1

解答解説のページへ

n を自然数, m を $2n$ 以下の自然数とする。1 から n までの自然数が 1 つずつ記されたカードが, それぞれの数に対して 2 枚ずつ, 合計 $2n$ 枚ある。この中から, m 枚のカードを無作為に選んだとき, それらに記された数がすべて異なる確率を $P_n(m)$ と表す。ただし, $P_n(1)=1$ とする。さらに, $E_n(m)=mP_n(m)$ とおく。このとき以下の各問いに答えよ。

(1) $P_3(2)$, $P_3(3)$, $P_3(4)$ を求めよ。

(2) $E_{10}(m)$ が最大となるような m を求めよ。

(3) 自然数 n に対し, $E_n(m)>E_n(m+1)$ を満たす自然数 m の最小値を $f(n)$ とするとき, $f(n)$ を n を用いて表せ。ただし, ガウス記号[ ]を用いてよい。ここで, 実数 x に対して, x を超えない最大の整数を $[x]$ と表す。

2

解答解説のページへ

実数 $a,\ b$ に対し，$f(x)=x^3-3ax+b$ とおく。$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とする。このとき以下の各問いに答えよ。

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)$ の極値を $a,\ b$ を用いて表せ。

(2)　$b\geqq 0$ のとき，M を $a,\ b$ を用いて表せ。

(3)　$a,\ b$ が実数全体を動くとき，M のとりうる値の範囲を求めよ。

3

解答解説のページへ

座標平面上で次のように媒介変数表示される曲線 C を考える。

$$x=|\cos t|\cos^3 t,\ \ y=|\sin t|\sin^3 t\quad (0\leqq t\leqq 2\pi)$$

このとき以下の各問いに答えよ。

(1) 次の条件(＊)を満たす第 1 象限内の定点 F の座標を求めよ。

(＊) 第 1 象限内で C 上にあるすべての点 P について, P から直線 $x+y=0$ に下ろした垂線を PH とするとき, つねに PF＝PH となる。

(2) 点 P が C 全体を動くとき, P と(1)の定点 F を結ぶ線分 PF が通過する領域を図示し, その面積を求めよ。

(3) (2)の領域を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。

1　問題のページへ

(1)　6 枚のカードから 2 枚を選び，記された数がすべて異なる確率 $P_3(2)$ は，

$$P_3(2)=\frac{{}_3\mathrm{C}_2\cdot 2^2}{{}_6\mathrm{C}_2}=\frac{4}{5}$$

次に，6 枚のカードから 3 枚を選び，記された数がすべて異なる確率 $P_3(3)$ は，

$$P_3(3)=\frac{{}_3\mathrm{C}_3\cdot 2^3}{{}_6\mathrm{C}_3}=\frac{2}{5}$$

また，6 枚のカードから 4 枚を選ぶと，記された数が少なくとも 1 つは同じになり，すべて異なるという場合はないので，その確率 $P_3(4)$ は $P_3(4)=0$ である。

(2)　20 枚のカードから m 枚を選ぶ場合について，(1)と同様に考えて，

(i)　$1\leqq m\leqq 10$ のとき　$P_{10}(m)=\dfrac{{}_{10}\mathrm{C}_m\cdot 2^m}{{}_{20}\mathrm{C}_m}=\dfrac{10!(20-m)!}{20!(10-m)!}\cdot 2^m$ より，

$$E_{10}(m)=mP_{10}(m)=\frac{10!(20-m)!m}{20!(10-m)!}\cdot 2^m$$

(ii)　$11\leqq m\leqq 20$ のとき　$P_{10}(m)=0$ より，$E_{10}(m)=mP_{10}(m)=0$

すると，$E_{10}(m)$ が最大になるのは(i)の場合となり，$1\leqq m\leqq 9$ に対して，

$$\frac{E_{10}(m+1)}{E_{10}(m)}=\frac{\dfrac{10!(19-m)!(m+1)}{20!(9-m)!}\cdot 2^{m+1}}{\dfrac{10!(20-m)!m}{20!(10-m)!}\cdot 2^m}=\frac{2(m+1)(10-m)}{m(20-m)}$$

さて，$\dfrac{E_{10}(m+1)}{E_{10}(m)}>1$ とおくと，$2(m+1)(10-m)>m(20-m)$ から，

$$m^2+2m-20<0,\ 1\leqq m<-1+\sqrt{21}$$

よって，$3<-1+\sqrt{21}<4$ から，$m\leqq 3$ のとき $E_{10}(m+1)>E_{10}(m)$，$m\geqq 4$ のとき $E_{10}(m+1)<E_{10}(m)$ となり，

$$E_{10}(1)<\cdots<E_{10}(3)<E_{10}(4)>E_{10}(5)>\cdots>E_{10}(10)>0$$

以上より，$m=4$ のとき $E_{10}(m)$ は最大となる。

(3)　$2n$ 枚のカードから m 枚を選ぶ場合について，(2)と同様に考えて，

(i)　$1\leqq m\leqq n$ のとき　$E_n(m)=\dfrac{n!(2n-m)!m}{(2n)!(n-m)!}\cdot 2^m$

(ii)　$n+1\leqq m\leqq 2n$ のとき　$E_n(m)=0$

ここで，$n\geqq 2$ のとき，$1\leqq m\leqq n-1$ に対して，$E_n(m)>E_n(m+1)$ とすると，

$$\frac{E_{10}(m+1)}{E_{10}(m)}=\frac{2(m+1)(n-m)}{m(2n-m)}<1$$

これより，$2(m+1)(n-m)<m(2n-m)$，$m^2+2m-2n>0$ となり，

$$m>-1+\sqrt{1+2n}$$

よって，$m\geqq\left[-1+\sqrt{1+2n}+1\right]=\left[\sqrt{1+2n}\right]$ である。

$n \geqq 3$ のとき，$1 \leqq [\sqrt{1+2n}] \leqq n-1$ を満たしていることから，m の最小値 $f(n)$ は,

$$f(n) = [\sqrt{1+2n}]$$

$n=2$ のとき，$E_2(1)=P_2(1)=1$，$E_2(2)=2P_2(2)=\dfrac{4}{3}$，$E_2(3)=E_2(4)=0$ より，$E_n(m) > E_n(m+1)$ を満たす m の最小値 $f(2)=2$ である。

さらに，$n=1$ のとき，$E_1(1)=P_1(1)=1$，$E_1(2)=0$ より，$f(1)=1$ である。

以上より，いずれの場合も，自然数 n に対し $f(n)=[\sqrt{1+2n}]$ となる。

［解 説］

確率の最大値を問う頻出の問題です。(3)は(2)の一般化したものですが，詰めの作業が面倒です。

2　　問題のページへ

(1)　$f(x)=x^3-3ax+b$ とおくと，$a>0$ のとき，

$$f'(x)=3x^2-3a=3(x^2-a)$$
$$=3(x+\sqrt{a})(x-\sqrt{a})$$

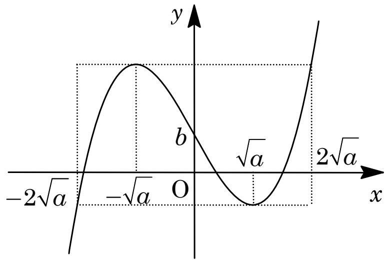
これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	$-\sqrt{a}$	$\cdots$	$\sqrt{a}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

よって，極大値 $f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$，極小値 $f(\sqrt{a})=-2a\sqrt{a}+b$ である。

(2)　まず，$f(x)+f(-x)=2b$ より，$y=f(x)$ のグラフは点 $(0,\ b)$ に関して対称である。そして，$-1\leqq x\leqq 1$ における $|f(x)|$ の最大値を M とすると，$b\geqq 0$ の場合では，

(i)　$a>0$ のとき　(1)より $y=f(x)$ は右図のようになり，



(i-i)　$\sqrt{a}>1$ $(a>1)$ のとき

$$M=|f(-1)|=f(-1)=-1+3a+b$$

(i-ii)　$\sqrt{a}\leqq 1<2\sqrt{a}$ $\left(\frac{1}{4}<a\leqq 1\right)$ のとき

$$M=\left|f(-\sqrt{a})\right|=f(-\sqrt{a})=2a\sqrt{a}+b$$

(i-iii)　$2\sqrt{a}\leqq 1$ $\left(0<a\leqq\frac{1}{4}\right)$ のとき

$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

(ii)　$a\leqq 0$ のとき　$f'(x)\geqq 0$ より $f(x)$ は単調増加し，

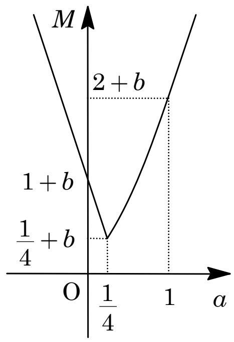
$$M=|f(1)|=f(1)=1-3a+b$$

(i)(ii)より，$|f(x)|$ の最大値 M は，

$$M=-1+3a+b\ (a>1),\quad M=2a\sqrt{a}+b\ \left(\frac{1}{4}<a\leqq 1\right)$$

$$M=1-3a+b\ \left(a\leqq\frac{1}{4}\right)$$

(3)　$b\geqq 0$ のとき，b の値を固定して，a, M の関係を図示すると，右図のようになり，b が $b\geqq 0$ で動くとき，$M\geqq\frac{1}{4}$ である。



また，$b<0$ のとき，(2)と同様にすると，

(i)　$a>1$ のとき　$M=|f(1)|=-f(1)=-1+3a-b$

(ii)　$\frac{1}{4}<a\leqq 1$ のとき　$M=\left|f(\sqrt{a})\right|=-f(\sqrt{a})=2a\sqrt{a}-b$

(iii)　$a\leqq\frac{1}{4}$ のとき　$M=|f(-1)|=-f(-1)=1-3a-b$

(i)～(iii)より，b が $b<0$ で動くとき，$M>\frac{1}{4}$ である。

以上より，a, b が実数全体を動くとき，M のとりうる範囲は $M\geqq\frac{1}{4}$ である。

［解 説］

よく見かける 3 次関数の増減に関する問題ですが，絶対値をとる設定のため，複雑になっています。なお，上のグラフに破線で長方形を書き込んでいますが，この知識が方針を立てるうえで，ポイントになります。

3

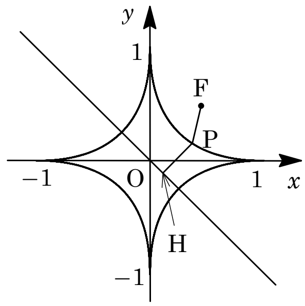
問題のページへ

(1) 曲線 C は，$x=\cos^4 t$，$y=\sin^4 t$ $\left(0\leqq t\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$

$x=-\cos^4 t$，$y=\sin^4 t$ $\left(\dfrac{\pi}{2}\leqq t\leqq\pi\right)$

$x=-\cos^4 t$，$y=-\sin^4 t$ $\left(\pi\leqq t\leqq\dfrac{3\pi}{2}\right)$

$x=\cos^4 t$，$y=-\sin^4 t$ $\left(\dfrac{3\pi}{2}\leqq t\leqq 2\pi\right)$



これより，C は x 軸および y 軸に関して対称となり，その概形は右図のようになる。

さて，定点 $\mathrm{F}(a,\ b)$ とし，C 上の任意の点 $\mathrm{P}(\cos^4 t,\ \sin^4 t)$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ から直線 $x+y=0$ に下ろした垂線を PH とするとき，$\mathrm{PF}=\mathrm{PH}$ から，

$$\sqrt{(\cos^4 t-a)^2+(\sin^4 t-b)^2}=\frac{|\cos^4 t+\sin^4 t|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$$2\{(\cos^4 t-a)^2+(\sin^4 t-b)^2\}=(\cos^4 t+\sin^4 t)^2$$

展開すると，$\cos^8 t-2\cos^4 t\sin^4 t+\sin^8 t-4a\cos^4 t-4b\sin^4 t+2a^2+2b^2=0$

$$(\cos^4 t-\sin^4 t)^2-4a\cos^4 t-4b\sin^4 t+2a^2+2b^2=0$$

$$(\cos^2 t-\sin^2 t)^2(\cos^2 t+\sin^2 t)^2-4a\cos^4 t-4b\sin^4 t+2a^2+2b^2=0$$

$$(2\cos^2 t-1)^2-4a\cos^4 t-4b(1-\cos^2 t)^2+2a^2+2b^2=0$$

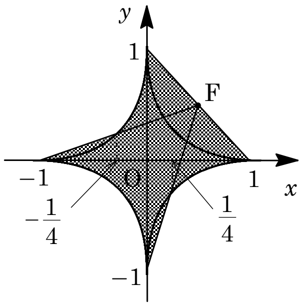
まとめると，$4(1-a-b)\cos^4 t+4(2b-1)\cos^2 t+2a^2+2b^2-4b+1=0$

すると，$0<t<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす任意の t に対して成立する条件は，

$$1-a-b=0,\ 2b-1=0,\ 2a^2+2b^2-4b+1=0$$

したがって，$a=b=\dfrac{1}{2}$ となり，定点 $\mathrm{F}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

(2) 点 P が C 全体を動くとき，線分 PF が通過する領域を図示すると，右図の網点部となる。



そして，この面積を S とおき，そして，第 1 象限内，第 2 象限内，第 3 象限内，第 4 象限内の部分の面積をそれぞれ S_1，S_2，S_3，S_4 とする。

さて，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ において，$x=\cos^4 t$，$y=\sin^4 t$ から，$\sqrt{x}+\sqrt{y}=1$ となり，

$$y=(1-\sqrt{x})^2=1-2\sqrt{x}+x$$

まず，$S_1=\dfrac{1}{2}\cdot 1^2=\dfrac{1}{2}$ となり，対称性から，

$$S_3=\int_0^1(1-2\sqrt{x}+x)\,dx=\left[x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=1-\frac{4}{3}+\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$$

$$S_2=\frac{1}{2}\Big(-\frac{1}{4}+1\Big)\cdot\frac{1}{4}+\int_0^{\frac{1}{4}}(1-2\sqrt{x}+x)\,dx=\frac{3}{32}+\Big[\,x-\frac{4}{3}x^{\frac{3}{2}}+\frac{x^2}{2}\,\Big]_0^{\frac{1}{4}}$$
$$=\frac{3}{32}+\frac{1}{4}-\frac{1}{6}+\frac{1}{32}=\frac{5}{24}$$

また，対称性から，S_4 は S_2 と等しくなるので，

$$S=S_1+S_2+S_3+S_4=\frac{1}{2}+\frac{5}{24}+\frac{1}{6}+\frac{5}{24}=\frac{13}{12}$$

(3)　求める立体は，(2)の領域の $y\geqq 0$ の部分を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体であり，その体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\pi\cdot 1^2\cdot 1+\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(1-\sqrt{x})^4\,dx+\frac{1}{3}\pi\cdot\Big(\frac{1}{4}\Big)^2\cdot\frac{3}{4}$$
$$=\frac{1}{3}\pi+\frac{1}{64}\pi+\pi\int_0^{\frac{1}{4}}(1-\sqrt{x})^4\,dx$$

ここで，$u=1-\sqrt{x}$ とおくと，$\dfrac{du}{dx}=-\dfrac{1}{2\sqrt{x}}=-\dfrac{1}{2(1-u)}$ から，

$$\int_0^{\frac{1}{4}}(1-\sqrt{x})^4\,dx=\int_1^{\frac{1}{2}}u^4\{-2(1-u)\}\,du=2\int_{\frac{1}{2}}^1(u^4-u^5)\,du$$
$$=2\Big[\,\frac{u^5}{5}-\frac{u^6}{6}\,\Big]_{\frac{1}{2}}^1=2\Big\{\frac{1}{5}-\frac{1}{6}-\Big(\frac{1}{2}\Big)^5\Big(\frac{1}{5}-\frac{1}{12}\Big)\Big\}$$
$$=\frac{1}{15}-\frac{7}{60}\Big(\frac{1}{2}\Big)^4=\frac{19}{320}$$

したがって，$V=\dfrac{1}{3}\pi+\dfrac{1}{64}\pi+\dfrac{19}{320}\pi=\dfrac{49}{120}\pi$ である。

［解 説］

パラメータ曲線の問題ですが，ものすごい計算量です。(1)の恒等式の処理では，数値を代入して必要条件を求めた後，十分性を確認するのが一般的ですが，実際に行うと痺れましたので，$\cos^2 t$ についての 2 次式に変形しました。なお，点 F という名称はヒントなのでしょうか。