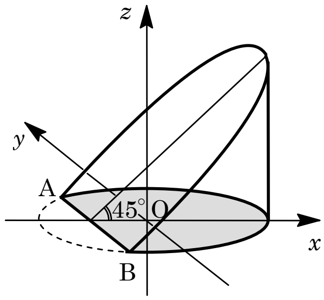
$\boxed{10}$ ［広島大］

座標空間内の平面 $H : z = 0$ とその上の曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2)　立体 V を平面 $x = t$ $(-1 < t < 2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。

11　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　**［岡山大］**

座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2)　四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。

12　　［大阪大］

xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体を L とおく。回転体 L に含まれる点のうち，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下のもの全体がつくる立体を M とおく。

(1)　t を $0\leqq t\leqq 2$ を満たす実数とする。xy 平面上の点 $(0,\ t)$ を通り，y 軸に直交する平面による M の切り口の面積を $S(t)$ とする。$t=(2\cos\theta)^2\left(\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき，$S(t)$ を θ を用いて表せ。

(2)　M の体積 V を求めよ。

$\boxed{13}$ ［東京大］

点 O を原点とする座標空間内で，1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かす。また，点 A$(1,\ 0,\ 0)$ に対して，∠AOP を θ とおく。ただし $0^\circ \leqq \theta \leqq 180^\circ$ とする。

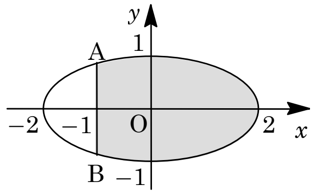
(1) 点 Q が $(0,\ 0,\ 1)$ にあるとき，点 P の x 座標がとりうる値の範囲と，θ がとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 点 Q が平面 $x=0$ 上を動くとき，辺 OP が通過しうる範囲を K とする。K の体積を求めよ。

10　　[広島大]

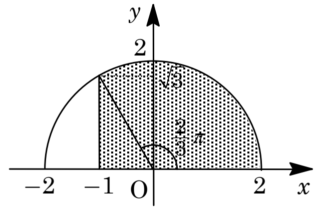
(1)　楕円 $C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に対して，

$$y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



さて，C に囲まれる図形の $x\geqq -1$ の部分の面積を U とすると，x 軸に関する対称性より，

$$U=2\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

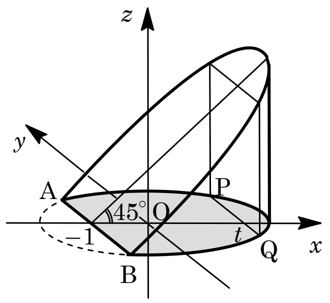


そして，U の値は右図の網点部の面積が対応し，

$$U=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)　$(*)$に $x=t$ を代入すると，$y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ となり，C と直線 $x=t$ の交点を P, Q とおくと，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{4-t^2}$$



これより，立体 V を平面 $x=t$ で切ったとき，断面の長方形の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\mathrm{PQ}\cdot\{t-(-1)\}\tan 45^\circ=(t+1)\sqrt{4-t^2}$$

(3)　立体 V の体積 W は，(1)の結果も利用して，

$$W=\int_{-1}^{2}S(t)dt=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$
$$=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで，$4-t^2=u$ とおくと，$-2tdt=du$ から，

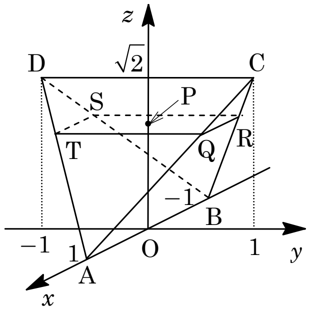
$$\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_{3}^{0}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{3}\Big[u^{\frac{3}{2}}\Big]_0^3=\sqrt{3}$$

よって，$W=\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。

［解　説］

立体の体積を求める頻出タイプの問題です。問題文に参考図が書かれているため，見通しはかなりよくなっています。

11　　[岡山大]

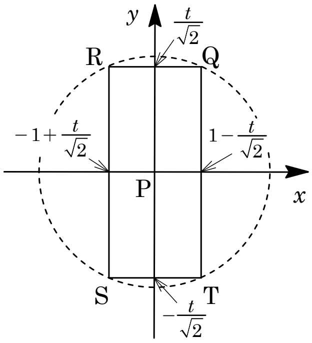


(1) 座標空間内の 4 点 $A(1,\ 0,\ 0)$, $B(-1,\ 0,\ 0)$, $C(0,\ 1,\ \sqrt{2})$, $D(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD に対して, $\overrightarrow{AC}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$ より, 辺 AC は $0\leqq q\leqq 1$ として,

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+q(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$$
$$=(1-q,\ q,\ \sqrt{2}q)$$

ここで, 点 $P(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面 $z=t$ との交点は, $\sqrt{2}q=t$ より $q=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となり, $(x,\ y,\ z)=\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ である。

よって, 交点 Q の座標は $\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。



(2) 点 P を通り z 軸に垂直な平面と辺 BC, BD, AD との交点を, それぞれ R, S, T とおくと, (1)と同様にして, $\overrightarrow{AD}=(-1,\ -1,\ \sqrt{2})$ から $T\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。

また, 点 R, S はそれぞれ点 Q, T を yz 平面に関して対称移動したものより,

$$R\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),\ S\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$$

これより, 平面 $z=t$ 上で, 四角形 QRST は点 P を中心とする長方形であり, この長方形を z 軸のまわりに回転してできる円の面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=\pi PQ^2=\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\pi(1-\sqrt{2}t+t^2)$$

すると, 四面体 ABCD を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

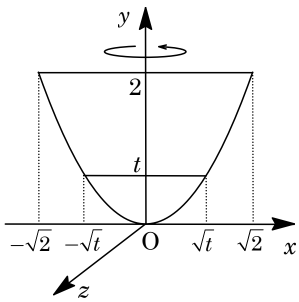
$$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}t+t^2)dt=\pi\Big[t-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{t^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$$

［解　説］

立体の回転体の体積を求める頻出題です。誘導に従って計算していけばよいわけですが, それ以外に, 対称性に注目して計算量を減らすことも重要です。

12　　　　［大阪大］

(1)　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ と直線 $y=2$ で囲まれた図形を，y 軸のまわりに 1 回転してできる回転体 L を，y 軸に直交する平面 $y=t$ $(0\leqq t\leqq 2)$ で切断したときの切り口は，中心が点 $(0,\ t,\ 0)$ で半径が $\sqrt{t}$ の円板となるので，



$$x^2+z^2\leqq t,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots①$$

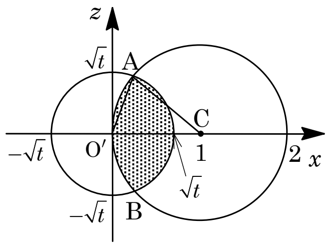
また，xy 平面上の直線 $x=1$ からの距離が 1 以下の点で構成される円柱を $y=t$ で切断したときの切り口は，

$$(x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t\cdots\cdots\cdots②$$

すると，立体 M を $y=t$ で切断したときの切り口は，①②から，

$$x^2+z^2\leqq t,\ (x-1)^2+z^2\leqq 1,\ \ y=t$$

この連立不等式を平面 $y=t$ 上に図示すると右図の網点部になる。なお，$\mathrm{O}'(0,\ t,\ 0)$，$\mathrm{C}(1,\ t,\ 0)$ とし，2 円の交点を A, B とおく。すると，交点 A, B の x 座標は $x^2+z^2=t$ と $(x-1)^2+z^2=1$ を連立して，



$$2x-1=t-1,\ \ x=\frac{t}{2}$$

そこで，$\mathrm{AB}\perp\mathrm{O'C}$ で $\mathrm{O'A}=\sqrt{t}$ より，$\sqrt{t}\cos\angle\mathrm{AO'C}=\dfrac{t}{2}$ となり，

$$2\cos\angle\mathrm{AO'C}=\sqrt{t},\ \ t=(2\cos\angle\mathrm{AO'C})^2$$

これより，$\angle\mathrm{AO'C}=\theta$ とおくことができ，$0\leqq t\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，網点部の面積を $S(t)$ とすると，$\angle\mathrm{ACO'}=\pi-2\theta$ から，

$$\begin{aligned}S(t)&=2\Big\{\frac{1}{2}(\sqrt{t})^2\theta+\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot(\pi-2\theta)-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\sin(\pi-2\theta)\Big\}\\&=t\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta=4\theta\cos^2\theta+\pi-2\theta-\sin 2\theta\\&=2\theta(1+\cos 2\theta)+\pi-2\theta-\sin 2\theta=2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi\end{aligned}$$

(2)　M の体積 V とすると，$V=\displaystyle\int_0^2 S(t)\,dt$ となり，(1)より，

$$\begin{aligned}V&=\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{4}}(2\theta\cos 2\theta-\sin 2\theta+\pi)(-8\cos\theta\sin\theta)\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(8\theta\cos 2\theta-4\sin 2\theta+4\pi)(\sin 2\theta)\,d\theta\\&=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}(4\theta\sin 4\theta-2+2\cos 4\theta+4\pi\sin 2\theta)\,d\theta\end{aligned}$$

ここで，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\cos 4\theta\,d\theta=\frac{1}{4}\Big[\sin 4\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=0$，$\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=-\frac{1}{2}\Big[\cos 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{2}$

$$\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} 4\theta\sin 4\theta\, d\theta = -\big[\,\theta\cos 4\theta\,\big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}} \cos 4\theta\, d\theta = -\Big(\frac{\pi}{2}+\frac{\pi}{4}\Big) = -\frac{3}{4}\pi$$

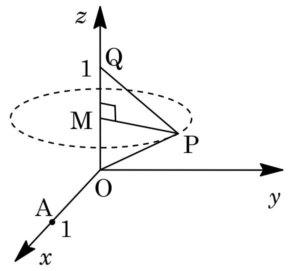
以上より，$V = -\frac{3}{4}\pi - 2\cdot\frac{\pi}{4} + 4\pi\cdot\frac{1}{2} = \frac{3}{4}\pi$ となる。

［解　説］

立体の体積計算という阪大の頻出問題です。(1)は(2)の計算を考えて，結論をまとめています。ただ，これでも(2)の積分計算は，簡単とはいえません。

13　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　［東京大］

(1) 原点 O, 点Q$(0,\ 0,\ 1)$に対して, 線分 OQ の中点を M とすると, M$\left(0,\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$となる。



さて, 座標空間内で, 1 辺の長さが 1 の正三角形 OPQ を動かすとき, $\mathrm{PM}\perp\mathrm{OQ}$, $\mathrm{PM}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より, 点 P の座標は, φを$0^\circ\leqq\varphi<360^\circ$として, P$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\sin\varphi,\ \dfrac{1}{2}\right)$とおくことができる。すると, 点 P の x 座標がとりうる値の範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{2}\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}$$

また, 点A$(1,\ 0,\ 0)$に対して, $\angle\mathrm{AOP}=\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq180^\circ)$ とするとき,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OA}}|\cos\theta,\ \frac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi=1\cdot1\cdot\cos\theta$$

よって, $\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cos\varphi$ となり, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ から $30^\circ\leqq\theta\leqq150^\circ$ である。

(2) (1)から, Q$(0,\ 0,\ 1)$のとき, 辺 OP が通過してできる図形は, 頂点が原点で, 中心軸が z 軸の円錐側面 C である。そして, 点 Q が平面 $x=0$ 上を動く, すなわち yz 平面上で中心が原点で半径 1 の円を描くとき, 辺 OP が通過してできる図形 K は, 円錐側面 C を x 軸のまわりに回転したものとなる。

さて, 円錐側面 C 上の任意の点をX$(x,\ y,\ z)$とおくと, $\angle\mathrm{QOX}=\dfrac{\pi}{3}$ から,

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OX}}=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}||\overrightarrow{\mathrm{OX}}|\cos\frac{\pi}{3},\ z=1\cdot\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{1}{2}$$

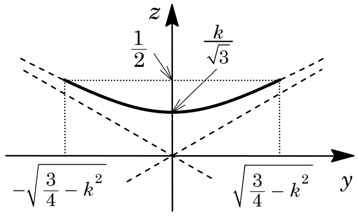
$0\leqq z\leqq\dfrac{1}{2}$ から, 両辺を 2 乗すると, $4z^2=x^2+y^2+z^2$ となり,

$$3z^2=x^2+y^2\quad\left(0\leqq z\leqq\frac{1}{2}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

次に, 円錐側面 C を, x 軸に垂直な平面 $x=k$ で切断したときの切り口を考える。ただし, (1)から, $-\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq k\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ とする。

すると, $(*)$から, $3z^2=k^2+y^2$ となり,

$$y^2-3z^2=-k^2\quad\left(0\leqq z\leqq\frac{1}{2}\right)$$



$k\neq0$ のときは双曲線の一部となり, 平面 $x=k$ 上に図示すると, 右図の太線部のようになる。

さらに, この双曲線（太線部）を点$(k,\ 0,\ 0)$のまわりに回転してできるドーナツ形の外径を R, 内径を r, 面積を $S(k)$ とおくと,

$$R=\sqrt{\left(\frac{3}{4}-k^2\right)+\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\sqrt{1-k^2}\ ,\ \ r=\frac{k}{\sqrt{3}}$$

$$S(k)=\pi(R^2-r^2)=\pi\left(1-k^2-\frac{k^2}{3}\right)=\pi\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)$$

また，$k=0$ のときも，上記の $S(k)$ は成立している。

以上より，求める図形 K の体積を V とすると，yz 平面に関する対称性より，

$$V=2\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}S(k)dk=2\pi\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\left(1-\frac{4}{3}k^2\right)dk=2\pi\left[k-\frac{4}{9}k^3\right]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}$$

$$=2\pi\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{4}{9}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{3}\pi$$

［解　説］

東大で頻出の立体の体積を求める問題です。(1)が誘導になり，立式の方針が決まります。なお，円錐側面の方程式については「ピンポイント レクチャー」を参照してください。