《2018 入試対策》

東北大学

理系数学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された東北大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 ， 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2013 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 東北大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。

「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 a, b を実数とする。$y=|x^2-4|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点$(-2,\ 0)$を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような a, b の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点$(a,\ b)$の軌跡を ab 平面上に図示せよ。 [2017]

2 s, t を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。s, t が $s\geqq 0$, $t\geqq 0$ の範囲を動くとき，点$(x,\ y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

(2) $x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。s, t が実数全体を動くとき，点$(x,\ y)$の動く範囲を座標平面内に図示せよ。 [2012]

3 実数 a に対し，不等式 $y\leqq 2ax-a^2+2a+2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1\leqq a\leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点$(p,\ q)$の範囲を図示せよ。

(2) $-1\leqq a\leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点$(p,\ q)$の範囲を図示せよ。 [2011]

4 連立不等式 $x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$ の表す領域 D を図示せよ。また，曲線 $x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$ が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。 [2006]

5 曲線 $y=x^2$ の点$(a,\ a^2)$での接線を l とする。l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。 [1999]

6　a と b は±1，0でない実数とする。実数 x，y が，$\dfrac{\sin x}{\sin y}=a$，$\dfrac{\cos x}{\cos y}=b$ を満たしているとする。

(1)　$\tan^2 y$ を a, b を用いて表せ。

(2)　点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面に図示せよ。　[1998]

7　x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面に図示せよ。　[1998]

■ 図形と計量

1　鋭角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2)　$\angle \mathrm{ADE}=\angle \mathrm{ADF}$ であることを示せ。　[2016]

2　空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α，β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも O を通り l に垂直にとる。m，n 上にそれぞれ点 P, Q があり，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ であるとする。線分 PQ 上の動点 T について，$\mathrm{PT}=t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。

(2)　S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

[2016]

3　$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2015]

4 長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle\mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

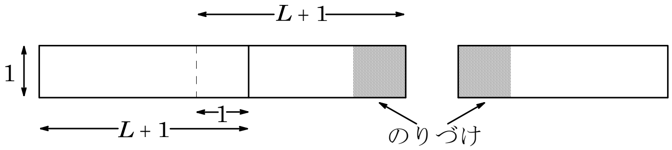
(1) y を x を用いて表せ。

(2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

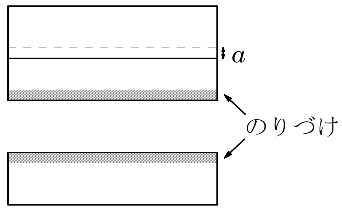
[2012]

5 L を 2 以上の自然数，a を $0<a<1$ を満たす実数とする。縦 1 cm，横 $(L+1)$ cm の長方形の紙を用いて，次のように長方形 A, B を作る。

長方形 A の作り方。L 枚の紙を横に並べて，順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして（隣り合う紙が横 1 cm 重なるように）はり合わせ，縦 1 cm の横長の長方形を作る。



長方形 B の作り方。L 枚の紙を縦に並べて，隣り合う紙が縦 a cm 重なるようにはり合わせて，横 $(L+1)$ cm の長方形を作る。



長方形 A, B の面積をそれぞれ $S_1\ \mathrm{cm}^2$ および $S_2\ \mathrm{cm}^2$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) S_1 と S_2 を求めよ。

(2) $L=2$ のとき，$S_1-1<S_2$ となる a の範囲を求めよ。

(3) $S_1-1<S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ。 [2009]

6 θ を $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし，空間の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $\triangle\mathrm{ABC}$ の重心を G とするとき，AG と OG をそれぞれ θ で表せ。

(2) θ を動かしたとき，O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

[2008]

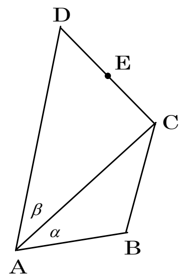
7 ∠C を直角とする直角三角形 ABC に対して，∠A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。∠A $=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta$ を求めよ。

(2)　$\theta<\dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2}=1.414\cdots$，$\sqrt{3}=1.732\cdots$ を用いてもよい。

[2007]

8 すべての内角が $180°$ より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $AB=BC=r$，$AD=2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形 $\triangle ABC$，$\triangle ACE$，$\triangle ADE$ の面積はすべて等しいとする。$\alpha=\angle BAC$，$\beta=\angle CAD$ とおく。

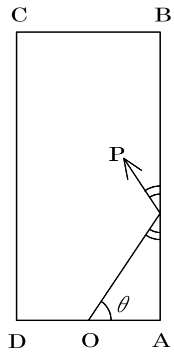


(1)　$\alpha=\beta$ を示せ。

(2)　$\cos\angle DAB=\dfrac{3}{5}$ であるとするとき，$\sin\angle CAE$ の値を求めよ。

[2005]

9 長方形 ABCD 内を減速しながら進む点を考える。時刻 $t=0$ に初速 v で発射させた点 P は，時刻 t では速さ ve^{-t} で直進するとする。ただし，P がいずれかの辺に来たときは等しい入射角と反射角で反射するとし，頂点 A, B, C, D のいずれかに来たときはそこで停止するとする。AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし，出発点は AD の中点 O とする。初速を $v=14$ としたとき，最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか。OA との角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ として $\tan\theta$ を求めよ。またそのとき，P が頂点に到達する時刻を求めよ。



[1999]

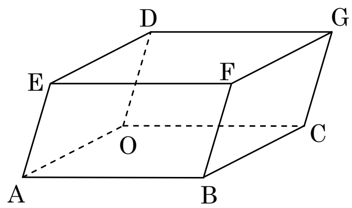
■ ベクトル

1 s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。 [2017]

2 右図のような平行六面体 OABC‐DEFG が xyz 空間内にあり，O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(2,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 3,\ 0)$，D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を $\mathrm{MN}=4$ かつ $\mathrm{DN}<\mathrm{GN}$ を満たすように定める。



(1) N の座標を求めよ。

(2) 3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3) 3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC‐DEFG の切り口の面積を求めよ。 [2014]

3 四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。 [2013]

4 平面上に長さ 3 の線分 OA を考え，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を $\vec{a}$ で表す。$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル $\vec{b}$ を $\vec{a}$ と角 θ $(0<\theta<\pi)$ をなすようにとり，点 B を $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ で定める。線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき，どのように θ をとっても $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。 [2011]

5　四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1)　等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2)　点 Q が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3)　点 R が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4)　(2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。　[2010]

6　図 1 のような $\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DA}=\mathrm{AC}=1$ である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha=\angle\mathrm{BCD}$）とし，$0°<\alpha<120°$ とする。以下の問いに答えよ。

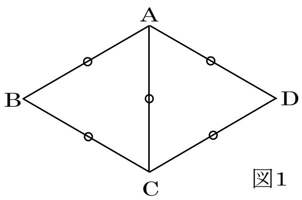


図1

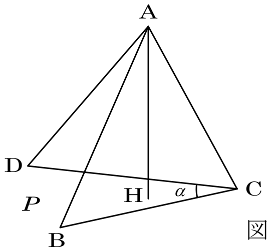


図2

(1)　図 2 において，A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と α とで表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{AH}}$ の長さを α を用いて表せ。

(3)　H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。　[2006]

7　$0<t<\dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i)　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$　　(ii)　$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t:1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ。　[2005]

8　平面ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は, $|\vec{a}|^2=1$, $|\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$を満たすとする。

(1)　k, l を整数とする。$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。

(2)　$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=0$となる整数の組$(k,\ l)$をすべて求めよ。

(3)　整数の組$(k,\ l)$を条件$(k,\ l)\neq(0,\ 0)$のもとで動かすとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$の最小値を与える$(k,\ l)$をすべて求めよ。　[2004]

9　四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=l\overrightarrow{\mathrm{AB}}+m\overrightarrow{\mathrm{AC}}+n\overrightarrow{\mathrm{AD}}$で与えられる点 P に対し$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|$が成り立つならば, $l=m=n$であることを示せ。また, このときの$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|$を l を用いて表せ。

(2)　A, B, C, D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を, 四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき, $\cos\angle\mathrm{PBQ}$の値を求めよ。

[2002]

10　四面体 OABC において, $\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし, $\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$, $\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$, $\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$とおく。

(1)　線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

(2)　$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$を$\vec{p}$, $\vec{q}$, $\vec{r}$を用いて表せ。

(3)　直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$となる空間の点とするとき, 四面体 XABC の体積および四面体 OABC の体積を$|\vec{p}|$, $|\vec{q}|$, $|\vec{r}|$を用いて表せ。　[2001]

11　空間の点$(10,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 9 の球面をS_1とし, 点$(0,\ 10,\ 0)$を中心とする半径 8 の球面をS_2とする。S_1とS_2に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル$(a,\ b,\ c)$ $(c\geqq 0)$をすべて求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1 以下の問いに答えよ。

(1) 6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2 + 7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2) 等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組$(p,\ q)$をすべて求めよ。　[2016]

2 $k \geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，$n = m + (m+1) + \cdots + (m+k-1)$ が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは，次の条件(A), (B)の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k} - \dfrac{k}{2} + \dfrac{1}{2}$ は整数である。　(B) $2n > k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n = 2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする。$n = p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k \geqq 2$ の個数を求めよ。　[2015]

3 n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2 - 6x - 12$ で割った余りを $a_n x + b_n$ とする。

(1) a_2，b_2 を求めよ。

(2) a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3) 各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。　[2007]

4 数列$\{\alpha_n\}$を初項$\dfrac{4}{5}$，公比 2 の等比数列，数列$\{\beta_n\}$を初項$\dfrac{1}{5}$，公比$-\dfrac{1}{2}$の等比数列とする。

(1) $n = 1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$ のとき，α_n の小数部分を求めよ。

(2) $a_n = \alpha_n + \beta_n$ の小数部分 b_n を求めよ。

(3) 数列$\{b_n\}$の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ。　[2000]

■ 確率

1　A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2)　A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。　[2017]

2　a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。　[2017]

3　サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2)　a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。　[2016]

4　サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ ……(＊)を考える。

(1)　方程式(＊)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2)　方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3)　方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。　[2015]

5　1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。　[2014]

6　A, B の 2 人が，サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし，その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし，以下の問いに答えよ。

(1)　A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2)　B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3)　B がちょうど 3 回投げて，その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

7　袋 A, 袋 B のそれぞれに，1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする。$X=1$，$X=2$，$X=3$，$X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また，X の期待値を求めよ。

(2)　$N=3$ とし，n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，そのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。　[2012]

8 先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり，玉の入った箱がある。箱の中には最初，赤玉 3 個，白玉 7 個，全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって，1 の目が出たら A が，2 または 3 の目が出たら B が，その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず，取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし，サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし，また，箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) 2 回目の操作が終わったとき，A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(2) 2 回目の操作が終わったとき，B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(3) 3 回目の操作で，C が赤玉を取り出す確率を求めよ。 [2011]

9 1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を一の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を十の位とする。このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ。

(1) X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。

(2) X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。

(3) X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。 [2010]

10 袋の中に青玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ。

(1) 4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2) 8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3) 赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。

(4) 4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

[2009]

11 点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について, $a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し, $a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。　[2008]

12 1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し，箱に戻すという操作を繰り返す。ただし, k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に, k を得点として終了する。

(1)　$2\leqq k\leqq n+1$ を満たす自然数 k について，得点が k となる確率を求めよ。

(2)　得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ および極限値 $\lim\limits_{n\to\infty}f(n)$ を求めよ。　[2005]

13 手作りのサイコロがあり，1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，p_6 で表す。ここで

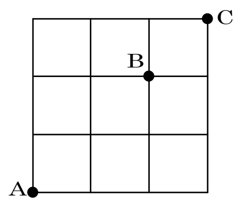
$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1,\ p_1=p_6,\ p_2=p_5,\ p_3=p_4$$

が成り立つとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

(1)　$Q(5)$ を p_1，p_2 で表せ。

(2)　$p_3=\dfrac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。$Q(7)$ がとり得る最大の値は何か。また，そのときの p_1，p_2 を求めよ。　[2004]

14　右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。



n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。 [2002]

15　数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2, 3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。 [2000]

16　T, O, H, O, K, U, A, O, B, A の 10 文字をでたらめに 1 列に並べる。

(1)　どの 2 つの O も隣り合わない確率を求めよ。

(2)　どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ。 [1999]

17　ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている。平面に接する面（底面）の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う。ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする。この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け。

(3)　b_n を n の式で表し，$\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。 [1998]

■ 論証

1 $f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。$y<x<a$ を満たすすべての $x,\ y$ に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。 [2010]

2 $a,\ b,\ c$ を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1) $a+b=c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。

(2) $a+b\geqq c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つことを示せ。 [2009]

■ 複素数

1 α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(＊)を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき, (＊)を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。 [2017]

2 多項式 $P(x)$ を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$ により定める。ただし，i は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1) $P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数 a_0，…，a_7 をすべて求めよ。

(2) $0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3) (1)で求めた a_1，a_3，a_5，a_7 を用いて，多項式 $Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$ が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$ の値を求めよ。 [2016]

3　k を実数とする。3 次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする。

(1)　$g(x)$ を k を用いて表せ。

(2)　2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

[2013]

4　a を実数, z を 0 でない複素数とする。z と共役な複素数を $\bar{z}$ で表す。

(1)　次を満たす z を求めよ。$z+1-\dfrac{a}{z}=0$

(2)　次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。$\bar{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$

(3)　次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。$z(\bar{z})^2+\bar{z}-\dfrac{a}{z}=0$　[2011]

5　多項式 $f(x)$ について，次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

(i)　$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$　(ii)　$f(1-x)=f(x)$　(iii)　$f(1)=1$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　条件(i)を満たす多項式 $f(x)$ の次数は 4 以下であることを示せ。

(2)　条件(i), (ii), (iii)をすべて満たす多項式 $f(x)$ を求めよ。　[2008]

6　z を絶対値が 1 の複素数とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　z^3-z の実部が 0 となるような z をすべて求めよ。

(2)　z^5+z の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ。

(3)　n を自然数とする。z^n+1 の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。　[2004]

7　複素数平面上で，相異なる 3 点 1，α，α^2 は実軸上に中心をもつ同一円周上にある。このような α の存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。さらに，この円の半径を $|\alpha|$ を用いて表せ。　[2003]

8　a，b は実数であり，方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。このとき a，b を求めよ。また，このときの方程式の他の解も求めよ。　[2002]

9　複素数 $z=x+yi$, $w=u+vi$ （ただし, x, y, u, v は実数）は $|z|=|w|=1$ を満たし, $yv<0$ とする。$|1+z+w|<1$ となるための必要十分条件を x と u を用いて表せ。

[2001]

10　α, β は $|\alpha+\beta|<2$ を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2x^2-\left(|\alpha|+|\beta|\right)x+1$$

の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を求めよ。　[2000]

■ 曲線

1　xy 平面において, 次の式が表す曲線を C とする。$x^2+4y^2=1$, $x>0$, $y>0$

P を C 上の点とする。P で C に接する直線を l とし, P を通り l と垂直な直線を m として, x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。P が C 上の点全体を動くとき, S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。　[2015]

2　$a>b>0$ とし, xy 平面の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の第 1 象限の部分を E とする。ただし, 第 1 象限には x 軸と y 軸は含まれない。E 上の点 P における E の接線と法線が y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ h と k とし, $L=h-k$ とおく。点 P が E 上を動くとき, L の最小値が存在するための a と b についての条件と, そのときの L の最小値を求めよ。　[2002]

3　(1)　点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ と円 $C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$ $(r>0)$ との距離 d とは, P と C 上の点 $(x,\ y)$ との距離の最小値をいう。P が C の外部にある場合と内部にある場合に分けて, d を表す式を求めよ。

(2)　2 つの円 $C_1:(x+4)^2+y^2=81$ と $C_2:(x-4)^2+y^2=49$ から等距離にある点 P の軌跡の方程式を求めよ。　[1998]

■ 極限

1　$a>0$ を実数とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^{a}}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\ \ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。　[2015]

2　数列 $\{a_n\}$，$\{b_n\}$ を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta,\ \ b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta d\theta\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，e は自然対数の底とする。

(1)　一般項 b_n を求めよ。

(2)　すべての n について，$b_n\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。　[2013]

3　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを示せ。

(4)　$0<r<1$ を満たすある実数 r に対して，不等式 $\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2012]

4 n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle OA_1A_2$ は $\angle OA_2A_1 = 90^\circ$，$OA_1 = 1$，$A_1A_2 = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。A_2 から OA_1 へ垂線を下ろし，交点を A_3 とする。A_3 から OA_2 へ垂線を下ろし，交点を A_4 とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし，交点を A_{k+1} として，順番に A_5，A_6，…を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{A_kA_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) $k = 1,\ 2,\ \cdots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2) $S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。 [2008]

5 $a > 0$ に対し $I_0(a) = \displaystyle\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx$，$I_n(a) = \displaystyle\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。

(1) $\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a) = \dfrac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}} - \dfrac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$ $(n = 1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(3) 自然数 n に対して，$\displaystyle\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。 [2007]

6 関数 $f(x) = 4x - x^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1 = c,\quad a_{n+1} = \sqrt{f(a_n)}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与える。ただし，c は $0 < c < 2$ を満たす定数である。

(1) $a_n < 2$，$a_n < a_{n+1}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(2) $2 - a_{n+1} < \dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。 [2003]

7 (1) n を正の整数とする。$t \geqq 0$ のとき，不等式 $e^t > \dfrac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

(2) 極限 $I_m = \displaystyle\lim_{t\to\infty}\int_0^t x^m e^{-x}dx$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。 [2001]

8　実数 $a,\ b,\ c,\ d$ が $ad-bc\neq 0$ を満たすとき，関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　$f^{-1}(x)=f(x)$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

(3)　$f^{-1}(x)=f(f(x))$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

[2000]

9　正 n 角形 P_n を次のようにして定義する。

(i)　P_3 は面積が 1 の正三角形である。

(ii)　P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする。P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である。

$n=3,\ 4,\ 5,\cdots$ について P_n の面積を a_n としたとき次の各問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 4$ について $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ を n を用いて表せ。

(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)$ を求めよ。　[1999]

■ 微分法

1　xy 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式 $x^3-x>y>-x$ の表す領域を D とする。また，P を D の点とする。

(1)　P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2)　P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。　[2015]

2　$x=t+\dfrac{1}{3t}\ \left(0<t\leqq\dfrac{1}{2}\right)$ とする。

(1)　x のとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　x の方程式 $x^2+ax+b=0$ が(1)の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点 $(a,\ b)$ の存在範囲を図示せよ。　[2014]

3 以下の問いに答えよ。

(1) n を自然数, a を正の定数として,

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく。$x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2) n が 2 以上の自然数のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$ [2014]

4 a, b を正の実数とする。曲線 $C: y=x^3-a^2x+a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき, $\angle\mathrm{APB}$ が 90° より小さくなるための a と b の条件を求めよ。 [2010]

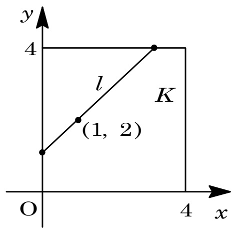
5 実数 a に対して, x の方程式 $|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0$ が, 相異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。 [2009]

6 自然数 n に対し, 方程式 $\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}=0$ を考える。ただし, 対数は自然対数であり, e はその底とする。

(1) 上の方程式は $x\geqq 1$ にただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2) (1)の解を x_n とする。このとき, $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=1$ を示せ。 [2007]

7 xy 平面上に 4 点 $(0,\ 0)$, $(4,\ 0)$, $(4,\ 4)$, $(0,\ 4)$ を頂点とする正方形 K を考える。点 $(1,\ 2)$ を通る各直線に対して, その K に含まれる部分を l とおく。



(1) l の長さの最大値と, それを与える直線の方程式を求めよ。

(2) l の長さの最小値を求めよ。 [2007]

8　$x>0$ において，関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし，以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(2)$ を求め, $x>2$ のとき $f'(x)<1$ であることを示せ。

(2)　k が自然数のとき，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$を求めよ。

(3)　$f'(x)=1$ となる x を値の大きいものから順に，x_1，x_2，x_3，…とおく。$n\geqq 2$ である自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ を示せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ を求めよ。　[2006]

9　a を $0<a<1$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ とする。

(1)　$f(x)$ が $0\leqq x\leqq\pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。　[2005]

10　2 つの関数を

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\quad y=-4\cos 3\theta+\cos 2\theta-\sqrt{3}\sin 2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

(1)　$\cos 3\theta$ を t の関数で表せ。

(2)　y を t の関数で表せ。

(3)　$0°\leqq\theta\leqq 180°$ のとき, y の最大値，最小値とそのときの θ の値を求めよ。[2003]

11　対数は自然対数であり，e はその底とする。関数 $f(x)=(x+1)\log\dfrac{x+1}{x}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x>0$ で単調減少関数であることを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)=2$ を満たす x が $\dfrac{1}{e^2}<x<1$ の範囲に存在することを示せ。　[2003]

12　関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ $(x\neq 0)$ について，$a=\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x)$，$b=\displaystyle\lim_{x\to 0} f'(x)$ とおく。

(1)　a, b の値を求めよ。

(2)　$-\dfrac{1}{2}\leqq x$ の範囲で，3 つの関数 $\sqrt{1+2x}$，$1+ax$，$1+ax+bx^2$ の大小関係を調べ，これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け。　[2001]

13 $0<t<1$ として，頂点が $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ である三角形と，頂点が O，$\mathrm{P}(1-t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(1-t,\ 1-t)$，$\mathrm{R}(0,\ 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき，S を t の式で表せ。また，S を最大にする t の値を求めよ。 [2000]

14 $x>0$ において関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$ で定める。対数は自然対数である。

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ。

(2) $f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(3) 正の実数 p, q について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ。 [1999]

■ 積分法

1 a, b, c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $I(a,\ b)$ を求めよ。

(2) $J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3) 次の極限を求めよ。 $\displaystyle\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ [2017]

2 関数 $f(x)=\displaystyle\int_0^{\pi}\left|\sin(t-x)-\sin 2t\right|dt$ の区間 $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ。 [2016]

3 整数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする。

(1) I_0 を求めよ。

(2) n を正の整数とするとき，I_n-I_{n-1} を求めよ。

(3) I_5 を求めよ。 [2014]

4　$0\leqq x\leqq\pi$ に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$ と定める。$f(x)$ の $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ。　[2012]

5　a を $0\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 θ に対して $\sin\theta$ と $\sin(\theta-2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく。すなわち，

$$\sin\theta\geqq\sin(\theta-2a) \text{ のとき } f(\theta)=\sin\theta$$
$$\sin\theta<\sin(\theta-2a) \text{ のとき } f(\theta)=\sin(\theta-2a)$$

となる関数 $f(\theta)$ を考える。このとき定積分 $I=\displaystyle\int_0^{\pi}f(\theta)d\theta$ を求めよ。

(2)　a を $0\leqq a\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき, (1)の I の最大値を求めよ。　[2009]

6　n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，…，x_n と等比数列 y_0，y_1，…，y_n が，$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$，$1=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=2$ を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$ を次で定める。

$$P(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$
$$R(n)=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},\quad S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004]

7　$f_1(x)$ は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする。$f_2(x)$, $f_3(x)$, …をつぎのように順次定義する。$n=2,\ 3,\ \cdots$ に対し，$F_{n-1}(x)=\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)dt$ とおいて，$f_n(x)=\displaystyle\int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)dt$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq2$ のとき，すべての x に対して $f_n(x)\geqq0$ であることを示せ。

(2)　$n\geqq3$ のとき，すべての $x\geqq0$ に対して $f_n{}'(x)\geqq0$ であることを示せ。

(3)　$f_4{}'(1)=0$ のとき，すべての $0\leqq x\leqq1$ に対して $f_1(x)=0$ であることを示せ。

[2002]

8 (1) $f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ。

(2) (1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$

[1998]

■ 積分の応用

1 半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と $45°$ の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1) 直径 AB と直交し，O との距離が t $(0\leqq t\leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

(2) V の体積を求めよ。 [2013]

2 a を実数とする。円 C は点 $(a,\ -a)$ で直線 $y=-x$ を接線にもち，点 $(0,\ 1)$ を通るものとする。C の中心を $\mathrm{P}(X,\ Y)$ として，以下の問いに答えよ。

(1) X, Y を a を用いて表せ。

(2) a が動くときの点 P の軌跡と直線 $y=1$ で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2011]

3 $0<t<3$ のとき，連立不等式 $0\leqq y\leqq \sin x$，$0\leqq x\leqq t-y$ の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。 [2010]

4 $k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C:x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) k を α で表せ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。 [2008]

5 xyz 空間において，点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。　[2007]

6 連立不等式 $1\leqq x\leqq 2,\ y\leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また，a を定数とし，不等式 $y\geqq x^2-3ax+2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

(2) (1)の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。　[2006]

7 a を負の実数とし，放物線 $C_1 : y=ax^2+bx+c$ を考える。C_1 が曲線

$$C_2 : y=\begin{cases} x^2-x+\dfrac{3}{4} & (x>0\text{のとき}) \\ x^2+2x+\dfrac{3}{4} & (x\leqq 0\text{のとき}) \end{cases}$$

と 2 点で接するとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を a で表せ。　[2005]

8 平面上の 3 つの曲線 C_1，C_2，C_3 を次で定める。

$$C_1 : x=\frac{15}{2}t^4,\ \ y=-3t^5+5t^3\ \ \left(0\leqq t\leqq\sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : x=\frac{125}{6}\cos^3\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right),\ \ y=\frac{125}{6}\sin^3\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\leqq t\leqq\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}\right)$$

$$C_3 : x=0,\ \ y=\frac{125(t-2)}{6\left(\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)}\ \ \left(\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}\leqq t\leqq 2\right)$$

(1) C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2) 原点 O を出発し，C_1，C_2，C_3 を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ。

[2004]

9 xyz 空間内に 2 点$\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$，$\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$を考える。$u$ が 0 から 1 まで動くとき，線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点$(u,\ 0,\ 0)$ $(0\leqq u\leqq 1)$と線分 PQ の距離を求めよ。

(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。　[2003]

10　xy 平面上に, 媒介変数 t により表示された曲線 $C: x = e^t - e^{-t}$, $y = e^{3t} + e^{-3t}$ がある。

(1)　x の関数 y の増減と凹凸を調べ, 曲線 C の概形を描け。

(2)　曲線 C, x 軸, 2 直線 $x = \pm 1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2002]

11　a, b を正の数とする。2 つの曲線 $y = x^3 + bx^2$, $y = ax^2 + abx$ によって囲まれる 2 つの部分の面積の和を S とする。

(1)　S を a と b で表せ。

(2)　$a + b = 1$ のとき, S を最小にする a, b の値と, そのときの S の値を求めよ。

[2001]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

$a,\ b$ を実数とする。$y=\left|x^2-4\right|$ で表される曲線を C とし，$y=ax+b$ で表される直線を l とする。

(1) l が点 $(-2,\ 0)$ を通り，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような $a,\ b$ の条件を求めよ。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつような点 $(a,\ b)$ の軌跡を ab 平面上に図示せよ。　[2017]

解答例

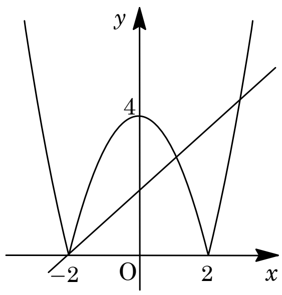
(1) $C: y=\left|x^2-4\right|$ に対して，

$$y=x^2-4\quad (x\leqq -2,\ 2\leqq x)\cdots\cdots\cdots ①$$

$$y=-x^2+4\quad (-2<x<2)\cdots\cdots\cdots ②$$

また，$l: y=ax+b\cdots\cdots ③$ が点 $(-2,\ 0)$ を通ることより，

$$-2a+b=0,\ b=2a$$



ここで，②より $y'=-2x$ となり，$x=-2$ のとき $y'=4$ から，l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ l の傾き a の範囲は，$0<a<4$ である。

よって，求める a, b の条件は，$b=2a\ (0<a<4)$ である。

(2) l と C がちょうど 3 つの共有点をもつ条件は，l と x 軸の交点に注目して，

(i) l が点 $(-2,\ 0)$ を通るとき　(1)より，$b=2a\ (0<a<4)$

(ii) l が点 $(2,\ 0)$ を通るとき　(1)と同様に，$2a+b=0$ より $b=-2a$

そして，②より $x=2$ のとき $y'=-4$ から，l の傾き a の範囲が $-4<a<0$ となり，まとめると，$b=-2a\ (-4<a<0)$ である。

(iii) l が点 $(-2,\ 0)$，$(2,\ 0)$ 以外の点を通るとき

x 軸との交点が $-2<x<2$ のときは，l と C が 3 つの共有点をもつ場合はない。

x 軸との交点が $x<-2,\ 2<x$ のとき，および x 軸と交点をもたないときは，l と C が $-2<x<2$ で接するときである。

②③を連立して，$-x^2+4=ax+b$ より，$x^2+ax+b-4=0\cdots\cdots\cdots ④$

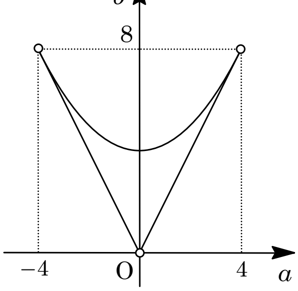
④が $-2<x<2$ に重解をもつことより，

$$D=a^2-4(b-4)=0,\ -2<-\frac{a}{2}<2$$

よって，$b=\dfrac{a^2}{4}+4\ (-4<a<4)$ となる。

このとき，①と③は 2 交点をもつ。

(i)～(iii)より，点 $(a,\ b)$ の軌跡は右図の実線部になる。



ただし，原点と 2 点$(\pm 4,\ 8)$は含まない。

コメント

絶対値付き関数のグラフと直線の位置関係に関する問題です。まず図を書き，それをもとに計算をしています。

問　題

$s,\ t$ を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$x=s+t+1$，$y=s-t-1$ とおく。$s,\ t$ が $s\geqq 0,\ t\geqq 0$ の範囲を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。

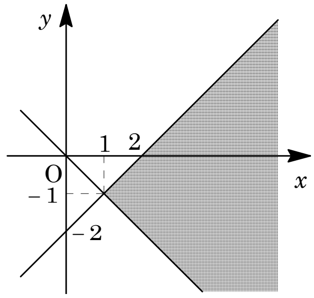
(2)　$x=st+s-t+1$，$y=s+t-1$ とおく。$s,\ t$ が実数全体を動くとき，点 $(x,\ y)$ の動く範囲を座標平面内に図示せよ。　[2012]

解答例

(1)　条件から，$x=s+t+1$……①，$y=s-t-1$……②に対して，①②より，

$$2s=x+y,\ s=\frac{1}{2}(x+y)\ \cdots\cdots\cdots③$$

$$2t+2=x-y,\ t=\frac{1}{2}(x-y-2)\ \cdots\cdots\cdots④$$



$s\geqq 0,\ t\geqq 0$ から，③④より，

$$x+y\geqq 0,\ x-y-2\geqq 0$$

すると，点 $(x,\ y)$ の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

(2)　条件から，$x=st+s-t+1$……⑤，$y=s+t-1$……⑥に対して，

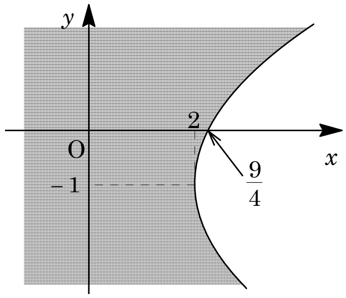
⑤より，$x=(s-1)(t+1)+2$，$(s-1)(t+1)=x-2$ ………⑦

⑥より，$y=(s-1)+(t+1)-1$，$(s-1)+(t+1)=y+1$…………⑧

⑦⑧から，$s-1$，$t+1$ は u についての 2 次方程式 $u^2-(y+1)u+x-2=0$ の 2 つの解であり，これらが実数であることより，

$$D=(y+1)^2-4(x-2)\geqq 0$$

$$(y+1)^2\geqq 4(x-2)$$



$s,\ t$ が実数全体を動くとき，$s-1$，$t+1$ も実数全体を動くので，点 $(x,\ y)$ の動く領域は右図の網点部となる。なお，境界線は領域に含む。

コメント

(2)は，1 文字を消去して実数解条件からも導けますが，少し式計算をして，対称式を持ち出しました。

問　題

実数 a に対し，不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す座標平面上の領域を $D(a)$ とおく。

(1) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。

(2) $-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し $D(a)$ の点となるような点 $(p,\ q)$ の範囲を図示せよ。　[2011]

解答例

(1) 不等式 $y \leqq 2ax - a^2 + 2a + 2$ の表す領域に，点 $(p,\ q)$ が存在しているので，

$$q \leqq 2ap - a^2 + 2a + 2,\ \ a^2 - 2(p+1)a + q - 2 \leqq 0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

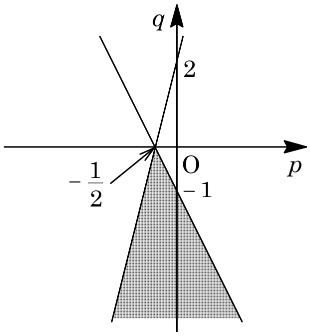
ここで，$f(a) = a^2 - 2(p+1)a + q - 2$ とおくと，$(*)$は $f(a) \leqq 0$ となる。

さて，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすすべての a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leqq 0$$

$$f(2) = -4p + q - 2 \leqq 0$$

よって，点 $(p,\ q)$ の範囲を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2) (1)と同様に，$-1 \leqq a \leqq 2$ を満たすいずれかの a に対し，$f(a) \leqq 0$ である条件は，

(i) $p + 1 \leqq -1\ (p \leqq -2)$ のとき

$$f(-1) = 2p + q + 1 \leqq 0$$

(ii) $-1 \leqq p + 1 \leqq 2\ (-2 \leqq p \leqq 1)$ のとき

$f(a) = 0$ が実数解をもつことより，

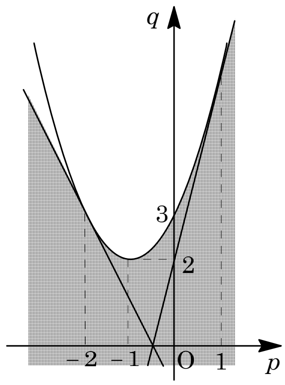
$$D/4 = (p+1)^2 - q + 2 \geqq 0,\ \ q \leqq (p+1)^2 + 2$$

(iii) $p + 1 \geqq 2\ (p \geqq 1)$ のとき

$$f(2) = -4p + q - 2 \leqq 0$$

(i)～(ii)より，点 $(p,\ q)$ の範囲は右図の網点部となる。

ただし，境界は領域に含む。



コメント

2 次不等式と領域の融合問題です。基本的な内容ですが，時間はかかります。

問　題

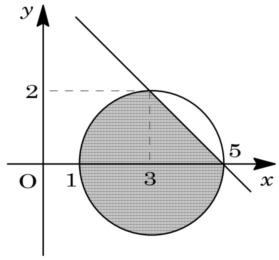
連立不等式$x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$の表す領域 D を図示せよ。また，曲線$x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$が D の点を通るような実数 a の最大値と最小値を求めよ。

[2006]

解答例

領域D：$x^2-6x+y^2+5\leqq 0$，$x+y\leqq 5$より，

$$(x-3)^2+y^2\leqq 4,\quad y\leqq -x+5$$

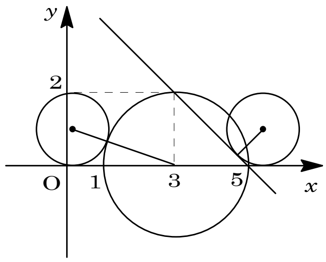


領域 D を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

また，曲線$x^2+y^2-2ax-2y+a^2=0$に対して，

$$(x-a)^2+(y-1)^2=1\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，方程式$(*)$は，中心$(a,\ 1)$，半径1の円を表す。



右図より，実数 a が最大となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線$x+y-5=0$に接するときなので，

$$\frac{|a+1-5|}{\sqrt{1^2+1^2}}=1,\quad |a-4|=\sqrt{2}$$

$a>4$より，aの最大値は，$a=4+\sqrt{2}$である。

また，実数 a が最小となるのは，円$(*)$が領域 D の境界線$(x-3)^2+y^2=4$に接するときなので，

$$\sqrt{(a-3)^2+1^2}=2+1,\quad (a-3)^2=8$$

$a<3$より，aの最小値は，$a=3-2\sqrt{2}$である。

コメント

領域と最大・最小を組み合わせた問題です。円と直線，円と円が接する条件の処理がポイントです。

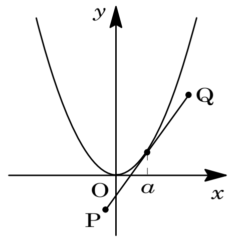
問　題

曲線 $y=x^2$ の点 $(a,\ a^2)$ での接線を l とする。l 上の点で x 座標が $a-1$ と $a+1$ のものをそれぞれ P および Q とする。a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき線分 PQ の動く範囲の面積を求めよ。 [1999]

解答例

$y=x^2$ より，$y'=2x$

点 $(a,\ a^2)$ での接線は，$y=2a(x-a)+a^2=2ax-a^2$



よって，線分 PQ は，$y=2ax-a^2\ (a-1\leqq x\leqq a+1)$ ………①

a が $-1\leqq a\leqq 1$ の範囲を動くとき，線分 PQ の通過領域は，明らかに y 軸対称となる。

さて，①において $x=t\ (t\geqq 0)$ 上での通過領域を考えると，

$$y=2at-a^2=-(a-t)^2+t^2\ (t-1\leqq a\leqq t+1) \text{………②}$$

そこで，②式を $y=f(a)$ とおき，a が $-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲を動くとき, y の値のとりうる範囲を求める。

ここで，$y=f(a)$ のグラフの軸が $a=t$ なので, t の値で場合分けをする。

(i)　$t>2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は存在しない。

(ii)　$1<t\leqq 2$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲には，$y=f(a)$ の軸は存在しないので，$f(a)$ は単調増加となる。

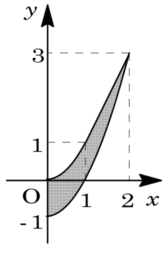
$f(t-1)\leqq y\leqq f(1)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq 2t-1$

(iii) $0\leqq t\leqq 1$ のとき

$-1\leqq a\leqq 1$ と $t-1\leqq a\leqq t+1$ との共通範囲は $t-1\leqq a\leqq 1$ となる。この範囲に $y=f(a)$ の軸は存在し，しかも $t-1<\dfrac{(t-1)+1}{2}\leqq t\leqq 1$ なので，

$f(t-1)\leqq y\leqq f(t)$ より，$t^2-1\leqq y\leqq t^2$

(i)(ii)(iii)より，$x\geqq 0$ で線分 PQ の通過領域を図示すると，右図のようになる。



求める面積を S とおくと，

$$\frac{S}{2}=\int_0^1\left\{x^2-(x^2-1)\right\}dx+\int_1^2\left\{2x-1-(x^2-1)\right\}dx$$

$$=\int_0^1 dx+\int_1^2(-x^2+2x)dx=\frac{5}{3}$$

よって，$S=\dfrac{10}{3}$

コメント

xを固定して丁寧に線分の通過領域を求めました。しかし，本問では2点P, Qだけの軌跡を求めて，直観的に考えることも可能です。

問　題

a と b は±1, 0でない実数とする。実数 $x,\ y$ が, $\dfrac{\sin x}{\sin y}=a$, $\dfrac{\cos x}{\cos y}=b$を満たしているとする。

(1) $\tan^2 y$をa, bを用いて表せ。

(2) 点$(a,\ b)$の存在する範囲をab平面に図示せよ。　[1998]

解答例

(1) 条件より, $\sin x=a\sin y$………①, $\cos x=b\cos y$………②

①②を$\sin^2 x+\cos^2 x=1$に代入して, $a^2\sin^2 y+b^2\cos^2 y=1$

両辺$\div\cos^2 y$より, $a^2\tan^2 y+b^2=\dfrac{1}{\cos^2 y}$

$1+\tan^2 y=\dfrac{1}{\cos^2 y}$なので, $a^2\tan^2 y+b^2=1+\tan^2 y$

よって, $a\neq\pm1$から$\tan^2 y=\dfrac{1-b^2}{a^2-1}$

(2) $a\neq0$, $b\neq0$なので, ①②より$\tan x=\dfrac{a}{b}\tan y$………③

$b\neq\pm1$から, 実数yの条件は$\tan^2 y=\dfrac{1-b^2}{a^2-1}>0$

このとき, ③から実数xは存在する。

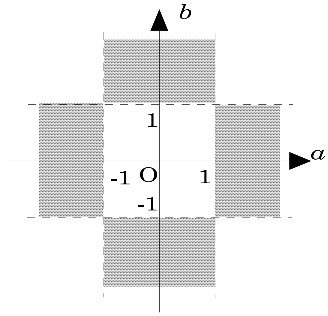
以上より, 求める条件は$\dfrac{1-b^2}{a^2-1}>0$

よって, $(1-b^2)(a^2-1)>0$

$(a-1)(a+1)(b-1)(b+1)<0$………④

境界線は$a=\pm1$, $b=\pm1$で, 点$(2,\ 2)$を④に代入すると不成立なので, 点$(a,\ b)$の存在する範囲は右図のようになる。

ただし, 境界線および座標軸上の点は含まない。



コメント

(2)は2乗が正ということだけですが, これは必要条件だけにすぎないのではないかと不安が頭をよぎってしまいます。そのため十分性についても少し触れておきました。

問　題

x の方程式 $x^2+a|x-1|+b=0$ が異なる実数解をちょうど 2 個もつとき，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲を ab 平面に図示せよ。 [1998]

解答例

$x^2+a|x-1|+b=0$ から，$x^2+a|x-1|=-b$ ………①

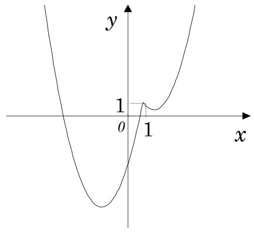
①が異なる実数解をもつ条件は，$y=x^2+a|x-1|$ ……②と $y=-b$ ……③のグラフが異なる共有点を 2 個もつことである。

曲線②は定点 $(1,\ 1)$ を通り，

$x\geqq 1$ のとき，$y=x^2+ax-a=\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}-a$

$x<1$ のとき，$y=x^2-ax+a=\left(x-\dfrac{a}{2}\right)^2-\dfrac{a^2}{4}+a$

(i) $\dfrac{a}{2}<-1$ $(a<-2)$ のとき

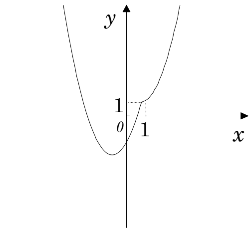


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$-b>1$ または $-\dfrac{a^2}{4}+a<-b<-\dfrac{a^2}{4}-a$

$b<-1$ または $\dfrac{a^2}{4}-a>b>\dfrac{a^2}{4}+a$

(ii) $-1\leqq\dfrac{a}{2}<1$ $(-2\leqq a<2)$ のとき

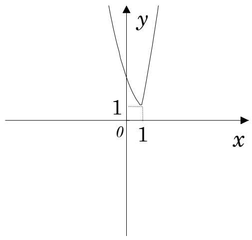


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$-\dfrac{a^2}{4}+a<-b$

$\dfrac{a^2}{4}-a>b$

(iii) $1\leqq\dfrac{a}{2}$ $(2\leqq a)$ のとき

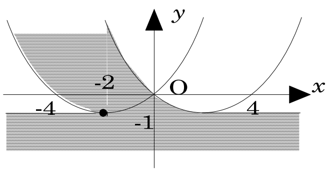


②③が異なる共有点を 2 個もつのは，

$1<-b$

$-1>b$

(i)(ii)(iii)より，点 $(a,\ b)$ の存在する範囲は右図のようになる。ただし点 $(-2,\ -1)$ 以外の境界は含まない。



コメント

本来は，(ii)の場合をさらに a の値が正負で細かく分けていたのですが，両者とも同じ条件になるのでまとめてしまいました。もっとも，まとめた最大の理由は，スペースなのですが。

問　題

鋭角三角形△ABC において，頂点 A, B, C から各対辺に垂線 AD, BE, CF を下ろす。これらの垂線は垂心 H で交わる。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　四角形 BCEF と AFHE が円に内接することを示せ。

(2)　$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ADF}$ であることを示せ。　[2016]

解答例

(1)　垂心が H である右図の△ABC において，

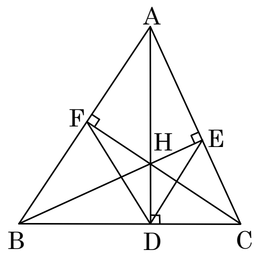
$$\angle\mathrm{BFC}=\angle\mathrm{BEC}=90^\circ$$

すると，四角形 BCEF は BC を直径とする円に内接する。

また，$\angle\mathrm{AFH}=\angle\mathrm{AEH}=90^\circ$ より，

$$\angle\mathrm{AFH}+\angle\mathrm{AEH}=180^\circ$$

すると，四角形 AFHE は AH を直径とする円に内接する。



(2)　(1)から，四角形 BCEF が円に内接することより，

$$\angle\mathrm{ECF}=\angle\mathrm{EBF}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\angle\mathrm{CEH}+\angle\mathrm{CDH}=180^\circ$ から，四角形 CEHD が円に内接するので，

$$\angle\mathrm{ECH}=\angle\mathrm{HDE},\ \angle\mathrm{ECF}=\angle\mathrm{ADE}\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\angle\mathrm{BDH}+\angle\mathrm{BFH}=180^\circ$ から，四角形 BDHF が円に内接するので，

$$\angle\mathrm{FBH}=\angle\mathrm{HDF},\ \angle\mathrm{EBF}=\angle\mathrm{ADF}\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$\angle\mathrm{ADE}=\angle\mathrm{ADF}$

コメント

円に内接する四角形を題材にした，教科書の練習問題に掲載されているような問題です。

問　題

空間内に，直線 l で交わる 2 平面 α，β と交線 l 上の 1 点 O がある。さらに，平面 α 上の直線 m と平面 β 上の直線 n を，どちらも O を通り l に垂直にとる。m, n 上にそれぞれ点 P, Q があり，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ であるとする。線分 PQ 上の動点 T について，$\mathrm{PT}=t$ とおく。点 T を中心とした半径 $\sqrt{2}$ の球 S を考える。このとき，以下の問いに答えよ。

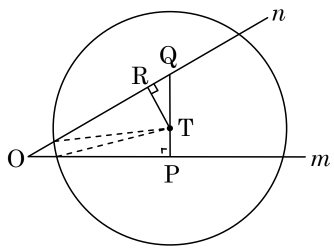
(1) S の平面 α による切り口の面積を t を用いて表せ。

(2) S の平面 α による切り口の面積と S の平面 β による切り口の面積の和を $f(t)$ とおく。T が線分 PQ 上を動くとき，$f(t)$ の最大値と，そのときの t の値を求めよ。

[2016]

解答例

(1) 2 平面 α，β の交線 l 上の点 O を通り l に垂直に，α 上に直線 m，β 上に直線 n がある。そして，m 上に点 P，n 上に点 Q を，$\mathrm{OP}=\sqrt{3}$，$\mathrm{OQ}=2$，$\mathrm{PQ}=1$ であるようにとる。すると，点 O を通り l に垂直な平面での位置関係は右図のようになり，$\angle\mathrm{POQ}=30^\circ$，$\angle\mathrm{OPQ}=90^\circ$ である。



さて，線分 PQ 上に $\mathrm{PT}=t$ である点 T をとり，中心が T で半径が $\sqrt{2}$ の球 S の平面 α による切り口は中心 P の円になり，その半径を r_1 とおくと，

$$r_1=\sqrt{(\sqrt{2})^2-t^2}=\sqrt{2-t^2}$$

よって，この円の面積は，$\pi {r_1}^2=\pi(2-t^2)$ である。

(2) 点 T から直線 n に垂線 TR を引くと，$\mathrm{TR}=\mathrm{TQ}\cos 30^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{2}(1-t)$

さて，球 S の平面 β による切り口は中心 R の円になり，その半径を r_2 とおくと，

$$r_2=\sqrt{(\sqrt{2})^2-\left\{\frac{\sqrt{3}}{2}(1-t)\right\}^2}=\sqrt{\frac{5+6t-3t^2}{4}}$$

すると，S の α による切り口の面積と β による切り口の面積の和 $f(t)$ は，

$$f(t)=\pi {r_1}^2+\pi {r_2}^2=\pi(2-t^2)+\frac{\pi}{4}(5+6t-3t^2)=\frac{\pi}{4}(-7t^2+6t+13)$$

$$=\frac{\pi}{4}\left\{-7\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{100}{7}\right\}=-\frac{7}{4}\pi\left(t-\frac{3}{7}\right)^2+\frac{25}{7}\pi$$

よって，$0\leqq t\leqq 1$ から，$f(t)$ は $t=\dfrac{3}{7}$ のとき最大値 $\dfrac{25}{7}\pi$ をとる。

コメント

球と平面の交わりについての問題です。問題文の説明は長いですが，位置関係がわかりやすく設定されていますので，方針が混乱することはないと思えます。

問　題

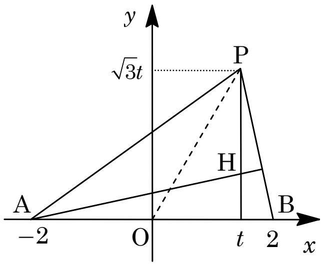
$t>0$ を実数とする。座標平面において，3 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$，$\mathrm{B}(2,\ 0)$，$\mathrm{P}(t,\ \sqrt{3}t)$ を頂点とする三角形 ABP を考える。

(1)　三角形 ABP が鋭角三角形となるような t の範囲を求めよ。

(2)　三角形 ABP の垂心の座標を求めよ。

(3)　辺 AB, BP, PA の中点をそれぞれ M, Q, R とおく。t が(1)で求めた範囲を動くとき，三角形 ABP を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体の体積の最大値と，そのときの t の値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$t>0$ のとき $\angle\mathrm{PAB}<\dfrac{\pi}{2}$ であるので，$\triangle\mathrm{APB}$ が鋭角三角形となる条件は $\angle\mathrm{PBA}<\dfrac{\pi}{2}$ かつ $\angle\mathrm{APB}<\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，$t<2$ かつ $\mathrm{OP}>2$ $(2t>2)$ となる。

よって，求める t の範囲は，$1<t<2$ である。

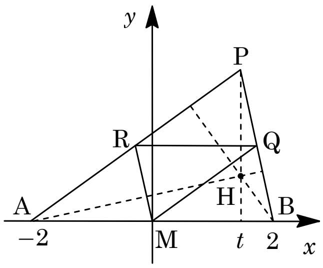
(2)　P から辺 AB に引いた垂線の式は，$x=t$ ………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(t-2,\ \sqrt{3}t)$ より，A から辺 BP に引いた垂線の式は，

$$(t-2)(x+2)+\sqrt{3}ty=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②を連立して，$(t-2)(t+2)+\sqrt{3}ty=0$ より，$y=\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}$

よって，$\triangle\mathrm{APB}$ の垂心 H の座標は，$\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)$ である。



(3)　M, Q, R は，それぞれ辺 AB, BP, PA の中点なので，

$$\mathrm{RQ}/\!/\mathrm{AB},\ \mathrm{QM}/\!/\mathrm{PA},\ \mathrm{RM}/\!/\mathrm{PB}$$

ここで，H は $\triangle\mathrm{APB}$ の垂心より，

$$\mathrm{PH}\perp\mathrm{RQ},\ \mathrm{BH}\perp\mathrm{QM},\ \mathrm{AH}\perp\mathrm{RM}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，xy 平面に垂直に z 軸をとり，$\triangle\mathrm{ABP}$ を線分 MQ, QR, RM で折り曲げてできる四面体において，P, A, B が重なってできる頂点を C とする。

すると，③より，s を正の実数として，$\mathrm{C}\left(t,\ \dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t},\ s\right)$ と表せる。

そこで，$\mathrm{CM}=2$ から，$t^2+\left(\dfrac{4-t^2}{\sqrt{3}t}\right)^2+s^2=4$ となり，

$$s^2=4-t^2-\frac{(4-t^2)^2}{3t^2}=\frac{-4t^4+20t^2-16}{3t^2}$$

よって，$s=\dfrac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}$ となり，四面体 CMQR の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\Big(\frac{1}{4}\triangle\mathrm{ABP}\Big)s=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdot\frac{2\sqrt{-t^4+5t^2-4}}{\sqrt{3}t}=\frac{1}{3}\sqrt{-\Big(t^2-\frac{5}{2}\Big)^2+\frac{9}{4}}$$

$1<t<2$ から，$t^2=\dfrac{5}{2}\ \Big(t=\dfrac{\sqrt{10}}{2}\Big)$ のとき，V は最大値 $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{9}{4}}=\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

一見，無関係と思える(2)と(3)ですが，(2)は(3)に不可欠な誘導です。なお，直角三角形が題材になっている類題が，北大で 2009 年に出ています。

問　題

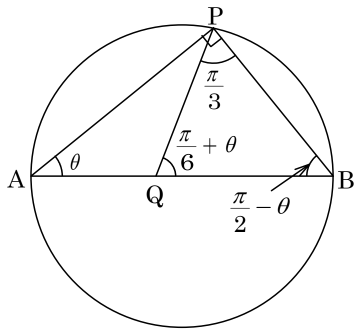
長さ 1 の線分 AB を直径とする円周 C 上に点 P をとる。ただし，点 P は点 A, B とは一致していないとする。線分 AB 上の点 Q を $\angle \mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ となるようにとり，線分 BP の長さを x とし，線分 PQ の長さを y とする。以下の問いに答えよ。

(1) y を x を用いて表せ。

(2) 点 P が 2 点 A, B を除いた円周 C 上を動くとき，y が最大となる x を求めよ。

[2012]

解答例



(1) $\mathrm{AB}=1$，$\mathrm{BP}=x$ に対し，$\angle \mathrm{PAB}=\theta$ とおくと，

$$\sin\theta=x\,,\ \ \cos\theta=\sqrt{1-x^2}$$

さて，$\angle \mathrm{BPQ}=\dfrac{\pi}{3}$ から，$\angle \mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$\angle \mathrm{PQB}=\frac{\pi}{6}+\theta\,,\ \ \angle \mathrm{PBQ}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

$\mathrm{PQ}=y$ から，$\triangle \mathrm{PQB}$ に正弦定理を適用して，

$$\frac{y}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}=\frac{x}{\sin\left(\frac{\pi}{6}+\theta\right)}$$

よって，$y=\dfrac{x\cos\theta}{\sin\frac{\pi}{6}\cos\theta+\cos\frac{\pi}{6}\sin\theta}=\dfrac{2x\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2x\sqrt{1-x^2}}{\sqrt{1-x^2}+\sqrt{3}x}$

(2) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ において, (1)より，$y=\dfrac{2\sin\theta\cos\theta}{\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta}=\dfrac{2}{\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}}$

さて，$f(\theta)=\dfrac{1}{\sin\theta}+\dfrac{\sqrt{3}}{\cos\theta}$ とおくと，$y=\dfrac{2}{f(\theta)}$ となり，

$$f'(\theta)=-\frac{\cos\theta}{\sin^2\theta}+\frac{\sqrt{3}\sin\theta}{\cos^2\theta}=\frac{\sqrt{3}\sin^3\theta-\cos^3\theta}{\sin^2\theta\cos^2\theta}$$

ここで，$\sqrt{3}\sin^3\alpha=\cos^3\alpha$ となる α をとると，$f(\theta)$ の増減は右表のようになり，$\theta=\alpha$ のとき $f(\theta)$ は最小となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	
$f(\theta)$		$\searrow$		$\nearrow$	

すなわち，$\theta=\alpha$ で, y は最大となる。

このとき，$\sqrt{3}x^3=\left(\sqrt{1-x^2}\right)^3$ から，$3x^6=(1-x^2)^3$ となり，

$$\sqrt[3]{3}x^2=1-x^2\,,\ \ (1+\sqrt[3]{3})x^2=1$$

したがって, y が最大となる x は，$x=\dfrac{1}{\sqrt{1+\sqrt[3]{3}}}$ である。

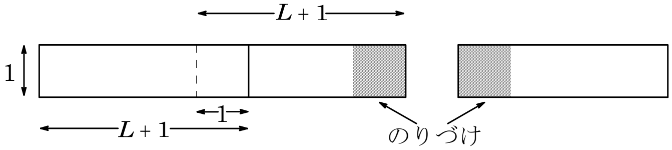
コメント

正弦定理の応用です。ただ，(2)は計算の工夫が必要です。特に，$f(\theta)$ を設定する部分が重要で，何回か微分に詰まって考えつきます。

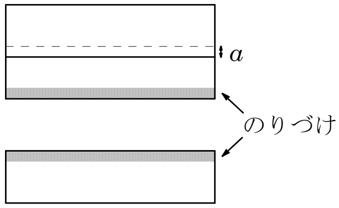
問　題

L を 2 以上の自然数，a を $0<a<1$ を満たす実数とする。縦 1 cm，横 $(L+1)$ cm の長方形の紙を用いて，次のように長方形 A, B を作る。

長方形 A の作り方。L 枚の紙を横に並べて，順に 1 辺 1 cm の正方形をのりしろとして（隣り合う紙が横 1 cm 重なるように）はり合わせ，縦 1 cm の横長の長方形を作る。



長方形 B の作り方。L 枚の紙を縦に並べて，隣り合う紙が縦 $a$cm 重なるようにはり合わせて，横 $(L+1)$ cm の長方形を作る。



長方形 A, B の面積をそれぞれ S_1 cm^2 および S_2 cm^2 とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　S_1 と S_2 を求めよ。

(2)　$L=2$ のとき，$S_1-1<S_2$ となる a の範囲を求めよ。

(3)　$S_1-1<S_2$ となる 2 以上の自然数 L があるような a の範囲を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　のりしろの部分を差し引いた $L-1$ 枚ともとの 1 枚の和で考えると，

$$S_1=\{L(L-1)+(L+1)\}\times 1=L^2+1$$

$$S_2=\{(1-a)(L-1)+1\}\times(L+1)=(1-a)L^2+L+a$$

(2)　$L=2$ のとき，$S_1=5$，$S_2=4(1-a)+2+a=-3a+6$ となり，$S_1-1<S_2$ より，

$$4<-3a+6\,,\ 3a<2$$

$0<a<1$ より，$0<a<\dfrac{2}{3}$

(3)　$S_1-1<S_2$ より，$L^2<(1-a)L^2+L+a$，$aL^2-L-a<0$

ここで，$f(L)=aL^2-L-a$ とおくと，$f(L)<0$ となる 2 以上の自然数 L が存在する条件は, $0<a<1$，$f(0)=-a<0$ に注意すると，$f(2)=3a-2<0$ であり，

$$0<a<\frac{2}{3}$$

コメント

仰々しい設定の問題ですが，内容は基本的です。

問　題

θ を $0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ の範囲にある実数とし，空間の 4 点 O, A, B, C が，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ を満たすとする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) △ABC の重心を G とするとき, AG と OG をそれぞれ θ で表せ。

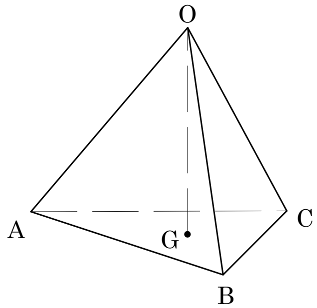
(2) θ を動かしたとき, O, A, B, C を頂点とする四面体の体積の最大値を求めよ。

[2008]

解答例

(1) 条件より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$，$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=\theta$ なので,

$$\mathrm{AB}=\mathrm{BC}=\mathrm{CA}=2\sin\frac{\theta}{2}$$



これより，△ABC は正三角形となり，その重心 G に対して,

$$\mathrm{AG}=\frac{2}{3}\cdot\mathrm{AB}\sin\frac{\pi}{3}=\frac{2\sqrt{3}}{3}\sin\frac{\theta}{2}$$

また, OG は平面 ABC に垂直となり,

$$\mathrm{OG}=\sqrt{\mathrm{OA}^2-\mathrm{AG}^2}=\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}}$$

(2) まず，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\left(2\sin\dfrac{\theta}{2}\right)^2\sin\dfrac{\pi}{3}=\sqrt{3}\sin^2\dfrac{\theta}{2}$ となる。

四面体 OABC の体積を V とすると,

$$V=\frac{1}{3}\triangle\mathrm{ABC}\cdot\mathrm{OG}=\frac{\sqrt{3}}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}\sqrt{1-\frac{4}{3}\sin^2\frac{\theta}{2}}=\frac{1}{3}\sqrt{3\sin^4\frac{\theta}{2}-4\sin^6\frac{\theta}{2}}$$

さて，$x=\sin^2\dfrac{\theta}{2}$，$f(x)=3x^2-4x^3$ とおくと，$0<\theta<\dfrac{2\pi}{3}$ より $0<x<\dfrac{3}{4}$ となり,

$$V=\frac{1}{3}\sqrt{f(x)}$$

すると，$f'(x)=6x-12x^2=6x(1-2x)$ から，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$x=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{3}{4}$
$f'(x)$	0	＋	0	－	
$f(x)$		↗	$\frac{1}{4}$	↘	

よって, V の最大値は $\dfrac{1}{3}\sqrt{\dfrac{1}{4}}=\dfrac{1}{6}$ である。

コメント

底面の△ABC が正三角形となるので，この点を利用すると，計算量が少なくてすみます。

問　題

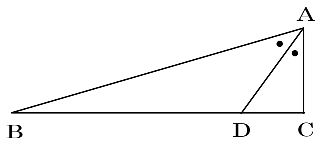
$\angle$C を直角とする直角三角形 ABC に対して，$\angle$A の二等分線と線分 BC の交点を D とする。また，線分 AD, DC, CA の長さはそれぞれ 5, 3, 4 とする。$\angle \mathrm{A} = \theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta$ を求めよ。

(2)　$\theta < \dfrac{5}{12}\pi$ を示せ。ただし，$\sqrt{2} = 1.414\cdots$，$\sqrt{3} = 1.732\cdots$ を用いてもよい。

[2007]

解答例



(1)　条件より，$\sin\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{3}{5}$，$\cos\dfrac{\theta}{2} = \dfrac{4}{5}$ より，

$$\sin\theta = 2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2} = \frac{24}{25}$$

(2)　$\sin\dfrac{5}{12}\pi = \sin\left(\dfrac{\pi}{6} + \dfrac{\pi}{4}\right) = \sin\dfrac{\pi}{6}\cos\dfrac{\pi}{4} + \cos\dfrac{\pi}{6}\sin\dfrac{\pi}{4}$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}(1+\sqrt{3})$$

$$> \frac{1.414}{4}(1+1.732) > 0.96 = \frac{24}{25}$$

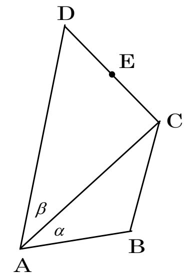
ここで，関数 $f(\theta) = \sin\theta$ は $0 < \theta < \dfrac{\pi}{2}$ において単調に増加し，$\sin\theta < \sin\dfrac{5}{12}\pi$ となることから，$\theta < \dfrac{5}{12}\pi$ である。

コメント

数値計算はあるものの，さほど面倒でもなく，あっさりと解決する問題です。

問　題

すべての内角が$180°$より小さい四角形 ABCD がある。辺の長さが $AB = BC = r$，$AD = 2r$ とする。さらに，辺 CD 上に点 E があり，3 つの三角形$\triangle ABC$，$\triangle ACE$，$\triangle ADE$の面積はすべて等しいとする。$\alpha = \angle BAC$，$\beta = \angle CAD$とおく。

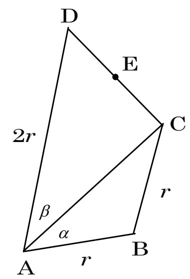


(1)　$\alpha = \beta$を示せ。

(2)　$\cos\angle DAB = \dfrac{3}{5}$であるとするとき，$\sin\angle CAE$の値を求めよ。

[2005]

解答例



(1)　$\triangle ABC$は二等辺三角形なので，$AC = 2AB\cos\alpha = 2r\cos\alpha$

そこで，$\triangle ABC = \dfrac{1}{2}r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\alpha = r^2\cos\alpha\sin\alpha$

$$\triangle ADC = \frac{1}{2}\cdot 2r\cdot 2r\cos\alpha\cdot\sin\beta = 2r^2\cos\alpha\sin\beta$$

条件より，$\triangle ADC = 2\triangle ABC$なので，

$$\sin\alpha = \sin\beta$$

よって，$\alpha = \beta$または$\alpha = 180° - \beta$

すると，条件より$\alpha + \beta < 180°$なので，$\alpha = \beta$である。

(2)　$\alpha = \beta$より，$AC = 2r\cos\beta$となるので，$\angle ACD = 90°$であり，

$$CD = 2r\sin\beta = 2r\sin\alpha$$

さて，$\triangle ACE = \triangle ADE$から，点 E は辺 CD の中点となり，

$$CE = \frac{1}{2}CD = r\sin\alpha$$

ここで，$\angle CAE = \theta$とおくと，

$$\tan\theta = \frac{CE}{AC} = \frac{r\sin\alpha}{2r\cos\alpha} = \frac{1}{2}\tan\alpha\cdots\cdots\cdots①$$

条件より，$\cos 2\alpha = \dfrac{3}{5}$なので，$2\alpha < 90°$から$\tan 2\alpha = \dfrac{4}{3}$となり，

$$\frac{2\tan\alpha}{1-\tan^2\alpha} = \frac{4}{3},\ 2\tan^2\alpha + 3\tan\alpha - 2 = 0,\ (2\tan\alpha - 1)(\tan\alpha + 2) = 0$$

$\alpha < 90°$から$\tan\alpha > 0$なので，$\tan\alpha = \dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

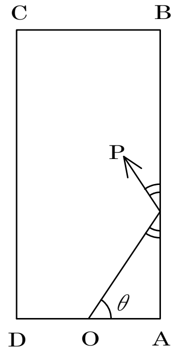
①②より，$\tan\theta = \dfrac{1}{4}$となり，$\sin\theta = \dfrac{1}{\sqrt{4^2+1^2}} = \dfrac{1}{\sqrt{17}}$である。

コメント

問題の図からも想像できますが，$\triangle ACD$ は直角三角形です。この発見がポイントになります。

問　題

長方形 ABCD 内を減速しながら進む点を考える。時刻 $t=0$ に初速 v で発射させた点 P は，時刻 t では速さ ve^{-t} で直進するとする。ただし，P がいずれかの辺に来たときは等しい入射角と反射角で反射するとし，頂点 A, B, C, D のいずれかに来たときはそこで停止するとする。AB の長さは 4 で AD の長さは 2 とし，出発点は AD の中点 O とする。初速を $v=14$ としたとき，最も長い時間をかけて P をどれかの頂点に到達させるにはどの方向に発射させればよいか。OA との角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ として $\tan\theta$ を求めよ。またそのとき，P が頂点に到達する時刻を求めよ。



[1999]

解答例

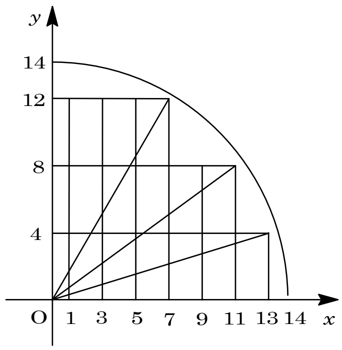
時刻 t_0 までに点 P が進んだ道のりを L とすると，

$$L=\int_0^{t_0}14e^{-t}dt=-14\Big[e^{-t}\Big]_0^{t_0}=14(1-e^{-t_0})\cdots\cdots\cdots(*)$$

まず，点 P の軌跡は，反射した辺に関して長方形 ABCD を折り返していくと，直線として表せる。

すると点 O を原点とし，点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，点 $\mathrm{B}(1,\ 4)$ として座標設定をすると，辺に関して折り返していった頂点は，$k,\ l$ を自然数として，$(2k-1,\ 4l)$ と表される。

ここで，最も長い時間をかけて P がどれかの頂点に到達するのは，(*)より L が最も大きいときである。ところが，(*)より $L<14$ なので，原点 O からの距離が 14 より小で，しかも 14 に最も近い頂点が求める頂点となる。



(i)　$l=1\ (y=4)$ のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数 $(x=2k-1)$ は $x=13$ であり，このとき $L^2=13^2+4^2=185$ となる。

(ii)　$l=2\ (y=8)$ のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数 $(x=2k-1)$ は $x=11$ であり，このとき $L^2=11^2+8^2=185$ となる。

(iii)　$l=3\ (y=12)$ のとき

$x^2+y^2<14^2$ を満たす最大の奇数 $(x=2k-1)$ は $x=7$ であり，このとき $L^2=7^2+12^2=193$ となる。

(i)(ii)(iii)より，$(x,\ y)=(7,\ 12)$のとき, Lは最大になり，t_0も最大となる。

このとき，$\tan\theta=\dfrac{12}{7}$であり，また(＊)より，$\sqrt{193}=14(1-e^{-t_0})$，$e^{-t_0}=1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}$

よって, Pが頂点に到達する時刻t_0は，$t_0=-\log\left(1-\dfrac{\sqrt{193}}{14}\right)$となる。

コメント

頻出の反射の問題です。反射面に関して折り返して考えるのがポイントです。類題経験がものを言うのではないかと思われます。

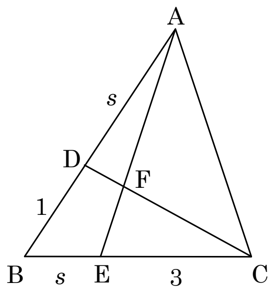
問　題

s を正の実数とする。鋭角三角形 ABC において，辺 AB を $s:1$ に内分する点を D とし，辺 BC を $s:3$ に内分する点を E とする。線分 CD と線分 AE の交点を F とする。以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を求めよ。

(2) F から辺 AC に下ろした垂線を FG とする。FG の長さが最大となるときの s を求めよ。 [2017]

解答例



(1) $\triangle$ABE と直線 CD にメネラウスの定理を適用して，

$$\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}\cdot\frac{\mathrm{EF}}{\mathrm{FA}}=1,\quad \frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{\mathrm{AD}}{\mathrm{DB}}\cdot\frac{\mathrm{BC}}{\mathrm{CE}}$$

条件より，$\mathrm{AD}:\mathrm{DB}=s:1$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EC}=s:3$ なので，

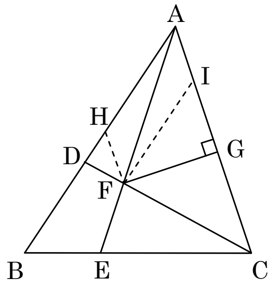
$$\frac{\mathrm{FA}}{\mathrm{EF}}=\frac{s}{1}\cdot\frac{s+3}{3}=\frac{s(s+3)}{3}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\dfrac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\overrightarrow{\mathrm{AE}}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\frac{s(s+3)}{s(s+3)+3}\cdot\frac{3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}}}{s+3}=\frac{s}{s^2+3s+3}(3\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\overrightarrow{\mathrm{AC}})$$

ここで，条件より $\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ で，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ は 1 次独立なので，

$$\alpha=\frac{3s}{s^2+3s+3},\quad \beta=\frac{s^2}{s^2+3s+3}$$



(2) $\overrightarrow{\mathrm{AH}}=\alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AI}}=\beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{AF}}=\overrightarrow{\mathrm{AH}}+\overrightarrow{\mathrm{AI}}$ から，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}\cdots\cdots\cdots①$$

さて，F から辺 AC に垂線 FG を下ろすと，

$$\triangle\mathrm{AFC}=\frac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\dfrac{1}{2}\mathrm{AC}\cdot\mathrm{FG}=\alpha\cdot\triangle\mathrm{ABC}$，$\mathrm{FG}=\dfrac{2\alpha}{\mathrm{AC}}\triangle\mathrm{ABC}$

これより，FG の長さが最大となるのは α が最大となるときで，(1)の結果を $\alpha=\dfrac{3}{s+3+\frac{3}{s}}$ と変形すると，相加平均と相乗平均の関係より，

$$s+\frac{3}{s}\geqq 2\sqrt{s\cdot\frac{3}{s}}=2\sqrt{3}$$

ただし，等号は $s=\dfrac{3}{s}$ すなわち $s=\sqrt{3}$ のとき成立し，これより，

$$\alpha=\frac{3}{s+3+\frac{3}{s}}\leqq\frac{3}{2\sqrt{3}+3}=2\sqrt{3}-3$$

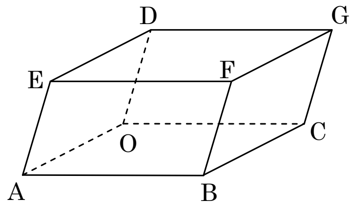
よって，FG の長さが最大となるときの s の値は $s=\sqrt{3}$ である。

コメント

平面ベクトルの三角形への応用問題で，頻出の構図です。解答例では図形的に処理をしましたが，(1)では分点ベクトル，(2)では内積を用いても，記述量はやや増加する程度です。

問　題

右図のような平行六面体 OABC - DEFG が xyz 空間内にあり，O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(2,\ 0,\ 0)$，C$(0,\ 3,\ 0)$，D$(-1,\ 0,\ \sqrt{6})$ とする。辺 AB の中点を M とし，辺 DG 上の点 N を MN $=4$ かつ DN$<$GN を満たすように定める。



(1) N の座標を求めよ。

(2) 3 点 E, M, N を通る平面と y 軸との交点 P を求めよ。

(3) 3 点 E, M, N を通る平面による平行六面体 OABC - DEFG の切り口の面積を求めよ。 [2014]

解答例

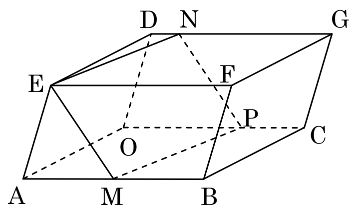
(1) $0\leqq t\leqq 1$ として，$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}+t\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{ON}}=(-1,\ 0,\ \sqrt{6})+t(0,\ 3,\ 0)$$
$$=(-1,\ 3t,\ \sqrt{6})$$

また，$\mathrm{M}\left(2,\ \frac{3}{2},\ 0\right)$ から，MN $=4$ より，

$$(-3)^2+\left(3t-\frac{3}{2}\right)^2+6=4^2,\ 9\left(t-\frac{1}{2}\right)^2=1$$

DN$<$GN より $t<\frac{1}{2}$ となるので，$t=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}=\frac{1}{6}$ から，$\mathrm{N}\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \sqrt{6}\right)$ である。



(2) E$(1,\ 0,\ \sqrt{6})$ より，$\overrightarrow{\mathrm{EM}}=\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)$，$\overrightarrow{\mathrm{EN}}=\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$ であり，点 P は y 軸上の点から P$(0,\ p,\ 0)$ とおくと，r, s を定数として，$\overrightarrow{\mathrm{EP}}=r\overrightarrow{\mathrm{EM}}+s\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ より，

$$(-1,\ p,\ -\sqrt{6})=r\left(1,\ \frac{3}{2},\ -\sqrt{6}\right)+s\left(-2,\ \frac{1}{2},\ 0\right)$$

$$-1=r-2s\cdots\cdots①,\ p=\frac{3}{2}r+\frac{1}{2}s\cdots\cdots②,\ -\sqrt{6}=-\sqrt{6}r\cdots\cdots③$$

①③より $r=s=1$ なので，②から $p=2$ となり，P$(0,\ 2,\ 0)$ である。

(3) (2)より $\overrightarrow{\mathrm{EP}}=\overrightarrow{\mathrm{EM}}+\overrightarrow{\mathrm{EN}}$ から，切り口は平行四辺形となり，その面積 S は，

$$S=\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{EM}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{EN}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{EM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{EN}})^2}=\sqrt{\left(1+\frac{9}{4}+6\right)\left(4+\frac{1}{4}\right)-\left(-2+\frac{3}{4}\right)^2}$$
$$=\sqrt{\frac{629}{4^2}-\frac{25}{4^2}}=\frac{\sqrt{151}}{2}$$

コメント

空間ベクトルの基本問題です。(2)では平面のパラメータ表示を利用していますが，平行六面体の切り口ということに注目して，(2)と(3)を一気に処理するという方法も考えられます。

問　題

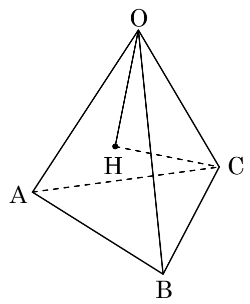
四面体 OABC において，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=1$ とする。$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$，$\angle\mathrm{BOC}=45^\circ$，$\angle\mathrm{COA}=45^\circ$ とし，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。点 C から面 OAB に垂線を引き，その交点を H とする。

(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OH}}$ を $\vec{a}$ と $\vec{b}$ を用いて表せ。

(2) CH の長さを求めよ。

(3) 四面体 OABC の体積を求めよ。 [2013]

解答例



(1) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\dfrac{1}{2}$

$$\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1\cdot1\cdot\cos45^\circ=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

さて，点 H は平面 OAB 上にあるので，$s,\ t$ を実数とし，

$$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=s\vec{a}+t\vec{b}$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=s\vec{a}+t\vec{b}-\vec{c}$ となり，条件から $\overrightarrow{\mathrm{CH}}$ は平面 OAB に垂直なので，

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{a}=s+\frac{1}{2}t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0\ ,\ \ \overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}s+t-\frac{\sqrt{2}}{2}=0$$

これより，$s=t=\dfrac{\sqrt{2}}{3}$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}$

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{a}+\dfrac{\sqrt{2}}{3}\vec{b}-\vec{c}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CH}}|^2=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2+(-1)^2+2\cdot\left(\frac{\sqrt{2}}{3}\right)^2\cdot\frac{1}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot\frac{\sqrt{2}}{3}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}$$
$$=\frac{2}{9}+\frac{2}{9}+1+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}-\frac{2}{3}=\frac{1}{3}$$

よって，$\mathrm{CH}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

(3) $\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot1\cdot\sin60^\circ=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$ より，四面体 OABC の体積 V は，(2)より，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{4}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{1}{12}$$

コメント

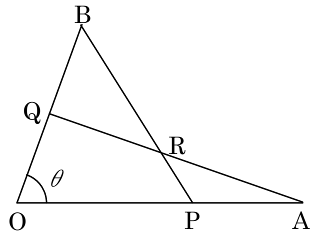
空間ベクトルの図形への応用についての基本題です。詳しすぎるぐらいの誘導がついています。なお，対称性に着目した方法も可能です。

問　題

平面上に長さ 3 の線分 OA を考え，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$を$\vec{a}$で表す。$0<t<1$ を満たす実数 t に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\vec{a}$ となるように点 P を定める。大きさ 2 のベクトル$\vec{b}$を$\vec{a}$と角 $\theta\ (0<\theta<\pi)$ をなすようにとり，点 B を$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$で定める。線分 OB の中点を Q とし，線分 AQ と線分 BP の交点を R とする。

このとき，どのようにθをとっても$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$と$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$が垂直にならないような t の値の範囲を求めよ。 [2011]

解答例



$\triangle$OPB と直線 AQ に対し，メネラウスの定理より，

$$\frac{\mathrm{OA}}{\mathrm{AP}}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BQ}}{\mathrm{QO}}=1$$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ であり，点 Q は線分 OB の中点から，

$$\frac{1}{1-t}\cdot\frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{1}{1}=1,\ \ \frac{\mathrm{PR}}{\mathrm{RB}}=1-t$$

よって，$\mathrm{PR}:\mathrm{RB}=1-t:1$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{2-t}=\frac{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}}{2-t}$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ が垂直にならない条件は，$\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}}\neq 0$ より，

$$\{t\vec{a}+(1-t)\vec{b}\}\cdot(-\vec{a}+\vec{b})\neq 0$$

条件より，$|\vec{a}|^2=9$，$|\vec{b}|^2=4$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot 2\cos\theta=6\cos\theta$ なので，

$$-9t+6t\cos\theta-6(1-t)\cos\theta+4(1-t)\neq 0$$

$$6(2t-1)\cos\theta-13t+4\neq 0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x=\cos\theta$ とおくと，$0<\theta<\pi$ から $-1<x<1$ となり，①より，

$$6(2t-1)x-13t+4\neq 0\cdots\cdots\cdots②$$

すると，$0<t<1$ のもとで，$-1<x<1$ を満たすどんな x に対しても，②を満たす条件は，$f(x)=6(2t-1)x-13t+4$ とおくと，

$$f(-1)=-25t+10,\ \ f(1)=-t-2<0$$

よって，求める条件は，$f(1)<0$ に注意すると，$f(-1)\leqq 0$ から $\dfrac{2}{5}\leqq t<1$ である。

コメント

ベクトルというよりは，数式処理の問題です。置き換えると，高々1 次の $f(x)$ が現れ，そのグラフのイメージをもとに解いています。

問　題

四面体 ABCD において，辺 AB の中点を M，辺 CD の中点を N とする。以下の問いに答えよ。

(1) 等式 $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ を満たす点 P は存在するか。証明をつけて答えよ。

(2) 点 Q が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ を満たしながら動くとき，点 Q が描く図形を求めよ。

(3) 点 R が等式 $|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ を満たしながら動くとき，内積 $\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定であることを示せ。

(4) (2)の点 Q が描く図形と(3)の点 R が描く図形が一致するための必要十分条件は $|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$ であることを示せ。　[2010]

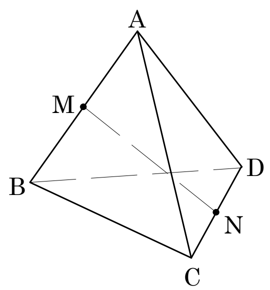
解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}$ より，$\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PA}}+\overrightarrow{\mathrm{PB}}}{2}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{PC}}+\overrightarrow{\mathrm{PD}}}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PM}}=\overrightarrow{\mathrm{PN}},\ \ \overrightarrow{\mathrm{PM}}-\overrightarrow{\mathrm{PN}}=\vec{0}$$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{NM}}=\vec{0}$ となり，題意を満たさない。

よって，点 P は存在しない。



(2) $|\overrightarrow{\mathrm{QA}}+\overrightarrow{\mathrm{QB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QC}}+\overrightarrow{\mathrm{QD}}|$ から, (1)と同様にすると,

$$|\overrightarrow{\mathrm{QM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{QN}}|$$

よって，点 Q は線分 MN の垂直二等分面を描く。

(3) まず，
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2&=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}-\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}-\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2\\&=|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MB}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{MA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}-2\overrightarrow{\mathrm{MB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}\\&=2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-2(\overrightarrow{\mathrm{MA}}+\overrightarrow{\mathrm{MB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}\\&=2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2\end{aligned}$$

同様にして，
$$\begin{aligned}|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2&=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{NR}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}-\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2\\&=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}+2|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2\end{aligned}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{RA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RB}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{RC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{RD}}|^2$ より，

$$2|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2=2|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+2|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}+2|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2$$

よって，$2\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}=|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2\cdots\cdots(*)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}$ は R のとり方によらず一定である。

(4) 点 Q が描く図形と点 R が描く図形が一致する条件は，$|\overrightarrow{\mathrm{RM}}|=|\overrightarrow{\mathrm{RN}}|$ であり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{RM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}-\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2,\ \ |\overrightarrow{\mathrm{RM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2-2\overrightarrow{\mathrm{MN}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{MR}}+|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2$$

(＊)を代入して，$|\overrightarrow{\mathrm{RM}}|^2=|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{MN}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2+|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|^2$

$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|^2-|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|^2=0$，$|\overrightarrow{\mathrm{MA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{NC}}|$

よって，$\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$から，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{CD}}|$である。

コメント

(4)まで，うまく誘導のついている問題です。ただ，(3)の式変形によっては，不運なケースが出てくる可能性もあります。

問　題

図 1 のような $AB = BC = CD = DA = AC = 1$ である四角形 ABCD を考える。この四角形 ABCD を AC で折り，図 2 のように点 B, C, D が平面 P にのるように置く。図 2 に現れる辺 CB と辺 CD とがなす角を α（$\alpha = \angle BCD$）とし，$0° < \alpha < 120°$ とする。以下の問いに答えよ。

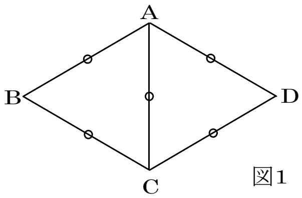


図1

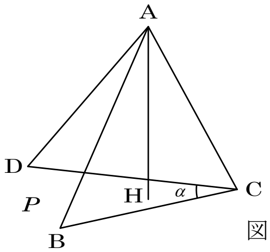


図2

(1) 図 2 において，A から平面 P に下ろした垂線が P と交わる点を H とする。$\overrightarrow{AH}$ を $\overrightarrow{CA}$，$\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{CD}$ と α とで表せ。

(2) $\overrightarrow{AH}$ の長さを α を用いて表せ。

(3) H が図 2 における△BCD の重心となるときの角度 α を求めよ。　[2006]

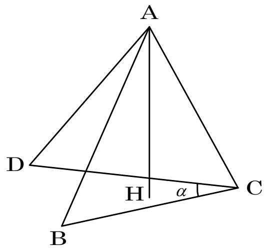
解答例

(1) x, y を実数として，$\overrightarrow{CH} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CD}$ とおくと，$\overrightarrow{AH} = x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$ となる。

ここで，条件より，$|\overrightarrow{CA}| = |\overrightarrow{CB}| = |\overrightarrow{CD}| = 1$

$$\overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 1\cdot 1\cdot\cos 60° = \frac{1}{2}$$

$$\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} = 1\cdot 1\cdot\cos\alpha = \cos\alpha$$



まず，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$ より，$(x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CB} = 0$

$$x|\overrightarrow{CB}|^2 + y\overrightarrow{CD}\cdot\overrightarrow{CB} - \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CB} = 0$$

$$x + y\cos\alpha - \frac{1}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{AH}\cdot\overrightarrow{CD} = 0$ より，$(x\overrightarrow{CB} + y\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA})\cdot\overrightarrow{CD} = 0$

$$x\overrightarrow{CB}\cdot\overrightarrow{CD} + y|\overrightarrow{CD}|^2 - \overrightarrow{CA}\cdot\overrightarrow{CD} = 0,\ x\cos\alpha + y - \frac{1}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$\begin{pmatrix} 1 & \cos\alpha \\ \cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$ となり，

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1-\cos^2\alpha)}\begin{pmatrix} 1 & -\cos\alpha \\ -\cos\alpha & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2(1+\cos\alpha)}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

よって，$\overrightarrow{AH} = \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CB} + \dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{CD} - \overrightarrow{CA}$

(2)　(1)より，$x=y=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}$ なので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|^2=|x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+x\overrightarrow{\mathrm{CD}}-\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=x^2+x^2+1+2x^2\cos\alpha-2x\cdot\frac{1}{2}-2x\cdot\frac{1}{2}$$
$$=2(1+\cos\alpha)x^2-2x+1=\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}-2\cdot\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}+1$$
$$=\frac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AH}}|=\sqrt{\dfrac{1+2\cos\alpha}{2(1+\cos\alpha)}}$ となる。

(3)　(1)より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\dfrac{1}{2(1+\cos\alpha)}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$

H が△BCD の重心となるとき，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}+\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ なので,

$$\frac{1}{2(1+\cos\alpha)}=\frac{1}{3},\ \cos\alpha=\frac{1}{2}$$

よって，$0°<\alpha<120°$ から，$\alpha=60°$

コメント

冒頭の $\overrightarrow{\mathrm{CH}}=x\overrightarrow{\mathrm{CB}}+y\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ がポイントとなります。なお，連立方程式は，係数に文字が入っていたので，行列を用いて解いています。

問　題

$0<t<\dfrac{1}{2}$ とし，平面上のベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ と単位ベクトル $\vec{e}$ が

(i)　$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$　　(ii)　$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$

を満たすとする。さらに平面上のベクトル $\vec{x}$ があって，$\vec{x}-\vec{a}$ と $\vec{x}-\vec{b}$ が垂直で長さの比が $t:1-t$ となるとする。このとき，内積 $\vec{x}\cdot\vec{e}$ を t で表せ。　[2005]

解答例

まず，条件(i)より，$(1-t)\vec{a}+t\vec{b}=\vec{e}$ ………①

また，条件(ii)より，$(1-t)(\vec{a}+\vec{e})=t(\vec{b}+\vec{e})$，$(1-t)\vec{a}-t\vec{b}=(2t-1)\vec{e}$ ………②

①②より，$2(1-t)\vec{a}=2t\vec{e}$，$2t\vec{b}=2(1-t)\vec{e}$ となり，

$$\vec{a}=\frac{t}{1-t}\vec{e}\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad \vec{b}=\frac{1-t}{t}\vec{e}\ \cdots\cdots\cdots ④$$

すると，$\vec{x}-\vec{a}=\vec{x}-\dfrac{t}{1-t}\vec{e}=\dfrac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}$ ………⑤

$$\vec{x}-\vec{b}=\vec{x}-\frac{1-t}{t}\vec{e}=\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

さて，条件 $(\vec{x}-\vec{a})\cdot(\vec{x}-\vec{b})=0$ に，⑤⑥を適用すると，

$$\{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}\}\cdot\{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}\}=0$$

$$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+t^2+t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)|\vec{e}|^2=0$$

$|\vec{e}|=1$ より，$t(1-t)|\vec{x}|^2-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ ………⑦

また，条件 $|\vec{x}-\vec{a}|:|\vec{x}-\vec{b}|=t:1-t$ に，⑤⑥を適用すると，

$$(1-t)\left|\frac{(1-t)\vec{x}-t\vec{e}}{1-t}\right|=t\left|\frac{t\vec{x}-(1-t)\vec{e}}{t}\right|,\quad |(1-t)\vec{x}-t\vec{e}|=|t\vec{x}-(1-t)\vec{e}|$$

$$(1-t)^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+t^2|\vec{e}|^2=t^2|\vec{x}|^2-2t(1-t)\vec{x}\cdot\vec{e}+(1-t)^2|\vec{e}|^2$$

$|\vec{e}|=1$ より，$(1-2t)|\vec{x}|^2=1-2t$ となり，$0<t<\dfrac{1}{2}$ から $|\vec{x}|^2=1$ ………⑧

⑦⑧より，$t(1-t)-(1-2t+2t^2)\vec{x}\cdot\vec{e}+t(1-t)=0$ となるので，

$$\vec{x}\cdot\vec{e}=\frac{2t(1-t)}{1-2t+2t^2}$$

コメント

文字がたくさん出てくるので，方針を明確にし，交通整理をしながら計算を進めます。ここでは，まず $\vec{a}$，$\vec{b}$ を消去するために，③と④を導きました。

問　題

平面ベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は, $|\vec{a}|^2=1$, $|\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$を満たすとする。

(1) k, l を整数とする。$|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$が整数であるための必要十分条件は l が偶数であることを示せ。

(2) $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=0$となる整数の組$(k,\ l)$をすべて求めよ。

(3) 整数の組$(k,\ l)$を条件$(k,\ l)\neq(0,\ 0)$のもとで動かすとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$の最小値を与える$(k,\ l)$をすべて求めよ。　[2004]

解答例

(1) $|\vec{a}|=1$, $|\vec{b}|=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $|\vec{b}-\vec{a}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{a}|^2=\dfrac{1}{2}$より,

$$\frac{1}{2}-2\vec{a}\cdot\vec{b}+1=\frac{1}{2},\ \ \vec{a}\cdot\vec{b}=\frac{1}{2}$$

ここで, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2=k^2+kl+\dfrac{1}{2}l^2$

よって, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$が整数である条件は, $\dfrac{1}{2}l^2$が整数すなわちlが偶数である。

(2) $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=0$より, $k^2+kl+\dfrac{1}{2}l^2=0\cdots\cdots\cdots(*)$

(1)より, lは偶数なので, nを整数として, $l=2n$とおくと, $(*)$から,

$$k^2+2kn+2n^2=0,\ (k+n)^2+n^2=0$$

よって, $k+n=n=0$すなわち$(k,\ n)=(0,\ 0)$より, $(k,\ l)=(0,\ 0)$

(3) $F=|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2+kl+\dfrac{1}{2}l^2$とおくと,

(i) lが偶数$(l=2n)$のとき

$F=(k+n)^2+n^2$となり, $(k,\ n)\neq(0,\ 0)$より, Fの最小値は1である。

(ii) lが奇数$(l=2n+1)$のとき

$$F=k^2+k(2n+1)+\frac{1}{2}(2n+1)^2=\left(k+\frac{2n+1}{2}\right)^2+\frac{(2n+1)^2}{4}$$

kは整数より, $k=-n-1$または$k=-n$のとき, Fは最小となり,

$$F=\left(\pm\frac{1}{2}\right)^2+\frac{(2n+1)^2}{4}$$

nは整数より, $n=0$または$n=-1$のとき, Fは最小値$\dfrac{1}{4}+\dfrac{1}{4}=\dfrac{1}{2}$をとる。

(i)(ii)より, Fの最小値は$\dfrac{1}{2}$である。このとき, $(k,\ l)=(k,\ 2n+1)$の組は,

$$(k,\ l)=(-1,\ 1),\ (0,\ 1),\ (0,\ -1),\ (1,\ -1)$$

コメント

(3)は, いわゆる1文字固定の考え方で, 最小値を求めています。

問　題

四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体とする。

(1) $\overrightarrow{AP} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$ で与えられる点 P に対し $|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{DP}|$ が成り立つならば，$l = m = n$ であることを示せ。また，このときの $|\overrightarrow{BP}|$ を l を用いて表せ。

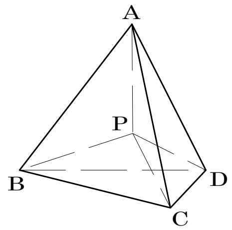
(2) A, B, C, D のいずれとも異なる空間内の点 P と点 Q を，四面体 PBCD と四面体 QABC がともに正四面体になるようにとるとき，$\cos\angle PBQ$ の値を求めよ。

[2002]

解答例

(1) 四面体 ABCD は各辺の長さが 1 の正四面体なので，$|\overrightarrow{AB}| = |\overrightarrow{AC}| = |\overrightarrow{AD}| = 1$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AD}\cdot\overrightarrow{AB} = 1\cdot 1\cdot\cos 60^\circ = \frac{1}{2}$$



ここで，$\overrightarrow{AP} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$ より，

$$\overrightarrow{BP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AB} = (l-1)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{CP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AC} = l\overrightarrow{AB} + (m-1)\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}$$
$$\overrightarrow{DP} = \overrightarrow{AP} - \overrightarrow{AD} = l\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} + (n-1)\overrightarrow{AD}$$

すると，
$$|\overrightarrow{BP}|^2 = |(l-1)\overrightarrow{AB} + m\overrightarrow{AC} + n\overrightarrow{AD}|^2$$
$$= (l-1)^2 + m^2 + n^2 + 2(l-1)m\cdot\frac{1}{2} + 2mn\cdot\frac{1}{2} + 2n(l-1)\cdot\frac{1}{2}$$
$$= (l-1)^2 + m^2 + n^2 + (l-1)m + mn + n(l-1)\cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，$|\overrightarrow{CP}|^2 = l^2 + (m-1)^2 + n^2 + l(m-1) + (m-1)n + nl\cdots\cdots\cdots②$

$$|\overrightarrow{DP}|^2 = l^2 + m^2 + (n-1)^2 + lm + m(n-1) + (n-1)l\cdots\cdots\cdots③$$

$|\overrightarrow{BP}| = |\overrightarrow{CP}|$ なので，①②から，$-2l + 1 - m - n = -2m + 1 - l - n$，$m = l$

$|\overrightarrow{CP}| = |\overrightarrow{DP}|$ なので，②③から，$-2m + 1 - l - n = -2n + 1 - m - l$，$n = m$

したがって，$l = m = n$ となり，このとき①より，

$$|\overrightarrow{BP}|^2 = (l-1)^2 + l^2 + l^2 + (l-1)l + l^2 + l(l-1) = 6l^2 - 4l + 1$$

よって，$|\overrightarrow{BP}| = \sqrt{6l^2 - 4l + 1}$

(2) 四面体 PBCD が正四面体より，(1)を用いて，$|\overrightarrow{BP}|^2 = 6l^2 - 4l + 1 = 1$

$l \neq 0$ から $l = \frac{2}{3}$ なので，$\overrightarrow{BP} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$

同様にして，四面体 QABC が正四面体なので，$\overrightarrow{DQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{DA} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{DC}$

$$\overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AD} = -\frac{2}{3}\overrightarrow{AD} + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AD}) + \frac{2}{3}(\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}),\quad \overrightarrow{AQ} = \frac{2}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$$

すると，$\overrightarrow{BQ} = \overrightarrow{AQ} - \overrightarrow{AB} = -\frac{1}{3}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{3}\overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AD}$

これより，$\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}=\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)\cdot\left(-\dfrac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AD}}\right)$

$$=\frac{1}{9}-\frac{1}{9}+\frac{1}{6}-\frac{1}{9}+\frac{4}{9}-\frac{1}{3}-\frac{1}{9}+\frac{2}{9}-\frac{2}{3}=-\frac{7}{18}$$

以上より，$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|=1$ から，$\cos\angle\mathrm{PBQ}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{BP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{BP}}||\overrightarrow{\mathrm{BQ}}|}=-\dfrac{7}{18}$

コメント

空間ベクトルの基本を問う問題ですが，計算量はあります。

問　題

四面体 OABC において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$，$\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおく。線分 OA, OB, OC, BC, CA, AB の中点をそれぞれ L, M, N, P, Q, R とし，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$，$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}$，$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}$ とおく。

(1) 線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わることを示せ。

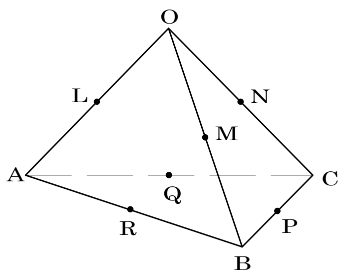
(2) $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ を $\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ を用いて表せ。

(3) 直線 LP, MQ, NR が互いに直交するとする。X を $\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ となる空間の点とするとき，四面体 XABC の体積および四面体 OABC の体積を $|\vec{p}|$，$|\vec{q}|$，$|\vec{r}|$ を用いて表せ。 [2001]

解答例

(1) 線分 LP の中点を S とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OL}}+\overrightarrow{\mathrm{OP}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$$



これから，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OM}}+\overrightarrow{\mathrm{OQ}})$ と表せ，点 S は線分 MQ の中点に一致する。

また，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{ON}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}})$ とも表せるので，S は線分 NR の中点にも一致する。

よって，線分 LP, MQ, NR は 1 点で交わる。

(2) 条件より，$\vec{p}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OL}}=\frac{1}{2}(-\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$ ………①

$$\vec{q}=\overrightarrow{\mathrm{MQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{1}{2}(\vec{a}-\vec{b}+\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots ②$$

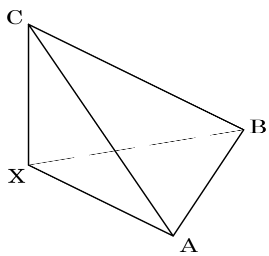
$$\vec{r}=\overrightarrow{\mathrm{NR}}=\overrightarrow{\mathrm{OR}}-\overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}-\vec{c})\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より $\vec{a}=\vec{q}+\vec{r}$，①③より $\vec{b}=\vec{p}+\vec{r}$，①②より $\vec{c}=\vec{p}+\vec{q}$

(3) 条件より，$\overrightarrow{\mathrm{XA}}=-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=-\overrightarrow{\mathrm{LP}}=-\vec{p}$

$$\overrightarrow{\mathrm{XB}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{b}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{r}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{q}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{XC}}=\overrightarrow{\mathrm{AC}}-\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\vec{c}-\vec{a}-\vec{p}=\vec{p}+\vec{q}-\vec{q}-\vec{r}-\vec{p}=-\vec{r}$$



$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$ が互いに直交することより，四面体 XABC の体積は，

$$\frac{1}{3}\Big(\frac{1}{2}|\vec{p}||\vec{q}|\Big)|\vec{r}|=\frac{1}{6}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{AX}}=\overrightarrow{\mathrm{LP}}$ より，L から平面 ABC の下ろした垂線の長さと，X から平面 ABC の下ろした垂線の長さは等しいので，四面体 XABC の体積と四面体 LABC の体積は等しい。

すると，L は OA の中点から，四面体 OABC の体積は，四面体 XABC の 2 倍となり，$\dfrac{1}{3}|\vec{p}||\vec{q}||\vec{r}|$である。

コメント

(3)で与えられた条件によって，四面体 OABC の 4 つの面は合同になります。このとき，この四面体は直方体に埋め込まれるということが元になっています。この考え方を利用する問題もときどき見かけます。

問　題

空間の点$(10,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 9 の球面をS_1とし，点$(0,\ 10,\ 0)$を中心とする半径 8 の球面をS_2とする。S_1とS_2に接し原点を通る直線の長さ 1 の方向ベクトル$(a,\ b,\ c)$ $(c \geqq 0)$をすべて求めよ。 [1999]

解答例

条件より，$S_1:(x-10)^2+y^2+z^2=81$ ………①

$S_2:x^2+(y-10)^2+z^2=64$ ………②

S_1とS_2に接し原点を通る直線は，$(x,\ y,\ z)=t(a,\ b,\ c)$ ………③

ただし，$a^2+b^2+c^2=1$ ………④

まず③を①に代入して，$(at-10)^2+(bt)^2+(ct)^2=81$

$$(a^2+b^2+c^2)t^2-20at+19=0$$

④から，$t^2-20at+19=0$

①と③が接するので，$D/4=100a^2-19=0$，$a=\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10}$ ………⑤

次に③を②に代入して，$(at)^2+(bt-10)^2+(ct)^2=64$

$$(a^2+b^2+c^2)t^2-20bt+36=0$$

④から，$t^2-20bt+36=0$

②と③が接するので，$D/4=100b^2-36=0$，$b=\pm\dfrac{3}{5}$ ………⑥

④⑤⑥より，$\dfrac{19}{100}+\dfrac{9}{25}+c^2=1$

$c\geqq 0$ なので，$c=\dfrac{3\sqrt{5}}{10}$

以上より，$(a,\ b,\ c)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{19}}{10},\ \pm\dfrac{3}{5},\ \dfrac{3\sqrt{5}}{10}\right)$（複号任意）

コメント

図形的な位置関係を考えてもよいのですが，ここでは代数的に解いてみました。こうすると，数式のもつ威力が感じられます。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　6 以上の整数 n に対して不等式 $2^n > n^2+7$ が成り立つことを数学的帰納法により示せ。

(2)　等式 $p^q = q^p + 7$ を満たす素数の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。　[2016]

解答例

(1)　6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つことを数学的帰納法で示す。

(i)　$n=6$ のとき　$2^n = 64$，$n^2+7=43$ より成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$2^k > k^2+7$ と仮定すると，$2^{k+1} > 2(k^2+7)$ となり，

$$2(k^2+7)-\{(k+1)^2+7\} = k^2-2k+6 = k(k-2)+6 > 0$$

すると，$2(k^2+7) > (k+1)^2+7$ から，$2^{k+1} > (k+1)^2+7$

これより，$n=k+1$ のときも成り立つ。

(i)(ii)より，6 以上の整数 n に対して，$2^n > n^2+7$ が成り立つ。

(2)　素数 p, q に対して，$p^q = q^p+7$ ………①

(i)　$p=2$ のとき　①から $2^q = q^2+7$ ………②

(1)から $q \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^q > q^2+7$ となり②は成立しない。そこで，$q=2,\ 3,\ 5$ のときを調べる。

(a)　$q=2$ のとき　$2^q=4$，$q^2+7=11$ となり，②は成立しない。

(b)　$q=3$ のとき　$2^q=8$，$q^2+7=16$ となり，②は成立しない。

(c)　$q=5$ のとき　$2^q=32$，$q^2+7=32$ となり，②は成立する。

(ii)　$p \geqq 3$ のとき　p は奇数となり，$q \geqq 3$ すなわち q も奇数の場合については，p^q，q^p はともに奇数から，①は両辺の偶奇が異なり，成立しない。

そこで，$q=2$ のときについて，①から $p^2 = 2^p+7$ ………③

(1)から $p \geqq 6$ すなわち 7 以上の素数について，$2^p+7 > (p^2+7)+7$ となり③は成立しない。そこで，$p=3,\ 5$ のときを調べる。

(a)　$p=3$ のとき　$p^2=9$，$2^p+7=15$ となり，③は成立しない。

(b)　$p=5$ のとき　$p^2=25$，$2^p+7=39$ となり，③は成立しない。

(i)(ii)より，①を満たす素数 p, q は，$(p,\ q)=(2,\ 5)$ のみである。

コメント

素数が題材の誘導つき不定方程式の問題です。素数で偶数なのは 2 だけということがポイントになっています。なお，(2)で p^q と q^p の偶奇が異なる点に注目すると，少し解答例を短縮できます。

問　題

$k\geqq 2$ と n を自然数とする。n が k 個の連続する自然数の和であるとき，すなわち，$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ が成り立つような自然数 m が存在するとき，n を k-連続和とよぶことにする。ただし，自然数とは 1 以上の整数のことである。

(1) n が k-連続和であることは，次の条件(A), (B)の両方が成り立つことと同値であることを示せ。

(A) $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数である。　　(B) $2n>k^2$ が成り立つ。

(2) f を自然数とする。$n=2^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ は存在しないことを示せ。

(3) f を自然数とし，p を 2 でない素数とする。$n=p^f$ のとき，n が k-連続和となるような自然数 $k\geqq 2$ の個数を求めよ。　[2015]

解答例

(1) n が k-連続和であるとき，$n=m+(m+1)+\cdots+(m+k-1)$ より，

$$n=\frac{m+m+k-1}{2}\cdot k\,,\ \ 2n=k(2m+k-1)\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$2m=\dfrac{2n}{k}-k+1$ となり，$m=\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}\cdots\cdots\cdots②$

②より，$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ は整数であり，$m\geqq 1$ から $\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}\geqq 1$ となり，$\dfrac{2n-k^2}{2k}\geqq\dfrac{1}{2}$

よって，$2n-k^2>0$ すなわち $2n>k^2$ が成り立つ。

逆に，$\dfrac{n}{k}-\dfrac{k}{2}+\dfrac{1}{2}$ が整数で，$2n>k^2$ のとき，m' を整数として，

$$m'=\frac{n}{k}-\frac{k}{2}+\frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$m'=\dfrac{2n-k^2}{2k}+\dfrac{1}{2}$ となり，$2n>k^2$ より $m'>\dfrac{1}{2}$ から m' は自然数である。

このとき，③より $n=m'+(m'+1)+\cdots+(m'+k-1)$ となるので，n は k-連続和である。

(2) f を自然数とし，2^f が k-連続和になると仮定すると，①より，

$$2\cdot 2^f=k(2m+k-1)\,,\ \ 2^{f+1}=k(2m+k-1)\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$(2m+k-1)-k=2m-1$ であるが，$2m-1$ が奇数なので，$2m+k-1$ と k の偶奇は異なる，すなわち $2m+k-1$ と k のいずれか一方は奇数である。さらに，この奇数は，$2m+k-1>k\geqq 2$ から 3 以上となる。

すると，④は不成立となり，2^f が k-連続和となる自然数 $k\geqq 2$ は存在しない。

(3)　f を自然数, p を 3 以上の素数として，p^f が k-連続和となるとき，①より，

$$2p^f = k(2m+k-1) \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで，k が偶数すなわち $k = 2p^i$ $(i \geqq 0)$ のとき，$2m+k-1$ は奇数となり，整数 m は存在する。また，k が奇数すなわち $k = p^j$ $(j \geqq 1)$ のとき，$2m+k-1$ は偶数となり，整数 m は存在する。

したがって，以下，k が $2p^f$ の約数で，m が自然数すなわち $k^2 < 2p^f$ ……⑥となる k の個数を求める。

そこで，p が 3 以上に注意して f を偶奇に分けると，l を自然数として，

(i)　f が偶数 $(f = 2l)$ の場合

$k = 2p^i$ のとき，⑥より $4p^{2i} < 2p^{2l}$，$p^{2i} < \dfrac{1}{2}p^{2l}$ となり，$i = 0,\ 1,\ \cdots,\ l-1$

$k = p^j$ のとき，⑥より $p^{2j} < 2p^{2l}$ となり，$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ l$

これより，k の個数は，$l + l = 2l = f$ である。

(ii)　f が奇数 $(f = 2l+1)$ の場合

$k = 2p^i$ のとき，⑥より $4p^{2i} < 2p^{2l+1}$，$p^{2i} < \dfrac{p}{2}p^{2l}$ となり，$i = 0,\ 1,\ \cdots,\ l$

$k = p^j$ のとき，⑥より $p^{2j} < 2p^{2l+1} = 2p \cdot p^{2l}$ となり，$j = 1,\ 2,\ \cdots,\ l$

これより，k の個数は，$(l+1) + l = 2l+1 = f$ である。

(iii)　$f = 1$ の場合

$k = 2p^i$ のとき，⑥より $4p^{2i} < 2p$，$p^{2i} < \dfrac{p}{2}$ となり，$i = 0$ だけである。

$k = p^j$ のとき，⑥より $p^{2j} < 2p$ となり，満たす j は存在しない。

これより，k の個数は，$1 = f$ である。

(i)～(iii)より，p^f が k-連続和となる自然数 $k \geqq 2$ の個数は f となる。

コメント

整数の連続和が題材となっているかなり難しめの問題です。自然数 m が存在するという条件のとらえ方が問われています。なお，(3)で f が奇数の場合に $f = 2l-1$ としなかったのは，$f = 1$ $(l = 1)$ のときの記述がややこしくなるためです。

問　題

n を 2 以上の自然数とし，整式 x^n を $x^2-6x-12$ で割った余りを a_nx+b_n とする。

(1)　a_2，b_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1} を a_n と b_n を用いて表せ。

(3)　各 n に対して，a_n と b_n の公約数で素数となるものをすべて求めよ。　[2007]

解答例

(1)　x^2 を $x^2-6x-12$ で割ると，$x^2=(x^2-6x-12)\cdot 1+(6x+12)$ より，

$$a_2=6,\ b_2=12$$

(2)　x^n を $x^2-6x-12$ で割った商を $q_n(x)$ とおくと，条件より，

$$x^n=(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx+b_n)$$

すると，$x^{n+1}=x(x^2-6x-12)q_n(x)+(a_nx^2+b_nx)$

$$=x(x^2-6x-12)q_n(x)+a_n\left\{(x^2-6x-12)+(6x+12)\right\}+b_nx$$

$$=(x^2-6x-12)\{xq_n(x)+a_n\}+(6a_n+b_n)x+12a_n$$

ここで，x^{n+1} を $x^2-6x-12$ で割った余りが $a_{n+1}x+b_{n+1}$ より，

$$a_{n+1}=6a_n+b_n,\ b_{n+1}=12a_n\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　(1)より $a_2=6$，$b_2=12$ なので，(*)から，帰納的に a_n と b_n はともに 6 の倍数であり，素数の公約数として, 2 と 3 をもつ。

さて，a_n と b_n が 5 以上の素数 m を公約数としてもつとき, k, l を整数として,

$$a_n=m\cdot k,\ b_n=m\cdot l$$

(*)から，$6a_{n-1}+b_{n-1}=m\cdot k$，$12a_{n-1}=m\cdot l$

$$2^2\cdot 3a_{n-1}=m\cdot l,\ 2b_{n-1}=m(2k-l)$$

$m\geqq 5$ より，a_{n-1} と b_{n-1} は素数 m を公約数としてもつ。

すると，帰納的に，a_2 と b_2 は素数 m を公約数としてもつことになるが，これは $a_2=6$，$b_2=12$ に反する。

以上より，a_n と b_n の公約数で素数となるものは 2 と 3 のみである。

コメント

(3)では，記述はしていませんが，a_3 と b_3 も計算をして結論を推測しています。その後，簡略に書きましたが，帰納法を用いて証明をしています。

問　題

数列$\{\alpha_n\}$を初項$\dfrac{4}{5}$，公比 2 の等比数列，数列$\{\beta_n\}$を初項$\dfrac{1}{5}$，公比$-\dfrac{1}{2}$の等比数列とする。

(1)　$n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5$のとき，α_nの小数部分を求めよ。

(2)　$a_n=\alpha_n+\beta_n$の小数部分b_nを求めよ。

(3)　数列$\{b_n\}$の初項から第 100 項までの和の整数部分を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　条件より，$\alpha_n=\dfrac{4}{5}\cdot 2^{n-1}=\dfrac{1}{5}\cdot 2^{n+1}$

$\alpha_1=\dfrac{4}{5}$より$[\,\alpha_1\,]=0$となり，小数部分は$\dfrac{4}{5}$

$\alpha_2=\dfrac{8}{5}$より$[\,\alpha_2\,]=1$となり，小数部分は$\dfrac{8}{5}-1=\dfrac{3}{5}$

$\alpha_3=\dfrac{16}{5}$より$[\,\alpha_3\,]=3$となり，小数部分は$\dfrac{16}{5}-3=\dfrac{1}{5}$

$\alpha_4=\dfrac{32}{5}$より$[\,\alpha_4\,]=6$となり，小数部分は$\dfrac{32}{5}-6=\dfrac{2}{5}$

$\alpha_5=\dfrac{64}{5}$より$[\,\alpha_5\,]=12$となり，小数部分は$\dfrac{64}{5}-12=\dfrac{4}{5}$

(2)　$k=1,\ 2,\ 3,\ 4$として，$\dfrac{k}{5}\times 2^4=\dfrac{16}{5}k=3k+\dfrac{k}{5}$となるので，$\alpha_n$の小数部分と$\alpha_{n+4}$の小数部分は等しい。

したがって，α_nの小数部分は周期 4 の周期数列となり，(1)より$\dfrac{4}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$をくり返す。すなわちα_nの小数部分は，$m\geqq 1$として，$n=4m-3$のとき$\dfrac{4}{5}$，$n=4m-2$のとき$\dfrac{3}{5}$，$n=4m-1$のとき$\dfrac{1}{5}$，$n=4m$のとき$\dfrac{2}{5}$となる。

さて，条件より$\beta_n=\dfrac{1}{5}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-1}$なので，$\beta_1=\dfrac{1}{5}$，$n\geqq 2$で$|\beta_n|\leqq\dfrac{1}{10}$となる。

すると，$n\geqq 2$のとき，$a_n=\alpha_n+\beta_n$より，$\alpha_n-\dfrac{1}{10}\leqq a_n\leqq\alpha_n+\dfrac{1}{10}$となり，しかも$\alpha_n$の小数部分は$\dfrac{1}{5}$，$\dfrac{2}{5}$，$\dfrac{3}{5}$，$\dfrac{4}{5}$なので，

$$[\,a_n\,]=[\,\alpha_n+\beta_n\,]=[\,\alpha_n\,]$$

すなわち，a_nの小数部分b_nは，α_nの小数部分にβ_nを加えたものになる。

よって, m を $m \geqq 1$ の整数として,

$$b_n = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-3} = \frac{3}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m-2 \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-2} = \frac{1}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m-1 \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m-1} = \frac{2}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m \text{のとき})$$

$$b_n = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m} = \frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1} \ (n = 4m+1 \text{のとき})$$

なお, $a_1 = \alpha_1 + \beta_1 = \dfrac{4}{5} + \dfrac{1}{5} = 1$ なので, 小数部分 b_1 は, $b_1 = 0$ となる。

(3) まず, $c_m = b_{4m-2} + b_{4m-1} + b_{4m} + b_{4m+1}$ とおくと,

$$c_m = 2 + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{4m}(-8+4-2+1) = 2 - \left(\frac{1}{16}\right)^m$$

すると, $\displaystyle\sum_{k=1}^{100} b_k = b_1 + \sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{k=2}^{100} b_k = \sum_{m=1}^{25} c_m - b_{101}$

$$= 2 \times 25 - \frac{\frac{1}{16}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\}}{1 - \frac{1}{16}} - \left\{\frac{4}{5} + \frac{1}{5}\left(-\frac{1}{2}\right)^{100}\right\}$$

$$= 50 - \frac{1}{15}\left\{1 - \left(\frac{1}{16}\right)^{25}\right\} - \frac{4}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

$$= 49 + \frac{2}{15} - \frac{2}{15}\left(\frac{1}{16}\right)^{25}$$

以上より, 数列 $\{b_n\}$ の初項から第 100 項までの和の整数部分は 49 である。

コメント

まず(1)で周期性に気付き, 次に β_n は n が大きくなると, その絶対値がごく小さい値となり, a_n と α_n の値には, 違いがほとんどないという感覚が必要です。

問　題

A 君と B 君はそれぞれ，0 から 5 までの数字が 1 つずつ書かれた 6 枚のカードが入った箱を 1 つもっている。2 人は，自分の箱の中から無作為に 3 枚のカードを取り出して得点を競うゲームをする。取り出された 3 枚のカードに 0 が含まれていない場合の得点は 3 枚のカードに書かれた数の平均値とし，0 が含まれている場合は残り 2 枚のカードに書かれた数の合計とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A 君，B 君の少なくとも一方が 0 を取り出して，しかも双方とも得点が 3 点となる確率を求めよ。

(2) A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない確率を求めよ。 [2017]

解答例

(1) 6 枚のカードから無作為に 3 枚のカードを取り出す ${}_6\mathrm{C}_3 = 20$ 通りが同様に確からしいとする。このとき，与えられた条件で，取り出したカードに書かれた数と得点との関係を列挙すると右表のようになる。

カード	得点	カード	得点
1, 2, 3	2	0, 1, 2	3
1, 2, 4	$\frac{7}{3}$	0, 1, 3	4
1, 2, 5	$\frac{8}{3}$	0, 1, 4	5
1, 3, 4	$\frac{8}{3}$	0, 1, 5	6
1, 3, 5	3	0, 2, 3	5
1, 4, 5	$\frac{10}{3}$	0, 2, 4	6
2, 3, 4	3	0, 2, 5	7
2, 3, 5	$\frac{10}{3}$	0, 3, 4	7
2, 4, 5	$\frac{11}{3}$	0, 3, 5	8
3, 4, 5	4	0, 4, 5	9

さて, A 君, B 君の少なくとも一方が 0 を取り出し，双方とも得点が 3 点となるのは，

(i) A 君，B 君ともに 0 を取り出すとき

その確率は，$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{1}{400}$

(ii) A 君のみ 0 を取り出すとき

その確率は，$\dfrac{1}{20}\times\dfrac{2}{20}=\dfrac{2}{400}$

(iii) B 君のみ 0 を取り出すとき

その確率は，$\dfrac{2}{20}\times\dfrac{1}{20}=\dfrac{2}{400}$

(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1}{400}+\dfrac{2}{400}+\dfrac{2}{400}=\dfrac{1}{80}$ となる。

(2) (1)の表より，得点が 2，8，9，$\dfrac{7}{3}$，$\dfrac{11}{3}$ となる確率は $\dfrac{1}{20}$ ずつ，得点が 4，5，6，7，$\dfrac{8}{3}$，$\dfrac{10}{3}$ となる確率は $\dfrac{2}{20}$ ずつ，得点が 3 となる確率が $\dfrac{3}{20}$ である。

これより，A 君と B 君が同じ得点になる確率は，

$$\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}\times5+\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}\times6+\frac{3}{20}\times\frac{3}{20}=\frac{19}{200}$$

すると, A 君の得点が B 君の得点より大きい確率は, A 君と B 君の対等性より,

$$\frac{1}{2}\left(1-\frac{19}{200}\right)=\frac{181}{400}$$

次に, A 君の得点が B 君の得点より大きく，しかも A 君の得点が整数でないとき, A 君の得点で場合分けをすると,

(i)　A 君が $\frac{7}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{7}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{1}{20}\times\frac{1}{20}=\frac{1}{400}$

(ii)　A 君が $\frac{8}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{8}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{2}{20}\times\frac{2}{20}=\frac{4}{400}$

(iii) A 君が $\frac{10}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{10}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{2}{20}\times\frac{7}{20}=\frac{14}{400}$

(iv) A 君が $\frac{11}{3}$ 点のとき　B 君は $\frac{11}{3}$ 点より小なので，確率は $\frac{1}{20}\times\frac{9}{20}=\frac{9}{400}$

(i)～(iv)より，この確率は，$\frac{1}{400}+\frac{4}{400}+\frac{14}{400}+\frac{9}{400}=\frac{7}{100}$ となる。

以上より，A 君の得点が B 君の得点より大きいときの，A 君の得点が整数ではない条件付き確率は,

$$\frac{7}{100}\div\frac{181}{400}=\frac{28}{181}$$

コメント

センター試験でよく見られる数え上げタイプの確率の基本問題です。20 通りの場合を書き上げて準備することがすべてです。

問　題

a, b, c を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とする。

(1)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。

(2)　2 次方程式 $ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$a,\ b,\ c$ を 1 以上 7 以下の互いに異なる整数とするとき，$ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつ条件は，k を 0 以上の整数として，

$$b^2-4ac=k^2\cdots\cdots\cdots①$$

すると，①から $b^2 \geqq 4ac \geqq 8$ となり，$b=3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7$ である。

(i)　$b=3$ のとき　①より $9-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(1,\ 2)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$ である。

(ii)　$b=4$ のとき　①より $16-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(0,\ 4)$，$(4,\ 3)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 3)$，$(3,\ 1)$ である。

(iii)　$b=5$ のとき　①より $25-k^2=4ac$ となり，$(k^2,\ ac)=(1,\ 6)$，$(9,\ 4)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(1,\ 4)$，$(4,\ 1)$ である。

(iv)　$b=6$ のとき　①より $36-k^2=4ac$ となり，

$(k^2,\ ac)=(0,\ 9)$，$(4,\ 8)$，$(16,\ 5)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(2,\ 4)$，$(4,\ 2)$，$(1,\ 5)$，$(5,\ 1)$ である。

(v)　$b=7$ のとき　①より $49-k^2=4ac$ となり，

$(k^2,\ ac)=(1,\ 12)$，$(9,\ 10)$，$(25,\ 6)$

よって，$(a,\ c)$ の組は，$(2,\ 6)$，$(6,\ 2)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 3)$，$(2,\ 5)$，$(5,\ 2)$，$(1,\ 6)$，$(6,\ 1)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$ である。

(i)〜(v)より，組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は，$2+2+6+4+10=24$ である。

(2)　$ax^2+bx+c=0$ が有理数解をもつとき，①から $x=\dfrac{-b\pm k}{2a}\cdots\cdots②$ となり，

(i)　$b=3$ のとき　②より $x=\dfrac{-3\pm1}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，$a=1,\ 2$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(ii)　$b=4$ のとき　②より $x=\dfrac{-4\pm2}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は，$a=1,\ 3$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iii)　$b=5$ のとき　②より $x=\dfrac{-5\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は,

(iii-i)　$x=\dfrac{-5\pm 1}{2a}$ に対して，$a=1,\ 2,\ 3$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもち，

$a=6$ のとき整数解をもたない。

(iii-ii)　$x=\dfrac{-5\pm 3}{2a}$ に対して，$a=1,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iv)　$b=6$ のとき　②より $x=\dfrac{-6\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は,

(iv-i)　$x=\dfrac{-6\pm 2}{2a}$ に対して，$a=2,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(iv-ii)　$x=\dfrac{-6\pm 4}{2a}$ に対して，$a=1,\ 5$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(v)　$b=7$ のとき　②より $x=\dfrac{-7\pm k}{2a}$ となり，$ax^2+bx+c=0$ は,

(v-i)　$x=\dfrac{-7\pm 1}{2a}$ に対して，$a=2,\ 3,\ 4$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもち，

$a=6$ のとき整数解をもたない。

(v-ii)　$x=\dfrac{-7\pm 3}{2a}$ に対して，$a=2,\ 5$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(v-iii)　$x=\dfrac{-7\pm 5}{2a}$ に対して，$a=1,\ 2,\ 3,\ 6$ のとき少なくとも 1 つ整数解をもつ。

(i)～(v)より，有理数解をもつものの，2 つとも整数解でない組 $(a,\ b,\ c)$ は,

$(6,\ 5,\ 1)$，$(6,\ 7,\ 2)$

以上より，$ax^2+bx+c=0$ が少なくとも 1 つの整数解をもつような組 $(a,\ b,\ c)$ の総数は，(1)から $24-2=22$ である。

コメント

2 次方程式の解を題材にした場合の数の問題です。注意力が要求されるため，かなりの時間が必要です。解答例では，(2)も工夫なく 24 通りを調べています。

問　題

サイコロを 3 回振って出た目の数をそれぞれ順に $a,\ b,\ c$ とする。以下の問いに答えよ。

(1)　a, b, c がある直角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。

(2)　a, b, c がある鈍角三角形の 3 辺の長さとなる確率を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　a, b, c が 3 辺の長さの三角形が直角三角形となるのは，斜辺の長さが c のとき，

$$a^2+b^2=c^2\cdots\cdots\cdots①$$

そこで，a^2 と b^2，およびその和をまとめると，右表のようになる。

a^2 \ b^2	1	4	9	16	25	36
1	2	5	10	17	26	37
4	5	8	13	20	29	40
9	10	13	18	25	34	45
16	17	20	25	32	41	52
25	26	29	34	41	50	61
36	37	40	45	52	61	72

すると，和が平方数なのは 25 だけより，①を満たすのは，

$$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (4,\ 3,\ 5)$$

また，斜辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様なので，求める直角三角形となる確率は，$\dfrac{2\times 3}{6^3}=\dfrac{1}{36}$ である。

(2)　a, b, c が 3 辺の長さの三角形が鈍角三角形となるのは，最大辺の長さが c のとき，

$$a+b>c\cdots\cdots\cdots②,\ \ a^2+b^2<c^2\cdots\cdots\cdots③$$

まず，$c=1,\ 2$ では成立しないので $c\geqq 3$ となり，それぞれの場合を(1)の表をもとに調べる。

(i)　$c=3$ のとき　②より $a+b>3$，③より $a^2+b^2<9$ から，$(a,\ b)=(2,\ 2)$

(ii)　$c=4$ のとき
②より $a+b>4$，③より $a^2+b^2<16$ から，$(a,\ b)=(2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(iii)　$c=5$ のとき
②より $a+b>5$，③より $a^2+b^2<25$ から，$(a,\ b)=(2,\ 4),\ (3,\ 3),\ (4,\ 2)$

(iv)　$c=6$ のとき　②より $a+b>6$，③より $a^2+b^2<36$ から，
$(a,\ b)=(2,\ 5),\ (3,\ 4),\ (4,\ 3),\ (5,\ 2),\ (3,\ 5),\ (4,\ 4),\ (5,\ 3)$

(i)〜(iv)より，$(a,\ b)$ の組は $1+2+3+7=13$ 通りとなる。

また，最大辺の長さが $a,\ b$ の場合も同様に 13 通りずつなので，求める鈍角三角形となる確率は，$\dfrac{13\times 3}{6^3}=\dfrac{13}{72}$ である。

コメント

丁寧に数え上げるタイプの確率の問題です。　表を作ると数えもれが防げます。

問　題

サイコロを 3 回投げて出た目の数を順に p_1，p_2，p_3 とし，x の 2 次方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$……(＊)を考える。

(1) 方程式(＊)が実数解をもつ確率を求めよ。

(2) 方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta=1$ が成り立つ確率を求めよ。

(3) 方程式(＊)が実数でない 2 つの複素数解 α，β をもち，かつ $\alpha\beta<1$ が成り立つ確率を求めよ。 [2015]

解答例

(1) 方程式 $2p_1x^2+p_2x+2p_3=0$ …(＊)が実数解をもつ条件は，

$$D={p_2}^2-16p_1p_3\geqq 0,\ \ p_2\geqq 4\sqrt{p_1p_3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

①より，$p_2\geqq 4$ となり，$p_2=4$，5，6 のときを考える。

(i) $p_2=4$ のとき　①より $1\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$1\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(ii) $p_2=5$ のとき　①より $\dfrac{5}{4}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{25}{16}\geqq p_1p_3$ となり，$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$

(iii) $p_2=6$ のとき　①より $\dfrac{3}{2}\geqq\sqrt{p_1p_3}$，$\dfrac{9}{4}\geqq p_1p_3$ となり，

$(p_1,\ p_3)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$，$(2,\ 1)$

(i)～(iii)より，求める確率は，$\dfrac{1+1+3}{6^3}=\dfrac{5}{216}$ である。

(2) 方程式(＊)が虚数解 α，β をもつ条件は，$D<0$ より $p_2<4\sqrt{p_1p_3}$ ………②

さらに，$\alpha\beta=1$ である条件は，$\dfrac{2p_3}{2p_1}=1$ より，$p_3=p_1$ ………③

②③より，$p_2<4\sqrt{{p_1}^2}=4p_1$ ………④

(i) $p_1=p_3=1$ のとき　④より $p_2<4$，$p_2=1$，2，3

(ii) $p_1=p_3\geqq 2$ のとき　$4p_1\geqq 8$ となるので，④より，$p_2=1$，2，3，4，5，6

(i)～(ii)より，求める確率は，$\dfrac{3+6\cdot 5}{6^3}=\dfrac{11}{72}$ である。

(3) 方程式(＊)が虚数解 α，β をもつ確率は，(1)から，$1-\dfrac{5}{216}=\dfrac{211}{216}$ である。

このとき，$\alpha\beta<1$ である条件は，(2)と同様にすると $p_3<p_1$ となる。

すると，$p_3<p_1$ の場合と $p_3>p_1$ の場合は対等なので，(2)より求める確率は，

$$\frac{1}{2}\left(\frac{211}{216}-\frac{11}{72}\right)=\frac{89}{216}$$

コメント

よく見かける確率の頻出題です。場合分けも複雑ではなく，内容は基本的です。

問　題

1, 2, 3, 4, 5 のそれぞれの数字が書かれた玉が 2 個ずつ，合計 10 個ある。

(1)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 2 個の玉を取り出す。書かれている 2 つの数字の積が 10 となる確率を求めよ。

(2)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 4 個の玉を取り出す。書かれている 4 つの数字の積が 100 となる確率を求めよ。

(3)　10 個の玉を袋に入れ，よくかき混ぜて 6 個の玉を順に取り出す。1 個目から 3 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積と，4 個目から 6 個目の玉に書かれている 3 つの数字の積が等しい確率を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　10 個の玉から 2 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_2=45$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 2 つの数字の積が 10 となるのは，$10=2\times5$ より，${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{4}{45}$ である。

(2)　10 個の玉から 4 個を取り出す ${}_{10}\mathrm{C}_4=210$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，書かれている 4 つの数字の積が 100 となるのは，$100=2^2\times5^2$ より，次の 2 つの場合がある。

(i)　4 つの数字が $(2,\ 2,\ 5,\ 5)$ の場合　1 通り

(ii)　4 つの数字が $(1,\ 4,\ 5,\ 5)$ の場合　${}_2\mathrm{C}_1\times{}_2\mathrm{C}_1=4$ 通り

(i)(ii)より，求める確率は，$\dfrac{1+4}{210}=\dfrac{1}{42}$ である。

(3)　10 個の玉から 6 個を順に取り出す ${}_{10}\mathrm{P}_6$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，1 個目から 3 個目，4 個目から 6 個目に書かれている数字の組合せを，それぞれ A, B とすると，A の 3 つの数字の積と B の 3 つの数字の積が等しい場合は，

(i)　$A=B$ のとき

数字の選び方が ${}_5\mathrm{C}_3$ 通り，A, B への数字の振り分けが 2^3 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，${}_5\mathrm{C}_3\times2^3\times3!\times3!=5\times2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(ii)　$A=(2,\ 2,\ 3)$, $B=(1,\ 4,\ 3)$，または $A=(1,\ 4,\ 3)$, $B=(2,\ 2,\ 3)$ のとき

A, B への数字の振り分けが $2\times2^2=2^3$ 通り，出る順序が $3!\times3!$ 通りより，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(iii)　$A=(2,\ 2,\ 5)$, $B=(1,\ 4,\ 5)$，または $A=(1,\ 4,\ 5)$, $B=(2,\ 2,\ 5)$ のとき

(ii)と同様に，$(2^3\times3!\times3!)\times2=2^4\times(3!)^2$ 通りである。

(i)～(iii)より，求める確率は,

$$\frac{(5+1+1)\times 2^4\times(3!)^2}{{}_{10}\mathrm{P}_6}=\frac{7\times 2^4\times(3!)^2}{10\times 9\times 8\times 7\times 6\times 5}=\frac{2}{75}$$

コメント

$2\times 2=1\times 4$ に注目するために(2)の設問があり，それが(3)へとつながっています。注意深さの要求される問題です。

問　題

A, B の 2 人が, サイコロを 1 回ずつ交互に投げるゲームを行う。自分の出したサイコロの目を合計して先に 6 以上になった方を勝ちとし, その時点でゲームを終了する。A から投げ始めるものとし, 以下の問いに答えよ。

(1) A がちょうど 2 回投げて A が勝ちとなる確率を求めよ。

(2) B がちょうど 2 回投げて B が勝ちとなる確率を求めよ。

(3) B がちょうど 3 回投げて, その時点でゲームが終了していない確率を求めよ。

[2013]

解答例

(1) 右表は, 一番左側の列が 1 回目の目, 一番上側の行が 2 回目の目であり, それらの目とその和との関係を表したものである。

	1	2	3	4	5	6
1	2	3	4	5	6	7
2	3	4	5	6	7	8
3	4	5	6	7	8	9
4	5	6	7	8	9	10
5	6	7	8	9	10	11
6	7	8	9	10	11	12

さて, A→B→A と投げて A が勝ちとなるのは, まず B は 5 以下の目を出す。A は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ, 1 回目との目の和が 6 以上を出すときになり, 右表から 20 通りの場合がある。よって, この確率は,

$$\frac{5}{6}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{54}$$

(2) A→B→A→B と投げて B が勝ちとなるのは, まず A は 1 回目と 2 回目の目の和が 5 以下であり, 右上表から 10 通りの場合がある。さらに, B は 1 回目の目が 5 以下で 2 回目を投げ, 1 回目との目の和が 6 以上であり, これは右上表から 20 通りの場合がある。よって, この確率は,

$$\frac{10}{36}\times\frac{20}{36}=\frac{25}{162}$$

(3) A→B→A→B→A→B と投げてゲームが終了しないのは, A, B とも 1 回目と 2 回目と 3 回目の目の和が 5 以下である。

(i) 1 回目の目が 1 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)

(ii) 1 回目の目が 2 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1), (1, 2), (2, 1)

(iii) 1 回目の目が 3 のとき

(2 回目, 3 回目)＝(1, 1)

(i)(ii)(iii)より，合わせて，$6+3+1=10$ 通りの場合がある。

したがって，求める確率は,

$$\frac{10}{216}\times\frac{10}{216}=\frac{25}{11664}$$

コメント

確率の基本題ですが，センター試験風に表を作ってしまえば，その後の計算はほとんど不要です。

問　題

袋 A, 袋 B のそれぞれに，1 から N の自然数がひとつずつ書かれた N 枚のカードが入っている。これらのカードをよくかきまぜて取り出していく。以下の問いに答えよ。

(1)　$N=4$ とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，数字が同じかどうかを確認する操作を繰り返す。ただし，取り出したカードは元には戻さないものとする。4 回のカードの取り出し操作が終わった後，数字が一致していた回数を X とする。$X=1$，$X=2$，$X=3$，$X=4$ となる確率をそれぞれ求めよ。また，X の期待値を求めよ。

(2)　$N=3$ とし，n は自然数とする。袋 A, B のそれぞれから同時に 1 枚ずつカードを取り出し，カードの数字が一致していたら，そのカードを取り除き，一致していなかったら，元の袋に戻すという操作を繰り返す。カードが初めて取り除かれるのが n 回目で起こる確率を p_n とし，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率を q_n とする。p_n と q_n を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　与えられた試行に対して，A から取り出した数字と，B から取り出した数字が一致する回数を X とし，$X=i$ である確率を $P(i)$ とおく。

$X=4$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が 1 通りのときより，$P(4)=\dfrac{1}{4!}=\dfrac{1}{24}$ である。

$X=3$ となる場合はないので，$P(3)=0$ である。

$X=2$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4C_2$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 1 通りずつのときである。これより，$P(2)=\dfrac{{}_4C_2\cdot 1}{4!}=\dfrac{1}{4}$ である。

$X=1$ となるのは，A からの取り出し方に対する B からの取り出し方が，一致する数字の対応が ${}_4C_1$ 通り，それぞれに対し，一致しない数字の対応が 2 通りずつのときである。これより，$P(1)=\dfrac{{}_4C_1\cdot 2}{4!}=\dfrac{1}{3}$ である。

したがって，X の期待値は，$4\times\dfrac{1}{24}+2\times\dfrac{1}{4}+1\times\dfrac{1}{3}=1$ である。

(2)　与えられた試行に対して，カードの数字が一致する確率は $\dfrac{1}{3}$，一致しない確率は $\dfrac{2}{3}$ なので，n 回目でカードが初めて取り除かれる確率 p_n は，$n\geqq 2$ のとき，

$$p_n=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

これは，$n=1$ のときも成立している。

また，n 回目の操作ですべてのカードが取り除かれる確率 q_n は，$q_1 = q_2 = 0$

$n \geqq 3$ のときは，k 回目 $(1 \leqq k \leqq n-2)$ で初めてカードが 1 枚取り除かれ，$n-1$ 回目と n 回目に 1 枚ずつ取り除かれる場合である。カードが 2 枚のとき，数字が一致する確率は $\frac{1}{2}$，一致しない確率は $\frac{1}{2}$ なので，

$$q_n = \sum_{k=1}^{n-2} p_k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2-k} \cdot \frac{1}{2} = \sum_{k=1}^{n-2} \frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-1-k} = \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{2}{3}\right)^{k}\left(\frac{1}{2}\right)^{n-k}$$

$$= \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \sum_{k=1}^{n-2}\left(\frac{4}{3}\right)^{k} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n} \cdot \frac{\frac{4}{3}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1\right\}}{\frac{4}{3} - 1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}\left\{\left(\frac{4}{3}\right)^{n-2} - 1\right\}$$

$$= \left(\frac{2}{3}\right)^{n-2} - \left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}$$

コメント

頻出ですが，(2)は不注意によるミスをやってしまいがちな問題です。

問　題

先生と 3 人の生徒 A, B, C がおり, 玉の入った箱がある。箱の中には最初, 赤玉 3 個, 白玉 7 個, 全部で 10 個の玉が入っている。先生がサイコロをふって, 1 の目が出たら A が, 2 または 3 の目が出たら B が, その他の目が出たら C が箱の中から 1 つだけ玉を取り出す操作を行う。取り出した玉は箱の中に戻さず, 取り出した生徒のものとする。この操作を続けて行うものとして以下の問いに答えよ。

ただし, サイコロの 1 から 6 の目の出る確率は等しいものとし, また, 箱の中のそれぞれの玉の取り出される確率は等しいものとする。

(1) 2 回目の操作が終わったとき, A が 2 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(2) 2 回目の操作が終わったとき, B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れている確率を求めよ。

(3) 3 回目の操作で, C が赤玉を取り出す確率を求めよ。　[2011]

解答例

(1) A, B, C が玉を取り出す確率は, それぞれ $\frac{1}{6}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{2}$ である。

最初, 赤玉 3 個, 白玉 7 個入った箱から, A が赤玉 2 個を取り出す確率は,

$$\left(\frac{1}{6}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{6}\times\frac{2}{9}\right)=\frac{1}{540}$$

(2) まず, B が赤玉を手に入れない場合の確率を求める。

(i) 1 回目に B が白玉, 2 回目も B が白玉を取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{135}$$

(ii) 1 回目に B が白玉, 2 回目は A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{7}{45}$$

(iii) 1 回目は A または C, 2 回目に B が白玉を取り出すとき

1 回目に赤玉を取り出すときと白玉を取り出すときに分けると,

$$\left(\frac{2}{3}\times\frac{3}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{7}{9}\right)+\left(\frac{2}{3}\times\frac{7}{10}\right)\times\left(\frac{1}{3}\times\frac{6}{9}\right)=\frac{7}{45}$$

(iv) 1 回目に A または C, 2 回目も A または C が取り出すとき

$$\left(\frac{2}{3}\times1\right)\times\left(\frac{2}{3}\times1\right)=\frac{4}{9}$$

(i)～(iv)より, B が少なくとも 1 個の赤玉を手に入れる確率は,

$$1-\left(\frac{7}{135}+\frac{7}{45}+\frac{7}{45}+\frac{4}{9}\right)=\frac{26}{135}$$

(3) 3 回目の操作で, C が赤玉を取り出す確率は,

(i) 1 回目に赤玉, 2 回目も赤玉のとき　$\left(1\times\frac{3}{10}\right)\times\left(1\times\frac{2}{9}\right)\times\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{8}\right)=\frac{1}{240}$

(ii)　1 回目に赤玉, 2 回目に白玉のとき　$\left(1\times\dfrac{3}{10}\right)\times\left(1\times\dfrac{7}{9}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{8}\right)=\dfrac{7}{240}$

(iii)　1 回目に白玉, 2 回目に赤玉のとき　$\left(1\times\dfrac{7}{10}\right)\times\left(1\times\dfrac{3}{9}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{2}{8}\right)=\dfrac{7}{240}$

(iv)　1 回目に白玉, 2 回目も白玉のとき　$\left(1\times\dfrac{7}{10}\right)\times\left(1\times\dfrac{6}{9}\right)\times\left(\dfrac{1}{2}\times\dfrac{3}{8}\right)=\dfrac{21}{240}$

(i)～(iv)より，$\dfrac{1}{240}+\dfrac{7}{240}+\dfrac{7}{240}+\dfrac{21}{240}=\dfrac{3}{20}$

コメント

注意力がすべてといっても過言ではない問題です。(2)は，余事象を考えない方がよかったかもしれません。さらに，(iii)の場合も(ii)にまとめた方がよかったかもしれません。

問　題

1, 2, 3, 4 の数字が 1 つずつ書かれた 4 枚のカードを用いて，次の手順で 5 桁の整数をつくる。まず 1 枚を取り出して現れた数字を一の位とする。取り出した 1 枚を元に戻し，4 枚のカードをよく混ぜて，再び 1 枚を取り出して現れた数字を十の位とする。このような操作を 5 回繰り返して，5 桁の整数をつくる。得られた整数を X とするとき，以下の問いに答えよ。

(1)　X に数字 1 がちょうど 2 回現れる確率を求めよ。

(2)　X に数字 1 と数字 2 がちょうど 1 回ずつ現れる確率を求めよ。

(3)　X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上ある確率を求めよ。　[2010]

解答例

(1)　各位の数字が 1, 2, 3, 4 の 5 桁の整数 X に，数字 1 が 2 回現れる確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{4}\right)^2\left(\frac{3}{4}\right)^3=\frac{135}{512} $$

(2)　X に，数字 1 が 1 回, 2 が 1 回, 3 または 4 が 3 回現れる確率は，

$$ {}_5\mathrm{C}_1\ {}_4\mathrm{C}_1\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}\left(\frac{2}{4}\right)^3=\frac{5}{32} $$

(3)　4 種類の数字を a, b, c, d とすると, X にちょうど 2 回現れる数字が 1 種類以上あるのは，次の場合である。

(i)　aabcd のとき

a の選び方が ${}_4\mathrm{C}_1$ 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4\mathrm{C}_1\times\frac{5!}{2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{64} $$

(ii)　aabbb のとき

a, b の選び方が ${}_4\mathrm{P}_2$ 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4\mathrm{P}_2\times\frac{5!}{2!3!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{15}{128} $$

(iii)　aabbc のとき

a, b の選び方が ${}_4\mathrm{C}_2$ 通り, c の選び方が 2 通りあることより，その確率は，

$$ {}_4\mathrm{C}_2\times 2\times\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{45}{128} $$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$\dfrac{15}{64}+\dfrac{15}{128}+\dfrac{45}{128}=\dfrac{45}{64}$ である。

コメント

反復試行の確率に関する基本問題です。

問　題

袋の中に青玉が 7 個，赤玉が 3 個入っている。袋から 1 回につき 1 個ずつ玉を取り出す。一度取り出した玉は袋に戻さないとして，以下の問いに答えよ。

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出される確率を求めよ。

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出されている確率を求めよ。

(3)　赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率を求めよ。

(4)　4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数の期待値を求めよ。

[2009]

解答例

(1)　4 回目に初めて赤玉が取り出されるのは，青→青→青→赤から，その確率は，

$$\frac{{}_7\mathrm{P}_3\times 3}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\frac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\frac{1}{8}$$

(2)　8 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 5 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_8\mathrm{C}_3\times 3!\times {}_7\mathrm{P}_5}{{}_{10}\mathrm{P}_8}=\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3}=\frac{7}{15}$$

(3)　7 回目が終わった時点で赤玉がすべて取り出される，すなわち赤玉 3 個，青玉 4 個が取り出される確率は，

$$\frac{{}_7\mathrm{C}_3\times 3!\times {}_7\mathrm{P}_4}{{}_{10}\mathrm{P}_7}=\frac{7\cdot 5\cdot 6\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}=\frac{7}{24}$$

すると，赤玉がちょうど 8 回目ですべて取り出される確率は, (2)から,

$$\frac{7}{15}-\frac{7}{24}=\frac{7}{40}$$

(4)　4 回目が終わった時点で取り出されている赤玉の個数は,

(i)　0 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_7\mathrm{P}_4}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\dfrac{7\cdot 6\cdot 5\cdot 4}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{1}{6}$

(ii)　1 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_1\times {}_3\mathrm{P}_1\times {}_7\mathrm{P}_3}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{1}{2}$

(iii)　2 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_2\times {}_3\mathrm{P}_2\times {}_7\mathrm{P}_2}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\dfrac{6\cdot 3\cdot 2\cdot 7\cdot 6}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{3}{10}$

(iv)　3 個のとき　この場合の確率は，$\dfrac{{}_4\mathrm{C}_3\times {}_3\mathrm{P}_3\times {}_7\mathrm{P}_1}{{}_{10}\mathrm{P}_4}=\dfrac{4\cdot 3\cdot 2\cdot 1\cdot 7}{10\cdot 9\cdot 8\cdot 7}=\dfrac{1}{30}$

(i)～(iv)より，赤玉の個数の期待値は

$$0\times\frac{1}{6}+1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{10}+3\times\frac{1}{30}=\frac{6}{5}$$

コメント

順列を同様に確からしいとしています。なお, (3)は(2)を利用した方法です。

問　題

点 P が次のルール(i), (ii)に従って数直線上を移動するものとする。

(i)　1, 2, 3, 4, 5, 6 の目が同じ割合で出るサイコロを振り，出た目の数を k とする。P の座標 a について, $a>0$ ならば座標 $a-k$ の点へ移動し, $a<0$ ならば座標 $a+k$ の点へ移動する。

(ii)　原点に移動したら終了し，そうでなければ(i)を繰り返す。

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど 3 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(2)　P の座標が 1, 2, …, 6 のいずれかであるとき，ちょうど m 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。

(3)　P の座標が 8 であるとき，ちょうど n 回サイコロを振って原点で終了する確率を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　まず，点 P の座標が x であることを，点 $\mathrm{P}(x)$ と表す。

さて，$a=1, 2, 3, 4, 5, 6$ として，最初 $\mathrm{P}(a)$ であったとき, 3 回目にサイコロを振って初めて原点に移動し終了するのは，次の場合である。

まず，1 回目に原点に移動しない a 以外の目 l が出て $\mathrm{P}(a-l)$ に移動し，2 回目に $a-l>0$ のときは $a-l$ 以外の目，$a-l<0$ のときは $l-a$ 以外の目が出る場合である。そして，このとき $\mathrm{P}(b)$ に移動したとする。

3 回目は，$b>0$ のときは b の目，$b<0$ のときは $-b$ の目が出て，初めて原点に移動し終了する。

よって，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{25}{216}$ である。

(2)　(1)と同様に考えて，m 回サイコロを振って原点で終了するのは，1 回目からに $m-1$ 回目（$m\geqq 2$）までは原点に移動しない 5 通りずつの目が出て，m 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

すると，この確率は，$\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{m-1}$ である。

なお，この値は $m=1$ の場合も成立している。

(3)　(2)と同様に，最初 $\mathrm{P}(8)$ であったときを考える。

(i)　$n=1$ のとき

1 回目で原点に移動する場合はないので，終了する確率は 0 である。

(ii)　$n=2$ のとき

1 回目は 1 以外の目が出て，P の座標が 2 以上 6 以下になり，2 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

すると，この確率は，$\dfrac{5}{6}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{5}{36}$ である。

(iii) $n\geqq 3$ のとき

まず，2 回目で原点に移動しない。このとき，P の座標は -4 以上 6 以下になっている。次に，3 回目以降 $n-1$ 回目（$n\geqq 4$）までは原点に移動しない 5 通りずつの目が出て，n 回目に原点に移動するただ 1 通りの目が出る場合である。

よって，この確率は，$\left(1-\dfrac{5}{36}\right)\times\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}\times\dfrac{1}{6}=\dfrac{31}{216}\left(\dfrac{5}{6}\right)^{n-3}$ である。

なお，この値は $n=3$ のときも成立している。

コメント

ポイントは，点 P の座標が -6 以上 6 以下の 0 でない整数であったときにサイコロを振ると，$\dfrac{1}{6}$ の確率で原点への移動が可能であるということです。

問　題

1 から n までの数字を 1 つずつ書いた n 枚のカードが箱に入っている。この箱から無作為にカードを 1 枚取り出して数字を記録し，箱に戻すという操作を繰り返す。ただし，k 回目の操作で直前のカードと同じ数字か直前のカードよりも小さい数字のカードを取り出した場合に，k を得点として終了する。

(1)　$2\leqq k\leqq n+1$ を満たす自然数 k について，得点が k となる確率を求めよ。

(2)　得点の期待値を n で表した式を $f(n)$ とするとき，$f(n)$ および極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)$ を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　i 回目に取り出したカードの数字を x_i とすると，得点が k となるのは，

$$x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{k-2}<x_{k-1}\geqq x_k\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x_{k-1}=l\ (k-1\leqq l\leqq n)$ とおくと，$x_1<x_2<\cdots\cdots<x_{k-2}<l$ を満たす $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_{k-2})$ の組は ${}_{l-1}\mathrm{C}_{k-2}$ 個あり，$l\geqq x_k$ となる x_k は l 個ある。これより，①となる確率 p_k は，

$$p_k=\sum_{l=k-1}^{n}\frac{{}_{l-1}\mathrm{C}_{k-2}\times 1\times l}{n^k}=\frac{1}{n^k}\sum_{l=k-1}^{n}\frac{(l-1)!\times l}{(k-2)!(l-k+1)!}$$

$$=\frac{k-1}{n^k}\sum_{l=k-1}^{n}\frac{l!}{(k-1)!(l-k+1)!}=\frac{k-1}{n^k}\sum_{l=k-1}^{n}{}_{l}\mathrm{C}_{k-1}$$

さて，一般的に，${}_{n}\mathrm{C}_{r}={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ より，${}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}={}_{n}\mathrm{C}_{r}-{}_{n-1}\mathrm{C}_{r}$ が成り立つので，$n\geqq k$ のとき，

$$p_k=\frac{k-1}{n^k}\left\{{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}+\sum_{l=k}^{n}({}_{l+1}\mathrm{C}_{k}-{}_{l}\mathrm{C}_{k})\right\}$$

$$=\frac{k-1}{n^k}\left\{1+({}_{k+1}\mathrm{C}_{k}-{}_{k}\mathrm{C}_{k})+({}_{k+2}\mathrm{C}_{k}-{}_{k+1}\mathrm{C}_{k})+\cdots+({}_{n+1}\mathrm{C}_{k}-{}_{n}\mathrm{C}_{k})\right\}$$

$$=\frac{k-1}{n^k}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_{k}\ \cdots\cdots\cdots②$$

$n=k-1$ のとき，$p_k=\dfrac{k-1}{n^k}\,{}_{k-1}\mathrm{C}_{k-1}=\dfrac{k-1}{n^k}$ となり，②は $n=k-1$ のときも成立する。よって，$2\leqq k\leqq n+1$ のとき，$p_k=\dfrac{k-1}{n^k}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_{k}$ である。

(2)　得点 k の期待値が $f(n)$ より，

$$f(n)=\sum_{k=2}^{n+1}kp_k=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k(k-1)}{n^k}\,{}_{n+1}\mathrm{C}_{k}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{k(k-1)}{n^k}\cdot\frac{(n+1)!}{k!(n+1-k)!}$$

$$=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{n(n+1)}{n^k}\cdot\frac{(n-1)!}{(k-2)!(n+1-k)!}=\sum_{k=2}^{n+1}\frac{n+1}{n^{k-1}}\,{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-2}$$

ここで，二項定理を適用して，

$$f(n)=\frac{n+1}{n}\sum_{k=2}^{n+1}{}_{n-1}\mathrm{C}_{k-2}\left(\frac{1}{n}\right)^{k-2}=\frac{n+1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n-1}=\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(n)=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n}=e$

コメント

いろいろな解法が考えられますが，組合せに関する公式${}_n\mathrm{C}_r={}_{n-1}\mathrm{C}_{r-1}+{}_{n-1}\mathrm{C}_r$を利用する方法を採りました。なお，(2)の結論は想定外でした。

問　題

手作りのサイコロがあり，1 から 6 のそれぞれの目の出る確率を p_1，p_2，p_3，p_4，p_5，p_6 で表す。ここで

$$p_1+p_2+p_3+p_4+p_5+p_6=1,\quad p_1=p_6,\quad p_2=p_5,\quad p_3=p_4$$

が成り立つとする。このサイコロを 3 回振ったとき出た目の総和が n である確率を $Q(n)$ で表す。

(1) $Q(5)$ を p_1，p_2 で表せ。

(2) $p_3=\dfrac{1}{6}$ で p_1 と p_2 は不明であるとする。$Q(7)$ がとり得る最大の値は何か。また，そのときの p_1，p_2 を求めよ。 [2004]

解答例

(1) $p_1=p_6$，$p_2=p_5$，$p_3=p_4$ より，$2p_1+2p_2+2p_3=1$ となり，$p_3=\dfrac{1}{2}-p_1-p_2$

サイコロを 3 回振ったとき総和が 5 となるのは，(1, 1, 3)，(1, 2, 2) の 2 つの場合がある。出る目の順序も考えて，

$$Q(5)=p_1^{\ 2}p_3\times 3+p_1p_2^{\ 2}\times 3=3p_1^{\ 2}\left(\frac{1}{2}-p_1-p_2\right)+3p_1p_2^{\ 2}$$
$$=\frac{3}{2}p_1^{\ 2}-3p_1^{\ 3}-3p_1^{\ 2}p_2+3p_1p_2^{\ 2}$$

(2) $p_3=\dfrac{1}{6}$ のとき，$p_1+p_2=\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

サイコロを 3 回振ったとき総和が 7 となるのは，(1, 1, 5)，(1, 2, 4)，(1, 3, 3)，(2, 2, 3) の 4 つの場合があるので，

$$Q(7)=p_1^{\ 2}p_2\times 3+p_1p_2p_3\times 3!+p_1p_3^{\ 2}\times 3+p_2^{\ 2}p_3\times 3$$
$$=3p_1^{\ 2}\left(\frac{1}{3}-p_1\right)+p_1\left(\frac{1}{3}-p_1\right)+\frac{1}{12}p_1+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{3}-p_1\right)^2$$
$$=-3p_1^{\ 3}+\frac{1}{2}p_1^{\ 2}+\frac{1}{12}p_1+\frac{1}{18}$$

ここで，$0<x<\dfrac{1}{3}$ において，$f(x)=-3x^3+\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{12}x+\dfrac{1}{18}$ とおくと，

$$f'(x)=-9x^2+x+\frac{1}{12}$$
$$=-\frac{1}{12}(18x+1)(6x-1)$$

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{6}$	$\cdots$	$\frac{1}{3}$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$\frac{5}{72}$	$\searrow$	

右表より，$f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{1}{6}\right)=\dfrac{5}{72}$ となる。

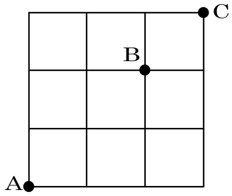
よって，$Q(7)$ がとり得る最大の値は $\dfrac{5}{72}$ であり，このとき $p_1=p_2=\dfrac{1}{6}$ となる。

コメント

基本題です。サイコロを 3 回しか振らないので，数えもれもないでしょう。

問　題

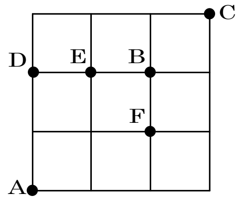
右の図のような格子状の道路がある。左下の A 地点から出発し，サイコロを繰り返し振り，次の規則にしたがって進むものとする。1 の目が出たら右に 2 区画，2 の目が出たら右に 1 区画，3 の目が出たら上に 1 区画進み，その他の場合はそのまま動かない。ただし，右端で 1 または 2 の目が出たとき，あるいは上端で 3 の目が出たときは，動かない。また，右端の 1 区画手前で 1 の目が出たときは，右端まで進んで止まる。



n を 8 以上の自然数とする。A 地点から出発し，サイコロを n 回振るとき，ちょうど 6 回目に，B 地点以外の地点から進んで B 地点に止まり，n 回目までに C 地点に到達する確率を求めよ。ただし，サイコロのどの目が出るのも，同様に確からしいものとする。 [2002]

解答例

6 回目に B 以外の地点から進んで B に止まるという条件より，6 回目では D→B, E→B, F→B のいずれかになる。



(i)　6 回目が D→B のとき

6 回目では 1 の目が出ることになり，その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると，5 回目までに D に到達していることになり，A→D と進むには，3 の目が 2 回出て，4 か 5 か 6 の目が 3 回出ればよく，その確率は，$\dfrac{5!}{2!\,3!}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{5}{144}$ である。

(ii)　6 回目が E→B のとき

6 回目では 2 の目が出ることになり，その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると，5 回目までに E に到達していることになり，A→E と進むには，2 の目が 1 回，3 の目が 2 回出て，4 か 5 か 6 の目が 2 回出ればよく，その確率は，$\dfrac{5!}{2!\,2!}\cdot\dfrac{1}{6}\cdot\left(\dfrac{1}{6}\right)^2\cdot\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\dfrac{5}{144}$ である。

(iii) 6 回目が F→B のとき

6 回目では 3 の目が出ることになり，その確率は$\dfrac{1}{6}$である。

すると，5 回目までに F に到達していることになり，A→F と進むには次の 2 つの場合がある。

1 つは, 1 の目が 1 回出て, 3 の目が 1 回, 4 か 5 か 6 の目が 3 回出るときで，その確率は$\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{5}{72}$である。

もう 1 つは，2 の目が 2 回出て，3 の目が 1 回，4 か 5 か 6 の目が 2 回出るときで，その確率は$\frac{5!}{2!\,2!}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{144}$である。

よって, 5 回目までに F に到達している確率は，$\frac{5}{72}+\frac{5}{144}=\frac{5}{48}$である。

(i)(ii)(iii)より, 6 回目に B に到達する確率は,

$$\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{144}+\frac{1}{6}\times\frac{5}{48}=\frac{25}{864}\cdots\cdots\cdots①$$

次に，7 回目以降に B→C と進むには，7 回目から n 回目までに，1 か 2 の目が少なくとも 1 回出て，しかも 3 の目が少なくとも 1 回出ればよい。

ここで, 1 か 2 の目が少なくとも 1 回出るという事象を X, 3 の目が少なくとも 1 回出るという事象を Y とおくと，それぞれ余事象の確率は,

$$P(\overline{X})=\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6},\quad P(\overline{Y})=\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}$$

また，$\overline{X}\cap\overline{Y}$ は 4 か 5 か 6 の目だけ出るという事象を表すので，その確率は,

$$P(\overline{X}\cap\overline{Y})=\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}$$

$$\begin{aligned}P(X\cap Y)&=1-P(\overline{\overline{X}\cap\overline{Y}})=1-P(\overline{X}\cup\overline{Y})\\&=1-\{P(\overline{X})+P(\overline{Y})-P(\overline{X}\cap\overline{Y})\}\\&=1-P(\overline{X})-P(\overline{Y})+P(\overline{X}\cap\overline{Y})\\&=1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\cdots\cdots\cdots②\end{aligned}$$

①②より, n 回目までに C 地点に到達する確率は,

$$\frac{25}{864}\times P(X\cap Y)=\frac{25}{864}\left\{1-\left(\frac{2}{3}\right)^{n-6}-\left(\frac{5}{6}\right)^{n-6}+\left(\frac{1}{2}\right)^{n-6}\right\}$$

コメント

文系の類題より，かなり難しくなっています。というのも, A→B の確率を求めるのと B→C の確率を求めるには，異なる方法が必要で, 1 つの問題の中に 2 つの問題が入っているのと同じことだからです。

問　題

数直線上を，原点 O から出発して動く点 A があるとする。1 つのさいころを振り，その出た目が 1 のとき点 A を右に 1 動かし，出た目が 2，3 のときは右に 2 動かすものとする。また出た目が 4 のとき左に 1 動かし，出た目が 5, 6 のときは左に 2 動かすものとする。このとき，さいころを 5 回振った後に点 A が原点にある確率を求めよ。

[2000]

解答例

1 が a 回, 2 または 3 が b 回, 4 が c 回, 5 または 6 が d 回出たとすると，条件より，

$$a+b+c+d=5\cdots\cdots\cdots①,\quad a+2b-c-2d=0\cdots\cdots\cdots②$$

①×2＋②より，$3a+4b+c=10\cdots\cdots\cdots③$

$a\geqq 0$, $c\geqq 0$ なので $4b\leqq 10$ となり, b は 0 以上の整数より，$b=0,\ 1,\ 2$

(i)　$b=0$ のとき　③より $3a+c=10$

①より $0\leqq a+c\leqq 5$ なので，$(a,\ c)=(3,\ 1)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 0,\ 1,\ 1)$ となり，②を満たす。

(ii)　$b=1$ のとき　③より $3a+c=6$

①より $0\leqq a+c\leqq 4$ なので，$(a,\ c)=(2,\ 0),\ (1,\ 3)$

$(a,\ c)=(2,\ 0)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 0,\ 2)$ となり，②を満たす。

$(a,\ c)=(1,\ 3)$ のとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 1,\ 3,\ 0)$ となり，②を満たす。

(iii)　$b=2$ のとき　③より $3a+c=2$

①より $0\leqq a+c\leqq 3$ なので，$(a,\ c)=(0,\ 2)$

このとき①から $(a,\ b,\ c,\ d)=(0,\ 2,\ 2,\ 1)$ となり，②を満たす。

(i)(ii)(iii)より, 5 回振った後に点 A が原点にあるのは，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組が，

$$(3,\ 0,\ 1,\ 1),\ (2,\ 1,\ 0,\ 2),\ (1,\ 1,\ 3,\ 0),\ (0,\ 2,\ 2,\ 1)$$

求める確率は，これらの場合の和となり，

$$\frac{5!}{3!}\left(\frac{1}{6}\right)^3\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+\frac{5!}{3!}\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{3}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3+\frac{5!}{2!2!}\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2\frac{1}{3}$$

$$=\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}+\frac{20}{3\cdot 6^4}+\frac{30}{3^3\cdot 6^2}=\frac{70}{3^3\cdot 6^2}=\frac{35}{486}$$

コメント

ランダムウォークを題材とした頻出問題です。5 回移動するだけですので，場合分けの数もそんなに多くはありません。

問　題

T, O, H, O, K, U, A, O, B, A の 10 文字をでたらめに 1 列に並べる。

(1)　どの 2 つの O も隣り合わない確率を求めよ。

(2)　どこかで同じ文字が隣り合う確率を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　10 文字を 1 列に並べる場合の数は$10!$通りである。また，どの 2 つの O も隣り合わないのは，まず O 以外の 7 文字を並べ，その間または両端の 8 か所に 3 つの O を 1 つずつ並べるときなので，その場合の数は$7!\times {}_8P_3$通りとなる。

よって，どの 2 つの O も隣り合わない確率は，$\dfrac{7!\times {}_8P_3}{10!}=\dfrac{7}{15}$である。

(2)　O の隣り合っている状態で場合分けをする。

(i)　O が 3 つ隣り合っているとき

3 つ隣り合っている O の並べ方が$3!$通りで，この隣り合っている O を 1 文字とみなし，他の T, H, K, U, B, A, A と合わせて並べる場合の数が$8!$通りとなるので，この場合の確率は，$\dfrac{3!\times 8!}{10!}=\dfrac{1}{15}$

(ii)　O が 2 つだけ隣り合っていて，それが左端または右端のとき

2 つの O が左端のときは，2 つの O の並べ方が${}_3P_2$通りで，2 つの O の右隣りの文字は T, H, K, U, B, A, A のいずれかで 7 通りとなる。この隣り合っている 3 文字の右側に，もう 1 つの O も入れた他の 7 文字を並べる場合の数は$7!$通りである。2 つの O が右端のときも同じなので，この場合の確率は，$\dfrac{{}_3P_2\times 7\times 7!\times 2}{10!}=\dfrac{7}{60}$

(iii) O が 2 つだけ隣り合っていて，それが両端以外のとき

2 つの O の並べ方が${}_3P_2$通りで，2 つの O の両隣りの文字は T, H, K, U, B, A, A のいずれかで${}_7P_2$通りとなる。この隣り合っている 4 文字を 1 文字とみなし，もう 1 つの O も入れた他の 6 文字と合わせて並べる場合の数は$7!$通りである。よって，この場合の確率は，$\dfrac{{}_3P_2\times {}_7P_2\times 7!}{10!}=\dfrac{7}{20}$

(iv) O が隣り合っていないとき

この場合は 2 つの A が隣り合っていて，その並べ方は$2!$通りで，この隣り合っている A を 1 文字とみなし，他の T, H, K, U, B と合わせて並べる場合の数が$6!$通りとなる。そして，この 6 文字の間または両端の 7 か所に 3 つの O を 1 つずつ並べると考えると，その場合の数は${}_7P_3$通りとなる。よって，この場合の確率は，

$$\frac{2!\times 6!\times {}_7P_3}{10!}=\frac{1}{12}$$

(i)～(iv)より，どこかで同じ文字が隣り合う確率は$\dfrac{1}{15}+\dfrac{7}{60}+\dfrac{7}{20}+\dfrac{1}{12}=\dfrac{37}{60}$である。

コメント

(2)の(i)～(iii)の場合は，闇雲に計算しましたが，(1)の余事象となっていました。

問　題

ある 1 面だけに印のついた立方体が水平な平面に置かれている。平面に接する面（底面）の 4 辺のうち 1 辺を選んでこの辺を軸にしてこの立方体を横に倒す，という操作を行う。ただし，どの辺が選ばれるかは同様に確からしいとし，印のついた面が最初は上面にあるとする。この操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の側面にくる確率を a_n，底面にくる確率を b_n とおく。

(1)　a_2 を求めよ。

(2)　a_{n+1} と a_n の関係式を導け。

(3)　b_n を n の式で表し，$\lim\limits_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　[1998]

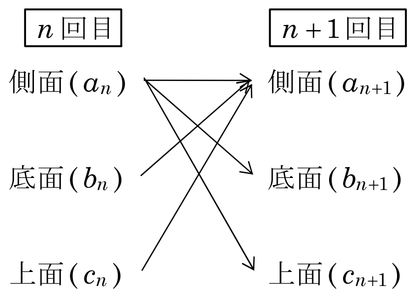
解答例

(1)　1 回横に倒すと印の面は側面なので，もう 1 回倒して印の面が側面となる確率は，$\dfrac{2}{4}=\dfrac{1}{2}$ となる。よって，$a_2=\dfrac{1}{2}$ である。

(2)　操作を n 回続けて行ったとき，印のついた面が立方体の上面にくる確率を c_n とすると，

$$a_n+b_n+c_n=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

状態の推移は右のようになる。



$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+b_n+c_n \cdots\cdots\cdots ②$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{4}a_n \cdots\cdots\cdots ③$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{4}a_n \cdots\cdots\cdots ④$$

①を②に代入して

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+(1-a_n)=-\frac{1}{2}a_n+1 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

(3)　⑤より，$a_{n+1}-\dfrac{2}{3}=-\dfrac{1}{2}\left(a_n-\dfrac{2}{3}\right)$

(1)から $a_1=1$ なので，

$$a_n-\frac{2}{3}=\left(a_1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\left(1-\frac{2}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}$$

$$a_n=\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{2}{3}$$

③より，$n\geqq 2$ で $b_n=\dfrac{1}{4}a_{n-1}=\dfrac{1}{4}\left\{\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n-2}+\dfrac{2}{3}\right\}=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^{n}+\dfrac{1}{6} \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑥に $n=1$ をあてはめると，$b_1=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)+\dfrac{1}{6}=0$ となり適する。

よって，$b_n=\dfrac{1}{3}\left(-\dfrac{1}{2}\right)^n+\dfrac{1}{6}$

すると，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\dfrac{1}{6}$

コメント

よく見かける問題です。本問では，漸化式の利用という誘導がついていますので，方針に迷うことはありません。

問　題

$f(x)=x^3+3x^2-9x$ とする。$y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}$$

が成り立つような a の範囲を求めよ。 [2010]

解答例

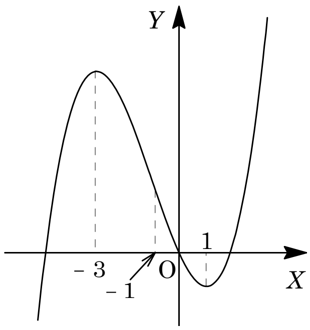
$f(X)=X^3+3X^2-9X$ に対して,

$$f'(X)=3X^2+6X-9=3(X+3)(X-1)$$

$$f''(X)=6X+6=6(X+1)$$

X	$\cdots$	-3	$\cdots$	-1	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(X)$	$+$	0	$-$		$-$	0	$+$
$f''(X)$	$-$		$-$	0	$+$		$+$
$f(X)$	↗	27	↘	11	↘	-5	↗

これより，$Y=f(X)$ のグラフの概形は右図のようになる。



さて, $y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して,

$$f(x)>\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, $y<x<a$ のとき, XY 平面上で 2 点 $(y,\ f(y))$, $(a,\ f(a))$ を結ぶ線分と直線 $X=x$ との交点を $(x,\ g(x))$ とおくと,

$$g(x)=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{(a-x)+(x-y)}$$

$$=\frac{(x-y)f(a)+(a-x)f(y)}{a-y}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，与えられた条件は, $y<x<a$ を満たすすべての x, y に対して,

$$f(x)>g(x)$$

すなわち，$Y=f(X)$ のグラフが, $X<a$ で上に凸であることを意味する。

よって，求める a の範囲は，$a\leqq-1$ である。

コメント

計算のみで処理をすると計算量が多くなりすぎるので，不等式の意味を考え，直感的に解いています。

問　題

$a,\ b,\ c$ を実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$a+b=c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つことを示せ。

(2)　$a+b\geqq c$ であるとき，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つことを示せ。　[2009]

解答例

(1)　$a^3+b^3-c^3+3abc=(a+b-c)(a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca)$ ………①

すると，$a+b=c$ のとき，①から，$a^3+b^3+3abc=c^3$ が成り立つ。

(2)　$a^2+b^2+c^2-ab+bc+ca=\dfrac{1}{2}\{(a-b)^2+(b+c)^2+(c+a)^2\}\geqq 0$ ………②

すると，$a+b\geqq c$ のとき，①②から，$a^3+b^3+3abc\geqq c^3$ が成り立つ。
なお，等号成立は，$a+b=c$ または $a=b=-c$ のときである。

コメント

有名な等式①と不等式②の知識を確認する問題です。

問　題

α，β，γ を複素数とし，$z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(∗)を満たす複素数 z を考える。以下の問いに答えよ。

(1) z は，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ を満たすことを示せ。

(2) $|\alpha|=|\beta|\neq 0$ を仮定し，また γ は負の実数であると仮定する。このとき，(∗)を満たす z がちょうど 2 個あるための必要十分条件を α，β を用いて表せ。　[2017]

解答例

(1) $z\overline{z}+\alpha z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ ……(∗)に対して，共役複素数をとると，

$$\overline{z}z+\overline{\alpha}\overline{z}+\overline{\beta}z+\overline{\gamma}=0 \cdots\cdots\cdots(∗∗)$$

(∗)と(∗∗)の両辺の差をとると，$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}+\gamma-\overline{\gamma}=0$ ………①

(2) γ は実数なので $\gamma=\overline{\gamma}$ となり，①より，

$$(\alpha-\overline{\beta})z-(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z}=0,\ (\alpha-\overline{\beta})z=(\overline{\alpha}-\beta)\overline{z} \cdots\cdots\cdots②$$

すると，②から $(\alpha-\overline{\beta})z=\overline{(\alpha-\overline{\beta})z}$ となり，$(\alpha-\overline{\beta})z$ は実数である。

そこで，k を実数として，$(\alpha-\overline{\beta})z=k$ ……③とおく。

(i) $\alpha-\overline{\beta}=0$ のとき

(∗)から，$z\overline{z}+\overline{\beta}z+\beta\overline{z}+\gamma=0$ となるので，

$$(z+\beta)(\overline{z}+\overline{\beta})-\beta\overline{\beta}+\gamma=0,\ |z+\beta|^2=|\beta|^2-\gamma$$

ここで，γ は負の実数なので $|\beta|^2-\gamma>0$ となり，$|z+\beta|=\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$

すると，複素数平面上で，点 z は点 $-\beta$ を中心とする半径 $\sqrt{|\beta|^2-\gamma}$ の円周上の点となり，無数に存在する。これより，z がちょうど 2 個あることに反する。

(ii) $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ のとき

③から，$z=\dfrac{k}{\alpha-\overline{\beta}}=\dfrac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)$ となり，(∗)に代入すると，

$$\frac{k^2}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}+\alpha\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\overline{\alpha}-\beta)+\beta\cdot\frac{k}{|\alpha-\overline{\beta}|^2}(\alpha-\overline{\beta})+\gamma=0$$

$$k^2+k\alpha(\overline{\alpha}-\beta)+k\beta(\alpha-\overline{\beta})+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$$

ここで，$|\alpha|=|\beta|\neq 0$ から $\alpha\overline{\alpha}=\beta\overline{\beta}$ なので，$k^2+\gamma|\alpha-\overline{\beta}|^2=0$ となり，$-\gamma>0$，$|\alpha-\overline{\beta}|>0$ より，

$$k=\pm\sqrt{-\gamma}|\alpha-\overline{\beta}|$$

そして，この値を $k=k_1$，k_2 $(k_1<k_2)$ とおくと，$z=\dfrac{k_1}{\alpha-\overline{\beta}}$，$\dfrac{k_2}{\alpha-\overline{\beta}}$ となる。

(i)(ii)より，z がちょうど 2 個あるための必要十分条件は $\alpha-\overline{\beta}\neq 0$ である。

コメント

複素数に関する標準的な問題です。(1)で導いた式が(2)へのスムーズな誘導になっています。

問　題

多項式$P(x)$を，$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}$により定める。ただし，$i$ は虚数単位とする。以下の問いに答えよ。

(1)　$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$ とするとき，係数a_0，$\cdots$，a_7をすべて求めよ。

(2)　$0<\theta<\pi$ に対して，$P\left(\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\dfrac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}$ が成り立つことを示せ。

(3)　(1)で求めたa_1，a_3，a_5，a_7を用いて，多項式$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$を考える。$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ として，$k=1,\ 2,\ 3$ について，$x_k=\dfrac{\cos^2 k\theta}{\sin^2 k\theta}$ とおく。このとき，$Q(x_k)=0$が成り立つことを示し，$x_1+x_2+x_3$の値を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$P(x)=\dfrac{(x+i)^7-(x-i)^7}{2i}=\dfrac{2({}_7\mathrm{C}_1x^6i+{}_7\mathrm{C}_3x^4i^3+{}_7\mathrm{C}_5x^2i^5+i^7)}{2i}$

$$=\frac{7ix^6-35ix^4+21ix^2-i}{i}=7x^6-35x^4+21x^2-1$$

ここで，$P(x)=a_0x^7+a_1x^6+a_2x^5+a_3x^4+a_4x^3+a_5x^2+a_6x+a_7$から，

$$a_0=a_2=a_4=a_6=0,\ a_1=7,\ a_3=-35,\ a_5=21,\ a_7=-1$$

(2)　ド・モアブルの定理を用いると，

$$P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{1}{2i}\left\{\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}+i\right)^7-\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}-i\right)^7\right\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos\theta+i\sin\theta)^7-(\cos\theta-i\sin\theta)^7\}$$
$$=\frac{1}{2i\sin^7\theta}\{(\cos 7\theta+i\sin 7\theta)-(\cos 7\theta-i\sin 7\theta)\}$$
$$=\frac{2i\sin 7\theta}{2i\sin^7\theta}=\frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$P(x)=a_1x^6+a_3x^4+a_5x^2+a_7$，$Q(x)=a_1x^3+a_3x^2+a_5x+a_7$ より，$x>0$ で，

$$Q(x)=P(\sqrt{x})$$

さて，$\theta=\dfrac{\pi}{7}$ のとき $\dfrac{\cos\theta}{\sin\theta}>0$，$\dfrac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}>0$，$\dfrac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}>0$ から，(∗)を用いて，

$$Q(x_1)=Q\left(\frac{\cos^2\theta}{\sin^2\theta}\right)=P\left(\left|\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right|\right)=P\left(\frac{\cos\theta}{\sin\theta}\right)=\frac{\sin 7\theta}{\sin^7\theta}=\frac{\sin\pi}{\sin^7\theta}=0$$

$$Q(x_2)=Q\left(\frac{\cos^2 2\theta}{\sin^2 2\theta}\right)=P\left(\left|\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right|\right)=P\left(\frac{\cos 2\theta}{\sin 2\theta}\right)=\frac{\sin 14\theta}{\sin^7 2\theta}=\frac{\sin 2\pi}{\sin^7 2\theta}=0$$

$$Q(x_3)=Q\Big(\frac{\cos^2 3\theta}{\sin^2 3\theta}\Big)=P\Big(\Big|\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}\Big|\Big)=P\Big(\frac{\cos 3\theta}{\sin 3\theta}\Big)=\frac{\sin 21\theta}{\sin^7 3\theta}=\frac{\sin 3\pi}{\sin^7 3\theta}=0$$

さらに，$x_1=\dfrac{1}{\tan^2\frac{\pi}{7}}$，$x_2=\dfrac{1}{\tan^2\frac{2\pi}{7}}$，$x_3=\dfrac{1}{\tan^2\frac{3\pi}{7}}$ なので，x_1，x_2，x_3 は互いに異なる。よって，x_1，x_2，x_3 は 3 次方程式 $Q(x)=0$ の異なる 3 つの解となり，

$$x_1+x_2+x_3=-\frac{a_3}{a_1}=5$$

コメント

一見，複素数の難問という構成ですが，細かな誘導のため，それに従えば最後の結論まで導けるようになっています。ただ，いろいろな定理が絡んでいますが。

問　題

k を実数とする。3 次式 $f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，方程式 $f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ とする。$g(x)$ は x^3 の係数が 1 である 3 次式で，方程式 $g(x)=0$ の 3 つの解が $\alpha\beta$，$\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ であるものとする。

(1)　$g(x)$ を k を用いて表せ。

(2)　2 つの方程式 $f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつような k の値を求めよ。

[2013]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-kx^2-1$ に対し，$f(x)=0$ の 3 つの解を α，β，γ なので，

$$\alpha+\beta+\gamma=k,\ \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha=0,\ \alpha\beta\gamma=1$$

ここで，条件から，$g(x)=(x-\alpha\beta)(x-\beta\gamma)(x-\gamma\alpha)$ より，

$$g(x)=x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+(\alpha\beta^2\gamma+\alpha\beta\gamma^2+\alpha^2\beta\gamma)x-\alpha^2\beta^2\gamma^2$$
$$=x^3-(\alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha)x^2+\alpha\beta\gamma(\alpha+\beta+\gamma)x-(\alpha\beta\gamma)^2=x^3+kx-1$$

(2)　$f(x)=0$ と $g(x)=0$ が共通の解をもつとき，その解は $\alpha\beta\gamma\neq 0$ より，いずれも 0 ではない。さて，共通の解を $x=\alpha\beta$ とすると，

(i)　$\alpha\beta=\alpha$ のとき

$\alpha\neq 0$ から $\beta=1$ となり，$f(1)=1-k-1=0$ から，$k=0$ である。

(ii)　$\alpha\beta=\beta$ のとき

$\beta\neq 0$ から $\alpha=1$ となり，$f(1)=0$ から $k=0$ である。

(iii)　$\alpha\beta=\gamma$ のとき

$\alpha\beta\gamma=1$ から $\gamma^2=1$ となり，$\gamma=1$ のときは，$f(1)=0$ から $k=0$ である。

また，$\gamma=-1$ のときは，$f(-1)=-1-k-1=0$ から，$k=-2$ である。

(i)(ii)(iii)より，$k=0,\ -2$ である。

逆に，$k=0$ のとき，$f(x)=g(x)=x^3-1$ となり，共通の解を 3 つもつ。

$k=-2$ のとき，$f(x)=x^3+2x^2-1=(x+1)(x^2+x-1)$

$g(x)=x^3-2x-1=(x+1)(x^2-x-1)$

すると，共通の解は 1 つ存在する。

以上より，共通の解が $\beta\gamma$，$\gamma\alpha$ でも同様なので，求める値は $k=0,\ -2$ である。

コメント

(2)は，解を直接的に扱いました。また，定型的な解法もあります。

問　題

a を実数, z を 0 でない複素数とする。z と共役な複素数を $\overline{z}$ で表す。

(1)　次を満たす z を求めよ。$z+1-\dfrac{a}{z}=0$

(2)　次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。$\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$

(3)　次を満たす z が存在するような a の範囲を求めよ。$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$　　[2011]

解答例

(1)　$z+1-\dfrac{a}{z}=0$ より，$z^2+z-a=0$ $(z\neq 0)$ となり，

(i)　$a\neq 0$ のとき　$z=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

(ii)　$a=0$ のとき　$z=-1$

(2)　$\overline{z}+1-\dfrac{a}{z}=0$ より，$a=z\overline{z}+z$ となり，$z=x+yi$ $(x^2+y^2\neq 0)$ とおくと，

$$a=(x+yi)(x-yi)+x+yi=x^2+y^2+x+yi$$

a, x, y は実数より，$y=0$ となり，

$$a=x^2+x=\left(x+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\quad(x\neq 0)$$

よって，$a\geqq -\dfrac{1}{4}$ である。

(3)　$z(\overline{z})^2+\overline{z}-\dfrac{a}{z}=0$ より，$a=(z\overline{z})^2+z\overline{z}$ となり, (2)と同様にすると，

$$a=\left(z\overline{z}+\frac{1}{2}\right)^2-\frac{1}{4}\quad(z\overline{z}=x^2+y^2>0)$$

よって，$a>0$ である。

コメント

一見すると，難問風ですが，普通に計算していけばよい問題でした。

問　題

多項式$f(x)$について，次の条件(i), (ii), (iii)を考える。

(i)　$x^4 f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$　　(ii)　$f(1-x)=f(x)$　　(iii)　$f(1)=1$

このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　条件(i)を満たす多項式$f(x)$の次数は 4 以下であることを示せ。

(2)　条件(i), (ii), (iii)をすべて満たす多項式$f(x)$を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$f(x)$をn次式とすると，$f(x)=a_nx^n+a_{n-1}x^{n-1}+\cdots+a_1x+a_0\ (a_n\neq 0)$とかけ，

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a_n}{x^n}+\frac{a_{n-1}}{x^{n-1}}+\cdots+\frac{a_1}{x}+a_0\right)=a_0x^4+a_1x^3+\cdots+a_nx^{4-n}$$

条件(i)より，$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$なので，$4-n\geqq 0$，すなわち$n\leqq 4$となる。

よって，$f(x)$の次数は 4 以下である。

(2)　(1)より，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$とおくと，

$$x^4f\left(\frac{1}{x}\right)=x^4\left(\frac{a}{x^4}+\frac{b}{x^3}+\frac{c}{x^2}+\frac{d}{x}+e\right)=a+bx+cx^2+dx^3+ex^4$$

条件(i)より，$x^4f\left(\dfrac{1}{x}\right)=f(x)$なので，

$$ex^4+dx^3+cx^2+bx+a=ax^4+bx^3+cx^2+dx+e$$

よって，$a=e$，$b=d$………①

これより，$f(x)=ax^4+bx^3+cx^2+bx+a$となる。

さらに，条件(iii)より$f(1)=1$なので，$2a+2b+c=1$………②

また，条件(ii)より，$f(1-x)=f(x)$に$x=0$を代入すると，①と合わせて，

$f(1)=f(0)$，$a=1$………③

さらに，条件(ii)に$x=-1$を代入すると，$f(2)=f(-1)$より，

$16a+8b+4c+2b+a=a-b+c-b+a$，$5a+4b+c=0$………④

②③④より，$b=-2$，$c=3$となり，①から，

$a=1$，$b=-2$，$c=3$，$d=-2$，$e=1$

このとき，$f(x)=x^4-2x^3+3x^2-2x+1$となり，条件(i)(ii)(iii)をすべて満たす。

コメント

(2)において，条件(ii)は計算が難なので，数値代入で係数を決めています。

問　題

z を絶対値が 1 の複素数とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) z^3-z の実部が 0 となるような z をすべて求めよ。

(2) z^5+z の絶対値が 1 となるような z をすべて求めよ。

(3) n を自然数とする。z^n+1 の絶対値が 1 となるような z をすべてかけ合わせて得られる複素数を求めよ。　[2004]

解答例

(1) $|z|=1$ より，$z\bar{z}=1$，$\bar{z}=\dfrac{1}{z}$ ………①

さて，z^3-z の実部は，$\dfrac{1}{2}\left(z^3-z+\overline{z^3-z}\right)=\dfrac{1}{2}\left(z^3-z+\bar{z}^3-\bar{z}\right)$と表せる。

条件より，$z^3-z+\bar{z}^3-\bar{z}=0$ となり，①から $z^3-z+\dfrac{1}{z^3}-\dfrac{1}{z}=0$

$$z^6-z^4+1-z^2=0,\ (z^4-1)(z^2-1)=0,\ (z^2+1)(z^2-1)^2=0$$

よって，$z^2=\pm1$ より，$z=\pm1,\ \pm i$

(2) $|z^5+z|=1$ より，$|z||z^4+1|=1$ となり，$|z|=1$ から $|z^4+1|=1$ ………②

ここで，$z=\cos\theta+i\sin\theta\ (0\leqq\theta<2\pi)$ とおくと，②から，

$$(\cos4\theta+1)^2+\sin^2 4\theta=1,\ 2+2\cos4\theta=1,\ \cos4\theta=-\frac{1}{2}$$

よって，$4\theta=\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{4}{3}\pi,\ \dfrac{8}{3}\pi,\ \dfrac{10}{3}\pi,\ \dfrac{14}{3}\pi,\ \dfrac{16}{3}\pi,\ \dfrac{20}{3}\pi,\ \dfrac{22}{3}\pi$

$$\theta=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{3}\pi,\ \frac{2}{3}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{4}{3}\pi,\ \frac{5}{3}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

これより，$z=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i,\ \dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{1}{2}\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}i,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pm\dfrac{1}{2}i$

(3) $|z^n+1|=1$ より, (2)と同様にして，$\cos n\theta=-\dfrac{1}{2}$

$$n\theta=\left(2k+1\pm\frac{1}{3}\right)\pi,\ \theta=\frac{1}{n}\left(2k+1\pm\frac{1}{3}\right)\pi\quad(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$$

これらの偏角の総和を S とすると，

$$S=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2k+1+\frac{1}{3}\right)+\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(2k+1-\frac{1}{3}\right)=\frac{\pi}{n}\sum_{k=0}^{n-1}(4k+2)$$

$$=\frac{\pi}{n}\{2(n-1)n+2n\}=2n\pi$$

したがって，$|z^n+1|=1$ を満たす z をすべてかけ合わせて得られる複素数は,

$$\cos2n\pi+i\sin2n\pi=1$$

コメント

(1)は共役複素数の利用，(2)も同じ手法で解いていたのですが，途中で方針を変更しました。そのため, (1)から(2)および(3)への接続が悪くなっています。

問　題

複素数平面上で，相異なる 3 点1，α，α^2 は実軸上に中心をもつ同一円周上にある。このようなαの存在する範囲を複素数平面上に図示せよ。さらに，この円の半径を$|\alpha|$を用いて表せ。　[2003]

解答例

まず，3 点1，α，α^2 が異なることより，$\alpha\neq 1$，$\alpha^2\neq\alpha$，$\alpha^2\neq 1$なので，$\alpha\neq\pm 1$，$\alpha\neq 0$である。このとき，kを実数として，中心が点kである円C上に3点1，α，α^2があるとすると，$|k-1|=|k-\alpha|=|k-\alpha^2|$である。

$|k-1|=|k-\alpha|$より，$(k-1)^2=(k-\alpha)(k-\overline{\alpha})$

$$k^2-2k+1=k^2-(\alpha+\overline{\alpha})k+\alpha\overline{\alpha},\ (\alpha+\overline{\alpha}-2)k=|\alpha|^2-1\cdots\cdots\cdots①$$

$|k-1|=|k-\alpha^2|$より，$(k-1)^2=(k-\alpha^2)(k-\overline{\alpha}^2)$

$$k^2-2k+1=k^2-(\alpha^2+\overline{\alpha}^2)k+\alpha^2\overline{\alpha}^2,\ (\alpha^2+\overline{\alpha}^2-2)k=|\alpha|^4-1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\alpha+\overline{\alpha}-2=0$のときは，①より$|\alpha|^2-1=0$となる。すなわち，$\dfrac{\alpha+\overline{\alpha}}{2}=1$かつ$|\alpha|=1$であるので，$\alpha=1$となる。

ところが，これは$\alpha\neq 1$に反し，$\alpha+\overline{\alpha}-2\neq 0$から$k=\dfrac{|\alpha|^2-1}{\alpha+\overline{\alpha}-2}$である。

②に代入して，$(\alpha^2+\overline{\alpha}^2-2)(|\alpha|^2-1)=(|\alpha|^4-1)(\alpha+\overline{\alpha}-2)$

$$(|\alpha|^2-1)\{(\alpha^2+\overline{\alpha}^2-2)-(|\alpha|^2+1)(\alpha+\overline{\alpha}-2)\}=0$$

$$(|\alpha|^2-1)\{(\alpha+\overline{\alpha})^2-2|\alpha|^2-2-(\alpha+\overline{\alpha}-2)|\alpha|^2-(\alpha+\overline{\alpha})+2\}=0$$

$$(|\alpha|^2-1)(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha+\overline{\alpha}-|\alpha|^2-1)=0,\ (|\alpha|^2-1)(\alpha+\overline{\alpha})(\alpha-1)(\overline{\alpha}-1)=0$$

$\alpha\neq 1$より$(|\alpha|^2-1)(\alpha+\overline{\alpha})=0$，すなわち$|\alpha|^2-1=0$または$\alpha+\overline{\alpha}=0$となる。

(i)　$|\alpha|^2-1=0$のとき

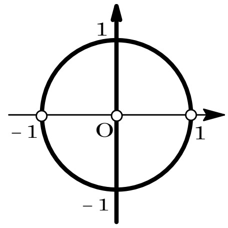
$|\alpha|=1$より，点αは原点中心で半径 1 の円周上に存在する。ただし，$\alpha\neq\pm 1$である。このとき$k=0$より，円Cの半径は$|k-1|=1$である。

(ii)　$\alpha+\overline{\alpha}=0$のとき

$\overline{\alpha}=-\alpha$より，点$\alpha$は虚軸上に存在する。ただし，$\alpha\neq 0$である。このとき，$k=\dfrac{|\alpha|^2-1}{-2}$より，円$C$の半径は,

$$|k-1|=\left|\frac{|\alpha|^2-1}{-2}-1\right|=\left|\frac{|\alpha|^2+1}{-2}\right|=\frac{|\alpha|^2+1}{2}$$

(i)(ii)より，α の存在する範囲は右図の太線部となる。ただし，原点および点± 1は除く。



円 C の半径は, (i)(ii)の場合を合わせて，$\dfrac{|\alpha|^2+1}{2}$ である。

コメント

複素数平面上の図形が題材ですが，ポイントは①②式をまとめる計算です。

問　題

$a,\ b$ は実数であり，方程式 $x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ が解 $x=1+i$ をもつとする。ただし，$i=\sqrt{-1}$ とする。このとき $a,\ b$ を求めよ。また，このときの方程式の他の解も求めよ。 [2002]

解答例

$x^4+(a+2)x^3-(2a+2)x^2+(b+1)x+a^3=0$ ……①に対して，$a,\ b$ が実数であることより，①が解 $x=1+i$ をもつとき，$x=1-i$ も解になる。

すると，①の左辺は $x^2-(1+i+1-i)x+(1+i)(1-i)=x^2-2x+2$ で割り切れる。

そこで，①の左辺を $f(x)$ とおき，x^2-2x+2 で割ると，

$$f(x)=(x^2-2x+2)\{x^2+(a+4)x+4\}+(-2a+b+1)x+a^3-8$$

よって，$-2a+b+1=0$ ……②，$a^3-8=0$ ……③

③より $a=2$，②に代入して $b=3$

このとき，$f(x)=(x^2-2x+2)(x^2+6x+4)$ となり，$x=1+i$ 以外の①の解は，$x=1-i$，$-3\pm\sqrt{5}$ である。

コメント

基本題です。計算ミスには注意。

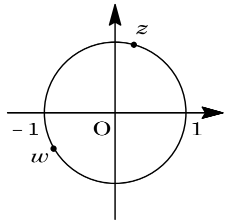
問　題

複素数$z=x+yi$，$w=u+vi$（ただし，x，y，u，vは実数）は$|z|=|w|=1$を満たし，$yv<0$とする。$|1+z+w|<1$となるための必要十分条件をxとuを用いて表せ。

[2001]

解答例

$z=x+yi$，$w=u+vi$に対して，$|z|=|w|=1$より，



$$x^2+y^2=u^2+v^2=1\cdots\cdots\cdots①$$

また，$1+z+w=(1+x+u)+(y+v)i$なので，$|1+z+w|<1$より，

$$(1+x+u)^2+(y+v)^2<1\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，条件がzとwに関して対等なので，一般性を失うことなく，$yv<0$から$y>0,\ v<0$とすることができ，

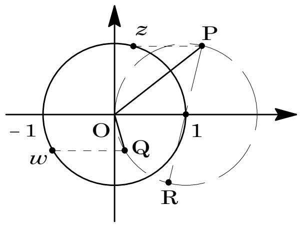
$$-1<x<1,\ \ -1<u<1\cdots\cdots\cdots③$$

②より，$1+x^2+u^2+2x+2u+2xu+y^2+v^2+2yv<1$

①を代入すると，$1+x+u+xu+yv<0$

$$(1+x)(1+u)+yv<0\cdots\cdots\cdots④$$

ここで，$\mathrm{P}(1+z)$，$\mathrm{Q}(1+w)$とおくと，④は$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}<0$を意味するので，$\angle\mathrm{POQ}>90^\circ\cdots\cdots$⑤となる。



さて，点Pを点1に関して対称移動した点をRとおくと，$\mathrm{R}(1-z)$となり，$\angle\mathrm{POR}=90^\circ$である。

すると，$1-z=1-x-yi$から，⑤の条件は，$1+u<1-x$

$$x+u<0\cdots\cdots\cdots⑥$$

以上より，求める条件は，③⑥から，$-1<x<1$，$-1<u<1$，$x+u<0$

コメント

④の左辺を内積とみて，後半は図形的に考えました。

問　題

α，βは$|\alpha+\beta|<2$を満たす複素数とする。このとき関数

$$f(x)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2x^2-(|\alpha|+|\beta|)x+1$$

の $0\leqq x\leqq 1$ における最小値を求めよ。 [2000]

解答例

$|\alpha+\beta|=k\ (0\leqq k<2)$，$|\alpha|+|\beta|=l$ とおくと，$f(x)=\frac{1}{4}k^2x^2-lx+1$ となる。

(i)　$k=0\ (|\alpha+\beta|=0)$ のとき

$f(x)=-lx+1$ となり, $l\geqq 0$ なので, $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1)=-l+1=-|\alpha|-|\beta|+1$$

(ii)　$0<k<2\ (0<|\alpha+\beta|<2)$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{4}k^2\left(x-\frac{2l}{k^2}\right)^2-\frac{l^2}{k^2}+1$$

ここで，$\frac{2l}{k^2}-1=\frac{1}{k^2}(2l-k^2)=\frac{1}{k^2}\left\{2(|\alpha|+|\beta|)-|\alpha+\beta|^2\right\}$

さて，複素数α，βに対して，$|\alpha|+|\beta|\geqq|\alpha+\beta|$が成り立つので，

$$2(|\alpha|+|\beta|)-|\alpha+\beta|^2\geqq 2|\alpha+\beta|-|\alpha+\beta|^2=2k-k^2=-(k-1)^2+1$$

$0<k<2$ において，$-(k-1)^2+1>0$ なので，$\frac{2l}{k^2}-1>0$，$\frac{2l}{k^2}>1$

すると, $0\leqq x\leqq 1$ における $f(x)$ の最小値は,

$$f(1)=\frac{1}{4}k^2-l+1=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$$

(i)(ii)より，$f(x)$ の最小値は，$f(1)=\frac{1}{4}|\alpha+\beta|^2-|\alpha|-|\beta|+1$

コメント

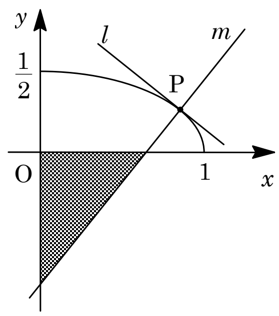
(ii)の場合をさらに分けて最小値を求めるのでは，条件の$|\alpha+\beta|<2$の意味が不明です。ここは$|\alpha|+|\beta|$と$|\alpha+\beta|$の関係がポイントとなりますが，その両者をつなぐのは，どう考えても三角不等式しかありません。

問　題

xy 平面において，次の式が表す曲線を C とする。$x^2+4y^2=1$，$x>0$，$y>0$

P を C 上の点とする。P で C に接する直線を l とし，P を通り l と垂直な直線を m として，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積を S とする。P が C 上の点全体を動くとき，S の最大値とそのときの P の座標を求めよ。　　[2015]

解答例



まず，$C: x^2+4y^2=1\ (x>0,\ y>0)$ ……①上の点 P を $\mathrm{P}\left(\cos\theta,\ \frac{1}{2}\sin\theta\right)\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とおく。

①の両辺を x で微分すると，$2x+8y\dfrac{dy}{dx}=0$ より，

$$\frac{dy}{dx}=-\frac{x}{4y}\quad (y\neq 0)$$

点 P において，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}$ となる。

すると，直線 l の方向ベクトル，すなわち直線 m の法線ベクトルの成分は，$\left(1,\ -\dfrac{\cos\theta}{2\sin\theta}\right)=\dfrac{1}{2\sin\theta}(2\sin\theta,\ -\cos\theta)$ となり，m の方程式は，

$$2\sin\theta(x-\cos\theta)-\cos\theta\left(y-\frac{1}{2}\sin\theta\right)=0$$

$$4x\sin\theta-2y\cos\theta=3\sin\theta\cos\theta\cdots\cdots\text{②}$$

②より，m と x 軸との交点は，$x=\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{4\sin\theta}=\dfrac{3}{4}\cos\theta$

また，m と y 軸との交点は，$y=-\dfrac{3\sin\theta\cos\theta}{2\cos\theta}=-\dfrac{3}{2}\sin\theta$

これより，x 軸と y 軸と m で囲まれてできる三角形の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cos\theta\cdot\frac{3}{2}\sin\theta=\frac{9}{16}\sin\theta\cos\theta=\frac{9}{32}\sin 2\theta$$

すると，$2\theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\theta=\dfrac{\pi}{4}\right)$ のとき，S は最大値 $\dfrac{9}{32}$ をとる。このとき，点 P の座標は，$\left(\dfrac{\sqrt{2}}{2},\ \dfrac{\sqrt{2}}{4}\right)$ である。

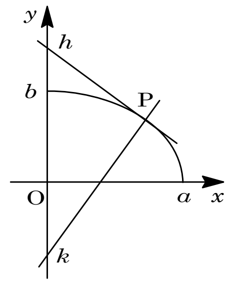
コメント

楕円の接線・法線を題材とした基本的な問題です。なお，l の方程式については，公式を利用しても構いません。

問　題

$a>b>0$ とし，xy 平面の楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の第 1 象限の部分を E とする。ただし，第 1 象限には x 軸と y 軸は含まれない。E 上の点 P における E の接線と法線が y 軸と交わる点の y 座標をそれぞれ h と k とし，$L=h-k$ とおく。点 P が E 上を動くとき，L の最小値が存在するための a と b についての条件と，そのときの L の最小値を求めよ。 [2002]

解答例



点 P は楕円 $\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ の第 1 象限の部分にあるので，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として，$\mathrm{P}(a\cos\theta,\ b\sin\theta)$ とおく。

接線の方程式は，$\dfrac{a\cos\theta}{a^2}x+\dfrac{b\sin\theta}{b^2}=1$，$\dfrac{\cos\theta}{a}x+\dfrac{\sin\theta}{b}y=1$

$x=0$ とすると，$y=\dfrac{b}{\sin\theta}$ より，$h=\dfrac{b}{\sin\theta}$

また，法線は，その法線ベクトルを $\left(-\dfrac{\sin\theta}{b},\ \dfrac{\cos\theta}{a}\right)$ とすることができるので，

$$-\frac{\sin\theta}{b}(x-a\cos\theta)+\frac{\cos\theta}{a}(y-b\sin\theta)=0$$

$x=0$ とすると，$y=b\sin\theta-\dfrac{a^2\sin\theta}{b}=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin\theta$ より，$k=\dfrac{b^2-a^2}{b}\sin\theta$

$$L=h-k=\frac{b}{\sin\theta}-\frac{b^2-a^2}{b}\sin\theta$$

ここで，$t=\sin\theta$ とおくと，$0<t<1$ となり，$L=\dfrac{b}{t}-\dfrac{b^2-a^2}{b}t$

$$\frac{dL}{dt}=-\frac{b}{t^2}-\frac{b^2-a^2}{b}=\frac{(a^2-b^2)t^2-b^2}{bt^2}$$
$$=\frac{(\sqrt{a^2-b^2}\,t+b)(\sqrt{a^2-b^2}\,t-b)}{bt^2}$$

t	0	$\cdots$	$\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}$	$\cdots$
$\dfrac{dL}{dt}$		$-$	0	$+$
L		↘		↗

$t>0$ における t の増減は右表のようになり，$0<t<1$ において L の最小値が存在する条件は，$\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}<1$ である。

よって，$b<\sqrt{a^2-b^2}$，$a^2-2b^2>0$

このとき，L の最小値は，$b\cdot\dfrac{\sqrt{a^2-b^2}}{b}-\dfrac{b^2-a^2}{b}\cdot\dfrac{b}{\sqrt{a^2-b^2}}=2\sqrt{a^2-b^2}$ となる。

コメント

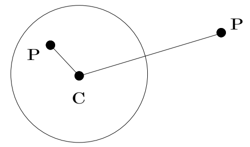
楕円上の点をパラメータ表示し，題意にしたがって計算をしていけば……。

問　題

(1)　点$\mathrm{P}(p,\ q)$と円$C:(x-a)^2+(y-b)^2=r^2$　$(r>0)$との距離dとは, PとC上の点$(x,\ y)$との距離の最小値をいう。PがCの外部にある場合と内部にある場合に分けて, dを表す式を求めよ。

(2)　2つの円$C_1:(x+4)^2+y^2=81$と$C_2:(x-4)^2+y^2=49$から等距離にある点Pの軌跡の方程式を求めよ。　[1998]

解答例



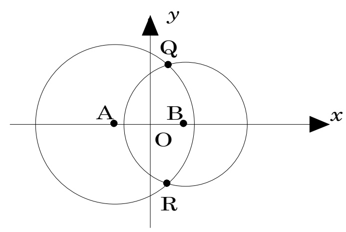
(1)　円Cの中心を$\mathrm{C}(a,\ b)$とすると,

(i)　Pが円Cの外部にあるとき

$$d=\mathrm{PC}-r=\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}-r$$

(ii)　Pが円Cの内部にあるとき

$$d=r-\mathrm{PC}=r-\sqrt{(p-a)^2+(q-b)^2}$$



(2)　C_1の中心を$\mathrm{A}(-4,\ 0)$,　C_2の中心を$\mathrm{B}(4,\ 0)$とし, C_1とC_2の交点を$\mathrm{Q}(2,\ 3\sqrt{5})$, $\mathrm{R}(2,\ -3\sqrt{5})$とおく。

(i)　Pが円C_1, C_2の外部にあるとき

$\mathrm{PA}-9=\mathrm{PB}-7$より$\mathrm{PA}-\mathrm{PB}=2$

Pは2点A, Bを焦点とする双曲線の点Bに近い方の枝である。

その方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}-\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a^2+b^2=c^2)$とすると, $2a=2,\ c=4$

$a=1,\ b=\sqrt{15}$から, $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$

(ii)　Pが円C_1, C_2の内部にあるとき

$9-\mathrm{PA}=7-\mathrm{PB}$より$\mathrm{PA}-\mathrm{PB}=2$なので, (i)と同じく$x^2-\dfrac{y^2}{15}=1$

(iii) Pが円C_1の外部, 円C_2の内部にあるとき

$\mathrm{PA}-9=7-\mathrm{PB}$より$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=16$で, Pは2点A, Bを焦点とする楕円である。

その方程式を$\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$　$(a^2-b^2=c^2)$とすると, $2a=16,\ c=4$

$a=8,\ b=4\sqrt{3}$から, $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

(iv)　Pが円C_1の内部, 円C_2の外部にあるとき

$9-\mathrm{PA}=\mathrm{PB}-7$より$\mathrm{PA}+\mathrm{PB}=16$なので, (iii)と同じく$\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

以上より, P の軌跡の方程式は, $x^2-\dfrac{y^2}{15}=1\ \ (1\leqq x)$, $\dfrac{x^2}{64}+\dfrac{y^2}{48}=1$

コメント

2 次曲線の定義を利用する問題の 1 つです。おもしろい設定ですので, 丁寧に書いてみました。なお, 2 交点 Q, R に点 P が一致したときも条件をみたすのは明らかですので, 軌跡は曲線全体になります。

問　題

$a>0$ を実数とする。$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，座標平面の 3 点

$$(2n\pi,\ 0),\ \left(\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi,\ \frac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\right),\ ((2n+1)\pi,\ 0)$$

を頂点とする三角形の面積を A_n とし，

$$B_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{x^a}dx,\ \ C_n=\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin^2 x}{x^a}dx$$

とおく。

(1) $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}$ を求めよ。

(3) 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}$ を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $2n\pi\leqq x\leqq(2n+1)\pi$ において，$y=\dfrac{1}{x^a}$ は単調減少し，$\sin x\geqq 0$ なので，

$$\frac{1}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq\frac{1}{x^a}\leqq\frac{1}{(2n\pi)^a},\ \ \frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq\frac{\sin x}{x^a}\leqq\frac{\sin x}{(2n\pi)^a}\cdots\cdots\cdots①$$

①の各辺を $2n\pi$ から $(2n+1)\pi$ まで積分すると，

$$\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{\{(2n+1)\pi\}^a}dx\leqq B_n\leqq\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\frac{\sin x}{(2n\pi)^a}dx$$

すると，$\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=2$ より，

$$\frac{2}{\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq B_n\leqq\frac{2}{(2n\pi)^a}$$

(2) $A_n=\dfrac{1}{2}\{(2n+1)\pi-2n\pi\}\cdot\dfrac{1}{\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}=\dfrac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}$ となり，(1)から，

$$\frac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\cdot\frac{(2n\pi)^a}{2}\leqq\frac{A_n}{B_n}\leqq\frac{\pi}{2\left\{\left(2n+\frac{1}{2}\right)\pi\right\}^a}\cdot\frac{\{(2n+1)\pi\}^a}{2}$$

すると，$\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a\leqq\dfrac{A_n}{B_n}\leqq\dfrac{\pi}{4}\left(\dfrac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{B_n}=\frac{\pi}{4}$ となる。

(3) $\displaystyle\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}\sin^2 x\,dx=\frac{1}{2}\int_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}(1-\cos 2x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin 2x\Big]_{2n\pi}^{(2n+1)\pi}=\frac{\pi}{2}$

(1)と同様にすると，$\dfrac{\pi}{2\{(2n+1)\pi\}^a}\leqq C_n\leqq\dfrac{\pi}{2(2n\pi)^a}$ となり，

$$\left(\frac{2n}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a \leqq \frac{A_n}{C_n} \leqq \left(\frac{2n+1}{2n+\frac{1}{2}}\right)^a$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{A_n}{C_n}=1$ である。

コメント

はさみうちの原理を用いる極限の問題です。(1)の不等式は $y=\dfrac{1}{x^a}$ の単調減少性を利用するだけのものですが，B_n と A_n との関係を考えてなくてもよいのに考えていたら，ずいぶん時間を費やしてしまいました。

問　題

数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$を

$$a_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\,d\theta,\ \ b_n=\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，eは自然対数の底とする。

(1)　一般項b_nを求めよ。

(2)　すべてのnについて，$b_n\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)$を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。　[2013]

解答例

(1)　$b_n=\displaystyle\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta=\Big[\,\frac{1}{n}e^{n\sin\theta}\,\Big]_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{n}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)$

(2)　$-\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{6}$において，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\leqq\cos\theta\leqq1$であり，$e^{n\sin\theta}>0$から，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}e^{n\sin\theta}\leqq e^{n\sin\theta}\cos\theta\leqq e^{n\sin\theta}\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，①の各辺を$\theta=-\dfrac{\pi}{6}$から$\theta=\dfrac{\pi}{6}$まで積分すると，

$$\frac{\sqrt{3}}{2}\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}\cos\theta\,d\theta\leqq\int_{-\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{6}}e^{n\sin\theta}d\theta$$

よって，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n\leqq b_n\leqq a_n$となり，$b_n\leqq a_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}b_n$である。

(3)　(1)(2)より，$nb_n\leqq na_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}nb_n$となり，$e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\leqq na_n\leqq\dfrac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)$から，

$$\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\leqq\frac{1}{n}\log(na_n)\leqq\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$n\to\infty$のとき，

$$\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)=\frac{1}{n}\log e^{\frac{n}{2}}(1-e^{-n})=\frac{1}{n}\cdot\frac{n}{2}+\frac{1}{n}\log(1-e^{-n})\to\frac{1}{2}+0=\frac{1}{2}$$

$$\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)=\frac{1}{n}\log\frac{2}{\sqrt{3}}+\frac{1}{n}\log\Big(e^{\frac{n}{2}}-e^{-\frac{n}{2}}\Big)\to0+\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$$

よって，②より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log(na_n)=\frac{1}{2}$

コメント

不等式を証明し，はさみうちの原理から極限へとつなぐ典型題です。

問　題

数列$\{a_n\}$を，$a_1=1$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{3a_n+4}{2a_n+3}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定める。以下の問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ となることを示せ。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ を満たす正の実数 α を求めよ。

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを示せ。

(4)　$0<r<1$ を満たすある実数 r に対して，不等式 $\dfrac{\alpha-a_{n+1}}{\alpha-a_n}\leqq r$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを示せ。さらに，極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$a_1=1$ なので，$a_2=\sqrt{\dfrac{3a_1+4}{2a_1+3}}=\sqrt{\dfrac{7}{5}}>1$

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k>1$ と仮定すると，

$$a_{k+1}-1=\sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}}-1=\sqrt{1+\frac{a_k+1}{2a_k+3}}-1>0$$

(i)(ii)より，$n\geqq 2$ のとき，$a_n>1$ である。

(2)　$\alpha^2=\dfrac{3\alpha+4}{2\alpha+3}$ より，$2\alpha^3+3\alpha^2-3\alpha-4=0$ となり，$(\alpha+1)(2\alpha^2+\alpha-4)=0$

$\alpha>0$ より，$\alpha=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}$

(3)　すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ となることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$\alpha-a_1=\dfrac{-1+\sqrt{33}}{4}-1=\dfrac{\sqrt{33}-5}{4}>0$ より，$a_1<\alpha$ が成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k<\alpha$ と仮定する。

$$\alpha-a_{k+1}=\sqrt{\frac{3\alpha+4}{2\alpha+3}}-\sqrt{\frac{3a_k+4}{2a_k+3}}=\frac{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)}-\sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}}$$

$$=\frac{(3\alpha+4)(2a_k+3)-(2\alpha+3)(3a_k+4)}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)}+\sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

$$=\frac{\alpha-a_k}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_k+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_k+3)}+\sqrt{(2\alpha+3)(3a_k+4)}\right\}}$$

よって，$\alpha-a_{k+1}>0$ から，$a_{k+1}<\alpha$ である。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して $a_n<\alpha$ である。

(4)　(1)と(3)の結果より，$1 \leqq a_n < \alpha$ となり，

$$\frac{\alpha - a_{n+1}}{\alpha - a_n} = \frac{1}{\sqrt{2\alpha+3}\sqrt{2a_n+3}\left\{\sqrt{(3\alpha+4)(2a_n+3)} + \sqrt{(2\alpha+3)(3a_n+4)}\right\}}$$

$$\leqq \frac{1}{\sqrt{5}\sqrt{5}\left(\sqrt{35}+\sqrt{35}\right)} = \frac{1}{10\sqrt{35}}$$

すると，$r = \dfrac{1}{10\sqrt{35}}$ とすることができ，このとき，$\alpha - a_{n+1} \leqq r(\alpha - a_n)$ なので，

$$0 < \alpha - a_n \leqq (\alpha - a_1) r^{n-1} = (\alpha - 1) r^{n-1}$$

よって，$0 < r < 1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\alpha - a_n) = 0$，すなわち $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n = \alpha = \frac{-1+\sqrt{33}}{4}$

コメント

漸化式と極限についての頻出問題です。なお，誘導はていねいです。

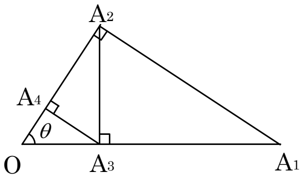
問　題

n を 2 以上の自然数とする。平面上の $\triangle \mathrm{OA_1A_2}$ は $\angle \mathrm{OA_2A_1} = 90^\circ$，$\mathrm{OA_1} = 1$，$\mathrm{A_1A_2} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ を満たすとする。$\mathrm{A_2}$ から $\mathrm{OA_1}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_3}$ とする。$\mathrm{A_3}$ から $\mathrm{OA_2}$ へ垂線を下ろし，交点を $\mathrm{A_4}$ とする。以下同様に，$k = 4,\ 5,\ \cdots$ について，A_k から OA_{k-1} へ垂線を下ろし，交点を A_{k+1} として，順番に $\mathrm{A_5}$，$\mathrm{A_6}$，…を定める。$\overrightarrow{h_k} = \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$k = 1,\ 2,\ \cdots$ のとき，ベクトル $\overrightarrow{h_k}$ と $\overrightarrow{h_{k+1}}$ の内積 $\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ を n と k で表せ。

(2)　$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n} \overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}}$ とおくとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} S_n$ を求めよ。ここで，自然対数の底 e について，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ であることを用いてもよい。　[2008]

解答例



(1)　$\angle \mathrm{A_1OA_2} = \theta$ とおくと，$\sin\theta = \dfrac{\mathrm{A_1A_2}}{\mathrm{OA_1}} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}$ より，

$\cos\theta = \sqrt{1-\dfrac{1}{n}}$ となり，

$$\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2} = \mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}\cos\theta = \sqrt{1-\frac{1}{n}}\,\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}$$

よって，$\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1} = \dfrac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\dfrac{1}{n}}\right)^{k-1}$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}$ のなす角は，$180^\circ - \theta$ より，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}} &= \overrightarrow{\mathrm{A}_k\mathrm{A}_{k+1}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{A}_{k+1}\mathrm{A}_{k+2}}\\ &= \frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k-1}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\left(\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{k}\cos(180^\circ-\theta)\\ &= \frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k-1}\cdot\sqrt{1-\frac{1}{n}}\cdot\left(-\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right) = -\frac{1}{n}\left(1-\frac{1}{n}\right)^{k}\end{aligned}$$

(2)　(1)より，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\overrightarrow{h_k}\cdot\overrightarrow{h_{k+1}} = \dfrac{-\dfrac{1}{n}\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}}{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)} = -\left(1-\dfrac{1}{n}\right)\left\{1-\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^n\right\}$

さて，$e = \displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ より，

$$\lim_{n\to\infty}\left(1-\frac{1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{n-1}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\dfrac{n}{n-1}\right)^n} = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^n}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)^{n-1}\left(1+\dfrac{1}{n-1}\right)} = \frac{1}{e}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n = -\left(1-\frac{1}{e}\right) = \frac{1}{e}-1$

コメント

数列の極限についての基本問題です。相似な図形と等比数列が融合した構図となっています。

問　題

$a>0$ に対し $I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx$，$I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ とおく。

(1) $\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)$ を求めよ。

(2) 漸化式 $I_n(a)=\dfrac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$ $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を示せ。

(3) 自然数 n に対して，$\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)} I_n(a)$ を求めよ。　[2007]

解答例

(1) $I_0(a)=\int_0^a \sqrt{1+x}\,dx=\dfrac{2}{3}\Big[(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a=\dfrac{2}{3}\left\{(1+a)^{\frac{3}{2}}-1\right\}$ より，

$$\lim_{a\to\infty} a^{-\frac{3}{2}} I_0(a)=\frac{2}{3}\lim_{a\to\infty}\left\{\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\left(\frac{1}{a}\right)^{\frac{3}{2}}\right\}=\frac{2}{3}$$

(2) $I_n(a)=\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx=\dfrac{2}{3}\Big[x^n(1+x)^{\frac{3}{2}}\Big]_0^a-\dfrac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)^{\frac{3}{2}}dx$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\int_0^a x^{n-1}(1+x)\sqrt{1+x}\,dx$$

$$=\frac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2}{3}n\left\{I_{n-1}(a)+I_n(a)\right\}$$

すると，$\dfrac{3+2n}{3}I_n(a)=\dfrac{2}{3}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2}{3}nI_{n-1}(a)$ より，

$$I_n(a)=\frac{2}{3+2n}a^n(1+a)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}I_{n-1}(a)$$

(3) $a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\dfrac{2}{3+2n}a^{-\frac{3}{2}}(1+a)^{\frac{3}{2}}-\dfrac{2n}{3+2n}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$

$$=\frac{2}{3+2n}\left(\frac{1+a}{a}\right)^{\frac{3}{2}}-\frac{2n}{3+2n}\cdot\frac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$0\leqq x\leqq a$ において，$f(x)=x^n\sqrt{1+x}$ は単調に増加することより，

$$0\leqq x^n\sqrt{1+x}\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

これより，$0\leqq\int_0^a x^n\sqrt{1+x}\,dx\leqq\int_0^a a^n\sqrt{1+a}\,dx=a^{n+1}\sqrt{1+a}$ となり，

$$0\leqq I_{n-1}(a)\leqq a^n\sqrt{1+a}$$

すると，$0\leqq\dfrac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\leqq\sqrt{\dfrac{1+a}{a^3}}=\sqrt{\dfrac{1}{a^3}+\dfrac{1}{a^2}}$ となり，$a\to\infty$ のとき $\dfrac{I_{n-1}(a)}{a^{\frac{3}{2}+n}}\to 0$

よって，$(*)$から，$\lim_{a\to\infty} a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)=\dfrac{2}{3+2n}$

コメント

(3)は(2)の漸化式を誘導として考えるのが筋でしょうが，この式を変形する方法は思いつきません。そこで，直接的に$I_n(a)$を評価し，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_n(a)$を考えましたが，うまくいきません。ただ，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}a^{-\left(\frac{3}{2}+n\right)}I_{n-1}(a)$であれば極限値が求まるという発見は，その直後でした。

問　題

関数 $f(x)=4x-x^2$ に対し，数列 $\{a_n\}$ を

$$a_1=c\,,\ \ a_{n+1}=\sqrt{f(a_n)}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で与える。ただし, c は $0<c<2$ を満たす定数である。

(1)　$a_n<2$，$a_n<a_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(2)　$2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

(3)　$\lim\limits_{n\to\infty}a_n$ を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$0<a_n<2$ であることを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=c$ （$0<c<2$） より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$0<a_k<2$ が成立すると仮定する。

ここで，$f(a_k)=4a_k-{a_k}^2=-(a_k-2)^2+4$ で，$0<a_k<2$ より，$0<f(a_k)<4$ すなわち $0<\sqrt{f(a_k)}<2$ となる。よって，$0<a_{k+1}<2$ が成立する。

(i)(ii)より，$0<a_n<2$ が成立する。

また，$a_{n+1}-a_n=\sqrt{4a_n-{a_n}^2}-a_n=\dfrac{4a_n-{a_n}^2-{a_n}^2}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}=\dfrac{2a_n(2-a_n)}{\sqrt{4a_n-{a_n}^2}+a_n}>0$

よって，$a_n<a_{n+1}$ が成立する。

(2)　まず，$2-a_{n+1}=2-\sqrt{4a_n-{a_n}^2}=\dfrac{4-(4a_n-{a_n}^2)}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}=\dfrac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}(2-a_n)$

ここで，$c=a_1\leqq a_n$ より $0<2-a_n\leqq 2-c$，また $2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}>2$ なので,

$$0<\frac{2-a_n}{2+\sqrt{4a_n-{a_n}^2}}<\frac{2-c}{2}$$

よって，$2-a_{n+1}<\dfrac{2-c}{2}(2-a_n)$ となる。

(3)　(2)より，$0<2-a_n\leqq(2-a_1)\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}$ （等号は $n=1$ のとき成立）

$0<\dfrac{2-c}{2}<1$ より, $n\to\infty$ のとき $\left(\dfrac{2-c}{2}\right)^{n-1}\to 0$ となるので，$2-a_n\to 0$

よって，$\lim\limits_{n\to\infty}a_n=2$

コメント

毎年, 出題を見かける有名問題です。誘導も詳しいので, 解の道筋は明快です。

問　題

(1)　n を正の整数とする。$t \geqq 0$ のとき，不等式 $e^t > \dfrac{t^n}{n!}$ が成り立つことを数学的帰納法で示せ。

(2)　極限 $I_m = \lim\limits_{t\to\infty}\displaystyle\int_0^t x^m e^{-x}dx$ $(m = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　n が自然数のとき，$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$ $(t \geqq 0)$ を数学的帰納法で示す。

(i)　$n = 1$ のとき　$f(t) = e^t - t$ とおくと，$f'(t) = e^t - 1$

$t \geqq 0$ のとき，$f'(t) \geqq 0$ より $f(t) \geqq f(0) = 1 > 0$ となり，$e^t > t$ が成立する。

(ii)　$n = k$ のとき　$e^t > \dfrac{t^k}{k!}$ $(t \geqq 0)$ が成立するとし，$g(t) = e^t - \dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ とおく。

$$g'(t) = e^t - \frac{(k+1)t^k}{(k+1)!} = e^t - \frac{t^k}{k!}$$

$t \geqq 0$ のとき，$g'(t) > 0$ より $g(t) > g(0) = 1 > 0$ となり，$e^t > \dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ が成立する。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$e^t > \dfrac{t^n}{n!}$ $(t \geqq 0)$ が成立する。

(2)　$a_m = \displaystyle\int_0^t x^m e^{-x}dx$ とおくと，$a_0 = \displaystyle\int_0^t e^{-x}dx = 1 - e^{-t}$ より，$I_0 = \lim\limits_{t\to\infty} a_0 = 1$

$$a_m = -\left[x^m e^{-x}\right]_0^t + \int_0^t mx^{m-1}e^{-x}dx = -t^m e^{-t} + ma_{m-1}\ (m \geqq 1)$$

さらに，$b_m = e^t a_m$ とおくと，$b_m = mb_{m-1} - t^m$ となり，$\dfrac{b_m}{m!} = \dfrac{b_{m-1}}{(m-1)!} - \dfrac{t^m}{m!}$

$$\frac{b_m}{m!} = \frac{b_0}{0!} - \left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^m}{m!}\right) = e^t - 1 - \left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^m}{m!}\right)$$

$$b_m = m!(e^t - 1) - m!\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^m}{m!}\right)$$

$$a_m = \frac{m!}{e^t}(e^t - 1) - \frac{m!}{e^t}\left(\frac{t}{1!} + \frac{t^2}{2!} + \cdots + \frac{t^m}{m!}\right) = m!(1 - e^{-t}) - m!\sum_{k=1}^m \frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t}$$

(1)より，$t \geqq 0$ で，$e^t > \dfrac{t^{k+1}}{(k+1)!}$ より，$0 \leqq \dfrac{1}{k!}\cdot\dfrac{t^k}{e^t} < \dfrac{1}{k!}t^k\cdot\dfrac{(k+1)!}{t^{k+1}} = \dfrac{k+1}{t}$

$$0 \leqq \sum_{k=1}^m \frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t} < \sum_{k=1}^m \frac{k+1}{t} = \frac{(m+3)m}{2t}$$

$t\to\infty$ のとき，$\dfrac{(m+3)m}{2t} \to 0$ より，$\displaystyle\sum_{k=1}^m \frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t} \to 0$

よって，$I_m=\lim_{t\to\infty}a_m=\lim_{t\to\infty}\left\{m!(1-e^{-t})-m!\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k!}\cdot\frac{t^k}{e^t}\right\}=m!\ (m\geqq 1)$

これは，$m=0$ のときも満たしている。

コメント

どんな自然数 n に対しても $\lim_{x\to\infty}\frac{x^n}{e^x}=0$ となりますが，この証明を一度はやっていないと, (2)で, (1)の不等式の $n=k+1$ の場合を考えつくのは，難しいでしょう。

問　題

実数 a, b, c, d が $ad-bc\neq 0$ を満たすとき，関数 $f(x)=\dfrac{ax+b}{cx+d}$ について，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2) $f^{-1}(x)=f(x)$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

(3) $f^{-1}(x)=f(f(x))$ を満たし，$f(x)\neq x$ となる a, b, c, d の関係式を求めよ。

[2000]

解答例

(1) $y=f(x)$ として，$c\neq 0$ のとき，$y=\dfrac{ax+b}{cx+d}=\dfrac{a}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cx+d)}$，$cy-a=\dfrac{bc-ad}{cx+d}$

$ad-bc\neq 0$ より，$cx+d=\dfrac{bc-ad}{cy-a}$，$x=-\dfrac{d}{c}+\dfrac{bc-ad}{c(cy-a)}=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$ ………①

また，$c=0$ のとき，$y=\dfrac{ax+b}{d}$，$dy=ax+b$

$ad-bc\neq 0$ から $a\neq 0$ なので，$x=\dfrac{dy-b}{a}$ となり，この式は①において $c=0$ とした式と一致する。

以上より，$f^{-1}(y)=\dfrac{-dy+b}{cy-a}$ となり，$f^{-1}(x)=\dfrac{-dx+b}{cx-a}$

(2) $f^{-1}(x)=f(x)$ より，$\dfrac{-dx+b}{cx-a}=\dfrac{ax+b}{cx+d}$

$(ax+b)(cx-a)+(dx-b)(cx+d)=0$

$c(a+d)x^2-(a^2-d^2)x-b(a+d)=0$

まとめて，$(a+d)\{cx^2-(a-d)x-b\}=0$ ………②

$f(x)\neq x$ より $\dfrac{ax+b}{cx+d}\neq x$，まとめて，$cx^2-(a-d)x-b\neq 0$ ………③

②③より求める条件は，$a+d=0$

(3) $f(f(x))=\dfrac{af(x)+b}{cf(x)+d}=\dfrac{a(ax+b)+b(cx+d)}{c(ax+b)+d(cx+d)}=\dfrac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$f^{-1}(x)=f(f(x))$ より，$\dfrac{-dx+b}{cx-a}=\dfrac{(a^2+bc)x+b(a+d)}{c(a+d)x+(bc+d^2)}$

$\{(a^2+bc)x+b(a+d)\}(cx-a)+(dx-b)\{c(a+d)x+(bc+d^2)\}=0$

$c(a^2+bc+ad+d^2)x^2-(a^3-d^3-bcd+abc)x-b(a^2+bc+ad+d^2)=0$

まとめて，$(a^2+ad+bc+d^2)\{cx^2-(a-d)x-b\}=0$ ………④

$f(x) \neq x$ より③が成り立つので，④と合わせると求める条件は，

$$a^2 + ad + bc + d^2 = 0$$

コメント

2×2 行列の積との対応で，過去にも類題が出ています。しかし，本問では，$f(x) = x$ のとき $f^{-1}(x) = f(x)$，$f^{-1}(x) = f(f(x))$ がともに成立し，それに気付くのが鍵です。

問　題

正 n 角形 P_n を次のようにして定義する。

(i)　P_3 は面積が 1 の正三角形である。

(ii)　P_n と同じ面積をもつ円を D_n とする。P_{n+1} は D_n と周の長さが等しい正 $n+1$ 角形である。

$n=3,\ 4,\ 5,\cdots$ について P_n の面積を a_n としたとき次の各問いに答えよ。

(1)　$n\geqq 4$ について $\dfrac{a_{n-1}}{a_n}$ を n を用いて表せ。

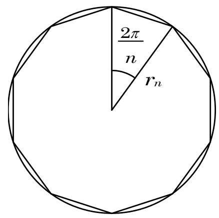
(2)　極限 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)$ を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　P_{n-1} の面積は a_{n-1} なので，条件(ii)から D_{n-1} の面積も a_{n-1} となる。すると，D_{n-1} の半径は $\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{\pi}}$ となるので，D_{n-1} の周の長さは $2\pi\sqrt{\dfrac{a_{n-1}}{\pi}}=2\sqrt{\pi a_{n-1}}$ である。

また，P_n の面積は a_n なので，その外接円の半径を r_n とすると，

$$\frac{1}{2}{r_n}^2\sin\frac{2\pi}{n}=\frac{a_n}{n}\ \cdots\cdots\cdots①$$



さらに，P_n の周の長さは D_{n-1} の周の長さ $2\sqrt{\pi a_{n-1}}$ に等しいことより，

$$2r_n\sin\left(\frac{1}{2}\cdot\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{2\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n},\quad r_n\sin\frac{\pi}{n}=\frac{\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n}\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より $r_n=\dfrac{\sqrt{\pi a_{n-1}}}{n\sin\frac{\pi}{n}}$ となるので，①に代入して，$\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi a_{n-1}}{n^2\sin^2\frac{\pi}{n}}\sin\dfrac{2\pi}{n}=\dfrac{a_n}{n}$

よって，$\displaystyle\frac{a_{n-1}}{a_n}=\frac{2n\sin^2\frac{\pi}{n}}{\pi\sin\frac{2\pi}{n}}=\frac{2n\sin^2\frac{\pi}{n}}{2\pi\sin\frac{\pi}{n}\cos\frac{\pi}{n}}=\frac{n}{\pi}\tan\frac{\pi}{n}$

(2)　$\dfrac{\pi}{n}=\theta$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ となる。

$$n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)=\left(\frac{\pi}{\theta}\right)^2\left(\frac{\tan\theta}{\theta}-\frac{\sin\theta}{\theta}\right)=\frac{\pi^2\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1}{\cos\theta}-1\right)$$

$$=\frac{\pi^2\sin\theta}{\theta^3}\left(\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta}\right)=\pi^2\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}n^2\left(\frac{a_{n-1}}{a_n}-\frac{n}{\pi}\sin\frac{\pi}{n}\right)=\lim_{\theta\to 0}\pi^2\cdot\frac{\sin^3\theta}{\theta^3}\cdot\frac{1}{\cos\theta(1+\cos\theta)}=\frac{\pi^2}{2}$

コメント

極限に関する標準問題です。解の方針に迷いは生じないと思います。

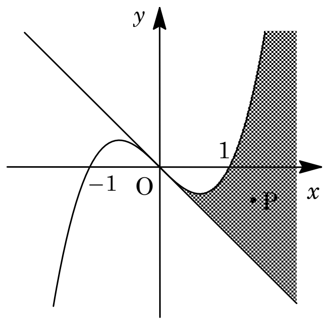
問　題

xy 平面において，3 次関数 $y=x^3-x$ のグラフを C とし，不等式 $x^3-x>y>-x$ の表す領域を D とする。また，P を D の点とする。

(1)　P を通り C に接する直線が 3 本存在することを示せ。

(2)　P を通り C に接する 3 本の直線の傾きの和と積がともに 0 となるような P の座標を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$C: y=x^3-x$ に対して $y'=3x^2-1$ となり，C 上の点 $(t,\ t^3-t)$ における接線の方程式は，

$$y-(t^3-t)=(3t^2-1)(x-t)$$

$$y=(3t^2-1)x-2t^3 \cdots\cdots\cdots①$$

さて，領域 D の点 $\mathrm{P}(p,\ q)$ とおくと，条件より，

$$p^3-p>q>-p \cdots\cdots\cdots②$$

そして，①が点 P を通ることより，

$$q=(3t^2-1)p-2t^3,\ -2t^3+3pt^2-p=q \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$f(t)=-2t^3+3pt^2-p$ とおくと，③は $f(t)=q$ となり，

$$f'(t)=-6t^2+6pt=-6t(t-p)$$

②より $p>0$ なので，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	p	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	$-p$	$\nearrow$	p^3-p	$\searrow$

よって，方程式③は，不等式②から 3 つの異なる実数解をもつ。すなわち点 P を通る接線の接点は 3 個となり，3 次関数のグラフ C は複接線をもたないことより，接線は 3 本存在することになる。

(2)　③の解を $t=\alpha,\ \beta,\ \gamma$ とおくと，この接点における接線の傾きは，それぞれ，$3\alpha^2-1$，$3\beta^2-1$，$3\gamma^2-1$ となり，条件より，これらの和と積が 0 なので，

$$(3\alpha^2-1)+(3\beta^2-1)+(3\gamma^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots④$$

$$(3\alpha^2-1)(3\beta^2-1)(3\gamma^2-1)=0 \cdots\cdots\cdots⑤$$

$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は対等なので，⑤より $3\alpha^2-1=0$ とすると $\alpha=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，③から，

$$q=(3\alpha^2-1)p-2\alpha^3=-2\left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}\right)^3=\mp\frac{2}{9}\sqrt{3}$$

このとき④より，$(3\beta^2-1)+(3\gamma^2-1)=0$，$\beta^2+\gamma^2=\dfrac{2}{3} \cdots\cdots\cdots⑥$

(i)　$q=-\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(\alpha=\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$のとき

③より，$-2t^3+3pt^2-p=-\frac{2}{9}\sqrt{3}$ となり，$2t^3-3pt^2+p-\frac{2}{9}\sqrt{3}=0$

$$\left(t-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\{2t^2-\left(3p-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)t-\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right\}=0$$

これより，$\beta+\gamma=\frac{1}{2}\left(3p-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\beta\gamma=\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right)$となり，⑥に代入すると，

$$\frac{1}{4}\left(3p-\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\left(-\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3},\ \frac{9}{4}p^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

よって，$\frac{9}{4}p^2=1$ より，$p>0$ から $p=\frac{2}{3}$ となり，点 P は D の点である。

(ii)　$q=\frac{2}{9}\sqrt{3}\ \left(\alpha=-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)$のとき

③より，同様にすると，$2t^3-3pt^2+p+\frac{2}{9}\sqrt{3}=0$

$$\left(t+\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\left\{2t^2-\left(3p+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)t+\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right\}=0$$

これより，$\beta+\gamma=\frac{1}{2}\left(3p+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)$，$\beta\gamma=\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right)$となり，⑥に代入すると，

$$\frac{1}{4}\left(3p+\frac{2}{\sqrt{3}}\right)^2-2\cdot\frac{1}{2}\left(\sqrt{3}p+\frac{2}{3}\right)=\frac{2}{3},\ \frac{9}{4}p^2+\frac{1}{3}-\frac{2}{3}=\frac{2}{3}$$

よって，$\frac{9}{4}p^2=1$ より，$p>0$ から $p=\frac{2}{3}$ となるが，点 P は D の点ではない。

(i)(ii)より，求める点 P の座標は，$\left(\frac{2}{3},\ -\frac{2}{9}\sqrt{3}\right)$である。

コメント

3 次曲線の接線の本数についての頻出問題です。ただ，(2)は q の値がすぐに求まることに着目して解いたのですが，かなりの計算量でした。α，β，γ について，解と係数の関係を利用した方が，疲れなくてすむかもしれません。

問　題

$x=t+\dfrac{1}{3t}\left(0<t\leqq\dfrac{1}{2}\right)$とする。

(1)　xのとり得る値の範囲を求めよ。

(2)　x の方程式$x^2+ax+b=0$が(1)の範囲に少なくとも 1 つの解をもつような点$(a,\ b)$の存在範囲を図示せよ。　[2014]

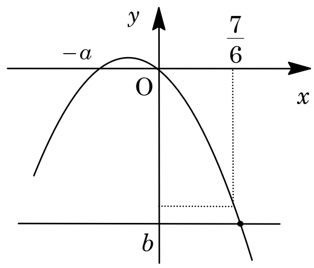
解答例

(1)　$x=t+\dfrac{1}{3t}$に対して，$x'=1-\dfrac{1}{3t^2}=\dfrac{3t^2-1}{3t^2}$

すると，$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$のとき，$x'<0$より，$x\geqq\dfrac{1}{2}+\dfrac{2}{3}=\dfrac{7}{6}$

また，$\displaystyle\lim_{t\to+0}x=\lim_{t\to+0}\left(t+\frac{1}{3t}\right)=\infty$から，$x$のとり得る値の範囲は$x\geqq\dfrac{7}{6}$である。

(2)　方程式$x^2+ax+b=0$，すなわち$-x^2-ax=b$が，$x\geqq\dfrac{7}{6}$において少なくとも 1 つの解をもつ条件は，$y=-x^2-ax$ ……(＊)と$y=b$が$x\geqq\dfrac{7}{6}$において共有点を少なくとも 1 つもつ条件に等しい。そこで，(＊)において，$x=\dfrac{7}{6}$のとき$y=-\dfrac{49}{36}-\dfrac{7}{6}a$に留意すると，右図より，



(i)　$a\geqq0$のとき　$b\leqq-\dfrac{49}{36}-\dfrac{7}{6}a$

(ii)　$a<0$のとき　(＊)から，

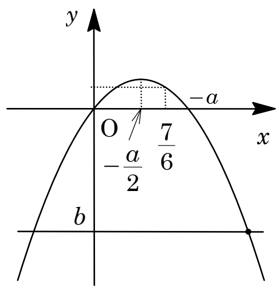
$y=-\left(x+\dfrac{a}{2}\right)^2+\dfrac{a^2}{4}$

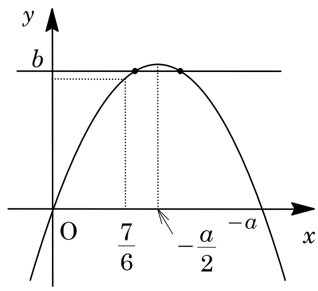
・$-\dfrac{a}{2}<\dfrac{7}{6}\left(-\dfrac{7}{3}<a<0\right)$

$b\leqq-\dfrac{49}{36}-\dfrac{7}{6}a$

・$-\dfrac{a}{2}\geqq\dfrac{7}{6}\left(a\leqq-\dfrac{7}{3}\right)$

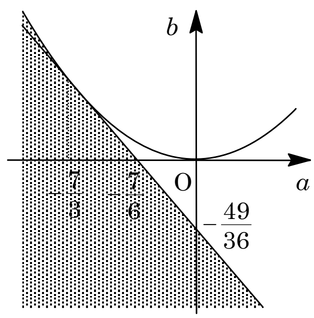
$b\leqq\dfrac{a^2}{4}$





以上より，方程式$x^2+ax+b=0$が，$x\geqq\dfrac{7}{6}$に少なくとも 1 つの解をもつ点$(a,\ b)$の存在範囲は，右図の網点部である。

ただし，境界は領域に含む。



コメント

2 次方程式の解の配置の問題に，微分の応用を加味した基本問題です。(2)では，わかりやすいと思い，定数分離の形で解いていますが，この方法が極め付きというほどではありません。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　n を自然数, a を正の定数として,

$$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$$

とおく。$x>0$ における関数 $f(x)$ の極値を求めよ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2)　n が 2 以上の自然数のとき, 次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}>(n+1)^{\frac{1}{n}}$$

[2014]

解答例

(1)　$f(x)=(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}-n(\log a-\log n)-\log x$ に対して,

$$f'(x)=\frac{n+1}{a+x}-\frac{1}{x}=\frac{nx-a}{x(a+x)}$$

すると, $f(x)$ の増減は右表のようになり, $f(x)$ は $x=\frac{a}{n}$ において極小となる。極小値は,

x	0	$\cdots$	$\frac{a}{n}$	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f\Big(\frac{a}{n}\Big)=(n+1)\Big\{\log\frac{(n+1)a}{n}-\log(n+1)\Big\}-n\log\frac{a}{n}-\log\frac{a}{n}=0$$

(2)　$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k+1}{k}$ とおき, $n\geqq 2$ のとき $S_n>n(n+1)^{\frac{1}{n}}$ を数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=2$ のとき　$S_2-2\cdot 3^{\frac{1}{2}}=\frac{2}{1}+\frac{3}{2}-2\sqrt{3}=\frac{1}{2}(7-4\sqrt{3})>0$ となり成立する。

(ii)　$n=m$ のとき　$S_m>m(m+1)^{\frac{1}{m}}$ であると仮定すると,

$$\log S_m>\log m(m+1)^{\frac{1}{m}}=\log m+\frac{1}{m}\log(m+1)\cdots\cdots\cdots①$$

さて, $T_{m+1}=\log S_{m+1}-\log(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}$ とおくと,

$$T_{m+1}=\log\Big(S_m+\frac{m+2}{m+1}\Big)-\log(m+1)-\frac{1}{m+1}\log(m+2)\cdots\cdots\cdots②$$

ここで, (1)において $f(x)\geqq 0$ から,

$$(n+1)\{\log(a+x)-\log(n+1)\}\geqq n(\log a-\log n)+\log x$$

$$\log(a+x)-\log(n+1)\geqq\frac{n}{n+1}(\log a-\log n)+\frac{1}{n+1}\log x$$

そこで, $a=S_m$, $x=\frac{m+2}{m+1}$, $n=m$ とおくと,

$$\log\Big(S_m+\frac{m+2}{m+1}\Big)-\log(m+1)\geqq\frac{m}{m+1}(\log S_m-\log m)+\frac{1}{m+1}\log\frac{m+2}{m+1}$$

②より，$T_{m+1} \geqq \dfrac{m}{m+1}(\log S_m - \log m) + \dfrac{1}{m+1}\log\dfrac{m+2}{m+1} - \dfrac{1}{m+1}\log(m+2)$

$$= \frac{m}{m+1}\left\{\log S_m - \log m - \frac{1}{m}\log(m+1)\right\}$$

すると，①から $T_{m+1} > 0$ となり，$\log S_{m+1} > \log(m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}$ から，

$$S_{m+1} > (m+1)(m+2)^{\frac{1}{m+1}}$$

(i)(ii)より，$n \geqq 2$ のとき $S_n > n(n+1)^{\frac{1}{n}}$，すなわち $\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\dfrac{k+1}{k} > (n+1)^{\frac{1}{n}}$ である。

コメント

かなりの時間を費やしました。その原因は(1)の誘導が利用しにくいためです。

問　題

$a,\ b$ を正の実数とする。曲線 $C: y=x^3-a^2x+a^3$ と点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を考える。以下の問いに答えよ。

(1) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 3 本引けるような点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示せよ。

(2) 点 P から曲線 C に接線がちょうど 2 本引けるとする。2 つの接点を A, B としたとき，$\angle\mathrm{APB}$ が $90°$ より小さくなるための a と b の条件を求めよ。　[2010]

解答例

(1) $C: y=x^3-a^2x+a^3$ に対して，$y'=3x^2-a^2$ となり，接点を $(t,\ t^3-a^2t+a^3)$ とおくと，接線の方程式は，

$$y-(t^3-a^2t+a^3)=(3t^2-a^2)(x-t),\quad y=(3t^2-a^2)x-2t^3+a^3$$

点 $\mathrm{P}(b,\ 0)$ を通ることより，

$$(3t^2-a^2)b-2t^3+a^3=0,\quad 2t^3-3bt^2+a^2b-a^3=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

3 次曲線に異なる 2 点で接する接線は存在しないので，接線が 3 本存在する条件は，①が異なる実数解を 3 個もつことに等しい。

そこで，①の左辺を $f(t)=2t^3-3bt^2+a^2b-a^3$ とおくと，

$$f'(t)=6t^2-6bt=6t(t-b)$$

$b>0$ より，$f(t)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，

t	$\cdots$	0	$\cdots$	b	$\cdots$
$f'(t)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

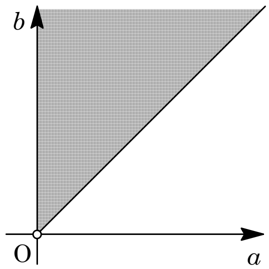
$$f(0)=a^2b-a^3=a^2(b-a)>0\ \cdots\cdots\cdots②$$

$$f(b)=-b^3+a^2b-a^3<0\ \cdots\cdots\cdots③$$

$a>0$ なので，②から，$b>a>0\cdots\cdots\cdots④$

③は，$-b(b^2-a^2)-a^3<0$ となり，④のもとで成立する。

よって，点 P から曲線 C に接線が 3 本引ける $a,\ b$ の条件は④であり，点 $(a,\ b)$ の存在する領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



(2) 接線がちょうど 2 本引ける条件は，(1)より，$f(0)=0$ または $f(b)=0$ である。

(i) $f(0)=0$ のとき　$b=a$

このとき，$f(t)=2t^3-3at^2=0$ の解は，$t=0,\ \dfrac{3}{2}a$ である。

そこで，接点を $\mathrm{A}(0,\ a^3)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{3}{2}a,\ \dfrac{23}{8}a^3\right)$ とおくと，$\mathrm{P}(a,\ 0)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-a,\ a^3),\ \overrightarrow{\mathrm{PB}}=\left(\frac{1}{2}a,\ \frac{23}{8}a^3\right)$$

$\angle \mathrm{APB} < 90°$ より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}>0$ となり，$-\dfrac{1}{2}a^2+\dfrac{23}{8}a^6>0$ から，$a>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$

(ii)　$f(b)=0$ のとき　$b^3-a^2b+a^3=0$

$b>a>0$ のとき，$b(b^2-a^2)+a^3>0$ となり，成立しない。

$a\geqq b>0$ のとき，$b^3+a^2(a-b)>0$ となり，成立しない。

(i)(ii)より，求める条件は，$a=b>\sqrt[4]{\dfrac{4}{23}}$ である。

コメント

3 次曲線の接線の本数についての頻出問題です。

問　題

実数 a に対して，x の方程式 $|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0$ が，相異なる 4 つの実数解をもつような a の範囲を求めよ。　[2009]

解答例

方程式 $|x(x-2)|+2a|x|-4a|x-2|-1=0$ ……①に対して，

$$2a(2|x-2|-|x|)=|x(x-2)|-1$$

ここで，$2|x-2|-|x|=0$ とすると，$2(x-2)=\pm x$ から，$x=4,\ \frac{4}{3}$ である。

$x=4$ のとき $|x(x-2)|-1=7$，$x=\frac{4}{3}$ のとき $|x(x-2)|-1=-\frac{1}{9}$ となり，ともに①は成立しない。よって，$2|x-2|-|x|\neq 0$ より，①は，

$$a=\frac{|x(x-2)|-1}{2(2|x-2|-|x|)}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，②の右辺を，$f(x)=\dfrac{|x(x-2)|-1}{2(2|x-2|-|x|)}$ とおくと，

(i)　$x\leqq 0$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-2)-1}{-2(x-2)+x}=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x-1}{x-4}$$

$$f'(x)=-\frac{1}{2}\cdot\frac{(2x-2)(x-4)-(x^2-2x-1)}{(x-4)^2}$$

$$=-\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	$-\infty$	$\cdots$	0
$f'(x)$		$-$	
$f(x)$	∞	$\searrow$	$-\frac{1}{8}$

(ii)　$0\leqq x\leqq 2$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x(x-2)-1}{-2(x-2)-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{-x^2+2x-1}{-3x+4}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)^2}{3x-4}$$

$$f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{2(x-1)(3x-4)-(x-1)^2\cdot 3}{(3x-4)^2}=\frac{1}{2}\cdot\frac{(x-1)(3x-5)}{(3x-4)^2}$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}-0}f(x)=-\infty$$

$$\lim_{x\to\frac{4}{3}+0}f(x)=\infty$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{4}{3}$	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	2
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\frac{1}{8}$	$\nearrow$	0	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	$\frac{2}{9}$	$\nearrow$	$\frac{1}{4}$

(iii) $x\geqq 2$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x(x-2)-1}{2(x-2)-x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-2x-1}{x-4},\quad f'(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{x^2-8x+9}{(x-4)^2}$$

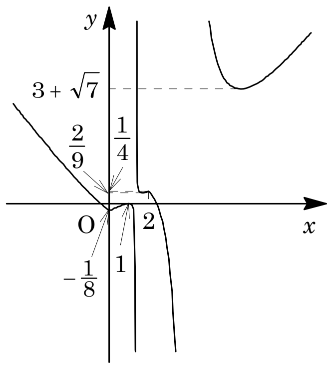
$$\lim_{x \to 4-0} f(x) = -\infty$$

$$\lim_{x \to 4+0} f(x) = \infty$$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	2	$\cdots$	4	$\cdots$	$4+\sqrt{7}$	$\cdots$	∞
$f'(x)$		$-$	$\times$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$\dfrac{1}{4}$	$\searrow$	$\times$	$\searrow$	$3+\sqrt{7}$	$\nearrow$	∞

(i)～(iii)より，$y = f(x)$ のグラフの概形を図示すると，右図のようになる。



そこで，方程式②すなわち $a = f(x)$ が相異なる 4 つの実数解をもつ条件は，直線 $y = a$ と $y = f(x)$ のグラフが 4 つの共有点をもつ条件と等しいことより，求める a の範囲は,

$$-\frac{1}{8} < a < 0,\ \frac{2}{9} < a < \frac{1}{4},\ 3+\sqrt{7} < a$$

コメント

定数分離した後の計算量は，通常の量とはいえません。グラフもかなりデフォルメして描いていますが，それでも上のような表現力しかありません。

問　題

自然数 n に対し，方程式 $\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}=0$ を考える。ただし，対数は自然対数であり，e はその底とする。

(1)　上の方程式は $x\geqq 1$ にただ 1 つの解をもつことを示せ。

(2)　(1)の解を x_n とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}x_n=1$ を示せ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{1}{x^n}-\log x-\dfrac{1}{e}$ とおくと，$f'(x)=-\dfrac{n}{x^{n+1}}-\dfrac{1}{x}$

$x>0$ において，$f'(x)<0$ より，$f(x)$ は単調に減少し，

$$f(1)=1-\frac{1}{e}>0,\ f\left(e^{\frac{1}{n}}\right)=\frac{1}{e}-\frac{1}{n}-\frac{1}{e}=-\frac{1}{n}<0$$

よって，$f(x)=0$ は $x\geqq 1$ にただ 1 つの解をもつ。

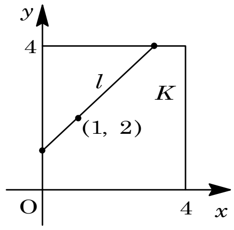
(2)　(1)より，$1<x_n<e^{\frac{1}{n}}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}e^{\frac{1}{n}}=1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}x_n=1$$

コメント

(1)では，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ より結論が導けますが，(2)につながりません。そこで，$f(x)$ の式を眺めて，$x=e^{\frac{1}{n}}$ のときの値を計算しました。

問　題

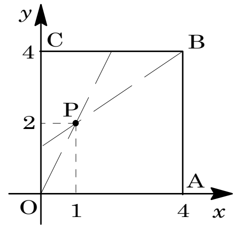


xy 平面上に 4 点$(0,\ 0)$，$(4,\ 0)$，$(4,\ 4)$，$(0,\ 4)$を頂点とする正方形 K を考える。点$(1,\ 2)$を通る各直線に対して，そのKに含まれる部分をlとおく。

(1) l の長さの最大値と，それを与える直線の方程式を求めよ。

(2) lの長さの最小値を求めよ。 [2007]

解答例



(1) $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(4,\ 0)$，$\mathrm{B}(4,\ 4)$，$\mathrm{C}(0,\ 4)$，$\mathrm{P}(1,\ 2)$とおき，lの長さをLとする。

まず，点 P を通る直線が，$x=1$のとき$L=4$である。

次に，点 P を通る直線は，その傾きを m とすると，

$$y-2=m(x-1),\ \ y=mx-m+2\cdots\cdots\cdots(*)$$

また，$(*)$と辺 OA の交点は，$0=mx-m+2$，$x=\dfrac{m-2}{m}$，$(*)$と辺 BC の交点は，$4=mx-m+2$，$x=\dfrac{m+2}{m}$である。

さて，点 P は，辺 OA, BC から等距離にあるので，対称性より $m\geqq 0$ で考える。

(i) $0\leqq m<\dfrac{2}{3}$のとき

$$L=(4-0)\sqrt{1+m^2}=4\sqrt{1+m^2}$$

よって，m が増加すると，L は単調に増加する。

(ii) $\dfrac{2}{3}\leqq m<2$のとき

$$L=\left(\frac{m+2}{m}-0\right)\sqrt{1+m^2}=\sqrt{\frac{(m+2)^2(1+m^2)}{m^2}}$$

ここで，$f(m)=\dfrac{(m+2)^2(1+m^2)}{m^2}$とおくと，

$$f'(m)=\frac{\{2(m+2)(1+m^2)+(m+2)^2\cdot 2m\}m^2-(m+2)^2(1+m^2)\cdot 2m}{m^4}$$

$$=\frac{2(m+2)\{(1+m^2+m^2+2m)m-(m+2)(1+m^2)\}}{m^3}$$

$$=\frac{2(m+2)(m^3-2)}{m^3}$$

すると，$f(m)$の増減は右表のようになり，L は$m=\sqrt[3]{2}$において極小値をとる。

m	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	$\sqrt[3]{2}$	$\cdots$	2
$f'(m)$		$-$	0	$+$	
$f(m)$	$\dfrac{208}{9}$	↘		↗	20

(iii) $m \geqq 2$ のとき

$$L=\left(\frac{m+2}{m}-\frac{m-2}{m}\right)\sqrt{1+m^2}=4\sqrt{\frac{1}{m^2}+1}$$

よって, m が増加すると, L は単調に減少する。

(i)～(iii)より, L は $m=\frac{2}{3}$, $m=2$ において連続なので, $m=\frac{2}{3}$ のとき最大となる。

さらに, $m<0$ のときについても考え合わせると, $m=\pm\frac{2}{3}$ のとき, L は最大値 $\sqrt{\frac{208}{9}}=\frac{4\sqrt{13}}{3}$ をとる。このとき, 直線の方程式は,

$$y=\frac{2}{3}x+\frac{4}{3},\quad y=-\frac{2}{3}x+\frac{8}{3}$$

(2) まず, $m=0$ のとき, 点 P を通る直線は $y=2$ となり, このとき $L=4$ である。

また, $m\to\infty$ のとき $L\to 4$ となり, これは, 点 P を通る直線が $x=1$ のとき, $L=4$ であることに対応する。

さて, $f(\sqrt[3]{2})-4^2=\frac{(\sqrt[3]{2}+2)^2(1+\sqrt[3]{4})}{\sqrt[3]{4}}-16=(\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+4)\left(1+\frac{1}{\sqrt[3]{4}}\right)-16$

$$=(\sqrt[3]{4}+4\sqrt[3]{2}+4)+(1+2\sqrt[3]{4}+2\sqrt[3]{2})-16=3\sqrt[3]{4}+6\sqrt[3]{2}-11$$
$$=3(\sqrt[3]{2}+1)^2-14$$

ここで, $2>\frac{125}{64}$ から, $\sqrt[3]{2}>\frac{5}{4}$ となり,

$$3(\sqrt[3]{2}+1)^2-14>3\times\left(\frac{9}{4}\right)^2-14=\frac{19}{16}>0$$

よって, $f(\sqrt[3]{2})>4^2$ となるので, 点 P を通る直線が $y=2$ または $x=1$ のとき, L は最小値 4 をとる。

コメント

対称性に気付くと, 場合分けが半減しますが, それでもかなりの計算量です。特に, (2)の詰めには時間を費やしてしまいます。なお, 上の解では, 一般的に直線上の 2 点 $(x_1,\ mx_1+n)$, $(x_2,\ mx_2+n)$ の距離が $|x_1-x_2|\sqrt{1+m^2}$ であることを, 説明なしで用いています。

問　題

$x>0$ において，関数 $f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ を考える。関数 $f(x)$ の導関数を $f'(x)$ と書くことにし，以下の問いに答えよ。

(1)　$f'(2)$ を求め，$x>2$ のとき $f'(x)<1$ であることを示せ。

(2)　k が自然数のとき，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)$ を求めよ。

(3)　$f'(x)=1$ となる x を値の大きいものから順に，x_1，x_2，x_3，…とおく。$n\geqq 2$ である自然数 n に対して，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ を示せ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} f(x_n)$ を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=x\sin\dfrac{\pi}{x}$ に対し，$f'(x)=\sin\dfrac{\pi}{x}+x\cos\dfrac{\pi}{x}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)=\sin\dfrac{\pi}{x}-\dfrac{\pi}{x}\cos\dfrac{\pi}{x}$ から，

$$f'(2)=\sin\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2}\cos\frac{\pi}{2}=1$$

また，$f''(x)=\cos\dfrac{\pi}{x}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)+\dfrac{\pi}{x^2}\cos\dfrac{\pi}{x}+\dfrac{\pi}{x}\sin\dfrac{\pi}{x}\cdot\left(-\dfrac{\pi}{x^2}\right)=-\dfrac{\pi^2}{x^3}\sin\dfrac{\pi}{x}$ ………①

ここで，$x>2$ のとき $0<\dfrac{\pi}{x}<\dfrac{\pi}{2}$ から，$f''(x)<0$ となり，

$$f'(x)<f'(2)=1$$

(2)　(1)より，$f'\left(\dfrac{1}{k}\right)=\sin k\pi-k\pi\cos k\pi=-k\pi(-1)^k=(-1)^{k+1}k\pi$

(3)　まず，(1)から $f'(x)=1$ となる x の最大の値は 2 より，$x_1=2$ である。

次に，$1<x\leqq 2$ のとき $\dfrac{\pi}{2}\leqq\dfrac{\pi}{x}<\pi$ から $f''(x)<0$ であり，この区間で $f'(x)$ は単調減少をするので，$x_2<1$ となる。

さて，$k\geqq 1$ のとき，①から $f''\left(\dfrac{1}{k}\right)=0$ となり，(2)より，

$$\left|f'\left(\frac{1}{k}\right)\right|=|(-1)^{k+1}k\pi|=k\pi>1 \text{ ………②}$$

また，$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$ において，$(n-1)\pi<\dfrac{\pi}{x}<n\pi$ から，

(i)　n が偶数のとき　$f''(x)>0$

(ii)　n が奇数のとき　$f''(x)<0$

よって，区間 $\dfrac{1}{n}<x<\dfrac{1}{n-1}$ において $f'(x)$ は単調増加または単調減少であり，②から，この区間内に $f'(x)=1$ となる x がただ 1 つ存在する。

以上より，$\dfrac{1}{2}<x_2<\dfrac{1}{1}$，$\dfrac{1}{3}<x_3<\dfrac{1}{2}$，…となるので，$\dfrac{1}{n}<x_n<\dfrac{1}{n-1}$ である。

(4)　(3)より, $n\to\infty$ のとき $\dfrac{1}{n}\to 0$，$\dfrac{1}{n-1}\to 0$ から $x_n\to 0$ となり，合わせて,

$$|f(x_n)|=\left|x_n\sin\frac{\pi}{x_n}\right|\leqq|x_n|$$

したがって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}f(x_n)=0$

コメント

下書きとして，$f''(x)$ の符号変化から $f'(x)$ のグラフを想像して描き，それを見ながら方針を立てました。なお, (4)は意外な設問でした。

問　題

a を $0<a<1$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ とする。

(1)　$f(x)$ が $0\leqq x\leqq \pi$ で減少関数となる a の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ の $0\leqq x\leqq \pi$ における最大値は $f(0)$ であることを示せ。　[2005]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{\cos 2x-2}{a\cos x+1}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{-2\sin 2x(a\cos x+1)-(\cos 2x-2)(-a\sin x)}{(a\cos x+1)^2}$$
$$=\frac{\sin x\{-4\cos x(a\cos x+1)+a(2\cos^2 x-3)\}}{(a\cos x+1)^2}$$
$$=-\frac{\sin x(2a\cos^2 x+4\cos x+3a)}{(a\cos x+1)^2}$$

ここで，$g(x)=2a\cos^2 x+4\cos x+3a$ とおくと，$f(x)$ が $0\leqq x\leqq \pi$ で減少関数となる条件は，$0<x<\pi$ において $g(x)\geqq 0$ と同値である。

さらに，$t=\cos x$，$h(t)=g(x)$ とおくと，$0<x<\pi$ から $-1<t<1$ のもとで，

$$h(t)=2at^2+4t+3a=2a\left(t+\frac{1}{a}\right)^2-\frac{2}{a}+3a$$

$0<a<1$ から $-\dfrac{1}{a}<-1$ となるので，$-1<t<1$ において $h(t)\geqq 0$ となる条件は，

$$h(-1)=5a-4\geqq 0,\ a\geqq\frac{4}{5}$$

よって，$0<a<1$ より，$\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ である。

(2)　(i)　$\dfrac{4}{5}\leqq a<1$ のとき

(1)より，$f(x)$ は $0\leqq x\leqq \pi$ で減少関数なので，最大値は $f(0)$ である。

(ii)　$0<a<\dfrac{4}{5}$ のとき

$h(-1)=5a-4<0$，$h(1)=5a+4>0$ より，$-1<t<1$ において $h(t)=0$ となる t がただ 1 つ存在し，これを $t=\alpha$ とおく。すると，$-1\leqq t<\alpha$ において $h(t)<0$，$\alpha<t\leqq 1$ において $h(t)>0$ となる。

さらに，$\alpha=\cos\beta$ とおくと，$\beta<x\leqq\pi$ において $g(x)<0$，$0\leqq x<\beta$ において $g(x)>0$ となる。

x	0	$\cdots$	β	$\cdots$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

よって，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$$f(0)-f(\pi)=-\frac{1}{a+1}-\frac{1}{a-1}=\frac{-2a}{(a+1)(a-1)}>0$$

以上より，$0\leqq x\leqq \pi$ における $f(x)$ の最大値は $f(0)$ である。

コメント

一見，平易に見えますが，関数の増減に関する興味深い問題です。置き換えを行って，思考の対象を絞り，グラフをイメージしながら解きました。

問　題

2 つの関数を

$$t=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta,\quad y=-4\cos3\theta+\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$$

とする。

(1)　$\cos3\theta$ を t の関数で表せ。

(2)　y を t の関数で表せ。

(3)　$0°\leqq\theta\leqq180°$ のとき, y の最大値, 最小値とそのときの θ の値を求めよ。[2003]

解答例

(1)　$t^3=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^3=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta\sin^2\theta+3\sqrt{3}\sin^3\theta$

$$=\cos^3\theta+3\sqrt{3}\cos^2\theta\sin\theta+9\cos\theta(1-\cos^2\theta)+3\sqrt{3}\sin\theta(1-\cos^2\theta)$$

$$=-8\cos^3\theta+9\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta=-2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)+3\cos\theta+3\sqrt{3}\sin\theta$$

3 倍角の公式より, $t^3=-2\cos3\theta+3t$ となり, $\cos3\theta=\dfrac{-t^3+3t}{2}$ である。

(2)　$t^2=(\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta)^2=\cos^2\theta+2\sqrt{3}\cos\theta\sin\theta+3\sin^2\theta$

$$=\frac{1+\cos2\theta}{2}+\sqrt{3}\sin2\theta+3\cdot\frac{1-\cos2\theta}{2}=\sqrt{3}\sin2\theta-\cos2\theta+2$$

これより, $\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta=-t^2+2$

すると, $y=-4\cos3\theta+\cos2\theta-\sqrt{3}\sin2\theta+2\cos\theta+2\sqrt{3}\sin\theta$

$$=-4\cdot\frac{-t^3+3t}{2}-t^2+2+2t=2t^3-t^2-4t+2$$

(3)　$t=2\sin(\theta+30°)$ と合成すると, $0°\leqq\theta\leqq180°$ から $30°\leqq\theta+30°\leqq210°$ となり, $-1\leqq t\leqq2$ である。

(2)より, $y'=6t^2-2t-4$

$$=2(3t+2)(t-1)$$

t	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{3}$	$\cdots$	1	$\cdots$	2
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	
y	3	$\nearrow$	$\frac{98}{27}$	$\searrow$	-1	$\nearrow$	6

右表より, $t=2$ のとき最大値 6 をとる。このとき $2\sin(\theta+30°)=2$ より, $\theta+30°=90°$ すなわち $\theta=60°$ である。

また, $t=1$ のとき最小値 -1 をとる。このとき $2\sin(\theta+30°)=1$ より, $\theta+30°=30°$, $150°$ すなわち $\theta=0°$, $120°$ である。

コメント

(1)は, 3 倍角の公式が関係するようなので, とりあえず t の 3 乗を計算しました。すると, 予測した通りでした。

問　題

対数は自然対数であり，e はその底とする。関数 $f(x)=(x+1)\log\dfrac{x+1}{x}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ は $x>0$ で単調減少関数であることを示せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)$ および $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f(x)$ を求めよ。

(3)　$f(x)=2$ を満たす x が $\dfrac{1}{e^2}<x<1$ の範囲に存在することを示せ。　　[2003]

解答例

(1)　$x>0$ のとき，$f(x)=(x+1)\log\dfrac{x+1}{x}=(x+1)\{\log(x+1)-\log x\}$

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+(x+1)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{x^2}=\frac{x^2-x(x+1)+(x+1)}{x^2(x+1)}=\frac{.1}{x^2(x+1)}>0$$

これより，$f'(x)$ は単調増加関数であり，

$$\lim_{x\to+\infty} f'(x)=\lim_{x\to+\infty}\left(\log\frac{x+1}{x}-\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x}\right\}=0$$

よって, $x>0$ のとき $f'(x)<0$ となるので，$f(x)$ は単調減少関数である。

(2)　$\displaystyle\lim_{x\to+0} f(x)=\lim_{x\to+0}(x+1)\log\frac{x+1}{x}=\lim_{x\to+0}(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\infty$

$$\lim_{x\to+\infty} f(x)=\lim_{x\to+\infty}(x+1)\log\left(1+\frac{1}{x}\right)=\lim_{x\to+\infty}\frac{x+1}{x}\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x=\log e=1$$

(3)　$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-2=\left(\dfrac{1}{e^2}+1\right)\log(1+e^2)-\log e^2=\dfrac{1}{e^2}\{(1+e^2)\log(1+e^2)-e^2\log e^2\}$

ここで，$g(x)=x\log x\ (x>1)$ とおくと，$g'(x)=\log x+1>0$ から，

$$g(1+e^2)>g(e^2)$$

すると，$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)-2>0$ より，$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)>2$ ………①

また，$f(1)-2=2\log 2-2=\log 4-\log e^2<0$ から，$f(1)<2$ ………②

①②より，$f\left(\dfrac{1}{e^2}\right)>2>f(1)$

よって, (1)から，$\dfrac{1}{e^2}<x<1$ の範囲に，$f(x)=2$ を満たす x が存在する。

コメント

微分の応用についての基本問題です。誘導が非常にていねいです。

問　題

関数 $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}\ (x\neq 0)$ について，$a=\lim\limits_{x\to 0}f(x)$，$b=\lim\limits_{x\to 0}f'(x)$ とおく。

(1) $a,\ b$ の値を求めよ。

(2) $-\dfrac{1}{2}\leqq x$ の範囲で，3 つの関数 $\sqrt{1+2x}$，$1+ax$，$1+ax+bx^2$ の大小関係を調べ，これらの関数のグラフを同一の xy 平面上に描け。 [2001]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{\sqrt{1+2x}-1}{x}$ より，$f'(x)=\dfrac{x-(1+2x)+\sqrt{1+2x}}{x^2\sqrt{1+2x}}=\dfrac{-x-1+\sqrt{1+2x}}{x^2\sqrt{1+2x}}$

$$a=\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{(1+2x)-1}{x(\sqrt{1+2x}+1)}=\lim_{x\to 0}\frac{2}{\sqrt{1+2x}+1}=1$$

$$b=\lim_{x\to 0}f'(x)=\lim_{x\to 0}\frac{-(x+1)^2+1+2x}{x^2\sqrt{1+2x}\,(x+1+\sqrt{1+2x})}$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-1}{\sqrt{1+2x}\,(x+1+\sqrt{1+2x})}=-\frac{1}{2}$$

(2) (1)より，$-\dfrac{1}{2}\leqq x$ の範囲で，$\sqrt{1+2x}$，$1+x$，$1+x-\dfrac{1}{2}x^2$ に対して，

$$(1+x)-\left(1+x-\frac{1}{2}x^2\right)=\frac{1}{2}x^2\geqq 0$$

$$(1+x)-\sqrt{1+2x}=\frac{(1+x)^2-(1+2x)}{(1+x)+\sqrt{1+2x}}=\frac{x^2}{(1+x)+\sqrt{1+2x}}\geqq 0$$

なお，等号はともに $x=0$ のとき成立する。

さて，$g(x)=\sqrt{1+2x}-\left(1+x-\dfrac{1}{2}x^2\right)$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{\sqrt{1+2x}}-(1-x)$$

$$g''(x)=-\frac{1}{\sqrt{(1+2x)^3}}+1=\frac{\sqrt{(1+2x)^3}-1}{\sqrt{(1+2x)^3}}$$

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g''(x)$		$-$	0	$+$
$g'(x)$		↘	0	↗

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$g'(x)$		$+$	0	$+$
$g(x)$		↗	0	↗

右表より，$-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ のとき $g(x)<0$，$x=0$ のとき $g(x)=0$，$x>0$ のとき $g(x)>0$ となる。

以上より，$-\dfrac{1}{2}\leqq x<0$ のとき

$$\sqrt{1+2x}<1+x-\frac{1}{2}x^2<1+x$$

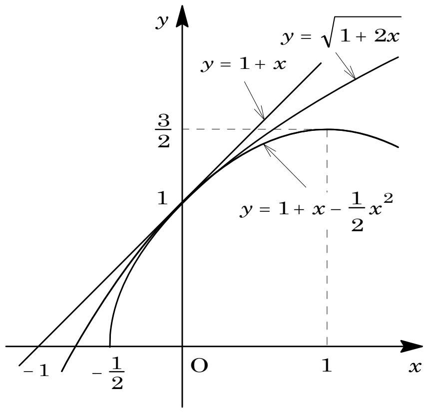
$x=0$ のとき

$$\sqrt{1+2x}=1+x-\frac{1}{2}x^2=1+x$$

$x>0$ のとき

$$1+x-\frac{1}{2}x^2<\sqrt{1+2x}<1+x$$

また，グラフは右図のようになる。



コメント

(2)はグラフがすぐ書けるので，大小関係は直観的にわかりますが，きちんと示そうとすると，時間がかかります。

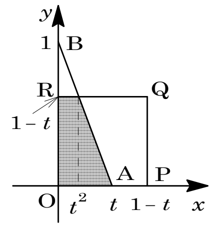
問　題

$0<t<1$ として，頂点が $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(t,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 1)$ である三角形と，頂点が O，$\mathrm{P}(1-t,\ 0)$，$\mathrm{Q}(1-t,\ 1-t)$，$\mathrm{R}(0,\ 1-t)$ である正方形の共通部分の面積を S とするとき，S を t の式で表せ。また，S を最大にする t の値を求めよ。　[2000]

解答例

まず，直線 AB の方程式は，$y=-\dfrac{1}{t}x+1$ となる。

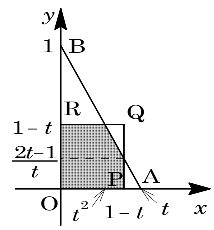
直線 AB と $x=1-t$ との交点は，$y=-\dfrac{1-t}{t}+1=\dfrac{2t-1}{t}$ であり，$0\leqq\dfrac{2t-1}{t}\leqq 1-t$ とすると $1\leqq 2t$ かつ $t^2+t-1\leqq 0$ より，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ となる。



$0<t<1$ と合わせて，$\dfrac{1}{2}\leqq t<1$

また，$y=1-t$ との交点は，$1-t=-\dfrac{1}{t}x+1$ より $x=t^2$ であり，$0\leqq t^2\leqq 1-t$ とすると $\dfrac{-1-\sqrt{5}}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

$0<t<1$ と合わせて $0<t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

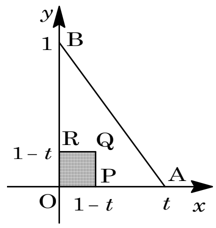


(i)　$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t-\frac{1}{2}t^2\{1-(1-t)\}=-\frac{1}{2}t^3+\frac{1}{2}t$$

(ii)　$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot t-\frac{1}{2}t^2\{1-(1-t)\}-\frac{1}{2}\{1-(1-t)\}\cdot\frac{2t-1}{t}$$
$$=-\frac{1}{2}t^3-\frac{3}{2}t+2-\frac{1}{2t}$$



(iii)　$\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq t<1$ のとき　$S=(1-t)^2$

さて，$0<t\leqq\dfrac{1}{2}$ のとき，$S'=-\dfrac{3}{2}t^2+\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{2}(3t^2-1)>0$ となり，S は単調に増加する。

また，$\dfrac{1}{2}\leqq t\leqq\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ のとき，$S'=-\dfrac{3}{2}t^2-\dfrac{3}{2}+\dfrac{1}{2t^2}=-\dfrac{3t^4+3t^2-1}{2t^2}$

$S'=0$ とすると $t^2=\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}$ となり，ここで $\alpha=\sqrt{\dfrac{-3+\sqrt{21}}{6}}$ とおくと，

$$\alpha^2-\frac{1}{4}=\frac{-3+\sqrt{21}}{6}-\frac{1}{4}=\frac{2\sqrt{21}-9}{12}>0$$

$$\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2-\alpha^2=\frac{6-2\sqrt{5}}{4}-\frac{-3+\sqrt{21}}{6}=\frac{12-3\sqrt{5}-\sqrt{21}}{6}$$

$$>\frac{12-3\sqrt{5}-5}{6}=\frac{7-3\sqrt{5}}{6}>0$$

よって，$\frac{1}{4}<\alpha^2<\left(\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\right)^2$より，

$$\frac{1}{2}<\alpha<\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

すると，Sの増減は右表のようになる。

t	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

さらに，$\frac{-1+\sqrt{5}}{2}\leqq t<1$のとき，$S'=-2(1-t)<0$となり，$S$は単調に減少する。

以上より，Sは連続的に変化するので，$t=\alpha=\sqrt{\frac{-3+\sqrt{21}}{6}}$のとき最大となる。

コメント

難問というわけではありませんが，詰めの部分の計算が繁雑な問題です。

問　題

$x>0$ において関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$ で定める。対数は自然対数である。

(1) 導関数 $f'(x)$ が単調増加であることを示せ。

(2) $f(x)\geqq 0$ であることを示し，$f(x)=0$ となる x を求めよ。

(3) 正の実数 $p,\ q$ について不等式

$$\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2}\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}$$

が成立することを示せ。 [1999]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}+\dfrac{1}{2}(x-1)^2-x^2\log x$ を微分して，

$$f'(x)=x\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{x^2+1}{2}\cdot\frac{2x}{x^2+1}+(x-1)-2x\log x-x^2\cdot\frac{1}{x}$$
$$=x\log\frac{x^2+1}{2}-2x\log x+x-1$$
$$f''(x)=\log\frac{x^2+1}{2}+x\cdot\frac{2x}{x^2+1}-2\log x-2x\cdot\frac{1}{x}+1$$
$$=\log\frac{x^2+1}{2}+\frac{2x^2}{x^2+1}-2\log x-1$$
$$f'''(x)=\frac{2x}{x^2+1}+\frac{4x(x^2+1)-2x^2\cdot 2x}{(x^2+1)^2}-\frac{2}{x}$$
$$=\frac{2(x+1)(x-1)}{x(x^2+1)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'''(x)$		$-$	0	$+$
$f''(x)$		↘	0	↗

$f''(1)=\log 1+1-2\log 1-1=0$

$x>0$ で $f''(x)\geqq 0$ となるので，$f'(x)$ は単調増加である。

(2) $f'(1)=\log 1-2\log 1+1-1=0$ なので(1)より，

$0<x<1$ で $f'(x)<0$, $x>1$ で $f'(x)>0$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$		$-$	0	$+$
$f(x)$		↘	0	↗

$f(1)=\log 1+0-\log 1=0$ なので，$f(x)\geqq 0$

なお，等号成立は $x=1$ のときである。

(3) (2)より，$\dfrac{x^2+1}{2}\log\dfrac{x^2+1}{2}\geqq -\dfrac{1}{2}(x-1)^2+x^2\log x$

$x=\dfrac{p}{q}>0$ とおくと，$\dfrac{p^2+q^2}{2q^2}\log\dfrac{p^2+q^2}{2q^2}\geqq -\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{(p-q)^2}{q^2}+\dfrac{p^2}{q^2}\log\dfrac{p}{q}$

$$\begin{aligned}\frac{p^2+q^2}{2}\log\frac{p^2+q^2}{2} &\geqq -\frac{1}{2}(p-q)^2+p^2\log\frac{p}{q}+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2\\ &=-\frac{1}{2}(p-q)^2+p^2\log p-p^2\log q+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2\\ &=-\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2}{2}\log p^2-\frac{p^2}{2}\log q^2+\frac{p^2+q^2}{2}\log q^2\\ &=-\frac{1}{2}(p-q)^2+\frac{p^2\log p^2+q^2\log q^2}{2}\end{aligned}$$

コメント

(1)(2)の誘導に乗れば, (3)の不等式の証明までスムーズに進んでいきます。

問　題

a, b, c を実数とし，

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx\ ,\ \ J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx$$

とおく。ただし，$a\neq 0$ とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$I(a,\ b)$ を求めよ。

(2)　$J(a,\ b,\ c)$ を $I(a,\ b+c)$ と $I(a,\ b-c)$ を用いて表せ。

(3)　次の極限を求めよ。　$\displaystyle\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$　　[2017]

解答例

(1)　$(e^{ax}\cos bx)'=ae^{ax}\cos bx-be^{ax}\sin bx$ ………①

$(e^{ax}\sin bx)'=ae^{ax}\sin bx+be^{ax}\cos bx$ ………②

①②より，$(ae^{ax}\cos bx+be^{ax}\sin bx)'=(a^2+b^2)e^{ax}\cos bx$ となり，

$$e^{ax}\cos bx=\frac{1}{a^2+b^2}\{e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)\}'$$

$$I(a,\ b)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\cos bx\,dx=\frac{1}{a^2+b^2}\Big[e^{ax}(a\cos bx+b\sin bx)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\frac{1}{a^2+b^2}\Big\{e^{\frac{\pi}{2}a}\Big(a\cos\frac{\pi}{2}b+b\sin\frac{\pi}{2}b\Big)-a\Big\}$$

(2)　$\displaystyle J(a,\ b,\ c)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\sin bx\sin cx\,dx=-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{ax}\{\cos(b+c)x-\cos(b-c)x\}dx$

$$=-\frac{1}{2}I(a,\ b+c)+\frac{1}{2}I(a,\ b-c)$$

(3)　$\displaystyle F(t)=8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}\sin tx\sin 2tx\cos 3tx\cos 4tx\,dx$ とおくと，

$$F(t)=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}(\sin 4tx-\sin 2tx)(\sin 6tx-\sin 2tx)dx$$

$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{x}(\sin 4tx\sin 6tx-\sin 4tx\sin 2tx-\sin 2tx\sin 6tx+\sin^2 2tx)dx$$

$$=2J(1,\ 6t,\ 4t)-2J(1,\ 4t,\ 2t)-2J(1,\ 6t,\ 2t)+2J(1,\ 2t,\ 2t)$$

$$=-I(1,\ 10t)+I(1,\ 2t)+I(1,\ 6t)-I(1,\ 2t)+I(1,\ 8t)-I(1,\ 4t)$$
$$-I(1,\ 4t)+I(1,\ 0)$$

$$=-I(1,\ 10t)+I(1,\ 6t)+I(1,\ 8t)-2I(1,\ 4t)+I(1,\ 0)$$

さて，$\displaystyle I(1,\ b)=\frac{1}{1+b^2}\Big\{e^{\frac{\pi}{2}}\Big(\cos\frac{\pi}{2}b+b\sin\frac{\pi}{2}b\Big)-1\Big\}$ となるので，

$$\left|I(1,\ b)\right| \leqq \frac{1}{1+b^2}\left\{e^{\frac{\pi}{2}}\left|\cos\frac{\pi}{2}b+b\sin\frac{\pi}{2}b\right|+\left|-1\right|\right\} \leqq \frac{1}{1+b^2}\left(e^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{1+b^2}+1\right)$$

$$=\frac{e^{\frac{\pi}{2}}}{\sqrt{1+b^2}}+\frac{1}{1+b^2}$$

これより $\lim_{b\to\infty} I(1,\ b)=0$ なので, k が自然数のとき $\lim_{t\to\infty} I(1,\ kt)=0$ となり,

$$\lim_{t\to\infty} 8\int_0^{\frac{\pi}{2}} e^x \sin tx \sin 2tx \cos 3tx \cos 4tx\, dx = \lim_{t\to\infty} F(t) = I(1,\ 0) = e^{\frac{\pi}{2}}-1$$

コメント

定積分の計算と極限の融合問題です。誘導が細かいので方針に混乱はないでしょう。

問　題

関数 $f(x)=\int_0^{\pi}\left|\sin(t-x)-\sin 2t\right|dt$ の区間 $0\leqq x\leqq\pi$ における最大値と最小値を求めよ。 [2016]

解答例

$f(x)=\int_0^{\pi}\left|\sin(t-x)-\sin 2t\right|dt$ に対し，$g(t)=\sin(t-x)-\sin 2t$ とおくと，

$$g(t)=2\cos\frac{3t-x}{2}\sin\frac{-t-x}{2}=-2\cos\frac{3t-x}{2}\sin\frac{t+x}{2}$$

すると，$0\leqq t\leqq\pi$ ，$0\leqq x\leqq\pi$ において，$0\leqq\frac{t+x}{2}\leqq\pi$ から $\sin\frac{t+x}{2}\geqq 0$

また，$-\frac{\pi}{2}\leqq\frac{3t-x}{2}\leqq\frac{3}{2}\pi$ より，$\cos\frac{3t-x}{2}$ は $\frac{3t-x}{2}=\frac{\pi}{2}\left(t=\frac{\pi+x}{3}\right)$ の前後で符号が変化し，$0\leqq t\leqq\frac{\pi+x}{3}$ のとき $g(t)\leqq 0$ ，$\frac{\pi+x}{3}\leqq t\leqq\pi$ のとき $g(t)\geqq 0$ となるので，

$$f(x)=\int_0^{\pi}|g(t)|dt=-\int_0^{\frac{\pi+x}{3}}g(t)dt+\int_{\frac{\pi+x}{3}}^{\pi}g(t)dt$$

$$=-2\int_0^{\frac{\pi+x}{3}}g(t)dt+\int_0^{\pi}g(t)dt$$

$$=2\left[\cos(t-x)-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\frac{\pi+x}{3}}-\left[\cos(t-x)-\frac{1}{2}\cos 2t\right]_0^{\pi}$$

$$=2\cos\frac{\pi-2x}{3}-2\cos(-x)-\cos\frac{2(\pi+x)}{3}+1-\cos(\pi-x)+\cos(-x)$$

$$=2\cos\frac{\pi-2x}{3}-\cos\frac{2\pi+2x}{3}+1=2\cos\left(\frac{\pi}{3}-\frac{2}{3}x\right)-\cos\left(\frac{2\pi}{3}+\frac{2}{3}x\right)+1$$

$$=\cos\frac{2}{3}x+\sqrt{3}\sin\frac{2}{3}x+\frac{1}{2}\cos\frac{2}{3}x+\frac{\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2}{3}x+1$$

$$=\frac{3\sqrt{3}}{2}\sin\frac{2}{3}x+\frac{3}{2}\cos\frac{2}{3}x+1=3\sin\left(\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\right)+1$$

よって，$0\leqq x\leqq\pi$ から $\frac{\pi}{6}\leqq\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}\leqq\frac{5}{6}\pi$ となり，$f(x)$ は，$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\left(x=\frac{\pi}{2}\right)$ のとき最大値 $3+1=4$ ，$\frac{2}{3}x+\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{6}$，$\frac{5}{6}\pi$ $(x=0,\ \pi)$ のとき最小値 $3\cdot\frac{1}{2}+1=\frac{5}{2}$ をとる。

コメント

定積分の計算について，注意深さの要求される問題です。なお，解答例では省略しましたが，$y=\sin(t-x)$ と $y=\sin 2t$ のグラフをアバウトにかいて，まず絶対値の中の符号の見当をつけています。

問　題

整数 n に対して，$I_n=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos((2n+1)x)}{\sin x}dx$ とする。

(1)　I_0 を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，I_n-I_{n-1} を求めよ。

(3)　I_5 を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$I_0=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos x}{\sin x}dx=\Big[\log|\sin x|\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\log 1-\log\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{2}\log 2$

(2)　$I_n-I_{n-1}=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x}{\sin x}dx$ となり，

$$\begin{aligned}\cos(2n+1)x-\cos(2n-1)x&=-2\sin\frac{(2n+1+2n-1)x}{2}\sin\frac{(2n+1-2n+1)x}{2}\\&=-2\sin 2nx\sin x\end{aligned}$$

よって，$I_n-I_{n-1}=-2\displaystyle\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}\sin 2nx\,dx=\frac{2}{2n}\Big[\cos 2nx\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{1}{n}\Big(\cos n\pi-\cos\frac{n}{2}\pi\Big)$

(i)　n が偶数$(n=2k)$のとき

$$I_n-I_{n-1}=\frac{1}{2k}(\cos 2k\pi-\cos k\pi)=\frac{1}{2k}\{1-(-1)^k\}=\frac{1}{n}\{1-(-1)^{\frac{n}{2}}\}$$

(ii)　n が奇数$(n=2k-1)$のとき

$$I_n-I_{n-1}=\frac{1}{2k-1}\Big\{\cos(2k-1)\pi-\cos\frac{2k-1}{2}\pi\Big\}=\frac{1}{2k-1}(-1-0)=-\frac{1}{n}$$

(3)　(2)の結果を用いて，$I_5-I_4=-\dfrac{1}{5}$，$I_4-I_3=\dfrac{1}{4}(1-1)=0$，$I_3-I_2=-\dfrac{1}{3}$

$I_2-I_1=\dfrac{1}{2}(1+1)=1$，$I_1-I_0=-\dfrac{1}{1}=-1$

(1)より，$I_0=\dfrac{1}{2}\log 2$ を用いて，

$$I_5=\frac{1}{2}\log 2+\Big(-1+1-\frac{1}{3}+0-\frac{1}{5}\Big)=\frac{1}{2}\log 2-\frac{8}{15}$$

コメント

定積分の計算問題です。計算ミスに要注意だけです。

問　題

$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$ と定める。$f(x)$ の $0 \leqq x \leqq \pi$ における最大値と最小値を求めよ。 [2012]

解答例

$0 \leqq x \leqq \pi$ に対して，$f(x)=\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos|t-x|}{1+\sin|t-x|}dt$ と定義すると，

(i)　$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ のとき

$$f(x)=\int_0^{x} \frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt+\int_x^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t-x)}{1+\sin(t-x)}dt$$

$$=\Bigl[-\log|1-\sin(t-x)|\Bigr]_0^x+\Bigl[\log|1+\sin(t-x)|\Bigr]_x^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=\log|1-\sin(-x)|+\log\left|1+\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|$$

$$=\log(1+\sin x)+\log(1+\cos x)$$

これより，$f'(x)=\dfrac{\cos x}{1+\sin x}+\dfrac{-\sin x}{1+\cos x}=\dfrac{\cos x+\cos^2 x-\sin x-\sin^2 x}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$

$$=\frac{(\cos x-\sin x)(\cos x+\sin x+1)}{(1+\sin x)(1+\cos x)}$$

(ii)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \pi$ のとき

$$f(x)=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos(t-x)}{1-\sin(t-x)}dt=\Bigl[-\log|1-\sin(t-x)|\Bigr]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\log\left|1-\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right|+\log|1-\sin(-x)|$$

$$=-\log(1-\cos x)+\log(1+\sin x)$$

これより，$f'(x)=-\dfrac{\sin x}{1-\cos x}+\dfrac{\cos x}{1+\sin x}=\dfrac{-\sin x-\sin^2 x+\cos x-\cos^2 x}{(1-\cos x)(1+\sin x)}$

$$=\frac{-\sin x+\cos x-1}{(1-\cos x)(1+\sin x)}$$

(i)(ii)より，$f(x)$ の増減は下表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	π
$f'(x)$		$+$	0	$-$		$-$	
$f(x)$	$\log 2$	$\nearrow$	$2\log\left(1+\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$	$\searrow$	$\log 2$	$\searrow$	$-\log 2$

よって，最大値は $f\left(\dfrac{\pi}{4}\right)=2\log\left(1+\dfrac{\sqrt{2}}{2}\right)$，最小値は $f(\pi)=-\log 2$ である。

コメント

定積分の計算問題です。なお，$f'(x)$の符号変化については，三角関数の合成をするまでもありません。

問　題

a を $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ を満たす実数とする。以下の問いに答えよ。

(1)　実数 θ に対して $\sin\theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくないほうを $f(\theta)$ とおく。すなわち,

$\sin\theta \geqq \sin(\theta - 2a)$ のとき $f(\theta) = \sin\theta$

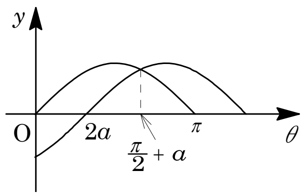
$\sin\theta < \sin(\theta - 2a)$ のとき $f(\theta) = \sin(\theta - 2a)$

となる関数 $f(\theta)$ を考える。このとき定積分 $I = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta$ を求めよ。

(2)　a を $0 \leqq a \leqq \dfrac{\pi}{2}$ の範囲で動かすとき, (1)の I の最大値を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　$0 < a \leqq \dfrac{\pi}{2}$，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ において，$\sin\theta = \sin(\theta - 2a)$ とおくと,



$$\theta = \pi - (\theta - 2a),\quad \theta = \frac{\pi}{2} + a$$

すると，$f(\theta)$ は $\sin\theta$ と $\sin(\theta - 2a)$ のうち小さくない方より,

$$f(\theta) = \sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{2} + a\right),\ \ f(\theta) = \sin(\theta - 2a)\ \left(\frac{\pi}{2} + a \leqq \theta \leqq \pi\right)$$

これは $a = 0$ のときも満たしている。

さて，$I = \displaystyle\int_0^{\pi} f(\theta)\,d\theta$ から,

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}+a} \sin\theta\,d\theta + \int_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi} \sin(\theta - 2a)\,d\theta = -\Big[\cos\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}+a} - \Big[\cos(\theta - 2a)\Big]_{\frac{\pi}{2}+a}^{\pi}$$

$$= -\cos\left(\frac{\pi}{2} + a\right) + 1 - \cos(\pi - 2a) + \cos\left(\frac{\pi}{2} - a\right) = \cos 2a + 2\sin a + 1$$

(2)　(1)より，$I = 1 - 2\sin^2 a + 2\sin a + 1 = -2\left(\sin a - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{5}{2}$

よって，$\sin a = \dfrac{1}{2}\ \left(a = \dfrac{\pi}{6}\right)$ のとき, I は最大値 $\dfrac{5}{2}$ をとる。

コメント

定積分の計算問題です。(2)で, 最大値を求めるのに, 微分をするまでもありませんでした。

問　題

n を自然数とする。$n+1$ 項の等差数列 x_0，x_1，$\cdots$，x_n と等比数列 y_0，y_1，$\cdots$，y_n が，$1=x_0<x_1<x_2<\cdots<x_n=2$，$1=y_0<y_1<y_2<\cdots<y_n=2$ を満たすとし，$P(n)$，$Q(n)$，$R(n)$，$S(n)$を次で定める。

$$P(n)=\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n},\quad Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$$

$$R(n)=\frac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n},\quad S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$$

このとき極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}P(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}R(n)$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)$ をそれぞれ求めよ。

[2004]

解答例

等差数列 x_0，x_1，$\cdots$，x_n の公差は $\dfrac{1}{n}$，等比数列 y_0，y_1，$\cdots$，y_n の公比は $2^{\frac{1}{n}}$ より，

$$x_k=1+\frac{k}{n},\quad y_k=2^{\frac{k}{n}}$$

すると，$P(n)=\dfrac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\left(1+\frac{k}{n}\right)$ より，

$$\lim_{n\to\infty}P(n)=\int_0^1(1+x)\,dx=\left[x+\frac{x^2}{2}\right]_0^1=\frac{3}{2}$$

$R(n)=\dfrac{y_1+y_2+\cdots+y_n}{n}=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{k=1}^{n}2^{\frac{k}{n}}$ より，

$$\lim_{n\to\infty}R(n)=\int_0^1 2^x\,dx=\left[\frac{2^x}{\log 2}\right]_0^1=\frac{1}{\log 2}$$

また，$Q(n)=\sqrt[n]{x_1x_2\cdots x_n}$ より，

$$\log Q(n)=\frac{1}{n}\log(x_1x_2\cdots x_n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log x_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)$$

$$\lim_{n\to\infty}\log Q(n)=\int_0^1\log(1+x)\,dx=\left[(1+x)\log(1+x)\right]_0^1-\int_0^1dx$$

$$=2\log 2-1=\log\frac{4}{e}$$

ここで，$f(x)=\log x$ は $x>0$ において連続であることより，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}Q(n)=\frac{4}{e}$

同様にして，$S(n)=\sqrt[n]{y_1y_2\cdots y_n}$ より，

$$\log S(n)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log y_k=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log 2^{\frac{k}{n}}=\frac{\log 2}{n^2}\sum_{k=1}^{n}k=\frac{\log 2}{2n}(n+1)$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\log S(n)=\frac{\log 2}{2}=\log\sqrt{2}$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S(n)=\sqrt{2}$

コメント

単純な構図の問題ですが，4 つの極限とも，きれいな数値として求まります。いろいろな解法がありますが，最初に考えたものを記しました。

問　題

$f_1(x)$は実数全体で定義された何回でも微分可能な関数とする。$f_2(x)$，$f_3(x)$，$\cdots$をつぎのように順次定義する。$n=2,\ 3,\ \cdots$に対し，$F_{n-1}(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$とおいて，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)\,dt$とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1) $n\geqq 2$のとき，すべてのxに対して$f_n(x)\geqq 0$であることを示せ。

(2) $n\geqq 3$のとき，すべての$x\geqq 0$に対して$f_n{}'(x)\geqq 0$であることを示せ。

(3) $f_4{}'(1)=0$のとき，すべての$0\leqq x\leqq 1$に対して$f_1(x)=0$であることを示せ。

[2002]

解答例

(1) $F_{n-1}(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)\,dt$ ……①，$f_n(x)=\int_0^x f_{n-1}(t)F_{n-1}(t)\,dt$ ……②に対して，

①より，$F_{n-1}{}'(x)=f_{n-1}(t)$，$F_{n-1}(0)=0$

②に代入して，$n\geqq 2$のとき，

$$f_n(x)=\int_0^x F_{n-1}{}'(t)F_{n-1}(t)\,dt=\frac{1}{2}\Big[\{F_{n-1}(t)\}^2\Big]_0^x$$
$$=\frac{1}{2}\Big[\{F_{n-1}(x)\}^2-\{F_{n-1}(0)\}^2\Big]=\frac{1}{2}\{F_{n-1}(x)\}^2 \text{ ………③}$$

したがって，$n\geqq 2$のとき，$f_n(x)\geqq 0$

(2) (1)より，$f_n(x)\geqq 0\ (n\geqq 2)$なので，$f_{n-1}(x)\geqq 0\ (n\geqq 3)$

すると，$x\geqq 0$のとき，①より$F_{n-1}(x)\geqq 0$となる。

ここで，②より，$f_n{}'(x)=f_{n-1}(x)F_{n-1}(x)$ ………④

したがって，$n\geqq 3$のとき，$x\geqq 0$で$f_n{}'(x)\geqq 0$

(3) 条件より$f_4{}'(1)=0$なので，④から$f_3(1)F_3(1)=0$ ………⑤

さて，(2)より $x\geqq 0$ のとき$f_3{}'(x)\geqq 0$なので$f_3(0)\leqq f_3(1)$となる。さらに，②より$f_n(0)=0\ (n\geqq 2)$なので，$f_3(0)=0$となり，

$$0=f_3(0)\leqq f_3(1) \text{ ………⑥}$$

ここで，⑤から$f_3(1)=0$または$F_3(1)=0$となるが，$F_3(1)=\int_0^1 f_3(t)\,dt=0$のときも，⑥より$f_3(1)=0$となるので，⑤は$f_3(1)=0$と同値である。

よって，$0\leqq x\leqq 1$において$f_3(x)=0$

すると，③より$0\leqq x\leqq 1$において，$\frac{1}{2}\{F_2(x)\}^2=0$となり，

$$F_2(x)=\int_0^x f_2(t)\,dt=0$$

(1)より$f_2(x)\geqq 0$なので，$0\leqq x\leqq 1$において$f_2(x)=0$

同様にして，③より $0 \leqq x \leqq 1$ において，$\dfrac{1}{2}\left\{F_1(x)\right\}^2 = 0$ より，

$$F_1(x) = \int_0^x f_1(t)\,dt = 0 \cdots\cdots\cdots ⑦$$

⑦の両辺を微分すると，$f_1(x)$ が連続関数ということより，$0 \leqq x \leqq 1$ において $f_1(x) = 0$ となる。

コメント

論理を詰めていく問題です。特に(3)は，$n=4$ から $n=3$ へ，$n=3$ から $n=2$ へ，$n=2$ から $n=1$ へと論証しなくてはいけないので，神経が疲れてしまいます。

問　題

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x}{e^x+1}$ のとき，$y=f(x)$ の逆関数 $y=g(x)$ を求めよ。

(2)　(1)の $f(x)$，$g(x)$ に対し，次の等式が成り立つことを示せ。

$$\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=bf(b)-af(a)$$ [1998]

解答例

(1)　$y=f(x)$ を同値変形すると，$x=g(y)$ となることより，

$y=\dfrac{e^x}{e^x+1}=1-\dfrac{1}{e^x+1}$ から，$(e^x+1)(1-y)=1$

$e^x=-1+\dfrac{1}{1-y}=\dfrac{y}{1-y}$，$x=\log\dfrac{y}{1-y}$

よって，$g(y)=\log\dfrac{y}{1-y}$ となり，$g(x)=\log\dfrac{x}{1-x}$

(2)　$x=f(t)$ とおくと $dx=f'(t)dt$，また $x=f(a)$ のとき $t=a$，$x=f(b)$ のとき $t=b$ となる。

さらに，$y=f(x)$ の逆関数が $y=g(x)$ から，$g\big(f(x)\big)=x$

$$\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx=\int_a^b g\big(f(t)\big)f'(t)dt=\int_a^b tf'(t)dt=\int_a^b xf'(x)dx$$

よって，$\displaystyle\int_a^b f(x)dx+\int_{f(a)}^{f(b)} g(x)dx$

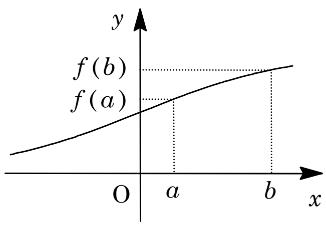
$$=\int_a^b f(x)dx+\int_a^b xf'(x)dx$$

$$=\int_a^b \{f(x)+xf'(x)\}dx$$

$$=\int_a^b \big(xf(x)\big)'dx$$

$$=\big[xf(x)\big]_a^b$$

$$=bf(b)-af(a)$$



コメント

(2)の証明は，まず右上の図で考えました。この位置関係では面積を考えると与式の成立は明らかなのですが，これでは証明とは言えません。積分の第 2 項の積分区間を $[a,\ b]$ に変更することから，置換の式をみつけました。

問　題

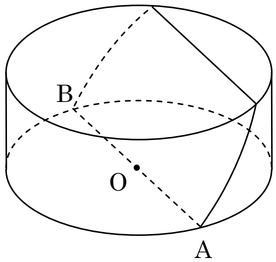
半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱がある。底面の円の中心を O とし，直径を 1 つ取り AB とおく。AB を含み底面と 45° の角度をなす平面でこの直円柱を 2 つの部分に分けるとき，体積の小さい方の部分を V とする。

(1) 直径 AB と直交し，O との距離が t $(0\leqq t\leqq 1)$ であるような平面で V を切ったときの断面積 $S(t)$ を求めよ。

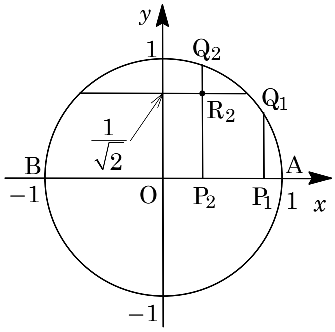
(2) V の体積を求めよ。 [2013]

解答例

(1) 半径 1 の円を底面とする高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の直円柱を，底面の直径 AB を含み底面と 45° の角度をなす平面で切断したときできる部分のうち，体積の小さい方を V とする。



さて，点 O を原点，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(-1,\ 0,\ 0)$ とおく。さらに，直径 AB 上に $0\leqq t\leqq 1$ として点 $P(t,\ 0,\ 0)$ をとり，P を通り AB と直交する平面で立体 V を切断する。



(i) $\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq t\leqq 1$ のとき

$P_1(t,\ 0,\ 0)$，$Q_1(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$ とおくと，切り口は，直角をはさむ辺の長さが $P_1Q_1=\sqrt{1-t^2}$ の直角二等辺三角形となり，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2=\frac{1}{2}(1-t^2)$$

(ii) $0\leqq t\leqq\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$P_2(t,\ 0,\ 0)$，$Q_2(t,\ \sqrt{1-t^2},\ 0)$，$R_2\left(t,\ \dfrac{1}{\sqrt{2}},\ 0\right)$ とおくと，切り口は，上底の長さ $R_2Q_2=\sqrt{1-t^2}-\dfrac{1}{\sqrt{2}}$，下底の長さ $P_2Q_2=\sqrt{1-t^2}$，高さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ の台形となり，その面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\frac{1}{2}\left(\sqrt{1-t^2}-\frac{1}{\sqrt{2}}+\sqrt{1-t^2}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}$$

(2) V の体積を W とおくと，対称性より，

$$W=2\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big(\frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{2}}-\frac{1}{4}\Big)dt+2\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\frac{1}{2}(1-t^2)\,dt$$
$$=\sqrt{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\sqrt{1-t^2}\,dt-\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}dt+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}(1-t^2)\,dt$$
$$=\sqrt{2}\Big\{\frac{1}{2}\cdot 1^2\cdot\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big(\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)^2\Big\}-\frac{1}{2\sqrt{2}}+\Big(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\Big)-\frac{1}{3}\Big(1-\frac{1}{2\sqrt{2}}\Big)$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{8}\pi-\frac{5}{12}\sqrt{2}+\frac{2}{3}$$

コメント

教科書などでよく見かけるタイプですが，本問では，低い直円柱という「ひねり」が加わっています。

問　題

a を実数とする。円 C は点$(a,\ -a)$で直線$y=-x$を接線にもち，点$(0,\ 1)$を通るものとする。Cの中心を$\mathrm{P}(X,\ Y)$として，以下の問いに答えよ。

(1) X, Yをaを用いて表せ。

(2) aが動くときの点Pの軌跡と直線$y=1$で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2011]

解答例

(1) 円Cの中心$\mathrm{P}(X,\ Y)$は，点$(a,\ -a)$を通り，接線$y=-x$に垂直な直線上にあり，

$$Y+a=X-a\,,\ \ X=Y+2a\cdots\cdots\cdots①$$

また，点Pと点$(a,\ -a)$の距離と，点Pと点$(0,\ 1)$の距離は等しいので，

$$(X-a)^2+(Y+a)^2=X^2+(Y-1)^2\,,\ \ -2aX+2(a+1)Y+2a^2=1\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-2a(Y+2a)+2(a+1)Y+2a^2=1$，$2Y=2a^2+1$となり，

$$Y=\frac{2a^2+1}{2}\,,\ \ X=\frac{2a^2+1}{2}+2a=\frac{2a^2+4a+1}{2}$$

(2) (1)より，点Pの軌跡は，$x=\dfrac{2a^2+4a+1}{2}$，$y=\dfrac{2a^2+1}{2}$から，

$$\frac{dx}{da}=2a+2\,,\ \ \frac{dy}{da}=2a$$

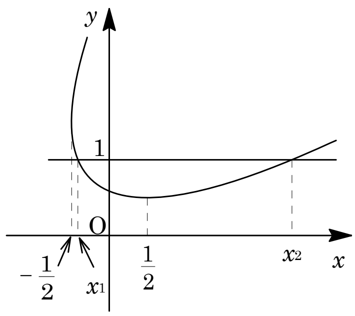
すると，x, yの増減は右表のようになる。

a	$\cdots$	-1	$\cdots$	0	$\cdots$
$\dfrac{dx}{da}$	$-$	0	$+$		$+$
x	$\searrow$	$-\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$
$\dfrac{dy}{da}$	$-$		$-$	0	$+$
y	$\searrow$	$\dfrac{3}{2}$	$\searrow$	$\dfrac{1}{2}$	$\nearrow$

また，点Pの軌跡と直線$y=1$との交点は，

$$\frac{2a^2+1}{2}=1\,,\ \ a=\pm\frac{1}{\sqrt{2}}$$

これより，点Pの軌跡と直線$y=1$とで囲まれる図形の面積Sは，



$$S=\int_{x_1}^{x_2}(1-y)\,dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\Big(1-\frac{2a^2+1}{2}\Big)(2a+2)\,da$$

$$=\int_{-\frac{1}{\sqrt{2}}}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^3-2a^2+a+1)\,da$$

$$=2\int_{0}^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(-2a^2+1)\,da$$

$$=2\Big[-\frac{2}{3}a^3+a\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{2\sqrt{2}}+\frac{2}{\sqrt{2}}=\frac{2}{3}\sqrt{2}$$

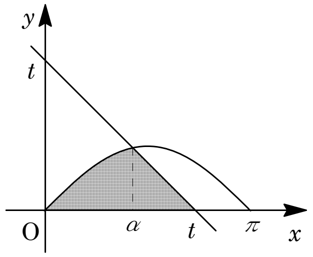
コメント

(2)ではパラメータを消去しようとしましたが，交点の座標をみて考え直しました。

問　題

$0<t<3$ のとき，連立不等式 $0\leqq y\leqq\sin x$，$0\leqq x\leqq t-y$ の表す領域を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(t)$ とする。$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ となる t と，そのときの $V(t)$ の値を求めよ。 [2010]

解答例



領域 $0\leqq y\leqq\sin x$ ……①，$0\leqq x\leqq t-y$ ……②に対して，$0<t<3$ より，①の境界線 $y=\sin x$ と②の境界線 $y=t-x$ の交点はただ 1 つ存在し，それを $x=\alpha$ とおくと，

$$\sin\alpha=t-\alpha,\ \ t=\alpha+\sin\alpha\ \cdots\cdots\text{③}$$

このとき，右図の網点部を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積 $V(t)$ は，③を利用すると，

$$V(t)=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi(t-\alpha)\sin^2\alpha=\pi\int_0^{\alpha}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\alpha\ \cdots\cdots\text{④}$$

ここで，③から，$\dfrac{dt}{d\alpha}=1+\cos\alpha$ となり，④より，

$$\frac{d}{dt}V(t)=\frac{d}{d\alpha}V(t)\frac{d\alpha}{dt}=(\pi\sin^2\alpha+\pi\sin^2\alpha\cos\alpha)\cdot\frac{1}{1+\cos\alpha}=\pi\sin^2\alpha$$

さて，条件より，$\dfrac{d}{dt}V(t)=\dfrac{\pi}{4}$ なので，$\sin^2\alpha=\dfrac{1}{4}$

$0<\alpha<3$ から，$\sin\alpha=\dfrac{1}{2}$ となり，$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$，$\dfrac{5}{6}\pi$ である。

$\alpha=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，③より $t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}<3$ から適する。

$\alpha=\dfrac{5}{6}\pi$ のとき，③より $t=\dfrac{5}{6}\pi+\dfrac{1}{2}>\dfrac{5}{2}+\dfrac{1}{2}=3$ から適さない。

よって，$t=\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{1}{2}$ であり，このとき，④より，

$$V(t)=\pi\int_0^{\frac{\pi}{6}}\sin^2x\,dx+\frac{1}{3}\pi\sin^3\frac{\pi}{6}=\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{6}}(1-\cos2x)\,dx+\frac{1}{24}\pi$$

$$=\frac{\pi}{2}\Big[x-\frac{1}{2}\sin2x\Big]_0^{\frac{\pi}{6}}+\frac{1}{24}\pi=\frac{\pi^2}{12}-\Big(\frac{\sqrt{3}}{8}-\frac{1}{24}\Big)\pi$$

コメント

$0<x<\pi$ において，$y=\sin x$ のグラフは上に凸であり，$x=\pi$ における接線の傾きが -1 であることから，$y=\sin x$ と $y=t-x$ の交点はただ 1 つであることがわかります。また，$0<\alpha<\pi$ において，t は α の単調増加関数なので，α は t の関数になっています。これらの点を省略して記しましたので，補足しておきます。

問　題

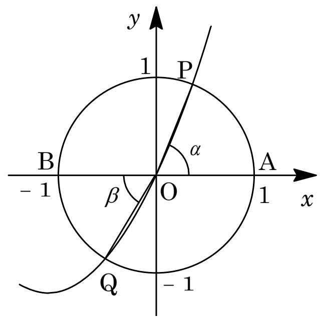
$k>1$ として，$f(x)=x^2+2kx$ とおく。曲線 $y=f(x)$ と円 $C: x^2+y^2=1$ の 2 つの交点のうちで，第 1 象限にあるものを P とし，第 3 象限にあるものを Q とする。点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$，$\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0)$ に対して，$\alpha=\angle\mathrm{AOP}$，$\beta=\angle\mathrm{BOQ}$ とおくとき，以下の問いに答えよ。

(1) k を α で表せ。

(2) 曲線 $y=f(x)$ と円 C で囲まれる 2 つの図形のうちで，$y=f(x)$ の上側にあるものの面積 $S(k)$ を α と β で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)$ を求めよ。 [2008]

解答例



(1) $f(x)=x^2+2kx$ に対し，点 $\mathrm{P}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので，

$$\sin\alpha=\cos^2\alpha+2k\cos\alpha$$

よって，$k=\dfrac{\sin\alpha-\cos^2\alpha}{2\cos\alpha}=\dfrac{1}{2}(\tan\alpha-\cos\alpha)$

(2) まず，弧 PQ に対する扇形の面積 S_1 は，

$$S_1=\frac{1}{2}\cdot1^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-\alpha+\frac{\pi}{2}+\beta\right)=\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)$$

また，線分 $\mathrm{OP}: y=x\tan\alpha$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_2 は，

$$S_2=\int_0^{\cos\alpha}\{x\tan\alpha-f(x)\}dx=\int_0^{\cos\alpha}-x(x-\cos\alpha)dx=\frac{1}{6}\cos^3\alpha$$

同様にして，$\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ から，線分 $\mathrm{OQ}: y=x\tan\beta$ と曲線 $y=f(x)$ に囲まれた部分の面積 S_3 は，

$$S_3=\int_{-\cos\beta}^{0}\{x\tan\beta-f(x)\}dx=\int_{-\cos\beta}^{0}-x(x+\cos\beta)dx=\frac{1}{6}\cos^3\beta$$

よって，$S(k)=S_1+S_2+S_3=\dfrac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\dfrac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)$

(3) まず，(1)より，$k+\dfrac{1}{2}\cos\alpha=\dfrac{1}{2}\tan\alpha$ であり，$|\cos\alpha|\leqq1$ より，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ において，$k\to\infty$ のとき $\alpha\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

また，点 $\mathrm{Q}(-\cos\beta,\ -\sin\beta)$ が曲線 $y=f(x)$ 上にあるので，

$$-\sin\beta=\cos^2\beta-2k\cos\beta$$

よって，$k=\dfrac{\sin\beta+\cos^2\beta}{2\cos\beta}=\dfrac{1}{2}(\tan\beta+\cos\beta)$ より，$k-\dfrac{1}{2}\cos\beta=\dfrac{1}{2}\tan\beta$

すると，同様にして，$k\to\infty$ のとき $\beta\to\dfrac{\pi}{2}$ である。

以上より，$\displaystyle\lim_{k\to\infty}S(k)=\lim_{k\to\infty}\left\{\frac{1}{2}(\pi-\alpha+\beta)+\frac{1}{6}(\cos^3\alpha+\cos^3\beta)\right\}=\frac{1}{2}\pi$

コメント

計算量も適度な，微積分の総合問題です。なお，(3)の結論は，図からの予測と一致するものです。

問　題

xyz 空間において，点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分を l とし，l を z 軸のまわりに 1 回転してできる図形を A とする。A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2007]

解答例

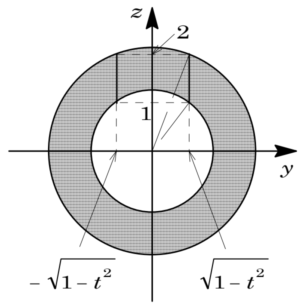
点$(1,\ 0,\ 1)$と点$(1,\ 0,\ 2)$を結ぶ線分 l を，z 軸のまわりに 1 回転してできる円筒形 A の方程式は，

$$x^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

ここで，円筒形 A を x 軸に垂直な平面 $x=t$ $(-1\leqq t\leqq 1)$ で切断すると，その切り口は線分となり，

$$t^2+y^2=1,\ 1\leqq z\leqq 2$$

$$y=\pm\sqrt{1-t^2},\ 1\leqq z\leqq 2$$



ここで，この 2 本の線分を x 軸のまわりに 1 回転してできるドーナツ状の図形について，その外径を R，内径を r とおき，その面積を $S(t)$ とすると，

$$S(t)=\pi R^2-\pi r^2$$

$$=\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+2^2\right\}-\pi\left\{\left(\sqrt{1-t^2}\right)^2+1^2\right\}$$

$$=\pi(5-t^2)-\pi(2-t^2)=3\pi$$

よって，A を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を V とおくと，

$$V=\int_{-1}^{1}S(t)\,dt=\int_{-1}^{1}3\pi\,dt=6\pi$$

コメント

立体を回転してできる回転体の求積という，2 代前の課程のころ，よく出題された問題です。回転軸に垂直な断面積を考えるのがポイントです。なお，円柱側面の方程式については，「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

連立不等式 $1 \leqq x \leqq 2,\ y \leqq 0$ が表す xy 平面内の領域を D とする。また, a を定数とし, 不等式 $y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ が表す xy 平面内の領域を E とする。以下の問いに答えよ。

(1) D と E とが共有点をもつような実数 a の範囲を求めよ。

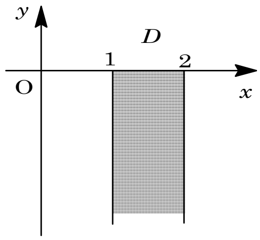
(2) (1)の範囲の a に対して, D と E との共通部分の面積 $S(a)$ を求めよ。

(3) (2)で求めた $S(a)$ の最大値を求めよ。 [2006]

解答例

(1) $D: 1 \leqq x \leqq 2,\ \ y \geqq 0$, $E: y \geqq x^2 - 3ax + 2a^2$ に対して, 領域 E の境界線は,

$$y = x^2 - 3ax + 2a^2 = (x - a)(x - 2a) \cdots\cdots\cdots(*)$$



まず, $a \leqq 0$ のときは, 領域 D と E は明らかに共有点をもたない。

そこで, $a > 0$ のとき, D と E とが共有点をもつ条件は, $(*)$と x 軸の交点が $x = a$, $2a$ より, $a \leqq 2$ かつ $2a \geqq 1$ である。よって, $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 2$ となる。

(2) (i) $2a \leqq 2\left(\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1\right)$のとき

$$S(a) = \int_1^{2a} -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \Big[-\frac{x^3}{3} + 3a\cdot\frac{x^2}{2} - 2a^2x\Big]_1^{2a}$$

$$= -\frac{1}{3}(8a^3 - 1) + \frac{3}{2}a(4a^2 - 1) - 2a^2(2a - 1) = -\frac{2}{3}a^3 + 2a^2 - \frac{3}{2}a + \frac{1}{3}$$

(ii) $1 \leqq a\ (1 \leqq a \leqq 2)$ のとき

$$S(a) = \int_a^2 -(x^2 - 3ax + 2a^2)\,dx = \Big[-\frac{x^3}{3} + 3a\cdot\frac{x^2}{2} - 2a^2x\Big]_a^2$$

$$= -\frac{1}{3}(8 - a^3) + \frac{3}{2}a(4 - a^2) - 2a^2(2 - a) = \frac{5}{6}a^3 - 4a^2 + 6a - \frac{8}{3}$$

(3) (i) $\dfrac{1}{2} \leqq a \leqq 1$ のとき

$$S'(a) = -2a^2 + 4a - \frac{3}{2} = -\frac{1}{2}(2a - 1)(2a - 3)$$

右表より, $S(a)$ は単調に増加する。

a	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\frac{1}{6}$

(ii) $1 \leqq a \leqq 2$ のとき

$$S'(a) = \frac{5}{2}a^2 - 8a + 6$$

$$= \frac{1}{2}(5a - 6)(a - 2)$$

$S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	1	$\cdots$	$\frac{6}{5}$	$\cdots$	2
$S'(a)$		$+$	0	$-$	0
$S(a)$	$\frac{1}{6}$	$\nearrow$	$\frac{16}{75}$	$\searrow$	

(i)(ii)より，$S(a)$の最大値は，$S\left(\frac{6}{5}\right)=\frac{16}{75}$

コメント

頻出の放物線と面積の問題です。領域で味付けがしてありますが。

問　題

a を負の実数とし，放物線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ を考える。C_1 が曲線

$$C_2 : y = \begin{cases} x^2 - x + \dfrac{3}{4} & (x > 0\text{のとき}) \\ x^2 + 2x + \dfrac{3}{4} & (x \leqq 0\text{のとき}) \end{cases}$$

と 2 点で接するとき，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を a で表せ。 [2005]

解答例

曲線 $C_1 : y = ax^2 + bx + c$ ……①に対して，

$$C_2 : y = x^2 - x + \frac{3}{4}\ (x > 0)\ \cdots\cdots\text{②},\quad y = x^2 + 2x + \frac{3}{4}\ (x \leqq 0)\ \cdots\cdots\text{③}$$

$x > 0$ において，①と②が接することより，

$$ax^2 + bx + c = x^2 - x + \frac{3}{4},\quad (1-a)x^2 - (1+b)x + \frac{3}{4} - c = 0\ \cdots\cdots\text{④}$$

$$D = (1+b)^2 - (1-a)(3-4c) = 0\ \cdots\cdots\text{⑤}$$

$x \leqq 0$ において，①と③が接することより，

$$ax^2 + bx + c = x^2 + 2x + \frac{3}{4},\quad (1-a)x^2 + (2-b)x + \frac{3}{4} - c = 0\ \cdots\cdots\text{⑥}$$

$$D = (2-b)^2 - (1-a)(3-4c) = 0\ \cdots\cdots\text{⑦}$$

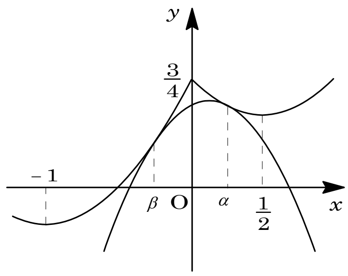
⑤⑦より，$(1+b)^2 - (2-b)^2 = 0$，$2b - 1 = 0$ から，$b = \dfrac{1}{2}$

さて，①と②の接点は，④から，

$$x = \frac{1+b}{2(1-a)} = \frac{3}{4(1-a)}$$

また，①と③の接点は，⑥から，

$$x = \frac{-(2-b)}{2(1-a)} = -\frac{3}{4(1-a)}$$



ここで，$\alpha = \dfrac{3}{4(1-a)}$，$\beta = -\dfrac{3}{4(1-a)}$ とおくと，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積 S は，

$$S = \int_\beta^0 (1-a)(x-\beta)^2 dx + \int_0^\alpha (1-a)(x-\alpha)^2 dx$$

$$= \frac{1-a}{3}\Big[(x-\beta)^3\Big]_\beta^0 + \frac{1-a}{3}\Big[(x-\alpha)^3\Big]_0^\alpha = \frac{1-a}{3}(-\beta)^3 - \frac{1-a}{3}(-\alpha)^3$$

$$= \frac{1-a}{3}\cdot\frac{27}{64(1-a)^3} + \frac{1-a}{3}\cdot\frac{27}{64(1-a)^3} = \frac{9}{32(1-a)^2}$$

コメント

接する放物線どうしで挟まれた部分の面積を求める問題です。基本的な頻出題です。

問　題

平面上の 3 つの曲線 C_1，C_2，C_3 を次で定める。

$$C_1 : x = \frac{15}{2}t^4,\ \ y = -3t^5 + 5t^3 \quad \left(0 \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}\right)$$

$$C_2 : x = \frac{125}{6}\cos^3\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right),\ \ y = \frac{125}{6}\sin^3\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

$$\left(\sqrt{\frac{5}{3}} \leqq t \leqq \sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}\right)$$

$$C_3 : x = 0,\ \ y = \frac{125(t-2)}{6\left(\frac{7}{4}-\sqrt{\frac{5}{3}}\right)} \quad \left(\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4} \leqq t \leqq 2\right)$$

(1)　C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積を求めよ。

(2)　原点 O を出発し，C_1，C_2，C_3 を順にたどって O に戻る行程の道のりを求めよ。

[2004]

解答例

(1)　$C_1 : x = \frac{15}{2}t^4$，$y = -3t^5 + 5t^3$ より，

$$\frac{dx}{dt} = 30t^3$$

$$\frac{dy}{dt} = -15t^4 + 15t^2 = -15t^2(t+1)(t-1)$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{\frac{5}{3}}$
$\frac{dx}{dt}$	0	$+$		$+$	
x	0	$\nearrow$	$\frac{15}{2}$	$\nearrow$	$\frac{125}{6}$
$\frac{dy}{dt}$	0	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	2	$\searrow$	0

C_1 と x 軸で囲まれる図形の面積 S は,

$$S = \int_0^{\frac{125}{6}} y\,dx = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}(-3t^5+5t^3)\cdot 30t^3\,dt$$

$$= 30\int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}(-3t^8+5t^6)\,dt$$

$$= 30\left[-\frac{t^9}{3}+5\cdot\frac{t^7}{7}\right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}} = 30\left(\sqrt{\frac{5}{3}}\right)^7\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{5}{3}+\frac{5}{7}\right) = \frac{12500}{567}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

(2)　まず，C_1 上における道のりを l_1 とすると,

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = (30t^3)^2 + (-15t^4+15t^2)^2 = 15^2t^4(t^2+1)^2$$

$$l_1 = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}\sqrt{15^2t^4(t^2+1)^2}\,dt = \int_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}15t^2(t^2+1)\,dt = 15\left[\frac{t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right]_0^{\sqrt{\frac{5}{3}}}$$

$$= 15\left(\frac{9}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{9}{5}\sqrt{\frac{5}{3}}\right) = \frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}$$

次に，C_2 上における道のりを l_2 とすると,

$$\frac{dx}{dt}=\frac{125}{6}\cdot 3\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cdot\left\{2\pi\sin\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right\}$$

$$=125\pi\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cdot\sin\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

$$\frac{dy}{dt}=\frac{125}{6}\cdot 3\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cdot\left\{-2\pi\cos\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\right\}$$

$$=-125\pi\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cdot\cos\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$$

これより，$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2=125^2\pi^2\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cdot\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)$

$$l_2=\int_{\sqrt{\frac{5}{3}}}^{\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}}\sqrt{125^2\pi^2\sin^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)\cdot\cos^2\left(2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)\right)}\,dt$$

ここで，$2\pi\left(-t+\sqrt{\frac{5}{3}}\right)=\theta$ とおくと，

$$l_2=\int_0^{-\frac{\pi}{2}}125\pi\sqrt{\sin^2\theta\cos^2\theta}\left(-\frac{1}{2\pi}\right)d\theta=\frac{125}{2}\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\sin\theta\cos\theta\,d\theta$$

$$=\frac{125}{4}\int_0^{-\frac{\pi}{2}}\sin 2\theta\,d\theta=-\frac{125}{8}\Big[\cos 2\theta\Big]_0^{-\frac{\pi}{2}}=\frac{125}{4}$$

さらに，C_3 は $x=0$ より y 軸を表し，$\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{1}{4}\leqq t\leqq 2$ のとき，y 軸上での線分の両端の座標は $\left(0,\ -\frac{125}{6}\right)$ と $(0,\ 0)$ である。その道のりを l_3 とすると，

$$l_3=0-\left(-\frac{125}{6}\right)=\frac{125}{6}$$

以上より，$l_1+l_2+l_3=\frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{125}{4}+\frac{125}{6}=\frac{50}{3}\sqrt{\frac{5}{3}}+\frac{625}{12}$

コメント

丁寧に計算を進めるだけの問題ですが，見かけに圧倒され，後回しにしたくなります。

問　題

xyz 空間内に 2 点 $\mathrm{P}(u,\ u,\ 0)$, $\mathrm{Q}(u,\ 0,\ \sqrt{1-u^2})$ を考える。u が 0 から 1 まで動くとき, 線分 PQ が通過してできる曲面を S とする。

(1) 点 $(u,\ 0,\ 0)$ $(0 \leqq u \leqq 1)$ と線分 PQ の距離を求めよ。

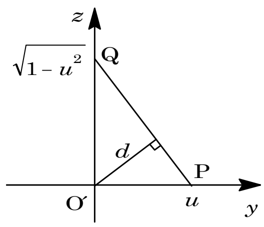
(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体の体積を求めよ。　[2003]

解答例

(1) 平面 $x=u$ 上で考えて, 点 $\mathrm{O'}(u,\ 0,\ 0)$ と線分 PQ との距離を d とすると,

$$\mathrm{PQ}\times d = \mathrm{O'P}\times\mathrm{O'Q}$$

$\mathrm{PQ}=\sqrt{u^2+(1-u^2)}=1$ より, $d=u\sqrt{1-u^2}$



(2) 曲面 S を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる立体を, 平面 $x=u$ で切断したときの切り口は, 線分 PQ を x 軸のまわりに回転させて得られるドーナツ状の図形である。その面積を $S(u)$ とおく。

さて, $u \leqq \sqrt{1-u^2}$ とすると, $0 \leqq u \leqq 1$ から $u^2 \leqq \dfrac{1}{2}$ なので, $0 \leqq u \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ となる。

また, $u \geqq \sqrt{1-u^2}$ とすると, $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq u \leqq 1$ である。

(i) $0 \leqq u \leqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき

$$S(u)=\pi(\sqrt{1-u^2})^2-\pi d^2=\pi\left\{1-u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi(1-2u^2+u^4)$$

(ii) $\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq u \leqq 1$ のとき

$$S(u)=\pi u^2-\pi d^2=\pi\left\{u^2-u^2(1-u^2)\right\}=\pi u^4$$

(i)(ii)より, 求める立体の体積を V とすると,

$$V=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(1-2u^2+u^4)\,du+\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1 \pi u^4\,du$$

$$=\pi\left[u-\frac{2}{3}u^3+\frac{1}{5}u^5\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}+\pi\left[\frac{1}{5}u^5\right]_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^1=\left(\frac{\sqrt{2}}{3}+\frac{1}{5}\right)\pi$$

コメント

頻出有名問題の 1 つです。ドーナツ状の切り口の外径が, O′P か O′Q かで場合分けをします。

問　題

xy 平面上に，媒介変数 t により表示された曲線 $C: x=e^t-e^{-t}$，$y=e^{3t}+e^{-3t}$ がある。

(1) x の関数 y の増減と凹凸を調べ，曲線 C の概形を描け。

(2) 曲線 C, x 軸, 2 直線 $x=\pm1$ で囲まれる部分の面積を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $x=e^t-e^{-t}$，$y=e^{3t}+e^{-3t}$ より，$\dfrac{dx}{dt}=e^t+e^{-t}$，$\dfrac{dy}{dt}=3e^{3t}-3e^{-3t}$

$\dfrac{dx}{dt}>0$ より，t の増加に伴って x は単調に増加する。

$$\frac{dy}{dx}=\frac{3e^{3t}-3e^{-3t}}{e^t+e^{-t}}=\frac{3(e^{3t}-e^{-3t})}{e^t+e^{-t}}$$

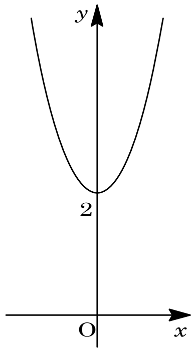
x	$-\infty$	$\cdots$	0	$\cdots$	∞
$\dfrac{dy}{dx}$		$-$	0	$+$	
y	∞	↘	2	↗	∞

$\dfrac{dy}{dx}=0$ とすると，$e^{3t}=e^{-3t}$ から $t=0$ となり，このとき $x=0$，$y=2$ である。

また，$\displaystyle\lim_{x\to\pm\infty}y=\lim_{t\to\pm\infty}(e^{3t}+e^{-3t})=\infty$ である。

$$\frac{d^2y}{dx^2}=\frac{d}{dt}\left(\frac{dy}{dx}\right)\cdot\frac{dt}{dx}$$
$$=\frac{9(e^{3t}+e^{-3t})(e^t+e^{-t})-3(e^{3t}-e^{-3t})(e^t-e^{-t})}{(e^t+e^{-t})^2}\cdot\frac{1}{e^t+e^{-t}}$$
$$=\frac{6(e^{4t}+2e^{2t}+2e^{-2t}+e^{-4t})}{(e^t+e^{-t})^3}>0$$

したがって，曲線 C はつねに下に凸となり，その概形は右図のようになる。



(2) $x=f(t)$，$y=g(t)$ とおくとき，

$$f(-t)=e^{-t}-e^t=-f(t),\ g(-t)=e^{-3t}+e^{3t}=g(t)$$

よって，曲線 C は y 軸に関して対称となる。

さて，$x=0$ のとき $t=0$ であり，$x=1$ のとき $e^t-e^{-t}=1$，$e^{2t}-e^t-1=0$ から $e^t=\dfrac{1+\sqrt5}{2}$，$t=\log\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ となる。

求める面積 S は，$\alpha=\log\dfrac{1+\sqrt5}{2}$ とおくと，

$$S=2\int_0^1 y\,dx=2\int_0^\alpha(e^{3t}+e^{-3t})(e^t+e^{-t})\,dt=2\int_0^\alpha(e^{4t}+e^{2t}+e^{-2t}+e^{-4t})\,dt$$
$$=2\Big[\frac14e^{4t}+\frac12e^{2t}-\frac12e^{-2t}-\frac14e^{-4t}\Big]_0^\alpha=\frac12(e^{4\alpha}-e^{-4\alpha})+(e^{2\alpha}-e^{-2\alpha})$$

　ここで，$e^{\alpha}=\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$，$e^{-\alpha}=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ より，$e^{\alpha}+e^{-\alpha}=\sqrt{5}$，$e^{\alpha}-e^{-\alpha}=1$ なので，$e^{2\alpha}-e^{-2\alpha}=\sqrt{5}\times 1=\sqrt{5}$ となる。さらに，$e^{2\alpha}+e^{-2\alpha}=(e^{\alpha}+e^{-\alpha})^2-2=3$ より，$e^{4\alpha}-e^{-4\alpha}=3\times\sqrt{5}=3\sqrt{5}$ となり，$S=\dfrac{1}{2}\cdot 3\sqrt{5}+\sqrt{5}=\dfrac{5}{2}\sqrt{5}$

コメント

パラメータ表示された曲線に関する基本問題ですが，計算はやや難です。

問　題

a, b を正の数とする。2 つの曲線 $y=x^3+bx^2$, $y=ax^2+abx$ によって囲まれる 2 つの部分の面積の和を S とする。

(1) S を a と b で表せ。

(2) $a+b=1$ のとき, S を最小にする a, b の値と, そのときの S の値を求めよ。

[2001]

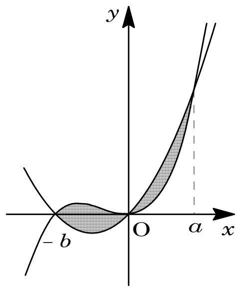
解答例

(1) $y=x^3+bx^2$ ………①, $y=ax^2+abx$ ………②

①②の共有点は, $x^3+bx^2=ax^2+abx$

$x^3+(b-a)x^2-abx=0$

$x(x-a)(x+b)=0$ より, $x=0,\ a,\ -b$



右図より, $-b\leqq x\leqq 0$ では①の曲線が②の曲線の上方にあり, $0\leqq x\leqq a$ では②の曲線が①の曲線の上方にある。

よって, ①と②の曲線によって囲まれる部分の面積 S は,

$$S=\int_{-b}^{0}\{x^3+(b-a)x^2-abx\}dx+\int_{0}^{a}-\{x^3+(b-a)x^2-abx\}dx$$

$$=\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{b-a}{3}x^3-\frac{ab}{2}x^2\Big]_{-b}^{0}-\Big[\frac{x^4}{4}+\frac{b-a}{3}x^3-\frac{ab}{2}x^2\Big]_{0}^{a}$$

$$=-\Big(\frac{b^4}{4}-\frac{b-a}{3}b^3-\frac{ab}{2}b^2\Big)-\Big(\frac{a^4}{4}+\frac{b-a}{3}a^3-\frac{ab}{2}a^2\Big)$$

$$=\frac{b^4}{12}+\frac{ab^3}{6}+\frac{a^3b}{6}+\frac{a^4}{12}=\frac{1}{12}(a^4+2a^3b+2ab^3+b^4)$$

(2) $a>0$, $b>0$, $a+b=1$ より, $0<a<1$ なので,

$$S=\frac{1}{12}\{a^4+2a^3(1-a)+2a(1-a)^3+(1-a)^4\}$$

$$S'=\frac{1}{12}\{4a^3+6a^2(1-a)-2a^3+2(1-a)^3-6a(1-a)^2-4(1-a)^3\}$$

$$=-\frac{1}{6}(4a^3-6a^2+1)$$

$$=-\frac{1}{6}(2a-1)(2a^2-2a-1)$$

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
S'		$-$	0	$+$	
S		↘	$\frac{1}{32}$	↗	

$0<a<1$ で $2a^2-2a-1<0$ より, S の増減は右表のようになる。

よって, $a=\frac{1}{2}$, $b=\frac{1}{2}$ のとき, S は最小値 $\frac{1}{32}$ をとる。

コメント

(1), (2)とも, さしたる工夫もせず, 普通に解いてみました。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆