘導のない極限の設問 3 題で構成されています。しかも，各問の相互関係もあまり感じられません。