《2018 入試対策》

広島大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された広島大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の$\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。
　(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
　(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
　(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
　(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
　(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　座標平面上の 2 点 $A(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$B(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え, A, B 間の距離を L とする。ただし，θ は条件 $(*)\ 0 \leqq \theta < 2\pi$ かつ $\sin\theta-\cos\theta-1>0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $(*)$を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) $t=\sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) L を(2)の t を用いて表せ。

(4) L の最大値, 最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。 [2017]

2　$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の定義域を求めよ。

(2) 不等式 $f(x) \geqq 0$ を解け。

(3) 関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき，2^{m-2} を求めよ。

(4) (3)の m について，1000^m の整数部分の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。 [2012]

3　次の問いに答えよ。

(1) $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。不等式 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ を満たす k の値の範囲を求めよ。

(2) a，b は定数で，$a>0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-2x+b$ の定義域を $-1 \leqq x \leqq 2$ とし，$f(-1)<f(2)$ を満たすとする。関数 $y=f(x)$ の値域が $-1 \leqq y \leqq 7$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ。 [2011]

4　$k>0$ を定数とするとき, x についての方程式 $\log_3 x = kx$ が 2 つの実数解 α と 3α をもつとする。このとき, k の値と α の値を求めよ。 [2006]

5　$P(x)$ は，x^3 の係数が 1 であるような 3 次式とする。$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは $x+1$ であり，$(x-1)^2$ で割ったときの余りは $x+c$ である。ただし，c は定数である。このとき, c の値と $P(x)$ を求めよ。 [2005]

6　正の実数 x，y が $xy=100$ を満たすとき，$(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。 [2005]

7　a, b を実数とする。x の方程式 $4^x + a \times 2^{x+1} + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$a = -1$，$b = -3$ のときの解を求めよ。

(2)　この方程式が異なる 2 つの実数解をもつような点 $(a,\ b)$ 全体の集合を，座標平面上に図示せよ。　[2004]

8　$-180° < x < 180°$ とする。c を実数とする。x の方程式

$$(*)\quad \sin x + \sqrt{3}\cos x + c = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　(＊)を $\sin(x + A) = B$ の形で表せ。また，$c = \sqrt{3}$ のとき, x の値を求めよ。

(2)　(＊)が異なる 2 つの解 α，β をもつための c の条件を求めよ。

(3)　$\tan\dfrac{x}{2} = t$ とおくとき，$\sin x = \dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x = \dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を示せ。さらに，(＊)を t についての 2 次方程式で表せ。

(4)　(2)の条件のもとで，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の値を求めよ。　[2004]

9　正の定数 a に対し，$\log_a(3x) + \log_{\sqrt{a}}(a - x) = 1$ を満たす実数 x がちょうど 2 つある。このとき, a はどのような範囲にあるか。　[2002]

10　次の問いに答えよ。

(1)　次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。　$\log_3(x-7) + \log_3(x-5) \leqq 1$

(2)　次の不等式を満たす y の範囲を求めよ。　$9^y - 8 \times 3^y - 9 \leqq 0$

(3)　x, y がそれぞれ(1), (2)の範囲を動くとき，$\log_2 x + 2^y$ の最大値を求めよ。　[2001]

11　$y = a(\sin\theta + \cos\theta) + \sin 2\theta$ とする。ただし, a は正の定数である。

(1)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ とおいて, y を t の式で表せ。

(2)　$t = \sin\theta + \cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値 M と最小値 m を，それぞれ a を用いて表せ。　[2001]

12　関数 $y = (\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3)^2 + 3(\cos 2\theta + 4\sin\theta + 1)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0° \leqq \theta < 360°$ とする。

(1)　$\sin^2\theta - 2\sin\theta + 3 = x$ とおくとき，y を x の式で表せ。また，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。　[2000]

13　2 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 5)$を通る 2 次関数のグラフについて，頂点を$(p,\ q)$，y軸との交点を$(0,\ k)$とする。

(1)　p, q を k で表せ。

(2)　p, q がともに正のとき，k の値の範囲を求めよ。　[1999]

14　aを正の定数とし，$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$とする。

(1)　$f(x)$が最大となるxの値を求めよ。

(2)　$f(x)$の最大値が 4 以上のとき，a の値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 微分と積分

1　座標平面上の 2 つの曲線$C_1: y=4x^3-1$，$C_2: y=x^3$を考える。$a>0$に対して，x座標がaであるC_1上の点を A とし，A におけるC_1の接線をlとする。次の問いに答えよ。

(1)　C_1とC_2の交点のx座標をpとする。pの値を求めよ。

(2)　直線lの方程式を，aを用いて表せ。

(3)　直線lがC_2に接するとき，aの値を求めよ。

(3)　(3)のとき，直線lとC_2の接点を B とする。C_1，C_2と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2017]

2　α，βは$\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$を満たす実数とする。3 つの放物線

$$C_1: y=x(1-x),\quad C_2: y=x(1-\beta-x),\quad C_3: y=(x-\alpha)(1-x)$$

を考える。C_2とC_3の交点のx座標をγとする。また，C_1，C_2，C_3で囲まれた図形の面積をSとする。次の問いに答えよ。

(1)　γをα，βを用いて表せ。

(2)　Sをα，βを用いて表せ。

(3)　α，βが$\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$を満たしながら動くとき，$S$の最大値を求めよ。　[2015]

3　放物線 $y=2x^2-8$ を C とする。x 軸上の点 $A(a,\ 0)$　$(a>0)$ を通り C と接する直線が 2 本あるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点 P, Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\beta-\alpha=3$ のとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

4　放物線 $C: y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$ 上に 2 点 A, B があり，A の x 座標は 3 である。点 A, 点 B における C の接線をそれぞれ l, m とし，l と m の交点を P とおくと，$\angle APB=45^\circ$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。

(2)　接線 m の傾きを求めよ。

(3)　点 P の座標を求めよ。

(4)　C, l, m で囲まれた図形において，不等式 $x\geqq 0$ を満たす部分の面積 S を求めよ。

[2012]

5　k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C: y=kx^2$ $(x\geqq 0)$ と 2 つの直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，β $(0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3)　曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。　[2010]

6　p, a を実数の定数とする。多項式 $P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であり，3 次方程式 $P(x)=0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。

(2)　a の値を求めよ。

(3)　関数 $y=P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。　[2010]

7 関数 $y=x-x^3$ のグラフと，その上の点 $\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$，および点 P における接線 l を考える。ただし $t>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $y=x-x^3$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(2) l と $y=x-x^3$ のグラフの交点を Q とおく。ただし Q は P と異なる点とする。点 Q の x 座標を求めよ。

(3) 三角形 OPQ の面積が 12 となるとき t を求めよ。ただし点 O は原点である。

[2009]

8 3 次関数 $y=x^3-cx$ のグラフを考える。ただし，c は定数とする。そして，2 点 P, Q が次の条件を満たしながら，このグラフ上全体を動くものとする。

（条件） P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい

このとき，次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と，傾きの最小値を求めよ。

(2) 線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような，c の値の範囲を求めよ。

(3) 線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする。点 R におけるグラフの接線の傾きは，線分 PQ の傾きよりつねに小さいことを示せ。

[2008]

9 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，x の関数

$$f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x)=0$ の解を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ。

[2007]

10 p を正の定数とし，放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における C の接線を l とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を $\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とすれば，$\alpha<0<\beta<p$ であることを示せ。

(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x=p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_2-S_1=\dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ。 [2007]

11 直線 $y=-2x+m$ が，放物線 $y=-\dfrac{1}{2}x^2+ax\ (a>2)$ に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接している。連立不等式 $0\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+ax$，$x\leqq p$ の表す領域の面積を S_1 とする。また，連立不等式 $-\dfrac{1}{2}x^2+ax\leqq y\leqq -2x+m$，$0\leqq x\leqq p$ の表す領域の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a,\ m,\ q$ を p の式で表せ。

(2) S_1 と S_2 を p の式で表せ。

(3) $a>2$ のとき，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{S_2}{S_1}<2$ が成り立つことを示せ。 [2006]

12 各実数 t に対して，方程式 $y=(2t-3)x-t^2$ で表される直線 L_t を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 L_t と L_s が直交するとき，L_t と L_s の交点の y 座標は，t と s によらない定数になることを示せ。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ にすべての直線 L_t が接するとき，定数 $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。

(3) (2)で求めた放物線と 2 つの直線 L_t，L_{t+2} によって囲まれる図形の面積は，t によらない定数になることを示せ。 [2005]

13 $f(x)=x^2-4x+5$ とする。$p<2<q$ とし，放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線を，それぞれ $l,\ m$ とする。l と m は点 $\mathrm{R}\left(\frac{5}{2},\ r\right)$ で交わり，それぞれの傾きを $a,\ b$ とするとき，$2a+b=0$ を満たすものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $p,\ q,\ r$ を求めよ。

(2) 接線 $l,\ m$ の方程式を求めよ。

(3) 放物線 $y=f(x)$ と 2 つの接線 $l,\ m$ で囲まれた図形の面積 S を求めよ。 [2004]

14 次の問いに答えよ。

(1) a を 0 でない実数とするとき，2 つの曲線 $y=-x^2+2x$ と $y=-ax^2+1$ が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ。

(2) a_0 を(1)で求めた a の範囲の最大値とするとき，定積分

$$I=\int_0^2\left|(-a_0x^2+1)-(-x^2+2x)\right|dx$$

を求めよ。 [2003]

15 放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(a<b)$ における接線をそれぞれ l_{A}，l_{B} とする。

(1) l_{A} と l_{B} の交点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とするとき，$a,\ b$ は 2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ の解であることを示せ。

(2) 2 直線 l_{A}，$x=b$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積 S は，$\frac{1}{3}(b-a)^3$ であることを示せ。

(3) 交点 P が放物線 $y=-(x-1)^2$ 上を動くとき，面積 S の最小値を求めよ。 [2002]

16 放物線 $y=x^2$ と直線 l が 2 点で交わっている。それらの交点の x 座標を $s,\ t$ $(s<t)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 l で囲まれた部分の面積 S は，$S=\frac{1}{6}(t-s)^3$ で与えられることを証明せよ。

(2) 直線 l が，点 $(t,\ t^2)$ における $y=x^2$ の接線と直交しているとき，s を t で表せ。

(3) (2)のとき，(1)の面積 S の最小値，および最小値を与える t を求めよ。 [2001]

17 a を正の定数とする。曲線 $y=x^2(x-a)$ の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線 l が y 軸と交わる点を $\mathrm{H}(0,\ h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) h を p の式で表せ。

(2) $p \geqq 0$ のとき, h を最大にする p の値を求めよ。また, そのときの接線 l の方程式を求めよ。 [2000]

18 2 次関数 $f(x)=px^2+qx+r$ は, 次の(i), (ii)を満たすとする。

(i) $y=f(x)$ のグラフ上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $-4x+8$ である。

(ii) $y=f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

(1) $p,\ q$ の値と r の範囲を求めよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフが x 軸と交わる 2 点を A, B, y 軸と交わる点を C とし, 三角形 ABC の面積を T とする。また, $y=f(x)$ のグラフが x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S=4T$ となるような r の値を求めよ。 [1998]

■ 図形と式

1 座標平面上の 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(3,\ 0)$, $\mathrm{B}(1,\ 2)$ を考える。C を線分 OA 上にあり, $\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$ を満たす点とする。また, P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする。点 Q, R, P' を次により定める。

(a) 点 P を通り傾きが 1 の直線と, 直線 AB の交点を Q とする。

(b) 点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と, 直線 OB の交点を R とする。

(c) 点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と, 直線 OA の交点を P' とする。

次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の座標を t を用いて表せ。

(2) 点 R の座標を t を用いて表せ。

(3) 点 P' の座標を t を用いて表せ。

(4) 点 P' の x 座標を $f(t)$ とする。数列 $\{t_n\}$ を $t_1=2$, $t_{n+1}=f(t_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ。 [2017]

2　a を正の定数とし，座標平面上において，円 $C_1 : x^2 + y^2 = 1$ ，放物線 $C_2 : y = ax^2 + 1$ を考える。C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している。次の問いに答えよ。

(1)　s, t および a を求めよ。

(2)　C_2 , l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3)　円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする。C_2 , l および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ。　　[2016]

3　$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a<1$ とする。座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y = x^2 - x$, $C_2 : y = x^3 + bx^2 + cx - a$ を考える。C_1 と C_2 は，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ と，それとは異なる点 Q を通る。また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする。点 P における C_1 の接線を l_1 , 点 Q における C_1 の接線を l_2 , 点 Q における C_2 の接線を l_3 とする。次の問いに答えよ。

(1)　b, c および点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2)　l_1 , l_2 , l_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ。

(3)　l_1 , l_2 , l_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ。　　[2015]

4　座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。C の外部にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線と C との接点を H, H′ とする。$\angle\mathrm{OPH} = \theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　PH の長さ，および $\sin\theta$ を a, b を用いて表せ。

(2)　$\mathrm{HH}' = \mathrm{OP}$ となるような点 P の軌跡を求めよ。　　[2014]

5　座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，2 点 $\mathrm{P}(0,\ 1)$, $\mathrm{Q}(s,\ 0)$ を考える。2 点 P, Q を通る直線を l とし，l と C の交点のうち P ではないものを R とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標を s を用いて表せ。

(2)　x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という。s が有理数のとき，R は有理点であることを示せ。　　[2013]

6　放物線 $F: y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ 上の点 $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$ を通り，A における F の接線に垂直な直線を l とし，l と放物線 F との交点のうち点 A と異なる方を $\mathrm{B}\left(b,\ \frac{1}{2}(b+1)^2\right)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　直線 l の方程式と b の値を求めよ。

(2)　放物線 F と直線 l で囲まれた部分の面積 T_1 を求めよ。

(3)　線分 AB を直径とする円を C とする。このとき，不等式 $y \leqq \frac{1}{2}(x+1)^2$ の表す領域で円 C の内部にある部分の面積 T_2 を求めよ。　[2011]

7　座標平面上の定点 P と，関数 $y=f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える。このとき，点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を，点 P と $y=f(x)$ のグラフの距離と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}_1\left(0,\ \frac{1}{3}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ。

(2)　点 $\mathrm{P}_2\left(0,\ \frac{5}{4}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ。また，$d_2=\mathrm{P}_2\mathrm{R}$ となる $y=x^2$ のグラフ上の点 R をすべて求めよ。

(3)　点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y=x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2009]

8　2 つの円

$$(*)\quad x^2+y^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x-\frac{\sqrt{17}}{2}y+\sin^2\theta+\frac{17}{16}=0$$

$$(**)\quad x^2+y^2=\frac{9}{16}$$

について，次の問いに答えよ。ただし，$0° < \theta < 180°$ とする。

(1)　円(＊)の半径と中心の座標を θ を用いて表せ。

(2)　円(＊)と円(＊＊)が共有点をもたないような θ の値の範囲を求めよ。　[2005]

9　不等式 $\log_a b+\log_a(k-b)>2$ を満たす実数 $a,\ b$ について，次の問いに答えよ。ただし, k は $k>2$ を満たす定数とする。

(1)　点 $(a,\ b)$ 全体の集合を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a+b$ がとる値の範囲を求めよ。　[2003]

10 直線 $x+y=1$ 上の点 Q と，放物線 $y=x^2$ 上の原点 O とは異なる点 R に対し，2 つの半直線 OQ, OR の x 軸の正の向きからはかった角をそれぞれ α, β とおく。さらに，線分 QR の中点を P とおく。2 点 Q, R が $\alpha=\beta+45°$，$0°<\beta<45°$ を満たすように動くとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 OQ の傾きを a, 直線 OR の傾きを b とするとき，$a=\dfrac{1+b}{1-b}$ となることを示せ。

(2) 点 P の座標を b を用いて表せ。

(3) 点 P の軌跡を求めよ。 [2002]

11 次の問いに答えよ。

(1) 2 次関数 $y=x^2$ のグラフと点 $(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円が原点以外に共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

(2) 連立不等式 $y\leqq x^2$，$x^2+(y-1)^2\leqq 1$ の表す領域の面積を求めよ。 [2000]

12 正六角形 ABCDEF の頂点 A, B, C の座標をそれぞれ $(2,\ 3)$，$(1,\ 2)$，$(a,\ b)$ とする。ただし, $a>0$ とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 対角線 AD, CF の交点の座標を求めよ。 [1999]

13 xy 平面上に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ がある。円 C 上を動く点 P に対して，3 点 O, A, P が三角形をつくるとき，その三角形の重心を G とする。

(1) G の軌跡を求めよ。

(2) 円 C 上の点 $\mathrm{P_0}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対する三角形 $\mathrm{OAP_0}$ の重心を $\mathrm{G_0}$ とする。(1)で求めた軌跡の $\mathrm{G_0}$ における接線が x 軸と交わる点の座標を求めよ。 [1998]

■ 図形と計量

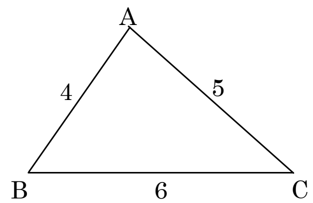
1　四角形 ABCD において，$\angle DAB = \angle DBC = 90^\circ$，$\angle BCD = 60^\circ$，$AB = AD$，$BC = 1$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ。

(2)　対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ。

(3)　$\angle BAC = \alpha$，$\angle ACD = \beta$ とおくとき，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ を求めよ。　[2016]

2　図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある。次の問いに答えよ。



(1)　$45^\circ < \angle B < 60^\circ$ を証明せよ。

(2)　$\angle A = 2\angle C$ を証明せよ。

(3)　$40^\circ < \angle C < 45^\circ$ を証明せよ。　[2012]

3　三角形 ABC において，$AB = 2$，$AC = 1$ とする。$\angle A$ の二等分線が辺 BC と交わる点を P とし，$\angle PAC = \theta$ とする。

(1)　三角形 ABC の面積を θ を用いて表せ。

(2)　AP を θ を用いて表せ。

(3)　$AP = BP$ のとき，θ の値を求めよ。　[1999]

4　三角形 ABC において，3 つの角の大きさの比が $A : B : C = 7 : 4 : 1$，辺 AB の長さが 1 とする。

(1)　$\sin A$，$\sin C$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。　[1998]

■ ベクトル

1 座標空間に 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(s,\ s,\ s)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$がある。ただし，$s>0$とする。$t,\ u,\ v$を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$のとき，$t$を$s$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$のとき，$u,\ v$を$s$を用いて表せ。

(3) (2)のとき，2 点 D，E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，sの値を求めよ。 [2016]

2 座標平面上に原点 O と 2 点$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。点 C は$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$0^\circ<\angle\mathrm{AOC}<90^\circ$，$0^\circ<\angle\mathrm{BOC}<90^\circ$を満たすとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$t$を用いて表せ。

(2) 線分 AB と線分 OC の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$t$を用いて表せ。

(3) 点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする。D は(2)で定めた点とする。このとき，△OBD と△CDE の面積の和をtを用いて表せ。 [2015]

3 四面体 OABC において，△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}}\ /\!/\ \overrightarrow{\mathrm{BC}}$であることを示せ。

(3) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$のとき，FG の長さを求めよ。 [2014]

4 座標平面上に点$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ $(0<\theta<\pi)$がある。原点を O とし，x軸に関して点 A と対称な点を B とする。次の問いに答えよ。

(1) $-1<\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}\leqq\dfrac{1}{2}$となる$\theta$の範囲を求めよ。

(2) 点 P を，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$で定める。点 P から$x$軸に下ろした垂線を PQ とする。$\theta$が(1)で求めた範囲を動くとき，△POQ の面積の最大値を求めよ。 [2013]

5 平面上で，線分 AB を$1:2$に内分する点を O，線分 AB を$1:4$に外分する点を C とする。P を直線 AB 上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$と$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$が垂直であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$で表せ。

(2) $\vec{a}$と$\vec{b}$の内積$\vec{a}\cdot\vec{b}$を$|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$で表せ。

(3) $\mathrm{PA}=1$，$\triangle\mathrm{PAB}$の面積が$\dfrac{3}{2}$のとき，PB の長さを求めよ。 [2011]

6 座標平面上に点$\mathrm{O}(0,\ 0)$と点$\mathrm{P}(4,\ 3)$をとる。不等式$(x-5)^2+(y-10)^2\leqq 16$の表す領域をDとする。次の問いに答えよ。

(1) k は定数とする。直線$y=-\dfrac{4}{3}x+k$上の点を Q とするとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$を$k$を用いて表せ。

(2) 点 R がD全体を動くとき，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の内積$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$の最大値および最小値を求めよ。 [2010]

7 四面体 OABC において$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=1$とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$とするとき，$\vec{p}$は実数$s$，$t$を用いて$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$と表される。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積$\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$をs, tを用いて表せ。

(2) 点 P が$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$を満たすとき，$s, t$の値を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$を求めよ。

(4) (2)の条件を満たす点 P について，2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ。 [2009]

8 三角形 OAB において，OA を$t:(1-t)$に内分する点を M，OB を$t:(1-t)$に内分する点を N とする。ただし，tは$0<t<1$の範囲を動く。そして，線分 AN と BM の交点を P とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$を$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$および$t$を用いて表し，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が平行であることを示せ。

(2) $s=\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}$とするとき，$s$を$t$を用いて表し，$s$のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 三角形 AMP と三角形 OAB の面積比$r=\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$を(2)の$s$を用いて表し，$r$の最大値を求めよ。 [2008]

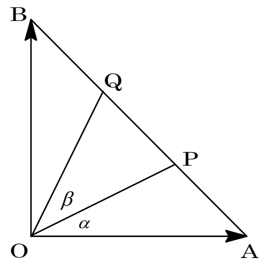
9　座標空間の 2 点 A(2, 0, 0) , B(0, −1, 0) , および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$, $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2)　上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 C(0, 0, c) を求めよ。

(3)　上で求めた点 P と C に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は 2 つの実数 a, b を用いて，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と表せることを示せ。　[2007]

10　平面上で，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は直交し，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し，図のように, A に近い点を P, B に近い点を Q とする。また, $\angle\mathrm{AOP}=\alpha$, $\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\cos\alpha$, $\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<30°<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に，点 R を $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(1-k)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となるようにとる。このとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2$ を k の式で表せ。

(4)　(3)の R に対して，$\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるとき, k の値を求めよ。　[2006]

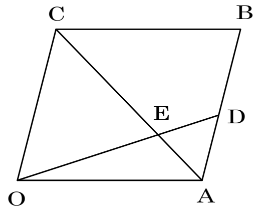
11　三角形 OAB において，OA = 5，OB = 6，AB = 4 とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ で定める。次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2)　点 P から辺 OA に垂線を下ろし，OA との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\vec{a}$ を満たす実数 k の値を求めよ。

(3)　線分 PE の長さを求めよ。　[2005]

12 平行四辺形 OABC の辺 AB を $m:n$ に内分する点を D とし, 線分 OD と対角線 AC との交点を E とする。次の問いに答えよ。



(1) 公式 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ を証明せよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, m, n を用いて表せ。

(3) 4 点 O, A, B, C を xy 平面上の点とし, 3 点 O, A, C の座標を $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$ とする。ただし, a, b は正の数とする。$m=1$, $n=2$ のとき, 2 点 O, D を通る直線の方程式を求めよ。

(4) (3)の条件のもとで, 点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

補足説明 :「点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H」とは, 点 C から引いた線分 OD への垂線と線分 OD との交点 H のことである。 [2004]

13 三角形 ABC において, 辺 BC を $2:1$ の比に内分する点を M とする。辺 AB, AC をそれぞれ B, C の側に延長した半直線を l, m とし, M を通る直線 k と l, m との交点をそれぞれ P, Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\vec{c}$ とおくとき, 次の問いに答えよ。ただし, p, q は正の実数とする。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$ で表せ。

(2) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{q}=3$ が成り立つことを示せ。

(3) Q から直線 AB に下ろした垂線と直線 AB との交点を H とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{QH}}$ を $\vec{b}$, $\vec{c}$, q で表せ。

(4) M を通る直線 k が半直線 l, m と点 A 以外でそれぞれ交わるように変わるとき, 三角形 APQ の面積を最小にする p, q の値を求めよ。 [2003]

14 三角形 ABC において, $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=c$, $|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=a$, $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=b$, $\vec{p}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}$, $\vec{q}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}$, $\vec{r}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{b}$ とおき, $b<c$, $\angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{C}$ とする。

(1) $|\vec{r}-\vec{q}|<|\vec{q}-\vec{p}|$ であることを示せ。

(2) 定数 s, t に対して, 辺 AB 上の点 D, 辺 AC 上の点 E があって, $\overrightarrow{\mathrm{BE}}=s(\vec{q}-\vec{p})$, $\overrightarrow{\mathrm{CD}}=t(\vec{r}-\vec{q})$ となっている。このとき, s, t を a, b, c の式で表し, さらに $|t(\vec{r}-\vec{q})|<|s(\vec{q}-\vec{p})|$ であることを示せ。 [2002]

15　三角形 OAB において，辺 AB, BO をそれぞれ $1:2$ に内分する点を M, N とする。また，線分 OM と AN の交点を P とする。

(1)　$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　OM と AN が直交し，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ のとき，$\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(3)　(2)のとき，さらに $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ を求めよ。　[2001]

16　O を原点とする座標空間内に 3 点 $\mathrm{A}(1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -1,\ 2)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ 2)$ がある。点 P が四面体 OABC の辺 BC 上を動くとき，次の問いに答えよ。

(1)　内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は 3 であることを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{AOP}$ の大きさが最小になるときの点 P の座標を求めよ。　[2000]

17　xy 平面の点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ -1)$ と実数 k に対して，点 C は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする。

(1)　内積 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が $2k$ となる点 P の描く図形は，C を通り，直線 OA と直交する直線であることを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが 45° となる k を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1　n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする。ただし，p_1，q_1 は $p_1{}^2-4q_1=4$ を満たすとする。2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする。ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする。$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ。

(2)　c_n を n の式で表せ。

(3)　$p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ。　[2015]

2　a_1，a_2，a_3 は定数で，$a_1>0$ とする。放物線 $C: y=a_1x^2+a_2x+a_3$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1+2a_2+a_3)$ における接線を l とし，l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$，l と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ とする。a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等差数列であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を a_1 を用いて表せ。

(2)　q の値を求めよ。

(3)　放物線 C，接線 l，および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。$S=q$ となるとき，a_1 を求めよ。　[2014]

3　$\alpha>1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a_n>1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\sqrt{x}-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$（ただし，$x>1$ とする。）

(3)　$a_n-1\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　[2014]

4　関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}\{f(1)-f(0)\}$ を満たす x を k を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた x を x_k とおく。$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ。　[2013]

5　座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式　$x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+y\leqq n$ の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点をすべて求めよ。また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，P の隣接点の個数を求めよ。

(2)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(3)　領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

[2013]

6　n は 3 以上の整数とする。1 から n までの整数から連続する 2 つの整数 x, $x+1$ を取り除く。次の問いに答えよ。

(1)　$n=17$ のとき，残された整数の総和を個数 15 で割った値が $\dfrac{42}{5}$ であるとする。取り除いた 2 つの整数を求めよ。

(2)　$n \geqq 39$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1) > \dfrac{205}{11}(n-2)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　残された整数の総和を個数 $n-2$ で割った値が $\dfrac{205}{11}$ であるとする。n と取り除いた 2 つの整数を求めよ。　[2012]

7　次の問いに答えよ。

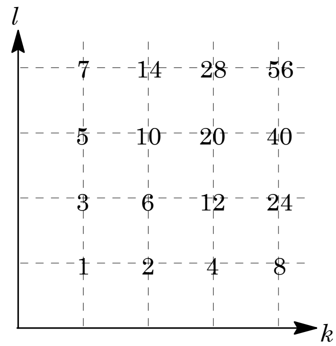
(1)　x, y が 4 で割ると 1 余る自然数ならば，積 xy も 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 n に対して，3^n を 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(3)　1 以上の奇数 n に対して，3^n を 4 で割った余りが 1 でないことを証明せよ。

(4)　m を 0 以上の整数とする。3^{2m} の正の約数のうち 4 で割ると 1 余る数全体の和を m を用いて表せ。　[2010]

8　k, l を自然数とし，座標平面上の点 $(k,\ l)$ に数 $2^{k-1}(2l-1)$ を記入する(右図を参照)。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　点 $(2,\ 25)$ に記入される数を求めよ。

(2)　2008 が記入される点の座標を求めよ。

(3)　どの自然数も座標平面上のどこかの点に 1 回だけ記入される。この理由を書け。　[2008]

9　$x_1=x_2=1$ とし，x_n $(n=3,\ 4,\ \cdots)$ は x_{n-2} と x_{n-1} の和を 3 で割ったときの余りであるとして，数列 $\{x_n\}$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　数列 $\{x_n\}$ の第 3 項から第 12 項までのそれぞれの値を，解答用紙にある表の中に書け。

(2)　x_{346} を求めよ。

(3)　$S_m=\displaystyle\sum_{n=1}^{m} x_n$ とおくとき，$S_m \geqq 684$ を満たす最小の自然数 m を求めよ。　[2008]

10 図のように, 1 を左下のマス目におき, 1 の右に 2 を, 2 の上に 3 を, 3 の左に 4 をおく。次に 2 の右に 5 をおき, 5 の上に 6, 7 を, 7 の左に 8, 9 をおく。このように, すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく。左から j 番目, 下から k 番目のマス目にある自然数を $a(j,\ k)$ と書く。例えば $a(3,\ 4)=14$, $a(3,\ 5)=23$ である。

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1) $a(1,\ k)$, $a(j,\ 1)$ をそれぞれ k, j の式で表せ。

(2) $a(j,\ k)$ を $j \geqq k$ と $j < k$ の場合に分けて求めよ。

(3) $a(j,\ k)=2007$ となる j, k を求めよ。

(4) $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k)$ を求めよ。 [2007]

11 $\sqrt{7}$ の小数部分を p とするとき, $\dfrac{3}{p}-p$ は整数であることを示し, その整数を求めよ。 [2006]

12 $a_1=1$ と $a_{n+1}=3a_n-n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について, 次の問いに答えよ。

(1) p と q を定数とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n=a_n+pn+q$ によって定めると, $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列になるとする。このとき, 定数 p と q の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ。 [2006]

■ 確率

1 n を 2 以上の整数とする。n 個のさいころを投げ, 出た目のすべての積を X とする。次の問いに答えよ。

(1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ。

(2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ。ただし, $\log_2 3=1.585$, $\log_2 5=2.322$ とする。

(3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ。

(4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ。 [2017]

2 xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点$(3,\ 1)$に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を$(x_n,\ y_n)$とする。次の問いに答えよ。

(1) $(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2) $(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3) $x_8+y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4) $x_{4n}+y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

[2016]

3 n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1) 変量 x のデータの値が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ であるとし，$f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の平均値で，そのときの最小値は $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ の分散であることを示せ。

(2) c を定数として，変量 $y,\ z$ の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\quad z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき $y_1,\ y_2,\ \cdots,\ y_n$ の分散が $z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n$ の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3) 変量 x のデータの値が $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n$ であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする。$x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_n,\ x_{n+1}$ の平均値を $x_{n+1},\ \overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4) 次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった。このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ。

[2016]

4　n を自然数とする。A, B, C, D, E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける。最初に A がボールを持っていて, A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, ボールを受けた人は, また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし, 以後同様にパスを続ける。n 回パスしたとき, B がボールを持っている確率を p_n とする。ここで, たとえば, A→C→D→A→E の順にボールをパスすれば, 4 回パスしたと考える。次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。　[2015]

5　正六角形の頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。1 個のさいころを 2 回投げて, 出た目を順に j, k とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となる確率を求めよ。

(2)　P_1，P_j，P_k が正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。

(3)　P_1，P_j，P_k が直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。　[2014]

6　N は 4 以上の整数とする。次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる。

規則：出た目を毎回記録し, 偶数の目が 3 回出るか, あるいは奇数の目が N 回出たところで, さいころを投げる操作を終了する。

ただし, さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げる回数は, 最大で何回か。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ。

(5)　$N=4$ のとき, さいころを投げる回数の期待値を求めよ。　[2012]

7　さいころを n 回投げる。k 回目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に投げた結果,

1 または 2 の目が出たとき $X_k=2$

3 または 4 の目が出たとき $X_k=3$

5 または 6 の目が出たとき $X_k=5$

とする。これらの積を $Y=X_1X_2\cdots X_n$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$n=5$ のとき, Y が偶数になる確率 p_1 を求めよ。

(2)　$n=5$ のとき, Y が 100 の倍数になる確率 p_2 を求めよ。

(3)　$n=2$ のとき, Y の期待値 E を求めよ。　[2011]

8　n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し, それに書かれている数を自分の得点としたのち, 取り出した玉を袋に戻す。この試行を A, B, C の 3 人が順に行い, 3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば, A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり, 3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人$(k=1,\ 2,\ 3)$である確率を $P_n(k)$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。　[2010]

9　2 人のプレーヤーA, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり, B が勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1)　P_2 と P_4 を求めよ。

(2)　P_{2n-1} を求めよ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。　[2009]

10　2 点 A, B と, その上を動く 1 個の石を考える。この石は, 時刻 $t=0$ で点 A にあり, その後, 次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各 $t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して,

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば, 時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は $\dfrac{1}{3}$, 点 B にある確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば, 時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $\dfrac{1}{3}$, 点 A にある確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

いま, n を自然数とし, 時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　p_1 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。　[2008]

11　袋の中に, 1 と書いた玉が 2 個, 2 と書いた玉が m 個, 3 と書いた玉が $(8-m)$ 個, 合計 10 個入っている。ただし, $2\leqq m\leqq 7$ とする。この袋から玉を 2 個取り出し, それらの玉に書かれた数の和を S とする。次の問いに答えよ。

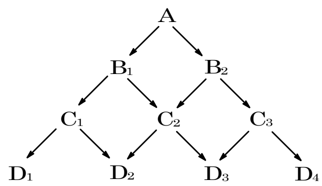
(1)　$S=4$ となる確率を求めよ。

(2)　S を 3 で割った余りが 2 である確率を求めよ。

(3)　S を 3 で割った余りの期待値 E を求めよ。

(4)　E の値を最大にする m の値とそのときの E の値を求めよ。　[2007]

12 図の一番上の点 A から玉を落とす。玉はそれぞれの分岐点において，確率 p で左下に，確率$1-p$ で右下に向かうものとする。また，この図のB_1，B_2の段を 1 段目，C_1，C_2，C_3の段を 2 段目として段数を数えるものとする。$0<p<1$ として，次の問いに答えよ。



(1)　2 段目の点C_1，C_2，C_3に対して，玉がその点に落ちてくる確率を求めよ。

(2)　2 段目の点のうち，点C_2に玉が落ちてくる確率が，他の点C_1，C_3の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，p の値の範囲を求めよ。

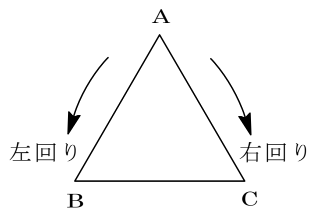
(3)　3 段目の点のうち，点D_3に玉が落ちてくる確率が，他の点D_1，D_2，D_4の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，p の値の範囲を求めよ。　[2006]

13 1 枚のコインを 1 回投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

　　表が出たとき，左回りで隣りの頂点に移し，

　　裏が出たとき，右回りで隣りの頂点に移す

という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。次の問いに答えよ。



(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率P_2を求めよ。

(2)　この試行を 3 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率P_3を求めよ。

(3)　この試行を 4 回繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率Q_4を求めよ。

(4)　この試行を n 回($n \geqq 2$)繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率Q_nを求めよ。　[2005]

14　1, 2, 3, 4, 5 の数字を書いた 5 枚のカードがある。この 5 枚のカードを並べて 5 けたの数を作るとき，次の問いに答えよ。

(1)　偶数となる並べ方は何通りあるか。また，奇数となる並べ方は何通りあるか。

(2)　5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する確率を求めよ。

(3)　5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 2 つの位で一致する確率を求めよ。

(4)　5 枚のカードを並べた数が，54321 と一致したときに 6 万円，54321 とちょうど 3 つの位で一致したときに 6 千円，54321 とちょうど 2 つの位で一致したときに 600 円もらえるものとする。これらの場合以外は何ももらえないものとする。5 枚のカードをよく切って並べる 1 回の試行での期待金額を求めよ。

補足説明 : (2)「それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する」とは，たとえば，“52341”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するが，“54321”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するとは言わない。(3), (4)においても同等の意味とする。　[2004]

15　1 個のさいころを投げるという試行をくり返す。奇数の目が出たら A の勝ち，偶数の目が出たら B の勝ちとし，どちらかが 4 連勝したら試行を終了する。

(1)　この試行が 4 回で終了する確率を求めよ。

(2)　この試行が 7 回以下で終了する確率を求めよ。

(3)　この試行が 5 回以上続き，かつ 4 回目が A の勝ちである確率を求めよ。

(4)　この試行がちょうど 8 回で終了する確率を求めよ。　[2002]

16　さいころを投げて出た目の数が k で割り切れるという事象を A_k，2 個のさいころを同時に投げて出た 2 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を B_k，3 個のさいころを同時に投げて出た 3 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を C_k とする。

(1)　事象 A_2，A_3，A_4 の確率 $P(A_2)$，$P(A_3)$，$P(A_4)$ を，それぞれ求めよ。

(2)　事象 B_2，B_3，B_4 の確率 $P(B_2)$，$P(B_3)$，$P(B_4)$ を，それぞれ求めよ。

(3)　事象 C_2，C_3 の確率 $P(C_2)$，$P(C_3)$ を，それぞれ求めよ。　[2001]

17　1 から 7 までの番号が 1 つずつ書いてある 7 枚のカードの中から，1 枚ずつ 3 回抜き出す試行を考える。ただし，抜き出したカードはもとに戻さないものとする。この試行において，最後(3 回目)に抜き出したカードの番号が 1 回目および 2 回目に抜き出したカードの番号より大きければ，最後に抜き出したカードの番号が得点として与えられ，それ以外の場合の得点は 0 とする。次の問いに答えよ。

(1)　最後に抜き出したカードの番号が 3 である確率 q，および得点が 3 である確率 p_3 を求めよ。

(2)　得点が k（$3 \leqq k \leqq 7$）である確率 p_k を k の式で表せ。また，得点が 0 である確率 p_0 を求めよ。

(3)　得点の期待値を求めよ。　[2000]

18　A と B の 2 人が同時に 1 個ずつサイコロを振り，出た目を比較して，大きい目を出した方の得点は 1，他方の得点は 0，となる試行を考える。ただし，2 つのサイコロの出た目が同じなら，A, B のいずれの得点も 0 とする。

(1)　この試行を 1 回行うとき，A の得点が 1 となる確率を p，B の得点が 1 となる確率を q，いずれの得点も 0 となる確率を r とする。p, q, r を求めよ。

(2)　この試行を 2 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より多くなる確率を求めよ。

(3)　この試行を 3 回行うとき，A の合計得点が B の合計得点より 1 点多くなる確率を求めよ。　[1998]

■ 論証

1　次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

(2)　p，q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。　[2011]

2 以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1) $x<y$ ならば $x^2<y^2$ である。

(2) $\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$ である。

(3) 微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(4) n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[2009]

3 次の問いに答えよ。

(1) $a,\ b,\ c,\ d$ を正の整数とする。$(a+b\sqrt{2})^2=(c+d\sqrt{2})^2$ ならば，$a=c$，$b=d$ であることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。

(2) 次の 2 つの数 $r,\ s$ はそれぞれ，$a,\ b$ を正の整数として，$(a+b\sqrt{2})^2$ と表すことができるか。表すことができれば，$a,\ b$ の値を求めよ。表すことができなければ，その理由を示せ。

$$r=967+384\sqrt{2}\,,\quad s=2107+1470\sqrt{2}$$

[2003]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ を考え，A，B 間の距離を L とする。ただし，θ は条件 (＊) $0 \leqq \theta < 2\pi$ かつ $\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) (＊)を満たす θ の範囲を求めよ。

(2) $t = \sin\theta\cos\theta$ とおくとき，t のとり得る値の範囲を求めよ。

(3) L を(2)の t を用いて表せ。

(4) L の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。　[2017]

解答例

(1) $0 \leqq \theta < 2\pi$ のとき，$\sin\theta - \cos\theta - 1 > 0$ より $\sqrt{2}\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > 1$ となり，

$$\sin\left(\theta - \frac{\pi}{4}\right) > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

よって，$\frac{\pi}{4} < \theta - \frac{\pi}{4} < \frac{3}{4}\pi$ から，$\frac{\pi}{2} < \theta < \pi$ である。

(2) $t = \sin\theta\cos\theta$ より $t = \frac{1}{2}\sin 2\theta$ となり，$\pi < 2\theta < 2\pi$ から $-\frac{1}{2} \leqq t < 0$ である。

(3) 2 点 $\mathrm{A}(\sin\theta,\ \sin^2\theta)$，$\mathrm{B}(\cos\theta,\ \cos^2\theta)$ に対して，$L = \mathrm{AB}$ より，

$$\begin{aligned} L^2 &= (\sin\theta - \cos\theta)^2 + (\sin^2\theta - \cos^2\theta)^2 \\ &= (\sin\theta - \cos\theta)^2\{1 + (\sin\theta + \cos\theta)^2\} = (1 - 2t)(2 + 2t) = -4t^2 - 2t + 2 \end{aligned}$$

よって，$L = \sqrt{-4t^2 - 2t + 2}$ である。

(4) (2)から $-\frac{1}{2} \leqq t < 0$ において，(3)から $L^2 = -4\left(t + \frac{1}{4}\right)^2 + \frac{9}{4}$ となる。

これより，$t = -\frac{1}{4}\ \left(\sin 2\theta = -\frac{1}{2}\right)$ のとき，L^2 は最大値 $\frac{9}{4}$ をとる。すなわち，$\theta = \frac{7}{12}\pi,\ \frac{11}{12}\pi$ のとき，L は最大値 $\sqrt{\frac{9}{4}} = \frac{3}{2}$ をとる。

また，$t = -\frac{1}{2}\ (\sin 2\theta = -1)$ のとき，L^2 は最小値 2 をとる。すなわち，$\theta = \frac{3}{4}\pi$ のとき，L は最小値 $\sqrt{2}$ をとる。

コメント

三角関数と 2 次関数を題材にした最大・最小問題です。たいへん細かな誘導がついています。

問　題

$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の定義域を求めよ。

(2)　不等式 $f(x)\geqq 0$ を解け。

(3)　関数 $f(x)$ の最大値を m とするとき，2^{m-2} を求めよ。

(4)　(3)の m について，1000^m の整数部分の桁数を求めよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2012]

解答例

(1)　$f(x)=\log_2(x-1)+\log_2(4-x)$ に対して，定義域は，$x-1>0$ かつ $4-x>0$ より，$1<x<4$ である。

(2)　$f(x)\geqq 0$ の解は，$\log_2(x-1)(4-x)\geqq 0$ より，$(x-1)(4-x)\geqq 1$ となり，

$$x^2-5x+5\leqq 0,\ \frac{5-\sqrt{5}}{2}\leqq x\leqq\frac{5+\sqrt{5}}{2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

なお, (＊)は $1<x<4$ を満たしている。

(3)　$f(x)=\log_2(x-1)(4-x)=\log_2(-x^2+5x-4)=\log_2\left\{-\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{9}{4}\right\}$

これより，$f(x)$ の最大値 m は，$m=\log_2\frac{9}{4}$ となり，

$$2^{m-2}=\frac{1}{4}\cdot 2^m=\frac{1}{4}\cdot 2^{\log_2\frac{9}{4}}=\frac{1}{4}\cdot\frac{9}{4}=\frac{9}{16}$$

(4)　まず，$a=1000^m$ とおくと，

$$\log_{10}a=m\log_{10}1000=3m=3\log_2\frac{9}{4}=6\log_2\frac{3}{2}=6(\log_2 3-1)$$

ここで，$\log_2 3=\frac{0.4771}{0.3010}\fallingdotseq 1.585$ より，$\log_{10}a\fallingdotseq 3.51$ となり, $3<\log_{10}a<4$

よって，$a=1000^m$ の整数部分は 4 桁である。

コメント

指数・対数についての基本問題です。ただ, (4)の数値計算には閉口しましたが。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}$ の整数部分を a，小数部分を b とする。不等式 $\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ を満たす k の値の範囲を求めよ。

(2)　a，b は定数で，$a>0$ とする。2 次関数 $f(x)=ax^2-2x+b$ の定義域を $-1\leqq x\leqq 2$ とし，$f(-1)<f(2)$ を満たすとする。関数 $y=f(x)$ の値域が $-1\leqq y\leqq 7$ であるとき，定数 a, b の値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}=2+\sqrt{3}$ で，$1<\sqrt{3}<2$ から，整数部分 $a=3$，小数部分 $b=\sqrt{3}-1$ である。

すると，$\dfrac{1}{2-\sqrt{3}}<\dfrac{6}{a}+\dfrac{k}{b}$ より，

$$k>b\Big(\frac{1}{2-\sqrt{3}}-\frac{6}{a}\Big)=(\sqrt{3}-1)(2+\sqrt{3}-2)=3-\sqrt{3}$$

(2)　$f(x)=ax^2-2x+b=a\Big(x-\dfrac{1}{a}\Big)^2-\dfrac{1}{a}+b$ となり，$a>0$ で $f(-1)<f(2)$ から，

$$0<\frac{1}{a}<\frac{-1+2}{2},\ \ a>2\cdots\cdots\text{①}$$

さて，$y=f(x)$ は，$-1\leqq x\leqq 2$ のとき $-1\leqq y\leqq 7$ であることより，

$$f(2)=4a+b-4=7,\ \ b=11-4a\cdots\cdots\text{②}$$

$$f\Big(\frac{1}{a}\Big)=-\frac{1}{a}+b=-1,\ \ b=\frac{1}{a}-1\cdots\cdots\text{③}$$

②③より，$11-4a=\dfrac{1}{a}-1$，$4a^2-12a+1=0$ となり，①から，

$$a=\frac{3+2\sqrt{2}}{2},\ \ b=11-4\cdot\frac{3+2\sqrt{2}}{2}=5-4\sqrt{2}$$

コメント

(2)では，最初，場合分けが必要かとも思いましたが，$f(-1)<f(2)$ から，それが回避できました。

問　題

$k>0$ を定数とするとき，x についての方程式 $\log_3 x = kx$ が 2 つの実数解 a と $3a$ をもつとする。このとき, k の値と a の値を求めよ。 [2006]

解答例

方程式 $\log_3 x = kx$ の解が $x = a$，$3a$ なので, $a>0$ において,

$$\log_3 a = ka \cdots\cdots\cdots①，\ \log_3 3a = 3ka \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$\log_3 3 + \log_3 a = 3ka$，$1 + \log_3 a = 3ka$

①を代入して，$1 + \log_3 a = 3\log_3 a$ から,

$$\log_3 a = \frac{1}{2},\ \ a = 3^{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}$$

①より，$\dfrac{1}{2} = \sqrt{3}k$，$k = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$

コメント

センター対策に際して，まず行うような基本の確認問題です。

問　題

$P(x)$ は，x^3 の係数が 1 であるような 3 次式とする。$P(x)$ を $(x+1)^2$ で割ったときの余りは $x+1$ であり，$(x-1)^2$ で割ったときの余りは $x+c$ である。ただし，c は定数である。このとき，c の値と $P(x)$ を求めよ。 [2005]

解答例

x^3 の係数が 1 である 3 次式 $P(x)$ を $(x+1)^2$ で割った商は，a を定数として，$x+a$ とおくことができ，

$$P(x)=(x+1)^2(x+a)+x+1=x^3+(a+2)x^2+(2a+2)x+a+1$$

このとき，$P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると，

$$P(x)=(x-1)^2(x+a+4)+(4a+9)x-3$$

条件より，この余りが $x+c$ なので，

$$4a+9=1,\ c=-3$$

$a=-2$ から，$P(x)=x^3-2x-1$

コメント

整式の除法を題材にした基本題です。

問　題

正の実数 $x,\ y$ が $xy=100$ を満たすとき，$(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3$ の最小値と，そのときの x と y の値を求めよ。 [2005]

解答例

$xy=100$ から，$\log_{10}xy=\log_{10}100$，$\log_{10}x+\log_{10}y=2$ となり，

$$
\begin{aligned}
P&=(\log_{10}x)^3+(\log_{10}y)^3\\
&=(\log_{10}x+\log_{10}y)^3-3\log_{10}x\log_{10}y(\log_{10}x+\log_{10}y)\\
&=8-6\log_{10}x\log_{10}y
\end{aligned}
$$

ここで，$\log_{10}x\log_{10}y=\log_{10}x\log_{10}\dfrac{100}{x}=\log_{10}x(2-\log_{10}x)$

$$=-(\log_{10}x)^2+2\log_{10}x=-(\log_{10}x-1)^2+1\leqq 1$$

なお，等号は $\log_{10}x=1$ $(x=10)$ のとき成立する。

よって，$P\geqq 8-6\times 1=2$ となり，P の最小値は 2 である。

また，このとき，$x=10$，$y=\dfrac{100}{10}=10$ である。

コメント

対数がらみの条件付き最大・最小問題です。

問　題

$a,\ b$ を実数とする。x の方程式 $4^x + a\times 2^{x+1} + b = 0$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$a=-1$，$b=-3$ のときの解を求めよ。

(2)　この方程式が異なる 2 つの実数解をもつような点 $(a,\ b)$ 全体の集合を，座標平面上に図示せよ。　[2004]

解答例

(1)　$a=-1$，$b=-3$ のとき，$4^x - 2^{x+1} - 3 = 0$ より，$2^{2x} - 2\cdot 2^x - 3 = 0$

$$(2^x-3)(2^x+1)=0$$

$2^x+1>0$ から $2^x=3$ となり，$x=\log_2 3$

(2)　$4^x + a\times 2^{x+1} + b = 0$ ……①に対して，$2^x = t>0$ とおくと，

$$t^2+2at+b=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

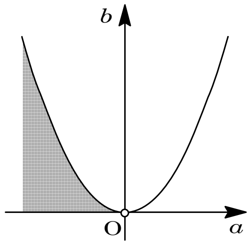
①が異なる 2 つの実数解をもつ条件は，②が異なる正の実数解を 2 つもつことに等しい。

$f(t)=t^2+2at+b$ とおくと，$f(t)=(t+a)^2-a^2+b$ より，

$$t=-a>0,\ f(-a)=-a^2+b<0,\ f(0)=b>0$$

まとめると，$a<0$，$0<b<a^2$

この関係を満たす点 $(a,\ b)$ を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

指数関数と 2 次関数を題材とした穏やかな基本題です。

問　題

$-180°<x<180°$ とする。c を実数とする。x の方程式

$$(*)\quad \sin x+\sqrt{3}\cos x+c=0$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　$(*)$を $\sin(x+A)=B$ の形で表せ。また，$c=\sqrt{3}$ のとき, x の値を求めよ。

(2)　$(*)$が異なる 2 つの解 α，β をもつための c の条件を求めよ。

(3)　$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくとき，$\sin x=\dfrac{2t}{1+t^2}$，$\cos x=\dfrac{1-t^2}{1+t^2}$ を示せ。さらに，$(*)$を t についての 2 次方程式で表せ。

(4)　(2)の条件のもとで，$\tan\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ の値を求めよ。　[2004]

解答例

(1)　$\sin x+\sqrt{3}\cos x+c=0\cdots\cdots(*)$より，$2\sin(x+60°)+c=0$

$$\sin(x+60°)=-\frac{c}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

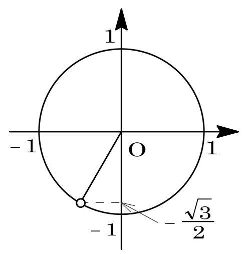
$c=\sqrt{3}$ のとき，①は $\sin(x+60°)=-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

ここで，$-180°<x<180°$ から，$-120°<x+60°<240°$ となり，

$$x+60°=-60°,\quad x=-120°$$

(2)　①が $-180°<x<180°$ で異なる 2 つの解をもつ条件は，$-120°<x+60°<240°$ より，$\left|-\dfrac{c}{2}\right|<1$ かつ $-\dfrac{c}{2}\neq-\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，すなわち $-2<c<2$ かつ $c\neq\sqrt{3}$ となる。

よって，$-2<c<\sqrt{3}$，$\sqrt{3}<c<2$ である。



(3)　半角の公式より，$\tan^2\dfrac{x}{2}=\dfrac{1-\cos x}{1+\cos x}$ なので，$\tan\dfrac{x}{2}=t$ とおくと，$t^2(1+\cos x)=1-\cos x$ となり，

$$(1+t^2)\cos x=1-t^2,\quad \cos x=\frac{1-t^2}{1+t^2}$$

また, 2 倍角の公式より，$\tan x=\dfrac{2\tan\frac{x}{2}}{1-\tan^2\frac{x}{2}}=\dfrac{2t}{1-t^2}$ となるので,

$$\sin x=\tan x\cos x=\frac{2t}{1-t^2}\cdot\frac{1-t^2}{1+t^2}=\frac{2t}{1+t^2}$$

$(*)$に代入して，$\dfrac{2t}{1+t^2}+\sqrt{3}\cdot\dfrac{1-t^2}{1+t^2}+c=0$，$2t+\sqrt{3}(1-t^2)+c(1+t^2)=0$

$$(c-\sqrt{3})t^2+2t+c+\sqrt{3}=0\cdots\cdots\cdots②$$

(4) $(*)$が $x=\alpha$，β を解にもつとき，②の解は $t=\tan\dfrac{\alpha}{2}$，$\tan\dfrac{\beta}{2}$ となり，$c\neq\sqrt{3}$ より，

解と係数の関係から，

$$\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}=\frac{-2}{c-\sqrt{3}},\quad \tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}=\frac{c+\sqrt{3}}{c-\sqrt{3}}$$

よって，$$\tan\frac{\alpha+\beta}{2}=\frac{\tan\frac{\alpha}{2}+\tan\frac{\beta}{2}}{1-\tan\frac{\alpha}{2}\tan\frac{\beta}{2}}=\frac{\frac{-2}{c-\sqrt{3}}}{1-\frac{c+\sqrt{3}}{c-\sqrt{3}}}=\frac{-2}{c-\sqrt{3}-c-\sqrt{3}}=\frac{1}{\sqrt{3}}$$

コメント

三角関数の公式を確認する問題です。

問　題

正の定数 a に対し，$\log_a(3x)+\log_{\sqrt{a}}(a-x)=1$ を満たす実数 x がちょうど 2 つある。このとき, a はどのような範囲にあるか。　[2002]

解答例

$\log_a(3x)+\log_{\sqrt{a}}(a-x)=1$ ……①に対し，$a\neq 1$ のもとで，$3x>0$ かつ $a-x>0$ なので, $0<x<a$ である。

$$\log_a(3x)+\frac{\log_a(a-x)}{\frac{1}{2}\log_a a}=1,\ \log_a(3x)+\log_a(a-x)^2=1$$

$$\log_a 3x(a-x)^2=1,\ 3x(a-x)^2=a\ \cdots\cdots\cdots②$$

①を満たす実数 x が 2 つある条件は，$a\neq 1$ として，②を満たす実数が $0<x<a$ に 2 つある条件に一致する。

②より，$3x^3-6ax^2+3a^2x-a=0$ ………③

ここで，$f(x)=3x^3-6ax^2+3a^2x-a$ とおく。

$$f'(x)=9x^2-12ax+3a^2$$
$$=3(3x-a)(x-a)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$f'(x)$		＋	0	－	
$f(x)$		↗		↘	

求める条件は，$f(0)=-a<0$，$f\left(\frac{a}{3}\right)=\frac{4}{9}a^3-a>0$，$f(a)=-a<0$

$a>0$ より $f(0)<0$ と $f(a)<0$ は成り立つので，$f\left(\frac{a}{3}\right)>0$ から $4a^2-9>0$

よって，$a>\frac{3}{2}$ （これは $a\neq 1$ を満たす）

コメント

対数方程式の基本問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　次の不等式を満たす x の範囲を求めよ。　　$\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$

(2)　次の不等式を満たす y の範囲を求めよ。　　$9^y-8\times 3^y-9\leqq 0$

(3)　x, y がそれぞれ(1), (2)の範囲を動くとき，$\log_2 x+2^y$ の最大値を求めよ。 [2001]

解答例

(1)　$\log_3(x-7)+\log_3(x-5)\leqq 1$ に対して，$x-7>0$，$x-5>0$ より $x>7$

$$\log_3(x-7)(x-5)\leqq 1,\ (x-7)(x-5)\leqq 3$$

まとめて，$x^2-12x+32\leqq 0$ より, $4\leqq x\leqq 8$

$x>7$ と合わせて, $7<x\leqq 8$

(2)　$9^y-8\times 3^y-9\leqq 0$ より，$(3^y-9)(3^y+1)\leqq 0$

$3^y+1>0$ なので，$3^y\leqq 9$ より，$y\leqq 2$

(3)　(1)(2)より，$\log_2 x\leqq \log_2 8=3$，$2^y\leqq 2^2=4$

したがって，$(x,\ y)=(8,\ 2)$ のとき，$\log_2 x+2^y$ は最大値 $3+4=7$ をとる。

コメント

指数不等式と対数不等式の基本的な解法を問うものです。教科書の例に載っているような問題です。

問　題

$y=a(\sin\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta$ とする。ただし, a は正の定数である。

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ とおいて, y を t の式で表せ。

(2)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとりうる値の範囲を求めよ。

(3)　y の最大値 M と最小値 m を，それぞれ a を用いて表せ。　[2001]

解答例

(1)　$t=\sin\theta+\cos\theta$ のとき，$t^2=1+2\sin\theta\cos\theta=1+\sin 2\theta$ なので,

$$y=a(\sin\theta+\cos\theta)+\sin 2\theta=at+(t^2-1)=t^2+at-1$$

(2)　$t=\sqrt{2}\sin(\theta+45°)$ より，$-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2}$

(3)　(1)(2)より，$y=\left(t+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-1\ (-\sqrt{2}\leqq t\leqq\sqrt{2})$

$a>0$ より，$-\dfrac{a}{2}<0$ なので，$t=\sqrt{2}$ のとき最大値をとる。

$$M=2+\sqrt{2}a-1=\sqrt{2}a+1$$

また，$-\dfrac{a}{2}<-\sqrt{2}\ (a>2\sqrt{2})$ のときは，$t=-\sqrt{2}$ で最小値をとり,

$$m=2-\sqrt{2}a-1=-\sqrt{2}a+1$$

$-\dfrac{a}{2}\geqq-\sqrt{2}\ (0<a\leqq 2\sqrt{2})$ のときは，$t=-\dfrac{a}{2}$ で最小値をとり,

$$m=-\frac{a^2}{4}-1$$

コメント

ていねいな誘導がついていますが，この誘導がなくても完答が望まれます。

問　題

関数 $y=(\sin^2\theta-2\sin\theta+3)^2+3(\cos 2\theta+4\sin\theta+1)$ について，次の問いに答えよ。ただし，$0°\leqq\theta<360°$ とする。

(1)　$\sin^2\theta-2\sin\theta+3=x$ とおくとき，y を x の式で表せ。また，x のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　y の最大値，最小値を求めよ。また，そのときの θ の値を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$\cos 2\theta+4\sin\theta+1=1-2\sin^2\theta+4\sin\theta+1=-2(\sin^2\theta-2\sin\theta-1)$ となるので，$x=\sin^2\theta-2\sin\theta+3$ とおくと，

$$y=(\sin^2\theta-2\sin\theta+3)^2+3(\cos 2\theta+4\sin\theta+1)$$
$$=x^2-6(x-4)=x^2-6x+24$$

ここで，$x=(\sin\theta-1)^2+2$ と変形すると，$0°\leqq\theta<360°$ から $-1\leqq\sin\theta\leqq1$ となり，x のとりうる値の範囲は $2\leqq x\leqq6$ である。

(2)　(1)より，$2\leqq x\leqq6$ において，$y=(x-3)^2+15$

よって，$x=6$ のとき最大値 24 をとる。このとき，$(\sin\theta-1)^2+2=6$ から，$\sin\theta=-1$ すなわち $\theta=270°$ となる。

また，$x=3$ のとき最小値 15 をとる。このとき，$(\sin\theta-1)^2+2=3$ から，$\sin\theta=0$ すなわち $\theta=0°$，$180°$ となる。

コメント

数Ⅱの教科書の例題あたりに載っていそうな基本問題です。

問　題

2 点$(1,\ 1)$，$(-1,\ 5)$を通る 2 次関数のグラフについて，頂点を$(p,\ q)$，y 軸との交点を$(0,\ k)$とする。

(1) p, q を k で表せ。

(2) p, q がともに正のとき, k の値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

(1) y 軸との交点が$(0,\ k)$より，$y = ax^2 + bx + k\ (a \neq 0)$とおける。

点$(1,\ 1)$を通るので，$a + b + k = 1$………①

点$(-1,\ 5)$を通るので，$a - b + k = 5$………②

①②より，$b = -2$……③，$a + k = 3$……④

③より，$y = ax^2 - 2x + k = a\left(x - \dfrac{1}{a}\right)^2 - \dfrac{1}{a} + k$

頂点が$(p,\ q)$より，④を代入して，

$$p = \frac{1}{a} = \frac{1}{3-k},\quad q = -\frac{1}{a} + k = -\frac{1}{3-k} + k = \frac{-k^2 + 3k - 1}{3-k}$$

(2) 条件より，$\dfrac{1}{3-k} > 0$……⑤，$\dfrac{-k^2 + 3k - 1}{3-k} > 0$……⑥

⑤より，$3 - k > 0$, $k < 3$………⑦

⑥に代入すると，$-k^2 + 3k - 1 > 0$，$k^2 - 3k + 1 < 0$

$$\frac{3-\sqrt{5}}{2} < k < \frac{3+\sqrt{5}}{2}\ \text{………⑧}$$

⑦⑧より，$\dfrac{3-\sqrt{5}}{2} < k < \dfrac{3+\sqrt{5}}{2}$

コメント

数 I の教科書に載っている例題のような問題です。

問　題

a を正の定数とし，$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$ とする。

(1)　$f(x)$ が最大となる x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最大値が 4 以上のとき, a の値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$f(x)=\log_2(a+x)+\log_4(a-x)$ より，$a+x>0$，$a-x>0$ なので，$-a<x<a$

$$f(x)=\log_2(a+x)+\frac{\log_2(a-x)}{2}=\frac{1}{2}\log_2(a+x)^2(a-x)$$

ここで，$g(x)=(a+x)^2(a-x)=-(x+a)^2(x-a)$ とおくと，

$$g'(x)=-2(x+a)(x-a)-(x+a)^2$$
$$=-(x+a)(3x-a)$$

x	$-a$	$\cdots$	$\frac{a}{3}$	$\cdots$	a
$g'(x)$		＋	0	－	
$g(x)$		↗		↘	

右表より $x=\dfrac{a}{3}$ のとき，$g(x)$ は最大値をとり，このとき $f(x)$ も最大となる。

(2)　$f\left(\dfrac{a}{3}\right)=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2}{3}a\left(\dfrac{4}{3}a\right)^2=\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^5}{3^3}a^3$

条件より，$\dfrac{1}{2}\log_2\dfrac{2^5}{3^3}a^3\geqq 4$，$\dfrac{2^5}{3^3}a^3\geqq 2^8$，$a^3\geqq 2^3\cdot 3^3$

よって，$a\geqq 6$

コメント

数Ⅱの教科書レベルの 計算ミスが致命的となる基本問題です。

問　題

座標平面上の 2 つの曲線$C_1: y=4x^3-1$，$C_2: y=x^3$を考える。$a>0$に対して，x座標が a であるC_1上の点を A とし，A におけるC_1の接線を l とする。次の問いに答えよ。

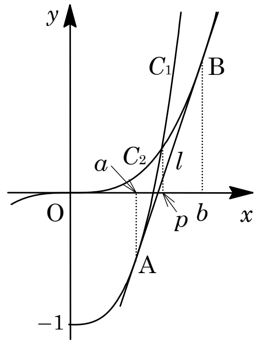
(1)　C_1とC_2の交点の x 座標を p とする。p の値を求めよ。

(2)　直線 l の方程式を，a を用いて表せ。

(3)　直線 l がC_2に接するとき，a の値を求めよ。

(3)　(3)のとき，直線 l とC_2の接点を B とする。C_1，C_2と線分 AB で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2017]

解答例



(1)　$C_1: y=4x^3-1$……①，$C_2: y=x^3$……②を連立し，

$$4x^3-1=x^3,\ 3x^3=1,\ x=\frac{1}{\sqrt[3]{3}}$$

よって，C_1とC_2の交点の x 座標 p は $p=\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}}$ である。

(2)　$a>0$のとき，$A(a,\ 4a^3-1)$におけるC_1の接線 l の方程式は，①より $y'=12x^2$ から，

$$y-(4a^3-1)=12a^2(x-a)$$

$$y=12a^2x-8a^3-1\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　$B(b,\ b^3)$におけるC_2の接線の方程式は，②より $y'=3x^2$ から，

$$y-b^3=3b^2(x-b),\ y=3b^2x-2b^3\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，l がC_2に接することより，①と②が一致し，

$$12a^2=3b^2\cdots\cdots\cdots③,\ -8a^3-1=-2b^3\cdots\cdots\cdots④$$

③より，$b^2=4a^2$となり$b=\pm2a$である。

$a>0$で，④より$8a^3+1=2b^3$から$b>0$となり，$b=-2a$は不適である。よって，$b=2a$を④に代入することにより，

$$8a^3+1=16a^3,\ 8a^3=1$$

以上より，$a=\dfrac{1}{2}$，$b=1$である。

(4)　(3)より，$l: y=3x-2$となり，C_1，C_2と線分 AB で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_{\frac{1}{2}}^{p}(4x^3-1-3x+2)\,dx+\int_{p}^{1}(x^3-3x+2)\,dx$$

$$=\Big[x^4-\frac{3}{2}x^2+x\Big]_{\frac{1}{2}}^{p}+\Big[\frac{x^4}{4}-\frac{3}{2}x^2+2x\Big]_{p}^{1}$$

数値を代入すると，

$$S=p^4-\frac{1}{16}-\frac{3}{2}\Big(p^2-\frac{1}{4}\Big)+p-\frac{1}{2}+\frac{1}{4}(1-p^4)-\frac{3}{2}(1-p^2)+2(1-p)$$

$$=\frac{3}{4}p^4-p+\frac{9}{16}=\Big(\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{3}-1\Big)\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{9}{16}=-\frac{3}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt[3]{3}}+\frac{9}{16}=-\frac{\sqrt[3]{9}}{4}+\frac{9}{16}$$

コメント

標準的な内容の微積分の総合問題です。計算も難というほどではありません。

問　題

α，β は $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ を満たす実数とする。3 つの放物線

$$C_1: y=x(1-x),\ C_2: y=x(1-\beta-x),\ C_3: y=(x-\alpha)(1-x)$$

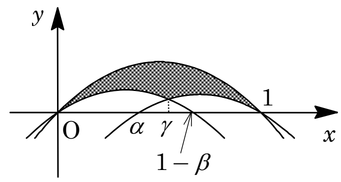
を考える。C_2 と C_3 の交点の x 座標を γ とする。また，C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) γ を α，β を用いて表せ。

(2) S を α，β を用いて表せ。

(3) α，β が $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ を満たしながら動くとき，S の最大値を求めよ。　[2015]

解答例



(1) $\alpha>0$，$\beta>0$，$\alpha+\beta<1$ のとき，$C_1: y=x(1-x)$，$C_2: y=x(1-\beta-x)$，$C_3: y=(x-\alpha)(1-x)$ に対して，C_2 と C_3 の式を連立すると，

$$x(1-\beta-x)=(x-\alpha)(1-x)$$

$$(1-\beta)x=-\alpha+(\alpha+1)x$$

よって，$(\alpha+\beta)x=\alpha$ より $x=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$ となり，$\gamma=\dfrac{\alpha}{\alpha+\beta}$

(2) C_1，C_2，C_3 で囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^\gamma \{x(1-x)-x(1-\beta-x)\}dx+\int_\gamma^1 \{x(1-x)-(x-\alpha)(1-x)\}dx$$

$$=\int_0^\gamma \beta x\,dx-\int_\gamma^1 \alpha(x-1)\,dx=\frac{\beta}{2}\Big[x^2\Big]_0^\gamma-\frac{\alpha}{2}\Big[(x-1)^2\Big]_\gamma^1$$

$$=\frac{\beta}{2}\gamma^2+\frac{\alpha}{2}(\gamma-1)^2=\frac{\alpha+\beta}{2}\gamma^2-\alpha\gamma+\frac{\alpha}{2}$$

$$=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\frac{\alpha^2}{(\alpha+\beta)^2}-\alpha\cdot\frac{\alpha}{\alpha+\beta}+\frac{\alpha}{2}=-\frac{\alpha^2}{2(\alpha+\beta)}+\frac{\alpha}{2}=\frac{\alpha\beta}{2(\alpha+\beta)}$$

(3) $\alpha+\beta=\dfrac{1}{4}$ のとき，(2)から，$S=2\alpha\beta$

ここで，相加平均と相乗平均の関係から，$\sqrt{\alpha\beta}\leqq\dfrac{\alpha+\beta}{2}$ となり，

$$\alpha\beta\leqq\left(\frac{\alpha+\beta}{2}\right)^2=\left(\frac{1}{8}\right)^2=\frac{1}{64}$$

等号は $\alpha=\beta=\dfrac{1}{8}$ のときに成立する。

よって，S の最大値は $2\cdot\dfrac{1}{64}=\dfrac{1}{32}$ である。

コメント

定積分と面積に関する基本題です。(3)は，1 文字消去で計算を進めても構いません。

問　題

放物線 $y=2x^2-8$ を C とする。x 軸上の点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$　$(a>0)$ を通り C と接する直線が 2 本あるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a の値の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β $(\alpha<\beta)$ とする。$\beta-\alpha=3$ のとき，a の値と 2 本の接線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた 2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を求めよ。　　[2013]

解答例

(1)　$C: y=2x^2-8$ に対して，$y'=4x$

C 上の接点を $(t,\ 2t^2-8)$ とすると，接線は，

$$y-(2t^2-8)=4t(x-t)$$

$$y=4tx-2t^2-8\ \cdots\cdots\cdots ①$$

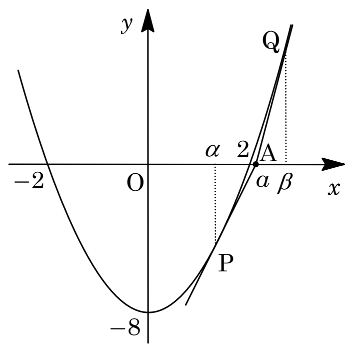
①が $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を通ることより，

$$0=4ta-2t^2-8,\ t^2-2at+4=0\ \cdots\cdots\cdots ②$$

接線が 2 本より，②は異なる 2 つの実数解をもち，

$$D/4=a^2-4>0$$

すると，$a>0$ から $a>2$ である。



(2)　②の解を $t=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とすると，$\alpha=a-\sqrt{a^2-4}$，$\beta=a+\sqrt{a^2-4}$

ここで，$\beta-\alpha=3$ より，$2\sqrt{a^2-4}=3$ となり，

$$a^2-4=\frac{9}{4},\ a^2=\frac{25}{4}$$

$a>0$ から $a=\dfrac{5}{2}$ であり，このとき，$\alpha=\dfrac{5}{2}-\dfrac{3}{2}=1$，$\beta=\dfrac{5}{2}+\dfrac{3}{2}=4$ となる。

よって，①より，2 本の接線の方程式は，

$$y=4x-10,\ y=16x-40$$

(3)　2 本の接線と C で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$S=\int_1^{\frac{5}{2}}(2x^2-8-4x+10)\,dx+\int_{\frac{5}{2}}^4(2x^2-8-16x+40)\,dx$$

$$=2\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2\,dx+2\int_{\frac{5}{2}}^4(x-4)^2\,dx=\frac{2}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^{\frac{5}{2}}+\frac{2}{3}\Big[(x-4)^3\Big]_{\frac{5}{2}}^4$$

$$=\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3+\frac{2}{3}\left(\frac{3}{2}\right)^3=\frac{9}{2}$$

コメント

放物線の接線と面積についての超有名題です。

問　題

放物線$C: y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$上に 2 点 A, B があり，A の x 座標は 3 である。点 A，点 B における C の接線をそれぞれ l, m とし，l と m の交点を P とおくと，$\angle\mathrm{APB}=45°$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。

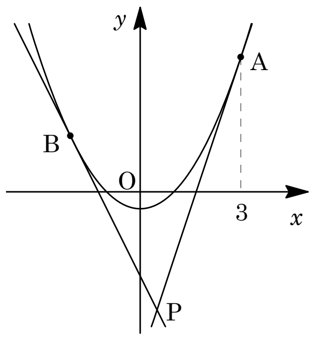
(2)　接線 m の傾きを求めよ。

(3)　点 P の座標を求めよ。

(4)　C, l, m で囲まれた図形において，不等式$x\geqq 0$を満たす部分の面積 S を求めよ。

[2012]

解答例



(1)　$C: y=\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}$に対して，$y'=x$ より，点$\mathrm{A}(3,\ 4)$における接線 l の方程式は,

$$y-4=3(x-3)\,,\ \ y=3x-5\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2)　接線 l, m と x 軸の正の向きとのなす角をそれぞれα，βとすると，①より，$\tan\alpha=3$ である。

条件より，$\beta=\alpha+45°$ なので,

$$\tan\beta=\tan(\alpha+45°)=\frac{3+1}{1-3\times 1}=-2$$

よって，接線 m の傾きは-2である。

(3)　点 B の x 座標は，$y'=x$ と接線 m の傾きが-2から，$x=-2$ である。すると，$\mathrm{B}\left(-2,\ \dfrac{3}{2}\right)$から，接線 m の方程式は，$y-\dfrac{3}{2}=-2(x+2)$，$y=-2x-\dfrac{5}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$

①②を連立すると，$3x-5=-2x-\dfrac{5}{2}$より，$x=\dfrac{1}{2}$となり，$y=-\dfrac{7}{2}$

よって, l と m の交点は，$\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{7}{2}\right)$である。

(4)　C, l, m で囲まれた図形の$x\geqq 0$を満たす部分の面積 S は,

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}+2x+\frac{5}{2}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}\left(\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}-3x+5\right)dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\left(\frac{1}{2}x^2+2x+2\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{3}\frac{1}{2}(x-3)^2dx$$

$$=\left[\frac{x^3}{6}+x^2+2x\right]_0^{\frac{1}{2}}+\left[\frac{1}{6}(x-3)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{3}=\frac{1}{48}+\frac{1}{4}+1+\frac{1}{6}\cdot\frac{125}{8}=\frac{31}{8}$$

コメント

微積分の基本問題です。なお, (2)については，位置関係を図形的に決めています。

問　題

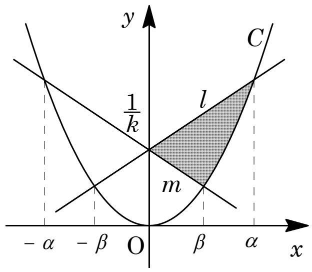
k は定数で，$k>0$ とする。曲線 $C: y=kx^2\ (x \geqq 0)$ と 2 つの直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$，$m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ との交点の x 座標をそれぞれ α，$\beta\ (0<\beta<\alpha)$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha-\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha\beta$，$\alpha^2+\beta^2$ および $\alpha^3-\beta^3$ を k を用いて表せ。

(3)　曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を最小にする k の値を求めよ。また，そのときの面積を求めよ。　[2010]

解答例



(1)　曲線 $y=kx^2$ は y 軸対称であり，また直線 $l: y=kx+\dfrac{1}{k}$ と $m: y=-kx+\dfrac{1}{k}$ は y 軸対称である。

そこで，$C: y=kx^2\ (x \geqq 0)$ と l, m の交点の x 座標をそれぞれ α，β とすると，曲線 $y=kx^2$ と l との交点の x 座標は，α，$-\beta$ となる。

さて，$y=kx^2$ と $y=kx+\dfrac{1}{k}$ を連立して，

$$kx^2=kx+\frac{1}{k},\quad k^2x^2-k^2x-1=0\cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$の解が $x=\alpha$，$-\beta$ となるので，$\alpha-\beta=\dfrac{k^2}{k^2}=1$

(2)　(1)と同様にして，$(*)$から，$\alpha(-\beta)=-\dfrac{1}{k^2}$ より，$\alpha\beta=\dfrac{1}{k^2}$

$$\alpha^2+\beta^2=(\alpha-\beta)^2+2\alpha\beta=1+\frac{2}{k^2}$$

$$\alpha^3-\beta^3=(\alpha-\beta)^3+3\alpha\beta(\alpha-\beta)=1+\frac{3}{k^2}$$

(3)　曲線 C と 2 直線 l, m とで囲まれた部分の面積を S とすると，(1), (2)より，

$$S=\frac{1}{2}\left(k\alpha^2+\frac{1}{k}\right)\alpha-\frac{1}{2}\left(k\beta^2+\frac{1}{k}\right)\beta-\int_{\beta}^{\alpha}kx^2dx$$

$$=\frac{1}{2}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)-\frac{k}{3}(\alpha^3-\beta^3)=\frac{1}{6}k(\alpha^3-\beta^3)+\frac{1}{2k}(\alpha-\beta)$$

$$=\frac{1}{6}k\left(1+\frac{3}{k^2}\right)+\frac{1}{2k}=\frac{1}{6}k+\frac{1}{k}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$\dfrac{1}{6}k+\dfrac{1}{k}\geqq 2\sqrt{\dfrac{1}{6}k\cdot\dfrac{1}{k}}=\dfrac{\sqrt{6}}{3}$

なお，等号は $\dfrac{1}{6}k=\dfrac{1}{k}$ すなわち $k=\sqrt{6}$ のとき成立する。

よって，$k=\sqrt{6}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{\sqrt{6}}{3}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題で，対称性への着目がポイントとなっています。なお，(3)は(2)の利用を考えて，台形の面積を使っています。

問　題

p, a を実数の定数とする。多項式$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$を$x-3$で割った余りが$10-6p$であり，3 次方程式$P(x)=0$の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で$P(x)$を因数分解せよ。

(2)　aの値を求めよ。

(3)　関数$y=P(x)$が極値をもたないときのpの値を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　$P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$に対し，条件より，

$$P(3)=10-6p\cdots\cdots\cdots①,\ P(a)=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$P(x)$を$x-a$で割ると，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

ここで，$P(x)=0$の実数解は a のみより，$x^2-2px+1=0$が重解$x=a$をもつ場合を考えると，

(i)　$a=p=1$のとき

$P(x)=(x-1)^3$となり，$P(3)=8$から，①を満たさない。

(ii)　$a=p=-1$のとき

$P(x)=(x+1)^3$となり，$P(3)=64$から，①を満たさない。

(i)(ii)より，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2)　(1)より，$x^2-2px+1=0$は虚数解をもつことより，

$$D/4=p^2-1<0,\ -1<p<1\cdots\cdots\cdots③$$

①より，$(3-a)(9-6p+1)=10-6p$

③から$10-6p\neq 0$なので，$3-a=1$となり，$a=2$

(3)　(2)より，$P(x)=x^3-(2p+2)x^2+(4p+1)x-2$となり，

$$P'(x)=3x^2-2(2p+2)x+(4p+1)$$

関数$y=P(x)$が極値をもたない条件は，つねに$P'(x)\geqq 0$であることより，

$$D/4=(2p+2)^2-3(4p+1)\leqq 0,\ 4p^2-4p+1\leqq 0$$

これより，$(2p-1)^2\leqq 0$となり，$p=\dfrac{1}{2}$である。

なお，この値は③を満たしている。

コメント

剰余の定理と微分法の応用を組み合わせた問題です。なお，(1)は用心深く書いていますが，冒頭の 3 行だけでも構わないでしょう。

問　題

関数 $y=x-x^3$ のグラフと，その上の点 $\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$，および点 P における接線 l を考える。ただし $t>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$y=x-x^3$ の増減を調べ，極値を求めよ。また，そのグラフをかけ。

(2)　l と $y=x-x^3$ のグラフの交点を Q とおく。ただし Q は P と異なる点とする。点 Q の x 座標を求めよ。

(3)　三角形 OPQ の面積が 12 となるとき t を求めよ。ただし点 O は原点である。

[2009]

解答例

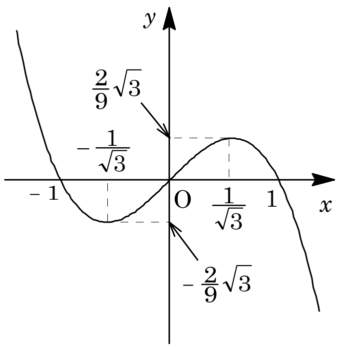
(1)　$y=x-x^3$ ……①に対して，

$$y'=1-3x^2=-(\sqrt{3}x-1)(\sqrt{3}x+1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	$\cdots$
y'	$-$	0	$+$	0	$-$
y	↘	$-\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↗	$\frac{2}{9}\sqrt{3}$	↘

右表より，極大値 $\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(x=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$，極小値 $-\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(x=-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$ である。

また，グラフは右下図のようになる。



(2)　$\mathrm{P}(t,\ t-t^3)$ における接線 l の方程式は，

$$y-(t-t^3)=(1-3t^2)(x-t)$$

$$y=(1-3t^2)x+2t^3 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$x-x^3=(1-3t^2)x+2t^3$

$$x^3-3t^2x+2t^3=0,\ (x-t)^2(x+2t)=0$$

よって，点 Q の x 座標は，$x\neq t$ から $x=-2t$ である。

(3)　(2)から，$\mathrm{Q}(-2t,\ -2t+8t^3)$ となり，

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}\left|\,t(-2t+8t^3)-(-2t)(t-t^3)\,\right|=\frac{1}{2}\left|\,6t^4\,\right|=3t^4$$

条件より，$3t^4=12$ すなわち $t^2=2$ となる。

すると，$t>0$ から $t=\sqrt{2}$ である。

コメント

有名な構図の頻出基本問題です。

問　題

3 次関数 $y = x^3 - cx$ のグラフを考える。ただし, c は定数とする。そして, 2 点 P, Q が次の条件を満たしながら, このグラフ上全体を動くものとする。

（条件）　P の x 座標は Q の x 座標より 1 だけ小さい

このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 線分 PQ の傾きが最小になるときの点 P の x 座標と, 傾きの最小値を求めよ。

(2) 線分 PQ の傾きが 0 となる点 P が存在するような, c の値の範囲を求めよ。

(3) 線分 PQ の中点の x 座標と同じ x 座標をもつグラフ上の点を R とする。点 R における グラフの接線の傾きは, 線分 PQ の傾きよりつねに小さいことを示せ。

[2008]

解答例

(1) $y = x^3 - cx$ ……①に対して, $\mathrm{P}(t,\ t^3 - ct)$, $\mathrm{Q}(t+1,\ (t+1)^3 - c(t+1))$ とおく。

ここで, 線分 PQ の傾きを m とすると,

$$m = \frac{(t+1)^3 - c(t+1) - (t^3 - ct)}{(t+1) - t} = 3t^2 + 3t + 1 - c = 3\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4} - c \cdots\cdots\cdots②$$

よって, m は $t = -\dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\dfrac{1}{4} - c$ をとる。

(2) $m = 0$ となる P が存在する条件は, ②より, $\dfrac{1}{4} - c \leqq 0$ から, $c \geqq \dfrac{1}{4}$ である。

(3) 条件より, 点 R の x 座標は, $x = t + \dfrac{1}{2}$ となる。

①より, $y' = 3x^2 - c$ から, R における接線の傾き n は,

$$n = 3\left(t + \frac{1}{2}\right)^2 - c \cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $m > n$ となり, 点 R におけるグラフの接線の傾きは, 線分 PQ の傾きよりつねに小さい。

コメント

接線についての基本問題です。(2)では, グラフを考えて, 条件を記しています。

問　題

α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし, x の関数

$$f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$$

を考える。次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の導関数 $f'(x)$ および方程式 $f'(x)=0$ の解を求めよ。

(2) 方程式 $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつような α の値の範囲を求めよ。

[2007]

解答例

(1) $f(x)=\sqrt{2}x^3-3(\sin\alpha)x^2+\sin\alpha\cos 2\alpha$ に対し,

$$f'(x)=3\sqrt{2}x^2-6(\sin\alpha)x$$

また, 方程式 $f'(x)=0$ の解は, $x=0$ または $x=\dfrac{6\sin\alpha}{3\sqrt{2}}=\sqrt{2}\sin\alpha$ である。

(2) $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ より, $0<\sqrt{2}\sin\alpha$ となるので, $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\sqrt{2}\sin\alpha$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

すると, $f(x)=0$ が相異なる 3 つの実数解をもつ条件は,

$$f(0)=\sin\alpha\cos 2\alpha>0\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$f(\sqrt{2}\sin\alpha)=4\sin^3\alpha-6\sin^3\alpha+\sin\alpha\cos 2\alpha<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より, $\sin\alpha>0$ なので, $\cos 2\alpha>0$ から, $0<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ $\cdots\cdots\cdots$③

②より, $\sin\alpha>0$ なので, $-2\sin^2\alpha+\cos 2\alpha<0$

$$-2\sin^2\alpha+1-2\sin^2\alpha<0,\ (2\sin\alpha+1)(2\sin\alpha-1)>0$$

よって, $\sin\alpha>\dfrac{1}{2}$ より, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ $\cdots\cdots\cdots$④

③④より, 求める α の範囲は, $\dfrac{\pi}{6}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$

コメント

微分法の 3 次方程式への応用問題です。三角関数によって味が付けられています。

問　題

p を正の定数とし，放物線 $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ 上の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ における C の接線を l とする。

(1) 点 $\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通り，l に直交する直線 m の方程式を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 m の 2 つの交点の x 座標を α，β $(\alpha<\beta)$ とすれば，$\alpha<0<\beta<p$ であることを示せ。

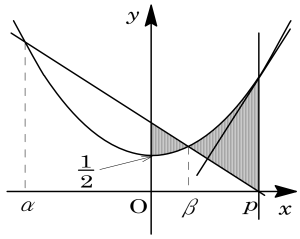
(3) 放物線 C と直線 m で囲まれた図形のうち $x\geqq 0$ の範囲にある部分の面積を S_1，放物線 C と直線 m および直線 $x=p$ で囲まれた図形の面積を S_2 とする。このとき，$S_2-S_1=\dfrac{1}{6}p^3$ であることを示せ。　[2007]

解答例

(1) $C: y=\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}$ ……①に対して，$y'=x$

すると，$x=p$ のとき $y'=p$ である。

これより，直線 l の傾きは p となり，l に直交する直線 m は，傾きが $-\dfrac{1}{p}$ で，$\mathrm{Q}(p,\ 0)$ を通るので，その方程式は，



$$y=-\frac{1}{p}(x-p),\ \ y=-\frac{1}{p}x+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2) C と m の交点の x 座標は，①②から，$\dfrac{x^2}{2}+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{p}x+1$，$x^2+\dfrac{2}{p}x-1=0$

ここで，$f(x)=x^2+\dfrac{2}{p}x-1$ とおくと，

$$f(0)=-1<0,\ \ f(p)=p^2+1>0$$

よって，$f(x)=0$ は異なる 2 つの実数解をもち，これを $x=\alpha$，β とおくと，$\alpha<0<\beta<p$ である。

(3) $S_1=\displaystyle\int_0^\beta\Big(-\frac{1}{p}x+1-\frac{x^2}{2}-\frac{1}{2}\Big)dx$，$S_2=\displaystyle\int_\beta^p\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx$ より，

$$S_2-S_1=\int_\beta^p\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx+\int_0^\beta\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx$$

$$=\int_0^p\Big(\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}+\frac{1}{p}x-1\Big)dx=\Big[\frac{x^3}{6}+\frac{1}{2p}x^2-\frac{1}{2}x\Big]_0^p$$

$$=\frac{p^3}{6}+\frac{1}{2p}p^2-\frac{1}{2}p=\frac{p^3}{6}$$

コメント

微積分の総合問題です。(3)では，S_1，S_2 を単独で求めずに S_1-S_2 を計算すればよいということは，問題文から推測できます。

問　題

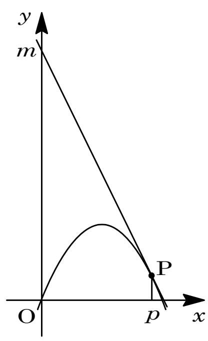
直線 $y=-2x+m$ が，放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax\ (a>2)$ に点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ で接している。連立不等式 $0\leqq y\leqq -\frac{1}{2}x^2+ax$，$x\leqq p$ の表す領域の面積を S_1 とする。また，連立不等式 $-\frac{1}{2}x^2+ax\leqq y\leqq -2x+m$，$0\leqq x\leqq p$ の表す領域の面積を S_2 とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) a, m, q を p の式で表せ。

(2) S_1 と S_2 を p の式で表せ。

(3) $a>2$ のとき，$\frac{1}{2}<\frac{S_2}{S_1}<2$ が成り立つことを示せ。　[2006]

解答例



(1) まず，点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ は，放物線 $y=-\frac{1}{2}x^2+ax$ 上にあるので，

$$q=-\frac{1}{2}p^2+ap\cdots\cdots\cdots①$$

$y=-\frac{1}{2}x^2+ax$ に対して，$y'=-x+a$ より，$\mathrm{P}(p,\ q)$ における接線の方程式は，

$$y-q=(-p+a)(x-p),\quad y=(-p+a)x+p^2-ap+q$$

この式が $y=-2x+m$ と一致するので，

$$-p+a=-2\cdots\cdots\cdots②,\quad p^2-ap+q=m\cdots\cdots\cdots③$$

②より $a=p-2$ となり，①に代入して，

$$q=-\frac{1}{2}p^2+(p-2)p=\frac{1}{2}p^2-2p$$

③に代入すると，$m=p^2-(p-2)p+\frac{1}{2}p^2-2p=\frac{1}{2}p^2$

(2) (1)から，$y=-\frac{1}{2}x^2+(p-2)x$ 上の点 P における接線は，$y=-2x+\frac{1}{2}p^2$ より，

$$S_1=\int_0^p\left\{-\frac{1}{2}x^2+(p-2)x\right\}dx=\left[-\frac{1}{6}x^3+\frac{p-2}{2}x^2\right]_0^p$$

$$=-\frac{1}{6}p^3+\frac{p-2}{2}p^2=\frac{1}{3}p^3-p^2$$

$$S_2=\int_0^p\left\{-2x+\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}x^2-(p-2)x\right\}dx=\frac{1}{2}\int_0^p(x-p)^2dx$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{(x-p)^3}{3}\right]_0^p=\frac{1}{6}p^3$$

(3)　(1)より, $a>2$ のとき $p>4$ となり, (2)から,

$$\frac{S_2}{S_1}=\frac{\frac{1}{6}p^3}{\frac{1}{3}p^3-p^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{p}{p-3}=\frac{1}{2}\left(1+\frac{3}{p-3}\right)$$

すると，$0<\dfrac{3}{p-3}<3$ から，$\dfrac{1}{2}<\dfrac{S_2}{S_1}<2$ となる。

コメント

放物線の接線と面積が絡んだ数Ⅱの典型頻出問題です。ただ，(3)の普通の解法は上に記したとおりでしょうが，分子を定数化する変形は，現行の課程では数Ⅲということになっています。

問　題

各実数 t に対して，方程式 $y=(2t-3)x-t^2$ で表される直線 L_t を考える。次の問いに答えよ。

(1) 直線 L_t と L_s が直交するとき，L_t と L_s の交点の y 座標は，t と s によらない定数になることを示せ。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ にすべての直線 L_t が接するとき，定数 a，b，c の値を求めよ。

(3) (2)で求めた放物線と 2 つの直線 L_t，L_{t+2} によって囲まれる図形の面積は，t によらない定数になることを示せ。 [2005]

解答例

(1) $L_t: y=(2t-3)x-t^2$ ……①，$L_s: y=(2s-3)x-s^2$ ……②に対して，L_t と L_s が直交するとき，

$$(2t-3)(2s-3)=-1 \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，①②の交点は，$(2t-3)x-t^2=(2s-3)x-s^2$ から，

$$2(t-s)x=t^2-s^2$$

$t\neq s$ より，$x=\dfrac{t+s}{2}$ となり，交点の y 座標は，

$$y=(2t-3)\cdot\frac{t+s}{2}-t^2=ts-\frac{3}{2}t-\frac{3}{2}s=\left(t-\frac{3}{2}\right)\left(s-\frac{3}{2}\right)-\frac{9}{4}$$

③から，$\left(t-\dfrac{3}{2}\right)\left(s-\dfrac{3}{2}\right)=-\dfrac{1}{4}$ なので，$y=-\dfrac{1}{4}-\dfrac{9}{4}=-\dfrac{5}{2}$ である。

(2) 放物線 $y=ax^2+bx+c$ ……④と直線①の共有点は，

$$ax^2+bx+c=(2t-3)x-t^2,\ ax^2+(b+3-2t)x+c+t^2=0$$

④と①が接することより，

$$D=(b+3-2t)^2-4a(c+t^2)=0$$

$$(4-4a)t^2-4(b+3)t+(b+3)^2-4ac=0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤がすべての t で成立することより，

$$4-4a=0,\ b+3=0,\ (b+3)^2-4ac=0$$

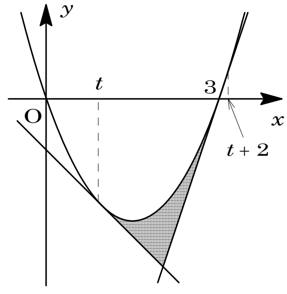
よって，$a=1$，$b=-3$，$c=0$

(3) (2)より，放物線の方程式は，$y=x^2-3x$ ………⑥

直線 L_t と⑥との接点は，$x^2-3x=(2t-3)x-t^2$

$$x^2-2tx+t^2=0,\ x=t$$

同様にして，直線 L_{t+2} と⑥との接点は，$x=t+2$ となる。



さらに L_t，L_{t+2} の交点は, (1)より,

$$x=\frac{t+(t+2)}{2}=t+1$$

以上より, 放物線⑥と 2 直線 L_t，L_{t+2} によって囲まれる図形の面積 S は,

$$S=\int_t^{t+1}(x-t)^2\,dx+\int_{t+1}^{t+2}\{x-(t+2)\}^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big[(x-t)^3\Big]_t^{t+1}+\frac{1}{3}\Big[(x-t-2)^3\Big]_{t+1}^{t+2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

コメント

放物線と面積についての有名頻出問題です。

問　題

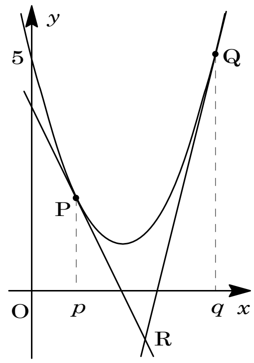
$f(x)=x^2-4x+5$ とする。$p<2<q$ とし，放物線 $y=f(x)$ 上の 2 点 $\mathrm{P}(p,\ f(p))$，$\mathrm{Q}(q,\ f(q))$ における接線を，それぞれ l, m とする。l と m は点 $\mathrm{R}\left(\frac{5}{2},\ r\right)$ で交わり，それぞれの傾きを a, b とするとき，$2a+b=0$ を満たすものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p, q, r を求めよ。

(2)　接線 l, m の方程式を求めよ。

(3)　放物線 $y=f(x)$ と 2 つの接線 l, m で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2004]

解答例



(1)　$f(x)=x^2-4x+5$ より，$f'(x)=2x-4$ となり，

$$a=f'(p)=2p-4\,,\ \ b=f'(q)=2q-4$$

条件から，$2a+b=0$ より，$2(2p-4)+(2q-4)=0$

$$2p+q=6\ \cdots\cdots\cdots①$$

P における接線 l は，

$$y-(p^2-4p+5)=(2p-4)(x-p)$$

$$y=(2p-4)x-p^2+5\ \cdots\cdots\cdots②$$

同様にして，$m:y=(2q-4)x-q^2+5\ \cdots\cdots\cdots③$

②③の交点は，$(2p-4)x-p^2+5=(2q-4)x-q^2+5$

$$2(p-q)x=p^2-q^2,\ \ x=\frac{p+q}{2}$$

条件より，$\dfrac{p+q}{2}=\dfrac{5}{2}$，$p+q=5\ \cdots\cdots\cdots④$

①④より，$p=1$，$q=4$

このとき，②は $y=-2x+4$ となり，$\mathrm{R}\left(\frac{5}{2},\ r\right)$ を通ることより，$r=-5+4=-1$

(2)　②より $l:y=-2x+4$，③より $m:y=4x-11$

(3)　$S=\displaystyle\int_1^{\frac{5}{2}}\{(x^2-4x+5)-(-2x+4)\}dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}\{(x^2-4x+5)-(4x-11)\}dx$

$$=\int_1^{\frac{5}{2}}(x-1)^2dx+\int_{\frac{5}{2}}^{4}(x-4)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-1)^3\Big]_1^{\frac{5}{2}}+\frac{1}{3}\Big[(x-4)^3\Big]_{\frac{5}{2}}^{4}$$

$$=\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{9}{4}$$

コメント

センター試験でも過去に類題が出た頻出問題の 1 つです。交点 R の x 座標は，接点 P, Q の x 座標の相加平均になっています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　a を 0 でない実数とするとき，2 つの曲線 $y=-x^2+2x$ と $y=-ax^2+1$ が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲で 2 つの交点をもつように a の範囲を定めよ。

(2)　a_0 を(1)で求めた a の範囲の最大値とするとき，定積分

$$I=\int_0^2\left|(-a_0x^2+1)-(-x^2+2x)\right|dx$$

を求めよ。　[2003]

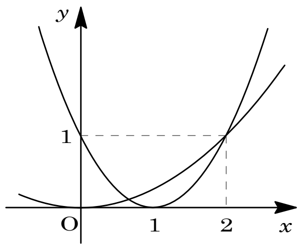
解答例

(1)　2 曲線 $y=-x^2+2x$ ……①，$y=-ax^2+1$ ……②の共有点は，

$$-x^2+2x=-ax^2+1,\ \ ax^2=(x-1)^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

①と②が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲に 2 つの交点をもつ条件は，③から $y=ax^2$ と $y=(x-1)^2$ が $0\leqq x\leqq 2$ の範囲に 2 つの交点をもつことに等しい。

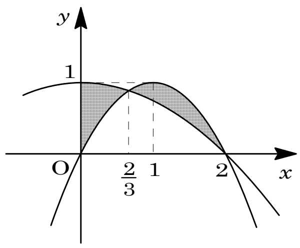
すると，$y=ax^2$ が点 $(2,\ 1)$ を通るのは，$1=4a$，$a=\frac{1}{4}$ なので，右図より，求める a の範囲は $0<a\leqq\frac{1}{4}$ である。



(2)　(1)より，$a_0=\frac{1}{4}$ となり，このとき①と②の交点は，③より，

$$\frac{1}{4}x^2=(x-1)^2,\ \ \pm\frac{1}{2}x=x-1$$

よって，$x=\frac{2}{3}$，$x=2$ となるので，



$$I=\int_0^2\left|\left(-\frac{1}{4}x^2+1\right)-(-x^2+2x)\right|dx$$

$$=\int_0^2\left|\frac{3}{4}x^2-2x+1\right|dx$$

$$=\int_0^{\frac{2}{3}}\left(\frac{3}{4}x^2-2x+1\right)dx-\int_{\frac{2}{3}}^2\left(\frac{3}{4}x^2-2x+1\right)dx$$

$$=\left[\frac{3}{4}\cdot\frac{x^3}{3}-x^2+x\right]_0^{\frac{2}{3}}-\frac{3}{4}\int_{\frac{2}{3}}^2\left(x-\frac{2}{3}\right)(x-2)\,dx$$

$$=\frac{8}{27}-\frac{3}{4}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(2-\frac{2}{3}\right)^3=\frac{16}{27}$$

コメント

a が変化するとき，$y=ax^2$ のグラフの動きを考え，(1)は図から a の範囲を求めました。

問　題

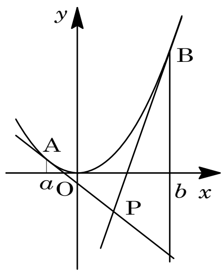
放物線 $y=x^2$ 上の 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$, $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ $(a<b)$ における接線をそれぞれ l_{A}, l_{B} とする。

(1) l_{A} と l_{B} の交点を $\mathrm{P}(p,\ q)$ とするとき, a, b は 2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ の解であることを示せ。

(2) 2 直線 l_{A}, $x=b$ と放物線 $y=x^2$ とで囲まれた図形の面積 S は, $\dfrac{1}{3}(b-a)^3$ であることを示せ。

(3) 交点 P が放物線 $y=-(x-1)^2$ 上を動くとき, 面積 S の最小値を求めよ。 [2002]

解答例



(1) $y=x^2$ より $y'=2x$ なので, $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線は,

$$y-a^2=2a(x-a),\ \ y=2ax-a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ における接線は, 同様にして,

$$y=2bx-b^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②の交点 P は, $2ax-a^2=2bx-b^2$

$$2(b-a)x=b^2-a^2,\ \ x=\frac{b^2-a^2}{2(b-a)}=\frac{a+b}{2}$$

①より, $y=2a\cdot\dfrac{a+b}{2}-a^2=ab$

交点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ なので $p=\dfrac{a+b}{2}$, $q=ab$ となり, 解と係数の関係から, a, b は 2 次方程式 $x^2-2px+q=0$ の解である。

(2) $S=\displaystyle\int_a^b\{x^2-(2ax-a^2)\}dx=\int_a^b(x-a)^2dx=\frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^b=\frac{1}{3}(b-a)^3$

(3) 条件より, $q=-(p-1)^2$, $q=-p^2+2p-1 \cdots\cdots\cdots ③$

$a<b$ から, (1)より $a=p-\sqrt{p^2-q}$, $b=p+\sqrt{p^2-q}$ となり,

$$S=\frac{1}{3}\left(2\sqrt{p^2-q}\right)^3=\frac{8}{3}\left(\sqrt{p^2-q}\right)^3$$

③より, $p^2-q=2p^2-2p+1=2\left(p-\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{2}$ なので, S は $p=\dfrac{1}{2}$ のとき, 最小値 $\dfrac{8}{3}\left(\sqrt{\dfrac{1}{2}}\right)^3=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

コメント

センター試験に出題されそうな頻出基本問題です。

問　題

放物線 $y=x^2$ と直線 l が 2 点で交わっている。それらの交点の x 座標を s, t $(s<t)$ とするとき, 次の問いに答えよ。

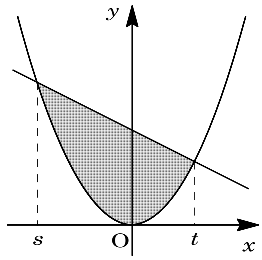
(1) 放物線 $y=x^2$ と直線 l で囲まれた部分の面積 S は, $S=\dfrac{1}{6}(t-s)^3$ で与えられることを証明せよ。

(2) 直線 l が, 点 $(t,\ t^2)$ における $y=x^2$ の接線と直交しているとき, s を t で表せ。

(3) (2)のとき, (1)の面積 S の最小値, および最小値を与える t を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 放物線 $y=x^2$ ……①, 直線 l : $y=mx+n$ ……②



①②の交点は, $x^2-mx-n=0$ ………③

条件から, ③の解が $x=s,\ t\ (s<t)$ なので,

$$x^2-mx-n=(x-s)(x-t)$$

よって, $S=\int_s^t(mx+n-x^2)\,dx=-\int_s^t(x-s)(x-t)\,dx$

$$=-\int_s^t(x-s)(x-s+s-t)\,dx$$

$$=-\int_s^t\{(x-s)^2-(t-s)(x-s)\}dx$$

$$=-\frac{1}{3}\Big[(x-s)^3\Big]_s^t+\frac{1}{2}(t-s)\Big[(x-s)^2\Big]_s^t=\frac{1}{6}(t-s)^3$$

(2) 直線 l の傾きは, $m=\dfrac{t^2-s^2}{t-s}=t+s$ である。また, ①より $y'=2x$ なので, 点 $(t,\ t^2)$ における接線の傾きは $2t$ となり, 条件より,

$$(t+s)\cdot 2t=-1\ ,\quad s=-t-\frac{1}{2t}$$

(3) (1)(2)より, $S=\dfrac{1}{6}\Big(t+t+\dfrac{1}{2t}\Big)^3=\dfrac{1}{6}\Big(2t+\dfrac{1}{2t}\Big)^3$

ここで, $s<t$ より, $-t-\dfrac{1}{2t}<t$, $t+\dfrac{1}{2t}>0$ となり, $t>0$ である。

すると, 相加平均と相乗平均の関係から,

$$S=\frac{1}{6}\Big(2t+\frac{1}{2t}\Big)^3\geqq\frac{1}{6}\Big(2\sqrt{2t\cdot\frac{1}{2t}}\Big)^3=\frac{4}{3}$$

よって, S は最小値 $\dfrac{4}{3}$ をとる。このとき, $2t=\dfrac{1}{2t}$ から, $t=\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

(3)まで含めて, 有名な頻出問題の 1 つです。数Ⅱの微積分の標準的な問題です。

問　題

a を正の定数とする。曲線 $y=x^2(x-a)$ の点 $\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線 l が y 軸と交わる点を $\mathrm{H}(0,\ h)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) h を p の式で表せ。

(2) $p \geqq 0$ のとき, h を最大にする p の値を求めよ。また, そのときの接線 l の方程式を求めよ。　[2000]

解答例

(1) $y=x^2(x-a)=x^3-ax^2$ から, $y'=3x^2-2ax$

$x=p$ のとき $y'=3p^2-2ap$ より, $\mathrm{P}(p,\ p^2(p-a))$ における接線は,

$$y-p^2(p-a)=(3p^2-2ap)(x-p)$$

$$y=(3p^2-2ap)x-2p^3+ap^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

y 切片が $\mathrm{H}(0,\ h)$ より, $h=-2p^3+ap^2 \cdots\cdots\cdots ②$

(2) ②より, $h'=-6p^2+2ap=-2p(3p-a)$

$a>0$ より, $p=\dfrac{a}{3}$ のとき, h は最大となる。

p	0	$\cdots$	$\dfrac{a}{3}$	$\cdots$
h'		$+$	0	$-$
h		$\nearrow$		$\searrow$

このとき接線は, ①より,

$$y=-\frac{1}{3}a^2x+\frac{1}{27}a^3$$

コメント

a が正なので, 場合分けも必要なく, あっさり結論が導けます。

問　題

2 次関数 $f(x) = px^2 + qx + r$ は，次の(i), (ii)を満たすとする。

(i)　$y = f(x)$ のグラフ上の点 $(x,\ f(x))$ における接線の傾きは $-4x+8$ である。

(ii)　$y = f(x)$ のグラフは x 軸と異なる 2 点で交わる。

(1) p, q の値と r の範囲を求めよ。

(2) $y = f(x)$ のグラフが x 軸と交わる 2 点を A, B, y 軸と交わる点を C とし，三角形 ABC の面積を T とする。また，$y = f(x)$ のグラフが x 軸とで囲まれる図形の面積を S とする。$S = 4T$ となるような r の値を求めよ。　[1998]

解答例

(1) (i)より，$f'(x) = -4x+8$ から，$f(x) = \int(-4x+8)\,dx = -2x^2+8x+C$

$f(x) = px^2+qx+r$ から，$p=-2$，$q=8$

よって，$f(x) = -2x^2+8x+r$

(ii)より，$f(x)=0$ の判別式が正より，$D/4 = 16+2r > 0$，$r > -8$

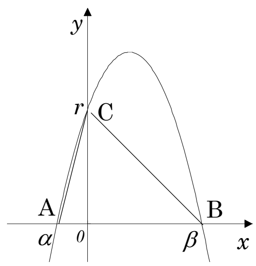
(2) $\mathrm{A}(\alpha,\ 0)$，$\mathrm{B}(\beta,\ 0)$ とすると，α，β は $f(x)=0$ の 2 つの解となる。

$\alpha<\beta$ とすると，$\alpha = \dfrac{4-\sqrt{16+2r}}{2}$，$\beta = \dfrac{4+\sqrt{16+2r}}{2}$

$\beta-\alpha = \sqrt{16+2r}$ ………(＊)

ここで，$T = \dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)|r|$

$S = \displaystyle\int_\alpha^\beta -2(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3$



条件から，$S = 4T$

$\dfrac{1}{3}(\beta-\alpha)^3 = 4\cdot\dfrac{1}{2}(\beta-\alpha)|r|$，$(\beta-\alpha)^2 = 6|r|$

(＊)から，$16+2r = 6|r|$，$16+2r = \pm 6r$

よって，$r = 4$，-2

コメント

センター試験レベルの問題です。(2)では，図に気をとられすぎると，r に絶対値をつけ忘れしそうです。

問　題

座標平面上の 3 点 O$(0,\ 0)$，A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ を考える。C を線分 OA 上にあり，$\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$ を満たす点とする。また，P を x 座標が t である直線 OA 上の点とする。点 Q，R，P′ を次により定める。

(a)　点 P を通り傾きが 1 の直線と，直線 AB の交点を Q とする。

(b)　点 Q を通り直線 OB に垂直な直線と，直線 OB の交点を R とする。

(c)　点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線と，直線 OA の交点を P′ とする。

次の問いに答えよ。

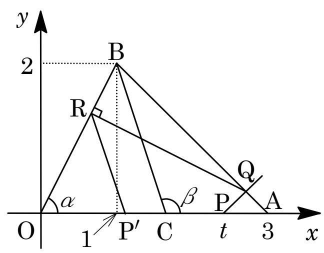
(1)　点 Q の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 R の座標を t を用いて表せ。

(3)　点 P′ の座標を t を用いて表せ。

(4)　点 P′ の x 座標を $f(t)$ とする。数列 $\{t_n\}$ を $t_1=2$，$t_{n+1}=f(t_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。数列 $\{t_n\}$ の一般項を求めよ。　[2017]

解答例



(1)　P$(t,\ 0)$ を通り傾き 1 の直線の方程式は，

$y=x-t$ ………①

A$(3,\ 0)$，B$(1,\ 2)$ に対し，直線 AB の方程式は，

$y=-(x-3)$ ………②

①②を連立して，$x-t=-(x-3)$ となり，$x=\dfrac{t+3}{2}$，

$y=\dfrac{t+3}{2}-t=\dfrac{-t+3}{2}$ から，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{t+3}{2},\ \dfrac{-t+3}{2}\right)$ となる。

(2)　直線 OB の方程式は，$y=2x$ ………③

Q を通り OB に垂直な直線の方程式は，$y-\dfrac{-t+3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{t+3}{2}\right)$ ………④

③④を連立して，$2x-\dfrac{-t+3}{2}=-\dfrac{1}{2}\left(x-\dfrac{t+3}{2}\right)$ となり，$x=\dfrac{-t+9}{10}$

$y=2\cdot\dfrac{-t+9}{10}=\dfrac{-t+9}{5}$

よって，$\mathrm{R}\left(\dfrac{-t+9}{10},\ \dfrac{-t+9}{5}\right)$ となる。

(3)　$\angle\mathrm{OBC}=45^\circ$ のとき，$\angle\mathrm{BOC}=\alpha$，$\angle\mathrm{BCA}=\beta$ とおくと，$\tan\alpha=2$ より，

$\tan\beta=\tan(\alpha+45^\circ)=\dfrac{2+1}{1-2\cdot1}=-3$

これより，直線 BC の傾きは-3となり，点 R を通り直線 BC と同じ傾きをもつ直線の方程式は,

$$y-\frac{-t+9}{5}=-3\left(x-\frac{-t+9}{10}\right)$$

直線 OA すなわち x 軸との交点は，$-\frac{-t+9}{5}=-3\left(x-\frac{-t+9}{10}\right)$より，$x=\frac{-t+9}{6}$となり，$\mathrm{P}'\left(\frac{-t+9}{6},\ 0\right)$である。

(4)　$f(t)=\frac{-t+9}{6}$より，数列$\{t_n\}$は，$t_1=2$，$t_{n+1}=f(t_n)=\frac{-t_n+9}{6}$で定められ,

$$t_{n+1}-\frac{9}{7}=-\frac{1}{6}\left(t_n-\frac{9}{7}\right)$$

すると，$t_n-\frac{9}{7}=\left(t_1-\frac{9}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{5}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}$となり,

$$t_n=\frac{5}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n-1}+\frac{9}{7}$$

コメント

直線の方程式についての基本的な問題です。(4)で漸化式という付録がついていますが。

問　題

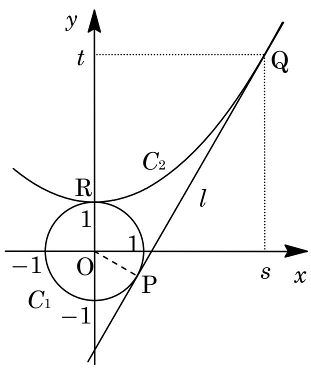
a を正の定数とし，座標平面上において，円 $C_1: x^2+y^2=1$，放物線 $C_2: y=ax^2+1$ を考える。C_1 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l は点 $\mathrm{Q}(s,\ t)$ で C_2 に接している。次の問いに答えよ。

(1) s, t および a を求めよ。

(2) C_2, l および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

(3) 円 C_1 上の点が点 P から点 $\mathrm{R}(0,\ 1)$ まで反時計回りに動いてできる円弧を C_3 とする。C_2, l および C_3 で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

解答例



(1) $C_1: x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ における C_1 の接線 l の方程式は,

$$l: \frac{\sqrt{3}}{2}x-\frac{1}{2}y=1,\ \ y=\sqrt{3}x-2 \cdots\cdots\cdots ①$$

$C_2: y=ax^2+1$ と①を連立すると,

$$ax^2+1=\sqrt{3}x-2,\ \ ax^2-\sqrt{3}x+3=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

l と C_2 が接することより，$D=3-12a=0$，$a=\dfrac{1}{4}$

このとき，②の重解は $x=\dfrac{\sqrt{3}}{2a}=2\sqrt{3}$

よって，接点 Q の x 座標 $s=2\sqrt{3}$ となり，①から $t=\sqrt{3}\cdot 2\sqrt{3}-2=4$ である。

(2) C_2, l および y 軸で囲まれた部分の面積 S は,

$$S=\int_0^{2\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2+1-\sqrt{3}x+2\right)dx=\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4}(x-2\sqrt{3})^2dx$$

$$=\frac{1}{4}\left[\frac{(x-2\sqrt{3})^3}{3}\right]_0^{2\sqrt{3}}=\frac{1}{12}\cdot 24\sqrt{3}=2\sqrt{3}$$

(3) C_2, l および C_3 で囲まれた部分の面積 T は，$\angle\mathrm{POR}=\dfrac{2}{3}\pi$，$l$ の y 切片が -2 から,

$$T=S-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=2\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{3}{2}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

コメント

円と放物線の関係を題材にした面積に関する基本題です。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とし，$a<1$ とする。座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y=x^2-x$，$C_2 : y=x^3+bx^2+cx-a$ を考える。C_1 と C_2 は，点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ と，それとは異なる点 Q を通る。また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいものとする。点 P における C_1 の接線を l_1，点 Q における C_1 の接線を l_2，点 Q における C_2 の接線を l_3 とする。次の問いに答えよ。

(1) $b,\ c$ および点 Q の座標を a を用いて表せ。

(2) l_1，l_2，l_3 が三角形をつくらないような a の値を求めよ。

(3) l_1，l_2，l_3 が直角三角形をつくるような a の値の個数を求めよ。　　　　[2015]

解答例

(1) $C_1 : y=x^2-x$ ……①，$C_2 : y=x^3+bx^2+cx-a$ ……②に対して，

①より $y'=2x-1$ ……③，②より $y'=3x^2+2bx+c$ ……④

ここで，C_2 が点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$ を通ることより，②から $1+b+c-a=0$ ………⑤

また，点 P における C_1 と C_2 の接線の傾きは等しいことより，③④から，

$$2-1=3+2b+c,\ \ c=-2b-2 \text{ ………⑥}$$

⑤⑥より，$1+b-2b-2-a=0$ となり $b=-a-1$，$c=-2(-a-1)-2=2a$

②に代入すると，$C_2 : y=x^3-(a+1)x^2+2ax-a$ ………⑦

次に，①⑦を連立すると，$x^2-x=x^3-(a+1)x^2+2ax-a$ となり，

$$x^3-(a+2)x^2+(2a+1)x-a=0,\ \ (x-1)^2(x-a)=0$$

よって，点 Q の座標は，$x\neq 1$ から，$\mathrm{Q}(a,\ a^2-a)$ である。

(2) まず，l_1，l_2，l_3 の方向ベクトルを，それぞれ $\overrightarrow{u_1}$，$\overrightarrow{u_2}$，$\overrightarrow{u_3}$ とおくと，(1)より，

$$\overrightarrow{u_1}=(1,\ 1),\ \ \overrightarrow{u_2}=(1,\ 2a-1)$$

⑦から $y'=3x^2-2(a+1)x+2a$ より，$\overrightarrow{u_3}=(1,\ 3a^2-2(a+1)a+2a)=(1,\ a^2)$

さて，l_1，l_2，l_3 が三角形をつくらない条件は，$a<1$ のもとで，

(i) $l_1 /\!/ l_2$ のとき　$\overrightarrow{u_1} /\!/ \overrightarrow{u_2}$ より $2a-1=1$ となるが，$a=1$ から不適。

(ii) $l_1 /\!/ l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_1} /\!/ \overrightarrow{u_3}$ より $a^2=1$ となり，$a=-1$

(iii) $l_2 /\!/ l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_2} /\!/ \overrightarrow{u_3}$ より $a^2=2a-1$ となるが，$a=1$ から不適。

(iv) l_1，l_2，l_3 が 1 点で交わるとき　$l_1 : y=x-1$ が，l_2 と l_3 の交点 Q を通る。

すると，$a^2-a=a-1$ となるが，$a=1$ から不適。

(i)～(iv)より，求める a の値は $a=-1$ である。

(3) l_1，l_2，l_3 が直角三角形をつくる条件は，$a<1$ かつ $a\neq -1$ のもとで，

(i) $l_1 \perp l_2$ のとき　$\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_2}$ より $1+(2a-1)=0$ となり，$a=0$

(ii) $l_1 \perp l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_1} \perp \overrightarrow{u_3}$ より $1+a^2=0$ となり不適。

(iii)　$l_2 \perp l_3$ のとき　$\overrightarrow{u_2} \perp \overrightarrow{u_3}$ より $1+a^2(2a-1)=0$，$2a^3-a^2+1=0$ ………⑧

$f(a)=2a^3-a^2+1$ とおくと，

$$f'(a)=6a^2-2a=2a(3a-1)$$

$f(-1)=-2\neq 0$ より，右表から，⑧の解は -1 と 0 の間にただ 1 つ存在する。

a	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	$\frac{26}{27}$	$\nearrow$	

(i)～(iii)より，求める a の個数は 2 個である。

コメント

直線の式についての基本の確認だけですが，妙に疲れる問題です。

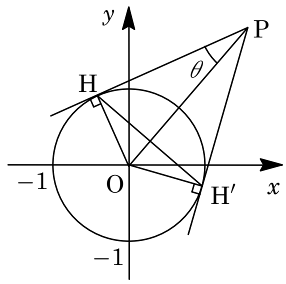
問　題

座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とする。C の外部にある点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ から C に引いた 2 本の接線と C との接点を H，H$'$ とする。$\angle\mathrm{OPH}=\theta$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1) PH の長さ，および $\sin\theta$ を $a,\,b$ を用いて表せ。

(2) $\mathrm{HH}'=\mathrm{OP}$ となるような点 P の軌跡を求めよ。 [2014]

解答例



(1) $\angle\mathrm{OHP}=90^\circ$ より，$\mathrm{PH}=\sqrt{\mathrm{OP}^2-\mathrm{OH}^2}=\sqrt{a^2+b^2-1}$

$$\sin\theta=\frac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}}=\frac{1}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

(2) $\angle\mathrm{OPH}=\angle\mathrm{OPH}'=\theta$，$\mathrm{OP}\perp\mathrm{HH}'$ より，

$$\mathrm{HH}'=2\mathrm{PH}\sin\theta=\frac{2\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$\mathrm{HH}'=\mathrm{OP}$ から，$\dfrac{2\sqrt{a^2+b^2-1}}{\sqrt{a^2+b^2}}=\sqrt{a^2+b^2}$ となり，

$$2\sqrt{a^2+b^2-1}=a^2+b^2,\ 4(a^2+b^2-1)=(a^2+b^2)^2$$

すると，$(a^2+b^2)^2-4(a^2+b^2)+4=0$，$(a^2+b^2-2)^2=0$ より，

$$a^2+b^2-2=0,\ a^2+b^2=2\cdots\cdots\cdots(*)$$

なお，$(*)$は，点 P が円 C の外部にあるという条件を満たしている。

以上より，点 P は原点を中心として半径 $\sqrt{2}$ の円を描く。

コメント

よく見かける構図の問題です。円と直線に関する図形的な性質について，その証明は省いた形の解答例です。

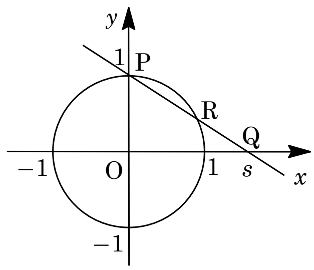
問　題

座標平面上で，原点 O を中心とする半径 1 の円を C とし，2 点 P(0, 1)，Q(s, 0) を考える。2 点 P, Q を通る直線を l とし，l と C の交点のうち P ではないものを R とする。次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標を s を用いて表せ。

(2)　x 座標と y 座標がともに有理数である点を有理点という。s が有理数のとき，R は有理点であることを示せ。　　[2013]

解答例



(1)　2 点 P(0, 1)，Q(s, 0) に対し，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(s,\ -1)$

すると，2 点 P, Q を通る直線 l の法線ベクトルの成分を $(1,\ s)$ とおくことができ，l の方程式は，

$$x+s(y-1)=0,\ \ x=-s(y-1)\cdots\cdots\cdots①$$

また，$C: x^2+y^2=1\cdots\cdots②$から，①②を連立して，

$$s^2(y-1)^2+y^2-1=0$$

$$(y-1)(s^2y-s^2+y+1)=0$$

$y\neq 1$ のとき $(s^2+1)y=s^2-1$ となり，$y=\dfrac{s^2-1}{s^2+1}$，$x=-s\left(\dfrac{s^2-1}{s^2+1}-1\right)=\dfrac{2s}{s^2+1}$

よって，$\mathrm{R}\left(\dfrac{2s}{s^2+1},\ \dfrac{s^2-1}{s^2+1}\right)$である。

(2)　s が有理数のとき，p, q を整数とし $s=\dfrac{q}{p}$ $(p\neq 0)$ とおく。このとき，(1)より，

$$x=\frac{2s}{s^2+1}=\frac{2\cdot\dfrac{q}{p}}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+1}=\frac{2pq}{p^2+q^2},\ \ y=\frac{s^2-1}{s^2+1}=\frac{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2-1}{\left(\dfrac{q}{p}\right)^2+1}=\frac{q^2-p^2}{p^2+q^2}$$

よって，点 R は有理点である。

コメント

円と直線についての計算問題です。なお，(2)の出題の意図は……。

問　題

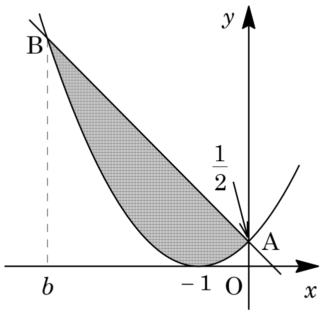
放物線$F: y=\frac{1}{2}(x+1)^2$上の点$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$を通り，A における$F$の接線に垂直な直線を$l$とし，$l$と放物線$F$との交点のうち点 A と異なる方を$\mathrm{B}\left(b,\ \frac{1}{2}(b+1)^2\right)$とする。次の問いに答えよ。

(1) 直線lの方程式とbの値を求めよ。

(2) 放物線Fと直線lで囲まれた部分の面積T_1を求めよ。

(3) 線分 AB を直径とする円をCとする。このとき，不等式$y \leqq \frac{1}{2}(x+1)^2$の表す領域で円$C$の内部にある部分の面積$T_2$を求めよ。 [2011]

解答例



(1) $F: y=\frac{1}{2}(x+1)^2$ ……①に対し，$y'=x+1$

すると，$\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$における接線の傾きは 1 から，直線$l$の傾きは$-1$となり，その方程式は，

$$l: y=-x+\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\frac{1}{2}(x+1)^2=-x+\frac{1}{2}$，$x^2+4x=0$となり，

$$x=0,\ -4$$

よって，$b\neq 0$から，$b=-4$である。

(2) 放物線Fと直線lで囲まれた部分の面積T_1は，

$$T_1=\int_{-4}^{0}\left\{-x+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}(x+1)^2\right\}dx=-\frac{1}{2}\int_{-4}^{0}x(x+4)\,dx$$

$$=-\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{6}\right)(0+4)^3=\frac{16}{3}$$

(3) $\mathrm{A}\left(0,\ \frac{1}{2}\right)$，$\mathrm{B}\left(-4,\ \frac{9}{2}\right)$を直径の両端とする円$C$の方程式は，

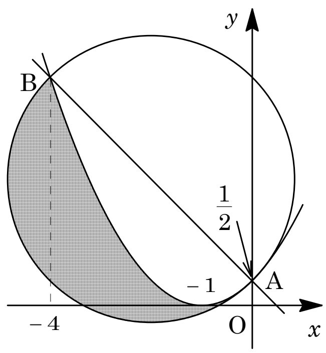
$$x(x+4)+\left(y-\frac{1}{2}\right)\left(y-\frac{9}{2}\right)=0$$

$$x^2+4x+y^2-5y+\frac{9}{4}=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$x^2+4x+\frac{1}{4}(x+1)^4-\frac{5}{2}(x+1)^2+\frac{9}{4}=0$

$$x^4+4x^3=0,\ x=0,\ -4$$

これより，放物線Fと円Cとの共有点は，2 点 A, B のみである。



よって，放物線 F の下側で円 C の内部にある部分の面積 T_2 は，C の直径 $\mathrm{AB}=4\sqrt{2}$ から，

$$T_2=\frac{1}{2}\pi(2\sqrt{2})^2-T_1=4\pi-\frac{16}{3}$$

コメント

放物線 F と円 C との共有点は，2 点 A，B だけというのは推測できますが，式で確認しておきました。計算が少々面倒でしたが。

問　題

座標平面上の定点 P と，関数 $y=f(x)$ のグラフ上を動く点 Q を考える。このとき，点 P と点 Q の距離 PQ の最小値を，点 P と $y=f(x)$ のグラフの距離と呼ぶことにする。次の問いに答えよ。

(1)　点 $P_1\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_1 の値を求めよ。

(2)　点 $P_2\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ と $y=x^2$ のグラフの距離 d_2 の値を求めよ。また，$d_2=P_2R$ となる $y=x^2$ のグラフ上の点 R をすべて求めよ。

(3)　点 P_2 を中心とする半径 d_2 の円と $y=x^2$ のグラフで囲まれた部分の面積 S を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　$Q(t,\ t^2)$ とおくと，$P_1\left(0,\ \dfrac{1}{3}\right)$ から，

$$P_1Q^2=t^2+\left(t^2-\frac{1}{3}\right)^2=t^4+\frac{1}{3}t^2+\frac{1}{9}=\left(t^2+\frac{1}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

$t^2\geqq 0$ より，P_1Q^2 は $t^2=0$ のとき最小値 $\dfrac{1}{9}$ をとる。

したがって，$d_1=\sqrt{\dfrac{1}{9}}=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　(1)と同様にして，$P_2\left(0,\ \dfrac{5}{4}\right)$ から，

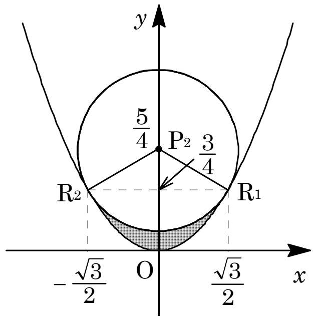
$$P_2Q^2=t^2+\left(t^2-\frac{5}{4}\right)^2=t^4-\frac{3}{2}t^2+\frac{25}{16}=\left(t^2-\frac{3}{4}\right)^2+1$$

$t^2\geqq 0$ より，P_2Q^2 は $t^2=\dfrac{3}{4}\left(t=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ のとき最小値 1 をとる。

したがって，$d_2=1$ であり，$d_2=P_2R$ となる R を R_1，R_2 とすると，

$$R_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right),\ R_2\left(-\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{3}{4}\right)$$

(3)　$\overrightarrow{P_2R_1}=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ から，線分 P_2R_1 と y 軸のなす角は $\dfrac{\pi}{3}$ である。



すると，求める右図の網点部の面積 S は，y 軸に関する対称性に注意して，

$$S=2\left\{\frac{1}{2}\left(\frac{3}{4}+\frac{5}{4}\right)\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{3}-\int_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}x^2dx\right\}$$

$$=\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\sqrt{3}}{2}}=\frac{3}{4}\sqrt{3}-\frac{\pi}{3}$$

コメント

円が放物線に接する場合を題材にした有名問題です。

問　題

2 つの円

$$(*)\ \ x^2+y^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x-\frac{\sqrt{17}}{2}y+\sin^2\theta+\frac{17}{16}=0$$

$$(**)\ \ x^2+y^2=\frac{9}{16}$$

について，次の問いに答えよ。ただし，$0°<\theta<180°$ とする。

(1) 円$(*)$の半径と中心の座標をθを用いて表せ。

(2) 円$(*)$と円$(**)$が共有点をもたないようなθの値の範囲を求めよ。 [2005]

解答例

(1) $x^2+y^2+(2\sqrt{2}\sin\theta)x-\dfrac{\sqrt{17}}{2}y+\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}=0$ ………$(*)$より，

$$(x+\sqrt{2}\sin\theta)^2+\left(y-\frac{\sqrt{17}}{4}\right)^2=\sin^2\theta$$

$0°<\theta<180°$ から $\sin\theta>0$ なので，$(*)$は半径 $\sin\theta$，中心 $\left(-\sqrt{2}\sin\theta,\ \dfrac{\sqrt{17}}{4}\right)$の円である。

(2) まず，円$(*)$と円$(**)$の中心間距離は $\sqrt{2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}}$ であり，円$(*)$の半径は $\sin\theta$，円$(**)$の半径は $\dfrac{3}{4}$ である。

ここで，2 円が共有点をもたないのは，離れているときか，または一方が他方に含まれるときである。

(i) 円$(*)$と円$(**)$が離れているとき

$\sqrt{2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}}>\sin\theta+\dfrac{3}{4}$ より，$2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}>\left(\sin\theta+\dfrac{3}{4}\right)^2$

$$2\sin^2\theta-3\sin\theta+1>0,\ \ (2\sin\theta-1)(\sin\theta-1)>0$$

よって，$0°<\theta<180°$ から $\sin\theta>0$ なので，$0<\sin\theta<\dfrac{1}{2}$ となり，

$$0°<\theta<30°,\ \ 150°<\theta<180°$$

(ii) 円$(*)$と円$(**)$の一方が他方に含まれるとき

$\sqrt{2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}}<\left|\sin\theta-\dfrac{3}{4}\right|$ より，$2\sin^2\theta+\dfrac{17}{16}<\left(\sin\theta-\dfrac{3}{4}\right)^2$

$$2\sin^2\theta+3\sin\theta+1<0$$

$\sin\theta>0$ なので，成立しない。

(i)(ii)より，$0°<\theta<30°$，$150°<\theta<180°$

コメント

2 円の位置関係の問題です。この問題では，最後の答えには影響しませんが，(ii)の場合を見落とさないことがポイントです。

問　題

不等式$\log_a b+\log_a(k-b)>2$を満たす実数 a, b について, 次の問いに答えよ。ただし, k は $k>2$ を満たす定数とする。

(1)　点$(a,\ b)$全体の集合を ab 平面上に図示せよ。

(2)　$a+b$がとる値の範囲を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$\log_a b+\log_a(k-b)>2$に対し, $a>0$, $a\neq 1$, $0<b<k$ の条件のもとで,

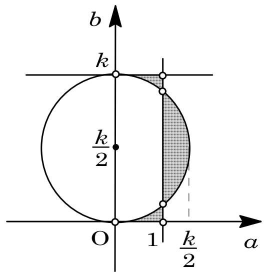
$$\log_a b(k-b)>2$$

(i)　$a>1$ のとき　$b(k-b)>a^2$

$$a^2+b^2-kb<0,\ \ a^2+\left(b-\frac{k}{2}\right)^2<\frac{k^2}{4}$$

(ii)　$0<a<1$ のとき　$b(k-b)<a^2$

$$a^2+b^2-kb>0,\ \ a^2+\left(b-\frac{k}{2}\right)^2>\frac{k^2}{4}$$



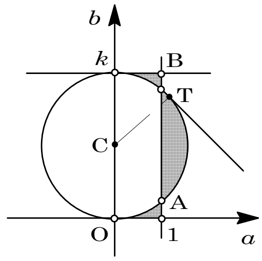
$k>2$ より$\dfrac{k}{2}>1$となり, 求める領域は右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。

(2) 直線$a=1$と円$a^2+b^2-kb=0$との 2 つの交点のうち, 下側の交点を A とすると, $b^2-kb+1=0$から$b=\dfrac{k\pm\sqrt{k^2-4}}{2}$となり, $\mathrm{A}\left(1,\ \dfrac{k-\sqrt{k^2-4}}{2}\right)$である。

また, 直線$a=1$と直線$b=k$との交点を$\mathrm{B}(1,\ k)$とする。

さらに, 円$a^2+b^2-kb=0$の中心を C, 傾き-1の直線とこの円の接点を T とすると, $\overrightarrow{\mathrm{CT}}$向きの単位ベクトルの成分が$\dfrac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)$となることを用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{CT}}=\left(0,\ \frac{k}{2}\right)+\frac{k}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(1,\ 1)=\left(\frac{\sqrt{2}}{4}k,\ \frac{2+\sqrt{2}}{4}k\right)$$



さて, $a+b=p$とおくと, この直線が点 A を通るとき $p=\dfrac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2}$, 点 B を通るとき$p=1+k$, 点 T を通るとき$p=\dfrac{\sqrt{2}}{4}k+\dfrac{2+\sqrt{2}}{4}k=\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}k$となる。

(i)　$1+k\geqq\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}k$ $(2<k\leqq 2+2\sqrt{2})$のとき

$a+b=p$がとる値の範囲は, 図より,

$$0<a+b<\frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2},\ \ \frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2}<a+b<1+k$$

(ii)　$1+k<\dfrac{1+\sqrt{2}}{2}k$ ($k>2+2\sqrt{2}$)のとき　$a+b=p$ がとる値の範囲は，図より，

$$0<a+b<\frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2},\ \ \frac{2+k-\sqrt{k^2-4}}{2}<a+b<\frac{1+\sqrt{2}}{2}k$$

コメント

(2)は難問というよりは，繁雑な問題というべきで，たいへん疲れます。

問　題

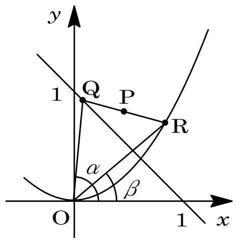
直線$x+y=1$上の点 Q と，放物線$y=x^2$上の原点 O とは異なる点 R に対し，2 つの半直線 OQ, OR の x 軸の正の向きからはかった角をそれぞれα, βとおく。さらに，線分 QR の中点を P とおく。2 点 Q, R が$\alpha=\beta+45^\circ$，$0^\circ<\beta<45^\circ$を満たすように動くとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 OQ の傾きを a, 直線 OR の傾きを b とするとき，$a=\dfrac{1+b}{1-b}$となることを示せ。

(2) 点 P の座標を b を用いて表せ。

(3) 点 P の軌跡を求めよ。　[2002]

解答例



(1) 条件より，$a=\tan\alpha$，$b=\tan\beta$，$\alpha=\beta+45^\circ$なので，

$$a=\tan(\beta+45^\circ)=\frac{\tan\beta+\tan 45^\circ}{1-\tan\beta\tan 45^\circ}=\frac{1+b}{1-b}\ \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) OQ : $y=ax$と直線$x+y=1$の交点は，

$$(1+a)x=1,\ x=\frac{1}{1+a},\ y=\frac{a}{1+a}$$

よって，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1}{1+a},\ \dfrac{a}{1+a}\right)$

OR : $y=bx$と放物線$y=x^2$の交点は，$x^2-bx=0$で$x\neq 0$から，$x=b$，$y=b^2$となり，$\mathrm{R}(b,\ b^2)$である。

すると，点$\mathrm{P}(x,\ y)$は QR の中点より，①から，

$$x=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{1+a}+b\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1-b}{2}+b\right)=\frac{b+1}{4}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

$$y=\frac{1}{2}\left(\frac{a}{1+a}+b^2\right)=\frac{1}{2}\left(\frac{1+b}{2}+b^2\right)=\frac{2b^2+b+1}{4}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

以上より，$\mathrm{P}\left(\dfrac{b+1}{4},\ \dfrac{2b^2+b+1}{4}\right)$

(3) $0^\circ<\beta<45^\circ$より$0<b<1$なので，②から，$\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}$

②より$b=4x-1$となり，これを③に代入して，

$$y=\frac{2(4x-1)^2+(4x-1)+1}{4}=8x^2-3x+\frac{1}{2}$$

したがって，点 P の軌跡は，放物線$y=8x^2-3x+\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{4}<x<\dfrac{1}{2}\right)$である。

コメント

誘導がていねいなので，方針に混乱は生じません。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $y=x^2$ のグラフと点 $(0,\ r)$ を中心とする半径 r の円が原点以外に共有点をもつような r の値の範囲を求めよ。

(2)　連立不等式 $y \leqq x^2$，$x^2+(y-1)^2 \leqq 1$ の表す領域の面積を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$y=x^2$ ……①と $x^2+(y-r)^2=r^2$ ……②の共有点は，①②より，

$$y+(y-r)^2=r^2,\quad y^2-(2r-1)y=0$$

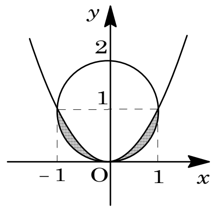
$0<y<2r$ に共有点をもつ条件は，$y=2r-1>0$，$r>\dfrac{1}{2}$

(2)　$r=1$ のとき，①と②の原点以外の共有点は，$(\pm1,\ 1)$

求める領域の面積を S とすると，y 軸に関する対称性より，

$$S=2\left\{\pi\cdot1^2\cdot\frac{1}{4}+\int_0^1 x^2dx-1^2\right\}=2\left(\frac{1}{4}\pi+\frac{1}{3}-1\right)$$

$$=\frac{1}{2}\pi-\frac{4}{3}$$



コメント

(1)の条件も簡単に求まるし，(2)の面積計算も複雑ではありません。

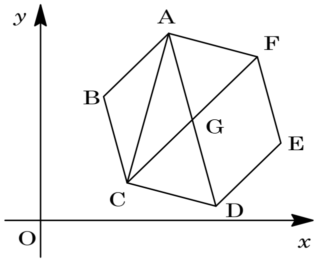
問　題

正六角形 ABCDEF の頂点 A, B, C の座標をそれぞれ$(2,\ 3)$, $(1,\ 2)$, $(a,\ b)$とする。ただし, $a>0$ とする。

(1) a, b の値を求めよ。

(2) 対角線 AD, CF の交点の座標を求めよ。 [1999]

解答例



(1) $\mathrm{AB}=\sqrt{(2-1)^2+(3-2)^2}=\sqrt{2}$ より, $\mathrm{BC}=\sqrt{2}$

$$\mathrm{BC}^2=(a-1)^2+(b-2)^2=2\cdots\cdots\cdots①$$

また, $\mathrm{AC}=2\cdot\mathrm{AB}\sin 60^\circ=\sqrt{6}$ より,

$$\mathrm{AC}^2=(a-2)^2+(b-3)^2=6\cdots\cdots\cdots②$$

①－②より, $a+b=2\cdots\cdots\cdots③$

①③より, $(a-1)^2+a^2=2$, $2a^2-2a-1=0$

$a>0$ なので, $a=\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$

③から, $b=2-\dfrac{1+\sqrt{3}}{2}=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}$

(2) 対角線 AD, CF の交点を G とすると, 四角形 ABCG はひし形となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+\overrightarrow{\mathrm{BA}}=\left(\frac{1+\sqrt{3}}{2},\ \frac{3-\sqrt{3}}{2}\right)+(1,\ 1)=\left(\frac{3+\sqrt{3}}{2},\ \frac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって, $\mathrm{G}\left(\dfrac{3+\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{5-\sqrt{3}}{2}\right)$

コメント

(1)では, 2 点間の距離を考え, 計算を進めました。

問　題

xy 平面上に原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の円 C とその上の点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$ がある。円 C 上を動く点 P に対して，3 点 O，A，P が三角形をつくるとき，その三角形の重心を G とする。

(1) G の軌跡を求めよ。

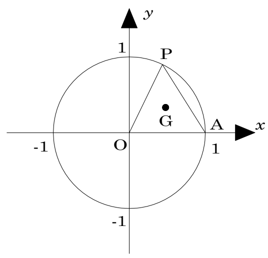
(2) 円 C 上の点 $\mathrm{P}_0\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対する三角形 OAP_0 の重心を G_0 とする。(1)で求めた軌跡の G_0 における接線が x 軸と交わる点の座標を求めよ。　[1998]

解答例

(1) $\mathrm{G}(x,\ y)$，$\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，$(s,\ t)\neq(1,\ 0)$，$(-1,\ 0)$ として，

$$s^2+t^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

$$x=\frac{s+1}{3}\cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{t}{3}\cdots\cdots\cdots③$$



②③より，$s=3\left(x-\dfrac{1}{3}\right)$，$t=3y$

①に代入すると，$\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$

ただし，$(x,\ y)\neq\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$，$(0,\ 0)$

よって G の軌跡は，円 : $\left(x-\dfrac{1}{3}\right)^2+y^2=\dfrac{1}{9}$，ただし原点と点 $\left(\dfrac{2}{3},\ 0\right)$ は除く。

(2) G_0 の座標は，$x=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}+1\right)=\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}$，$y=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{6}$

G_0 における接線は $\left(\dfrac{\sqrt{3}+2}{6}-\dfrac{1}{3}\right)\left(x-\dfrac{1}{3}\right)+\dfrac{1}{6}y=\dfrac{1}{9}$

$$\frac{\sqrt{3}}{6}\left(x-\frac{1}{3}\right)+\frac{1}{6}y=\frac{1}{9}$$

x 軸との交点は $y=0$ として，$\dfrac{\sqrt{3}}{6}\left(x-\dfrac{1}{3}\right)=\dfrac{1}{9}$，$x=\dfrac{2}{9}\sqrt{3}+\dfrac{1}{3}$

これから，求める交点の座標は，$\left(\dfrac{2}{9}\sqrt{3}+\dfrac{1}{3},\ 0\right)$

コメント

(2)は，接線を公式処理して計算で押し通し，交点の座標を求めました。なお，P_0 の座標が，$(\cos 30°,\ \sin 30°)$ となることに注目して，図形的に考えても OK です。

問　題

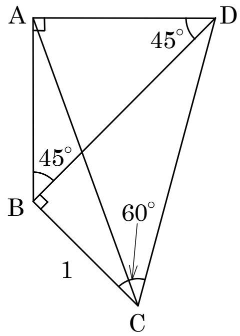
四角形 ABCD において，$\angle DAB=\angle DBC=90^\circ$，$\angle BCD=60^\circ$，$AB=AD$，$BC=1$とする。次の問いに答えよ。

(1) 対角線 BD の長さの 2 乗 BD^2 を求めよ。

(2) 対角線 AC の長さの 2 乗 AC^2 を求めよ。

(3) $\angle BAC=\alpha$，$\angle ACD=\beta$ とおくとき，$\cos^2\alpha$，$\cos^2\beta$ を求めよ。 [2016]

解答例



(1) 直角三角形 BCD において，

$$BD=BC\tan 60^\circ=\sqrt{3}\,,\ \ BD^2=3$$

(2) 直角二等辺三角形 ABD において，

$$AB=AD=BD\cos 45^\circ=\sqrt{\frac{3}{2}}$$

$\angle ABC=135^\circ$ から，$\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると，

$$AC^2=\frac{3}{2}+1-2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot 1\cdot\cos 135^\circ=\frac{5}{2}+\sqrt{3}$$

(3) 条件より，$\angle BAC=\alpha$，$\angle ACD=\beta$ とおく。

まず，$\triangle ABC$ に余弦定理を適用すると，

$$1=\frac{3}{2}+\Big(\frac{5}{2}+\sqrt{3}\Big)-2\sqrt{\frac{3}{2}}\cdot\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{3}}\cos\alpha\,,\ \ 3+\sqrt{3}-\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{3}}\cos\alpha=0$$

よって，$\cos\alpha=\dfrac{3+\sqrt{3}}{\sqrt{3}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{3}}}=\dfrac{\sqrt{3}+1}{\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ となり，

$$\cos^2\alpha=\frac{4+2\sqrt{3}}{5+2\sqrt{3}}=\frac{(4+2\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{25-12}=\frac{8+2\sqrt{3}}{13}$$

次に，$CD=2$ から，$\triangle ACD$ に余弦定理を適用すると，

$$\frac{3}{2}=\Big(\frac{5}{2}+\sqrt{3}\Big)+4-2\sqrt{\frac{5}{2}+\sqrt{3}}\cdot 2\cos\beta\,,\ \ 5+\sqrt{3}-2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{3}}\cos\beta=0$$

よって，$\cos\beta=\dfrac{5+\sqrt{3}}{2\sqrt{2}\cdot\sqrt{5+2\sqrt{3}}}$ となり，

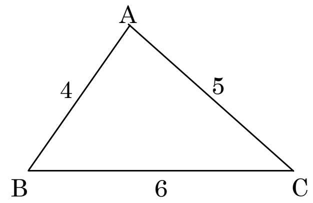
$$\cos^2\beta=\frac{28+10\sqrt{3}}{8(5+2\sqrt{3})}=\frac{1}{4}\cdot\frac{(14+5\sqrt{3})(5-2\sqrt{3})}{25-12}=\frac{40-3\sqrt{3}}{52}$$

コメント

三角比の図形への適用問題です。内容は基本事項の確認です。

問　題

図のような 3 辺の長さをもつ三角形 ABC がある。次の問いに答えよ。

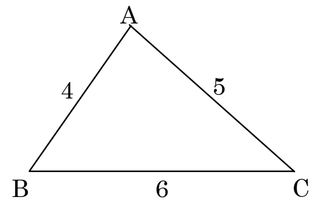


(1)　$45^\circ < \angle B < 60^\circ$ を証明せよ。

(2)　$\angle A = 2\angle C$ を証明せよ。

(3)　$40^\circ < \angle C < 45^\circ$ を証明せよ。　[2012]

解答例



(1)　余弦定理より，$\cos\angle B = \dfrac{16+36-25}{2\cdot 4\cdot 6} = \dfrac{9}{16}$

ここで，$8 < 9 < 8\sqrt{2}$ より，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{9}{16} < \dfrac{\sqrt{2}}{2}$ となり，

$$\cos 60^\circ < \cos\angle B < \cos 45^\circ$$

よって，$45^\circ < \angle B < 60^\circ$ である。

(2)　(1)と同様に，$\cos\angle A = \dfrac{16+25-36}{2\cdot 4\cdot 5} = \dfrac{1}{8}$，$\cos\angle C = \dfrac{25+36-16}{2\cdot 5\cdot 6} = \dfrac{3}{4}$ となり，

$$\cos 2\angle C = 2\cos^2\angle C - 1 = 2\cdot\frac{9}{16} - 1 = \frac{1}{8}$$

すると，$\cos\angle A = \cos 2\angle C$ となり，$0^\circ < \angle C < 90^\circ$ から，$\angle A = 2\angle C$ となる。

(3)　(2)より，$\angle B + 3\angle C = 180^\circ$ となり，$\angle C = \dfrac{180^\circ - \angle B}{3}$

(1)より，$45^\circ < \angle B < 60^\circ$ なので，$40^\circ < \angle C < 45^\circ$ となる。

コメント

三角比と三角関数についてのおだやかな基本問題です。

問　題

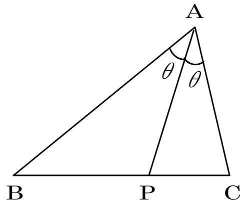
三角形 ABC において，$AB=2$，$AC=1$とする。$\angle A$の二等分線が辺 BC と交わる点を P とし，$\angle PAC=\theta$とする。

(1) 三角形 ABC の面積をθを用いて表せ。

(2) AP をθを用いて表せ。

(3) $AP=BP$のとき，θの値を求めよ。 [1999]

解答例



(1) $\triangle ABC=\dfrac{1}{2}\cdot 2\cdot 1\cdot\sin 2\theta=\sin 2\theta$

(2) $AP=x$とおくと，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot x\cdot\sin\theta+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot x\cdot\sin\theta=\frac{3}{2}x\sin\theta$$

(1)より，$\sin 2\theta=\dfrac{3}{2}x\sin\theta$

$$x=\frac{2\sin 2\theta}{3\sin\theta}=\frac{4\sin\theta\cos\theta}{3\sin\theta}=\frac{4}{3}\cos\theta$$

(3) $AP=BP$より，$BP=\dfrac{4}{3}\cos\theta$

また，$BP:PC=AB:AC=2:1$より，$BC=\dfrac{3}{2}BP=2\cos\theta$

$\triangle ABC$に余弦定理を適用して，$4\cos^2\theta=4+1-2\cdot 2\cdot 1\cdot\cos 2\theta$

$$4\cos^2\theta=5-4(2\cos^2\theta-1),\ \cos^2\theta=\frac{3}{4}$$

$0^\circ<\theta<90^\circ$より，$\cos\theta=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$\theta=30^\circ$

コメント

非常によくある構図の頻出問題です。類題の経験がないという受験生の方が珍しいくらいでしょう。

問　題

三角形 ABC において，3 つの角の大きさの比が $A:B:C=7:4:1$，辺 AB の長さが 1 とする。

(1)　$\sin A$，$\sin C$ の値を求めよ。

(2)　辺 BC の長さを求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$A=180^\circ\times\dfrac{7}{12}=105^\circ$，$C=180^\circ\times\dfrac{1}{12}=15^\circ$ より，

$$\sin A=\sin 105^\circ=\sin(60^\circ+45^\circ)$$
$$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ+\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$
$$\sin C=\sin 15^\circ=\sin(60^\circ-45^\circ)$$
$$=\sin 60^\circ\cos 45^\circ-\cos 60^\circ\sin 45^\circ=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$$

(2)　正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{1}{\sin C}$

(1)から，$\mathrm{BC}=\dfrac{\sin A}{\sin C}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{\sqrt{6}-\sqrt{2}}=2+\sqrt{3}$

コメント

制限時間 5 分の超基本題です。

問　題

座標空間に 4 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(s,\ s,\ s)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ がある。ただし，$s>0$ とする。$t,\ u,\ v$ を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，$u,\ v$ を s を用いて表せ。

(3)　(2)のとき，2 点 D，E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$s>0$ で，$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(s,\ s,\ s)$，$\mathrm{B}(-1,\ 1,\ 1)$，$\mathrm{C}(0,\ 0,\ 1)$ に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{s^2+s^2+s^2}=\sqrt{3}s,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-s+s+s=s,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ となり，

$$s-3s^2t=0,\ t=\frac{1}{3s}\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$s-3s^2u-sv=0,\ 1-3su-v=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\vec{d}\cdot\vec{e}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$1-su-3v-st+3s^2tu+stv=0\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$1-su-3v-\dfrac{1}{3}+su+\dfrac{1}{3}v=0$，$\dfrac{2}{3}-\dfrac{8}{3}v=0$，$v=\dfrac{1}{4}\cdots\cdots\cdots④$

②④より，$\dfrac{3}{4}-3su=0$，$u=\dfrac{1}{4s}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3)　①より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}=(-1,\ 1,\ 1)-\dfrac{1}{3s}(s,\ s,\ s)=\dfrac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

④⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}=(0,\ 0,\ 1)-\dfrac{1}{4s}(s,\ s,\ s)-\dfrac{1}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\dfrac{1}{2}(0,\ -1,\ 1)$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より $\triangle\mathrm{ODE}$ は直角三角形となり，また $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より OA は $\triangle\mathrm{ODE}$ に垂直である。これより，四面体 OADE の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4+1+1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{3}s=\frac{s}{3}$$

よって，条件から $V=2$ なので，$\dfrac{s}{3}=2$ すなわち $s=6$ である。

コメント

空間ベクトルの基本的な問題です。成分表示して計算していくと，スムーズに結論まで導けます。

問　題

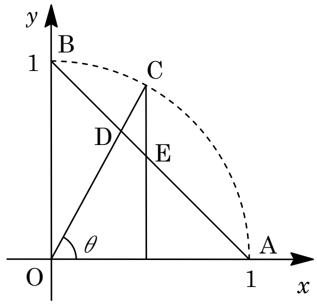
座標平面上に原点 O と 2 点 A$(1,\ 0)$，B$(0,\ 1)$ をとり，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。点 C は $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$，$0°<\angle\mathrm{AOC}<90°$，$0°<\angle\mathrm{BOC}<90°$ を満たすとする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(2)　線分 AB と線分 OC の交点を D とする。$\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$，t を用いて表せ。

(3)　点 C から線分 OA に引いた垂線と線分 AB の交点を E とする。D は(2)で定めた点とする。このとき，△OBD と△CDE の面積の和を t を用いて表せ。　[2015]

解答例



(1)　条件より，$0°<\theta<90°$ として，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくことができるので，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos\theta)\vec{a}+(\sin\theta)\vec{b}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\cos\theta=t$ より $\sin\theta=\sqrt{1-t^2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t\vec{a}+\sqrt{1-t^2}\,\vec{b}$$

(2)　点 D は線分 OC 上より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=k\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=kt\vec{a}+k\sqrt{1-t^2}\,\vec{b}$$

さらに，点 D は線分 AB 上にあることより，$kt+k\sqrt{1-t^2}=1$

よって，$k=\dfrac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{t}{t+\sqrt{1-t^2}}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{1-t^2}}{t+\sqrt{1-t^2}}\vec{b}$

(3)　OB//CE より，△OBD と△CDE は相似となり，相似比は，

$$\mathrm{OD}:\mathrm{CD}=k:(1-k)=\frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}:\left(1-\frac{1}{t+\sqrt{1-t^2}}\right)=1:\left(t-1+\sqrt{1-t^2}\right)$$

これより，$\triangle\mathrm{CDE}=\left(t-1+\sqrt{1-t^2}\right)^2\triangle\mathrm{OBD}$ となる。

また，(2)から，$\triangle\mathrm{OBD}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot\dfrac{t}{t+\sqrt{1-t^2}}=\dfrac{t}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}$ なので，△OBD と△CDE の面積の和 S は，

$$S=\frac{t}{2\left(t+\sqrt{1-t^2}\right)}\left\{1+\left(t-1+\sqrt{1-t^2}\right)^2\right\}$$

コメント

平面ベクトルの基本問題です。ただ，結論の式の形が………。

問　題

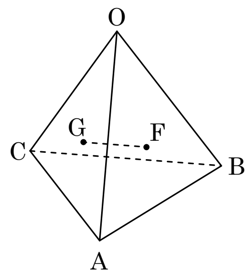
四面体 OABC において，△OAB の重心を F，△OAC の重心を G とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{FG}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

(3) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ のとき，FG の長さを求めよ。　[2014]

解答例



(1) F は△OAB の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

(2) G は△OAC の重心より，$\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{FG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OF}}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})-\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})$$

$$=\frac{1}{3}(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{BC}}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{FG}} \,/\!/\, \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ である。

(3) $\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{BOC}=90^\circ$ より，△BOC は直角二等辺三角形である。

これより，$\mathrm{BC}=\sqrt{2}$ となり，(2)の結果から，

$$\mathrm{FG}=|\overrightarrow{\mathrm{FG}}|=\frac{1}{3}|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=\frac{\sqrt{2}}{3}$$

コメント

空間ベクトルの基本の確認のみです。この程度の記述でよいのか迷うほどです。

問　題

座標平面上に点 $A(\cos\theta,\ \sin\theta)$　$(0<\theta<\pi)$ がある。原点を O とし，x 軸に関して点 A と対称な点を B とする。次の問いに答えよ。

(1)　$-1<\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\leqq\dfrac{1}{2}$ となる θ の範囲を求めよ。

(2)　点 P を，$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}$ で定める。点 P から x 軸に下ろした垂線を PQ とする。θ が(1)で求めた範囲を動くとき，△POQ の面積の最大値を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$0<\theta<\pi$ のとき，$A(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$B(\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対し，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\cos^2\theta-\sin^2\theta=\cos 2\theta$$

$-1<\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}\leqq\dfrac{1}{2}$ から $-1<\cos 2\theta\leqq\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{\pi}{3}\leqq 2\theta<\pi$，$\pi<2\theta\leqq\dfrac{5}{3}\pi$ より，

$$\frac{\pi}{6}\leqq\theta<\frac{\pi}{2},\quad \frac{\pi}{2}<\theta\leqq\frac{5}{6}\pi$$

(2)　$\overrightarrow{OP}=2\overrightarrow{OA}+\dfrac{1}{2}\overrightarrow{OB}=2(\cos\theta,\ \sin\theta)+\dfrac{1}{2}(\cos\theta,\ -\sin\theta)=\left(\dfrac{5}{2}\cos\theta,\ \dfrac{3}{2}\sin\theta\right)$

また，$\overrightarrow{OQ}=\left(\dfrac{5}{2}\cos\theta,\ 0\right)$ となるので，△POQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}OQ\cdot PQ=\frac{1}{2}\cdot\frac{5}{2}|\cos\theta|\cdot\frac{3}{2}|\sin\theta|=\frac{15}{8}|\cos\theta\sin\theta|=\frac{15}{16}|\sin 2\theta|$$

これより，$\sin 2\theta=\pm 1$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{4},\ \dfrac{3}{4}\pi\right)$ のとき，S は最大値 $\dfrac{15}{16}$ をとる。

コメント

平面ベクトルの成分計算について，基本の確認問題です。

問　題

平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O，線分 AB を $1:4$ に外分する点を C とする。P を直線 AB 上にない点とし，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ が垂直であるとする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$ とおくとき，次の問いに答えよ。

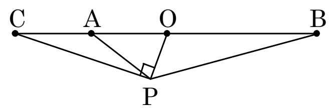
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　$\vec{a}$ と $\vec{b}$ の内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ を $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$ で表せ。

(3)　$\mathrm{PA}=1$，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積が $\dfrac{3}{2}$ のとき，PB の長さを求めよ。　[2011]

解答例

(1)　線分 AB を $1:2$ に内分する点が O，$1:4$ に外分する点が C より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$ とおくと，



$$\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3},\quad \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

(2)　条件より，$\overrightarrow{\mathrm{PO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=0$ なので，(1)より，$(2\vec{a}+\vec{b})\cdot(4\vec{a}-\vec{b})=0$

$$8|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}-|\vec{b}|^2=0,\quad \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{-8|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　条件より，$|\vec{a}|=1\cdots\cdots②$であり，また $\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{3}{2}$ から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{3}{2},\quad |\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2=9\cdots\cdots\cdots③$$

①②を③に代入すると，$|\vec{b}|^2-\dfrac{(-8+|\vec{b}|^2)^2}{4}=9$ となり，

$$|\vec{b}|^4-20|\vec{b}|^2+100=0,\quad (|\vec{b}|^2-10)^2=0$$

よって，$|\vec{b}|^2=10$ から $|\vec{b}|=\sqrt{10}$，すなわち $\mathrm{PB}=\sqrt{10}$ である。

コメント

平面ベクトルの基本題です。それにしても三角形の面積公式はよく出題されます。

問　題

座標平面上に点 O$(0,\ 0)$ と点 P$(4,\ 3)$ をとる。不等式 $(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$ の表す領域を D とする。次の問いに答えよ。

(1) k は定数とする。直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点を Q とするとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を k を用いて表せ。

(2) 点 R が D 全体を動くとき，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の内積 $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値および最小値を求めよ。 [2010]

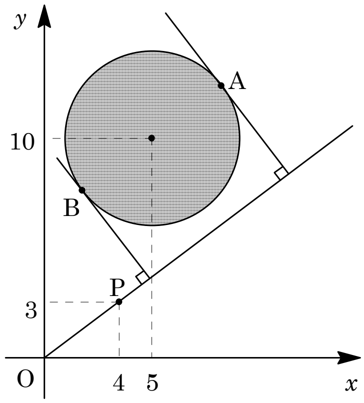
解答例

(1) 直線 $y=-\dfrac{4}{3}x+k$ 上の点 Q の x 座標を t とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(t,\ -\dfrac{4}{3}t+k\right)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(4,\ 3)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=4t+3\left(-\frac{4}{3}t+k\right)=3k$$

(2) まず，直線 OP の方程式は，$y=\dfrac{3}{4}x$ であり，この直線と直交する直線の方程式は，

$$y=-\frac{4}{3}x+k,\ 4x+3y-3k=0\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



さて，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ のなす角を θ，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ 方向への正射影ベクトルを $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ とするとき，θ が鋭角ならば，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}=|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OR}}|\cos\theta=5|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$$

ここで，点 R は，領域 $(x-5)^2+(y-10)^2 \leqq 16$ にあるので，右図から，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ が最大となるのは点 R が点 A に一致するときであり，また最小となるのは点 R が点 B に一致するときである。

いずれの場合も，直線$(*)$は円 $(x-5)^2+(y-10)^2=16$ に接することより，

$$\frac{|4\cdot5+3\cdot10-3k|}{\sqrt{4^2+3^2}}=4,\ |50-3k|=20$$

これより，$3k=70,\ 30$ となるので，(1)の結果を利用すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=70,\ \overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=30$$

すなわち，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ の最大値は 70，最小値は 30 である。

コメント

よく見かける内積の最大・最小の問題ですが，(1)が(2)への秀逸な誘導となっています。演習の価値ある 1 題です。

問　題

四面体 OABC において $\angle AOB=\angle AOC=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle BOC=\dfrac{\pi}{3}$，$OA=OB=2$，$OC=1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{OP}=\vec{p}$ とする。$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 $s,\ t$ を用いて $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。このとき，次の問いに答えよ。

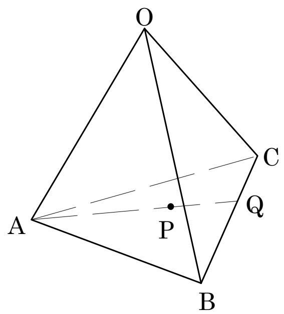
(1)　内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2)　点 P が $\angle AOP=\angle BOP=\angle COP$ を満たすとき，s, t の値を求めよ。

(3)　(2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q とする。BQ : QC を求めよ。

(4)　(2)の条件を満たす点 P について，2 つの四面体 OABP と OACP の体積の比を求めよ。　[2009]

解答例



(1)　条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$ であり，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1$$

すると，$\vec{p}\cdot\vec{a}=\big((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\big)\cdot\vec{a}=4(1-s-t)$

$$\vec{p}\cdot\vec{b}=\big((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\big)\cdot\vec{b}=4s+t$$

$$\vec{p}\cdot\vec{c}=\big((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\big)\cdot\vec{c}=s+t$$

(2)　条件より，$\angle AOP=\angle BOP=\angle COP$ から，

$$\cos\angle AOP=\cos\angle BOP=\cos\angle COP$$

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{|\vec{p}||\vec{a}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{b}}{|\vec{p}||\vec{b}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{c}}{|\vec{p}||\vec{c}|}$$

(1)の結果を用いると，$\dfrac{4(1-s-t)}{2}=\dfrac{4s+t}{2}=s+t$ から，

$$4(1-s-t)=4s+t\cdots\cdots\cdots①,\quad 4s+t=2(s+t)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{2}{9}$，$t=\dfrac{4}{9}$

(3)　条件から，$\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ より，$\vec{p}-\vec{a}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$ となり，

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+t\overrightarrow{AC}$$

すると, (2)より，$\overrightarrow{AP}=\dfrac{2}{9}\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}\overrightarrow{AC}$

さて，$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}$ とおくと，$\overrightarrow{AQ}=\dfrac{2}{9}k\overrightarrow{AB}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{AC}$

点 Q は直線 BC 上にあるので，$\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$ から，$k=\dfrac{3}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

よって，BQ : QC = 2 : 1

(4)　まず，四面体 OABP と OACP の体積比は，△ABP と△ACP の面積比に等しい。
さらに，△ABP と△ACP の面積比は，BQ : QC に等しい。
よって，(3)から，四面体 OABP と OACP の体積比は，2 : 1 である。

コメント

空間ベクトルの有名問題です。なお，(3)では k の値を求めましたが，本問では，この値は不要です。

問　題

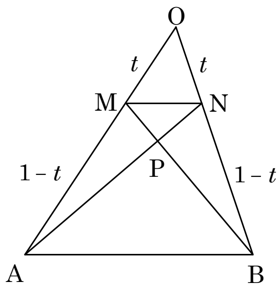
三角形 OAB において, OA を $t:(1-t)$ に内分する点を M, OB を $t:(1-t)$ に内分する点を N とする。ただし, t は $0<t<1$ の範囲を動く。そして, 線分 AN と BM の交点を P とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ および t を用いて表し, $\overrightarrow{\mathrm{MN}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が平行であることを示せ。

(2) $s=\dfrac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}$ とするとき, s を t を用いて表し, s のとりうる値の範囲を求めよ。

(3) 三角形 AMP と三角形 OAB の面積比 $r=\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}$ を(2)の s を用いて表し, r の最大値を求めよ。 [2008]

解答例



(1) $\overrightarrow{\mathrm{MN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

(2) $\mathrm{BP}:\mathrm{PM}=1:t$ より,

$$s=\frac{\mathrm{BM}}{\mathrm{BP}}=\frac{t+1}{1}=t+1$$

すると, $0<t<1$ から, $1<s<2$ である。

(3) $\mathrm{MP}:\mathrm{MB}=t:t+1$, $\mathrm{AM}:\mathrm{AO}=1-t:1$ より,

$$\triangle\mathrm{AMP}=\frac{t}{t+1}\triangle\mathrm{AMB}=\frac{t(1-t)}{t+1}\triangle\mathrm{OAB}$$

これより, $r=\dfrac{\triangle\mathrm{AMP}}{\triangle\mathrm{OAB}}=\dfrac{t(1-t)}{t+1}=\dfrac{(s-1)(2-s)}{s}=-s-\dfrac{2}{s}+3$

ここで, $s>0$ から, 相加平均と相乗平均の関係より,

$$s+\frac{2}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{2}{s}}=2\sqrt{2}$$

等号は $s=\dfrac{2}{s}$ すなわち $s=\sqrt{2}$ のとき成立し, この値は $1<s<2$ を満たす。

よって, $r\leqq-2\sqrt{2}+3$ から, r の最大値は $-2\sqrt{2}+3$ である。

コメント

ベクトルの平面図形への応用です。ただ, (1)の設問は不要ではないかと……。

問　題

座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$, および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$, $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2) 上で求めた点 P に対し, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3) 上で求めた点 P と C に対し, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ は 2 つの実数 a, b を用いて, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=a\overrightarrow{\mathrm{CA}}+b\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ と表せることを示せ。 [2007]

解答例

(1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y,\ z)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+1,\ z)$ となる。

さて, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,/\!/\,\vec{u}$ より, s を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{u}$, $(x-2,\ y,\ z)=s(-1,\ 2,\ 5)$

$$x=-s+2,\ y=2s,\ z=5s\cdots\cdots\cdots①$$

また, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\,/\!/\,\vec{v}$ より, t を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\vec{v}$, $(x,\ y+1,\ z)=t(1,\ 1,\ 1)$

$$x=t,\ y=t-1,\ z=t\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $-s+2=t\cdots\cdots③$, $2s=t-1\cdots\cdots④$, $5s=t\cdots\cdots⑥$

③④より, $t=\dfrac{5}{3}$, $s=\dfrac{1}{3}$ となり, この値は⑥を満たす。

よって, ①より $x=\dfrac{5}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$, $z=\dfrac{5}{3}$ となり, $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}-c\right)$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{w}$ から, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{w}=0$

$$-\frac{5}{3}+3\times\frac{2}{3}+\frac{5}{3}-c=0,\ c=2$$

よって, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$ となる。

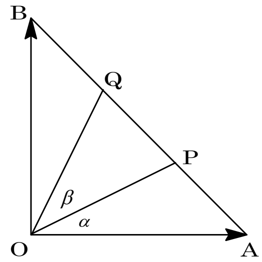
(3) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 0,\ -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -1,\ -2)$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\frac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$$

コメント

(3)では, x 成分, y 成分より, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の係数をそれぞれ定め, その後, z 成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。

問　題



平面上で，ベクトル $\overrightarrow{OA}$ と $\overrightarrow{OB}$ は直交し，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$ を満たすとする。線分 AB を 3 等分し，図のように, A に近い点を P, B に近い点を Q とする。また, $\angle AOP=\alpha$，$\angle POQ=\beta$ とする。次の問いに答えよ。

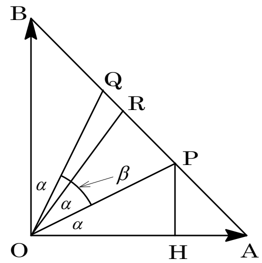
(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<30°<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に，点 R を $\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ となるようにとる。このとき，$|\overrightarrow{OR}|^2$ を k の式で表せ。

(4)　(3)の R に対して，$\angle POR=\alpha$ となるとき, k の値を求めよ。　[2006]

解答例



(1)　$OA=OB=1$，$\angle AOB=90°$ から，$AB=\sqrt{2}$ となる。

ここで, P から OA に下ろした垂線の足を H とすると,

$$PH=AH=AP\cos 45°=\frac{\sqrt{2}}{3}\times\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{3}$$

よって，$OP=\sqrt{OH^2+PH^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$ から，$\cos\alpha=\frac{OH}{OP}=\frac{2}{\sqrt{5}}$

$$\cos\beta=\cos(90°-2\alpha)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

(2)　まず，$4>\sqrt{15}$ より $\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{\sqrt{3}}{2}$，$5\sqrt{3}>8$ より $\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5}$ となるので,

$$\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5},\quad \cos\alpha>\cos 30°>\cos\beta$$

$f(x)=\cos x$ は $0°<x<90°$ で単調減少するので，$\alpha<30°<\beta$ となる。

(3)　条件より，$\overrightarrow{OR}=k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}$ なので,

$$|\overrightarrow{OR}|^2=k^2|\overrightarrow{OA}|^2+2k(1-k)\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}+(1-k)^2|\overrightarrow{OB}|^2$$

ここで，$|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=1$，$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=0$ なので,

$$|\overrightarrow{OR}|^2=k^2+(1-k)^2=2k^2-2k+1$$

(4)　$\overrightarrow{OP}=\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$ で，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OR}=|\overrightarrow{OP}||\overrightarrow{OR}|\cos\alpha$ から,

$$\left(\frac{2}{3}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{3}\overrightarrow{OB}\right)\cdot\{k\overrightarrow{OA}+(1-k)\overrightarrow{OB}\}=\frac{\sqrt{5}}{3}\cdot\sqrt{2k^2-2k+1}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\frac{2}{3}k+\frac{1}{3}(1-k)=\frac{2}{3}\sqrt{2k^2-2k+1},\quad k+1=2\sqrt{2k^2-2k+1}$$

両辺を 2 乗して，$7k^2-10k+3=0$，$(7k-3)(k-1)=0$

すると，$\frac{1}{3}<k<\frac{2}{3}$から，$k=\frac{3}{7}$である。

コメント

ベクトルの平面図形への応用ですが，いろいろな解法が考えられます。採用した解法によっては，計算の海に溺れてしまいます。うっかりして気付きませんでしたが，O を原点とする直交座標を導入する方が，計算量は少なくてすみそうです。

問　題

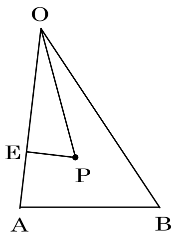
三角形 OAB において，$\mathrm{OA}=5$，$\mathrm{OB}=6$，$\mathrm{AB}=4$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とおき，点 P を $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{5}\vec{a}+\dfrac{1}{3}\vec{b}$ で定める。次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{a}\cdot\vec{b}$ の値を求めよ。

(2) 点 P から辺 OA に垂線を下ろし，OA との交点を E とする。$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=k\vec{a}$ を満たす実数 k の値を求めよ。

(3) 線分 PE の長さを求めよ。　[2005]

解答例



(1) 余弦定理より，$4^2=5^2+6^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}$ から，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{25+36-16}{2}=\frac{45}{2}$$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\overrightarrow{\mathrm{OE}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\left(k-\dfrac{2}{5}\right)\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{PE}}\cdot\vec{a}=0$ から，

$$\left(k-\frac{2}{5}\right)|\vec{a}|^2-\frac{1}{3}\vec{a}\cdot\vec{b}=0$$

(1)より，$25\left(k-\dfrac{2}{5}\right)-\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{45}{2}=0$ となり，

$$5k-\frac{7}{2}=0,\quad k=\frac{7}{10}$$

(3) (2)より，$\overrightarrow{\mathrm{PE}}=\dfrac{3}{10}\vec{a}-\dfrac{1}{3}\vec{b}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{PE}}|^2=\frac{9}{100}|\vec{a}|^2-\frac{1}{5}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{1}{9}|\vec{b}|^2=\frac{9}{4}-\frac{9}{2}+4=\frac{7}{4}$$

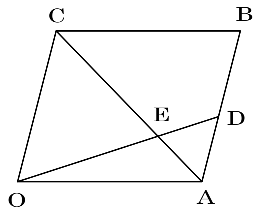
よって，$\mathrm{PE}=|\overrightarrow{\mathrm{PE}}|=\dfrac{\sqrt{7}}{2}$

コメント

平面ベクトルの内積について，基本を確認する問題です。

問　題

平行四辺形 OABC の辺 AB を $m:n$ に内分する点を D とし, 線分 OD と対角線 AC との交点を E とする。次の問いに答えよ。



(1)　公式 $\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\dfrac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$ を証明せよ。

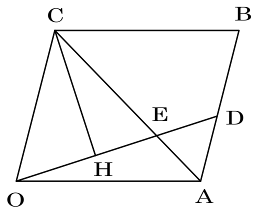
(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$, m, n を用いて表せ。

(3)　4 点 O, A, B, C を xy 平面上の点とし, 3 点 O, A, C の座標を $\mathrm{O}(0,\ 0)$, $\mathrm{A}(1,\ 0)$, $\mathrm{C}(a,\ b)$ とする。ただし, a, b は正の数とする。$m=1$, $n=2$ のとき, 2 点 O, D を通る直線の方程式を求めよ。

(4)　(3)の条件のもとで, 点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。

補足説明：「点 C から線分 OD に下ろした垂線の足 H」とは, 点 C から引いた線分 OD への垂線と線分 OD との交点 H のことである。　[2004]

解答例



(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\dfrac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ なので, $\overrightarrow{\mathrm{OD}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\dfrac{m}{m+n}(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\left(1-\frac{m}{m+n}\right)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\frac{n\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{m+n}$$

(2)　OC // AB より, $\triangle\mathrm{OEC}\backsim\triangle\mathrm{DEA}$ なので,

$$\mathrm{CE}:\mathrm{AE}=\mathrm{OC}:\mathrm{DA}=(m+n):m$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\dfrac{(m+n)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+m\overrightarrow{\mathrm{OC}}}{2m+n}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(1,\ 0)+(a,\ b)=(1+a,\ b)$ となり, (1)より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\frac{2\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{3}=\frac{2}{3}(1,\ 0)+\frac{1}{3}(1+a,\ b)=\frac{1}{3}(3+a,\ b)$$

よって, 直線 OD の方程式は, $y=\dfrac{b}{3+a}x$ ………①

(4)　点 C を通り, 直線 OD に垂直な直線は, $y-b=-\dfrac{3+a}{b}(x-a)$ ………②

①②の交点が H より, $\dfrac{b}{3+a}x-b=-\dfrac{3+a}{b}(x-a)$

$$b^2x-b^2(3+a)=-(3+a)^2(x-a)$$

よって, $\{b^2+(3+a)^2\}x=a(3+a)^2+b^2(3+a)$ より,

$$x=\frac{a(3+a)^2+b^2(3+a)}{b^2+(3+a)^2}=\frac{(3+a)(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2}$$

①より，$y=\dfrac{b(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2}$ となるので，

$$\mathrm{H}\Big(\frac{(3+a)(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2},\ \frac{b(a^2+3a+b^2)}{b^2+(3+a)^2}\Big)$$

コメント

前半が平面ベクトル，後半が図形と式の内容となっています。どちらも特別な工夫は必要ありません。

問　題

三角形ABCにおいて，辺BCを$2:1$の比に内分する点をMとする。辺AB, ACをそれぞれB, Cの側に延長した半直線をl, mとし，Mを通る直線kとl, mとの交点をそれぞれP，Qとする。$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=p\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=q\vec{c}$とおくとき，次の問いに答えよ。ただし，$p$, qは正の実数とする。

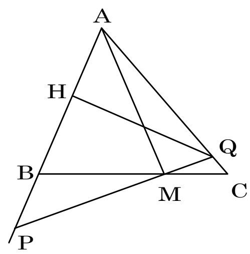
(1) $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$で表せ。

(2) $\dfrac{1}{p}+\dfrac{2}{q}=3$が成り立つことを示せ。

(3) Qから直線ABに下ろした垂線と直線ABとの交点をHとするとき，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}$を$\vec{b}$，$\vec{c}$，$q$で表せ。

(4) Mを通る直線kが半直線l，mと点A以外でそれぞれ交わるように変わるとき，三角形APQの面積を最小にするp, qの値を求めよ。　[2003]

解答例



(1) $\mathrm{BM}:\mathrm{MC}=2:1$より，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\dfrac{\vec{b}+2\vec{c}}{3}$ ………①

(2) $\mathrm{PM}:\mathrm{MQ}=t:1-t$とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AP}}+t\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=(1-t)p\vec{b}+tq\vec{c}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\vec{b}$，$\vec{c}$が1次独立なので，

$$\frac{1}{3}=(1-t)p\ \cdots\cdots\cdots③,\quad \frac{2}{3}=tq\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より$t=\dfrac{2}{3q}$となり，③に代入して，$\dfrac{1}{3}=\left(1-\dfrac{2}{3q}\right)p$

$$\frac{1}{3p}=1-\frac{2}{3q},\quad \frac{1}{p}+\frac{2}{q}=3\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=h\vec{b}$とおくと$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=h\vec{b}-q\vec{c}$となり，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$から，$(h\vec{b}-q\vec{c})\cdot\vec{b}=0$

$$h|\vec{b}|^2-q\vec{b}\cdot\vec{c}=0,\quad h=\frac{q\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{QH}}=\dfrac{q\vec{b}\cdot\vec{c}}{|\vec{b}|^2}\vec{b}-q\vec{c}$

(4) $\triangle\mathrm{APQ}=\dfrac{1}{2}\mathrm{AP}\cdot\mathrm{AQ}\sin A=pq\cdot\dfrac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{AC}\sin A=pq\triangle\mathrm{ABC}$より，$pq$が最小値をとるとき，$\triangle\mathrm{APQ}$の面積は最小となる。

$p>0$, $q>0$より，相加平均・相乗平均の関係を用いると，⑤から，

$$3=\frac{1}{p}+\frac{2}{q}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{p}\cdot\frac{2}{q}}=\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{pq}},\quad \sqrt{pq}\geqq\frac{2\sqrt{2}}{3},\quad pq\geqq\frac{8}{9}$$

等号成立は$\dfrac{1}{p}=\dfrac{2}{q}$のとき，すなわち⑤から$\dfrac{1}{p}=\dfrac{3}{2}$，$\dfrac{2}{q}=\dfrac{3}{2}$のときである。

よって，$\triangle$APQ の面積は，$p=\dfrac{2}{3}$，$q=\dfrac{4}{3}$のとき最小となる。

コメント

ベクトルの平面図形への応用に関する頻出問題です。なお, (4)は(3)の結果を用いるまでもありません。

問　題

三角形 ABC において，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=c$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=a$，$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=b$，$\vec{p}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{c}$，$\vec{q}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BC}}}{a}$，$\vec{r}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{CA}}}{b}$ とおき，$b<c$，$\angle\mathrm{B}<\angle\mathrm{C}$ とする。

(1)　$|\vec{r}-\vec{q}|<|\vec{q}-\vec{p}|$ であることを示せ。

(2)　定数 s, t に対して，辺 AB 上の点 D，辺 AC 上の点 E があって，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=s(\vec{q}-\vec{p})$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=t(\vec{r}-\vec{q})$ となっている。このとき，s, t を a, b, c の式で表し，さらに $|t(\vec{r}-\vec{q})|<|s(\vec{q}-\vec{p})|$ であることを示せ。　[2002]

解答例

(1)　$|\vec{p}|=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|}{c}=1$，$|\vec{q}|=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|}{a}=1$，$|\vec{r}|=\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|}{b}=1$ より，

$$|\vec{r}-\vec{q}|^2=|\vec{r}|^2-2\vec{r}\cdot\vec{q}+|\vec{q}|^2=2-2\vec{r}\cdot\vec{q}=2+2\vec{r}\cdot(-\vec{q})=2+2\cos C$$

$$|\vec{q}-\vec{p}|^2=|\vec{q}|^2-2\vec{q}\cdot\vec{p}+|\vec{p}|^2=2-2\vec{q}\cdot\vec{p}=2+2\vec{q}\cdot(-\vec{p})=2+2\cos B$$

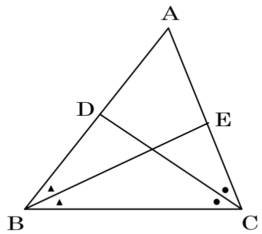
$0^\circ<B<C<180^\circ$ より，$\cos C<\cos B$

したがって，$|\vec{r}-\vec{q}|^2<|\vec{q}-\vec{p}|^2$ から，$|\vec{r}-\vec{q}|<|\vec{q}-\vec{p}|$

(2)　$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は単位ベクトルであり，

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=s(\vec{q}-\vec{p})=s\{\vec{q}+(-\vec{p})\}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=t(\vec{r}-\vec{q})=t\{\vec{r}+(-\vec{q})\}$$



よって，BE は∠ABC の二等分線，CD は∠ACB の二等分線となることより，

$$\mathrm{CE}:\mathrm{EA}=\mathrm{BC}:\mathrm{BA}=a:c$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BE}}=\frac{1}{a+c}\left(a\overrightarrow{\mathrm{BA}}+c\overrightarrow{\mathrm{BC}}\right)=\frac{1}{a+c}(-ac\vec{p}+ca\vec{q})=\frac{ac}{a+c}(\vec{q}-\vec{p})$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\dfrac{ab}{a+b}(\vec{r}-\vec{q})$

よって，$s=\dfrac{ac}{a+c}$，$t=\dfrac{ab}{a+b}$

ここで，$b<c$ より，$s-t=\dfrac{ac}{a+c}-\dfrac{ab}{a+b}=\dfrac{a^2(c-b)}{(a+c)(a+b)}>0$

したがって，$0<t<s$ となるので，(1)より，

$$t|\vec{r}-\vec{q}|<s|\vec{r}-\vec{q}|<s|\vec{q}-\vec{p}|$$

すなわち，$|t(\vec{r}-\vec{q})|<|s(\vec{q}-\vec{p})|$

コメント

$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ は単位ベクトルなので，$\overrightarrow{\mathrm{BE}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はひし形の対角線の方向を向きます。つまり，BE, CD はそれぞれ∠B, ∠C の二等分線となります。

問　題

三角形 OAB において，辺 AB，BO をそれぞれ $1:2$ に内分する点を M，N とする。また，線分 OM と AN の交点を P とする。

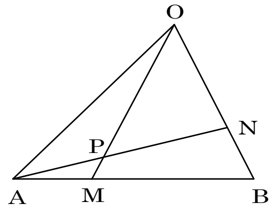
(1) $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AN}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ をそれぞれ $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2) OM と AN が直交し，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ のとき，$\angle\mathrm{AOB}$ を求めよ。

(3) (2)のとき，さらに $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ を求めよ。　[2001]

解答例

(1) M は AB を $1:2$ に内分するので，



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3}=\frac{2}{3}\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}$$

次に，N は BO を $1:2$ に内分するので，

$$\overrightarrow{\mathrm{AN}}=\overrightarrow{\mathrm{ON}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=-\vec{a}+\frac{2}{3}\vec{b}$$

また，P は OM 上にあるので，k を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\vec{b}=\frac{2}{3}k\vec{a}+\frac{1}{3}k\cdot\frac{3}{2}\cdot\frac{2}{3}\vec{b}=\frac{2}{3}k\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\frac{1}{2}k\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

さらに，P が AN 上にあるので，$\frac{2}{3}k+\frac{1}{2}k=1$，$k=\frac{6}{7}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{2}{3}\cdot\frac{6}{7}\vec{a}+\frac{1}{3}\cdot\frac{6}{7}\vec{b}=\frac{4}{7}\vec{a}+\frac{2}{7}\vec{b}$

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AN}}=0$ なので，$\frac{1}{3}(2\vec{a}+\vec{b})\cdot\frac{1}{3}(-3\vec{a}+2\vec{b})=0$

$$-6|\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}+2|\vec{b}|^2=0$$

条件より，$|\vec{a}|=1$，$|\vec{b}|=\sqrt{3}$ なので，$\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

よって，$\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$

(3) (1)より，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2=\frac{16}{49}|\vec{a}|^2+2\cdot\frac{4}{7}\cdot\frac{2}{7}\vec{a}\cdot\vec{b}+\frac{4}{49}|\vec{b}|^2=\frac{28}{49}$ なので，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=\sqrt{\frac{28}{49}}=\frac{2}{7}\sqrt{7}$$

コメント

ベクトルの平面図形への応用に関して，基本事項を確認するための問題です。

問　題

O を原点とする座標空間内に 3 点 A(1, 1, 1), B(2, −1, 2), C(0, 1, 2) がある。点 P が四面体 OABC の辺 BC 上を動くとき, 次の問いに答えよ。

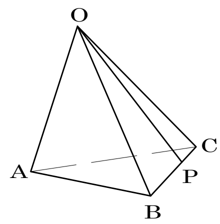
(1) 内積 $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ は 3 であることを示せ。

(2) ∠AOP の大きさが最小になるときの点 P の座標を求めよ。　[2000]

解答例

(1) 条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(1,\ 1,\ 1)$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=(2,\ -1,\ 2)$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(0,\ 1,\ 2)$

$0\leqq t\leqq 1$ として, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。



$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}&=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}\\&=t(2-1+2)+(1-t)(0+1+2)\\&=3t+3(1-t)=3\end{aligned}$$

(2) まず, $\cos\angle\mathrm{AOP}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}=\dfrac{3}{\sqrt{3}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|}$

ここで, ∠AOP の大きさが最小になるのは, cos∠AOP が最大となるときで, このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ は最小となる。

$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2&=t^2|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+2t(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}+(1-t)^2|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2\\&=t^2(4+1+4)+2t(1-t)(0-1+4)+(1-t)^2(0+1+4)\\&=8t^2-4t+5=8\left(t-\frac{1}{4}\right)^2+\frac{9}{2}\end{aligned}$$

よって, $t=\dfrac{1}{4}$ のとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2$ は最小となり, このとき $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|$ も最小となるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{3}{4}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}(2,\ -1,\ 2)+\frac{3}{4}(0,\ 1,\ 2)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ 2\right)$$

よって, ∠AOP の大きさが最小になる点 P の座標は $\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2},\ 2\right)$ である。

コメント

基本題です。方針に迷いは生じません。

問　題

xy 平面の点 O(0, 0), A(1, 1), B(2, −1) と実数 k に対して，点 C は $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を満たすとする。

(1) 内積 $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ が $2k$ となる点 P の描く図形は，C を通り，直線 OA と直交する直線であることを示せ。

(2) $\angle\mathrm{ACB}$ の大きさが $45°$ となる k を求めよ。　[1998]

解答例

(1) $(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2k$ に $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を代入して，

$$(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}+k\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=2k,\ (\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+k|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2k$$

$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2=2$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2k=2k$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$

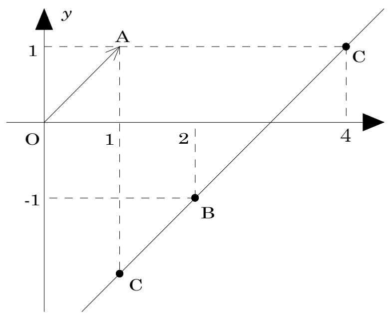
すなわち，点 P は C を通り，直線 OA と直交する直線を描く。

(2) $\angle\mathrm{ACB}=45°$ となる点 C の位置は，右図のように 2 箇所ある。

点 C は点 B を通り，傾きが 1 の直線 OA に平行な直線上の点なので，線分 AC は x 軸に平行か，または y 軸に平行となる。

すなわち点 C の座標は $(4,\ 1)$，$(1,\ -2)$ となる。

$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=k\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ から，$k=2,\ -1$



コメント

(2)では，最初は(1)の結論を用いようとしたのですが，結局，図形的な意味を考えた解に落ち着きました。計算のみでも押し通せますが，やってみたところ，3 倍程度の記述量が必要でした。

問　題

n を自然数とし，p_n，q_n を実数とする。ただし，p_1，q_1 は ${p_1}^2-4q_1=4$ を満たすとする。2 次方程式 $x^2-p_nx+q_n=0$ は異なる実数解 α_n，β_n をもつとする。ただし，$\alpha_n<\beta_n$ とする。$c_n=\beta_n-\alpha_n$ とおくとき，数列 $\{c_n\}$ は

$$\frac{c_{n+1}}{c_n}=\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})$ とするとき，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ を r_n，r_{n+1} を用いて表せ。

(2) c_n を n の式で表せ。

(3) $p_n=n\sqrt{n}$ であるとき，q_n を n の式で表せ。 [2015]

解答例

(1) $r_n=\log_2(n\sqrt{n}+\sqrt{n})=\log_2\sqrt{n}(n+1)$ より，$r_{n+1}=\log_2\sqrt{n+1}(n+2)$ となり，

$$r_{n+1}-r_n=\log_2\frac{\sqrt{n+1}(n+2)}{\sqrt{n}(n+1)}=\log_2\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，$\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}=2^{r_{n+1}-r_n}$ ………①

(2) ①より，$\dfrac{c_{n+1}}{c_n}=2^{r_{n+1}-r_n}$ となり，$c_{n+1}=2^{r_{n+1}-r_n}c_n$

ここで，$f(n)=2^{r_{n+1}-r_n}$ とおくと，$c_{n+1}=f(n)c_n$ となり，$n\geqq 2$ において，

$$c_n=c_1f(1)f(2)\cdots f(n-1)=c_1\cdot 2^{r_2-r_1}\cdot 2^{r_3-r_2}\cdots\cdots 2^{r_n-r_{n-1}}=c_1\cdot 2^{r_n-r_1}$$
$$=c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-\log_2 2}=c_1\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$x^2-p_nx+q_n=0$ の実数解を α_n，β_n $(\alpha_n<\beta_n)$ とすると，

$$\alpha_n=\frac{p_n-\sqrt{{p_n}^2-4q_n}}{2},\quad \beta_n=\frac{p_n+\sqrt{{p_n}^2-4q_n}}{2}$$

すると，$c_n=\beta_n-\alpha_n=\sqrt{{p_n}^2-4q_n}$ となり，$c_1=\sqrt{{p_1}^2-4q_1}=\sqrt{4}=2$

よって，②より，$c_n=2\cdot 2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)-1}=2^{\log_2\sqrt{n}(n+1)}=\sqrt{n}(n+1)$ ………③

なお，③は $n=1$ のときも成立している。

(3) ③より，$\sqrt{{p_n}^2-4q_n}=\sqrt{n}(n+1)$ となり，${p_n}^2-4q_n=n(n+1)^2$ ………④

そこで，$p_n=n\sqrt{n}$ のとき，${p_n}^2=n^3$ となり，④より，

$$q_n=\frac{1}{4}\{n^3-n(n+1)^2\}=-\frac{1}{4}n(2n+1)$$

コメント

2 次方程式の解を題材とした，誘導つきの漸化式の問題です。(2)の漸化式 $c_{n+1}=f(n)c_n$ を解くことがポイントとなっています。詳しくは「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

a_1，a_2，a_3 は定数で，$a_1>0$ とする。放物線 $C: y=a_1x^2+a_2x+a_3$ 上の点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1+2a_2+a_3)$ における接線を l とし，l と x 軸との交点を $\mathrm{Q}(q,\ 0)$，l と y 軸との交点を $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ とする。a_1，a_2，a_3，a_4 がこの順に等差数列であるとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を a_1 を用いて表せ。

(2)　q の値を求めよ。

(3)　放物線 C，接線 l，および y 軸で囲まれた部分の面積を S とする。$S=q$ となるとき，a_1 を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$C: y=a_1x^2+a_2x+a_3$ ……①に対し，$y'=2a_1x+a_2$ から点 $\mathrm{P}(2,\ 4a_1+2a_2+a_3)$ における接線 l の方程式は，$y-(4a_1+2a_2+a_3)=(4a_1+a_2)(x-2)$ となり，

$$y=(4a_1+a_2)x-4a_1+a_3\ \cdots\cdots\cdots②$$

l と y 軸との交点が $\mathrm{R}(0,\ a_4)$ より，$a_4=-4a_1+a_3$ ………③

さて，a_1，a_2，a_3，a_4 はこの順に等差数列なので，公差を d とすると，

$$a_2=a_1+d\ \cdots\cdots\cdots④,\quad a_3=a_1+2d\ \cdots\cdots\cdots⑤,\quad a_4=a_1+3d\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

③⑤⑥より，$-4a_1+a_1+2d=a_1+3d$，$d=-4a_1$ となり，④⑤⑥に代入すると，

$$a_2=a_1-4a_1=-3a_1,\quad a_3=a_1-8a_1=-7a_1,\quad a_4=a_1-12a_1=-11a_1$$

(2)　(1)の結果を②に代入すると，$y=(4a_1-3a_1)x-4a_1-7a_1=a_1x-11a_1$

点 $\mathrm{Q}(q,\ 0)$ を通ることより，$a_1q-11a_1=0$，$q=11$

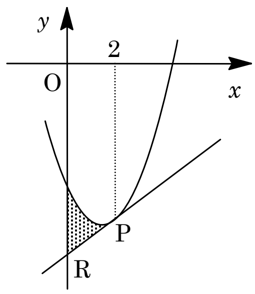
(3)　(1)の結果を①に代入すると，$y=a_1x^2-3a_1x-7a_1$

ここで，C と l と y 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^2(a_1x^2-3a_1x-7a_1-a_1x+11a_1)\,dx$$

$$=a_1\int_0^2(x-2)^2dx=a_1\Big[\frac{1}{3}(x-2)^3\Big]_0^2=\frac{8}{3}a_1$$

条件より $S=q$ なので，$\dfrac{8}{3}a_1=11$ から $a_1=\dfrac{33}{8}$ である。



コメント

数列と微積分の融合問題です。文字が多いのですが，それを整理するような設問が，(1)で付いています。

問　題

$\alpha>1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a_n>1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\sqrt{x}-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$（ただし，$x>1$ とする。）

(3)　$a_n-1\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　[2014]

解答例

(1)　漸化式　$a_1=\alpha>1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$ で定められる数列 $\{a_n\}$ に対して，$a_n>1$ であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\alpha>1$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定する。

$$a_{k+1}-1=\sqrt{\frac{2a_k}{a_k+1}}-1=\frac{\sqrt{2a_k}-\sqrt{a_k+1}}{\sqrt{a_k+1}}=\frac{a_k-1}{\sqrt{a_k+1}\left(\sqrt{2a_k}+\sqrt{a_k+1}\right)}>0$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$a_n>1$ である

(2)　$x>1$ のとき，$x-1-2(\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2>0$ より，

$$x-1\geqq2(\sqrt{x}-1),\ \sqrt{x}-1\leqq\frac{1}{2}(x-1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_n>1$ なので，$\dfrac{2a_n}{a_n+1}-1>0$ となり，(＊)を適用すると，

$$a_{n+1}-1=\sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}-1\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{2}=\frac{1}{4}(a_n-1)$$

これより，$n\geqq2$ のとき，$a_n-1<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1-1)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$

また，$n=1$ のときは，$a_1-1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1}(\alpha-1)$ となるので，

$$a_n-1\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

コメント

漸化式と不等式の問題です。(1)(2)を誘導として(3)につなげるという意図と思えますので，その通りにしました。ただ，(1)の証明を上記のように行うと，(2)の不等式は不可欠ではありません。

問　題

関数 $f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　0 以上の整数 k に対して，$f(x)=\dfrac{k}{2}\{f(1)-f(0)\}$ を満たす x を k を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた x を x_k とおく。$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})$ を n を用いて表せ。　[2013]

解答例

(1)　$f(x)=\log_2(x+1)$ に対して，$f(1)-f(0)=\log_2 2-\log_2 1=1$

条件より，$f(x)=\dfrac{k}{2}\{f(1)-f(0)\}$ なので，$\log_2(x+1)=\dfrac{k}{2}$ から，

$$x=2^{\frac{k}{2}}-1$$

(2)　$x_k=2^{\frac{k}{2}}-1$ であるので，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}k(x_k-x_{k-1})=\sum_{k=1}^{n}\{kx_k-(k-1)x_{k-1}-x_{k-1}\}$$
$$=nx_n-0-\sum_{k=1}^{n}x_{k-1}=n(2^{\frac{n}{2}}-1)-\sum_{k=1}^{n}(2^{\frac{k-1}{2}}-1)$$
$$=n(2^{\frac{n}{2}}-1)-\frac{(\sqrt{2})^n-1}{\sqrt{2}-1}+n=n(\sqrt{2})^n-\{(\sqrt{2})^n-1\}(\sqrt{2}+1)$$
$$=(n-\sqrt{2}-1)(\sqrt{2})^n+\sqrt{2}+1$$

コメント

数列の基本的な問題です。(2)では，階差数列を利用して計算量を減らしています。そのまま計算しても構いませんが……。

問　題

座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式　$x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq n$ の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

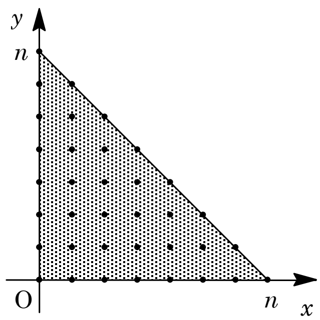
(1) 点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点をすべて求めよ。また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，P の隣接点の個数を求めよ。

(2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(3) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

[2013]

解答例



(1) まず，連立不等式 $x\geqq 0$，$y\geqq 0$，$x+y\leqq n$ で表される領域 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まれる。

さて，a, b, c, d が整数で，$|a-c|+|b-d|=1$ のとき，

$$(a-c,\ b-d)=(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$$

これより，格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，その隣接点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ は，領域 D 内にあり，

$$(c,\ d)=(a-1,\ b),\ (a+1,\ b),\ (a,\ b-1),\ (a,\ b+1)$$

すると，点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ の隣接点は，点 $(1,\ 0)$ と点 $(0,\ 1)$ である。

また，領域 D 内の格子点 P が直線 $x+y=n$ 上にあるとき，隣接点については，

(i)　$\mathrm{P}(n,\ 0)$ のとき

隣接点は，点 $(n-1,\ 0)$ となり，個数は 1 である。

(ii)　$\mathrm{P}(0,\ n)$ のとき

隣接点は，点 $(0,\ n-1)$ となり，個数は 1 である。

(iii)　$\mathrm{P}(k,\ n-k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は，点 $(k-1,\ n-k)$ および点 $(k,\ n-k-1)$ となり，個数は 2 である。

(2) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものは，連立不等式 $x\geqq 1$，$y\geqq 1$，$x+y\leqq n-1$ で表される領域内の格子点である。その個数は，

$$1+2+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

(3)　領域 D 内の格子点の総数 N は，$N=1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(i)　隣接点の個数が 1 のとき

(1)の(i)(ii)より 2 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2}{N}$ となる。

(ii)　隣接点の個数が 2 のとき

点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ および(1)の(iii)より，$1+(n-1)=n$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{n}{N}$ となる。

(iii)　隣接点の個数が 3 のとき

格子点が $\mathrm{P}(k,\ 0)$，$\mathrm{P}(0,\ k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ で，$2(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2(n-2)}{N}$ となる。

(iv)　隣接点の個数が 4 のとき

(2)より $\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2N}$ となる。

(i)～(iv)より，隣接点の個数の期待値 E は，

$$E=\frac{1}{N}\left\{1\cdot 2+2\cdot n+3\cdot 2(n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$
$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}2n(n+1)=\frac{4n}{n+2}$$

すると，$E=\dfrac{4n}{n+2}\geqq 3$ となるのは，$4n\geqq 3n+6$ から，$n\geqq 6$ である。

コメント

格子点の個数と確率の融合問題です。領域 D の図を見ながら，個数を数えています。

問　題

n は 3 以上の整数とする。1 から n までの整数から連続する 2 つの整数 x, $x+1$ を取り除く。次の問いに答えよ。

(1)　$n=17$ のとき，残された整数の総和を個数 15 で割った値が $\dfrac{42}{5}$ であるとする。取り除いた 2 つの整数を求めよ。

(2)　$n \geqq 39$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)>\dfrac{205}{11}(n-2)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　残された整数の総和を個数 $n-2$ で割った値が $\dfrac{205}{11}$ であるとする。n と取り除いた 2 つの整数を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　まず，1 から 17 までの整数の和は，$1+2+\cdots+17=\dfrac{1}{2}\cdot 17\cdot 18=153$

また，残された整数の総和は，条件より，$15\times\dfrac{42}{5}=126$

すると，$x+(x+1)=153-126$ から，$x=13$ となるので，取り除いた 2 つの整数は 13 と 14 である。

(2)　$\dfrac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)=\dfrac{1}{2}(n^2-3n+2)=\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)$ となり，$n \geqq 39$ で，

$$\frac{1}{2}(n-1)-\frac{205}{11}\geqq\frac{1}{2}\cdot 38-\frac{205}{11}=\frac{4}{11}>0$$

すると，$\dfrac{1}{2}(n-1)>\dfrac{205}{11}$ より，$\dfrac{1}{2}(n-1)(n-2)>\dfrac{205}{11}(n-2)$ となり，

$$\frac{1}{2}n(n+1)-1-2(n-1)>\frac{205}{11}(n-2)\cdots\cdots\cdots①$$

(3)　まず，1 から n までの整数の和は，$1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$

また，残された整数の総和は，条件より，$\dfrac{205}{11}(n-2)$

すると，$x+(x+1)=\dfrac{1}{2}n(n+1)-\dfrac{205}{11}(n-2)\cdots\cdots\cdots②$

ここで，$n \geqq 39$ とすると，①から，

$$2x+1>1+2(n-1)=2n-1\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$1\leqq x\leqq n-1$ から $3\leqq 2x+1\leqq 2n-1$ となり，③は成立しない。

よって，$3\leqq n\leqq 38$ である。

さて，$\dfrac{205}{11}(n-2)$ は整数なので，$n-2$ は 11 の倍数となり，$n-2=11,\ 22,\ 33$ から，$n=13,\ 24,\ 35$ である。

(i)　$n=13$ のとき　②から，$2x+1=91-205=-114$ より不適。

(ii)　$n=24$ のとき　②から，$2x+1=300-410=-110$ より不適。

(iii)　$n=35$ のとき　②から，$2x+1=630-615=15$ より，$x=7$

(i)～(iii)より，$n=35$ となり，取り除いた 2 つの整数は 7 と 8 である。

コメント

整数と数列の融合問題です。(2)のいわくありげな不等式が, (3)への強力な誘導となっています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$x,\ y$ が 4 で割ると 1 余る自然数ならば，積 xy も 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 n に対して，3^n を 4 で割ると 1 余ることを証明せよ。

(3)　1 以上の奇数 n に対して，3^n を 4 で割った余りが 1 でないことを証明せよ。

(4)　m を 0 以上の整数とする。3^{2m} の正の約数のうち 4 で割ると 1 余る数全体の和を m を用いて表せ。　[2010]

解答例

(1)　条件より, $k,\ l$ を 0 以上の整数として，$x=4k+1$，$y=4l+1$ と表すと，

$$xy=(4k+1)(4l+1)=4(4kl+k+l)+1$$

よって，積 xy は 4 で割ると 1 余る。

(2)　条件より，$n=2k$ とおくと, $k\geqq 1$ のとき，二項定理より，

$$3^n=3^{2k}=9^k=(8+1)^k=8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8+1$$

$8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8$ は 4 の倍数より，3^n は 4 で割ると 1 余る。

なお，$n=0$ のときは $3^n=1$ から，このときも 4 で割ると 1 余る。

(3)　条件より，$n=2k+1$ とおき，また N を整数とすると, (2)から，$3^{2k}=4N+1$

$$3^n=3^{2k+1}=3\cdot 3^{2k}=3(4N+1)=4\cdot 3N+3$$

よって，3^n を 4 で割った余りは 3 となり, 1 ではない。

(4)　3^{2m} の正の約数は，1，3，3^2，3^3，…，3^{2m-1}，3^{2m} であり，この中で 4 で割ると 1 余る数は, (2), (3)の結果より，1，3^2，3^4，…，$3^{2m}=1$，9，9^2，…，9^m である。

すると，この数の和を S_m とおくと，

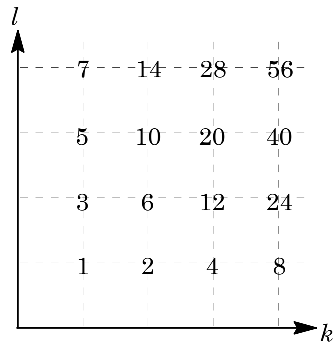
$$S_m=1+9+9^2+\cdots+9^m=\frac{9^{m+1}-1}{9-1}=\frac{1}{8}(9^{m+1}-1)$$

コメント

整数についての基本問題です。(2)は，初めに考えた二項定理で記述していますが，(1)の利用を考えると数学的帰納法でしょう。

問　題

k, l を自然数とし，座標平面上の点 $(k,\ l)$ に数 $2^{k-1}(2l-1)$ を記入する(右図を参照)。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　点 $(2,\ 25)$ に記入される数を求めよ。

(2)　2008 が記入される点の座標を求めよ。

(3)　どの自然数も座標平面上のどこかの点に 1 回だけ記入される。この理由を書け。

[2008]

解答例

(1)　点 $(2,\ 25)$ に記入される数は，条件より，

$$2^1\times(2\times25-1)=98$$

(2)　2008 を 2 で割っていくと，

$$2008=2^3\times251=2^{4-1}\times(2\times126-1)$$

よって, 2008 が記入される点の座標は，$(4,\ 126)$ である。

(3)　任意の自然数 n を素因数分解すると，2 以外の素数はすべて奇数より，自然数 k, 奇数 m がただ 1 つ存在し，

$$n=2^{k-1}\times m$$

さらに, m は自然数 l を用いて，$m=2l-1$ と表せる。

これより，$n=2^{k-1}(2l-1)$ となり，任意の自然数 n に対して，点 $(k,\ l)$ が 1 つ定まる。

コメント

(3)の記述はこの程度でよいのか，迷うところです。

問　題

$x_1 = x_2 = 1$ とし，$x_n\ (n = 3,\ 4,\ \cdots)$ は x_{n-2} と x_{n-1} の和を 3 で割ったときの余りであるとして，数列 $\{x_n\}\ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を定める。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ の第 3 項から第 12 項までのそれぞれの値を，解答用紙にある表の中に書け。

(2) x_{346} を求めよ。

(3) $S_m = \sum_{n=1}^{m} x_n$ とおくとき，$S_m \geqq 684$ を満たす最小の自然数 m を求めよ。　[2008]

解答例

(1) 条件より，

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12
x_n	1	1	2	0	2	2	1	0	1	1	2	0

(2) (1)より，帰納的に，数列 $\{x_n\}$ は周期 8 の周期数列となり，$346 = 8\times 43 + 2$ より，

$$x_{346} = x_2 = 1$$

(3) 数列 $\{x_n\}$ を x_1 より 8 項ずつで区切り，$x_1 \sim x_8$ を第 1 群，$x_9 \sim x_{16}$ を第 2 群，$\cdots$ とする。

さて，$x_1 + x_2 + \cdots + x_8 = 9$ より，m 項までの和 $S_m = 684$ を 9 で割ると，

$$684 = 9\times 76$$

これより，第 76 群の末項である $8\times 76 = 608$ 項目までの和が 684 となっている。

ここで，$x_{608} = 0$，$x_{607} = 1$ から，$S_m \geqq 684$ を満たす最小の自然数 m は $m = 607$ である。

コメント

(3)での割り算は，余りが出て，それを微調整するという数値が選んであると予測しましたが，はずれました。もっとも微調整は必要でしたが。

問　題

図のように, 1 を左下のマス目におき, 1 の右に 2 を, 2 の上に 3 を, 3 の左に 4 をおく。次に 2 の右に 5 をおき, 5 の上に 6, 7 を, 7 の左に 8, 9 をおく。このように, すでに埋められたマス目のまわりを右下から左上まで自然数を順に並べていく。左から j 番目, 下から k 番目のマス目にある自然数を $a(j,\ k)$ と書く。例えば $a(3,\ 4)=14$, $a(3,\ 5)=23$ である。

16	15	14	13	
9	8	7	12	
4	3	6	11	
1	2	5	10	

(1)　$a(1,\ k)$, $a(j,\ 1)$ をそれぞれ k, j の式で表せ。

(2)　$a(j,\ k)$ を $j \geqq k$ と $j<k$ の場合に分けて求めよ。

(3)　$a(j,\ k)=2007$ となる j, k を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a(k,\ k)$ を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　題意のマス目を下のように群数列として並べ替えると,

$$1\mid 2\quad 3\quad 4\mid 5\quad 6\quad 7\quad 8\quad 9\mid 10\quad 11\quad 12\quad 13\quad 14\quad 15\quad 16\mid 17$$

すると, 第 n 群には項が $2n-1$ 個存在するので, 第 n 群の末項までの項数は,

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)=n^2$$

さらに, 仕切りを取り去った数列は自然数の列となっているので, 第 n 群の末項は n^2 となる。

さて, $a(1,\ k)$ は第 k 群の末項より, $a(1,\ k)=k^2$

また, $a(j,\ 1)$ は第 j 群の初項より,

$$a(j,\ 1)=(j-1)^2+1=j^2-2j+2$$

(2)　$j \geqq k$ のとき, $a(j,\ k)$ は第 j 群の初項から k 番目の数より,

$$a(j,\ k)=a(j,\ 1)+(k-1)=(j-1)^2+k$$

また, $j<k$ のとき, $a(j,\ k)$ は第 k 群の末項から逆に数えて j 番目の数より,

$$a(j,\ k)=a(1,\ k)-(j-1)=k^2-j+1$$

(3)　まず, 2007 が第 n 群に属するとすると, $(n-1)^2<2007 \leqq n^2$ となる。

すると, $44^2<2007<45^2$ より, 2007 は第 45 群に属する。

第 44 群の末項は $44^2=1936$ なので, $2007-1936=71$ から, 2007 は第 45 群の 71 番目の数である。

ところで, 第 45 群の項数は $2\times 45-1=89$ なので, 2007 は第 45 群の末項から逆に数えて $89-71+1=19$ 番目の数と言い換えることができる。

以上より, $a(19,\ 45)=2007$ となり, $j=19$, $k=45$ である。

(4)　(2)より，$a(k,\ k)=(k-1)^2+k$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n}a(k,\ k)=\sum_{k=1}^{n}\{(k-1)^2+k\}=\sum_{k=1}^{n-1}k^2+\sum_{k=1}^{n}k$$

$$=\frac{1}{6}(n-1)n(2n-1)+\frac{1}{2}n(n+1)=\frac{1}{3}n(n^2+2)$$

コメント

群数列の問題ですが，注意力がかなり要求されます。具体例を考えて計算を行った方が安全です。

問　題

$\sqrt{7}$ の小数部分を p とするとき，$\dfrac{3}{p}-p$ は整数であることを示し，その整数を求めよ。

[2006]

解答例

$2<\sqrt{7}<3$ より，$\sqrt{7}$ の小数部分 p は，$p=\sqrt{7}-2$ となるので，

$$\frac{3}{p}-p=\frac{3}{\sqrt{7}-2}-(\sqrt{7}-2)=\frac{3(\sqrt{7}+2)}{7-4}-\sqrt{7}+2=4$$

コメント

整数部分，小数部分の意味を確認する問題です。

問　題

$a_1 = 1$ と $a_{n+1} = 3a_n - n$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1) p と q を定数とする。数列 $\{b_n\}$ を $b_n = a_n + pn + q$ によって定めると，$\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列になるとする。このとき，定数 p と q の値を求めよ。

(2) a_n を n の式で表せ。

(3) 数列 $\{a_n\}$ の和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を n の式で表せ。 [2006]

解答例

(1) 数列 $\{b_n\}$ は公比 3 の等比数列なので，$b_{n+1} = 3b_n$ ………①

ここで，$b_n = a_n + pn + q$ なので，①に代入して，

$$a_{n+1} + p(n+1) + q = 3(a_n + pn + q),\ \ a_{n+1} = 3a_n + 2pn + 2q - p \text{………②}$$

条件より，$a_{n+1} = 3a_n - n$ ………③

②③より，$2p = -1$，$2q - p = 0$ となり，

$$p = -\frac{1}{2},\ \ q = -\frac{1}{4}$$

(2) $b_1 = a_1 + p + q = 1 - \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{4} = \dfrac{1}{4}$ となり，①から，

$$b_n = b_1 \cdot 3^{n-1} = \frac{1}{4} \cdot 3^{n-1}$$

よって，$a_n = b_n - pn - q = \dfrac{1}{4} \cdot 3^{n-1} + \dfrac{1}{2}n + \dfrac{1}{4}$

(3)
$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{4} \cdot 3^{k-1} + \frac{1}{2}k + \frac{1}{4}\right) = \frac{1}{4} \cdot \frac{3^n - 1}{3-1} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}n(n+1) + \frac{1}{4}n$$
$$= \frac{1}{8} \cdot 3^n + \frac{1}{4}n^2 + \frac{1}{2}n - \frac{1}{8}$$

コメント

誘導つきで漸化式を解く問題です。誘導の意味は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

n を 2 以上の整数とする。n 個のさいころを投げ，出た目のすべての積を X とする。次の問いに答えよ。

(1) X が 5 の倍数である確率を n を用いて表せ。

(2) X が 5 の倍数である確率が 0.99 より大きくなる最小の n を求めよ。ただし，$\log_2 3=1.585$，$\log_2 5=2.322$ とする。

(3) X が 3 でも 5 でも割り切れない確率を n を用いて表せ。

(4) X が 15 の倍数である確率を n を用いて表せ。 [2017]

解答例

(1) n 個のさいころの出た目の積を X とし，X が 5 の倍数である事象を A とおくと，$\overline{A}$ は n 個とも 5 以外の目が出ることから，その確率は $P(\overline{A})=\left(\frac{5}{6}\right)^n$ となり，

$$P(A)=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n$$

(2) 条件より，$1-\left(\frac{5}{6}\right)^n>0.99$ となり，$\left(\frac{5}{6}\right)^n<0.01=10^{-2}\cdots\cdots\cdots(*)$

すると，$n\log_2\frac{5}{6}<-2\log_2 10$ となり，$\log_2 3=1.585$，$\log_2 5=2.322$ から，

$$\log_2\frac{5}{6}=\log_2 5-\log_2 6=\log_2 5-1-\log_2 3=-0.263$$

$$-2\log_2 10=-2(1+\log_2 5)=-6.644$$

よって，$(*)$を満たす最小の n は，$n>\frac{-6.644}{-0.263}>25.2$ から 26 である。

(3) X が 3 の倍数である事象を B とおくと，X が 3 でも 5 でも割り切れない事象は $\overline{A}\cap\overline{B}$ と表せ，これは n 個とも 1, 2, 4 のいずれかの目が出ることより，その確率は，

$$P(\overline{A}\cap\overline{B})=\left(\frac{3}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(4) まず，$\overline{B}$ は n 個とも 3, 6 以外の目が出ることから，その確率は，

$$P(\overline{B})=\left(\frac{4}{6}\right)^n=\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

すると，X が 15 の倍数である事象は $A\cap B$ と表せ，その確率は，

$$P(A\cap B)=1-P(\overline{A\cap B})=1-P(\overline{A}\cup\overline{B})=1-P(\overline{A})-P(\overline{B})+P(\overline{A}\cap\overline{B})$$

$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{2}{3}\right)^n+\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

コメント

余事象の考え方が効果的な確率の頻出題です。誘導がまったくなく，いきなり(4)の設問でも，よく見かけるものです。

問　題

xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点$(3,\ 1)$に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を$(x_n,\ y_n)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

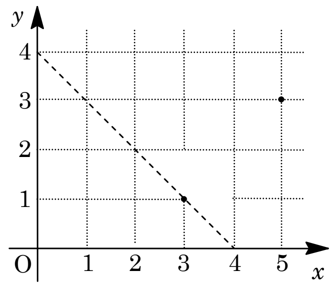
(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3)　$x_8+y_8\leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

[2016]

解答例



(1)　原点から出発した点 Q は，表が出たら x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。そして，この試行を n 回繰り返したとき，その到達点$(x_n,\ y_n)$は，点$(3,\ 1)$を通らないときは線分 $x+y=n$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$上の点，また点$(3,\ 1)$を通るといったん原点に戻り，続けて残りの試行を繰り返す。

さて，$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となるのは，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達したときより，その確率は，${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$ である。

(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となるのは，8 回目の試行で点$(5,\ 3)$に到達し，しかも 4 回目の試行では点$(3,\ 1)$を通らないときより，その確率は，(1)を利用すると，

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=56\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{4}\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8} $$

(3)　試行を 8 回行い，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を通らないときは $x_8+y_8=8$ となる。

また，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を到達し原点に戻った後，8 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達しないときは $x_8+y_8=4$ となり，8 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達するときは$(x_8,\ y_8)=(0,\ 0)$である。

したがって，$x_8+y_8\leqq 4$ となるのは 4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達するときであり，その確率は，(1)から $\frac{1}{4}$ である。

(4)　試行を $4n$ 回行うとき，到達点$(x_{4n},\ y_{4n})$を考える。

まず，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を通らないときは，つねに $x_{4n}+y_{4n}=4n$ となる。

次に，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達し原点に戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-1)$となり，その確率は$\dfrac{1}{4}$である。

さらに，4 回目と 8 回目に点$(3,\ 1)$に到達し原点に 2 回戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-2)$となり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$である。

同様に考えて，lを整数$(0\leqq l\leqq n-1)$とし，4 回目，8 回目，…，$4l$回目に点$(3,\ 1)$に到達し原点に l 回戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-l)$となり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^l$である。そこで，$k=n-l$とおくと$1\leqq k\leqq n$となり，$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$となる確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^l=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}$である。

コメント

確率の頻出問題ですが，振り出しに戻るというひねりが加えられています。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　変量 x のデータの値が x_1, x_2, $\cdots$, x_n であるとし，$f(a)=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2$ とする。$f(a)$ を最小にする a は x_1, x_2, $\cdots$, x_n の平均値で，そのときの最小値は x_1, x_2, $\cdots$, x_n の分散であることを示せ。

(2)　c を定数として，変量 y, z の k 番目のデータの値が

$$y_k=k\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n),\ \ z_k=ck\ (k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$$

であるとする。このとき y_1, y_2, $\cdots$, y_n の分散が z_1, z_2, $\cdots$, z_n の分散より大きくなるための c の必要十分条件を求めよ。

(3)　変量 x のデータの値が x_1, x_2, $\cdots$, x_n であるとし，その平均値を $\overline{x}$ とする。新たにデータを得たとし，その値を x_{n+1} とする。x_1, x_2, $\cdots$, x_n, x_{n+1} の平均値を x_{n+1}, $\overline{x}$ および n を用いて表せ。

(4)　次の 40 個のデータの平均値，分散，中央値を計算すると，それぞれ，ちょうど 40, 670, 35 であった。

120	10	60	70	30	20	20	30	20	60
40	50	40	10	30	40	40	30	20	70
100	20	20	40	40	60	70	20	50	10
30	10	50	80	10	30	70	10	60	10

新たにデータを得たとし，その値が 40 であった。このとき，41 個のすべてのデータの平均値，分散，中央値を求めよ。ただし，得られた値が整数でない場合は，小数第 1 位を四捨五入せよ。　[2016]

解答例

(1)　x_1, x_2, $\cdots$, x_n の平均値を $\overline{x}$，分散を s^2 とすると，

$$f(a)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(x_k-a)^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{x_k}^2-2a\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}x_k+a^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}1$$
$$=\overline{x^2}-2a\overline{x}+a^2=(a-\overline{x})^2+\overline{x^2}-(\overline{x})^2=(a-\overline{x})^2+s^2$$

よって，$f(a)$ は $a=\overline{x}$ のとき最小となり，最小値は s^2 である。

(2)　$z_k=cy_k$ で，y_1, y_2, $\cdots$, y_n の平均を $\overline{y}$，z_1, z_2, $\cdots$, z_n の平均を $\overline{z}$ とすると，

$$\overline{z}=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}z_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}cy_k=c\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}y_k=c\overline{y}$$

また，y_1, y_2, $\cdots$, y_n の分散を ${s_y}^2$，z_1, z_2, $\cdots$, z_n の分散を ${s_z}^2$ とすると，

$${s_z}^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{z_k}^2-(\overline{z})^2=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(cy_k)^2-(c\overline{y})^2=c^2\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}{y_k}^2-c^2(\overline{y})^2=c^2{s_y}^2$$

条件 ${s_y}^2 > {s_z}^2$ から，${s_y}^2 > c^2{s_y}^2$ となり $c^2 < 1$，すなわち $-1 < c < 1$ である。

(3) $\overline{x} = \dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} x_k = n\overline{x}$ となり，x_1，x_2，…，x_n，x_{n+1} の平均値は，

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n+1} x_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n} x_k + x_{n+1}\right) = \frac{1}{n+1}(n\overline{x} + x_{n+1})$$

(4) 与えられた 40 個のデータに，値 40 のデータを新たに加えたときを考える。

40 個のデータの平均値は 40 なので，41 個のデータの平均値は，

$$\frac{1}{41}(40\cdot 40 + 40) = 40$$

40 個のデータの分散は 670 なので，41 個のデータの分散は，

$$\frac{1}{41}\{670\cdot 40 + (40-40)^2\} \fallingdotseq 653.6\cdots$$

よって，小数第 1 位を四捨五入すると，654 である。

40 個のデータの中央値は，小さい方から 20 番目(30)と 21 番目(40)の平均値から 35 なので，41 個のデータの中央値は 21 番目より 40 である。

コメント

データの分析に関して，平均値や分散などの定義の確認問題です。

問　題

n を自然数とする。A, B, C, D, E の 5 人が 1 個のボールをパスし続ける。最初に A がボールを持っていて，A は自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，ボールを受けた人は，また自分以外の誰かに同じ確率でボールをパスし，以後同様にパスを続ける。n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とする。ここで，たとえば，A→C→D→A→E の順にボールをパスすれば，4 回パスしたと考える。次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2，p_3，p_4 を求めよ。

(2)　p_n を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　n 回パスしたとき，B がボールを持っている確率を p_n とすると，条件より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{4}(1-p_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，最初，A がボールを持っていたので，1 回パスしたとき，B がボールを持っている確率 p_1 は，$p_1=\frac{1}{4}$ である。

$(*)$より，$p_2=\frac{1}{4}(1-p_1)=\frac{3}{16}$，$p_3=\frac{1}{4}(1-p_2)=\frac{13}{64}$，$p_4=\frac{1}{4}(1-p_3)=\frac{51}{256}$

(2)　$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\frac{1}{5}=-\frac{1}{4}\left(p_n-\frac{1}{5}\right)$となり，

$$p_n-\frac{1}{5}=\left(p_1-\frac{1}{5}\right)\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{20}\left(-\frac{1}{4}\right)^{n-1}=-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$$

よって，$p_n=\frac{1}{5}-\frac{1}{5}\left(-\frac{1}{4}\right)^n$ である。

コメント

確率と漸化式の基本問題です。簡単に漸化式が求まりますので，(1)もその結果を利用しています。

問　題

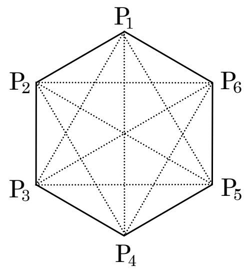
正六角形の頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j, k とする。次の問いに答えよ。

(1)　P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となる確率を求めよ。

(2)　P_1，P_j，P_k が正三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。

(3)　P_1，P_j，P_k が直角三角形の 3 頂点となる確率を求めよ。　[2014]

解答例



(1)　P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となる場合は，$(i,\ j)$ が $i\neq 1$ かつ $j\neq 1$ かつ $i\neq j$ のときより，${}_5\mathrm{P}_2=20$ 通りある。

その確率は，$\dfrac{20}{6^2}=\dfrac{5}{9}$ である。

(2)　P_1，P_j，P_k が正三角形の 3 頂点となる場合は，$(i,\ j)$ が $(3,\ 5)$，$(5,\ 3)$ のときより，2 通りある。

その確率は，$\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$ である。

(3)　P_1，P_j，P_k が直角三角形の 3 頂点となる場合は，$i<j$ のとき，

(i)　$\mathrm{P}_1\mathrm{P}_4$ が斜辺　$(i,\ j)=(2,\ 4)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(4,\ 6)$

(ii)　$\mathrm{P}_2\mathrm{P}_5$ が斜辺　$(i,\ j)=(2,\ 5)$

(iii)　$\mathrm{P}_3\mathrm{P}_6$ が斜辺　$(i,\ j)=(3,\ 6)$

(i)～(iii)より，$i>j$ のときも考えると，その確率は，$\dfrac{6\times 2}{6^2}=\dfrac{1}{3}$ である。

コメント

確率の基本題ですが，裏があるのかと勘繰るほどの内容です。

問　題

N は 4 以上の整数とする。次の規則にしたがって 1 個のさいころを繰り返し投げる。

規則：出た目を毎回記録し，偶数の目が 3 回出るか，あるいは奇数の目が N 回出たところで，さいころを投げる操作を終了する。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　さいころを投げる回数は，最大で何回か。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する確率を求めよ。

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する確率を求めよ。

(5)　$N=4$ のとき，さいころを投げる回数の期待値を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$N \geqq 4$ より，さいころを投げる回数が最大となるのは，偶数 2 回，奇数 $N-1$ 回出た後，もう 1 回投げる場合より，$2+(N-1)+1=N+2$ 回である。

(2)　さいころを 3 回投げて操作を終了する場合は，偶数が 3 回出たときより，その確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$ である。

(3)　さいころを N 回投げて操作を終了する場合は，奇数が N 回出たか，$N-1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-3$ 回出て N 回目に偶数が出たときより，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_{N-1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-3}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\left\{1+\frac{(N-1)(N-2)}{2}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N$$
$$=(N^2-3N+4)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+1}$$

(4)　最後に奇数の目が出て操作を終了する場合は，

(i)　奇数が N 回出たとき

(ii)　N 回目までに偶数 1 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+1$ 回目に奇数が出たとき

(iii)　$N+1$ 回目までに偶数 2 回奇数 $N-1$ 回出て，$N+2$ 回目に奇数が出たとき

(i)～(iii)より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^N+{}_N\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_{N+1}\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^{N-1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}$$
$$=\left\{1+\frac{N}{2}+\frac{(N+1)N}{8}\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^N=(N^2+5N+8)\left(\frac{1}{2}\right)^{N+3}$$

(5)　$N=4$ のとき, (1)より，さいころを投げる回数は最大 6 回となる。

(i)　3 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (2)より $\dfrac{1}{8}$

(ii)　4 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (3)より $(16-12+4)\left(\dfrac{1}{2}\right)^5=\dfrac{1}{4}$

(iii) 5 回投げて操作を終了する場合

4 回目までに偶数 1 回奇数 3 回出て 5 回目に奇数が出たか，4 回目までに偶数 2 回奇数 2 回出て 5 回目に偶数が出たときより，その確率は,

$$ {}_4C_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}+{}_4C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot\frac{1}{2}=\frac{5}{16} $$

(iv) 6 回投げて操作を終了する場合　その確率は, (1)より，${}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2\cdot 1=\frac{5}{16}$

(i)～(iv)より，さいころを投げる回数の期待値は,

$$ 3\times\frac{1}{8}+4\times\frac{1}{4}+5\times\frac{5}{16}+6\times\frac{5}{16}=\frac{77}{16} $$

コメント

題意を数式化するのときに細心の注意が要求される確率の問題です。

問　題

さいころを n 回投げる。k 回目 $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に投げた結果,

1 または 2 の目が出たとき $X_k=2$

3 または 4 の目が出たとき $X_k=3$

5 または 6 の目が出たとき $X_k=5$

とする。これらの積を $Y=X_1X_2\cdots X_n$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$n=5$ のとき, Y が偶数になる確率 p_1 を求めよ。

(2)　$n=5$ のとき, Y が 100 の倍数になる確率 p_2 を求めよ。

(3)　$n=2$ のとき, Y の期待値 E を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　まず, $X_k=2,\ 3,\ 5$ になる確率は, それぞれ $\dfrac{1}{3}$ ずつである。

さて, $Y=X_1X_2X_3X_4X_5$ が奇数となるのは, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 がすべて奇数, すなわち 3 または 5 のときであり, その確率は $\left(\dfrac{2}{3}\right)^5$ である。

これより, Y が偶数になる確率 p_1 は, $p_1=1-\left(\dfrac{2}{3}\right)^5=\dfrac{211}{243}$

(2)　$Y=X_1X_2X_3X_4X_5$ が 100 の倍数になるのは, X_1, X_2, X_3, X_4, X_5 のうち, 2 が少なくとも 2 回, 5 が少なくとも 2 回のときより, その確率 p_2 は,

(i)　$X_k=2$ が 2 回, $X_k=5$ が 3 回のとき　${}_5\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{10}{243}$

(ii)　$X_k=2$ が 3 回, $X_k=5$ が 2 回のとき　${}_5\mathrm{C}_3\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{1}{3}\right)^2=\dfrac{10}{243}$

(iii)　$X_k=2$ が 2 回, $X_k=5$ が 2 回, $X_k=3$ が 1 回のとき

$${}_5\mathrm{C}_2\,{}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\frac{1}{3}=\frac{30}{243}$$

(i)(ii)(iii)より, $p_2=\dfrac{10}{243}+\dfrac{10}{243}+\dfrac{30}{243}=\dfrac{50}{243}$

(3)　$Y=X_1X_2$ のとき, Y のとりうる値は,

2^2, 3^2, 5^2, $2\cdot3$, $2\cdot5$, $3\cdot5$

Y	4	6	9	10	15	25
$P(Y)$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{2}{9}$	$\frac{1}{9}$

これより, Y の期待値 E は,

$$E=4\times\frac{1}{9}+6\times\frac{2}{9}+9\times\frac{1}{9}+10\times\frac{2}{9}+15\times\frac{2}{9}+25\times\frac{1}{9}=\frac{100}{9}$$

コメント

設問が $n=5$ と $n=2$ の場合だけというのは意外です。

問　題

n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A, B, C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2)　$n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3)　勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。　[2010]

解答例

(1)　勝者が 3 人であるのは, 3 人とも同じ得点のときより，その確率 $P_n(3)$ は,

$$P_n(3)=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

(2)　$n=3$ の場合，勝者が 2 人であるのは，まず勝者の選び方が ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通り。次に, 得点を 2 つ選び，大きい方を勝者の得点に対応させると，その対応は ${}_3\mathrm{C}_2=3$ 通りとなる。これより，勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ は,

$$P_3(2)=\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

(3)　勝者が 2 人である確率は, (2)と同様に考えると,

$$P_n(2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\times{}_n\mathrm{C}_2}{n^3}=\frac{3n(n-1)}{2n^3}=\frac{3(n-1)}{2n^2}$$

すると，勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ は，余事象を考えて,

$$P_n(1)=1-P_n(3)-P_n(2)=1-\frac{1}{n^2}-\frac{3(n-1)}{2n^2}=\frac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}$$

コメント

確率の基本問題です。(3)は(2)を誘導と考えて解いています。

問　題

2 人のプレーヤーA, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は$1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1)　P_2 と P_4 を求めよ。

(2)　P_{2n-1} を求めよ。

(3)　P_{2n} を求めよ。

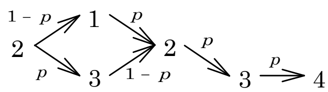
(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。　　[2009]

解答例

(1)　A の持っている金貨の枚数に注目する。

まず, 2 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは, A の枚数が 2→3→4 となる場合のみであり，その確率 P_2 は，$P_2=p^2$ である。

また，4 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは, A の枚数が右図のように変化する場合であり，その確率 P_4 は,



$$P_4=2p(1-p)\cdot p^2=2p^3(1-p)$$

(2)　$2n-1$回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，$2n-3$回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり，その後, A が 2 回続けて勝つ場合である。

ところが, A の枚数が 2 となるのは，偶数回の対戦の後だけであるので，このような場合はない。よって，この確率 P_{2n-1} は，$P_{2n-1}=0$ である。

(3)　$2n$ 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは，$2n-2$回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり，その後, A が 2 回続けて勝つ場合である。この確率 P_{2n} は,

$$P_{2n}=\{2p(1-p)\}^{n-1}\cdot p^2=p^2\{2p(1-p)\}^{n-1}$$

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n は,

$$S_n=P_2+P_4+\cdots+P_{2n}=\frac{p^2\{1-(2p(1-p))^n\}}{1-2p(1-p)}=\frac{p^2-p^2(2p(1-p))^n}{1-2p+2p^2}$$

コメント

(1)で具体的に考えた結果を一般化すれば, (4)の結論まで一直線です。

問　題

2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石を考える。この石は，時刻 $t=0$ で点 A にあり，その後，次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各 $t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は $\dfrac{1}{3}$，点 B にある確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $\dfrac{1}{3}$，点 A にある確率は $\dfrac{2}{3}$ である。

いま，n を自然数とし，時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_1 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　石は，時刻 $t=0$ で点 A にあるので，時刻 $t=1$ においても点 A にある確率 p_1 は，規則(a)より，$p_1=\dfrac{1}{3}$ である。

(2)　石が時刻 $t=n$ に点 A にあるとき，時刻 $t=n+1$ にも点 A にある確率は $\dfrac{1}{3}$，また時刻 $t=n$ に点 B にあるとき，時刻 $t=n+1$ に点 A にある確率は $\dfrac{2}{3}$ より，

$$p_{n+1}=\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}(1-p_n)=-\frac{1}{3}p_n+\frac{2}{3}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{3}\left(p_n-\dfrac{1}{2}\right)$ となり，

$$p_n-\frac{1}{2}=\left(p_1-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n-1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}\left(-\dfrac{1}{3}\right)^{n}$ である。

コメント

有名な漸化式の確率への応用です。その中でも，最も基本的なタイプです。

問　題

袋の中に, 1 と書いた玉が 2 個, 2 と書いた玉が m 個, 3 と書いた玉が $(8-m)$ 個, 合計 10 個入っている。ただし, $2 \leqq m \leqq 7$ とする。この袋から玉を 2 個取り出し, それらの玉に書かれた数の和を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　$S=4$ となる確率を求めよ。

(2)　S を 3 で割った余りが 2 である確率を求めよ。

(3)　S を 3 で割った余りの期待値 E を求めよ。

(4)　E の値を最大にする m の値とそのときの E の値を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　まず, 10 個の玉から 2 個取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$ 通りが同様に確からしい。

さて, $S=4$ となるのは, 1 と書いた玉を 1 個と 3 と書いた玉を 1 個取り出す場合か, 2 と書いた玉を 2 個取り出す場合のいずれかより, その場合の数は,

$$ {}_2\mathrm{C}_1 \times {}_{8-m}\mathrm{C}_1 + {}_m\mathrm{C}_2 = 2(8-m)+\frac{1}{2}m(m-1) $$

よって, $S=4$ となる確率は, $\dfrac{2(8-m)+\frac{1}{2}m(m-1)}{45}=\dfrac{m^2-5m+32}{90}$

(2)　S を 3 で割った余りが 2 であるのは, $2 \leqq S \leqq 6$ より, $S=2,\ 5$ である。

(i)　$S=2$ のとき

1 と書いた玉を 2 個取り出す場合より, その確率は, $\dfrac{{}_2\mathrm{C}_2}{45}=\dfrac{1}{45}$ である。

(ii)　$S=5$ のとき

2 と書いた玉を 1 個と 3 と書いた玉を 1 個取り出す場合より, その確率は,

$$ \frac{{}_m\mathrm{C}_1 \times {}_{8-m}\mathrm{C}_1}{45}=\frac{m(8-m)}{45} $$

(i)(ii)より, S を 3 で割った余りが 2 である確率は,

$$ \frac{1}{45}+\frac{m(8-m)}{45}=\frac{-m^2+8m+1}{45} $$

(3)　S を 3 で割った余りが 1 であるのは, $S=4$ の場合だけである。

(1)(2)より, S を 3 で割った余りは 0, 1, 2 のいずれかなので, その期待値 E は,

$$ E=1\times\frac{m^2-5m+32}{90}+2\times\frac{-m^2+8m+1}{45}=\frac{-m^2+9m+12}{30} $$

(4)　(3)より, $E=-\dfrac{1}{30}\left(m-\dfrac{9}{2}\right)^2+\dfrac{43}{40}$ と変形する。

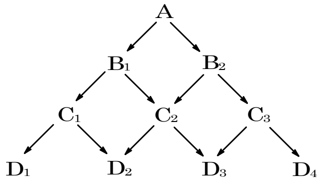
すると, m は整数より, E は $m=4$ または $m=5$ のとき最大となり, その値は $\dfrac{-16+36+12}{30}=\dfrac{16}{15}$ である。

コメント

確率の基本問題です。誘導に従えばよいように, 問題が構成されています。

問　題

図の一番上の点 A から玉を落とす。玉はそれぞれの分岐点において，確率 p で左下に，確率$1-p$で右下に向かうものとする。また，この図のB_1，B_2の段を 1 段目，C_1，C_2，C_3の段を 2 段目として段数を数えるものとする。$0<p<1$ として，次の問いに答えよ。



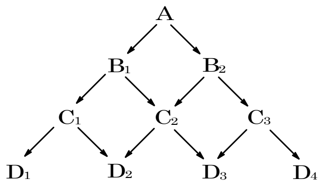
(1)　2 段目の点C_1，C_2，C_3に対して，玉がその点に落ちてくる確率を求めよ。

(2)　2 段目の点のうち，点C_2に玉が落ちてくる確率が，他の点C_1，C_3の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，p の値の範囲を求めよ。

(3)　3 段目の点のうち，点D_3に玉が落ちてくる確率が，他の点D_1，D_2，D_4の各点に落ちてくる確率のいずれよりも大きくなるとする。このとき，p の値の範囲を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　玉が点C_1に落ちてくるルートは，$A\to B_1\to C_1$より，その確率はp^2である。



点C_2に落ちてくるルートは，$A\to B_1\to C_2$または$A\to B_2\to C_2$より，その確率は，

$$p(1-p)+(1-p)p=2p(1-p)$$

点C_3に落ちてくるルートは，$A\to B_2\to C_3$より，その確率は$(1-p)^2$である。

(2)　C_2に落ちてくる確率が，C_1，C_3の各点に落ちてくる確率より大きくなるのは，

$$2p(1-p)>p^2\cdots\cdots\cdots①,\ 2p(1-p)>(1-p)^2\cdots\cdots\cdots②$$

$0<p<1$ なので，①より $2(1-p)>p$，②より $2p>1-p$ となり，

$$\frac{1}{3}<p<\frac{2}{3}$$

(3)　(1)と同様に考えて，点D_kに落ちてくる確率を$P(k)$と表すと，

$$P(1)=p^3,\ P(2)=3p^2(1-p),\ P(3)=3p(1-p)^2,\ P(4)=(1-p)^3$$

条件より，$P(3)>P(1)$，$P(3)>P(2)$，$P(3)>P(4)$なので，

$$3p(1-p)^2>p^3\cdots\cdots\cdots③,\ 3p(1-p)^2>3p^2(1-p)\cdots\cdots\cdots④$$

$$3p(1-p)^2>(1-p)^3\cdots\cdots\cdots⑤$$

$0<p<1$ なので，③より $3(1-p)^2>p^2$，$2p^2-6p+3>0$

$$p<\frac{3-\sqrt{3}}{2},\ \frac{3+\sqrt{3}}{2}<p$$

また，④から$1-p>p$となり$p<\dfrac{1}{2}$，⑤から$3p>1-p$となり$p>\dfrac{1}{4}$である。

以上まとめて，$\dfrac{1}{4}<p<\dfrac{1}{2}$

コメント

確率の基本問題です。ミスをしないように計算を進めるだけです。

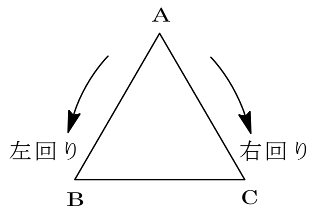
問　題

1 枚のコインを 1 回投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

表が出たとき，左回りで隣りの頂点に移し，

裏が出たとき，右回りで隣りの頂点に移す

という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。次の問いに答えよ。



(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_2 を求めよ。

(2)　この試行を 3 回繰り返したとき，駒が頂点 A にある確率 P_3 を求めよ。

(3)　この試行を 4 回繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_4 を求めよ。

(4)　この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したときに，駒が頂点 A に初めてもどってくる確率 Q_n を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　駒が A→B→A または A→C→A と移動する場合より，

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}$$

(2)　駒が A→B→C→A または A→C→B→A と移動する場合より，

$$P_3 = \left(\frac{1}{2}\right)^3 + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{1}{4}$$

(3)　駒が A→B→C→B→A または A→C→B→C→A と移動する場合より，

$$Q_4 = \left(\frac{1}{2}\right)^4 + \left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{8}$$

(4)　駒が A→B→C→B→C→……と B と C を移動し n 回目に A にもどる場合か，または A→C→B→C→B→……と C と B を移動し n 回目に A にもどる場合より，

$$Q_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(\frac{1}{2}\right)^n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

この値は，$n = 2$ のときも適する。

コメント

(4)の設問が本問の目的とすると，$Q_2 = P_2$，$Q_3 = P_3$ というのが，(1)と(2)の役割でしょう。

問　題

1, 2, 3, 4, 5 の数字を書いた 5 枚のカードがある。この 5 枚のカードを並べて 5 けたの数を作るとき，次の問いに答えよ。

(1) 偶数となる並べ方は何通りあるか。また，奇数となる並べ方は何通りあるか。

(2) 5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する確率を求めよ。

(3) 5 枚のカードをよく切って並べたとき，それが 54321 とちょうど 2 つの位で一致する確率を求めよ。

(4) 5 枚のカードを並べた数が，54321 と一致したときに 6 万円，54321 とちょうど 3 つの位で一致したときに 6 千円，54321 とちょうど 2 つの位で一致したときに 600 円もらえるものとする。これらの場合以外は何ももらえないものとする。5 枚のカードをよく切って並べる 1 回の試行での期待金額を求めよ。

補足説明 : (2)「それが 54321 とちょうど 3 つの位で一致する」とは，たとえば，“$\underline{5}2\underline{3}4\underline{1}$”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するが，“$\underline{54321}$”は 54321 とちょうど 3 つの位で一致するとは言わない。(3), (4)においても同等の意味とする。　[2004]

解答例

(1) 偶数となる並べ方は，一の位が 2 または 4 より，$2\times4! = 48$ 通りある。
奇数となる並べ方は，一の位が 1, 3, 5 のいずれかより，$3\times4! = 72$ 通りある。

(2) まず, 5 けたの数は，全部で $5!$ 通りできる。
54321 とちょうど 3 つの位で一致するのは，一致する位の選び方が ${}_5C_3 = 10$ 通りで，一致しない 2 つの位の並べ方が 1 通りずつより，$10\times1 = 10$ 通りとなる。
よって，このときの確率は，$\dfrac{10}{5!} = \dfrac{1}{12}$ である。

(3) 54321 とちょうど 2 つの位で一致するのは，一致する位の選び方が ${}_5C_2 = 10$ 通りある。また，一致しない 3 つの位の並べ方は，たとえば 321 のときは 132 または 213 と 2 通りあり，他の場合も同様に考えて，2 つの位が一致する並べ方は，$10\times2 = 20$ 通りとなる。
よって，このときの確率は，$\dfrac{20}{5!} = \dfrac{1}{6}$ である。

(4) 5 つの位で一致する確率は，明らかに $\dfrac{1}{5!} = \dfrac{1}{120}$ である。
よって, (2), (3)より，題意の期待金額は，

$$60000\times\frac{1}{120} + 6000\times\frac{1}{12} + 600\times\frac{1}{6} = 1100 \quad (\text{円})$$

コメント

題意を理解すれば，考え方や計算は容易です。

問　題

1 個のさいころを投げるという試行をくり返す。奇数の目が出たら A の勝ち，偶数の目が出たら B の勝ちとし，どちらかが 4 連勝したら試行を終了する。

(1)　この試行が 4 回で終了する確率を求めよ。

(2)　この試行が 7 回以下で終了する確率を求めよ。

(3)　この試行が 5 回以上続き，かつ 4 回目が A の勝ちである確率を求めよ。

(4)　この試行がちょうど 8 回で終了する確率を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　勝者を順に書くと, AAAA または BBBB の場合だけより，その確率は,

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times 2=\frac{1}{8}$$

(2)　どちらが勝者でもよい場合を X と表す。

(i)　4 回で終了するとき　(1)より $\dfrac{1}{8}$

(ii)　5 回で終了するとき　BAAAA または ABBBB より，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times 2=\dfrac{1}{16}$

(iii)　6 回で終了するとき　XBAAAA または XABBBB より，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times 2=\dfrac{1}{16}$

(iv)　7 回で終了するとき　XXBAAAA または XXABBBB より，$\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{2}\right)^4\times 2=\dfrac{1}{16}$

(i)～(iv)より, 7 回以下で終了する確率は，$\dfrac{1}{8}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}+\dfrac{1}{16}=\dfrac{5}{16}$

(3)　4 回目が A の勝ち，この試行が 5 回以上続くのは，4 回目に A が勝つ場合の中から AAAA という 4 連勝の場合を除いたものなので，その確率は,

$$\frac{1}{2}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$$

(4)　8 回目に A が勝ち終了するのは，4 回目に B が勝ち試行が 5 回以上続き，その後 A が 4 連勝するときなので，その確率は, (3)より,

$$\frac{7}{16}\times\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{7}{256}$$

8 回目に B が勝ち終了するのも同じなので，ちょうど 8 回で終了する確率は,

$$\frac{7}{256}\times 2=\frac{7}{128}$$

コメント

(3)が(4)の誘導となっています。この点に気付くのがポイントです。

問　題

さいころを投げて出た目の数が k で割り切れるという事象を A_k , 2 個のさいころを同時に投げて出た 2 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を B_k , 3 個のさいころを同時に投げて出た 3 つの目の数の積が k で割り切れるという事象を C_k とする。

(1)　事象 A_2，A_3，A_4 の確率 $P(A_2)$，$P(A_3)$，$P(A_4)$ を，それぞれ求めよ。

(2)　事象 B_2，B_3，B_4 の確率 $P(B_2)$，$P(B_3)$，$P(B_4)$ を，それぞれ求めよ。

(3)　事象 C_2，C_3 の確率 $P(C_2)$，$P(C_3)$ を，それぞれ求めよ。　[2001]

解答例

(1)　出た目の数が 2 で割り切れる確率は $P(A_2)=\frac{3}{6}=\frac{1}{2}$，3 で割り切れる確率は $P(A_3)=\frac{2}{6}=\frac{1}{3}$, 4 で割り切れる確率は $P(A_4)=\frac{1}{6}$ である。

(2)　出た 2 つの目の数の積が 2 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが偶数より，

$$P(B_2)=1-P(\overline{B_2})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^2=\frac{3}{4}$$

次に，積が 3 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが 3 の倍数より，

$$P(B_3)=1-P(\overline{B_3})=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^2=\frac{5}{9}$$

また，積が 4 で割り切れるのは，積が偶数という事象から，積が偶数であるが 4 の倍数でない事象，すなわち奇数と 2 または 6 の積という事象を除いた場合より，

$$P(B_4)=P(B_2)-P(B_2\cap\overline{B_4})=\frac{3}{4}-{}_2\mathrm{C}_1\frac{3}{6}\cdot\frac{2}{6}=\frac{5}{12}$$

(3)　出た 3 つの目の数の積が 2 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが偶数より，

$$P(C_2)=1-P(\overline{C_2})=1-\left(1-\frac{1}{2}\right)^3=\frac{7}{8}$$

次に，積が 3 で割り切れるのは，少なくとも 1 つが 3 の倍数より，

$$P(C_3)=1-P(\overline{C_3})=1-\left(1-\frac{1}{3}\right)^3=\frac{19}{27}$$

コメント

(2)の $P(B_4)$ 以外は，あまりにも簡単すぎて，裏があるのではないかと勘ぐってしまいます。

問　題

1 から 7 までの番号が 1 つずつ書いてある 7 枚のカードの中から, 1 枚ずつ 3 回抜き出す試行を考える。ただし, 抜き出したカードはもとに戻さないものとする。この試行において, 最後(3 回目)に抜き出したカードの番号が 1 回目および 2 回目に抜き出したカードの番号より大きければ, 最後に抜き出したカードの番号が得点として与えられ, それ以外の場合の得点は 0 とする。次の問いに答えよ。

(1) 最後に抜き出したカードの番号が 3 である確率 q, および得点が 3 である確率 p_3 を求めよ。

(2) 得点が k（$3\leqq k\leqq 7$）である確率 p_k を k の式で表せ。また, 得点が 0 である確率 p_0 を求めよ。

(3) 得点の期待値を求めよ。　[2000]

解答例

(1) 3 回目のカードの番号が 3 であるのは, 1 回目, 2 回目が 3 以外より,

$$q=\frac{{}_6\mathrm{P}_2\times 1}{{}_7\mathrm{P}_3}=\frac{1}{7}$$

得点が 3 となるのは, 1 回目, 2 回目が 2 以下で, 3 回目が 3 より,

$$p_3=\frac{{}_2\mathrm{P}_2\times 1}{{}_7\mathrm{P}_3}=\frac{1}{105}$$

(2) 得点が k（$3\leqq k\leqq 7$）となるのは, 1 回目, 2 回目が $k-1$ 以下で, 3 回目が k より,

$$p_k=\frac{{}_{k-1}\mathrm{P}_2\times 1}{{}_7\mathrm{P}_3}=\frac{(k-1)(k-2)}{210}$$

また, $p_0=1-\displaystyle\sum_{k=3}^{7}p_k=1-\frac{1}{210}\sum_{k=3}^{7}(k-1)(k-2)$

$$=1-\frac{1}{210}\cdot\frac{1}{3}\sum_{k=3}^{7}\left\{k(k-1)(k-2)-(k-1)(k-2)(k-3)\right\}$$

$$=1-\frac{1}{630}\cdot 7\cdot 6\cdot 5=\frac{2}{3}$$

(3) 得点の期待値 E は, $E=\displaystyle\sum_{k=3}^{7}k\,p_k=\frac{1}{210}\sum_{k=3}^{7}k(k-1)(k-2)$ となり, (2)と同様に,

$$E=\frac{1}{210}\cdot\frac{1}{4}\sum_{k=3}^{7}\left\{(k+1)k(k-1)(k-2)-k(k-1)(k-2)(k-3)\right\}$$

$$=\frac{1}{840}\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=2$$

コメント

(2)と(3)は, p_3 から p_7 までの値を羅列するのが面倒でしたので, 数列の和の公式を用いました。

問　題

AとBの2人が同時に1個ずつサイコロを振り，出た目を比較して，大きい目を出した方の得点は1，他方の得点は0，となる試行を考える。ただし，2つのサイコロの出た目が同じなら, A, Bのいずれの得点も0とする。

(1)　この試行を1回行うとき, Aの得点が1となる確率をp, Bの得点が1となる確率をq，いずれの得点も0となる確率をrとする。p, q, rを求めよ。

(2)　この試行を2回行うとき，Aの合計得点がBの合計得点より多くなる確率を求めよ。

(3)　この試行を3回行うとき，Aの合計得点がBの合計得点より1点多くなる確率を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　いずれも0点となるのは6通りより，その確率は$r=\dfrac{6}{36}=\dfrac{1}{6}$

また, Aの得点が1点となる場合とBの得点が1点となる場合は対等なので, $p=q$となる。

よって，$p=q=\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5}{12}$

(2)　(i)　Aが2点, Bが0点の場合

その確率は，$p^2=\left(\dfrac{5}{12}\right)^2=\dfrac{25}{12^2}$

(ii)　Aが1点, Bが0点の場合

その確率は，${}_2\mathrm{C}_1pr=2\cdot\dfrac{5}{12}\cdot\dfrac{1}{6}=\dfrac{20}{12^2}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{25}{12^2}+\dfrac{20}{12^2}=\dfrac{45}{12^2}=\dfrac{5}{16}$

(3)　(i)　Aが2点, Bが1点の場合

その確率は，${}_3\mathrm{C}_2p^2q=3\cdot\left(\dfrac{5}{12}\right)^2\cdot\dfrac{5}{12}=\dfrac{375}{12^3}$

(ii)　Aが1点, Bが0点の場合

その確率は，${}_3\mathrm{C}_1pr^2=3\cdot\dfrac{5}{12}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2=\dfrac{60}{12^3}$

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{375}{12^3}+\dfrac{60}{12^3}=\dfrac{435}{12^3}=\dfrac{145}{576}$

コメント

(2)，(3)とも丁寧に考えていけば，完答できる問題です。ケアレス・ミスだけが恐いよく見かける頻出題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

(2)　$p,\ q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　自然数 m, n に対して，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ と仮定すると，

$$2^{\frac{m}{n}}=3,\ \ 2^m=3^n \cdots\cdots\cdots①$$

すると，①は左辺が偶数，右辺が奇数となり成立しない。

したがって，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しない。

(2)　p, q を異なる自然数とし，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する。

ここで，$p>q$ としても一般性を失わないので，l を自然数として，

$$p\log_2 3-q\log_2 3=l,\ \ \log_2 3=\frac{l}{p-q}\cdots\cdots\cdots②$$

これは，(1)の結論に反するので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくない。

(3)　まず，$\log_2 8<\log_2 9$ より，$\log_2 2^3<\log_2 3^2$，$3<2\log_2 3$ となり，

$$1.5<\log_2 3\cdots\cdots\cdots③$$

また，$\log_2 243<\log_2 256$ より，$\log_2 3^5<\log_2 2^8$，$5\log_2 3<8$ となり，

$$\log_2 3<1.6\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\log_2 3$ の値の小数第 1 位は 5 である。

コメント

(1)と(2)はつながっているものの，(3)は独立の設問です。2 の累乗を 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …, 3 の累乗を 3, 9, 27, 81, 243, …と書き並べて，評価式を考えました。

問　題

以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1)　$x<y$ ならば $x^2<y^2$ である。

(2)　$\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$ である。

(3)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(4)　n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[2009]

解答例

(1)　命題「$x<y$ ならば $x^2<y^2$ 」は偽である。

反例は，$x=-1$，$y=0$

(2)　命題「$\log_2 x=\log_3 y$ ならば $x\leqq y$」は偽である。

反例は，$x=\dfrac{1}{2}$，$y=\dfrac{1}{3}$

(3)　命題「微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる」は偽である。

反例は，$f(x)=x^3$，$a=0$

(4)　命題「n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある」は真である。

証明は以下のようになる。

$1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ から，n，$n+1$ の一方は偶数，もう一方は奇数であり，$1+2+\cdots+n$ は奇数の約数をもつ。

$n\geqq 2$ から最小の奇数は 3 となり，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

コメント

命題の真偽の問題ですが，判定がすべて偽とはならないように配慮してあります。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c,\ d$ を正の整数とする。$(a+b\sqrt{2})^2=(c+d\sqrt{2})^2$ ならば，$a=c$，$b=d$ であることを示せ。ただし，$\sqrt{2}$ が無理数であることを用いてよい。

(2)　次の 2 つの数 $r,\ s$ はそれぞれ，$a,\ b$ を正の整数として，$(a+b\sqrt{2})^2$ と表すことができるか。表すことができれば，$a,\ b$ の値を求めよ。表すことができなければ，その理由を示せ。

$$r=967+384\sqrt{2}\ ,\quad s=2107+1470\sqrt{2}$$

[2003]

解答例

(1)　$(a+b\sqrt{2})^2=(c+d\sqrt{2})^2$ より，$a+b\sqrt{2}=\pm(c+d\sqrt{2})$

$a>0,\ b>0,\ c>0,\ d>0$ より，$a+b\sqrt{2}=c+d\sqrt{2}$，$a-c=-(b-d)\sqrt{2}$

ここで，$b-d\neq 0$ とすると，$-\dfrac{a-c}{b-d}=\sqrt{2}$ となり，左辺は有理数，右辺は無理数となり成立しない。よって，$b-d=0$，$a-c=0$ となる。

すなわち，$a=c$，$b=d$ である。

(2)　$(a+b\sqrt{2})^2=a^2+2b^2+2ab\sqrt{2}$ となるので，$r=967+384\sqrt{2}$ については，

$$a^2+2b^2=967\cdots\cdots\cdots①,\quad 2ab=384\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$ab=192=2^6\times3\cdots\cdots\cdots③$

ここで，①から $a^2=967-2b^2$ なので，a^2 は奇数，すなわち a は奇数となる。

すると，③から $(a,\ b)=(1,\ 192),\ (3,\ 64)$ となるが，いずれも①を満たさないので，r は $(a+b\sqrt{2})^2$ と表すことはできない。

次に，$s=2107+1470\sqrt{2}$ に対しては，

$$a^2+2b^2=2107\cdots\cdots\cdots④,\quad 2ab=1470\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より，$ab=735=3\times5\times7^2$ となるので，$a,\ b$ の少なくとも一方は 7 の倍数になる。また，④から $2107=7^2\times43$ なので，a が 7 の倍数のときは b も 7 の倍数，b が 7 の倍数のときは a も 7 の倍数となる。すなわち，$a,\ b$ はともに 7 の倍数である。

これより，$a',\ b'$ を整数として，$a=7a'$，$b=7b'$ とおくことができ，④⑤より，

$$a'^2+2b'^2=43\cdots\cdots⑥,\quad a'b'=15\cdots\cdots⑦$$

⑦より，$(a',\ b')=(1,\ 15),\ (3,\ 5),\ (5,\ 3),\ (15,\ 1)$ となるが，⑥を満たすのは $(a',\ b')=(5,\ 3)$ のみである。

よって，$(a,\ b)=(35,\ 21)$ となり，$s=(35+21\sqrt{2})^2$ と表せる。

コメント

あまり見かけない整数がらみの論証問題です。