《2018 入試対策》

京都大学

理系数学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された京都大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 ， 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 京大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1　x を正の実数とする。座標平面上の 3 点 $A(0,\ 1)$，$B(0,\ 2)$，$P(x,\ x)$ をとり，$\triangle APB$ を考える。x の値が変化するとき，$\angle APB$ の最大値を求めよ。　[2010]

2　定数 a は実数であるとする。関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点はいくつあるか。a の値によって分類せよ。　[2008]

3　xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。　[2005]

4　放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき, PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。　[1999]

■ 図形と計量

1　$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

(1)　$\triangle ABC$ の内心を P とするとき，$\angle BPC$ を求めよ。

(2)　$\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。　[2017]

2　次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし, 円が四角形に内接するとは, 円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。　[2015]

3　$\triangle ABC$ は，条件 $\angle B=2\angle A$，$BC=1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき，$\cos\angle B$ を求めよ。　[2014]

4　$1<a<2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}$，a，b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき, a を用いて b を表せ。　[2010]

5 地球上の北緯$60°$東経$135°$の地点を A，北緯$60°$東経$75°$の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路R_1，R_2を考える。R_1は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1に比べてR_2は飛行距離が3%以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。 [2008]

6 直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1) この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2) r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ。 [1998]

■ ベクトル

1 四面体 OABC を考える。点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{DG}$ と $\overrightarrow{EF}$ が平行ならば $AE:EB=CF:FB$ であることを示せ。

(2) D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ。 [2017]

2 1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき，$\cos\angle PDQ$ の最大値を求めよ。 [2015]

3 座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 $A(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 $B(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 $C(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から $m,\ n$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする。このとき，PQ^2+PR^2 を最小にするような P と，そのときの PQ^2+PR^2 を求めよ。

[2014]

4 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 $AP:PQ$ を求めよ。 [2013]

5 正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし, P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。$\triangle$PQR が正三角形ならば, 3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。 [2012]

6 四面体 ABCD において $\overrightarrow{CA}$ と $\overrightarrow{CB}$，$\overrightarrow{DA}$ と $\overrightarrow{DB}$，$\overrightarrow{AB}$ と $\overrightarrow{CD}$ はそれぞれ垂直であるとする。このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ。 [2010]

7 xyz 空間で $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(3,\ 0,\ 0)$，$B(3,\ 2,\ 0)$，$C(0,\ 2,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 4)$，$E(3,\ 0,\ 4)$，$F(3,\ 2,\ 4)$，$G(0,\ 2,\ 4)$ を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P，辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく。ただし, $0<s<1$, $0<t<1$ とする。D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC(両端を含む)と交わるような s, t の満たす条件を求めよ。 [2009]

8 点 O を中心とする円に内接する$\triangle$ABC の 3 辺 AB，BC，CA をそれぞれ $2:3$ に内分する点を P，Q，R とする。$\triangle$PQR の外心が点 O と一致するとき，$\triangle$ABC はどのような三角形か。 [2007]

9 点 O を原点とする座標空間の 3 点を $A(0,\ 1,\ 2)$，$B(2,\ 3,\ 0)$，$P(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$ とする。線分 OP と線分 AB が交点をもつような実数 t が存在することを示せ。また，そのときの交点の座標を求めよ。 [2006]

10　△ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。　[2006]

11　四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{OB}\perp\mathrm{AC}$，$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。　[2003]

12　xyz 空間内の正八面体の頂点 P_1，P_2，…，P_6 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k\neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}\neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}<0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。　[2001]

13　円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。　[2000]

14　$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$ とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$ とおく。このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

(＊)　$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\dfrac{3}{4}$

(2)　不等式(＊)を満たす $(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$ の範囲を図示せよ。　[2000]

15　四面体 OABC の辺 OA 上に点 P, 辺 AB 上に点 Q, 辺 BC 上に点 R, 辺 CO 上に点 S をとる。これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき，この平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線の交点は 2 つの線分 AC と OB のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ。　[1998]

■ 整数と数列

1 $p,\ q$ を自然数，α，β を，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ を満たす $p,\ q$ の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。 [2017]

2 素数 $p,\ q$ を用いて，p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ。 [2016]

3 自然数 $a,\ b$ はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる。このような $a,\ b$ の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。 [2014]

4 N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i), (ii)を満たす数列とする。

(i)　$a_1=2^N-3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，a_n が偶数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n}{2}$，a_n が奇数のとき $a_{n+1}=\dfrac{a_n-1}{2}$

このとき，どのような自然数 M に対しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M}a_n\leqq 2^{N+1}-N-5$ が成り立つことを示せ。 [2013]

5 n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 [2013]

6 (1) $\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。 [2012]

7 n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ。 [2011]

8 次の問いに答えよ。

(1) n を正の整数，$a=2^n$ とする。3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。

(2) m を正の偶数とする。3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ。 [2010]

9 a と b を互いに素，すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし，さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n，b_n を

$$(a+b\sqrt{2})^n=a_n+b_n\sqrt{2}$$

を満たすように定めるとき，次の(1), (2)を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1) a_2 は奇数であり，a_2 と b_2 は互いに素である。

(2) すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である。 [2009]

10 p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a\geqq b\geqq c\geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。 [2007]

11 2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。 [2006]

12 $2^{10}<\left(\frac{5}{4}\right)^n<2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301<\log_{10}2<0.3011$ である。 [2005]

13 $a^3-b^3=217$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。 [2005]

14 正の数からなる数列 $\{a_n\}$ が次の条件(i), (ii)を満たすとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}a_k$ を求めよ。

(i) $a_1=1$

(ii) $\log a_n-\log a_{n-1}=\log(n-1)-\log(n+1)\quad(n\geqq 2)$ [2003]

15 $f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。 [2002]

16　整数 n に対し $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ とおき，$a_n=i^{f(n)}$ と定める。ただし，i は虚数単位を表す。このとき，$a_{n+k}=a_n$ が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ。 [2001]

17　p を 2 以上の整数とする。2 以上の整数 n に対し，次の条件(イ)，(ロ)を満たす複素数の組 $(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)$ の個数を a_n とする。

(イ)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対し，${z_k}^p=1$ かつ $z_k\neq 1$

(ロ)　$z_1z_2\cdots z_n=1$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_3 を求めよ。

(2)　a_{n+2} を a_n，a_{n+1} の一方または両方を用いて表せ。

(3)　a_n を求めよ。 [2001]

18　$f(x)=x^2+7$ とおく。

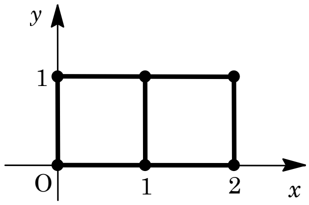
(1)　n は 3 以上の自然数で，ある自然数 a に対して $f(a)$ は 2^n の倍数になっているとする。このとき $f(a)$ と $f(a+2^{n-1})$ のうち少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数であることを示せ。

(2)　任意の自然数 n に対して $f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在することを示せ。 [1998]

■ 確率

1　n を自然数とする。n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ。 [2017]

2　xy 平面上の 6 個の点 $(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$ が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。



規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する。

たとえば，X が $(2,\ 0)$ にいるときは，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。また X が $(1,\ 1)$ にいるときは，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$ のいずれかに $\dfrac{1}{3}$ の確率で移動する。

時刻 0 で動点 X が $\mathrm{O}=(0,\ 0)$ から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする。　[2016]

3　2 つの関数を，$f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。　[2015]

4　2 つの粒子が時刻 0 において△ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ の確率で移動する。この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。　[2014]

5　投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1)　石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2)　石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。　[2013]

6　さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。さらに

$$Y_1 = X_1,\ Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k = 2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，…，Y_n を定める。$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

[2012]

7　箱の中に, 1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし, 異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び, 小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して, 再び 2 枚のカードを同時に選び, 小さい方の数を Y とする。$X = Y$ である確率を求めよ。

[2011]

8　n 枚のカードを積んだ山があり, 各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geqq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では, 一番上のカードを取り, 山の一番上にもどすか, あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。n 回の試行を終えたとき, 最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。　[2009]

9　正四面体 ABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し, 1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに, 等しい確率で動くとする。このとき, 時刻 0 から時刻 n までの間に, 4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ。ただし, n は 1 以上の整数とする。　[2008]

10　1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき, 1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。　[2007]

11　先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n \geqq 2$ とする。各車両を赤色, 青色, 黄色のいずれか 1 色で塗るとき, 隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。　[2005]

12　Nを自然数とする。$N+1$個の箱があり, 1から$N+1$までの番号が付いている。どの箱にも玉が 1 個入っている。番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で, 番号$N+1$の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作(＊)を, 各々の$k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1$に対して, kが小さい方から順番に1回ずつ行う。

(＊)　k以外の番号のN個の箱から1個の箱を選び, その箱の中身と番号kの箱の中身を交換する。（ただし, N個の箱から1個の箱を選ぶ事象は, どれも同様に確からしいとする。）

操作がすべて終了した後, 赤玉が番号$N+1$の箱に入っている確率を求めよ。

[2004]

13　n チームがリーグ戦を行う。すなわち, 各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし, 勝つ確率はすべて$\dfrac{1}{2}$で, 各回の勝敗は独立に決まるものとする。このとき, $n-2$勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームである確率を求めよ。ただし, nは3以上とする。 [2003]

14　袋の中に青色, 赤色, 白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている。各色の3個の玉にはそれぞれ 1, 2, 3 の番号がついている。これら9個の玉をよくかきまぜて袋から同時に3個の玉を取り出す。取り出した3個のうちに同色のものが他になく, 同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば, 青1番, 赤1番, 白3番を取り出したときの得点は 1 で, 青 2 番, 赤 2 番, 赤 3 番を取り出したときの得点は0である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　得点が n となるような取り出し方の数を$A(n)$とするとき, $A(0)$, $A(1)$, $A(2)$, $A(3)$を求めよ。

(2)　得点の期待値を求めよ。 [1998]

■ 論証

1　四面体OABCが次の条件を満たすならば, それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点A, B, Cからそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし, 四面体のある頂点の対面とは, その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016]

2　$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。　[2015]

3　次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle$ABC と $\triangle$ABD において，AC＜AD かつ BC＜BD ならば，$\angle$C＞$\angle$D である。

[2012]

4　空間内に四面体 ABCD を考える。このとき，4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ。　[2011]

5　平面上の鋭角三角形$\triangle$ABC の内部(辺や頂点は含まない)に点 P をとり，A′ を B, C, P を通る円の中心，B′ を C, A, P を通る円の中心，C′ を A, B, P を通る円の中心とする。このとき，A，B，C，A′，B′，C′ が同一円周上にあるための必要十分条件は P が$\triangle$ABC の内心に一致することであることを示せ。　[2009]

6　空間の 1 点 O を通る 4 直線で，どの 3 直線も同一平面上にないようなものを考える。このとき，4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で，4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ。　[2008]

7　$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

[2006]

8　以下の問いに答えよ。ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい。

(1)　有理数 $p,\ q,\ r$ について，$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ ならば，$p=q=r=0$ であることを示せ。

(2)　実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ。　[1999]

■ 複素数

1　w を 0 でない複素数，x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき，xy 平面上の点 $(x,\ y)$ の軌跡を求めよ。　[2017]

2　複素数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　$f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(ロ)　$f(x)$ の係数 a, b の少なくとも一方は虚数である。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ。　[2016]

3　$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ は相異なる複素数で，$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ を満たすとする。このとき，$\alpha,\ \beta,\ \gamma$ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か。（ただし，複素平面を複素数平面ともいう。）　[2005]

4　複素数 α に対してその共役複素数を $\overline{\alpha}$ で表す。α を実数ではない複素数とする。複素平面内の円 C が $1,\ -1,\ \alpha$ を通るならば, C は $-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$ も通ることを示せ。　[2004]

5　多項式 $(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$ は多項式 x^2+x+1 で割り切れるか。

[2003]

6　$0<\theta<90$ とし，a は正の数とする。複素数平面上の点 $z_0,\ z_1,\ z_2,\ \cdots$ を次の条件(i), (ii)を満たすように定める。

(i)　$z_0=0,\ z_1=a$

(ii)　$n\geqq 1$ のとき，点 z_n-z_{n-1} を原点のまわりに $\theta°$ 回転すると点 $z_{n+1}-z_n$ に一致する。

このとき点 $z_n\ (n\geqq 1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数であることを示せ。　[2002]

7　未知数 x に関する方程式 $x^5+x^4-x^3+x^2-(a+1)x+a=0$ が，虚軸上の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ。　[2001]

8　実数 a は $0<a\leqq 2$ の範囲を動くものとする。

(1)　$y=\sqrt{x}$ と $y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次方程式 $(2x+a-1)^2=a^2x$ の複素数の範囲で考えた 2 つの解を α，β（ただし $|\alpha|\leqq|\beta|$）とする。このとき，$|\beta|$ の最小値を求めよ。　[2000]

9　p を素数, a, b を互いに素な正の整数とするとき，$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。　[2000]

10　複素平面上で，△ABC の頂点を表す複素数を α，β，γ とする。α，β，γ が次の 3 条件を満たすとする。

1.　△ABC は辺の長さ $\sqrt{3}$ の正三角形である
2.　$\alpha+\beta+\gamma=3$
3.　$\alpha\beta\gamma$ は絶対値 1 で，虚数部分は正

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$z=\alpha-1$ とおいて，β と γ を z を使って表せ。

(2)　α，β，γ の偏角を求めよ。ただし，$0°\leqq\arg\alpha\leqq\arg\beta\leqq\arg\gamma<360°$ とする。

[1999]

■ 曲線

1　平面上に 2 定点 A, B をとる。c は正の定数として，平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PB}}|+\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PB}}=c$$

を満たすとき，点 P の軌跡を求めよ。　[1999]

■ 極限

1 実数の定数a, bに対して，関数$f(x)$を，$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$で定める。すべての実数 x で不等式 $f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$ が成り立つような点$(a,\ b)$の範囲を図示せよ。 [2014]

2 aが正の実数のとき$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$を求めよ。 [2012]

3 x, yを相異なる正の実数とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1=0,\ a_{n+1}=xa_n+y^{n+1}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$が有限の値に収束するような座標平面上の点$(x,\ y)$の範囲を図示せよ。 [2007]

4 n を 2 以上の自然数とする。x^{2n}を$x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$で割った余りをa_nx+b_nとする。すなわち, xの多項式$P_n(x)$があって

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+a_nx+b_n$$

が成り立っているとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$を求めよ。 [2004]

5 数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=1$，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=1$，$n(n-2)a_{n+1}=S_n\ (n\geqq 1)$を満たすとき，一般項$a_n$を求めよ。 [2002]

6 n, kは整数で, $n\geqq 2$, $0\leqq k\leqq 4$ とする。サイコロをn回投げて出た目の和を 5 で割ったときの余りがkに等しくなる確率を$p_n(k)$とする。

(1) $p_{n+1}(0)$，$\cdots$，$p_{n+1}(4)$を$p_n(0)$，$\cdots$，$p_n(4)$を用いて表せ。

(2) $p_n(0)$，$\cdots$，$p_n(4)$の最大値をM_n，最小値をm_nとするとき，次の(イ)，(ロ)が成立することを示せ。

　(イ)　$m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$

　(ロ)　任意のk, l（$0\leqq k, l\leqq 4$）に対し，$p_{n+1}(k)-p_{n+1}(l)\leqq\dfrac{1}{6}(M_n-m_n)$

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(k)$を求めよ。 [2000]

7 　a, m は自然数で a は定数とする。xy 平面上の点 $(a,\ m)$ を頂点とし，原点と点 $(2a,\ 0)$ を通る放物線を考える。この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積を S_m，この領域の内部および境界線上にある格子点の数を L_m とする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ。ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである。　[1998]

■ 微分法

1 　(1) n を 2 以上の自然数とするとき，関数 $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ。　[2016]

2 　(1) a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2) $a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。　[2015]

3 　$-\dfrac{\pi}{2}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x+\dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi>3.1$ および $\sqrt{3}>1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。　[2013]

4 　実数 $x,\ y$ が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

5 　xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。　[2011]

6 　直線 $y=px+q$ が関数 $y=\log x$ のグラフと共有点をもたないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ。　[2008]

7　すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1)　任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。　[2007]

8　k を正の整数とし，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1 : y=\cos x,\ \ C_2 : y=\frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

(1)　C_1 と C_2 は共有点をもつことを示し，その点における C_1 の接線は点 $(0,\ 1)$ を通ることを示せ。

(2)　C_1 と C_2 の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。　[2005]

9　$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする。$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。　[2004]

10　半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。

(1)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ ならば△ABC は鋭角三角形であることを示せ。

(2)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$ が成立することを示せ。また，この等号が成立するのはどのような場合か。　[2002]

11　$a,\ b,\ c$ を実数とする。$y=x^3+3ax^2+3bx$ と $y=c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき $a^2>b$ が成立することを示し，さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間 $(-a-2\sqrt{a^2-b},\ -a+2\sqrt{a^2-b})$ に含まれていることを示せ。　[2002]

12　xy 平面上の曲線 $C : y=x^3$ 上の点 P における接線を，P を中心にして反時計回りに 45° 回転して得られる直線を L とする。C と L が，相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。　[2001]

13　a を $0<a<1$ を満たす定数として，曲線 $y=\log(x-a)$ と x 軸と 2 直線 $x=1$，$x=3$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする。

(1)　$V(a)$ を求めよ。

(2)　a の値が $0<a<1$ の範囲で変化するとき，$V(a)$ の最小値を求めよ。　[1998]

■ 積分法

1　定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。　[2012]

2　定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}} (x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx$ を求めよ。　[2011]

3　n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。　[2010]

4　定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ を求めよ。　[2007]

5　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ として，関数 F を $F(\theta)=\displaystyle\int_0^{\theta} x\cos(x+\alpha)\,dx$ で定める。θ が $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ の範囲を動くとき，F の最大値を求めよ。　[2006]

6　次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$　[2001]

7　数列$\{c_n\}$を次の式で定める。

$$c_n = (n+1)\int_0^1 x^n \cos \pi x\, dx \ (n = 1,\ 2,\ \cdots)$$

このとき，

(1)　c_nとc_{n+2}の関係を求めよ。

(2)　$\lim_{n\to\infty} c_n$を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値をcとするとき，$\lim_{n\to\infty} \dfrac{c_{n+1}-c}{c_n - c}$を求めよ。　[2000]

8　(1) $a_0 < b_0$，$a_1 < b_1$を満たす正の実数a_0，b_0，a_1，b_1について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1} > \frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$$

(2)　n 個の自然数x_1，x_2，……，x_nは互いに相異なり，$1 \leqq x_k \leqq n$ （$1 \leqq k \leqq n$）を満たしているとする。このとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{{x_k}^2}{k^2+1} > n - \frac{8}{5}$$

[1999]

■ 積分の応用

1　$a \geqq 0$とする。$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$の範囲で曲線$y = xe^{-x}$，直線$y = ax$，直線$x = \sqrt{2}$によって囲まれた部分の面積を$S(a)$とする。このとき，$S(a)$の最小値を求めよ。

（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。）　[2017]

2　xyz 空間において，平面$y = z$の中で，$|x| \leqq \dfrac{e^y + e^{-y}}{2} - 1$，$0 \leqq y \leqq \log a$で与えられる図形$D$を考える。ただし$a$は 1 より大きい定数とする。

この図形Dをy軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2016]

3　2 つの関数$y = \sin\left(x + \dfrac{\pi}{8}\right)$と$y = \sin 2x$のグラフの$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$の部分で囲まれる領域を，$x$ 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，$x = 0$と$x = \dfrac{\pi}{2}$は領域を囲む線とは考えない。　[2015]

4　双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A, B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする。このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2014]

5　xy 平面上で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x),\ \ C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A, 点 B で接しているとする。さらに△PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C, C_1, C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである。　[2013]

6　xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。　[2011]

7　a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x\ (0\leqq x\leqq\pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x\left(0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}\right)$ および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。　[2010]

8　xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して，極方程式

$$r=2+\cos\theta\quad(0\leqq\theta\leqq\pi)$$

により表される曲線を C とする。C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。　[2009]

9　次の式で与えられる底面の半径が 2, 高さが 1 の円柱 C を考える。

$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ \ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と 45° の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする。円柱 C を平面 H で 2 つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ。　[2008]

10 関数$y=f(x)$のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x \leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点$\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき$x=-1$におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

11 $\alpha>0$とし，$x>0$で定義された関数$f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}$を考える。$y=f(x)$のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積をαで表せ。ただし，e は自然対数の底である。 [2004]

12 $f(x)=x\sin x$ $(x \geqq 0)$ とする。点$\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$における $y=f(x)$ の法線と，$y=f(x)$のグラフの$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$の部分，および$y$軸とで囲まれる図形を考える。この図形を$x$軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。 [2003]

13 (1) $x \geqq 0$ で定義された関数$f(x)=\log(x+\sqrt{1+x^2})$について，導関数$f'(x)$を求めよ。

(2) 極方程式$r=\theta$ $(\theta \geqq 0)$で定義される曲線の，$0 \leqq \theta \leqq \pi$の部分の長さを求めよ。

[2002]

14 x, yはtを媒介変数として，次のように表示されているものとする。

$$x=\frac{3t-t^2}{t+1},\quad y=\frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

変数 t が$0 \leqq t \leqq 3$を動くとき，x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ。さらに，この$(x,\ y)$が描くグラフが囲む図形と領域$y \geqq x$の共通部分の面積を求めよ。 [1999]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

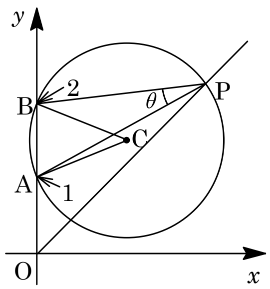
複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

x を正の実数とする。座標平面上の 3 点A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$，P$(x,\ x)$をとり，△APBを考える。x の値が変化するとき，∠APBの最大値を求めよ。　[2010]

解答例



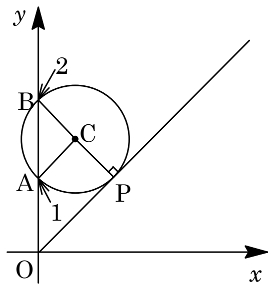
3 点A$(0,\ 1)$，B$(0,\ 2)$，P$(x,\ x)$を通る円の中心 C は，弦 AB の垂直二等分線上にあることより，$t>0$ として，$\mathrm{C}\left(t,\ \dfrac{3}{2}\right)$とおくことができる。

また，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくと，$0<\angle\mathrm{ACB}<\pi$ から $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ となる。

さて，円 C の半径を r とおくと，正弦定理より，

$$\frac{\mathrm{AB}}{\sin\theta}=2r\,,\ \sin\theta=\frac{1}{2r}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，θ が最大値をとるのは，$(*)$より r が最小，すなわち円 C が点 P の軌跡である半直線 $y=x\ (x>0)$ と接するときであり，



$$\sqrt{t^2+\left(\frac{3}{2}-1\right)^2}=\frac{\left|t-\dfrac{3}{2}\right|}{\sqrt{1^2+(-1)^2}}\,,\ t^2+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2$$

まとめると，$4t^2+12t-7=0$，$(2t-1)(2t+7)=0$

$t>0$ より $t=\dfrac{1}{2}$ となり，このとき $\mathrm{C}\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{3}{2}\right)$である。

すると，$\angle\mathrm{ACB}=\dfrac{\pi}{2}$ となり，∠APBの最大値は $\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{2}=\dfrac{\pi}{4}$ である。

コメント

AB を弦とする円を設定し，図形的に，そして感覚的に解きました。なお，円の中心は，AB を直径とする円が半直線 $y=x\ (x>0)$ と共有点をもたないことから，第 1 象限にあることがわかります。また，2 直線のなす角のタンジェントを，加法定理を用いて数式化する解法もあります。

問　題

定数 a は実数であるとする。関数 $y=|x^2-2|$ と $y=|2x^2+ax-1|$ のグラフの共有点はいくつあるか。a の値によって分類せよ。 [2008]

解答例

$y=|x^2-2|$ ……①と $y=|2x^2+ax-1|$ ……②を連立して，

$$|x^2-2|=|2x^2+ax-1|,\ \pm(x^2-2)=2x^2+ax-1$$

これより，$x^2+ax+1=0$ ……③ または $3x^2+ax-3=0$ ……④

③より $ax=-x^2-1$，④より $ax=-3x^2+3$

すると，①と②のグラフの共有点の個数は，直線 $y=ax$ ……⑤と $y=-x^2-1$ ……⑥，$y=-3x^2+3$ ……⑦の 2 つのグラフの共有点の個数に一致する。

さて，⑥と⑦の交点は，

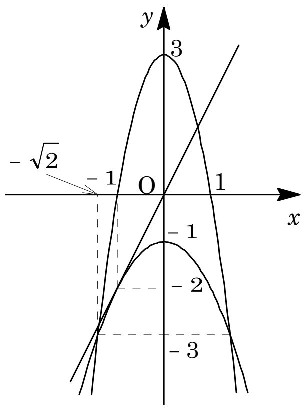
$$-x^2-1=-3x^2+3,\ x=\pm\sqrt{2}$$

よって，$(-\sqrt{2},\ -3)$，$(\sqrt{2},\ -3)$ である。

また，⑤と⑥が接するのは，③が重解をもつときより，

$$D=a^2-4=0,\ a=\pm 2$$

このとき，重解は $x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$ であり，接点は $(-1,\ -2)$，$(1,\ -2)$ となる。



以上より，方程式①の異なる実数解の個数は，対称性に注意すると，右図より，$|a|<2$ のとき 2 個，$|a|=2$ または $|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 3 個，$2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 4 個である。

コメント

①と②のグラフの共有点の個数を，⑤と⑥および⑦のグラフの共有点の個数として翻訳し，視覚的にとらえています。文系に相同な問題があり，後半その解を流用しています。

問　題

xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。 [2005]

解答例

原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分 L は，$y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$………①

①と曲線 $y=x^2+ax+b$ ……②の共有点は，

$$x^2+ax+b=2x,\ x^2+(a-2)x+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，①②が共有点をもつ条件は，③が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり，さらに $f(x)=x^2+(a-2)x+b$ ……④とおくと，この条件は，放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より，$f(x)=\left(x+\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b$ となり，放物線の軸の位置で場合分けをして，$(a,\ b)$ の条件を求めると，

(i)　$-\dfrac{a-2}{2}<0\ (a>2)$ のとき

$f(0)=b\leqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\geqq 0$ より，$-a+1\leqq b\leqq 0$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a-2}{2}\leqq 1\ (0\leqq a\leqq 2)$ のとき

$-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b\leqq 0$　かつ（$f(0)=b\geqq 0$ または $f(1)=a+b-1\geqq 0$）

よって，$b\leqq\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ かつ（$b\geqq 0$ または $b\geqq -a+1$）

(iii)　$-\dfrac{a-2}{2}>1\ (a<0)$ のとき

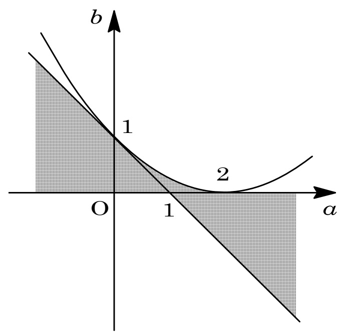
$f(0)=b\geqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\leqq 0$ より，

$$0\leqq b\leqq -a+1$$

さて，$b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ と $b=-a+1$ の共有点は，

$$\frac{1}{4}(a-2)^2=-a+1,\ a=0$$

以上より，$(a,\ b)$ の存在領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



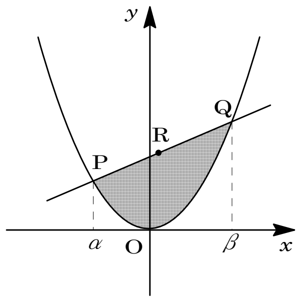
コメント

頻出問題なので，方針はすぐに決まります。ミスをしないように，ていねいに計算を進めていきます。

問　題

放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって, この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき, PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。　[1999]

解答例



$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$（$\alpha<\beta$）とするとき, 放物線 $y=x^2$ と線分 PQ が囲む部分の面積 S は,

$$S=\int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

条件より, $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=1$, $(\beta-\alpha)^3=6$

$$\left\{(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}}=6\cdots\cdots\cdots①$$

ここで, $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると,

$$x=\frac{\alpha+\beta}{2}\cdots\cdots\cdots②,\quad y=\frac{\alpha^2+\beta^2}{2}=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

②より, $\alpha+\beta=2x\cdots\cdots\cdots④$

③④より, $\alpha\beta=-y+\frac{(\alpha+\beta)^2}{2}=-y+2x^2\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤を①に代入して,

$$(4y-4x^2)^{\frac{3}{2}}=6,\quad y=x^2+\frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

コメント

数Ⅱの微積分の典型問題です。途中の式変形も難しいところはありませんでした。なお, ①より α, β が実数という条件は満たされています。

問　題

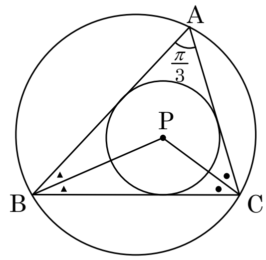
$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり，$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ であるとする。また$\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

(1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき，$\angle BPC$ を求めよ。

(2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。 [2017]

解答例

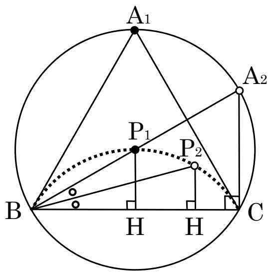
(1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき，



$$\angle BPC=\pi-(\angle PBC+\angle PCB)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=\pi-\frac{1}{2}(\pi-\angle A)$$
$$=\pi-\frac{1}{2}\left(\pi-\frac{\pi}{3}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 から，正弦定理より，

$$BC=2\sin\frac{\pi}{3}=\sqrt{3}$$



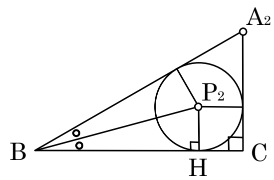
さて，$\triangle ABC$ は$\angle A=\dfrac{\pi}{3}$ である鋭角三角形である。ここで，$\triangle A_1BC$ を正三角形，$\triangle A_2BC$ を$\angle C=\dfrac{\pi}{2}$ の直角三角形としたとき，対称性から一般性を失うことなく，点 A は右図の弧 A_1A_2 上を動くとしてもよい。ただし，点 A_1 は含み，点 A_2 は含まない。

また，点 P は$\angle BPC=\dfrac{2}{3}\pi$ から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして，$A=A_1$ のとき $P=P_1$，$A=A_2$ のとき $P=P_2$ とする。さらに，P_1 から BC に垂線 P_1H_1，P_2 から BC に垂線 P_2H_2 を引く。

すると，$\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値は，$P_2H_2<r\leqq P_1H_1$ である。

そこで，$\angle P_1BH_1=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\pi}{6}$ から，$P_1H_1=\dfrac{1}{2}BC\cdot\tan\dfrac{\pi}{6}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\cdot\dfrac{1}{\sqrt{3}}=\dfrac{1}{2}$

また，$\triangle A_2BC$ は，$AB=2$，$AC=1$，$BC=\sqrt{3}$ なので，右図から，



$$(\sqrt{3}-P_2H_2)+(1-P_2H_2)=2,\quad P_2H_2=\frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

以上より，$\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}<r\leqq\dfrac{1}{2}$ である。

コメント

平面図形の計量についての基本的な問題で，(1)の誘導により内心の軌跡が導けます。

問　題

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

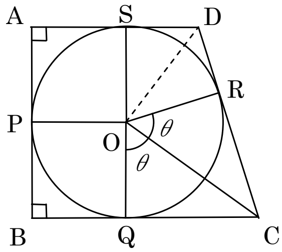
(a)　少なくとも 2 つの内角は $90°$ である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。 [2015]

解答例

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P, Q, R, S とおく。条件(a)より，$90°$ の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　$90°$ の内角が隣り合う ($\angle A = \angle B = 90°$) のとき



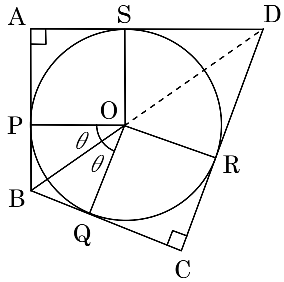
右図のように $\angle COQ = \angle COR = \theta$ ($0° < \theta < 90°$) とおくと，$\angle DOR = \angle DOS = 90° - \theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S = 1^2 + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta + 2\cdot\frac{1}{2}\tan(90° - \theta)$$

$$= 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta} \geqq 2 + 2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}} = 4$$

等号成立は $\tan\theta = \dfrac{1}{\tan\theta}$ ($\theta = 45°$) のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　$90°$ の内角が向かい合う ($\angle A = \angle C = 90°$) のとき



右図のように $\angle BOP = \angle BOQ = \theta$ ($0° < \theta < 90°$) とおくと，$\angle DOR = \angle DOS = 90° - \theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S = 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta + 1^2 + 2\cdot\frac{1}{2}\tan(90° - \theta)$$

$$= 2 + \tan\theta + \frac{1}{\tan\theta}$$

(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

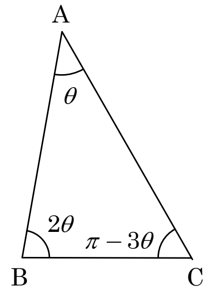
コメント

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

問　題

$\triangle$ABC は，条件 $\angle B = 2\angle A$，$BC = 1$ を満たす三角形のうちで面積が最大のものであるとする。このとき，$\cos\angle B$ を求めよ。 [2014]

解答例



$\angle A = \theta$ とおくと，条件より，$\angle B = 2\theta$，$\angle C = \pi - 3\theta$ となり，$0 < \theta < \dfrac{\pi}{3}$ のもとで，正弦定理より，

$$\frac{1}{\sin\theta} = \frac{AB}{\sin(\pi - 3\theta)}$$

$$AB = \frac{\sin(\pi - 3\theta)}{\sin\theta} = \frac{\sin 3\theta}{\sin\theta} = \frac{3\sin\theta - 4\sin^3\theta}{\sin\theta} = 3 - 4\sin^2\theta$$

すると，$\triangle$ABC の面積 S は，

$$S = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot(3 - 4\sin^2\theta)\sin 2\theta = \frac{1}{2}(1 + 2\cos 2\theta)\sin 2\theta$$

さらに，$\varphi = 2\theta$ とおくと，$0 < \varphi < \dfrac{2}{3}\pi$ のもとで，$S = \dfrac{1}{2}(1 + 2\cos\varphi)\sin\varphi$

$$S' = \frac{1}{2}(-2\sin\varphi)\sin\varphi + \frac{1}{2}(1 + 2\cos\varphi)\cos\varphi$$

$$= -\sin^2\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi + \cos^2\varphi = 2\cos^2\varphi + \frac{1}{2}\cos\varphi - 1$$

ここで，$S' = 0$ とすると，$-\dfrac{1}{2} < \cos\varphi < 1$ から $\cos\varphi = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{8}$ である。

そこで，$\cos\alpha = \dfrac{-1 + \sqrt{33}}{8}$ とおくと，右表から，$\varphi = \alpha$ で S は最大となり，このとき，

$$\cos\angle B = \cos\varphi = \frac{-1 + \sqrt{33}}{8}$$

φ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\frac{2}{3}\pi$
S'		$+$	0	$-$	
S		$\nearrow$		$\searrow$	

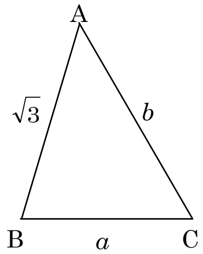
コメント

三角比の応用問題に，微分法の利用という味付けがされています。

問　題

$1<a<2$ とする。3 辺の長さが $\sqrt{3}$, a, b である鋭角三角形の外接円の半径が 1 であるとする。このとき, a を用いて b を表せ。 [2010]

解答例



外接円の半径が 1 である鋭角三角形 ABC において，$\mathrm{AB}=\sqrt{3}$,
$\mathrm{BC}=a$，$\mathrm{CA}=b$ とおくと，正弦定理より，

$$\frac{a}{\sin A}=\frac{b}{\sin B}=\frac{\sqrt{3}}{\sin C}=2\times1$$

$$\sin A=\frac{a}{2}\cdots\cdots①,\ \ \sin B=\frac{b}{2}\cdots\cdots②,\ \ \sin C=\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots③$$

③より，$\angle\mathrm{C}$ が鋭角から，$C=\dfrac{\pi}{3}\cdots\cdots\cdots④$

①より, $1<a<2$ から $\dfrac{1}{2}<\sin A<1$ となり，$\angle\mathrm{A}$ が鋭角から $\dfrac{\pi}{6}<A<\dfrac{\pi}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$

④⑤より，$B=\dfrac{2}{3}\pi-A$ から $\dfrac{\pi}{6}<B<\dfrac{\pi}{2}$ となり，$\angle\mathrm{B}$ が鋭角という条件は満たされる。

さて，①より，$\cos A=\sqrt{1-\left(\dfrac{a}{2}\right)^2}=\sqrt{1-\dfrac{a^2}{4}}$ となり，②から，

$$b=2\sin B=2\sin\left(\frac{2}{3}\pi-A\right)=2\sin\frac{2}{3}\pi\cos A-2\cos\frac{2}{3}\pi\sin A$$

$$=\sqrt{3}\cdot\sqrt{1-\frac{a^2}{4}}+\frac{a}{2}=\frac{a+\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$$

コメント

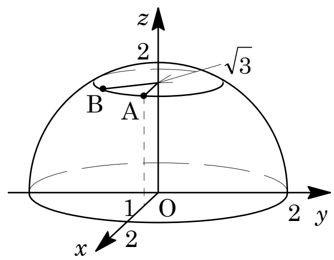
正弦定理の利用から始めるという点はすぐにわかるものの，その後の解法の選択に,運・不運が反映されます。

問　題

地球上の北緯$60°$東経$135°$の地点を A, 北緯$60°$東経$75°$の地点を B とする。A から B に向かう 2 種類の飛行経路R_1, R_2を考える。R_1は西に向かって同一緯度で飛ぶ経路とする。R_2は地球の大円に沿った経路のうち飛行距離の短い方とする。R_1に比べてR_2は飛行距離が3%以上短くなることを示せ。ただし地球は完全な球体であるとし，飛行機は高度 0 を飛ぶものとする。また必要があれば，三角関数表を用いよ。

注：大円とは，球を球の中心を通る平面で切ったとき，その切り口にできる円のことである。 [2008]

解答例



まず，地球の半径を 2，赤道面を xy 平面，北極を点$(0,\ 0,\ 2)$とし，東経$135°$を xz 平面上とする座標系を設定する。

すると，地点 A は北緯$60°$東経$135°$より，その座標は$\mathrm{A}(1,\ 0,\ \sqrt{3})$となる。また，地点 B は北緯$60°$東経$75°$より，$\mathrm{B}(x,\ y,\ \sqrt{3})$とおくと，

$$x = 2\cos 60°\cos(-60°) = \frac{1}{2},\quad y = 2\cos 60°\sin(-60°) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

さて，経路R_1は，平面$z=\sqrt{3}$上での弧 AB より，その長さをl_1とおくと，

$$l_1 = 2\pi\cdot 1\times\frac{60}{360} = \frac{\pi}{3} = \frac{30}{90}\pi$$

また，経路R_2は，半径 2 の大円上での弧 AB であり，$\angle\mathrm{AOB} = \theta°$とおくと，

$$l_2 = 2\pi\cdot 2\times\frac{\theta}{360} = \frac{\pi}{90}\theta$$

ここで，$\cos\theta° = \dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OB}}|} = \dfrac{\frac{1}{2}+3}{2\cdot 2} = \dfrac{7}{8} = 0.875$から，三角関数表を用いると，

$$28° < \theta° < 29°$$

よって，$\dfrac{28}{90}\pi < l_2 < \dfrac{29}{90}\pi$となり，$\dfrac{l_2}{l_1} < \dfrac{29}{30} < 0.97$である。

すなわち，R_1に比べてR_2は飛行距離が3%以上短くなる。

コメント

大圏航路を題材にした問題です。これは，メルカトル図法で書かれた世界地図で，最短の飛行経路が直線としては表されないことと関連しています。なお，与えられていた三角関数表は省略しました。

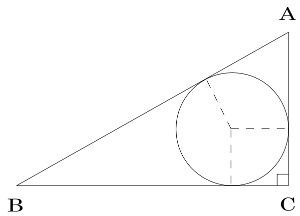
問　題

直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2)　r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ。　[1998]

解答例



(1)　$\angle C = 90^\circ$ とし，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$ とおくと，

$(a-r)+(b-r)=c$ から，$a+b-c-2r=0$ ………①

条件より，$a+b+c+2r=2$ …………②

②－①より，$2c+4r=2$

よって，$c=1-2r$ …………③

(2)　③を②に代入すると，$a+b=1$ …………④

$\triangle ABC$ の面積を S とし，④と相加平均と相乗平均の関係から，

$$S=\frac{1}{2}ab \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

等号は $a=b$，すなわち④より $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき成立する。

このとき，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，③より，$r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ となり，与えられた条件をみたす。これより，S の最大値は $\dfrac{1}{8}$ である。

コメント

これまで多くの大学でたびたび出題されてきた直角三角形の内接円に関する問題です。なお(2)は，④から $b=1-a$ として S を a だけの 2 次関数として表し，その最大値を求めるという方法でも構いません。

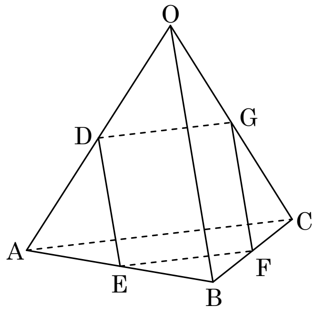
問　題

四面体 OABC を考える。点 D, E, F, G, H, I は，それぞれ辺 OA, AB, BC, CO, OB, AC 上にあり，頂点ではないとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{DG}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ が平行ならば $\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$ であることを示せ。

(2)　D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているとき，これらの点は OABC の各辺の中点であり，OABC は正四面体であることを示せ。　[2017]

解答例



(1)　まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおく。また，D, E, F, G について，$\mathrm{OD}:\mathrm{DA}=d:1-d$，$\mathrm{BE}:\mathrm{EA}=e:1-e$，$\mathrm{BF}:\mathrm{FC}=f:1-f$，$\mathrm{OG}:\mathrm{GC}=g:1-g$ とすると，

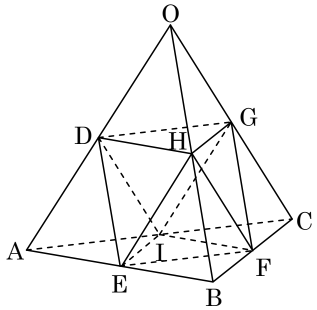
$$\overrightarrow{\mathrm{DG}}=g\vec{c}-d\vec{a}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=(1-f)\vec{b}+f\vec{c}-(1-e)\vec{b}-e\vec{a}$$
$$=f\vec{c}+(e-f)\vec{b}-e\vec{a}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{DG}}\,/\!/\,\overrightarrow{\mathrm{EF}}$ から，$\overrightarrow{\mathrm{EF}}=k\overrightarrow{\mathrm{DG}}$　(k は定数)

$$f\vec{c}+(e-f)\vec{b}-e\vec{a}=k(g\vec{c}-d\vec{a})\cdots\cdots\cdots①$$

すると，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立なので，$e-f=0$ すなわち $e=f$ となり，

$$\mathrm{AE}:\mathrm{EB}=\mathrm{CF}:\mathrm{FB}$$



(2)　まず, D, E, F, G, H, I が正八面体の頂点となっているので，四角形 DEFG は正方形である。

すると，①で $k=1$ となり，$f=g$，$e=f$，$e=d$ から，

$$d=e=f=g\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\mathrm{OH}:\mathrm{HB}=h:1-h$，$\mathrm{AI}:\mathrm{IC}=i:1-i$ とおくと，四角形 DIFH は正方形なので，$\overrightarrow{\mathrm{IF}}=\overrightarrow{\mathrm{DH}}$ より，

$$(1-f)\vec{b}+f\vec{c}-(1-i)\vec{a}-i\vec{c}=h\vec{b}-d\vec{a}$$

同様にすると，$1-i=d$，$1-f=h$，$f-i=0$ となり，

$$d=1-f=1-i=h\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$d=e=f=g=h=i=\dfrac{1}{2}$ となるので，点 D, E, F, G, H, I は四面体 OABC の各辺の中点である。

さらに，△DHG が正三角形より△ABC が正三角形となり，同様に△OAB, △OBC，△OCA も正三角形となるので，四面体 OABC は正四面体である。

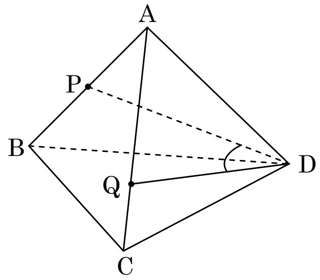
コメント

ベクトルの空間図形への応用ですが，(1)が(2)の論証への誘導になっています。

問　題

1 辺の長さが 1 の正四面体 ABCD において，P を辺 AB の中点とし，点 Q が辺 AC 上を動くとする。このとき，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値を求めよ。　　　　　　　　　　[2015]

解答例



まず，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{DB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{DC}}=\vec{c}$ とおくと，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=1$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=1^2\cdot\cos\frac{\pi}{3}=\frac{1}{2}$$

さて，点 P は辺 AB の中点，点 Q は辺 AC 上の点より，$0\leqq t\leqq 1$ として，

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}=\frac{1}{2}\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{b},\quad \overrightarrow{\mathrm{DQ}}=t\vec{a}+(1-t)\vec{c}$$

すると，$|\overrightarrow{\mathrm{DP}}|=\dfrac{1}{2}\sqrt{1^2+2\cdot\dfrac{1}{2}+1^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

$$|\overrightarrow{\mathrm{DQ}}|=\sqrt{t^2\cdot 1^2+2t(1-t)\cdot\frac{1}{2}+(1-t)^2\cdot 1^2}=\sqrt{t^2-t+1}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{DP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DQ}}=\frac{1}{2}t\cdot 1^2+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}(1-t)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}(t+2)$$

これより，$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\dfrac{\frac{1}{4}(t+2)}{\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{t^2-t+1}}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{(t+2)^2}{t^2-t+1}}$ ………(＊)

そこで，$f(t)=\dfrac{(t+2)^2}{t^2-t+1}$ とおくと，$\cos\angle\mathrm{PDQ}=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{f(t)}$ となり，

$$f'(t)=\frac{2(t+2)(t^2-t+1)-(t+2)^2(2t-1)}{(t^2-t+1)^2}=\frac{(t+2)(-5t+4)}{(t^2-t+1)^2}$$

$f(t)$ の増減は右表のようになり，$t=\dfrac{4}{5}$ のとき最大値 $\dfrac{14^2}{21}$ をとる。

t	0	$\cdots$	$\frac{4}{5}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		＋	0	－	
$f(t)$		↗	$\frac{14^2}{21}$	↘	

よって，(＊)から，$\cos\angle\mathrm{PDQ}$ の最大値は，

$\dfrac{1}{2\sqrt{3}}\sqrt{\dfrac{14^2}{21}}=\dfrac{14}{6\sqrt{7}}=\dfrac{\sqrt{7}}{3}$ である。

コメント

正四面体を題材とした空間ベクトルの図形への応用問題です。方針に迷うようなことはないでしょう。また，同じことですが，△PDQ に余弦定理という方法も考えられます。

問　題

座標空間における次の 3 つの直線 $l,\ m,\ n$ を考える：

l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から $m,\ n$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

[2014]

解答例

まず，直線 $l,\ m,\ n$ 上の点 P, Q, R は，$p,\ q,\ r$ を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\vec{u}=(1,\ 0,\ -2)+p(2,\ 1,\ -1)=(1+2p,\ p,\ -2-p)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+q\vec{v}=(1,\ 2,\ -3)+q(1,\ -1,\ 1)=(1+q,\ 2-q,\ -3+q)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+r\vec{w}=(1,\ -1,\ 0)+r(1,\ 2,\ 1)=(1+r,\ -1+2r,\ r)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(q-2p,\ 2-q-p,\ -1+q+p)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$ から，

$$(q-2p)-(2-q-p)+(-1+q+p)=0,\ q-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(r-2p,\ -1+2r-p,\ 2+r+p)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{w}=0$ より，

$$(r-2p)+2(-1+2r-p)+(2+r+p)=0,\ -p+2r=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=1$，$r=\dfrac{1}{2}p$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-2p,\ 1-p,\ p),\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(-\frac{3}{2}p,\ -1,\ \frac{3}{2}p+2\right)$$

これより，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ とおくと，

$$F(p)=(1-2p)^2+(1-p)^2+p^2+\left(-\frac{3}{2}p\right)^2+1+\left(\frac{3}{2}p+2\right)^2=\frac{21}{2}p^2+7$$

よって，$p=0$ すなわち $\mathrm{P}(1,\ 0,\ -2)$ のとき，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ は最小となり，最小値は 7 である。

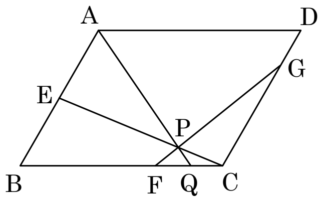
コメント

空間における直線を題材にした基本題です。なお，計算結果は予測を超えて簡単になります。

問　題

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を1:1に内分する点を E，辺 BC を2:1に内分する点を F，辺 CD を3:1に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 AP : PQ を求めよ。 [2013]

解答例



$\overrightarrow{AB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{AD}=\vec{d}$ とおき，s，t を実数とすると，点 P が線分 FG と線分 CE の交点より，

$$\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AF}+(1-s)\overrightarrow{AG}$$
$$=s\left(\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+(1-s)\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}s\right)\vec{b}+\left(1-\frac{1}{3}s\right)\vec{d}\cdots\cdots\cdots①$$
$$\overrightarrow{AP}=t\overrightarrow{AC}+(1-t)\overrightarrow{AE}=t(\vec{b}+\vec{d})+\frac{1}{2}(1-t)\vec{b}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\vec{b}+t\vec{d}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので，①②より，$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$，$1-\frac{1}{3}s=t$

まとめると，$t=\frac{8}{11}$ となり，②に代入して，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{19}{22}\vec{b}+\frac{8}{11}\vec{d}$$

さらに，点 Q は直線 AP と辺 BC の交点より，k, l を実数として，

$$\overrightarrow{AQ}=k\overrightarrow{AP}=\frac{19}{22}k\vec{b}+\frac{8}{11}k\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$
$$\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AB}+l\overrightarrow{BC}=\vec{b}+l\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので，③④より，$\frac{19}{22}k=1$，$\frac{8}{11}k=l$

すると，$k=\frac{22}{19}$ となり，$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=1:(k-1)=1:\frac{3}{19}=19:3$ である。

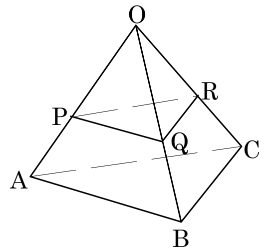
コメント

題材が平行四辺形なので，補助線を引いて，相似を利用する手も考えられます。ただ，実戦的には，上のような解でしょう。

問　題

正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。　[2012]

解答例



正四面体 OABC において $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ ……①

としても一般性を失わない。

また，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$ から，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$ として，$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC}$ とおくと，△PQR が正三角形より，

$$|p\overrightarrow{OA}-q\overrightarrow{OB}|=|q\overrightarrow{OB}-r\overrightarrow{OC}|=|r\overrightarrow{OC}-p\overrightarrow{OA}|$$

①②より，$p^2-pq+q^2=q^2-qr+r^2=r^2-rp+p^2$ ………③

③から，$p^2-pq=-qr+r^2$，$p^2-r^2-q(p-r)=0$ となり，

$$(p-r)(p+r-q)=0\ \cdots\cdots\cdots ④$$

また，③から，同様にすると，$(p-q)(p+q-r)=0$ ………⑤

そこで，④⑤から，場合分けをすると，

(i)　$p-r=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$p=q=r$

(ii)　$p-r=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$q=0$ となり不適

(iii)　$p+r-q=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$r=0$ となり不適

(iv)　$p+r-q=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$p=0$ となり不適

(i)〜(iv)より，$p=q=r$ となり，

$$\overrightarrow{PQ}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{QR}=p\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{RP}=p\overrightarrow{CA}$$

よって，PQ // AB, QR // BC, RP // CA

コメント

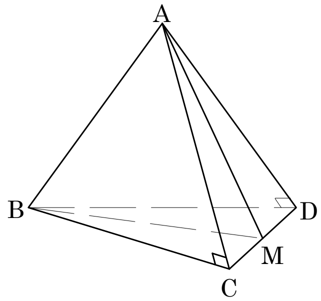
ベクトルを利用して普通に設定をし，式変形を行っていくと，直感的に正しいと思える結論に到達できます。

問　題

四面体 ABCD において $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{DB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ はそれぞれ垂直であるとする。このとき，頂点 A，頂点 B および辺 CD の中点 M の 3 点を通る平面は辺 CD と直交することを示せ。　[2010]

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\vec{c}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおく。



まず，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CB}}=0$ となり，

$$-\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{c})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{c}|^2\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{DB}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{DA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{DB}}=0$ となり，

$$-\vec{d}\cdot(\vec{b}-\vec{d})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{d}=|\vec{d}|^2\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=0$ となり，

$$\vec{b}\cdot(\vec{d}-\vec{c})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$|\vec{c}|^2=|\vec{d}|^2=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$

さて，辺 CD の中点 M に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$ と表せるので，④より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{CD}}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})\cdot(\vec{d}-\vec{c})=\frac{1}{2}(|\vec{d}|^2-|\vec{c}|^2)=0$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AM}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ となり，条件の $\overrightarrow{\mathrm{AB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ と考え合わせると，3 点 A，B，M を通る平面は，辺 CD と直交する。

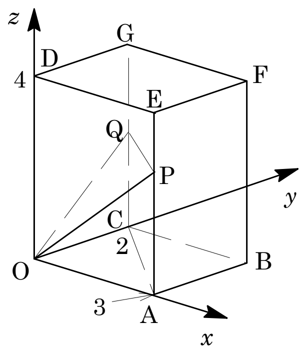
コメント

四面体を題材にした空間ベクトルの頻出題です。

問　題

xyz 空間で O$(0,\ 0,\ 0)$, A$(3,\ 0,\ 0)$, B$(3,\ 2,\ 0)$, C$(0,\ 2,\ 0)$, D$(0,\ 0,\ 4)$, E$(3,\ 0,\ 4)$, F$(3,\ 2,\ 4)$, G$(0,\ 2,\ 4)$を頂点とする直方体 OABC-DEFG を考える。辺 AE を $s:1-s$ に内分する点を P, 辺 CG を $t:1-t$ に内分する点を Q とおく。ただし, $0<s<1$, $0<t<1$ とする。D を通り, O, P, Q を含む平面に垂直な直線が線分 AC(両端を含む)と交わるような s, t の満たす条件を求めよ。　　　[2009]

解答例



$\mathrm{AP}:\mathrm{PE}=s:1-s$, $\mathrm{CB}:\mathrm{BG}=t:1-t$ より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=s\overrightarrow{\mathrm{OE}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{OA}}=s(3,\ 0,\ 4)+(1-s)(3,\ 0,\ 0)=(3,\ 0,\ 4s)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{OG}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OC}}=t(0,\ 2,\ 4)+(1-t)(0,\ 2,\ 0)=(0,\ 2,\ 4t)$$

平面 OPQ の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと,

$$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=3a+4sc=0,\quad \vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=2b+4tc=0$$

これより, $a=-\frac{4}{3}sc$, $b=-2tc$ となり, $\vec{n}=\left(-\frac{4}{3}sc,\ -2tc,\ c\right)=-\frac{c}{3}(4s,\ 6t,\ -3)$

すると, 点 D を通り, $\vec{n}$ を方向ベクトルにもつ直線は, k を実数として,

$$(x,\ y,\ z)=(0,\ 0,\ 4)+k(4s,\ 6t,\ -3)=(4sk,\ 6tk,\ 4-3k)$$

xy 平面との交点は, $z=4-3k=0$ から $k=\frac{4}{3}$ となり, $(x,\ y,\ z)=\left(\frac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right)$

さて, 線分 AC 上(両端を含む)の点は, $0\leqq l\leqq 1$ として,

$$(x,\ y,\ z)=l(3,\ 0,\ 0)+(1-l)(0,\ 2,\ 0)=(3l,\ 2-2l,\ 0)$$

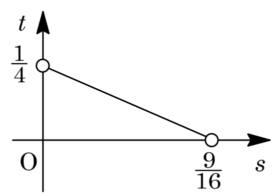
ここで, 条件より, $\left(\frac{16}{3}s,\ 8t,\ 0\right)=(3l,\ 2-2l,\ 0)$ となり,

$$\frac{16}{3}s=3l\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 8t=2-2l\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $\frac{32}{5}s+24t=6$ となり, $16s+36t=9$

また, $0\leqq l\leqq 1$ から $0\leqq 8t\leqq 2$ となり, $0\leqq t\leqq\frac{1}{4}$

さらに, $0<t<1$, $0<s<1$ と合わせると, $0<t<\frac{1}{4}$ である。



コメント

空間ベクトルの頻出題で, 計算量も少なめです。

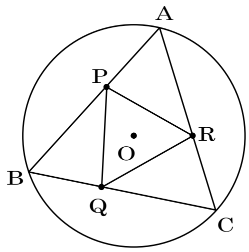
問　題

点 O を中心とする円に内接する△ABC の 3 辺 AB, BC, CA をそれぞれ 2 : 3 に内分する点を P, Q, R とする。△PQR の外心が点 O と一致するとき，△ABC はどのような三角形か。 [2007]

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とすると，条件より，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|\cdots\cdots\cdots(*)$$



ここで，条件より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{5}(3\vec{a}+2\vec{b})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{5}(3\vec{b}+2\vec{c}),\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{5}(3\vec{c}+2\vec{a})$$

さて，$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|$ から，

$$|3\vec{a}+2\vec{b}|=|3\vec{b}+2\vec{c}|=|3\vec{c}+2\vec{a}|$$

$$9|\vec{a}|^2+12\vec{a}\cdot\vec{b}+4|\vec{b}|^2=9|\vec{b}|^2+12\vec{b}\cdot\vec{c}+4|\vec{c}|^2=9|\vec{c}|^2+12\vec{c}\cdot\vec{a}+4|\vec{a}|^2$$

よって，(＊)から，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$

すると，$|\vec{a}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=|\vec{b}|^2-2\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=|\vec{c}|^2-2\vec{c}\cdot\vec{a}+|\vec{a}|^2$ から，

$$|\vec{a}-\vec{b}|^2=|\vec{b}-\vec{c}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2$$

以上より，AB = BC = CA となるので，△ABC は正三角形である。

コメント

ベクトル利用という方針を立てた後は，その始点を決定するわけですが，これを点 O にすることには，ためらいはないでしょう。ここまで準備をすると，簡単な計算で結論が導けます。

問　題

点 O を原点とする座標空間の 3 点を A$(0,\ 1,\ 2)$，B$(2,\ 3,\ 0)$，P$(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$とする。線分 OP と線分 AB が交点をもつような実数 t が存在することを示せ。また，そのときの交点の座標を求めよ。 [2006]

解答例

まず，線分 AB 上の点は，$0\leqq s\leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=s(0,\ 1,\ 2)+(1-s)(2,\ 3,\ 0)=(-2s+2,\ -2s+3,\ 2s)$$

また，線分 OP 上の点は，$0\leqq u\leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=u(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$$

線分 AB と線分 OP が交わるのは，

$$(-2s+2,\ -2s+3,\ 2s)=u(5+t,\ 9+2t,\ 5+3t)$$

すなわち，$-2s+2=u(5+t)\cdots\cdots$①，$-2s+3=u(9+2t)\cdots\cdots$②

$2s=u(5+3t)\cdots\cdots$③

①②より，$1=u(4+t)\cdots\cdots\cdots$④

②③より，$3=u(14+5t)\cdots\cdots\cdots$⑤

④⑤より，$14+5t-3(4+t)=0$ となり，$t=-1$ である。

このとき，$u=\dfrac{1}{3}$，$s=\dfrac{1}{3}$ となり，$0\leqq s\leqq 1$，$0\leqq u\leqq 1$ を満たすので，$t=-1$ のとき，線分 OP と線分 AB は交点をもつ。

また，交点の座標は，

$$(x,\ y,\ z)=\frac{1}{3}(5-1,\ 9-2,\ 5-3)=\left(\frac{4}{3},\ \frac{7}{3},\ \frac{2}{3}\right)$$

コメント

空間内の 2 直線が，交点をもつという特別な位置関係にあることを示す問題です。これは，連立方程式①②③が解をもつ条件として，言い換えることができます。

問　題

$\triangle$ABC に対し，辺 AB 上に点 P を，辺 BC 上に点 Q を，辺 CA 上に点 R を，頂点とは異なるようにとる。この 3 点がそれぞれの辺上を動くとき，この 3 点を頂点とする三角形の重心はどのような範囲を動くか図示せよ。　[2006]

解答例

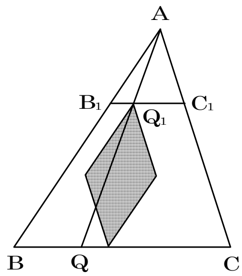
BC 上に点 Q を固定し，$0<p<1$，$0<r<1$ として，

$$\overrightarrow{AP}=p\overrightarrow{AB},\ \ \overrightarrow{AR}=r\overrightarrow{AC}$$

$\triangle$PQR の重心を G とすると，

$$\overrightarrow{AG}=\frac{1}{3}(\overrightarrow{AP}+\overrightarrow{AQ}+\overrightarrow{AR})=\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}+p\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+r\cdot\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}$$

ここで，$\frac{1}{3}\overrightarrow{AQ}=\overrightarrow{AQ_1}$，$\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{AB_1}$，$\frac{1}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AC_1}$ とおき，線分 AB_1，AC_1 を隣りあう 2 辺とする平行四辺形を S_A とおく。

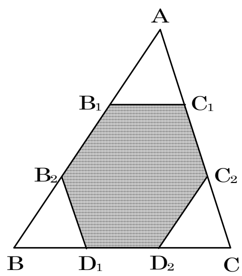


さて，p，r を $0<p<1$，$0<r<1$ を満たすように動かすと，点 G は，S_A を $\overrightarrow{AQ_1}$ だけ平行移動した平行四辺形 S_{Q_1} の内部を動く。

ここで，点 Q を辺 BC 上で点 B から点 C まで動かすと，点 Q_1 は線分 B_1C_1 上を点 B_1 から点 C_1 まで動く。その結果，平行四辺形 S_{Q_1} は平行移動し，その通過領域が点 G の動く範囲である。

以上より，辺 AB の三等分点を B_1，B_2，辺 AC の三等分点を C_1，C_2，辺 BC の三等分点を D_1，D_2 とおくと，点 G は六角形 $B_1B_2D_1D_2C_2C_1$ の内部を動く。

すなわち，点 G の動く範囲は右図の網点部である。ただし，境界線は含まない。



コメント

独立に動く点が 3 つあり，そのうちの 1 つを固定して考えた解です。そのプロセスが記述しにくく，そのため演習するのに適した問題です。

問　題

四面体 OABC は次の 2 つの条件

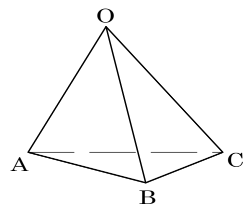
(i)　$\mathrm{OA}\perp\mathrm{BC}$，$\mathrm{OB}\perp\mathrm{AC}$，$\mathrm{OC}\perp\mathrm{AB}$

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。　[2003]

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とおくと，条件(i)より，



$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b})=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a})=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}$$

まとめて，$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{c}\cdot\vec{a}=k$ ……①とおく。

また，条件(ii)より，$\triangle\mathrm{OAB}=\triangle\mathrm{OBC}=\triangle\mathrm{OCA}$ から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2-(\vec{a}\cdot\vec{b})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2-(\vec{b}\cdot\vec{c})^2}=\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2-(\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

①より，$|\vec{a}||\vec{b}|=|\vec{b}||\vec{c}|=|\vec{c}||\vec{a}|$

まとめて，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=l$ ……②とおく。

ここで，①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2=|\vec{b}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2=|\vec{c}-\vec{a}|^2=l^2-2k+l^2=2(l^2-k)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a})=k-k-k+l^2=l^2-k$$

すると，$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\sqrt{4(l^2-k)^2-(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}$$

さらに，$\triangle\mathrm{ABC}=\triangle\mathrm{OAB}$ より，$\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}=\frac{1}{2}\sqrt{l^4-k^2}$

$$3(l^2-k)^2=(l^2-k)(l^2+k),\ 3(l^2-k)=l^2+k,\ l^2=2k\ \cdots\cdots③$$

③より，$\cos\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{k}{l^2}=\dfrac{1}{2}$ から，$\angle\mathrm{AOB}=60^\circ$ となる。

同様にして，$\angle\mathrm{BOC}=\angle\mathrm{COA}=60^\circ$ なので，$\triangle\mathrm{OAB}$, $\triangle\mathrm{OBC}$, $\triangle\mathrm{OCA}$ は正三角形となり，四面体 OABC は正四面体である。

コメント

頂角が 60° の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。

問　題

xyz 空間内の正八面体の頂点 P_1，P_2，…，P_6 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}<0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。　[2001]

解答例

$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1,\ z_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2,\ z_2)$，…，$\mathrm{P}_6(x_6,\ y_6,\ z_6)$ とし，$\vec{v}=(1,\ 0,\ 0)$ とおいても一般性は失われない。

すると，条件より，任意の k，m に対して $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}=x_m-x_k \neq 0$ なので，x_1，x_2，x_3，x_4，x_5，x_6 の間に大小関係が生じ，その中で最大なものを x_k とおくと，k と異なるすべての m に対して，$x_m-x_k<0$ となる。

すなわち，k と異なるすべての m に対して，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}<0$ が成り立つような点 P_k が存在する。

コメント

成分を用いた解を考えました。書き方がやや雑な感じもしますが……。なお，文系に類題が出ています。

問　題

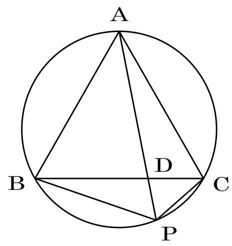
円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。 [2000]

解答例



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=p:(1-p)$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで, 正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても, 一般性は失われないので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=(1-p)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2(1-p)p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$=(1-p)^2+(1-p)p+p^2=1-p+p^2$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DP}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$

$$\mathrm{DP}=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}=\frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$\mathrm{AD}:\mathrm{AP}=\sqrt{1-p+p^2}:\left(\sqrt{1-p+p^2}+\dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$=(1-p+p^2):(1-p+p^2+p-p^2)$$

$$=(1-p+p^2):1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

コメント

方べきの定理が活躍する構図の設問です。まず, 1 問完答ではずみをつける問題です。

問　題

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\cos\dfrac{\pi}{3},\ \sin\dfrac{\pi}{3},\ 0\right)$とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル$\vec{c}$に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$とおく。このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

$$(*)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　不等式(＊)を満たす$(\alpha,\ \beta)$ $(0\leqq\alpha\leqq\pi,\ 0\leqq\beta\leqq\pi)$の範囲を図示せよ。　[2000]

解答例

(1)　$\vec{c}=(p,\ q,\ r)$とおくと，$|\vec{c}|=1$より，$p^2+q^2+r^2=1$

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$から，

$$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}=p,\quad \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q$$

ここで，
$$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=p^2-p\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)+\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2$$
$$=\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{4}q^2=\frac{3}{4}(1-r^2)\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　(1)より，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-\dfrac{3}{4}\leqq 0$

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{3}{4}\leqq 0$$
$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\leqq 0$$
$$4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1\leqq 0$$
$$\{2\cos(\alpha+\beta)-1\}\{2\cos(\alpha-\beta)-1\}\leqq 0$$

ここで，$0\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$，$-\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\pi$に注意して，

(i)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\geqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\leqq 0$のとき

$$\cos(\alpha+\beta)\geqq\frac{1}{2}\cdots\cdots①,\quad \cos(\alpha-\beta)\leqq\frac{1}{2}\cdots\cdots②$$

①より，$0\leqq\alpha+\beta\leqq\dfrac{1}{3}\pi$または$\dfrac{5}{3}\pi\leqq\alpha+\beta\leqq 2\pi$

$$-\alpha\leqq\beta\leqq-\alpha+\frac{1}{3}\pi\text{ または }-\alpha+\frac{5}{3}\pi\leqq\beta\leqq-\alpha+2\pi$$

②より，$-\pi\leqq\alpha-\beta\leqq-\dfrac{1}{3}\pi$または$\dfrac{1}{3}\pi\leqq\alpha-\beta\leqq\pi$

$$\alpha+\frac{1}{3}\pi\leqq\beta\leqq\alpha+\pi\text{ または }\alpha-\pi\leqq\beta\leqq\alpha-\frac{1}{3}\pi$$

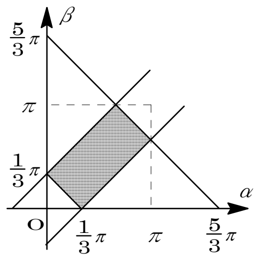
(ii)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\leqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\geqq 0$のとき

$$\cos(\alpha+\beta) \leqq \frac{1}{2} \cdots\cdots ③,\ \ \cos(\alpha-\beta) \geqq \frac{1}{2} \cdots\cdots ④$$

③より $\frac{1}{3}\pi \leqq \alpha+\beta \leqq \frac{5}{3}\pi$，$-\alpha+\frac{1}{3}\pi \leqq \beta \leqq -\alpha+\frac{5}{3}\pi$

④より $-\frac{1}{3}\pi \leqq \alpha-\beta \leqq \frac{1}{3}\pi$，$\alpha-\frac{1}{3}\pi \leqq \beta \leqq \alpha+\frac{1}{3}\pi$

(i)(ii)より，点$(\alpha,\ \beta)$ $(0 \leqq \alpha \leqq \pi,\ 0 \leqq \beta \leqq \pi)$の範囲は右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



コメント

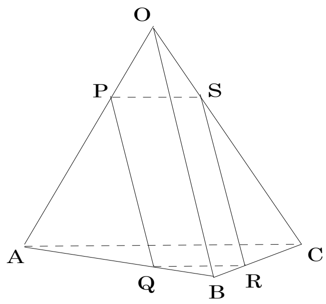
(2)は，もとの設定を無視して不等式を変形していくと，結論が見えてきます。

問　題

四面体 OABC の辺 OA 上に点 P, 辺 AB 上に点 Q, 辺 BC 上に点 R, 辺 CO 上に点 S をとる。これらの 4 点をこの順序で結んで得られる図形が平行四辺形となるとき, この平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線の交点は 2 つの線分 AC と OB のそれぞれの中点を結ぶ線分上にあることを示せ。 [1998]

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とする。



$0<p<1$, $0<q<1$, $0<r<1$, $0<s<1$ として,

$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\vec{a}+(1-q)\vec{b}$, $\overrightarrow{\mathrm{OR}}=(1-r)\vec{b}+r\vec{c}$,

$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\vec{c}$ とおく。

ここで, 四角形 PQRS が平行四辺形より, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{SR}}$

$$(q-p)\vec{a}+(1-q)\vec{b}=(1-r)\vec{b}+(r-s)\vec{c}$$

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ が 1 次独立より

$$q-p=0 \text{ かつ } 1-q=1-r \text{ かつ } r-s=0$$

よって, $p=q=r=s$ ………①

このとき平行四辺形 PQRS の 2 つの対角線の交点を T とすると, T は PR の中点より, ①を用いて,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{2}=\frac{p\vec{a}+(1-p)\vec{b}+p\vec{c}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

AC, OB の中点をそれぞれ M, N とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}=\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2},\ \overrightarrow{\mathrm{ON}}=\frac{\vec{b}}{2}\ \cdots\cdots\cdots ③$$

②③より,

$$\overrightarrow{\mathrm{OT}}=p\cdot\frac{\vec{a}+\vec{c}}{2}+(1-p)\cdot\frac{\vec{b}}{2}=p\overrightarrow{\mathrm{OM}}+(1-p)\overrightarrow{\mathrm{ON}}$$

$0<p<1$ から T は線分 MN 上にある。

コメント

証明の方針に迷いが生じることはない頻出問題の 1 つです。完答が要求される設問です。

問　題

$p,\ q$ を自然数，α，β を，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ を満たす p,q の組 $(p,\ q)$ をすべて求めよ。　[2017]

解答例

自然数 p,q に対して，条件より，

$$\tan\alpha=\frac{1}{p}\cdots\cdots\cdots①,\ \ \tan\beta=\frac{1}{q}\cdots\cdots\cdots②,\ \ \tan(\alpha+2\beta)=2\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$q=1$ のとき

②より，$\tan\beta=1$ から，n を整数として，$\beta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ となり，①より，

$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p$$

すると，③より $p=-2$ となり，不適である。

(ii)　$q\geqq 2$ のとき

②から，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}}=\dfrac{2q}{q^2-1}$ となり，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}\right),\ \ 2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$$

$q\geqq 2$ のとき $q^2-q-1=q(q-1)-1>0$ から，$p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\cdots\cdots\cdots④$

ここで，p は自然数より，④から $\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq 1$ となり，

$$q^2+4q-1\geqq 2(q^2-q-1),\ \ q^2-6q-1\leqq 0$$

これより，$3-\sqrt{10}\leqq q\leqq 3+\sqrt{10}$ となり，$3<\sqrt{10}<4$ から $q\geqq 7$ のときは自然数 p は存在しない。そこで，以下，$q=2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ の場合について調べる。

(a)　$q=2$ のとき　④より，$p=\dfrac{4+8-1}{2(4-2-1)}=\dfrac{11}{2}$ となり不適である。

(b)　$q=3$ のとき　④より，$p=\dfrac{9+12-1}{2(9-3-1)}=2$ となり適する。

(c)　$q=4$ のとき　④より，$p=\dfrac{16+16-1}{2(16-4-1)}=\dfrac{31}{22}$ となり不適である。

(d)　$q=5$ のとき　④より，$p=\dfrac{25+20-1}{2(25-5-1)}=\dfrac{22}{19}$ となり不適である。

(e)　$q=6$ のとき　④より，$p=\dfrac{36+24-1}{2(36-6-1)}=\dfrac{59}{58}$ となり不適である。

(a)〜(e)より，条件を満たす p,q の組は，$(p,\ q)=(2,\ 3)$ だけである。

コメント

三角関数を題材にした整数問題です。なお，$q=1$ のときは，$\tan 2\beta$ が定義できないので別扱いとなっています。

問　題

素数 p,q を用いて，p^q+q^p と表される素数をすべて求めよ。　[2016]

解答例

素数 p,q に対して，$n=p^q+q^p$ とおく。ここで, n が素数である p,q の条件を求めるとき，対称性から $p\leqq q$ としても一般性は失われない。

まず, p が 3 以上のときは，素数 p, q はともに奇数になり，p^q，q^p もともに奇数である。よって, n は偶数となり素数ではない。

これより，$p=2$ となり，$n=2^q+q^2$ と表される。

さらに，$q=2$ のときは，$n=2^2+2^2=8$ となり, n は素数ではない。

また，$q=3$ のときは，$n=2^3+3^2=17$ となり, n は素数となる。

さて, q が 5 以上の素数のとき, 2 の倍数でもなく, かつ 3 の倍数でもないことに着目すると, k を自然数として，$q=6k\pm1$ と表せる。

(i)　$q=6k+1$ のとき

$$n=2^{6k+1}+(6k+1)^2=2\cdot 64^k+36k^2+12k+1$$

ここで，N_1 を整数とすると，$64^k=(3\cdot 21+1)^k=3N_1+1$ となるので,

$$n=2(3N_1+1)+36k^2+12k+1=3(2N_1+12k^2+4k+1)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(ii)　$q=6k-1$ のとき

$$n=2^{6k-1}+(6k-1)^2=32\cdot 64^{k-1}+36k^2-12k+1$$

ここで，N_2 を整数とすると，$64^{k-1}=(3\cdot 21+1)^{k-1}=3N_2+1$ となるので,

$$n=32(3N_2+1)+36k^2-12k+1=3(32N_2+12k^2-4k+11)$$

よって, n は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)(ii)より, q が 5 以上の素数のとき, n は素数にならない。

以上より，p^q+q^p と表される素数は 17 だけである。

コメント

演習しておきたい素数がらみの整数問題です。まず, 2 以外の素数は奇数という頻出事項でふるいにかけて p の値を決め，次に q の値を 2, 3, 5, 7, 11 として n の値を計算すると, 5 以上では 3 の倍数であることがわかります。ただ, q が奇数ということだけでは，$q=9$ で n が素数となることから考え直し，その結果，q を 6 で割った余りで分類とした解答例となったわけです。なお，二項展開を用いる箇所は，省略気味に記しています。

問　題

自然数 a, b はどちらも 3 で割り切れないが，a^3+b^3 は 81 で割り切れる。このような a, b の組 $(a,\ b)$ のうち，a^2+b^2 の値を最小にするものと，そのときの a^2+b^2 の値を求めよ。 [2014]

解答例

まず，自然数 a, b がどちらも 3 で割り切れないとき，a, b を 3 で割った余りと，a^3+b^3 を 3 で割った余りとの関係は，右表のようになる。

a \ b	1	2
1	2	0
2	0	1

すると，a^3+b^3 が 81 で割り切れるためには，3 で割った余りについて，a, b の一方が 1，他方が 2 であることが必要となる。

そこで，a, b に関する対称性より，$a=3k+1$ $(k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$，$b=3l-1$ $(l=1,\ 2,\ \cdots)$ の場合を考えると，

$$\begin{aligned} a^3+b^3 &= (a+b)(a^2-ab+b^2) \\ &= (3k+1+3l-1)\{(3k+1)^2-(3k+1)(3l-1)+(3l-1)^2\} \\ &= 9(k+l)\{3(k^2-kl+l^2+k-l)+1\} \end{aligned}$$

これより，a^3+b^3 が 81 で割り切れる条件は，$3(k^2-kl+l^2+k-l)+1$ が 3 の倍数でないことより，$k+l$ が 9 の倍数となることである。すなわち，$k\geqq 0$，$l\geqq 1$ から $k+l\geqq 1$ となり，$k+l=9,\ 18,\ 27,\ \cdots$ である。

(i)　$k+l=9$ のとき

この場合をまとめると，右表のようになり，$(a,\ b)$ の組で a^2+b^2 の値が最小になるのは，$a+b=3\times 9=27$ から，

k	0	1	2	3	4	5	6	7	8
l	9	8	7	6	5	4	3	2	1
a	1	4	7	10	13	16	19	22	25
b	26	23	20	17	14	11	8	5	2

$$a^2+b^2=a^2+(27-a)^2=2a^2-54a+27^2=2\left(a-\frac{27}{2}\right)^2+\frac{27^2}{2}$$

よって，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のとき，a^2+b^2 は最小値 $13^2+14^2=365$ をとる。

(ii)　$k+l\geqq 18$ のとき

この場合は $a+b\geqq 3\times 18=54$ から，(i)と同様に考えると，a^2+b^2 の値が最小になるのは $a=b=27$ のときであるが，この値はともに 3 で割り切れるので，

$$a^2+b^2>27^2+27^2>365$$

(i)(ii)より，a^2+b^2 が最小となるのは，$(a,\ b)=(13,\ 14)$ のときである。

したがって，対称性を考え合わせると，$(a,\ b)=(13,\ 14)$，$(14,\ 13)$ において，a^2+b^2 は最小値 365 をとる。

コメント

試行錯誤が必要とされる京大らしい整数問題です。まず，3 で割った余りに注目して，絞り込みを行っています。ただ，後半は ab 平面をイメージした解答例のつもりですが，アバウトに記してしまいたいという誘惑に負けそうになっています。

問　題

N を 2 以上の自然数とし，a_n $(n=1,\ 2,\ \cdots)$ を次の性質(i), (ii)を満たす数列とする。

(i)　$a_1 = 2^N - 3$

(ii)　$n=1,\ 2,\ \cdots$ に対して，a_n が偶数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{2}$，a_n が奇数のとき $a_{n+1} = \dfrac{a_n - 1}{2}$

このとき，どのような自然数 M に対しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$ が成り立つことを示せ。　[2013]

解答例

$N \geqq 2$ より，$a_1 = 2^N - 3$ は奇数なので，$a_2 = \dfrac{a_1 - 1}{2} = \dfrac{2^N - 3 - 1}{2} = 2^{N-1} - 2$

a_2 は偶数となり，$a_3 = \dfrac{a_2}{2} = \dfrac{2^{N-1} - 2}{2} = 2^{N-2} - 1$

すると，$N=2$ のとき $a_3 = 0$ から a_3 は偶数となり，$a_4 = \dfrac{a_3}{2} = 0$，また $N \geqq 3$ のときは a_3 は奇数となり，$a_4 = \dfrac{a_3 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-2} - 1 - 1}{2} = 2^{N-3} - 1$

さらに，$2 \leqq N \leqq 3$ のとき $a_4 = 0$ から a_4 は偶数となり，$a_5 = \dfrac{a_4}{2} = 0$，また $N \geqq 4$ のときは a_4 は奇数となり，$a_5 = \dfrac{a_4 - 1}{2} = \dfrac{2^{N-3} - 1 - 1}{2} = 2^{N-4} - 1$

以上より，$a_1 = 2^N - 3$，$a_2 = 2^{N-1} - 2$ で，$n \geqq 3$ のときは，帰納的に，a_n を以下のようにまとめることができる。

(i)　$n \geqq N+1$ のとき　$a_n = 0$

(ii)　$n \leqq N$ のとき　$a_n = 2^{N-n+1} - 1$

さて，$S_M = \displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n$ とおくと，$N \geqq 3$ のとき，

$$S_M \leqq S_N = (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + \sum_{n=3}^{N} a_n$$
$$= (2^N - 3) + (2^{N-1} - 2) + (2^{N-2} - 1) + (2^{N-3} - 1) + \cdots + (2^1 - 1)$$
$$= \frac{2(2^N - 1)}{2 - 1} - N - 3 = 2^{N+1} - N - 5$$

また，$N=2$ のときは，$a_1 = 2^2 - 3 = 1$，$a_2 = 2^1 - 2 = 0$，$n \geqq 3$ のとき $a_n = 0$ より，

$$S_M = 1 + 0 + 0 + \cdots + 0 = 1 = 2^3 - 2 - 5 = 2^{N+1} - N - 5$$

したがって，どのような自然数 M に対しても，$\displaystyle\sum_{n=1}^{M} a_n \leqq 2^{N+1} - N - 5$ が成立する。

コメント

n が大きくなると a_n は 0 になって，和は変わらないというような大雑把なとらえ方が必要です。ただ，文字がたくさん出るので，詰めの作業は気疲れします。

問　題

n を自然数とし，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とする。このとき a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しないことを示せ。

[2013]

解答例

整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った商を $q_n(x)$，余りを a_nx+b_n とすると，

$$x^n=(x^2-2x-1)q_n(x)+a_nx+b_n\ \cdots\cdots\cdots ①$$

このとき，a_n と b_n は整数であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$ でともに整数である。

(ii)　$n=k$ のとき　a_k と b_k がともに整数であると仮定し，①より，

$$x^k=(x^2-2x-1)q_k(x)+a_kx+b_k$$

$$\begin{aligned}x^{k+1}&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_kx^2+b_kx\\&=(x^2-2x-1)xq_k(x)+a_k(x^2-2x-1)+a_k(2x+1)+b_kx\\&=(x^2-2x-1)\{xq_k(x)+a_k\}+(2a_k+b_k)x+a_k\end{aligned}$$

整式 x^{k+1} を整式 x^2-2x-1 で割った余りは $a_{k+1}x+b_{k+1}$ より，

$$a_{k+1}=2a_k+b_k\ \cdots\cdots\cdots ②,\quad b_{k+1}=a_k\ \cdots\cdots\cdots ③$$

これより，a_{k+1}，b_{k+1} はともに整数である。

(i)(ii)より，a_n と b_n は整数である。

次に，a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しないことを証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=1$，$b_1=0$ で，ともに割り切る素数は存在しない。

(ii)　$n=k$ のとき　a_k と b_k をともに割り切る素数は存在しないと仮定する。

ここで，a_{k+1}，b_{k+1} がともに素数 p で割り切れるとすると，②③より，

$$a_k=b_{k+1},\quad b_k=a_{k+1}-2a_k=a_{k+1}-2b_{k+1}$$

これより，a_k，b_k も素数 p で割り切れ，仮定に反する。

よって，a_{k+1} と b_{k+1} をともに割り切る素数は存在しない。

(i)(ii)より，a_n と b_n をともに割り切る素数は存在しない。

以上より，整式 x^n を整式 x^2-2x-1 で割った余りを $ax+b$ とするとき，a と b は整数であり，さらにそれらをともに割り切る素数は存在しない。

コメント

見かけは，本年の文系 2 番の類題ですが，内容的には 2002 年の東大の文理共通の 2 番の類題です。誘導はありましたが……。

問　題

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が無理数であることを証明せよ。

(2)　$P(x)$ は有理数を係数とする x の多項式で，$P(\sqrt[3]{2})=0$ を満たしているとする。このとき $P(x)$ は x^3-2 で割り切れることを証明せよ。　[2012]

解答例

(1)　$\sqrt[3]{2}$ が有理数であると仮定すると, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt[3]{2}=\frac{q}{p},\ q^3=2p^3 \cdots\cdots\cdots①$$

すると, q は 2 の倍数となり, k を自然数として，$q=2k \cdots\cdots\cdots②$

②を①に代入すると，$8k^3=2p^3$，$p^3=4k^3$

すると, p も 2 の倍数となり, p, q が互いに素であることに反する。

よって，$\sqrt[3]{2}$ が有理数でない, すなわち無理数である。

(2)　有理数を係数とする多項式 $P(x)$ を，x^3-2 で割った商を $Q(x)$ とし，余りを ax^2+bx+c（a, b, c は有理数）とおくと,

$$P(x)=(x^3-2)Q(x)+ax^2+bx+c \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$\alpha=\sqrt[3]{2}$ とすると，条件より $P(\alpha)=0$ なので，$a\alpha^2+b\alpha+c=0 \cdots\cdots\cdots④$

次に，x^3-2 を ax^2+bx+c で割ると，$a\neq 0$ のとき,

$$x^3-2=(ax^2+bx+c)\Big(\frac{1}{a}x-\frac{b}{a^2}\Big)+\Big(-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}\Big)x+\Big(-2+\frac{bc}{a^2}\Big) \cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤に $x=\alpha$ を代入すると，④より，$\Big(-\dfrac{c}{a}+\dfrac{b^2}{a^2}\Big)\alpha+\Big(-2+\dfrac{bc}{a^2}\Big)=0$

a, b, c は有理数であり, (1)から α は無理数なので,

$$-\frac{c}{a}+\frac{b^2}{a^2}=0 \cdots\cdots\cdots⑥,\ -2+\frac{bc}{a^2}=0 \cdots\cdots\cdots⑦$$

⑥より，$c=\dfrac{b^2}{a}$ となり，⑦に代入すると，$\Big(\dfrac{b}{a}\Big)^3=2$ から，$\dfrac{b}{a}=\sqrt[3]{2}$

ところが, 左辺が有理数, 右辺が無理数なので, 成立しない。

よって，$a=0 \cdots\cdots⑧$である。

すると，④より $b\alpha+c=0$ となり, b, c は有理数，α は無理数なので,

$$b=c=0 \cdots\cdots⑨$$

⑧⑨を③に代入すると，$P(x)=(x^3-2)Q(x)$

したがって，$P(x)$ は x^3-2 で割り切れる。

コメント

(1)は有名問題。(2)はこの結論を利用するのですが，一筋縄ではいきません。

問　題

n は 2 以上の整数であり，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ であるとき，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)$$

が成立することを示せ。　[2011]

解答例

$n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ に対して，不等式

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_n)>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_n}{2^{n-1}}\right)\cdots\cdots\cdots(*)$$

が成り立つことを，以下，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=2$ のとき　$\dfrac{1}{2}<a_1<1$，$\dfrac{1}{2}<a_2<1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}\right)=a_1a_2-\frac{a_2}{2}=a_2\left(a_1-\frac{1}{2}\right)>0$$

よって，不等式(＊)は成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$\dfrac{1}{2}<a_j<1$　$(j=1,\ 2,\ \cdots,\ k)$ に対して，

不等式 $(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)>1-\left(a_1+\dfrac{a_2}{2}+\cdots+\dfrac{a_k}{2^{k-1}}\right)$ の成立を仮定する。

さて，$\dfrac{1}{2}<a_{k+1}<1$ に対して，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$>\left\{1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)\right\}(1-a_{k+1})-1+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

$$=-a_{k+1}+\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}\right)a_{k+1}+\frac{a_{k+1}}{2^k}$$

$$=\left(-1+a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}>\left(-1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^k}+\frac{1}{2^k}\right)a_{k+1}$$

ここで，$-1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2^2}+\cdots+\dfrac{1}{2^k}+\dfrac{1}{2^k}=-1+\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^k}{1-\frac{1}{2}}+\dfrac{1}{2^k}=0$ より，

$$(1-a_1)(1-a_2)\cdots(1-a_k)(1-a_{k+1})>1-\left(a_1+\frac{a_2}{2}+\cdots+\frac{a_k}{2^{k-1}}+\frac{a_{k+1}}{2^k}\right)$$

(i)(ii)より, $n\geqq 2$ のとき，$\dfrac{1}{2}<a_j<1$ に対して，不等式(＊)が成立する。

コメント

数学的帰納法による不等式の証明問題です。予想よりはるかにスッキリ示せます。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　n を正の整数，$a=2^n$ とする。3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを示せ。

(2)　m を正の偶数とする。3^m-1 が 2^m で割り切れるならば $m=2$ または $m=4$ であることを示せ。　[2010]

解答例

(1)　$a=2^n$ とするとき，3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れないことを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a=2$ より $3^a-1=8$ となり，2^{1+2} では割り切れるが 2^{1+3} では割り切れない。

(ii)　$n=k$ のとき

$a=2^k$ とするとき，3^a-1 は 2^{k+2} で割り切れるが 2^{k+3} では割り切れない，すなわち l を奇数として，$3^{2^k}-1=l\cdot 2^{k+2}$ と仮定する。このとき，

$$3^{2^{k+1}}-1=3^{2^k\cdot 2}-1=(3^{2^k})^2-1=(3^{2^k}-1)(3^{2^k}+1)$$
$$=l\cdot 2^{k+2}(l\cdot 2^{k+2}+2)=l\cdot 2^{k+3}(l\cdot 2^{k+1}+1)$$

ここで，l および $l\cdot 2^{k+1}+1$ はともに奇数なので，$3^{2^{k+1}}-1$ は 2^{k+3} で割り切れるが 2^{k+4} では割り切れない。

(i)(ii)より，$3^{2^n}-1$ は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。

(2)　m は正の偶数より, L を正の奇数として，$m=L\cdot 2^n=L\cdot a$ とおくことができる。

$$3^m-1=3^{L\cdot a}-1=(3^a)^L-1=(3^a-1)\{(3^a)^{L-1}+(3^a)^{L-2}+\cdots+3^a+1\}$$

ここで，(1)より，3^a-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。さらに，3^a は奇数であるので, L 項の奇数の和 $(3^a)^{L-1}+(3^a)^{L-2}+\cdots+3^a+1$ も奇数となることを考え合わせると，3^m-1 は 2^{n+2} で割り切れるが 2^{n+3} では割り切れない。

よって, M を奇数として，$3^m-1=M\cdot 2^{n+2}$ と表すことができる。

さて，条件より，3^m-1 は 2^m で割り切れるので，

$$n+2\geqq m=L\cdot 2^n,\ \ L\leqq\frac{n+2}{2^n}\cdots\cdots\cdots(*)$$

そこで，$f(n)=\dfrac{n+2}{2^n}$ とおくと，$n\geqq 3$ で $f(n)<1$ であり, $(*)$を満たす正の奇数 L は存在しない。また，$f(1)=\dfrac{3}{2}$，$f(2)=1$ から，$(*)$を満たす $(L,\ n)$ の組は，$(L,\ n)=(1,\ 1)$，$(1,\ 2)$ のみとなる。

このとき m の値は，それぞれ $m=1\cdot 2^1=2$，$m=1\cdot 2^2=4$ である。

コメント

正の整数を 2 で割っていくと，その商がいつかは, 1 も含めて，奇数となるということを利用した解法です。難問なので，本問だけが誘導形式になっています。なお, $f(n)$ の値については, 1 次関数と指数関数のグラフを比較して結論を導いています。

問　題

a と b を互いに素，すなわち 1 以外の公約数をもたない正の整数とし，さらに a は奇数とする。正の整数 n に対して整数 a_n，b_n を

$$(a+b\sqrt{2})^n = a_n + b_n\sqrt{2}$$

を満たすように定めるとき，次の(1)，(2)を示せ。ただし $\sqrt{2}$ が無理数であることは証明なしに用いてよい。

(1)　a_2 は奇数であり，a_2 と b_2 は互いに素である。

(2)　すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である。　[2009]

解答例

(1)　条件より，$a_2 + b_2\sqrt{2} = (a+b\sqrt{2})^2 = a^2 + 2b^2 + 2ab\sqrt{2}$ となり，

$$a_2 = a^2 + 2b^2 \cdots\cdots\cdots①,\quad b_2 = 2ab \cdots\cdots\cdots②$$

a は奇数から a^2 も奇数となり，①より a_2 は奇数である。

ここで，a_2 と b_2 は互いに素でないと仮定すると，a_2 と b_2 はともに 3 以上の素因数 g をもつことになり，①②より，j, l を整数として，

$$a^2 + 2b^2 = gj \cdots\cdots\cdots③,\quad 2ab = gl \cdots\cdots\cdots④$$

③より $2a^4 + 4a^2b^2 = 2a^2gj$，④より $4a^2b^2 = g^2l^2$ となり，

$$2a^4 + g^2l^2 = 2a^2gj,\quad 2a^4 = g(2a^2j - gl^2)$$

g は 3 以上の素数より，a^4 は g を約数にもち，すなわち a は g を約数にもつ。

また，同様にして，③より $4a^2b^2 + 8b^4 = 4b^2gj$ となり，

$$g^2l^2 + 8b^4 = 4b^2gj,\quad 8b^4 = g(4b^2j - gl^2)$$

g は 3 以上の素数より，b^4 は g を約数にもち，すなわち b は g を約数にもつ。

これは，a と b が互いに素であるという条件に反する。

したがって，a_2 と b_2 は互いに素である。

(2)　条件より，$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (a+b\sqrt{2})^{n+1} = (a+b\sqrt{2})(a_n + b_n\sqrt{2})$ なので，

$$a_{n+1} + b_{n+1}\sqrt{2} = (aa_n + 2bb_n) + (ba_n + ab_n)\sqrt{2}$$

$$a_{n+1} = aa_n + 2bb_n \cdots\cdots\cdots⑤,\quad b_{n+1} = ba_n + ab_n \cdots\cdots\cdots⑥$$

以下，すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

$a_1 = a$，$b_1 = b$ から，明らかに成立している。

(ii)　$n=k$ のとき

a_k は奇数であり，a_k と b_k は互いに素であると仮定する。

まず，⑤より $a_{k+1} = aa_k + 2bb_k$ となり，a は奇数から a_{k+1} も奇数である。

ここで，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素でないとすると，a_{k+1} と b_{k+1} はともに 3 以上の素因数 g をもつことになり，⑤⑥より，j_k，l_k を整数として，

$$aa_k + 2bb_k = gj_k \cdots\cdots\cdots ⑦,\quad ba_k + ab_k = gl_k \cdots\cdots\cdots ⑧$$

⑦⑧より，$(a^2-2b^2)a_k = g(aj_k - 2bl_k)$，$(a^2-2b^2)b_k = g(al_k - bj_k)$

a_k と b_k は互いに素であることから，a^2-2b^2 は 3 以上の素因数 g をもつ。

さて，⑤⑥より，$a_{k+1} - 2aa_k + (a^2-2b^2)a_{k-1} = 0$

$$2aa_k = a_{k+1} - (a^2-2b^2)a_{k-1} \cdots\cdots\cdots ⑨$$

同様に，⑤⑥より，$b_{k+1} - 2ab_k + (a^2-2b^2)b_{k-1} = 0$

$$2ab_k = b_{k+1} - (a^2-2b^2)b_{k-1} \cdots\cdots\cdots ⑩$$

すると，a_{k+1}，b_{k+1}，a^2-2b^2 は 3 以上の素因数 g をもつので，⑨⑩から，$2aa_k$，$2ab_k$ は素因数 g をもつ。さらに，a_k と b_k は互いに素なので, a は素因数 g をもつ。

そこで，a^2-2b^2 は 3 以上の素因数 g をもつことから, b も素因数 g をもつことになり, a と b が互いに素であるという条件に反する。

したがって，a_{k+1} と b_{k+1} は互いに素である。

(i)(ii)より，すべての n に対して，a_n は奇数であり，a_n と b_n は互いに素である。

コメント

(2)は(1)と同じように進めていますが，後半が難です。連立漸化式と隣接 3 項間型の漸化式の関係については「ピンポイントレクチャー」で掠る程度に触れています。

問　題

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。 [2007]

解答例

まず, $a+b+c+d=0$ ……①, $ad-bc+p=0$ ……②より,

$$a(-a-b-c)-bc+p=0,\ a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して, $(a+b)(a+c)=p$ ………③

ここで, $a \geqq b \geqq c \geqq d$ ……④より, $a+b \geqq a+c$

①④より, $0=a+b+c+d \leqq a+b+a+b=2(a+b)$ から, $a+b \geqq 0$

よって, p は素数なので, ③から,

$$a+b=p \text{ ………⑤},\ a+c=1 \text{ ………⑥}$$

⑤より $b=p-a$ ……⑤′, ⑥より $c=1-a$ ……⑥′

①から, $d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ………⑦

⑤′ ⑥′ ⑦を④に代入すると, $a \geqq p-a \geqq 1-a \geqq -p-1+a$ となり,

$$a \geqq p-a \text{ ………⑧},\ p-a \geqq 1-a \text{ ………⑨},\ 1-a \geqq -p-1+a \text{ ………⑩}$$

⑧より $a \geqq \dfrac{p}{2}$, ⑩より $a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ となり, $\dfrac{p}{2} \leqq a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ ………⑪

また, ⑨は $p \geqq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数, すなわち奇数であることを用いると, ⑪から,

$$a=\frac{p+1}{2}$$

すると, ⑤′ ⑥′ ⑦から,

$$b=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2},\ c=1-\frac{p+1}{2}=\frac{-p+1}{2},\ d=-p-1+\frac{p+1}{2}=\frac{-p-1}{2}$$

コメント

京大らしい味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが, そのポイントは, 2 以外の素数は奇数という事実です。

問　題

2 以上の自然数 n に対し，n と n^2+2 がともに素数になるのは $n=3$ の場合に限ることを示せ。 [2006]

解答例

(i)　$n=2$ のとき

$n^2+2=6$ となり，n^2+2 は素数ではない。

(ii)　$n=3$ のとき

$n^2+2=11$ となり, n と n^2+2 はともに素数である。

(iii)　$n\geqq 5$ のとき

n は素数なので，2 の倍数でなく，しかも 3 の倍数でもないことより，k を自然数として，$n=6k\pm1$ と表すことができる。このとき，

$$n^2+2=(6k\pm1)^2+2=36k^2\pm12k+3=3(12k^2\pm4k+1)$$

すると，$12k^2\pm4k+1$ は整数なので，n^2+2 は 3 の倍数となり，素数ではない。

(i)～(iii)より, n と n^2+2 がともに素数になるのは，$n=3$ の場合のみである。

コメント

まず，$n=2$，3，5，7，11，13 として n^2+2 を計算したところ，n が 5 以上のとき，n^2+2 は 3 の倍数になると推測できました。これを，式を用いて確認した解です。

問　題

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である。 [2005]

解答例

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ より，$10\log_{10} 2 < n(\log_{10} 5 - \log_{10} 4) < 20\log_{10} 2$

$$10\log_{10} 2 < n(1-3\log_{10} 2) < 20\log_{10} 2$$

$1-3\log_{10} 2 > 0$ より，

$$\frac{10\log_{10} 2}{1-3\log_{10} 2} < n < \frac{20\log_{10} 2}{1-3\log_{10} 2} \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$f(x) = \dfrac{x}{1-3x}$，$a = \log_{10} 2$ とおくと，①より，

$$10f(a) < n < 20f(a) \cdots\cdots\cdots ②$$

さて，$f(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3(1-3x)}$ と変形し，条件から $0.301 < a < 0.3011$ なので，

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.903)} < f(a) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1-0.9033)}$$

これより，$3.103 < f(a) < 3.114$ となり，

$$31.03 < 10f(a) < 31.14,\ \ 62.06 < 20f(a) < 62.28$$

②より, n は自然数なので, $32 \leqq n \leqq 62$ となり, n の個数は 31 である。

コメント

数値計算が面倒そうなので，後回しにしたくなる問題です。しかし，その予想は，はずれてしまいました。

問　題

$a^3-b^3=217$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。 [2005]

解答例

$a^3-b^3=217$ より，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=217$

ここで, a, b は整数なので，$a-b$，a^2+ab+b^2 はともに整数である。

さらに，$a^2+ab+b^2=\left(a+\dfrac{b}{2}\right)^2+\dfrac{3}{4}b^2\geqq 0$ より，$a-b$，a^2+ab+b^2 はともに $217=7\times 31$ の正の約数となる。

(i) $a-b=1$，$a^2+ab+b^2=217$ のとき

$a=b+1$ より，$(b+1)^2+(b+1)b+b^2=217$ から,

$$b^2+b-72=0$$

これより，$b=8,\ -9$ となり，$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9)$

(ii) $a-b=7$，$a^2+ab+b^2=31$ のとき

$a=b+7$ より，$(b+7)^2+(b+7)b+b^2=31$ から,

$$b^2+7b+6=0$$

これより，$b=-1,\ -6$ となり，$(a,\ b)=(6,\ -1),\ (1,\ -6)$

(iii) $a-b=31$，$a^2+ab+b^2=7$ のとき

$a=b+31$ より，$(b+31)^2+(b+31)b+b^2=7$ から,

$$b^2+31b+318=0$$

すると，$D=31^2-4\times 318=-311<0$ から, b は虚数となり不適。

(iv) $a-b=217$，$a^2+ab+b^2=1$ のとき

$a=b+217$ より，$(b+217)^2+(b+217)b+b^2=1$ から,

$$b^2+217b+15696=0$$

すると，$D=217^2-4\times 15696=-15695<0$ から, b は虚数となり不適。

(i)～(iv)より，$(a,\ b)=(9,\ 8),\ (-8,\ -9),\ (6,\ -1),\ (1,\ -6)$

コメント

正確な計算だけで結論まで導けます。なお, 217 を 65 に変更すると文系の問題になりますが, 内容は全く同じです。

問　題

正の数からなる数列$\{a_n\}$が次の条件(i), (ii)を満たすとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n} a_k$ を求めよ。

(i)　$a_1 = 1$

(ii)　$\log a_n - \log a_{n-1} = \log(n-1) - \log(n+1)$　$(n \geqq 2)$　[2003]

解答例

条件より，$\log\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \log\dfrac{n-1}{n+1}$ なので，$\dfrac{a_n}{a_{n-1}} = \dfrac{n-1}{n+1}$

$$(n+1)a_n = (n-1)a_{n-1},\quad n(n+1)a_n = (n-1)n\,a_{n-1}$$

よって，$n(n+1)a_n = 1\cdot 2\cdot a_1 = 2$ から，$a_n = \dfrac{2}{n(n+1)}$

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = \sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k(k+1)} = 2\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+1}\right) = 2\left(1 - \frac{1}{n+1}\right) = \frac{2n}{n+1}$$

コメント

昨年より基本的な問題で，すっきり解けます。漸化式の両辺に n をかける変形もよく見かけます。

問　題

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。　[2002]

解答例

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ のとき，$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

まず，$f(x)=0$ の整数解は，定数項 1 の約数 ±1 だけである。

すると，条件より，$f(x)=0$ の整数解は，$x=1$ を重解にもつとき，$x=-1$ を重解にもつとき，$x=\pm1$ を解にもつときのいずれかである。

(i)　$x=1$ を重解にもつとき　$f(1)=f'(1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ 4+3a+2b+c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より $c=-3a-2b-4\cdots\cdots③$，①に代入して，$-2a-b-2=0$，$b=-2a-2$

③より，$c=-3a-2(-2a-2)-4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-(2a+2)x^2+ax+1=(x-1)^2\{x^2+(a+2)x+1\}$ となり，条件より，$x^2+(a+2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a+2)^2-4<0,\ (a+2-2)(a+2+2)<0,\ -4<a<0$$

a は整数なので，$a=-3,\ -2,\ -1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$

(ii)　$x=-1$ を重解にもつとき　$f(-1)=f'(-1)=0$ より，

$$1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ -4+3a-2b+c=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $c=-3a+2b+4\cdots\cdots⑥$，④に代入して，$2a-b-2=0$，$b=2a-2$

⑥より，$c=-3a+2(2a-2)+4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3+(2a-2)x^2+ax+1=(x+1)^2\{x^2+(a-2)x+1\}$ となり，条件より，$x^2+(a-2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a-2)^2-4<0,\ (a-2-2)(a-2+2)<0,\ 0<a<4$$

a は整数なので，$a=3,\ 2,\ 1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

(iii)　$x=\pm1$ を解にもつとき　$f(1)=f(-1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots⑦,\ \ 1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より $a+c=0$，$c=-a\cdots\cdots⑨$，⑦⑨より $b=-2$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1=(x+1)(x-1)(x^2-ax-1)$

ところが，$x^2-ax-1=0$ の判別式 $D=a^2+4>0$ となり，$f(x)=0$ は虚数解をもたない。よって，条件に適さない。

(i)(ii)(iii)より，複号同順として，

$$(a,\ b,\ c) = (\pm 3,\ 4,\ \pm 3),\ (\pm 2,\ 2,\ \pm 2),\ (\pm 1,\ 0,\ \pm 1)$$

コメント

整数解の候補が± 1と 2 つしかないので，ホッとします。

問　題

整数 n に対し $f(n)=\dfrac{n(n-1)}{2}$ とおき，$a_n=i^{f(n)}$ と定める。ただし，i は虚数単位を表す。このとき，$a_{n+k}=a_n$ が任意の整数 n に対して成り立つような正の整数 k をすべて求めよ。　[2001]

解答例

条件より，$a_n=i^{f(n)}=\left(\cos\dfrac{\pi}{2}+i\sin\dfrac{\pi}{2}\right)^{\frac{n(n-1)}{2}}=\cos\dfrac{n(n-1)}{4}\pi+i\sin\dfrac{n(n-1)}{4}\pi$

$$a_{n+k}=\cos\frac{(n+k)(n+k-1)}{4}\pi+i\sin\frac{(n+k)(n+k-1)}{4}\pi$$

$a_{n+k}=a_n$ なので, m を整数として,

$$\frac{(n+k)(n+k-1)}{4}\pi=2m\pi+\frac{n(n-1)}{4}\pi$$

$$(n+k)(n+k-1)=8m+n(n-1)\,,\ \ k(2n+k-1)=8m\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，(*)に $n=0$，$n=1$ を代入すると，$k(k-1)$，$k(k+1)$ がともに 8 の倍数となるが，$k-1$，$k+1$ がともに 8 の倍数となることはないので, k が 8 の倍数である。

逆に k が 8 の倍数であるとき，任意の整数 n に対して(*)は明らかに成立する。

よって，任意の整数 n に対して，ある整数 m が存在する条件は k が 8 の倍数，すなわち，$k=8l$ $(l=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ である。

コメント

式変形の結果，得られた(*)には，とまどってしまいます。このようなときは，必要条件を求め，そのあと十分性を確認するという流れでうまくいくことがよくあります。

問　題

p を 2 以上の整数とする。2 以上の整数 n に対し，次の条件(イ)，(ロ)を満たす複素数の組$(z_1,\ z_2,\ \cdots,\ z_n)$の個数を$a_n$とする。

(イ)　$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n$ に対し，$z_k{}^p=1$ かつ $z_k\neq 1$

(ロ)　$z_1z_2\cdots z_n=1$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　a_3を求めよ。

(2)　a_{n+2}をa_n，a_{n+1}の一方または両方を用いて表せ。

(3)　a_nを求めよ。　[2001]

解答例

(1)　まず，$n=2$ のとき，$1\leqq k_1\leqq p-1,\ 1\leqq k_2\leqq p-1$ として，

$z_1{}^p=1$ かつ $z_1\neq 1$ より，$z_1=\cos\dfrac{2\pi}{p}k_1+i\sin\dfrac{2\pi}{p}k_1$

$z_2{}^p=1$ かつ $z_2\neq 1$ より，$z_2=\cos\dfrac{2\pi}{p}k_2+i\sin\dfrac{2\pi}{p}k_2$

また，$z_1z_2=1$ より l を整数として，$\dfrac{2\pi}{p}k_1+\dfrac{2\pi}{p}k_2=2l\pi$，$k_1+k_2=lp$

$2\leqq k_1+k_2\leqq 2p-2<2p$ より $l=1$ となるので，$k_1+k_2=p$ ………①

すると，①を満たす$(k_1,\ k_2)$は，k_1の値を決めるとk_2の値が 1 つずつ決まることより $p-1$ 組あり，$a_2=p-1$ である。

次に，$n=3$ のとき，同様にして，

$$z_j=\cos\frac{2\pi}{p}k_j+i\sin\frac{2\pi}{p}k_j,\ 1\leqq k_j\leqq p-1\ (j=1,\ 2,\ 3)$$

$z_1z_2z_3=1$ より l を整数として，$k_1+k_2+k_3=lp$ ………②

なお，$3\leqq k_1+k_2+k_3\leqq 3p-3<3p$ より $l\leqq 2$ となる。

すると，②を満たす$(k_1,\ k_2,\ k_3)$は，$k_1+k_2\neq p$ のとき$(k_1,\ k_2)$の値を決めるとk_3の値が 1 つずつ決まることより$(p-1)^2-(p-1)$組あり，

$$a_3=(p-1)^2-(p-1)=(p-1)(p-2)$$

(2)　(1)と同様に設定して，

$$k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}+k_{n+2}=lp\ (l\leqq n+1)\ \text{………③}$$

すると，③を満たす$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n+1},\ k_{n+2})$は，$k_1+k_2+\cdots+k_{n+1}\neq lp$ のとき，$(k_1,\ k_2,\ \cdots,\ k_{n+1})$の値を決めると，$k_{n+2}$の値が 1 つずつ決まることより，

$$a_{n+2}=(p-1)^{n+1}-a_{n+1}$$

(3)　(1)(2)より，$a_2=p-1$，$a_{n+1}=(p-1)^n-a_n\ (n\geqq 2)$

漸化式を変形して，$a_{n+1}-\dfrac{1}{p}(p-1)^{n+1}=-\left\{a_n-\dfrac{1}{p}(p-1)^n\right\}$

$$a_n-\frac{1}{p}(p-1)^n=\left\{a_2-\frac{1}{p}(p-1)^2\right\}(-1)^{n-2}=\left\{p-1-\frac{1}{p}(p-1)^2\right\}(-1)^{n-2}$$

$$=\frac{p-1}{p}(-1)^{n-2}=\frac{p-1}{p}(-1)^n$$

よって，$a_n=\dfrac{1}{p}\left\{(p-1)(-1)^n+(p-1)^n\right\}$

コメント

a_3の値を求めることが(2)の誘導となっています。しかし，この設問からすでにややこしい，本年で一番の難問です。

問　題

$f(x)=x^2+7$ とおく。

(1) n は 3 以上の自然数で，ある自然数 a に対して $f(a)$ は 2^n の倍数になっているとする。このとき $f(a)$ と $f(a+2^{n-1})$ のうち少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数であることを示せ。

(2) 任意の自然数 n に対して $f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在することを示せ。　[1998]

解答例

(1) $f(a)=a^2+7=k\cdot 2^n$（k は自然数）………①とおくと，

$f(a+2^{n-1})=(a+2^{n-1})^2+7=a^2+a\cdot 2^n+2^{2n-2}+7$

①より，$f(a+2^{n-1})=k\cdot 2^n+a\cdot 2^n+2^{2n-2}$ ………②

(i)k が偶数（$k=2l,\ l\geqq 1$）のとき

①より，$f(a)=2l\cdot 2^n=l\cdot 2^{n+1}$ となり，$f(a)$ は 2^{n+1} の倍数となる。

(ii) k が奇数（$k=2l-1,\ l\geqq 1$）のとき

②より，
$$\begin{aligned}f(a+2^{n-1})&=(2l-1)\cdot 2^n+a\cdot 2^n+2^{2n-2}\\&=l\cdot 2^{n+1}+(a-1)\cdot 2^n+2^{n-3}\cdot 2^{n+1}\\&=\left(l+\frac{a-1}{2}+2^{n-3}\right)\cdot 2^{n+1}\end{aligned}$$

ここで，①より a^2 は奇数なので a も奇数となり，$\dfrac{a-1}{2}$ は整数となる。

また条件より，$n\geqq 3$ から $2^{n-3}\geqq 2^0=1$ となる。

すると，$l+\dfrac{a-1}{2}+2^{n-3}$ は整数である。

よって，$f(a+2^{n-1})$ は 2^{n+1} の倍数となる。

(i)(ii)より，$f(a)$ と $f(a+2^{n-1})$ の少なくとも一方は 2^{n+1} の倍数となる。

(2) 題意成立を数学的帰納法によって証明する。

(i) $n=1,\ 2,\ 3$ のとき

$f(a_1)={a_1}^2+7=k_1\cdot 2^1$ とすると，$a_1=1,\ k_1=4$ で成立。

$f(a_2)={a_2}^2+7=k_2\cdot 2^2$ とすると，$a_2=1,\ k_2=2$ で成立。

$f(a_3)={a_3}^2+7=k_3\cdot 2^3$ とすると，$a_3=1,\ k_3=1$ で成立。

(ii) $n=m$ のとき

$f(a_m)={a_m}^2+7=k_m\cdot 2^m$（$k_m$ は自然数）となる自然数 a_m が存在すると仮定。

(1)より，$f(a_m)$ と $f(a_m+2^{m-1})$ の少なくとも一方は 2^{m+1} の倍数となるので，$a_{m+1}=a_m$ または $a_{m+1}=a_m+2^{m-1}$ とすると，題意が成立する。

(i)(ii)より，$f(a_n)$ が 2^n の倍数となるような自然数 a_n が存在する。

コメント

京大特有の整数問題です。(2)の命題には一瞬驚かされますが，(1)の利用という視点で考えれば，n に関する帰納法とすぐにつかむことができます。この点，昨年度の２番の整数問題と比べると，とても扱いやすいという気がします。

問　題

n を自然数とする。n 個の箱すべてに，$\boxed{1}$，$\boxed{2}$，$\boxed{3}$，$\boxed{4}$，$\boxed{5}$ の 5 種類のカードがそれぞれ 1 枚ずつ計 5 枚入っている。各々の箱から 1 枚ずつカードを取り出し，取り出した順に左から並べて n 桁の数 X を作る。このとき，X が 3 で割り切れる確率を求めよ。 [2017]

解答例

数字 1 から 5 を並べてできる n 桁の数 X が 3 で割り切れる確率を p_n，3 で割って 1 余る確率を q_n，3 で割って 2 余る確率を r_n とする。

さて，n 桁の数 X に 1 枚のカード加えて $n+1$ 桁の数を作るとき，この $n+1$ 桁の数が 3 で割り切れるのは，

(i)　X が 3 で割り切れるとき　数字 3 のカードを加える。

(ii)　X が 3 で割って 1 余るとき　数字 2 または 5 のカードを加える。

(iii)　X が 3 で割って 2 余るとき　数字 1 または 4 のカードを加える。

すると，$p_1=\frac{1}{5}$，$q_1=r_1=\frac{2}{5}$ のもとで，

$$p_{n+1}=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}q_n+\frac{2}{5}r_n=\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}(1-p_n)=-\frac{1}{5}p_n+\frac{2}{5}$$

変形すると，$p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{5}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$ となり，

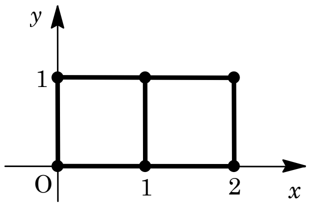
$$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=-\frac{2}{15}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n-1}=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^{n}$$

よって，$p_n=\frac{2}{3}\left(-\frac{1}{5}\right)^n+\frac{1}{3}$ である。

コメント

確率と漸化式についての基本的な問題です。立式も，さほど難しくはありません。

問　題



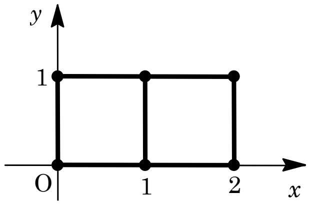
xy 平面上の 6 個の点$(0,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(1,\ 1)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$が図のように長さ 1 の線分で結ばれている。動点 X は，これらの点の上を次の規則に従って 1 秒ごとに移動する。

規則：動点 X は，そのときに位置する点から出る長さ 1 の線分によって結ばれる図の点のいずれかに，等しい確率で移動する。

たとえば，X が$(2,\ 0)$にいるときは，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$のいずれかに$\dfrac{1}{2}$の確率で移動する。また X が$(1,\ 1)$にいるときは，$(0,\ 1)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 1)$のいずれかに$\dfrac{1}{3}$の確率で移動する。

時刻 0 で動点 X が O$=(0,\ 0)$から出発するとき，n 秒後に X の x 座標が 0 である確率を求めよ。ただし n は 0 以上の整数とする。　[2016]

解答例



まず，n 秒後に X の x 座標が 0，1 である確率をそれぞれ p_n，q_n とおくと，X の x 座標が 2 である確率は$1-p_n-q_n$ となる。

ここで，条件より，$p_0=1$，$q_0=0$ で，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n\ \cdots\cdots\cdots①$$

$$q_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{3}q_n+\frac{1}{2}(1-p_n-q_n)\ \cdots\cdots\cdots②$$

②より，$q_{n+1}=-\dfrac{1}{6}q_n+\dfrac{1}{2}$ となり，$q_{n+1}-\dfrac{3}{7}=-\dfrac{1}{6}\left(q_n-\dfrac{3}{7}\right)$から，

$$q_n-\frac{3}{7}=\left(q_0-\frac{3}{7}\right)\left(-\frac{1}{6}\right)^n=-\frac{3}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

よって，$q_n=\dfrac{3}{7}-\dfrac{3}{7}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ となり，①に代入すると，

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}p_n+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\ \cdots\cdots\cdots③$$

③を満たす 1 つの数列を，α，β を定数として，$p_n=\alpha+\beta\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n$ とおくと，

$$\alpha+\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\alpha+\frac{1}{2}\beta\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n$$

すると，$\alpha=\dfrac{1}{2}\alpha+\dfrac{1}{7}$，$-\dfrac{1}{6}\beta=\dfrac{1}{2}\beta-\dfrac{1}{7}$ から，$\alpha=\dfrac{2}{7}$，$\beta=\dfrac{3}{14}$ となり，

$$\frac{2}{7}+\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{2}{7}+\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n+\frac{1}{7}-\frac{1}{7}\left(-\frac{1}{6}\right)^n\ \cdots\cdots\cdots④$$

③−④より，$p_{n+1}-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^{n+1}=\dfrac{1}{2}\left\{p_n-\dfrac{2}{7}-\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n\right\}$となり，

$$p_n-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^n=\left\{p_0-\frac{2}{7}-\frac{3}{14}\left(-\frac{1}{6}\right)^0\right\}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$$

よって，求める確率 p_n は，$p_n=\dfrac{2}{7}+\dfrac{3}{14}\left(-\dfrac{1}{6}\right)^n+\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n+1}$

コメント

確率と漸化式の融合問題です。漸化式を立式する段階は基本的ですが，その解法にはいろいろなスタイルが考えられます。なお，解答例の方法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

2 つの関数を，$f_0(x)=\dfrac{x}{2}$，$f_1(x)=\dfrac{x+1}{2}$ とおく。$x_0=\dfrac{1}{2}$ から始め，各 $n=1,\ 2,\ \cdots$ について，それぞれ確率 $\dfrac{1}{2}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $x_n=f_1(x_{n-1})$ と定める。このとき $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率 P_n を求めよ。 [2015]

解答例

まず，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_n=\dfrac{x_{n-1}}{2}$ または $x_n=\dfrac{x_{n-1}+1}{2}$ から，帰納的に $0<x_n<1$ である。

そこで，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となる確率を Q_n とおくと，条件より $x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率が P_n より，$\dfrac{1}{3}\leqq x_n<\dfrac{2}{3}$ となる確率は P_n-Q_n，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となる確率は $1-P_n$ である。

さて，$0<x_n<\dfrac{1}{3}$ となるのは，$0<x_{n-1}<\dfrac{1}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ または $\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_0(x_{n-1})$ のときより，

$$Q_n=\frac{1}{2}Q_{n-1}+\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1}),\ \ Q_n=\frac{1}{2}P_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ となるのは，$\dfrac{1}{3}\leqq x_{n-1}<\dfrac{2}{3}$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ または $\dfrac{2}{3}\leqq x_n<1$ で $x_n=f_1(x_{n-1})$ のときより，

$$1-P_n=\frac{1}{2}(P_{n-1}-Q_{n-1})+\frac{1}{2}(1-P_{n-1}),\ \ Q_{n-1}=-1+2P_n\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$-1+2P_{n+1}=\dfrac{1}{2}P_{n-1}$，$P_{n+1}=\dfrac{1}{4}P_{n-1}+\dfrac{1}{2}$

$$P_{n+1}-\frac{2}{3}=\frac{1}{4}\left(P_{n-1}-\frac{2}{3}\right)\cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$x_0=\dfrac{1}{2}$ で，$x_1=f_0(x_0)=\dfrac{1}{4}$ または $x_1=f_1(x_0)=\dfrac{3}{4}$ から，$P_0=1$，$P_1=\dfrac{1}{2}$

(i)　$n=2k\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k}-\dfrac{2}{3}=\left(P_0-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

(ii)　$n=2k+1\ (k=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ のとき

③より，$P_{2k+1}-\dfrac{2}{3}=\left(P_1-\dfrac{2}{3}\right)\left(\dfrac{1}{4}\right)^k=-\dfrac{1}{6}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k}$，$P_{2k+1}=\dfrac{2}{3}-\dfrac{1}{3}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2k+1}$ となり，

$$P_n=\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\left(\frac{1}{2}\right)^n$$

コメント

与えられた関数は，数直線上で，点 x と原点との中点または点 x と点 1 との中点を出力するという意味をもちます。このことに着目して，初めは樹形図を書いたり，さらに 2^n を 3 で割った余りを考えたりして，大雑把に結論は出ました。ただ，突っ込みどころが多すぎたため，考えを改め，状態を 3 つに分けて確率漸化式の出番となったわけです。

問　題

2 つの粒子が時刻 0 において△ABC の頂点 A に位置している。これらの粒子は独立に運動し，それぞれ 1 秒ごとに隣の頂点に等確率で移動していくとする。たとえば，ある時刻で点 C にいる粒子は，その 1 秒後には点 A または点 B にそれぞれ $\frac{1}{2}$ の確率で移動する。この 2 つの粒子が，時刻 0 の n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ を求めよ。

[2014]

解答例

頂点 A から移動し始めた粒子が，n 秒後に頂点 A にいる確率を a_n とおく。そして，隣の頂点への移動確率は $\frac{1}{2}$ ずつなので，n 秒後に頂点 B, C にいる確率は，対称性から，ともに $\frac{1}{2}(1-a_n)$ となり，

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-a_n)+\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}(1-a_n),\quad a_{n+1}=-\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}$$

すると，$a_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(a_n-\frac{1}{3}\right)$ となり，$a_1=0$ から，

$$a_n-\frac{1}{3}=\left(a_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1},\quad a_n=\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}$$

さて，2 つの粒子が，頂点 A から独立に移動していくとき，n 秒後に同じ点にいる確率 $p(n)$ は，

$$\begin{aligned}p(n)&=a_n^{\,2}+\left\{\frac{1}{2}(1-a_n)\right\}^2+\left\{\frac{1}{2}(1-a_n)\right\}^2=\frac{3}{2}a_n^{\,2}-a_n+\frac{1}{2}\\&=\frac{3}{2}\cdot\frac{1}{9}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}^2-\frac{1}{3}\left\{1-\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}\right\}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{6}\left\{1-2\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\right\}-\frac{1}{3}+\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}+\frac{1}{2}\\&=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\end{aligned}$$

コメント

確率と漸化式の融合問題です。漸化式は 1 つの粒子の動きに注目して立て，その結果を用いて $p(n)$ を導いています。

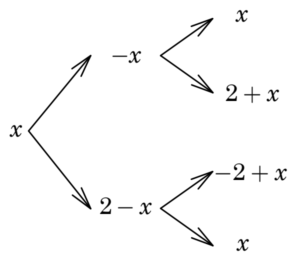
問　題

投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1)　石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2)　石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n-2$ の点にある確率を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　座標 x の点に石があるとき，硬貨を投げて表が出れば点 $-x$ に，裏が出れば点 $2-x$ に移動する。

すると，2 回投げたとき，石の座標は右図のように移動するので，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(2)　(1)より，2 回投げたとき，$x\to 2+x$ と 2 だけ移動する確率は $\frac{1}{4}$，$x\to x$ と移動しない確率は $\frac{1}{2}$，$x\to -2+x$ と -2 だけ移動する確率は $\frac{1}{4}$ である。

さて，$2n$ 回硬貨を投げたとき，原点にある石が座標 $2n-2$ の点に移動する場合，$x\to 2+x$ の移動が a 回，$x\to x$ の移動が b 回，$x\to -2+x$ の移動が c 回とすると，

$$a+b+c=n\cdots\cdots\cdots①,\ \ 2a-2c=2n-2\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$b+2c=1$ となり，a, b, c は 0 以上の整数より，$b=1$，$c=0$ となる。

よって，$(a,\ b,\ c)=(n-1,\ 1,\ 0)$ となり，求める確率は，

$${}_n\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{2}=\frac{n}{2}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

コメント

文系の類題ですが，(2)も，文系ほどではないにせよ，あっさり解けてしまいます。

問　題

さいころを n 回投げて出た目を順に X_1，X_2，…，X_n とする。さらに

$$Y_1 = X_1,\ Y_k = X_k + \frac{1}{Y_{k-1}}\quad (k = 2,\ \cdots,\ n)$$

によって Y_1，Y_2，…，Y_n を定める。$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ となる確率 p_n を求めよ。

[2012]

解答例

まず，$Y_1 = X_1$，$Y_n = X_n + \dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，帰納的に $Y_n \geqq 1$ である。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ である条件は，$\dfrac{5}{4} < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2} < \dfrac{3}{2}$，$\dfrac{5}{2} < 1+\sqrt{3} < 3$ に注目すると，$X_n = 1$ または $X_n = 2$ の場合についてだけ考えればよい。

(i)　$X_n = 1$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 1 + \dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$ から，右側の不等式は成立し，$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2} \leqq \dfrac{1}{Y_{n-1}}$ から，

$$Y_{n-1} \leqq \frac{2}{-1+\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$$

(ii)　$X_n = 2$ のとき

$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq 2 + \dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq 1+\sqrt{3}$ から，左側の不等式は成立し，$\dfrac{1}{Y_{n-1}} \leqq -1+\sqrt{3}$ から，

$$Y_{n-1} \geqq \frac{1}{-1+\sqrt{3}} = \frac{1+\sqrt{3}}{2}$$

(i)(ii)より，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_{n-1} \leqq 1+\sqrt{3}$ では $X_n = 1$ または $X_n = 2$，$Y_{n-1} < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$ では $X_n = 1$ だけ，$Y_{n-1} > 1+\sqrt{3}$ では $X_n = 2$ だけである。

そこで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_n \leqq 1+\sqrt{3}$，$Y_n < \dfrac{1+\sqrt{3}}{2}$，$Y_n > 1+\sqrt{3}$ となる確率を，それぞれ p_n，q_n，r_n とおくと，

$$p_n = \frac{2}{6}p_{n-1} + \frac{1}{6}q_{n-1} + \frac{1}{6}r_{n-1} = \frac{1}{3}p_{n-1} + \frac{1}{6}(q_{n-1} + r_{n-1})$$

$p_n + q_n + r_n = 1$ から，$p_n = \dfrac{1}{3}p_{n-1} + \dfrac{1}{6}(1 - p_{n-1}) = \dfrac{1}{6}p_{n-1} + \dfrac{1}{6}$ となり，

$$p_n - \frac{1}{5} = \frac{1}{6}\left(p_{n-1} - \frac{1}{5}\right) = \left(p_1 - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

ここで，$\dfrac{1+\sqrt{3}}{2} \leqq Y_1 \leqq 1+\sqrt{3}$ となるのは，$Y_1 = X_1 = 2$ から $p_1 = \dfrac{1}{6}$ であり，

$$p_n = \frac{1}{5} + \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{30}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1} = \frac{1}{5} - \frac{1}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n}$$

コメント

上の解答例には記していませんが，最初，題意をつかむために実験をしています。もつれた糸を解きほぐすように計算をすすめたところ，予想を超える簡明な結論が導けました。おもしろい問題です。

問　題

箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を Y とする。$X=Y$ である確率を求めよ。

[2011]

解答例

1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードから，2 枚のカードを同時に選ぶとき，小さい方の数が k であるのは，大きい方の数が $k+1$ 以上のときなので，$9-k$ 通りの場合がある。

これより，$1\leqq k\leqq 8$ のとき，$X=Y=k$ である確率 $P(k)$ は，

$$P(k)=\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{(9-k)^2}{36^2}$$

よって，$X=Y$ である確率は，

$$\sum_{k=1}^{8}P(k)=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=\frac{17}{108}$$

コメント

文系と共通の確率の基本問題です。

問　題

n 枚のカードを積んだ山があり，各カードには上から順番に 1 から n まで番号がつけられている。ただし $n \geqq 2$ とする。このカードの山に対して次の試行を繰り返す。1 回の試行では，一番上のカードを取り，山の一番上にもどすか，あるいはいずれかのカードの下に入れるという操作を行う。これら n 通りの操作はすべて同じ確率であるとする。n 回の試行を終えたとき，最初一番下にあったカード(番号 n)が山の一番上にきている確率を求めよ。　[2009]

解答例

n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にあるためには，$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上または上から二番目でなくていはいけない。

(i)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが一番上にあるとき

$n-1$ 回目までの試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどし，n 回目の試行では，番号 n のカードを山の一番上にもどすことより，その確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}\cdot\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n^n}$$

(ii)　$n-1$ 回の試行後，番号 n のカードが上から二番目にあるとき

$1 \leqq k \leqq n-1$ として，k 回目の試行で，一番上のカードを番号 n のカードより上にもどし，それ以外の試行では，一番上のカードを番号 n のカードより下にもどす。このときの確率は，

$$\frac{1}{n}\cdot\frac{2}{n}\cdots\cdots\frac{k-1}{n}\cdot\frac{n-k}{n}\cdot\frac{k}{n}\cdots\cdots\frac{n-1}{n}=\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}$$

(i)(ii)より，n 回の試行後，番号 n のカードが山の一番上にある確率 P は，

$$P=\frac{(n-1)!}{n^n}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(n-k)(n-1)!}{n^n}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{k=1}^{n-1}(n-k)\right\}$$

$$=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\sum_{l=1}^{n-1}l\right\}=\frac{(n-1)!}{n^n}\left\{1+\frac{1}{2}(n-1)n\right\}=\frac{(n^2-n+2)(n-1)!}{2n^n}$$

コメント

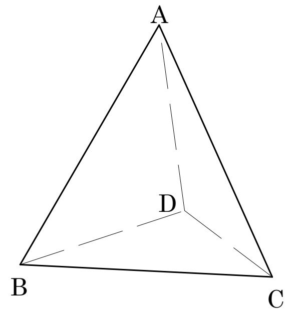
題意を把握するために，$n=5$ の場合を具体的に考えました。その部分は，上の解からは省いていますが。

問　題

正四面体 ABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 A に位置し，1 秒ごとにある頂点から他の 3 頂点のいずれかに，等しい確率で動くとする。このとき，時刻 0 から時刻 n までの間に，4 頂点 A, B, C, D のすべてに点 P が現れる確率を求めよ。ただし，n は 1 以上の整数とする。　[2008]

解答例

時刻 0 から n までの間に，4 頂点のすべてに点 P が現れる確率を $P(n)$ とする。



まず，明らかに，$P(1)=P(2)=0$ である。

次に，$n \geqq 3$ のときを考える。

点 P が A と B，A と C，A と D の 2 頂点のみに現れる確率は，いずれも $\left(\frac{1}{3}\right)^n$ である。

また，点 P が A, B, C の 3 頂点のみに現れる確率は，$\left(\frac{2}{3}\right)^n$ であるが，そのすべてに現れるのは，A，B のみ，A，C のみに現れる場合を除いて，$\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n$ となる。

さらに，A, C, D の 3 頂点，A, D, B の 3 頂点の場合も同じ確率である。

これより，4 頂点のすべてに点 P が現れる確率は，余事象を考えて，

$$P(n)=1-3\left\{\left(\frac{2}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{3}\right)^n\right\}-3\left(\frac{1}{3}\right)^n=1-3\left(\frac{2}{3}\right)^n+3\left(\frac{1}{3}\right)^n$$

なお，この式は，$n=1$，2 のときも成立している。

コメント

確率の基本問題です。余事象を考えるところがポイントです。

問　題

1 歩で 1 段または 2 段のいずれかで階段を昇るとき，1 歩で 2 段昇ることは連続しないものとする。15 段の階段を昇る昇り方は何通りあるか。 [2007]

解答例

1 段昇るのを x 回, 2 段昇るのを y 回とすると，条件より，$x+2y=15$

さらに, 2 段昇ることは連続しないので，$x+1\geqq y$ となり，

$$(x,\ y)=(5,\ 5),\ (7,\ 4),\ (9,\ 3),\ (11,\ 2),\ (13,\ 1),\ (15,\ 0)$$

$(x,\ y)=(5,\ 5)$ のとき，1 段を昇るのが 5 回，2 段を連続せずに昇るのが 5 回である。その場合の数を求めるために，右図のように 1 段を 5 個並べ，その間または前後の 6 か所ある∨のうちから 5 個を選び，そこで 2 段を昇ると考える。すると，この場合は ${}_6\mathrm{C}_5$ 通りであることがわかる。

∨ 1段 ∨ 1段 ∨ 1段 ∨ 1段 ∨ 1段 ∨

同様に考えると，$(x,\ y)=(7,\ 4)$ のとき ${}_8\mathrm{C}_4$ 通り，$(x,\ y)=(9,\ 3)$ のとき ${}_{10}\mathrm{C}_3$ 通り，$(x,\ y)=(11,\ 2)$ のとき ${}_{12}\mathrm{C}_2$ 通り，$(x,\ y)=(13,\ 1)$ のとき ${}_{14}\mathrm{C}_1$ 通り，$(x,\ y)=(15,\ 0)$ のとき 1 通りである。

したがって，条件を満たす 15 段の階段を昇る昇り方の総数は,

$${}_6\mathrm{C}_5+{}_8\mathrm{C}_4+{}_{10}\mathrm{C}_3+{}_{12}\mathrm{C}_2+{}_{14}\mathrm{C}_1+1=277$$

コメント

漸化式の利用という有名な方法もあり，どちらを選択するかについて迷いましたが, 15 段という小さめの値から判断し，直接的に数えました。

問　題

先頭車両から順に 1 から n までの番号のついた n 両編成の列車がある。ただし $n\geqq 2$ とする。各車両を赤色，青色，黄色のいずれか 1 色で塗るとき，隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となるような色の塗り方は何通りか。　[2005]

解答例

隣り合った車両の少なくとも一方が赤色となる条件を満たす塗り方のうち，n 番目が赤色である塗り方を a_n 通り，赤色以外である塗り方を b_n 通りとする。

$n=2$ のとき，条件を満たすのは，(赤，赤)，(赤，青)，(赤，黄)，(青，赤)，(黄，赤)より，$a_2=3$，$b_2=2$ である。

さて，$n+1$ 番目が赤のときは n 番目は任意の色であり，$n+1$ 番目が赤以外（青または黄）のときは n 番目は赤なので，

$$a_{n+1}=a_n+b_n\cdots\cdots\cdots①,\ \ b_{n+1}=2a_n\cdots\cdots\cdots②$$

①－②×k より，$a_{n+1}-kb_{n+1}=(1-2k)a_n+b_n=(1-2k)\left(a_n-\dfrac{1}{2k-1}b_n\right)$

$k=\dfrac{1}{2k-1}$ とすると，$2k^2-k-1=0$ より，$k=-\dfrac{1}{2}$，1

$k=-\dfrac{1}{2}$ のとき，$a_{n+1}+\dfrac{1}{2}b_{n+1}=2\left(a_n+\dfrac{1}{2}b_n\right)$

$$a_n+\frac{1}{2}b_n=\left(a_2+\frac{1}{2}b_2\right)2^{n-2}=(3+1)2^{n-2}=2^n\cdots\cdots\cdots③$$

$k=1$ のとき，$a_{n+1}-b_{n+1}=-(a_n-b_n)$

$$a_n-b_n=(a_2-b_2)(-1)^{n-2}=(3-2)(-1)^{n-2}=(-1)^n\cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\dfrac{3}{2}b_n=2^n-(-1)^n$，$b_n=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{n+1}-\dfrac{2}{3}(-1)^n$

$$a_n=b_n+(-1)^n=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}-\frac{2}{3}(-1)^n+(-1)^n=\frac{1}{3}\cdot 2^{n+1}+\frac{1}{3}(-1)^n$$

よって，求める色の塗り方は，

$$a_n+b_n=\frac{2}{3}\cdot 2^{n+1}-\frac{1}{3}(-1)^n=\frac{1}{3}\{2^{n+2}-(-1)^n\}$$

コメント

ストレートには考えにくいので，漸化式を立てました。1 両目の車両の色で場合分けをして，隣接 3 項間型の漸化式を立てることもできますが，最初に考えた連立漸化式で記述しました。なお，漸化式の解法は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

Nを自然数とする。$N+1$個の箱があり，1から$N+1$までの番号が付いている。どの箱にも玉が 1 個入っている。番号 1 から N までの箱に入っている玉は白玉で，番号$N+1$の箱に入っている玉は赤玉である。次の操作(＊)を，各々の$k=1,\ 2,\ \cdots,\ N+1$に対して，kが小さい方から順番に1回ずつ行う。

(＊)　k以外の番号のN個の箱から1個の箱を選び，その箱の中身と番号kの箱の中身を交換する。（ただし，N個の箱から1個の箱を選ぶ事象は，どれも同様に確からしいとする。）

操作がすべて終了した後，赤玉が番号$N+1$の箱に入っている確率を求めよ。

[2004]

解答例

操作がすべて終了した後，赤玉が番号$N+1$の箱に入っている場合は，第 N 回の操作が終わったとき，赤玉が番号 1 から N のいずれかの箱に入っており，第$N+1$回目の操作で，その赤玉の入っている番号の箱を選び，番号$N+1$の箱に入っている白玉と交換する場合に限られる。

まず，第N回の操作が終わったとき，赤玉が番号$N+1$の箱に入っているのは，1回から N 回までの操作で，番号$N+1$の箱に入っている赤玉とそれ以外の箱に入っている白玉との交換が一度もない場合だけで，その確率は$\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N$である。

これより，1 回から N 回までの操作で，少なくとも 1 回，番号$N+1$の箱を選んで，番号 $k(1\leqq k\leqq N)$の箱に入っている白玉と交換し，第 N 回の操作が終わったとき，白玉が番号$N+1$の箱に入っている確率は，$1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N$となる。

さらに，$N+1$回目の操作で，番号 1 から N までの箱のいずれかに入っている赤玉を選び，番号$N+1$の箱にある白玉と交換する確率は，$\dfrac{1}{N}$である。

以上より，操作がすべて終了した後，赤玉が番号$N+1$の箱に入っている確率は，$\left\{1-\left(\dfrac{N-1}{N}\right)^N\right\}\cdot\dfrac{1}{N}$となる。

コメント

赤玉が第 $k(1\leqq k\leqq N)$回目の操作で，番号$N+1$の箱からいったん出たら，最後の第$N+1$回目の操作まで，番号$N+1$の箱に戻る可能性はありません。この点に気付くことがポイントです。実験すると，わかります。

問　題

n チームがリーグ戦を行う。すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\dfrac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする。このとき，$n-2$ 勝 1 敗のチームがちょうど 2 チームである確率を求めよ。ただし，n は 3 以上とする。　[2003]

解答例

n チームを A_1, A_2, A_3, A_4, $\cdots$, A_n とし，以下 A_1 と A_2 が $n-2$ 勝 1 敗する場合を考える。

まず，A_1 と A_2 が対戦して，A_1 が勝ち，A_2 が負ける確率は $\dfrac{1}{2}$ である。

このとき，A_1 は残りの試合で A_3～A_n と対戦して $n-3$ 勝 1 敗，A_2 は残りの試合で A_3～A_n と対戦して $n-2$ 勝 0 敗でなくてはいけない。この確率は，

$$ {}_{n-2}\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\cdot\frac{1}{2}\times\left(\frac{1}{2}\right)^{n-2}=(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4} $$

ところで，A_1 が A_3～A_n と対戦して 1 敗するチームが A_3 の場合，A_3 については A_2 との対戦で 1 敗しているので，他の A_4～A_n との対戦で少なくとも 1 敗しなくては，A_1 と A_2 だけが $n-2$ 勝 1 敗とはならない。この確率は，$1-\left(\dfrac{1}{2}\right)^{n-3}$ となる。

また，A_4, $\cdots$, A_n に対しては，A_1, A_2 との対戦で既に 2 敗しているので，勝敗は任意で条件に適する。

以上まとめると，A_1 と A_2 が対戦して A_1 が勝ち，A_2 が負け，しかも A_1 と A_2 がともに $n-2$ 勝 1 敗の確率は，

$$ \frac{1}{2}\times(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-4}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}=(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} $$

次に，A_1 が負け，A_2 が勝つときも同様であり，また A_1, A_2, A_3, A_4, $\cdots$, A_n の中で，$n-2$ 勝 1 敗の 2 チームの選び方は ${}_n\mathrm{C}_2=\dfrac{n(n-1)}{2}$ 通りあるので，求める確率は，

$$ (n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\}\times 2\times\frac{n(n-1)}{2}=n(n-1)(n-2)\left(\frac{1}{2}\right)^{2n-3}\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{n-3}\right\} $$

となる。

コメント

文系にも類題があります。その類題では，余事象を利用してを求めたややこしい確率が，理系で出題されています。

問　題

袋の中に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている。各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1，2，3 の番号がついている。これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す。取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 得点が n となるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき，$A(0)$，$A(1)$，$A(2)$，$A(3)$ を求めよ。

(2) 得点の期待値を求めよ。 [1998]

解答例

(1) 取り出した 3 個の玉について，異なる色の種類数と異なる番号の個数，および得点との関係をまとめると，右表のようになる。

色の数	1	2	2	3	3	3
番号の数	3	2	3	1	2	3
得　点	0	0	1	0	1	3

(i) 得点が 3 点となるとき

3 色すべてを取り出し，しかも 3 つの番号をすべて取り出す場合より，

$$A(3) = 3! = 6$$

(ii) 得点が 2 点となるとき

この場合は存在しないので，$A(2) = 0$

(iii) 得点が 1 点となるとき

3 色で番号 2 種類のときは，番号の組合せが 3 通りで，それぞれの場合に対して色の対応が $2\times3=6$ 通りずつある。よって, $3\times6=18$ 通りとなる。

2 色で番号 3 種類のときも，同様にして 18 通りとなる。

合わせて，$A(1) = 18\times2 = 36$

(iv) 得点が 0 点となるとき

3 個の玉を取り出すすべての場合の数は，${}_9C_3 = 84$ 通りなので, (i)(ii)(iii)より,

$$A(0) = 84 - (6 + 0 + 36) = 42$$

(2) 得点の期待値は, (1)より

$$3\times\frac{6}{84} + 2\times0 + 1\times\frac{36}{84} + 0\times\frac{42}{84} = \frac{9}{14}$$

コメント

確率の問題では，考えていることを整理するために，表が役に立ちます。表を書くとミスが少なくなってきます。なお，(1)の$A(0)$の値は，次のようにすれば直接的に導くことができます。色数 1，番号数 3 の場合は 3 通り。色数 3，番号数 1 の場合も 3 通り。また色数 2，番号数 2 の場合は，色の選び方が 3 通り，番号の選び方が 3 通り，それぞれの場合に対して色と番号の対応が 2×2＝4 通りずつとなり，よって 3×3×4＝36 通り。以上より，$A(0)=3+3+36=42$となります。

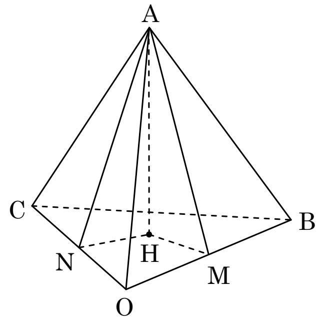
問　題

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の外心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016]

解答例



四面体 OABC において，頂点 A から面 OBC に下ろした垂線の足を H，また辺 OB, OC の中点をそれぞれ M, N とおく。

条件より，点 H は△OBC の外心なので，

$$HM\perp OB \quad かつ \quad HN\perp OC$$

すると，AH は面 OBC に垂直で $HM\perp OB$ なので，三垂線の定理から，$AM\perp OB$ となる。すなわち，△AOB は $AO=AB$ の二等辺三角形である。

同様に，AH は面 OBC に垂直で $HN\perp OC$ なので，三垂線の定理から，$AN\perp OC$ となる。すなわち，△AOC は $AO=AC$ の二等辺三角形である。

したがって，$AO=AB=AC$ である。

また，頂点 B から面 OCA に下ろした垂線の足が△OCA の外心なので，同様にすると，$BO=BC=BA$ である。

さらに，頂点 C から面 OAB に下ろした垂線の足が△OAB の外心なので，同様にすると，$CO=CA=CB$ である。

以上より，$OA=OB=OC=AB=BC=CA$ となるので，四面体 OABC は正四面体である。

コメント

空間図形の証明問題です。同じ構図の問題で「重心」となっているのが文系で出題されていますが， 理系では「外心」ですので，ベクトルでの表現が難しく，ここでは三垂線の定理を適用した解答例にしています。

問　題

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。 [2015]

解答例

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の実数とするとき，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$，余りを r とおくと，$p,\ q,\ r$ は実数となり，

$$f(x)=g(x)(px+q)+r \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，①から $h(x)=px+q+\dfrac{r}{g(x)}=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$

ここで，n を 2 以上の整数とすると，条件より，$h(n-1)$，$h(n)$，$h(n+1)$ はすべて整数なので，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ の値も整数となり，

$$\begin{aligned}&h(n-1)+h(n+1)-2h(n)\\&=pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}+pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}-2\left(pn+q+\frac{r}{dn+e}\right)\\&=\frac{r}{dn-d+e}+\frac{r}{dn+d+e}-\frac{2r}{dn+e}\\&=\frac{2d^2r}{(dn-d+e)(dn+d+e)(dn+e)} \cdots\cdots\cdots ②\end{aligned}$$

すると，十分に大きい n に対しても②が整数となることより，$r=0$ である。

よって，①から，$f(x)=g(x)(px+q)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

コメント

結論の $r=0$ を示すために，$h(n)$ の等差数列部分である $pn+q$ を消すことを考え，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ を計算しています。そして，得られた式が②というわけです。階差を 2 回とったと考えてもよいですが……。なお，既視感があったので，過去問を調べたところ，1991 年の後期に類題が出ていました。

問　題

次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

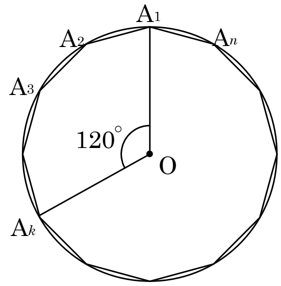
(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle$ABC と $\triangle$ABD において，AC＜AD かつ BC＜BD ならば，$\angle$C＞$\angle$D である。

[2012]

解答例

(p)　正しい。



正 n 角形の外接円上に，頂点 A_1，A_2，…，A_k，…，A_n があるとする。

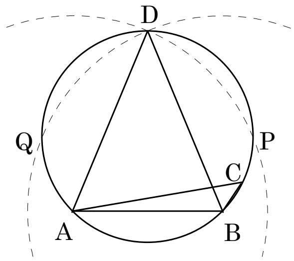
さて，中心を O とすると，条件より，$\angle A_1OA_k = 120°$ となる $k(2 \leqq k \leqq n-1)$ が存在する。

ここで，$\angle A_1OA_k = \dfrac{360°}{n} \times (k-1)$ より，

$$\frac{360°}{n} \times (k-1) = 120°,\ \ 360° \times (k-1) = 120° \times n$$

よって，$n = 3(k-1)$ となり，n は 3 の倍数である。

(q)　正しくない。



DA＝DB＞AB である$\triangle$ABD の外接円を O とする。

さて，点 A と中心とする半径 AD の円，点 B を中心とする半径 BD の円を描き，円 O との交点で D でないものをそれぞれ P, Q とする。

そして，弧 AQ または弧点 BP 上に点 C をとる。

すると，AC＜AD かつ BC＜BD であるが，$\angle$C＝$\angle$D である。すなわち，$\angle$C＞$\angle$D は成立しない。

コメント

どちらも図形がらみの証明問題です。(q)は，判断を間違いそうになりましたが。

問　題

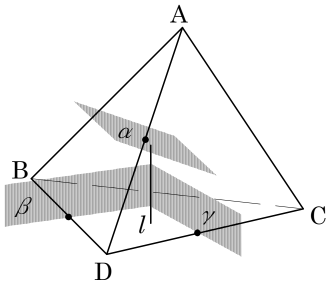
空間内に四面体 ABCD を考える。このとき, 4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在することを示せ。 [2011]

解答例

一般的に, 空間の異なる 2 定点 P, Q から等距離にある点は, 線分 PQ の垂直二等分面を描く。

さて, 辺 DA, DB, DC の垂直二等分面をそれぞれα, β, γとすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{DA}} \perp \alpha,\ \overrightarrow{\mathrm{DB}} \perp \beta,\ \overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \gamma$$



$\overrightarrow{\mathrm{DB}}$と$\overrightarrow{\mathrm{DC}}$は平行ではないので, 平面$\beta$と$\gamma$は平行ではない。これより, 平面$\beta$と$\gamma$の交線が存在する。この交線を$l$とし, lの方向ベクトルを$\vec{u}$とおく。

直線lは平面β上にあり, しかも平面γ上にあるので,

$$\overrightarrow{\mathrm{DB}} \perp \vec{u},\ \overrightarrow{\mathrm{DC}} \perp \vec{u}$$

ここで, 直線lと平面αが平行であると仮定すると, $\overrightarrow{\mathrm{DA}} \perp \vec{u}$である。しかし, このとき 4 点 A, B, C, D は同一平面上にあることになり, 条件に反する。

したがって, 直線lと平面αは平行でなく, 交点が存在する。この交点を O とすると, $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{OD}$である。

すなわち, 点 O を中心とし, 4 つの頂点 A, B, C, D を同時に通る球面が存在する。

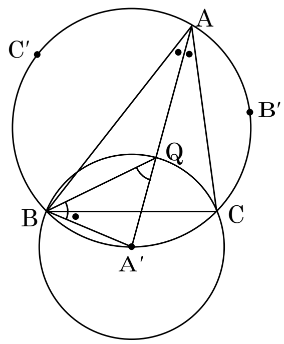
コメント

いろいろな手段によって, 証明することができそうです。上の解答例は最初に考えたものです。

問　題

平面上の鋭角三角形△ABC の内部(辺や頂点は含まない)に点 P をとり，A′ を B, C, P を通る円の中心，B′ を C, A, P を通る円の中心，C′ を A, B, P を通る円の中心とする。このとき，A, B, C, A′, B′, C′ が同一円周上にあるための必要十分条件は P が△ABC の内心に一致することであることを示せ。　[2009]

解答例



点 A′, B′, C′ が△ABC の外接円上の点であるとき，条件より，点 A′, B′, C′ は，それぞれ劣弧 BC, CA, AB の中点である。

まず，$A'B = A'C$ から，$\angle A'AB = \angle A'AC$ ………①

さて，点 A′ を中心とし，B, C を通る円と線分 AA′ との交点を Q とすると，$A'B = A'Q$ より，

$$\angle A'QB = \angle A'BQ \text{ ………②}$$

さらに，$\angle A'AC = \angle A'BC$ から，①②より，

$$\angle ABQ = \angle A'QB - \angle A'AB = \angle A'BQ - \angle A'AC = \angle A'BQ - \angle A'BC = \angle CBQ$$

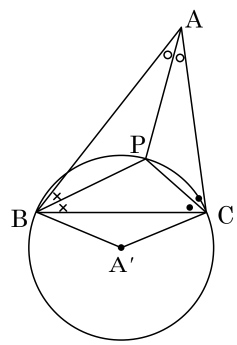
これより，BQ は∠ABC の二等分線となり，点 Q は△ABC の内心に一致する。すなわち，点 A′ を中心とし B, C を通る円は，△ABC の内心を通る。

同様にすると，点 B′ を中心とし C, A を通る円，点 C′ を中心とし A, B を通る円も，それぞれ△ABC の内心を通る。

よって，A′, B′, C′ を中心とする 3 つの円が 1 点を共有するとき，その個数は高々1 個であり，この点を P とすると，点 P は△ABC の内心に一致する。

逆に，点 P が△ABC の内心であるとき，点 A′ を中心とし B, C を通る円において，

$$\angle BA'C = 360° - 2\angle BPC \text{ ………③}$$



点 P は，△ABC の内心であることより，

$$\begin{aligned}\angle BPC &= 180° - (\angle PBC + \angle PCB)\\ &= 180° - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB)\\ &= 180° - \frac{1}{2}(180° - \angle BAC)\\ &= 90° + \frac{1}{2}\angle BAC \text{ ………④}\end{aligned}$$

③④より，$\angle BA'C = 360° - 2\left(90° + \frac{1}{2}\angle BAC\right) = 180° - \angle BAC$

よって，点 A′ は△ABC の外接円上の点である。

同様にすると，点 B′, C′ も△ABC の外接円上の点となり，6 点 A, B, C, A′, B′, C′は同一円周上にある。

以上より，A，B，C，A′，B′，C′が同一円周上にあるための必要十分条件は，P が△ABC の内心に一致することである。

コメント

前半の証明が難です。内心と外接円についての有名な問題を下敷きとしています。

問　題

空間の 1 点 O を通る 4 直線で，どの 3 直線も同一平面上にないようなものを考える。このとき, 4 直線のいずれとも O 以外の点で交わる平面で, 4 つの交点が平行四辺形の頂点になるようなものが存在することを示せ。 [2008]

解答例

1 点 O を通る 3 直線の方向ベクトルを $\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ とすると，3 直線が同一平面上にないことより，$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$ は 1 次独立である。

さらに，もう 1 本の直線の方向ベクトルを $\vec{d}$ とすると，どの 3 直線も同一平面上にないことより, r, s, t を 0 以外の実数として,

$$\vec{d} = r\vec{a} + s\vec{b} + t\vec{c} \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，ここで，次のように点 A, B, C, D を決める。

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = r\vec{a},\ \overrightarrow{\mathrm{OB}} = -s\vec{b},\ \overrightarrow{\mathrm{OC}} = t\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{OD}} = \vec{d} \cdots\cdots\cdots ②$$

$r \neq 0$，$s \neq 0$，$t \neq 0$ から, A, B, C, D は O と異なり，①②より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \vec{d} - r\vec{a} = s\vec{b} + t\vec{c},\ \overrightarrow{\mathrm{BC}} = t\vec{c} - (-s\vec{b}) = s\vec{b} + t\vec{c}$$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{AD}} = \overrightarrow{\mathrm{BC}} \neq \vec{0}$ となり，四角形 ABCD は平行四辺形である。

コメント

空間図形の問題ですが，誘導がないので，状況の設定から自分でしなくてはいけません。なお，②の関係式は，いきなり見つけたものではなく，予め方程式を立て計算した結果を書き直したものです。

問　題

$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

[2006]

解答例

$Q(x)$ を複素数範囲で因数分解して，

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad(a\neq 0)$$

さて，$P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $A(x)$，余りを $px+q$ とおくと，

$$P(x)=Q(x)A(x)+(px+q)\quad(p^2+q^2\neq 0)$$

すると，$P(\alpha)=p\alpha+q$ ……①，$P(\beta)=p\beta+q$ ……②

次に，$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割った商を $B(x)$ とおくと，

$$\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$$

すると，$\{P(\alpha)\}^2=\{P(\beta)\}^2=0$ より，$P(\alpha)=P(\beta)=0$ ………③

①②③より，$p\alpha+q=0$，$p\beta+q=0$ となり，

$$p(\alpha-\beta)=0$$

ここで，$\alpha\neq\beta$ とすると $p=q=0$ となり，$p^2+q^2\neq 0$ に反する。

よって，$\alpha=\beta$ となるので, 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつ。

コメント

$Q(x)$ の因数分解を設定して，剰余の定理を用いる解法を採用しました。

問　題

以下の問いに答えよ。ただし，$\sqrt{2}$，$\sqrt{3}$，$\sqrt{6}$ が無理数であることは使ってよい。

(1) 有理数 p，q，r について，$p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ ならば，$p=q=r=0$ であることを示せ。

(2) 実数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ について，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数であることを示せ。 [1999]

解答例

(1) $p+q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=0$ より，$q\sqrt{2}+r\sqrt{3}=-p$ ………①

$$(q\sqrt{2}+r\sqrt{3})^2=p^2,\ 2q^2+3r^2+2qr\sqrt{6}=p^2$$

$qr\neq 0$ のとき $\sqrt{6}=\dfrac{p^2-2q^2-3r^2}{2qr}$ となり，$\sqrt{6}$ が無理数であるのに反する。

よって $qr=0$ より，$q=0$ または $r=0$

$q=0$ のとき，①より $r\sqrt{3}=-p$ となる。ここで $r\neq 0$ とすると $\sqrt{3}=-\dfrac{p}{r}$ となり，$\sqrt{3}$ が無理数であるのに反する。よって $r=0$，$p=0$ となる。

$r=0$ のとき，①より $q\sqrt{2}=-p$ となる。ここで $q\neq 0$ とすると $\sqrt{2}=-\dfrac{p}{q}$ となり，$\sqrt{2}$ が無理数であるのに反する。よって $q=0$，$p=0$ となる。

以上より，いずれの場合も $p=q=r=0$ となる。

(2) p, q, r を有理数として，$f(1)=p$，$f(1+\sqrt{2})=q$，$f(\sqrt{3})=r$ と仮定する。

$1+a+b=p$ より，$a+b=p-1$ ………②

$(1+\sqrt{2})^2+a(1+\sqrt{2})+b=q$ より，$(a+b+3)+(a+2)\sqrt{2}=q$ ………③

$3+\sqrt{3}a+b=r$ より，$\sqrt{3}a+b=r-3$ ………④

②④より，$(\sqrt{3}-1)a=r-p-2$，$a=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2}(r-p-2)$ ………⑤

②⑤を③に代入して，$(p-q+2)+\dfrac{1}{2}(r-p-2)\sqrt{6}+\dfrac{1}{2}(r-p+2)\sqrt{2}=0$

$$(p-q+2)\sqrt{2}+(r-p-2)\sqrt{3}+(r-p+2)=0$$

(1)より，$p-q+2=0$，$r-p-2=0$，$r-p+2=0$

ところが，$r-p-2=0$ かつ $r-p+2=0$ は成立しないので，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ がすべて有理数という場合はない。

よって，$f(1)$，$f(1+\sqrt{2})$，$f(\sqrt{3})$ のいずれかは無理数である。

コメント

(2)は, (1)の結果が使えるように式変形をしていけば, 自然に結論は導けます。

問　題

w を 0 でない複素数, x, y を $w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ を満たす実数とする。

(1)　実数 R は $R>1$ を満たす定数とする。w が絶対値 R の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。

(2)　実数 α は $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とする。w が偏角 α の複素数全体を動くとき, xy 平面上の点$(x,\ y)$の軌跡を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$w+\dfrac{1}{w}=x+yi$ ……①に対し, $|w|=R\ (R>1)$ のとき, θ を任意の実数として,

$$w=R(\cos\theta+i\sin\theta)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $x+yi=R(\cos\theta+i\sin\theta)+\dfrac{1}{R}\{\cos(-\theta)+i\sin(-\theta)\}$ となり,

$$x+yi=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta+i\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta$$

$$x=\left(R+\frac{1}{R}\right)\cos\theta\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\left(R-\frac{1}{R}\right)\sin\theta\ \cdots\cdots\cdots④$$

③より $\cos\theta=\dfrac{R}{R^2+1}x$, ④より $\sin\theta=\dfrac{R}{R^2-1}y$ なので,

$$\left(\frac{R}{R^2+1}\right)^2x^2+\left(\frac{R}{R^2-1}\right)^2y^2=1\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

よって, 点$(x,\ y)$の軌跡は, ⑤で表される楕円である。

(2)　$\arg w=\alpha\ \left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき, r を正の実数として,

$$w=r(\cos\alpha+i\sin\alpha)\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

(1)と同様にすると, ①⑥より, $x+yi=\left(r+\dfrac{1}{r}\right)\cos\alpha+i\left(r-\dfrac{1}{r}\right)\sin\alpha$ となり,

$$x=\left(r+\frac{1}{r}\right)\cos\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑦,\quad y=\left(r-\frac{1}{r}\right)\sin\alpha\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦より $r+\dfrac{1}{r}=\dfrac{x}{\cos\alpha}$, ⑧より $r-\dfrac{1}{r}=\dfrac{y}{\sin\alpha}$ となり,

$$2r=\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑨,\quad \frac{2}{r}=\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

すると, ⑨⑩より,

$$\left(\frac{x}{\cos\alpha}+\frac{y}{\sin\alpha}\right)\left(\frac{x}{\cos\alpha}-\frac{y}{\sin\alpha}\right)=4,\quad \frac{x^2}{4\cos^2\alpha}-\frac{y^2}{4\sin^2\alpha}=1\ \cdots\cdots\cdots⑪$$

ここで, $r>0$ から, $r+\dfrac{1}{r}\geqq 2\sqrt{r\cdot\dfrac{1}{r}}=2$, また $r-\dfrac{1}{r}$ は任意の値をとる。

すると, $\cos\alpha>0$, $\sin\alpha>0$ で, ⑦から $x\geqq 2\cos\alpha$, ⑧から y は任意の値をとる。

以上より，点$(x,\ y)$の軌跡は，⑪で表される双曲線である。ただし，$x \geqq 2\cos\alpha$ の部分である。

コメント

複素数と軌跡に関する標準的な問題です。なお，(2)では x に限界があり，軌跡は双曲線の右の枝になります。

問　題

複素数を係数とする 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　$f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れる。

(ロ)　$f(x)$ の係数 $a,\ b$ の少なくとも一方は虚数である。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 2 次式をすべて求めよ。　[2016]

解答例

複素数係数の 2 次式 $f(x)=x^2+ax+b$ に対し，$f(x)=0$ の解を α，β とすると，

$$\alpha+\beta=-a\cdots\cdots\cdots①,\ \ \alpha\beta=b\cdots\cdots\cdots②$$

また，条件(イ)より，6 次式 $f(x^3)$ は $f(x)$ で割り切れるので，$q(x)$ を 4 次式として，

$$f(x^3)=f(x)q(x)$$

これより，$x^6+ax^3+b=(x-\alpha)(x-\beta)q(x)$ となり，

$$\alpha^6+a\alpha^3+b=0\cdots\cdots\cdots③,\ \ \beta^6+a\beta^3+b=0\cdots\cdots\cdots④$$

①②を③に代入すると，$\alpha^6-(\alpha+\beta)\alpha^3+\alpha\beta=0$，$(\alpha^3-\alpha)(\alpha^3-\beta)=0\cdots\cdots\cdots⑤$

①②を④に代入すると，$\beta^6-(\alpha+\beta)\beta^3+\alpha\beta=0$，$(\beta^3-\beta)(\beta^3-\alpha)=0\cdots\cdots\cdots⑥$

すると，⑤⑥から，次の 4 つの場合が考えられる。

(i)　$\alpha^3-\alpha=0$ かつ $\beta^3-\beta=0$ のとき

このとき，$\alpha=0,\ \pm1$ かつ $\beta=0,\ \pm1$ となる。しかし，このいずれの $(\alpha,\ \beta)$ の組合せに対しても，①②より $a,\ b$ はともに実数であり，条件(ロ)に反する。

(ii)　$\alpha^3-\alpha=0$ かつ $\beta^3-\alpha=0$ のとき

このとき，$\alpha=0,\ \pm1$ かつ $\beta^3=\alpha$ となる。

まず，$\alpha=0$ のときは $\beta=0$ となり，$a,\ b$ はともに実数であり，条件(ロ)に反する。

また，$\alpha=1$ のときは $\beta^3=1$ となり，$(\beta-1)(\beta^2+\beta+1)=0$

すると，条件(ロ)から $\beta\neq1$ となり，$\beta^2+\beta+1=0$ より $\beta=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

$\beta=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

$\beta=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

さらに，$\alpha=-1$ のときは $\beta^3=-1$ となり，$(\beta+1)(\beta^2-\beta+1)=0$

すると，条件(ロ)から $\beta\neq-1$ となり，$\beta^2-\beta+1=0$ より $\beta=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ である。

$\beta=\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=-\dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$\beta=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ のとき，①から $a=-\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$，②から $b=-\dfrac{1-\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$f(x)=x^2+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}$$

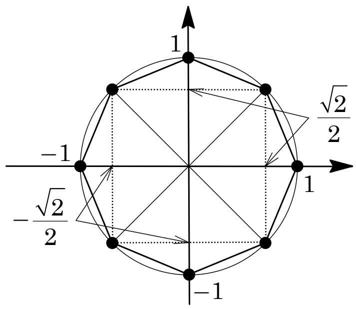
(iii)　$\alpha^3-\beta=0$ かつ $\beta^3-\beta=0$ のとき

α，β の対称性から，$f(x)$ は(ii)の場合に一致する。

(iv)　$\alpha^3-\beta=0$ かつ $\beta^3-\alpha=0$ のとき

このとき，$\alpha^9-\alpha=0$ かつ $\beta=\alpha^3$ となるが，$\alpha=0$ のときは $\beta=0$ となり，条件(ロ)に反する。

よって，$\alpha^8=1$ であり，α を複素数平面上に図示すると，右図の 8 つの点が対応する。



$\alpha=\pm1$ のときは複号同順で $\beta=\pm1$ となるが，条件(ロ)に反する。

$\alpha=\pm i$ のときは複号同順で $\beta=\mp i$ となるが，条件(ロ)に反する。

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$ のときは複号同順で $\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ となる。①から $a=\mp\sqrt{2}i$，②から $b=-1$ となり，

$$f(x)=x^2-\sqrt{2}ix-1,\quad f(x)=x^2+\sqrt{2}ix-1$$

$\alpha=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(-1\pm i)$ のときは複号同順で $\beta=\dfrac{\sqrt{2}}{2}(1\pm i)$ となり，α，β の対称性から，$a=\mp\sqrt{2}i$，$b=-1$ の場合に一致する。

(i)～(iv)より，求める 2 次式は，

$$x^2-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad x^2-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2},\quad x^2+\frac{1-\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}$$

$$x^2+\frac{1+\sqrt{3}i}{2}x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2},\quad x^2-\sqrt{2}ix-1,\quad x^2+\sqrt{2}ix-1$$

コメント

息の長い議論を支えるエネルギーが必要です。初めは，$f(x^3)$ を $f(x)$ で割ろうと考えましたが，途中で方向転換をし，解と係数の関係をもとにした解答例になっています。つまり，a，b，α，β について，①から④までの連立方程式を解くというわけです。ただ，基本対称式にこだわりすぎると，計算の深みにはまってしまいますが……。

問　題

α，β，γ は相異なる複素数で，$\alpha+\beta+\gamma=\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ を満たすとする。このとき，α，β，γ の表す複素平面上の 3 点を結んで得られる三角形はどのような三角形か。（ただし，複素平面を複素数平面ともいう。） [2005]

解答例

条件より，$\alpha+\beta+\gamma=0$ ………①，$\alpha^2+\beta^2+\gamma^2=0$ ………②

①より，$\gamma=-\alpha-\beta$ ……③となり，②に代入すると，

$$\alpha^2+\beta^2+(-\alpha-\beta)^2=0\,,\ \alpha^2+\alpha\beta+\beta^2=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

$\alpha=0$ とすると，④より $\beta=0$ となり，$\alpha\neq\beta$ に反する。

よって，$\alpha\neq0$ から，④より，$1+\dfrac{\beta}{\alpha}+\dfrac{\beta^2}{\alpha^2}=0$ となり，

$$\frac{\beta}{\alpha}=\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\cos(\pm120°)+i\sin(\pm120°)\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

③から，以下，複号同順で，

$$\frac{\gamma}{\alpha}=-1-\frac{\beta}{\alpha}=-1-\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}=\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}=\cos(\mp120°)+i\sin(\mp120°)$$

これより，点 β は点 α を原点まわりに $\pm120°$，点 γ は点 α を原点まわりに $\mp120°$ 回転した点である。

したがって，$\triangle\alpha\beta\gamma$ は重心が原点である正三角形である。

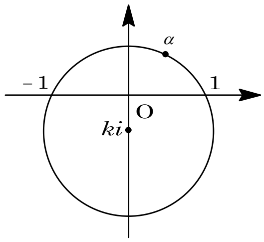
コメント

1 文字を消去して普通に解きました。なお，①式から $\triangle\alpha\beta\gamma$ の重心が原点であることがわかります。

問　題

複素数αに対してその共役複素数を$\overline{\alpha}$で表す。αを実数ではない複素数とする。複素平面内の円Cが1，-1，αを通るならば, Cは$-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$も通ることを示せ。　[2004]

解答例



円の中心は，2 点1，-1を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち虚軸上にあるので，中心を表す複素数をki（kは実数）とおくことができる。

すると，円の半径は$|ki-1|=\sqrt{1+k^2}$となる。

条件より，$|\alpha-ki|=\sqrt{1+k^2}$，$(\alpha-ki)(\overline{\alpha}+ki)=1+k^2$

$$\alpha\overline{\alpha}+k\alpha i-k\overline{\alpha}i=1\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}-ki\right|^2=\left|\dfrac{1}{\alpha}+ki\right|^2=\dfrac{|1+k\alpha i|^2}{|\alpha|^2}=\dfrac{(1+k\alpha i)(1-k\overline{\alpha}i)}{\alpha\overline{\alpha}}$

$$=\frac{1-k\overline{\alpha}i+k\alpha i+k^2\alpha\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$$

$(*)$より，$\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}-ki\right|^2=\dfrac{(1+k^2)\alpha\overline{\alpha}}{\alpha\overline{\alpha}}$，$\left|-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}-ki\right|=\sqrt{1+k^2}$

よって，点$-\dfrac{1}{\overline{\alpha}}$は, 3 点$1$，$-1$，$\alpha$を通る円周上にある。

コメント

同一円周上にある条件を，距離を用いて示そうか，それとも角を用いて示そうかと迷いました。後者の方法は角の向きの処理が面倒そうだったので，前者の立場で解きました。

問　題

多項式$(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$は多項式$x^2+x+1$で割り切れるか。　[2003]

解答例

$x^2+x+1=0$の解は$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$より，$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}=\cos\dfrac{2}{3}\pi+i\sin\dfrac{2}{3}\pi$とおくと，

$$\omega^2+\omega+1=0\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\omega^2=\cos\dfrac{4}{3}\pi+i\sin\dfrac{4}{3}\pi=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$となるので，

$$x^2+x+1=(x-\omega)(x-\omega^2)\cdots\cdots\cdots②$$

さらに，$\omega^3=\cos 2\pi+i\sin 2\pi=1\cdots\cdots\cdots③$

ここで，$f(x)=(x^{100}+1)^{100}+(x^2+1)^{100}+1$とおくと，①③より，

$$f(\omega)=(\omega^{100}+1)^{100}+(\omega^2+1)^{100}+1=(\omega+1)^{100}+(-\omega)^{100}+1$$
$$=(-\omega^2)^{100}+\omega^{100}+1=\omega^{200}+\omega+1=\omega^2+\omega+1=0$$
$$f(\omega^2)=(\omega^{200}+1)^{100}+(\omega^4+1)^{100}+1=(\omega^2+1)^{100}+(\omega+1)^{100}+1$$
$$=(-\omega)^{100}+(-\omega^2)^{100}+1=\omega^{100}+\omega^{200}+1=\omega+\omega^2+1=0$$

よって，②より$f(x)$はx^2+x+1で割り切れる。

コメント

有名な 1 の虚立方根の問題です。次数の高い式の値を求めるのも，全く気になりません。

問　題

$0<\theta<90$ とし，a は正の数とする。複素数平面上の点 z_0，z_1，z_2，…を次の条件(i), (ii)を満たすように定める。

(i)　$z_0=0$，$z_1=a$

(ii)　$n\geqq 1$ のとき，点 z_n-z_{n-1} を原点のまわりに $\theta°$ 回転すると点 $z_{n+1}-z_n$ に一致する。

このとき点 $z_n\ (n\geqq 1)$ が点 z_0 と一致するような n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数であることを示せ。　[2002]

解答例

$z_n-z_{n-1}=w_n$ とおき，$\alpha=\cos\theta°+i\sin\theta°$ とすると，条件(ii)より，

$$w_{n+1}=\alpha w_n,$$

条件(i)より $z_0=0$，$z_1=a$ なので，$w_n=w_1\alpha^{n-1}=(a-0)\alpha^{n-1}=a\alpha^{n-1}$

よって，$z_n-z_{n-1}=a\alpha^{n-1}$

$$z_n=z_0+(a+a\alpha+a\alpha^2+\cdots+a\alpha^{n-1})=a+a\alpha+a\alpha^2+\cdots+a\alpha^{n-1}$$

$\alpha=1$ のときは，$z_n=na$ となり, $a>0$ から $z_n=z_0=0$ となる場合はない。

$\alpha\neq 1$ のときは，$z_n=\dfrac{a(1-\alpha^n)}{1-\alpha}$ であるので，$z_n=z_0=0$ となる条件は $\alpha^n=1$

$$\cos(n\theta)°+i\sin(n\theta)°=1$$

すなわち, m を整数として，$n\theta=360\times m$ である。

すると，$\theta=\dfrac{360m}{n}$ となり，θ は有理数である。

逆に，θ が有理数ならば $\theta=\dfrac{q}{p}$ とおけ，$n=360p$ を満たす n に対して,

$$\cos(n\theta)°+i\sin(n\theta)°=\cos\left(\frac{nq}{p}\right)°+i\sin\left(\frac{nq}{p}\right)°$$

$$=\cos(360q)°+i\sin(360q)°=1$$

よって，$z_n=z_0=0$ となる。

以上より，$z_n=z_0=0$ となる n が存在するための必要十分条件は，θ が有理数ということである。

コメント

公比が虚数の等比数列と複素数平面上における点の回転を融合した頻出問題です。

問　題

未知数 x に関する方程式 $x^5+x^4-x^3+x^2-(a+1)x+a=0$ が，虚軸上の複素数を解にもつような実数 a をすべて求めよ。 [2001]

解答例

条件より，k を実数として，$x=ki$ とおき，$x^5+x^4-x^3+x^2-(a+1)x+a=0$ に代入すると，

$$k^5i+k^4+k^3i-k^2-(a+1)ki+a=0$$
$$(k^4-k^2+a)+(k^5+k^3-ak-k)i=0$$

$k,\ a$ が実数より，

$$k^4-k^2+a=0\cdots\cdots①,\quad k^5+k^3-ak-k=0\cdots\cdots②$$

①より $a=-k^4+k^2$ なので，②に代入して，

$$k^5+k^3-(-k^4+k^2)k-k=0,\quad k(2k^4-1)=0$$

よって，$k=0$ または $k^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(i)　$k=0$ のとき　①より $a=0$

(ii)　$k^2=\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のとき　①より $a=-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{\sqrt{2}}=\dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

(i)(ii)より，$a=0,\ \dfrac{-1+\sqrt{2}}{2}$

コメント

計算ミスをしなければ，正解に到達するという基本問題です。なお，文系に類題が出ています。

問　題

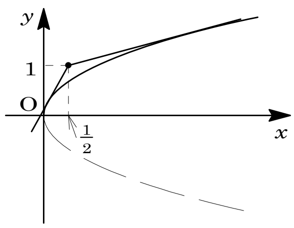
実数 a は $0<a\leqq 2$ の範囲を動くものとする。

(1)　$y=\sqrt{x}$ と $y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ のグラフが共有点をもつような a の範囲を求めよ。

(2)　2 次方程式 $(2x+a-1)^2=a^2x$ の複素数の範囲で考えた 2 つの解を α，β（ただし $|\alpha|\leqq|\beta|$）とする。このとき，$|\beta|$ の最小値を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$y=\sqrt{x}$ ……①，$y=\dfrac{2}{a}x+1-\dfrac{1}{a}$ ……②



②より，$ay=2x+a-1$，$2x-1+a(1-y)=0$

これより，どんな a の値に対しても，直線②は $(x,\ y)=\left(\dfrac{1}{2},\ 1\right)$ を通る。

さて，図より①と②が共有点をもつ条件と，$y=\pm\sqrt{x}$ と②が共有点をもつ条件は一致するので，これを連立し，

$$\pm\sqrt{x}=\frac{2}{a}x+1-\frac{1}{a},\quad a^2x=(2x+a-1)^2 \cdots\cdots\text{③}$$

よって，①と②が共有点をもつ条件は，③が実数解をもつ条件となる。

③を変形して，$4x^2-(a-2)^2x+(a-1)^2=0$ ………④

$$D=(a-2)^4-16(a-1)^2\geqq 0$$

$$\left\{(a-2)^2-4(a-1)\right\}\left\{(a-2)^2+4(a-1)\right\}\geqq 0,\ (a^2-8a+8)a^2\geqq 0$$

$0<a\leqq 2$ より，$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$

(2)　(1)より，③は $0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき実数解をもち，$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき共役な虚数解をもつ。

(i)　$0<a\leqq 4-2\sqrt{2}$ のとき

$0\leqq\alpha\leqq\beta$ より，$|\beta|$ が最小となるのは，(1)の図より①と②が接する $a=4-2\sqrt{2}$ のときである。

このとき④より，$\beta=\dfrac{(a-2)^2}{8}=\dfrac{(2-2\sqrt{2})^2}{8}=\dfrac{(1-\sqrt{2})^2}{2}$

$$|\beta|=\frac{(1-\sqrt{2})^2}{2}=\frac{3-2\sqrt{2}}{2}$$

(ii)　$4-2\sqrt{2}<a\leqq 2$ のとき

$\beta=\overline{\alpha}$ なので，④に解と係数の関係を用いて，$\alpha\overline{\alpha}=\dfrac{(a-1)^2}{4}$

すなわち，$|\beta|^2=|\alpha|^2=\dfrac{(a-1)^2}{4}$ なので，$|\beta|=\dfrac{|a-1|}{2}$ となる。

すると，$|\beta| > \dfrac{|4-2\sqrt{2}-1|}{2} = \dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$

(i)(ii)より，$|\beta|$の最小値は$\dfrac{3-2\sqrt{2}}{2}$である。

コメント

②の通過する定点が①のグラフの上側にあることを用いた直観的な解です。

問　題

p を素数，a，b を互いに素な正の整数とするとき，$(a+bi)^p$ は実数ではないことを示せ。ただし，i は虚数単位を表す。　[2000]

解答例

$z=(a+bi)^p$ の虚部を I_p とおく。

(i)　$p=2$ のとき　$I_p=2ab>0$ より，z は虚数となる。

(ii)　$p\geqq 3$ のとき　p は素数なので，奇数である。

$$I_p={}_p\mathrm{C}_1a^{p-1}b-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^3+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-2}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^p(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$
$$=b\left\{pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}$$

ここで $I_p=0$ とすると，$b>0$ より，

$$pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}+b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}=0\cdots\cdots\cdots①$$
$$pa^{p-1}={}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}b^2-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-3}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-1}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$$
$$=b^2\left\{{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-5}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-3}(-1)^{\frac{p-1}{2}}\right\}\cdots\cdots\cdots②$$

さて，a，b は自然数より，${}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}-\cdots-{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2b^{p-5}(-1)^{\frac{p-3}{2}}-b^{p-3}(-1)^{\frac{p-1}{2}}$ は整数となり，②の右辺は b^2 の倍数となる。

すると，②の左辺も b^2 の倍数となるが，a と b は互いに素より，p が b^2 の倍数となる。ところが，p は素数なので $b=1$ しかありえない。

①より，$pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2(-1)^{\frac{p-3}{2}}+(-1)^{\frac{p-1}{2}}=0$

$$pa^{p-1}-{}_p\mathrm{C}_3a^{p-3}+\cdots+{}_p\mathrm{C}_{p-2}a^2(-1)^{\frac{p-3}{2}}=-(-1)^{\frac{p-1}{2}}\cdots\cdots\cdots③$$

③の左辺は a^2 の倍数となるが，右辺は ±1 なので，$a>0$ より，$a=1$

以上より，$a=b=1$ の場合だけとなるので，

$$z=(1+i)^p=\left\{\sqrt{2}\left(\cos\frac{\pi}{4}+i\sin\frac{\pi}{4}\right)\right\}^p=2^{\frac{p}{2}}\left(\cos\frac{\pi}{4}p+i\sin\frac{\pi}{4}p\right)$$

すると，$\arg z=\dfrac{\pi}{4}p$ となるが，p が素数より，$\dfrac{p}{4}$ は整数となりえない。

すなわち，$\arg z$ は π の整数倍とはならないので，z は虚数となる。

(i)(ii)より，いずれの場合も $(a+bi)^p$ は実数ではない。

コメント

(ii)の場合，いきなり上の解を思いついたわけではありません。 $p=3$，5，7と具体的に考え，その結果を一般的に記述したにすぎません。

問　題

複素平面上で，$\triangle ABC$ の頂点を表す複素数をα，β，γとする。α，β，γが次の 3 条件を満たすとする。

1. $\triangle ABC$は辺の長さ$\sqrt{3}$の正三角形である
2. $\alpha+\beta+\gamma=3$
3. $\alpha\beta\gamma$は絶対値 1 で，虚数部分は正

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $z=\alpha-1$とおいて，βとγをzを使って表せ。

(2) α，β，γの偏角を求めよ。ただし，$0^\circ \leqq \arg\alpha \leqq \arg\beta \leqq \arg\gamma < 360^\circ$とする。

[1999]

解答例

(1) 条件 1 より$\triangle ABC$は正三角形なので，以下，複号同順として，

$$\beta=\alpha+\left(\cos(\pm 60^\circ)+i\sin(\pm 60^\circ)\right)(\gamma-\alpha)=\alpha+\frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}(\gamma-\alpha)\cdots\cdots\cdots①$$

また$\alpha=z+1$で，条件 2 より$\gamma=3-\alpha-\beta=2-z-\beta$となり，これらを①に代入して，$\beta=z+1+\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}(1-2z-\beta)$より，$\left(1+\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}\right)\beta=\dfrac{3\pm\sqrt{3}i}{2}\mp\sqrt{3}iz$

$$\beta=\frac{2}{3\pm\sqrt{3}i}\left(\frac{3\pm\sqrt{3}i}{2}\mp\sqrt{3}iz\right)=1+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}z$$

$$\gamma=2-z-\left(1+\frac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}z\right)=1+\frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}z$$

(2) $u=\beta-1$，$v=\gamma-1$，$\omega=\cos120^\circ+i\sin120^\circ$とおくと，(1)より，$u=\dfrac{-1\mp\sqrt{3}i}{2}z$，$v=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}z$となるので，$u$, vはωz，ω^2zのどちらかになる。

これより，3 点z，u，vは原点を中心とする円周上にあり，しかも正三角形の頂点になっている。この 3 点を，偏角の小さいものからz_1，z_2，z_3とするとき，これらはα，β，γのいずれかを実軸方向に-1だけ平行移動したものに対応する。また，この正三角形に正弦定理を適用すると，条件 1 より$|z_1|=\dfrac{\sqrt{3}}{2\sin60^\circ}=1$となり，

$$z_1=\cos\theta+i\sin\theta\ (0^\circ\leqq\theta<120^\circ),\quad z_2=\omega z_1,\quad z_3=\omega^2z_1$$

このとき，$\alpha\beta\gamma=(z_1+1)(z_2+1)(z_3+1)=(z_1+1)(\omega z_1+1)(\omega^2z_1+1)$

$$=(z_1+1)(\omega^3{z_1}^2+\omega^2z_1+\omega z_1+1)=(z_1+1)({z_1}^2-z_1+1)$$

$$={z_1}^3+1=(\cos\theta+i\sin\theta)^3+1=1+\cos3\theta+i\sin3\theta$$

条件 3 より，$(1+\cos3\theta)^2+\sin^23\theta=1$かつ$\sin3\theta>0$

$0^\circ \leqq \theta < 120^\circ$ で，$\cos 3\theta = -\dfrac{1}{2}$ かつ $\sin 3\theta > 0$ より $3\theta = 120^\circ$，$\theta = 40^\circ$

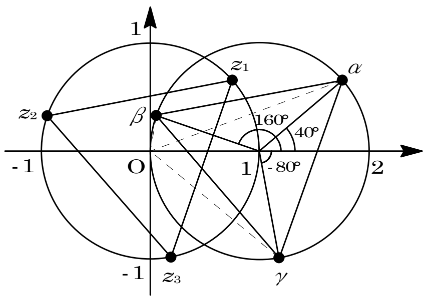
$\arg z_2 = 40^\circ + 120^\circ = 160^\circ$

$\arg z_3 = 40^\circ + 240^\circ = 280^\circ$

右図より，$\arg\alpha = \dfrac{40^\circ}{2} = 20^\circ$

$\arg\beta = \dfrac{160^\circ}{2} = 80^\circ$，

$\arg\gamma = 360^\circ - \dfrac{80^\circ}{2} = 320^\circ$



コメント

(1)では，△ABC の重心が点 1 であるのに最初に気付けば，計算量はかなり減少します。上の解は，それに途中で気付いたものです。

問　題

平面上に 2 定点 A, B をとる。c は正の定数として，平面上の点 P が

$$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=c$$

を満たすとき，点 P の軌跡を求めよ。 [1999]

解答例

$\triangle$ABP に余弦定理を適用して，

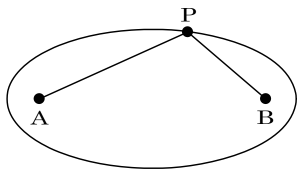
$$|\overrightarrow{AB}|^2=|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-2\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}$$

$$\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=\frac{|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}\cdots\cdots\cdots①$$

なお，①は 3 点 P, A, B が同一直線上にあるときも成立する。

条件より，$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|+\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PB}=c\cdots\cdots\cdots②$

①を②に代入して，



$$|\overrightarrow{PA}||\overrightarrow{PB}|+\frac{|\overrightarrow{PA}|^2+|\overrightarrow{PB}|^2-|\overrightarrow{AB}|^2}{2}=c$$

$$\left(|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|\right)^2=2c+|\overrightarrow{AB}|^2$$

$$|\overrightarrow{PA}|+|\overrightarrow{PB}|=\sqrt{2c+|\overrightarrow{AB}|^2}\cdots\cdots\cdots③$$

$\sqrt{2c+|\overrightarrow{AB}|^2}$ は定数なので，③より点 P は 2 点 A, B を焦点とする楕円を描く。

長軸の長さは $\sqrt{2c+|\overrightarrow{AB}|^2}$，短軸の長さは $2\sqrt{\frac{1}{4}\left(2c+|\overrightarrow{AB}|^2\right)-\frac{1}{4}|\overrightarrow{AB}|^2}=\sqrt{2c}$ となる。

コメント

2 点 A, B の中点を原点として座標設定しようかと思いましたが，条件式②の形に注目して，ベクトルの大きさと内積を余弦定理で関連づけてみました。すると，楕円の定義式が導けました。

問　題

実数の定数 a, b に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ で定める。すべての実数 x で不等式 $f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$ が成り立つような点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。 [2014]

解答例

条件より，すべての実数 x に対して，$f(x)\leqq f(x)^3-2f(x)^2+2$ から，

$$f(x)^3-2f(x)^2-f(x)+2\geqq 0,\ \{f(x)-1\}\{f(x)+1\}\{f(x)-2\}\geqq 0$$

すると，$-1\leqq f(x)\leqq 1$，$2\leqq f(x)$ となる。

さて，$f(x)=\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{ax+b}{x^2+x+1}=0$ より，十分に大きな実数 x に対して，$2\leqq f(x)$ は成立しない。

よって，$-1\leqq f(x)\leqq 1$ から，$-1\leqq\dfrac{ax+b}{x^2+x+1}\leqq 1$ であり，$x^2+x+1>0$ より，

$$-x^2-x-1\leqq ax+b\ \cdots\cdots\cdots①,\ ax+b\leqq x^2+x+1\ \cdots\cdots\cdots②$$

①より，$x^2+(a+1)x+b+1\geqq 0$ となり，すべての実数 x に対して成立する条件は，

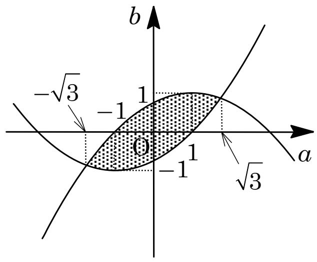
$$D=(a+1)^2-4(b+1)\leqq 0,\ b\geqq\frac{1}{4}(a+1)^2-1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より，$x^2-(a-1)x-b+1\geqq 0$ となり，すべての実数 x に対して成立する条件は，

$$D=(a-1)^2+4(b-1)\leqq 0$$

$$b\leqq-\frac{1}{4}(a-1)^2+1\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，求める点 $(a,\ b)$ の範囲は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

$f(x)$ の分母と分子の次数に注目すると，すべての x に対して，$f(x)\geqq 2$ は成り立たないことがわかります。この点を除くと，残りは数Ⅰ風です。

問　題

a が正の実数のとき $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}$ を求めよ。　[2012]

解答例

(i)　$0<a\leqq 1$ のとき

$1<1+a^n\leqq 2$ より，$1<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}\leqq 2^{\frac{1}{n}}$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=1$$

(ii)　$a>1$ のとき

$a^n<1+a^n<2a^n$ より，$a<(1+a^n)^{\frac{1}{n}}<2^{\frac{1}{n}}a$ となり，$n\to\infty$ のとき $2^{\frac{1}{n}}\to 1$ から，

$$\lim_{n\to\infty}(1+a^n)^{\frac{1}{n}}=a$$

コメント

見かけよりは難です。極限を大雑把にとらえ不等式で評価しました。

問　題

x, y を相異なる正の実数とする。数列$\{a_n\}$を

$$a_1 = 0,\ a_{n+1} = xa_n + y^{n+1}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定めるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような座標平面上の点$(x,\ y)$の範囲を図示せよ。　[2007]

解答例

k を 0 でない定数として，漸化式$a_{n+1} = xa_n + y^{n+1}$……①を満たす 1 つの数列を $a_n = ky^n$ とすると，

$$ky^{n+1} = kxy^n + y^{n+1}\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$x>0,\ y>0,\ x \neq y$ なので，$ky = kx + y$，$k = \dfrac{y}{y-x}$

①－②より，$a_{n+1} - ky^{n+1} = x(a_n - ky^n)$

$a_1 = 0$ から，$a_n - ky^n = (a_1 - ky^1)x^{n-1} = -kyx^{n-1}$

$$a_n = ky(y^{n-1} - x^{n-1}) = \frac{y^2}{y-x}(y^{n-1} - x^{n-1})\cdots\cdots\cdots③$$

(i)　$y>x$ のとき

$0<\dfrac{x}{y}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{x}{y}\right)^n = 0$ となり，③より，

$$a_n = \frac{y^2}{y-x}y^{n-1}\left\{1-\left(\frac{x}{y}\right)^{n-1}\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束する条件は，$0<y\leqq 1$ である。

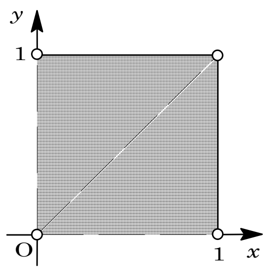
(ii)　$x>y$ のとき

$0<\dfrac{y}{x}<1$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right)^n = 0$ となり，③より，

$$a_n = \frac{y^2}{y-x}x^{n-1}\left\{\left(\frac{y}{x}\right)^{n-1} - 1\right\}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束する条件は，$0<x\leqq 1$ である。

(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ が有限の値に収束するような点$(x,\ y)$を図示すると，右図の網点部のようになる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



コメント

漸化式の解法問題です。一般項が求まれば，収束する条件を丁寧に図示するだけです。なお，上記の解法については「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。x^{2n} を $x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$ で割った余りを a_nx+b_n とする。すなわち, x の多項式 $P_n(x)$ があって

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x^2-x+\frac{n-1}{n^2}\right)+a_nx+b_n$$

が成り立っているとする。$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。 [2004]

解答例

$x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}=\left(x-\dfrac{1}{n}\right)\left(x-\dfrac{n-1}{n}\right)$より,

$$x^{2n}=P_n(x)\left(x-\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{n-1}{n}\right)+a_nx+b_n\cdots\cdots\cdots①$$

①に $x=\dfrac{1}{n}$ を代入すると,

$$\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}=\frac{1}{n}a_n+b_n,\ \frac{1}{n}a_n+b_n=\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots②$$

①に $x=\dfrac{n-1}{n}$ を代入すると,

$$\left(\frac{n-1}{n}\right)^{2n}=\frac{n-1}{n}a_n+b_n,\ \left(1-\frac{1}{n}\right)a_n+b_n=\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}\cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $\left(1-\dfrac{2}{n}\right)a_n=\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\dfrac{1}{n}\right)^{2n}$

$n\geqq3$ において,

$$a_n=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{2n}-\left(\frac{1}{n}\right)^{2n}\right\}=\frac{1}{1-\frac{2}{n}}\left[\left\{\left(1-\frac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2}-\frac{1}{n^{2n}}\right]$$

$n\to\infty$のとき, $1-\dfrac{2}{n}\to1$, $\left\{\left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{-n}\right\}^{-2}\to e^{-2}$, $\dfrac{1}{n^{2n}}\to0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=e^{-2}=\frac{1}{e^2}$$

②より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{n^{2n}}-\frac{1}{n}a_n\right)=0$

コメント

剰余の定理と数列の極限を融合させた基本問題です。2 次式 $x^2-x+\dfrac{n-1}{n^2}$ が因数分解できるので, 難しくはありません。

問　題

数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=1$，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$，$n(n-2)a_{n+1}=S_n$ $(n\geqq 1)$を満たすとき，一般項a_nを求めよ。　[2002]

解答例

条件より，$n(n-2)a_{n+1}=S_n$ $(n\geqq 1)$………①

$(n-1)(n-3)a_n=S_{n-1}$ $(n\geqq 2)$………②

①－②より，$n(n-2)a_{n+1}-(n-1)(n-3)a_n=a_n$，$n(n-2)a_{n+1}=(n-2)^2a_n$

$n\geqq 3$ で，$na_{n+1}=(n-2)a_n$

$n(n-1)a_{n+1}=(n-1)(n-2)a_n$

よって，$(n-1)(n-2)a_n=(3-1)(3-2)a_3=2a_3$

$$a_n=\frac{2a_3}{(n-1)(n-2)}\ (n\geqq 3)$$

ここで，①に$n=1$を代入すると，$1\cdot(-1)a_2=S_1$，$-a_2=a_1$より，$a_2=-a_1=-1$

さて, $n\geqq 3$ で，$S_n=a_1+a_2+\sum\limits_{k=3}^{n}a_k=1-1+\sum\limits_{k=3}^{n}\dfrac{2a_3}{(k-1)(k-2)}$

$$=2a_3\sum_{k=3}^{n}\left(\frac{1}{k-2}-\frac{1}{k-1}\right)=2a_3\left(1-\frac{1}{n-1}\right)$$

条件より，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$なので，$2a_3=1$，$a_3=\dfrac{1}{2}$

以上より，$a_1=1$，$a_2=-1$，$a_n=\dfrac{1}{(n-1)(n-2)}$ $(n\geqq 3)$

コメント

①に$n=2$を代入してa_3の値を求めようとしましたが，$0\cdot a_3=0$となり，何も得られませんでした。そこで，$\lim\limits_{n\to\infty}S_n=1$の利用となったわけです。

問　題

n, k は整数で, $n \geqq 2$, $0 \leqq k \leqq 4$ とする。サイコロを n 回投げて出た目の和を 5 で割ったときの余りが k に等しくなる確率を $p_n(k)$ とする。

(1)　$p_{n+1}(0)$, $\cdots$, $p_{n+1}(4)$ を $p_n(0)$, $\cdots$, $p_n(4)$ を用いて表せ。

(2)　$p_n(0)$, $\cdots$, $p_n(4)$ の最大値を M_n , 最小値を m_n とするとき, 次の(イ), (ロ)が成立することを示せ。

(イ)　$m_n \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_n$

(ロ)　任意の k, l（$0 \leqq k, l \leqq 4$）に対し, $p_{n+1}(k) - p_{n+1}(l) \leqq \dfrac{1}{6}(M_n - m_n)$

(3)　$\displaystyle\lim_{n \to \infty} p_n(k)$ を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　サイコロの目を 5 で割った余りが 1 となる確率は $\dfrac{2}{6} = \dfrac{1}{3}$ で, それ以外の場合の確率はそれぞれ $\dfrac{1}{6}$ である。

ここで, $p_n(0) + p_n(1) + p_n(2) + p_n(3) + p_n(4) = 1$ に留意すると,

$$p_{n+1}(0) = \frac{1}{6}p_n(0) + \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(2) + \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{3}p_n(4) = \frac{1}{6}p_n(4) + \frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(1) = \frac{1}{3}p_n(0) + \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(2) + \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{6}p_n(4) = \frac{1}{6}p_n(0) + \frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(2) = \frac{1}{6}p_n(0) + \frac{1}{3}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(2) + \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{6}p_n(4) = \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(3) = \frac{1}{6}p_n(0) + \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{3}p_n(2) + \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{6}p_n(4) = \frac{1}{6}p_n(2) + \frac{1}{6}$$

$$p_{n+1}(4) = \frac{1}{6}p_n(0) + \frac{1}{6}p_n(1) + \frac{1}{6}p_n(2) + \frac{1}{3}p_n(3) + \frac{1}{6}p_n(4) = \frac{1}{6}p_n(3) + \frac{1}{6}$$

(2)　条件より, $p_1(0) = \dfrac{1}{6}$, $p_1(1) = \dfrac{1}{3}$, $p_1(2) = \dfrac{1}{6}$, $p_1(3) = \dfrac{1}{6}$, $p_1(4) = \dfrac{1}{6}$

(1)の漸化式を用いて, $p_2(0) = p_2(1) = p_2(3) = p_2(4) = \dfrac{1}{6} \cdot \dfrac{1}{6} + \dfrac{1}{6} = \dfrac{7}{36}$

$$p_2(2) = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{2}{9}$$

まず, $n \geqq 2$ で $m_n \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_n$ が成立することを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n = 2$ のとき　$m_2 = \dfrac{7}{36}$, $M_2 = \dfrac{2}{9}$ より, $m_2 \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_2$

(ii)　$n = j$ のとき　$m_j \leqq \dfrac{1}{5} \leqq M_j$ と仮定する。

このとき，$M_{j+1}=\dfrac{1}{6}M_j+\dfrac{1}{6}\geqq\dfrac{1}{6}\cdot\dfrac{1}{5}+\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{5}$

$$m_{j+1}=\frac{1}{6}m_j+\frac{1}{6}\leqq\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{5}+\frac{1}{6}=\frac{1}{5}$$

(i)(ii)より, $n\geqq 2$ で $m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$ が成立する。

次に，任意の k, l（$0\leqq k$, $l\leqq 4$）に対して，$m_n\leqq p_n(k)\leqq M_n$，$m_n\leqq p_n(l)\leqq M_n$ が成立するので,

$$\begin{aligned}p_{n+1}(k)-p_{n+1}(l)&\leqq M_{n+1}-m_{n+1}\\&=\left(\frac{1}{6}M_n+\frac{1}{6}\right)-\left(\frac{1}{6}m_n+\frac{1}{6}\right)\\&=\frac{1}{6}(M_n-m_n)\end{aligned}$$

(3)　$M_{n+1}=\dfrac{1}{6}M_n+\dfrac{1}{6}$，$m_{n+1}=\dfrac{1}{6}m_n+\dfrac{1}{6}$ より，$M_{n+1}-m_{n+1}=\dfrac{1}{6}(M_n-m_n)$

$$M_n-m_n=(M_1-m_1)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

すると, $n\to\infty$ のとき $M_n-m_n\to 0$ となる。

さらに(2)より，$m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$ なので，$n\to\infty$ のとき $m_n\to\dfrac{1}{5}$，$M_n\to\dfrac{1}{5}$

したがって，$m_n\leqq p_n(k)\leqq M_n$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}p_n(k)=\frac{1}{5}$

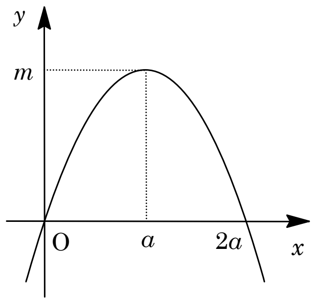
コメント

(1)の 5 種類の漸化式の形が同じなので，最大値 M_n についての漸化式，最小値 m_n についての漸化式を作りました。そのため，(3)では M_n と m_n の一般項が求まるのですが, (2)の結果 $m_n\leqq\dfrac{1}{5}\leqq M_n$ を利用するために，迂回した解法をとりました。

問　題

a, m は自然数で a は定数とする。xy 平面上の点$(a,\ m)$を頂点とし，原点と点$(2a,\ 0)$を通る放物線を考える。この放物線と x 軸で囲まれる領域の面積をS_m，この領域の内部および境界線上にある格子点の数をL_mとする。このとき極限値 $\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}$ を求めよ。ただし xy 平面上の格子点とはその点の x 座標と y 座標がともに整数となる点のことである。　[1998]

解答例



放物線の方程式を$y=f(x)$とすると，原点と点$(2a,\ 0)$を通ることより，$f(x)=kx(x-2a)$とおける。

頂点が$(a,\ m)$なので，$m=f(a)$から，$k=-\dfrac{m}{a^2}$となる。

よって，$f(x)=-\dfrac{m}{a^2}x(x-2a)$

すると，$S_m=\displaystyle\int_0^{2a}-\frac{m}{a^2}x(x-2a)\,dx=-\frac{m}{a^2}\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(2a)^3=\frac{4}{3}am$

また，$x=k\ (0\leqq k\leqq 2a)$上の格子点の個数をN_kとおくと，

$$N_k=[\,f(k)\,]+1\quad（[\,x\,]\text{は}x\text{の整数部分を表す}）$$

$$f(k)<N_k\leqq f(k)+1$$

$L_m=\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}N_k$ から，$\displaystyle\sum_{k=0}^{2a}f(k)<L_m\leqq\sum_{k=0}^{2a}\{\,f(k)+1\,\}$

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{2a}f(k)&=-\frac{m}{a^2}\sum_{k=0}^{2a}(k^2-2ak)\\&=-\frac{m}{a^2}\cdot\left\{\frac{1}{6}\cdot 2a(2a+1)(4a+1)-2a\cdot\frac{1}{2}\cdot 2a(2a+1)\right\}\\&=-\frac{m}{a^2}\cdot\frac{a(2a+1)}{3}(4a+1-6a)=\frac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}\end{aligned}$$

$$\sum_{k=0}^{2a}\{\,f(k)+1\,\}=\frac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}+(2a+1)$$

$$\frac{\dfrac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}}{\dfrac{4}{3}am}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\frac{\dfrac{m(2a+1)(2a-1)}{3a}+(2a+1)}{\dfrac{4}{3}am}\ \text{より，}$$

$$\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}<\frac{L_m}{S_m}\leqq\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}+\frac{3(2a+1)}{4am}$$

はさみうちの原理から，$\displaystyle\lim_{m\to\infty}\frac{L_m}{S_m}=\frac{(2a+1)(2a-1)}{4a^2}$

コメント

ガウス記号を用いて処理すると，明快に解を書くことができます。もっとも本問では，m が無限大の状態を考えるわけですから，$N_k=f(k)$としても，その誤差は，せいぜい$2a+1$ですので積もらない塵のようなものです。

問　題

(1)　n を 2 以上の自然数とするとき，関数 $f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ の $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における最大値 M_n を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$n\geqq 2$ のとき，$f_n(\theta)=(1+\cos\theta)\sin^{n-1}\theta$ に対し，

$$\begin{aligned}f_n{}'(\theta)&=-\sin\theta\sin^{n-1}\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\sin^{n-2}\theta\cos\theta\\&=\sin^{n-2}\theta\{-\sin^2\theta+(n-1)(1+\cos\theta)\cos\theta\}\\&=\sin^{n-2}\theta(\cos\theta+1)\{\cos\theta-1+(n-1)\cos\theta\}\\&=\sin^{n-2}\theta(\cos\theta+1)(n\cos\theta-1)\end{aligned}$$

すると，$0<\dfrac{1}{n}\leqq\dfrac{1}{2}$ から，$\cos\alpha=\dfrac{1}{n}$ となる α が $0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ に 1 つ存在し，$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ における $f_n(\theta)$ の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f_n{}'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$f_n(\theta)$		↗		↘	

よって，$f_n(\theta)$ の最大値 M_n は，

$$M_n=f_n(\alpha)=(1+\cos\alpha)\sin^{n-1}\alpha=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{n-1}{2}}$$

$$=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n-1}{2}}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n-1}{2}}=\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n+1}{2}}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n-1}{2}}$$

(2)　(1)から，$(M_n)^n=\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^{\frac{n^2+n}{2}}\Big(1-\dfrac{1}{n}\Big)^{\frac{n^2-n}{2}}$ となり，$I=\displaystyle\lim_{n\to\infty}(M_n)^n$ とおくと，

$$\begin{aligned}I&=\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n^2}{2}}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n}{2}}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n^2}{2}}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-\frac{n}{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^{\frac{n^2}{2}}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{\frac{n}{2}}\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-\frac{n}{2}}\\&=\lim_{n\to\infty}\Big\{\Big(1-\frac{1}{n^2}\Big)^{-n^2}\Big\}^{-\frac{1}{2}}\Big\{\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^{n}\Big\}^{\frac{1}{2}}\Big\{\Big(1-\frac{1}{n}\Big)^{-n}\Big\}^{\frac{1}{2}}\\&=e^{-\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}\cdot e^{\frac{1}{2}}=e^{\frac{1}{2}}=\sqrt{e}\end{aligned}$$

コメント

微分と極限の融合問題です。(1)の結論である M_n の式は，(2)の極限における e と相性の良さをほのめかすものとなっています。

問　題

(1)　a を実数とするとき，$(a,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線がただ 1 つ存在することを示せ。

(2)　$a_1=1$ として，$n=1,\ 2,\ \cdots$ について，$(a_n,\ 0)$ を通り，$y=e^x+1$ に接する直線の接点の x 座標を a_{n+1} とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)$ を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$y=e^x+1$ に対して，$y'=e^x$ となり，点 $(t,\ e^t+1)$ における接線の方程式は,

$$y-(e^t+1)=e^t(x-t),\ \ y=e^tx-(t-1)e^t+1\cdots\cdots\cdots①$$

①が $(a,\ 0)$ を通ることより，$e^ta-(t-1)e^t+1=0$ となり,

$$e^ta=(t-1)e^t-1,\ \ a=-e^{-t}+t-1\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(t)=-e^{-t}+t-1$ とおくと，$f'(t)=e^{-t}+1>0$ となり,

$$\lim_{t\to\infty}f(t)=\lim_{t\to\infty}(-e^{-t}+t-1)=\infty,\ \ \lim_{t\to-\infty}f(t)=\lim_{t\to-\infty}(-e^{-t}+t-1)=-\infty$$

よって，$f(t)$ は単調増加し，任意の実数値をとり得る。

すなわち，方程式②は任意の a に対してただ 1 つの実数解をもつことより，点 $(a,\ 0)$ を通る接線①は，ただ 1 つ存在する。

(2)　条件を②に適用すると，$a_n=-e^{-a_{n+1}}+a_{n+1}-1$ となり,

$$a_{n+1}-a_n=e^{-a_{n+1}}+1>1\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$a_1=1$ から，$a_n>1+(n-1)\cdot1=n$　$(n\geqq2)$

よって，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ となるので，③より,

$$\lim_{n\to\infty}(a_{n+1}-a_n)=\lim_{n\to\infty}(e^{-a_{n+1}}+1)=1$$

コメント

頻出の接線の本数の問題です。(2)では，$n\to\infty$ のとき $a_n\to\infty$ であることを示すのがポイントです。③の不等号に気づくかどうかだけですが。

問　題

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $\cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ の最大値を求めよ。ただし $\pi > 3.1$ および $\sqrt{3} > 1.7$ が成り立つことは証明なしに用いてよい。　[2013]

解答例

$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において，$f(x) = \cos x + \dfrac{\sqrt{3}}{4}x^2$ とおくと，$f(-x) = f(x)$ より，$f(x)$ は偶関数であり，以下，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ において考える。

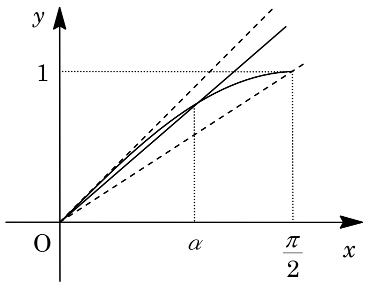
まず，$f'(x) = -\sin x + \dfrac{\sqrt{3}}{2}x$ ………(＊)

ここで，$\dfrac{\sqrt{3}}{2} < \dfrac{\sqrt{4}}{2} = 1$ であり，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}\pi > \dfrac{1.7\times 3.1}{2} = \dfrac{5.27}{2} > 2$ より，

$$\frac{2}{\pi} < \frac{\sqrt{3}}{2} < 1$$

すると，$0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ において，

$$\frac{2}{\pi}x < \frac{\sqrt{3}}{2}x < x$$



一方，$y = \sin x$ の原点における接線の方程式は，$y = x$ であることから，(＊)より，$f'(x) = 0$ は $0 < x < \dfrac{\pi}{2}$ においてただ 1 つの解をもつ。

これを $x = \alpha$ とおくと，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$	1	↘		↗	$\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$

ここで，$\dfrac{\sqrt{3}}{16}\pi^2 > \dfrac{1.7\times 3.1^2}{16} = \dfrac{16.337}{16} > 1$ より，$f(x)$ は $x = \dfrac{\pi}{2}$ において最大値をとる。

すなわち，$-\dfrac{\pi}{2} \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における $f(x)$ の最大値は，

$$f\left(\pm\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\sqrt{3}}{16}\pi^2$$

コメント

解答例のグラフをもとに考えています。数値計算も予想したよりは簡単でした。

問　題

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

解答例

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので,

$$D=u^2-4v\geqq 0 \text{………②}$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6)\geqq 0$，$u^2-8\leqq 0$，$-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から,

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$

$$=u^3-u^2-5u$$

$$z'=3u^2-2u-5=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は,

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

コメント

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

問　題

xyz 空間で，原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S と 3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α が共有点をもつことを示し，点 $(x,\ y,\ z)$ がその共有点全体の集合を動くとき，積 xyz が取り得る値の範囲を求めよ。　[2011]

解答例

原点 O を中心とする半径 $\sqrt{6}$ の球面 S の方程式は，

$$x^2+y^2+z^2=6 \cdots\cdots\cdots①$$

3 点 $(4,\ 0,\ 0)$，$(0,\ 4,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 4)$ を通る平面 α の方程式は，

$$x+y+z=4 \cdots\cdots\cdots②$$

さて，球面 S の中心 O と平面 α の距離 d は，$d=\dfrac{|-4|}{\sqrt{1^2+1^2+1^2}}=\dfrac{4}{\sqrt{3}}$

よって，$4<\sqrt{18}$ から，$d=\dfrac{4}{\sqrt{3}}<\sqrt{6}$ となり，球面 S と平面 α は共有点をもつ。

ここで，①②をともに満たす x, y, z に対して，$xyz=k$ ……③とおく。

①②より，$xy+yz+zx=\dfrac{1}{2}\{(x+y+z)^2-(x^2+y^2+z^2)\}=5$ ………④

すると，②③④より，x, y, z は u に関する 3 次方程式 $u^3-4u^2+5u-k=0$，すなわち $u^3-4u^2+5u=k$ ……⑤の 3 つの実数解としてみることができる。

さらに，⑤を uv 平面上でとらえなおし，

$$v=u^3-4u^2+5u \cdots\cdots\cdots⑥,\quad v=k \cdots\cdots\cdots⑦$$

これより，k の値の範囲は，曲線⑥と直線⑦が 3 個の共有点(接点は 2 個とみなす)をもつ条件として求めることができる。

⑥より，$v'=3u^2-8u+5=(3u-5)(u-1)$

u	$\cdots$	1	$\cdots$	$\dfrac{5}{3}$	$\cdots$
v'	$+$	0	$-$	0	$+$
v	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\dfrac{50}{27}$	$\nearrow$

曲線⑥の増減は右表のようになり，曲線⑥と u 軸に平行な直線⑦の共有点が 3 個(接点は 2 個とみなす)となる k の条件は，$\dfrac{50}{27}\leqq k\leqq 2$ であるので，

$$\frac{50}{27}\leqq xyz\leqq 2$$

コメント

導入は空間図形ですが，内容は，条件付きの最大・最小問題です。頻出題なので，演習は必須です。

問　題

直線 $y = px + q$ が関数 $y = \log x$ のグラフと共有点をもたないために p と q が満たすべき必要十分条件を求めよ。 [2008]

解答例

$y = px + q$ ……①と $y = \log x$ ……②を連立して，

$$\log x - px - q = 0 \quad (x > 0) \cdots\cdots\cdots ③$$

①と②のグラフが共有点をもたない条件は，③が実数解をもたないことである。

さて，$f(x) = \log x - px - q$ とおくと，

$$f'(x) = \frac{1}{x} - p$$

(i)　$p \leqq 0$ のとき

$f'(x) > 0$ となり，$f(x)$ は $x > 0$ で単調に増加し，

$$\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty, \quad \lim_{x \to \infty} f(x) = \infty$$

よって，$f(x) = 0$ は実数解を 1 つもつので，不適である。

(ii)　$p > 0$ のとき

$f'(x) = 0$ の解は $x = \dfrac{1}{p}$ となり，$f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	$\frac{1}{p}$	$\cdots$
$f'(x)$		$+$	0	$-$
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\displaystyle\lim_{x \to +0} f(x) = -\infty$ より，$f(x) = 0$ が実数解をもたない条件は，

$$f\left(\frac{1}{p}\right) = -\log p - 1 - q < 0, \quad \log p + q + 1 > 0$$

(i)(ii)より，求める共有点をもたない条件は，$p > 0$ かつ $\log p + q + 1 > 0$ である。

コメント

微分法の方程式への応用についての基本問題です。

問　題

すべての実数で定義され何回でも微分できる関数 $f(x)$ が $f(0)=0$，$f'(0)=1$ を満たし，さらに任意の実数 a, b に対して $1+f(a)f(b)\neq 0$ であって

$$f(a+b)=\frac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$$

を満たしている。

(1) 任意の実数 a に対して，$-1<f(a)<1$ であることを証明せよ。

(2) $y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸であることを証明せよ。 [2007]

解答例

(1) $f(a+b)=\dfrac{f(a)+f(b)}{1+f(a)f(b)}$ ……①において，$b=-a$ とおくと，$f(0)=0$ から，

$$0=\frac{f(a)+f(-a)}{1+f(a)f(-a)},\quad f(-a)=-f(a)\ \cdots\cdots\cdots②$$

また，①において，$b=a$ とおくと，$f(2a)=\dfrac{2f(a)}{1+\{f(a)\}^2}$ となり，

$$f(a)+1=\frac{2f\left(\frac{a}{2}\right)}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}+1=\frac{\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)+1\right\}^2}{1+\left\{f\left(\frac{a}{2}\right)\right\}^2}\geqq 0$$

ここで，$f\left(\frac{a}{2}\right)=-1$ となる a の存在を仮定すると，②より，

$$f\left(-\frac{a}{2}\right)=-f\left(\frac{a}{2}\right)=1$$

すると，$1+f\left(\frac{a}{2}\right)f\left(-\frac{a}{2}\right)=0$ となり，条件に反する。

よって，$f(a)+1>0$ から，$f(a)>-1$ となる。

さらに，②を用いると，$f(-a)=-f(a)<1$ となり, a が任意より $f(a)<1$

以上より，$-1<f(a)<1$ である。

(2) ①の両辺を b で微分すると，

$$f'(a+b)=\frac{f'(b)\{1+f(a)f(b)\}-\{f(a)+f(b)\}f(a)f'(b)}{\{1+f(a)f(b)\}^2}$$

$$=\frac{f'(b)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(b)\}^2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

③に $b=0$ を代入すると，

$$f'(a)=\frac{f'(0)\left[1-\{f(a)\}^2\right]}{\{1+f(a)f(0)\}^2}=1-\{f(a)\}^2\ \cdots\cdots\cdots④$$

すると, (1)から，$-1<f(x)<1$ なので，$f'(x)=1-\{f(x)\}^2>0$ となり, $x>0$ で

$$f(x)>f(0)=0$$

このとき，④より，$f''(x)=-2f(x)f'(x)<0$

よって，$y=f(x)$ のグラフは $x>0$ で上に凸である。

コメント

$f(0)=0$ が利用できるように，a と b に適当な関係を設定していくと，$f(x)$ が奇関数であることがわかります。この点を解の糸口としています。

問　題

k を正の整数とし，$2k\pi \leqq x \leqq (2k+1)\pi$ の範囲で定義された 2 曲線

$$C_1 : y = \cos x,\ \ C_2 : y = \frac{1-x^2}{1+x^2}$$

を考える。

(1)　C_1 と C_2 は共有点をもつことを示し，その点における C_1 の接線は点 $(0,\ 1)$ を通ることを示せ。

(2)　C_1 と C_2 の共有点はただ 1 つであることを証明せよ。　[2005]

解答例

(1)　$C_1 : y = \cos x$ ……①，$C_2 : y = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ ……②の共有点の条件は，$\cos x = \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$

ここで，$f(x) = \cos x - \dfrac{1-x^2}{1+x^2}$ とおくと，

$$f(2k\pi) = 1 - \frac{1-4k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2} = \frac{8k^2\pi^2}{1+4k^2\pi^2} > 0$$

$$f((2k+1)\pi) = -1 - \frac{1-(2k+1)^2\pi^2}{1+(2k+1)^2\pi^2} = \frac{-2}{1+(2k+1)^2\pi^2} < 0$$

これより，$f(x) = 0$ は $2k\pi < x < (2k+1)\pi$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ。すなわち，C_1 と C_2 はこの区間に少なくとも 1 つの共有点をもつ。

この共有点を $(\alpha,\ \cos\alpha)$ とすると，①②より，$\cos\alpha = \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}$ ………③

さて，点 $(\alpha,\ \cos\alpha)$ における C_1 の接線は，①より $y' = -\sin x$ なので，

$$y - \cos\alpha = -\sin\alpha(x-\alpha) \text{ ………④}$$

$x = 0$ のとき，$y = \alpha\sin\alpha + \cos\alpha$ ………⑤

ここで，$2k\pi < \alpha < (2k+1)\pi$ において $\sin\alpha > 0$ より，③から，

$$\sin\alpha = \sqrt{1-\left(\frac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2}\right)^2} = \sqrt{\frac{4\alpha^2}{(1+\alpha^2)^2}} = \frac{2\alpha}{1+\alpha^2}$$

⑤から，$y = \alpha\cdot\dfrac{2\alpha}{1+\alpha^2} + \dfrac{1-\alpha^2}{1+\alpha^2} = \dfrac{1+\alpha^2}{1+\alpha^2} = 1$ となり，接線④は点 $(0,\ 1)$ を通る。

(2)　点 $(0,\ 1)$ から C_1 に引いた接線は，接点を $(t,\ \cos t)$ とすると，

$$y - \cos t = -\sin t(x-t) \quad (2k\pi < t < (2k+1)\pi)$$

$(0,\ 1)$ を通ることより，$1-\cos t = t\sin t$，$t\sin t + \cos t - 1 = 0$

ここで，$g(t) = t\sin t + \cos t - 1$ とおくと，

$$g'(t) = \sin t + t\cos t - \sin t = t\cos t$$

右表より，$g(t)=0$ となる t は，$2k\pi<t<(2k+1)\pi$ にただ 1 つだけ存在し，言い換えると，点 $(0,\ 1)$ を通る接線の C_1 上の接点は，1 個だけしか存在しない。すなわち，C_1 と C_2 の共有点の個数は多くとも 1 つであり，(1)と合わせると，ただ 1 つとなる。

t	$2k\pi$	$\cdots$	$\left(2k+\frac{1}{2}\right)\pi$	$\cdots$	$(2k+1)\pi$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$	0	$\nearrow$		$\searrow$	-2

コメント

(2)は(1)の後半で示した C_1 と C_2 の共有点における C_1 の接線は，必ず点 $(0,\ 1)$ を通るということを用いています。ややくどく記述しましたが。

問　題

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする。 $0\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2004]

解答例

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta=\cos 4\theta-4\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=\cos 4\theta+2\cos 2\theta-2$ より,

$$f'(\theta)=-4\sin 4\theta-4\sin 2\theta=-4\cdot 2\sin\frac{6\theta}{2}\cos\frac{2\theta}{2}=-8\sin 3\theta\cos\theta$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ において増減表をつくると，右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$	$\cdots$	$\frac{2\pi}{3}$	$\cdots$	$\frac{3\pi}{4}$
$f'(\theta)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(\theta)$	1	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3	$\searrow$	$-\frac{7}{2}$	$\nearrow$	-3

したがって，最大値は $f(0)=1$，最小値は $f\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=f\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)=-\dfrac{7}{2}$ である。

コメント

微分法を用いて普通に解きました。角を 2θ に統一して平方完成を行っても OK です。穏やかな基本題です。

問　題

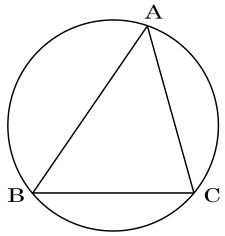
半径 1 の円周上に相異なる 3 点 A, B, C がある。

(1)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ ならば△ABC は鋭角三角形であることを示せ。

(2)　$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2\leqq 9$ が成立することを示せ。また，この等号が成立するのはどのような場合か。　[2002]

解答例

(1)　正弦定理より，$\dfrac{\mathrm{AB}}{\sin C}=\dfrac{\mathrm{BC}}{\sin A}=\dfrac{\mathrm{CA}}{\sin B}=2$



$$\mathrm{AB}=2\sin C,\ \mathrm{BC}=2\sin A,\ \mathrm{CA}=2\sin B$$

このとき，条件より $\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2>8$ なので，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{BC}^2&=\mathrm{AB}^2+\mathrm{CA}^2+\mathrm{BC}^2-2\mathrm{BC}^2\\&>8-2\mathrm{BC}^2=8-2\cdot 4\sin^2 A\\&=8(1-\sin^2 A)\geqq 0\end{aligned}$$

よって，$A<\dfrac{\pi}{2}$ となる。

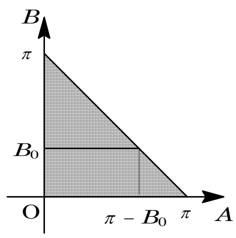
同様にして，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2-\mathrm{CA}^2>8-2\mathrm{CA}^2=8(1-\sin^2 B)\geqq 0$

$$\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2-\mathrm{AB}^2>8-2\mathrm{AB}^2=8(1-\sin^2 C)\geqq 0$$

よって，$B<\dfrac{\pi}{2}$，$C<\dfrac{\pi}{2}$

以上より，△ABC は鋭角三角形である。

(2)　
$$\begin{aligned}\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2&=4\sin^2 C+4\sin^2 A+4\sin^2 B\\&=4\sin^2(\pi-A-B)+4\sin^2 A+4\sin^2 B\\&=4\{\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)\}\end{aligned}$$



ここで，$P=\sin^2 A+\sin^2 B+\sin^2(A+B)$ とおいて，$0<A<\pi$，$0<B<\pi$，$0<A+B<\pi$ での最大値を求める。

まず，B を $0<B<\pi$ で $B=B_0$ と固定する。

次に，$0<A<\pi-B_0$ において，

$$P=\sin^2 A+\sin^2 B_0+\sin^2(A+B_0)$$

$$\frac{dP}{dA}=2\sin A\cos A+2\sin(A+B_0)\cos(A+B_0)=\sin 2A+\sin 2(A+B_0)$$

$$=2\sin\frac{2A+2A+2B_0}{2}\cos\frac{2A-2A-2B_0}{2}=2\sin(2A+B_0)\cos B_0$$

(i)　$\cos B_0>0$ $\left(0<B_0<\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき

$B_0<2A+B_0<2\pi-B_0$ において，$\dfrac{dP}{dA}=0$ となるのは，　$2A+B_0=\pi$，

$A=\dfrac{\pi-B_0}{2}$ のときである。

A	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-B_0}{2}$	$\cdots$	$\pi-B_0$
$\dfrac{dP}{dA}$		$+$	0	$-$	
P	$2\sin^2 B_0$	$\nearrow$		$\searrow$	$2\sin^2 B_0$

上表より $A=\dfrac{\pi-B_0}{2}$ のとき

P は最大となる。

このとき，

$$P=\sin^2\frac{\pi-B_0}{2}+\sin^2 B_0+\sin^2\frac{\pi+B_0}{2}=2\cos^2\frac{B_0}{2}+\sin^2 B_0$$
$$=1+\cos B_0+1-\cos^2 B_0=-\cos^2 B_0+\cos B_0+2$$

ここで，B_0 を B に戻し，$0<B<\dfrac{\pi}{2}$ で変化させると，

$$P=-\cos^2 B+\cos B+2=-\left(\cos B-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{9}{4}$$

$0<\cos B<1$ より, P の最大値は $\dfrac{9}{4}$ となる。

(ii)　$\cos B_0=0\ \left(B_0=\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき

$$P=\sin^2 A+\sin^2\frac{\pi}{2}+\sin^2\left(A+\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2 A+1+\cos^2 A=2$$

(iii)　$\cos B_0<0\ \left(\dfrac{\pi}{2}<B_0<\pi\right)$のとき

$0<A<\pi-B_0$ における P の値の増減は右表のようになり，

A	0	$\cdots$	$\dfrac{\pi-B_0}{2}$	$\cdots$	$\pi-B_0$
$\dfrac{dP}{dA}$		$-$	0	$+$	
P	$2\sin^2 B_0$	$\searrow$		$\nearrow$	$2\sin^2 B_0$

$$P<2\sin^2 B_0<2$$

(i)(ii)(iii)より，$P\leqq\dfrac{9}{4}$

以上より，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{BC}^2+\mathrm{CA}^2=4P\leqq 4\cdot\frac{9}{4}=9$$

等号が成立するのは $\cos B=\dfrac{1}{2}$ のとき，すなわち $B=\dfrac{\pi}{3}$ で，$A=\dfrac{\pi-\frac{\pi}{3}}{2}=\dfrac{\pi}{3}$ より，△ABC が正三角形の場合である。

コメント

(2)は，1 文字固定という考え方でていねいに解きました。本年度では一番難しい問題です。なお, (1)を利用すると, (i)の場合だけで OK です。

問　題

a, b, c を実数とする。$y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつという。このとき $a^2 > b$ が成立することを示し，さらにこれらの交点の x 座標のすべては開区間 $\left(-a - 2\sqrt{a^2 - b},\ -a + 2\sqrt{a^2 - b}\right)$ に含まれていることを示せ。

[2002]

解答例

$y = x^3 + 3ax^2 + 3bx$ ……①に対して，$y' = 3x^2 + 6ax + 3b = 3(x^2 + 2ax + b)$

$y' = 0$ の判別式 $D/4 = a^2 - b$ より，$a^2 > b$ のときは $y' = 0$ は 2 つの異なる実数解 $x = -a \pm \sqrt{a^2 - b}$ をもち，これを $x = \alpha$, β $(\alpha < \beta)$ とすると，①のグラフ増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	α	$\cdots$	β	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

これより，ある c に対して，①と $y = c$ のグラフは相異なる 3 つの交点をもつ。

また，$a^2 \leqq b$ のときは $y' \geqq 0$ となり，①は単調増加関数になる。これより，どんな c をとっても，①と $y = c$ のグラフは 1 個の共有点しかもたない。

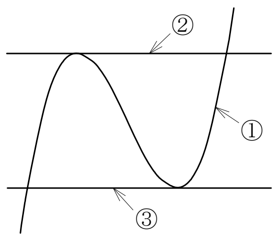
以上より，①と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつ条件は，$a^2 > b$ である。

さて，$a^2 > b$ のとき，①と $y = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha$ ……②のグラフの共有点は，

$$x^3 + 3ax^2 + 3bx = \alpha^3 + 3a\alpha^2 + 3b\alpha$$
$$(x - \alpha)^2(x + 2\alpha + 3a) = 0$$
$$x = \alpha,\quad x = -2\alpha + 3a$$

同様にして，①と $y = \beta^3 + 3a\beta^2 + 3b\beta$ ……③のグラフの共有点は，

$$x = \beta,\quad x = -2\beta + 3a$$



右図より，①と $y = c$ のグラフが相異なる 3 つの交点をもつとき，これらの交点の x 座標のすべては，開区間 $(-2\beta + 3a,\ -2\alpha + 3a) = \left(-a - 2\sqrt{a^2 - b},\ -a + 2\sqrt{a^2 - b}\right)$ に含まれている。

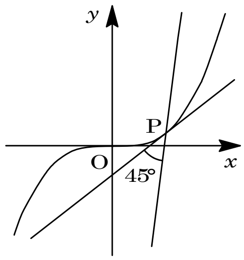
コメント

3 次関数のグラフについての文系風の基本問題です。

問　題

xy 平面上の曲線 $C: y=x^3$ 上の点 P における接線を，P を中心にして反時計回りに $45°$ 回転して得られる直線を L とする。C と L が，相異なる 3 点で交わるような P の範囲を図示せよ。　[2001]

解答例



$C: y=x^3$ より $y'=3x^2$ となるので，点 $\mathrm{P}(t,\ t^3)$ における接線の傾きは $3t^2$ となる。この接線と x 軸の正の向きとのなす角を θ とすると，$\tan\theta=3t^2$ である。

また，この接線を P のまわりに $45°$ 回転して得られる直線 L と, x 軸の正の向きとのなす角を φ とすると,

$$\tan\varphi=\tan(\theta+45°)=\frac{\tan\theta+\tan 45°}{1-\tan\theta\tan 45°}=\frac{3t^2+1}{1-3t^2}$$

よって，$t\neq\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のとき，直線 $L: y-t^3=\dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)$

なお，$t=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ のときは，直線 L は $x=\pm\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となり，条件を満たさない。

すると, C と L の共有点は，$x^3=\dfrac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)+t^3$ より,

$$x^3-t^3-\frac{3t^2+1}{1-3t^2}(x-t)=0,\ (x-t)\left(x^2+tx+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)=0$$

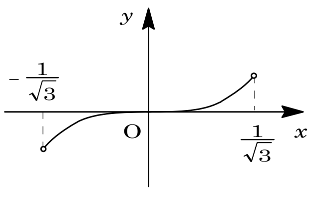
よって，$x=t$ または $x^2+tx+t^2+\dfrac{3t^2+1}{3t^2-1}=0$ ………①

求める条件は, ①が $x\neq t$ の異なる 2 実数解をもつことより,

$$t^2+t^2+t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\neq 0\ \cdots\cdots②,\ \ D=t^2-4\left(t^2+\frac{3t^2+1}{3t^2-1}\right)>0\ \cdots\cdots③$$

②は $\dfrac{9t^4+1}{3t^2-1}\neq 0$ となるので，つねに成立する。

③より，$\dfrac{9t^4+9t^2+4}{3t^2-1}<0$，$3t^2-1<0$



よって，$-\dfrac{1}{\sqrt{3}}<t<\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ より，点 P の範囲を図示すると右図のようになる。

コメント

穏やかな問題でした。方針に迷いが生ずることはなく，どんどん計算を進めていくことができます。

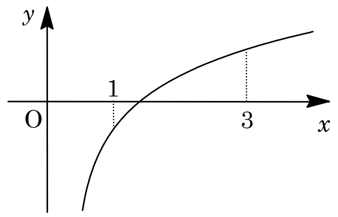
問　題

a を $0<a<1$ を満たす定数として，曲線 $y=\log(x-a)$ と x 軸と 2 直線 $x=1$，$x=3$ で囲まれる図形を x 軸のまわりに回転して得られる立体の体積を $V(a)$ とする。

(1)　$V(a)$ を求めよ。

(2)　a の値が $0<a<1$ の範囲で変化するとき，$V(a)$ の最小値を求めよ。　　[1998]

解答例



(1)　$V(a)=\int_1^3 \pi(\log(x-a))^2dx$

$$=\pi\int_{1-a}^{3-a}(\log t)^2dt\quad(x-a=t\text{ とおく})$$

$$=\pi\left\{\Big[t(\log t)^2\Big]_{1-a}^{3-a}-\int_{1-a}^{3-a}t\cdot 2\log t\cdot\frac{1}{t}dt\right\}$$

$$=\pi\left\{(3-a)(\log(3-a))^2-(1-a)(\log(1-a))^2-2\Big[t\log t-t\Big]_{1-a}^{3-a}\right\}$$

$$=\pi\left\{(3-a)(\log(3-a))^2-(1-a)(\log(1-a))^2\right\}$$

$$-2\pi\left\{(3-a)\log(3-a)-(1-a)\log(1-a)-2\right\}$$

(2)　$\dfrac{V(a)}{\pi}=f(a)$ とおいて，

$$f'(a)=-(\log(3-a))^2-2\log(3-a)+(\log(1-a))^2+2\log(1-a)$$

$$+2\log(3-a)+2-2\log(1-a)-2$$

$$=(\log(1-a))^2-(\log(3-a))^2$$

$$=(\log(1-a)+\log(3-a))(\log(1-a)-\log(3-a))$$

$0<a<1$ より，$\log(1-a)<0$，$\log(3-a)>0$ なので，$\log(1-a)-\log(3-a)<0$

ここで，$\log(1-a)+\log(3-a)>0$ とすると，$(1-a)(3-a)>1$

$a^2-4a+2>0$ から，$a<2-\sqrt{2}$

$f(a)$ の増減は右表のようになり，$a=2-\sqrt{2}$ のとき $f(a)$ は最小，すなわち $V(a)$ は最小となる。

a	0	……	$2-\sqrt{2}$	……	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$		↘		↗	

このとき，$3-a=1+\sqrt{2}$，$1-a=-1+\sqrt{2}$ より，

$$V(2-\sqrt{2})=\pi\left\{(1+\sqrt{2})(\log(1+\sqrt{2}))^2-(-1+\sqrt{2})(\log(-1+\sqrt{2}))^2\right\}$$

$$-2\pi\left\{(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})-(-1+\sqrt{2})\log(-1+\sqrt{2})-2\right\}$$

ここで，$-1+\sqrt{2}=\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}$ より，$\log(-1+\sqrt{2})=-\log(1+\sqrt{2})$ なので，

$$V(2-\sqrt{2})=\pi\left\{2(\log(1+\sqrt{2}))^2-4\sqrt{2}\log(1+\sqrt{2})+4\right\}$$

$$=2\pi\left\{\log(1+\sqrt{2})-\sqrt{2}\right\}^2$$

コメント

(1)(2)とも，丁寧に計算していけば完答できる問題です。(1)の結論はあまりきれいな形ではありませんが，(2)の計算のためにそのままにしておきました。なお，(2)の方は上のようにまとめないといけないでしょう。

問　題

定積分 $\displaystyle\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ の値を求めよ。 [2012]

解答例

$\displaystyle I=\int_1^{\sqrt{3}} \frac{1}{x^2}\log\sqrt{1+x^2}\,dx$ に対して，$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$I=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan^2\theta}\log\sqrt{1+\tan^2\theta}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2\theta}\log\sqrt{\frac{1}{\cos^2\theta}}\,d\theta$$

$$=-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\sin^2\theta}\log(\cos\theta)d\theta=\left[\frac{1}{\tan\theta}\log(\cos\theta)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\tan\theta}\cdot\frac{\sin\theta}{\cos\theta}d\theta$$

$$=\frac{1}{\sqrt{3}}\log\frac{1}{2}-\log\frac{1}{\sqrt{2}}+\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}}d\theta=-\frac{1}{\sqrt{3}}\log 2+\frac{1}{2}\log 2+\frac{\pi}{3}-\frac{\pi}{4}$$

$$=\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)\log 2+\frac{\pi}{12}$$

コメント

積分区間や被積分関数に注目し，置換積分→部分積分の順序で実行しました。しかし，部分積分→置換積分の方が簡単でした。

問　題

定積分 $\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx$ を求めよ。 [2011]

解答例

$I=\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}(x+1)\sqrt{1-2x^2}\,dx=\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx+\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx$ とする。

$1-2x^2=t$ とおくと，$-4x\,dx=dt$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}x\sqrt{1-2x^2}\,dx=-\frac{1}{4}\int_1^{\frac{1}{2}}\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{4}\int_{\frac{1}{2}}^1\sqrt{t}\,dt=\frac{1}{4}\cdot\frac{2}{3}\Big[t\sqrt{t}\,\Big]_{\frac{1}{2}}^1$$
$$=\frac{1}{6}\Big(1-\frac{\sqrt{2}}{4}\Big)=\frac{1}{6}-\frac{\sqrt{2}}{24}$$

$\sqrt{2}x=\sin\theta\,\Big(-\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}\Big)$ とおくと，$\sqrt{2}\,dx=\cos\theta\,d\theta$ となり，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\sqrt{1-2x^2}\,dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\sqrt{1-\sin^2\theta}\cos\theta\,d\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}\int_0^{\frac{\pi}{4}}\cos^2\theta\,d\theta$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big[\,\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\,\Big]_0^{\frac{\pi}{4}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{4}\Big(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\Big)=\frac{\sqrt{2}}{16}\pi+\frac{\sqrt{2}}{8}$$

よって，$I=\dfrac{1}{6}-\dfrac{\sqrt{2}}{24}+\dfrac{\sqrt{2}}{16}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{8}=\dfrac{\sqrt{2}}{16}\pi+\dfrac{\sqrt{2}}{12}+\dfrac{1}{6}$

コメント

定積分の計算問題です。後半は円の面積と関連させてもよいでしょう。

問　題

n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる。各ボールはいずれかの箱に入るものとし，どの箱に入る確率も等しいとする。どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない確率を p_n とする。このとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n}$ を求めよ。　[2010]

解答例

まず，n 個のボールを $2n$ 個の箱へ投げ入れる $(2n)^n$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

このとき，どの箱にも 1 個以下のボールしか入っていない場合は，${}_{2n}\mathrm{P}_n$ 通りあるので，その確率 p_n は，

$$\begin{aligned} p_n &= \frac{{}_{2n}\mathrm{P}_n}{(2n)^n} = \frac{1}{2^n}\cdot\frac{2n}{n}\cdot\frac{2n-1}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{2n-n+2}{n}\cdot\frac{2n-n+1}{n} \\ &= \frac{1}{2^n}\cdot\frac{n+1}{n}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\cdots\cdot\frac{n+n-1}{n}\cdot\frac{n+n}{n} \\ &= \frac{1}{2^n}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(1+\frac{2}{n}\right)\cdot\cdots\cdot\left(1+\frac{n-1}{n}\right)\left(1+\frac{n}{n}\right) \end{aligned}$$

すると，$\log p_n = \log\dfrac{1}{2^n} + \log\left(1+\dfrac{1}{n}\right) + \log\left(1+\dfrac{2}{n}\right) + \cdots + \log\left(1+\dfrac{n-1}{n}\right) + \log\left(1+\dfrac{n}{n}\right)$

となり，

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty}\frac{\log p_n}{n} &= \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left\{-n\log 2 + \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right)\right\} = -\log 2 + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k}{n}\right) \\ &= -\log 2 + \int_0^1 \log(1+x)\,dx = -\log 2 + \Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^1 - \int_0^1 dx \\ &= -\log 2 + 2\log 2 - 1 = \log 2 - 1 \end{aligned}$$

コメント

出題頻度が高いとは言えませんが，ときどき見かける確率と区分求積の融合問題です。演習必須の 1 題です。

問　題

定積分 $\displaystyle\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ を求めよ。 [2007]

解答例

$\displaystyle I=\int_0^2 \frac{2x+1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx+\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx$ とおく。

まず，$x^2+4=t$ とおくと，

$$\int_0^2 \frac{2x}{\sqrt{x^2+4}}\,dx=\int_4^8 \frac{1}{\sqrt{t}}\,dt=2\Big[\sqrt{t}\,\Big]_4^8=4\sqrt{2}-4$$

また，$x=2\tan\theta\ \left(-\frac{\pi}{2}<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$，さらに $\sin\theta=u$ とおくと，

$$\begin{aligned}\int_0^2 \frac{1}{\sqrt{x^2+4}}\,dx&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{2\sqrt{\tan^2\theta+1}}\cdot\frac{2}{\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta\\&=\int_0^{\frac{\pi}{4}} \frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}\,d\theta=\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \frac{1}{1-u^2}\,du\\&=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\left(\frac{1}{1+u}+\frac{1}{1-u}\right)du=\frac{1}{2}\Big[\log\Big|\frac{1+u}{1-u}\Big|\Big]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\\&=\frac{1}{2}\log\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}=\frac{1}{2}\log(\sqrt{2}+1)^2=\log(\sqrt{2}+1)\end{aligned}$$

以上より，$I=4\sqrt{2}-4+\log(\sqrt{2}+1)$

コメント

置換積分の基本題です。

問　題

$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ として，関数 F を $F(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta x\cos(x+\alpha)\,dx$ で定める。θ が $\left[0,\ \dfrac{\pi}{2}\right]$ の範囲を動くとき, F の最大値を求めよ。　　　　[2006]

解答例

条件より，$F(\theta)=\displaystyle\int_0^\theta x\cos(x+\alpha)\,dx$ なので,

$$F'(\theta)=\theta\cos(\theta+\alpha)$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$，$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$ なので，$0<\theta+\alpha<\pi$ となり，$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ $\left(\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)$ のとき $F'(\theta)=0$ となる。

すると，右の増減表より，$\theta=\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ のとき $F(\theta)$ は最大となる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}-\alpha$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$F'(\theta)$	0	$+$	0	$-$	
$F(\theta)$		$\nearrow$		$\searrow$	

よって，$F(\theta)$ の最大値は,

$$F\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}x\cos(x+\alpha)\,dx=\Big[x\sin(x+\alpha)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}-\int_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}\sin(x+\alpha)\,dx$$

$$=\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)\sin\frac{\pi}{2}+\Big[\cos(x+\alpha)\Big]_0^{\frac{\pi}{2}-\alpha}=\frac{\pi}{2}-\alpha-\cos\alpha$$

コメント

あまりにも簡単に結果がでてしまい，不気味な感じがします。

問　題

次の極限値を求めよ。　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx$ 　　[2001]

解答例

$nx = t$ とおくと，$\dfrac{dt}{dx} = n$ より，

$$I_n = \int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx = \int_0^{n^2\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\frac{1}{n}\,dt$$

$$= \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}|\sin t|\,dt = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n^2}\left|\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt\right|$$

ここで，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t\right)' = -\dfrac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t + e^{-\frac{t}{n}}\cos t$ ………①

$$\left(e^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)' = -\frac{1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\cos t - e^{-\frac{t}{n}}\sin t \text{ ………②}$$

①＋②×n より，$\left(e^{-\frac{t}{n}}\sin t + ne^{-\frac{t}{n}}\cos t\right)' = -\dfrac{n^2+1}{n}e^{-\frac{t}{n}}\sin t$

$$e^{-\frac{t}{n}}\sin t = -\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{t}{n}}(\sin t + n\cos t)\right\}'$$

すると，$\displaystyle\int_{(k-1)\pi}^{k\pi} e^{-\frac{t}{n}}\sin t\,dt = -\frac{n}{n^2+1}\left[e^{-\frac{t}{n}}(\sin t + n\cos t)\right]_{(k-1)\pi}^{k\pi}$

$$= -\frac{n}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}n\cos k\pi - e^{-\frac{k-1}{n}\pi}n\cos(k-1)\pi\right\}$$

$$= -\frac{n^2}{n^2+1}\left\{e^{-\frac{k}{n}\pi}(-1)^k - e^{-\frac{k-1}{n}\pi}(-1)^{k-1}\right\} = -\frac{n^2}{n^2+1}(-1)^k(1+e^{\frac{\pi}{n}})e^{-\frac{k}{n}\pi}$$

よって，$\displaystyle I_n = \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\sum_{k=1}^{n^2}e^{-\frac{k}{n}\pi} = \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{e^{-\frac{\pi}{n}}(1-e^{-\frac{\pi}{n}\cdot n^2})}{1-e^{-\frac{\pi}{n}}}$

$$= \frac{n}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})\cdot\frac{1-e^{-n\pi}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1} = \frac{1}{\pi}\cdot\frac{n^2}{n^2+1}(1+e^{\frac{\pi}{n}})(1-e^{-n\pi})\cdot\frac{\frac{\pi}{n}}{e^{\frac{\pi}{n}}-1}$$

以上より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\int_0^{n\pi} e^{-x}|\sin nx|\,dx = \lim_{n\to\infty} I_n = \frac{1}{\pi}\cdot 1\cdot 2\cdot 1\cdot 1 = \frac{2}{\pi}$

コメント

積分と数列の和に関する超頻出問題です。正確な計算力がすべてです。

問　題

数列$\{c_n\}$を次の式で定める。

$$c_n=(n+1)\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx\ \ (n=1,\ 2,\ \cdots)$$

このとき，

(1)　c_nとc_{n+2}の関係を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n$を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値をcとするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{c_{n+1}-c}{c_n-c}$を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　部分積分を用いて，

$$\begin{aligned}
c_{n+2}&=(n+3)\int_0^1 x^{n+2}\cos\pi x\,dx\\
&=(n+3)\left\{\frac{1}{\pi}\Big[x^{n+2}\sin\pi x\Big]_0^1-\frac{1}{\pi}\int_0^1(n+2)x^{n+1}\sin\pi x\,dx\right\}\\
&=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\int_0^1 x^{n+1}\sin\pi x\,dx\\
&=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi}\left\{-\frac{1}{\pi}\Big[x^{n+1}\cos\pi x\Big]_0^1+\frac{1}{\pi}\int_0^1(n+1)x^n\cos\pi x\,dx\right\}\\
&=\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(-1)-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(n+1)\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx\\
&=-\frac{(n+3)(n+2)}{\pi^2}(1+c_n)
\end{aligned}$$

(2)　$\displaystyle|c_n|=(n+1)\left|\int_0^1 x^n\cos\pi x\,dx\right|\leqq(n+1)\int_0^1|x^n\cos\pi x|\,dx$ ………①

$0\leqq x\leqq1$において，$|x^n\cos\pi x|\leqq x^n$より，

$$(n+1)\int_0^1|x^n\cos\pi x|\,dx\leqq(n+1)\int_0^1 x^n dx=(n+1)\frac{1}{n+1}=1\ \text{………②}$$

(1)より，$\displaystyle 1+c_n=-\frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$なので，①②より$|c_n|\leqq1$を用いて，

$$|1+c_n|=\frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}|c_{n+2}|\leqq\frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}$$

$n\to\infty$のとき$|1+c_n|\to0$なので，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=-1$

(3)　(2)から，$\displaystyle c_n-c=c_n+1=-\frac{\pi^2}{(n+3)(n+2)}c_{n+2}$より，

$$c_{n+1}-c=-\frac{\pi^2}{(n+4)(n+3)}c_{n+3}$$

よって，$\dfrac{c_{n+1}-c}{c_n-c}=\dfrac{(n+3)(n+2)}{(n+4)(n+3)}\cdot\dfrac{c_{n+3}}{c_{n+2}}=\dfrac{1+\dfrac{2}{n}}{1+\dfrac{4}{n}}\cdot\dfrac{c_{n+3}}{c_{n+2}}$

(2)より，$\lim\limits_{n\to\infty}c_n=-1$ なので，$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{c_{n+1}-c}{c_n-c}=\dfrac{1\times(-1)}{1\times(-1)}=1$

コメント

(1)の漸化式から，(2)の $\lim\limits_{n\to\infty}c_n$ が -1 であることは容易に推測できます。後はこれを論理的に示せばよいことになります。

問　題

(1)　$a_0 < b_0$，$a_1 < b_1$ を満たす正の実数 a_0，b_0，a_1，b_1 について，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1} > \frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$$

(2)　n 個の自然数 x_1，x_2，……，x_n は互いに相異なり，$1 \leqq x_k \leqq n$（$1 \leqq k \leqq n$）を満たしているとする。このとき，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1} > n-\frac{8}{5}$$

[1999]

解答例

(1)

$$\frac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\frac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1}-\frac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}-\frac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}=\frac{{b_1}^2-{a_1}^2}{{a_0}^2+1}-\frac{{b_1}^2-{a_1}^2}{{b_0}^2+1}$$

$$=\frac{({b_1}^2-{a_1}^2)({b_0}^2-{a_0}^2)}{({a_0}^2+1)({b_0}^2+1)}$$

$0 < a_0 < b_0$，$0 < a_1 < b_1$ より，$\dfrac{{b_1}^2}{{a_0}^2+1}+\dfrac{{a_1}^2}{{b_0}^2+1} > \dfrac{{a_1}^2}{{a_0}^2+1}+\dfrac{{b_1}^2}{{b_0}^2+1}$

(2)　まず，$1 \leqq i < j \leqq n$ とし，$x_i = y_j$，$x_j = y_i$，$x_k = y_k$ $(k \neq i,\ k \neq j)$ とすると，条件より，$\{x_1,\ x_2, \cdots\cdots, x_n\} = \{y_1,\ y_2, \cdots\cdots, y_n\} = \{1,\ 2, \cdots\cdots, n\}$

さらに $x_i > x_j$ のとき，(1)より

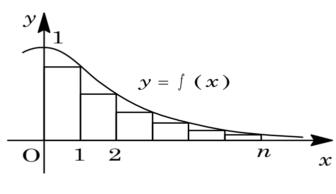
$$\frac{{x_i}^2}{i^2+1}+\frac{{x_j}^2}{j^2+1} > \frac{{x_j}^2}{i^2+1}+\frac{{x_i}^2}{j^2+1}=\frac{{y_i}^2}{i^2+1}+\frac{{y_j}^2}{j^2+1}$$

すると，$S_n = \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1} > \sum_{k=1}^{n}\frac{{y_k}^2}{k^2+1}$ となり，同様にして $1 \leqq p < q \leqq n$ で $x_p > x_q$ のときは，x_p の値と x_q の値を交換していくと，S_n の値は減少していく。よって，S_n の値が最小となるのは $x_1 < x_2 < \cdots\cdots < x_n$，すなわち $x_k = k$ のときである。

以上より，$S_n \geqq \displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}\left(1-\frac{1}{k^2+1}\right)=n-\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}$ ………①

さて，$f(x)=\dfrac{1}{x^2+1}$ とすると，$x>0$ で

$f'(x)=-\dfrac{2x}{(x^2+1)^2} < 0$ となり，$f(x)$ は単調に減少する。



右図において，面積を比較して，

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k^2+1}=\sum_{k=1}^{n}f(k)<\int_0^n f(x)\,dx=\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx\cdots\cdots\cdots②$$

$x=\tan\theta$ $\left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおき，$n=\tan\alpha$ $\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$とすると，

$$\int_0^n\frac{1}{x^2+1}dx=\int_0^\alpha\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=\int_0^\alpha d\theta=\alpha<\frac{\pi}{2}<\frac{3.2}{2}=\frac{8}{5}\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より，$S_n>n-\dfrac{8}{5}$，すなわち$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{{x_k}^2}{k^2+1}>n-\frac{8}{5}$

コメント

(2)の前半は，わかっているのにそれを表現するのが難しく，もどかしく感じてしまいます。87 年に東大・理で同じ考え方をする問題が出ています。

問　題

$a \geqq 0$ とする。$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ の範囲で曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積を $S(a)$ とする。このとき，$S(a)$ の最小値を求めよ。

（ここで「囲まれた部分」とは，上の曲線または直線のうち 2 つ以上で囲まれた部分を意味するものとする。）　[2017]

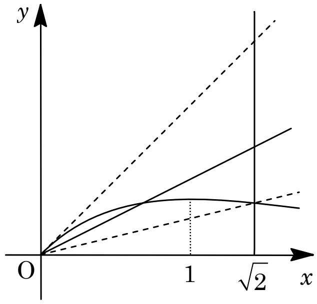
解答例

$0 \leqq x \leqq \sqrt{2}$ において，曲線 $y = xe^{-x}$ に対し，

$$y' = e^{-x} - xe^{-x} = (1-x)e^{-x}$$

すると，y の増減は右表のようになり，直線 $y = ax$ $(a \geqq 0)$，直線 $x = \sqrt{2}$ と合わせて図示すると，右図のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{2}$
y'	1	$+$	0	$-$	
y	0	$\nearrow$	e^{-1}	$\searrow$	$\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}$



ここで，直線 $y = ax$ が点 $(\sqrt{2},\ \sqrt{2}e^{-\sqrt{2}})$ を通るとき，

$a = \dfrac{\sqrt{2}e^{-\sqrt{2}}}{\sqrt{2}} = e^{-\sqrt{2}}$ となり，原点における接線のとき，

$x = 0$ で $y' = 1$ から $a = 1$ である。

さて，曲線 $y = xe^{-x}$，直線 $y = ax$，直線 $x = \sqrt{2}$ によって囲まれた部分の面積 $S(a)$ は，

(i)　$0 \leqq a \leqq e^{-\sqrt{2}}$ のとき　$S(a)$ は単調に減少する。

(ii)　$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ のとき

$y = xe^{-x}$ と $y = ax$ を連立すると，$xe^{-x} = ax$ から，$x = 0,\ -\log a$ となるので，

$$S(a) = \int_0^{-\log a}(xe^{-x} - ax)\,dx + \int_{-\log a}^{\sqrt{2}}(ax - xe^{-x})\,dx$$

ここで，$F(x) = \displaystyle\int xe^{-x}dx = -xe^{-x} + \int e^{-x}dx = -(x+1)e^{-x} + C$ とおくと，

$$\begin{aligned}S(a) &= F(-\log a) - F(0) - F(\sqrt{2}) + F(-\log a) + \frac{a}{2}\cdot 2 - \frac{a}{2}(\log a)^2\cdot 2\\ &= 2F(-\log a) - F(0) - F(\sqrt{2}) + a - a(\log a)^2\\ &= -2a(-\log a + 1) + 1 + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + a - a(\log a)^2\\ &= a\{-(\log a)^2 + 2\log a - 1\} + (\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}} + 1\end{aligned}$$

$$S'(a) = -(\log a)^2 + 2\log a - 1 + a\left(-2\log a\cdot\frac{1}{a} + \frac{2}{a}\right) = -(\log a)^2 + 1$$

$S'(a) = 0$ とすると，$\log a = \pm 1$ から $a = e^{\pm 1}$ となるので，$e^{-\sqrt{2}} \leqq a \leqq 1$ のとき $S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	$e^{-\sqrt{2}}$	$\cdots$	e^{-1}	$\cdots$	1
$S'(a)$		$-$	0	$+$	
$S(a)$		$\searrow$		$\nearrow$	

(iii)　$a \geqq 1$ のとき　$S(a)$ は単調に増加する。

すると，$S(a)$ は $a=e^{-\sqrt{2}}$，1 で連続なので，(i)～(iii)の結果から，$a=e^{-1}$ のときに最小となり，最小値は，

$$S(e^{-1})=e^{-1}(-1-2-1)+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}+1=1-4e^{-1}+(\sqrt{2}+1)e^{-\sqrt{2}}$$

コメント

微積分の総合問題です。計算ミスに要注意です。

問　題

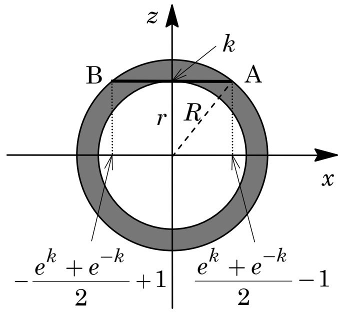
xyz 空間において，平面 $y=z$ の中で，$|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0\leqq y\leqq\log a$ で与えられる図形 D を考える。ただし a は 1 より大きい定数とする。

この図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2016]

解答例

図形 D: $y=z$，$|x|\leqq\dfrac{e^y+e^{-y}}{2}-1$，$0\leqq y\leqq\log a$ $(a>1)$ を y 軸に垂直な平面 $y=k$ で切断したときの切り口は,

$$z=k,\ |x|\leqq\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1,\ 0\leqq k\leqq\log a$$



平面 $y=k$ 上で図示すると，右図の線分 AB となる。

さて，この線分を y 軸のまわりに 1 回転させてできるドーナツ形の外径を R, 内径を r とすると,

$$R=\sqrt{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2},\ r=k$$

このドーナツ形の面積を $S(k)$ とすると,

$$S(k)=\pi R^2-\pi r^2=\pi\left\{k^2+\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2\right\}-\pi k^2=\pi\left(\frac{e^k+e^{-k}}{2}-1\right)^2$$
$$=\frac{\pi}{4}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)$$

したがって，図形 D を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は,

$$V=\int_0^{\log a}S(k)dk=\frac{\pi}{4}\int_0^{\log a}(e^{2k}+e^{-2k}-4e^k-4e^{-k}+6)dk$$
$$=\frac{\pi}{4}\left[\frac{1}{2}e^{2k}-\frac{1}{2}e^{-2k}-4e^k+4e^{-k}+6k\right]_0^{\log a}$$
$$=\frac{\pi}{4}\left\{\frac{1}{2}(a^2-1)-\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a^2}-1\right)-4(a-1)+4\left(\frac{1}{a}-1\right)+6\log a\right\}$$
$$=\pi\left(\frac{a^2}{8}-\frac{1}{8a^2}-a+\frac{1}{a}+\frac{3}{2}\log a\right)$$

コメント

空間図形の回転体の体積を求める問題です。回転軸に垂直な平面での切り口の面積を求め，それを回転軸方向に積分することで体積を計算するという基本に従っています。見かけよりはスムーズに進みます。

問　題

2 つの関数 $y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$ と $y=\sin 2x$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分で囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。ただし，$x=0$ と $x=\dfrac{\pi}{2}$ は領域を囲む線とは考えない。　[2015]

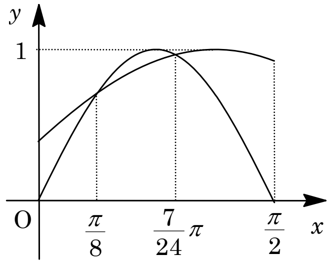
解答例

$y=\sin\left(x+\dfrac{\pi}{8}\right)$……①，$y=\sin 2x$……②を連立し，

$$\sin\left(x+\frac{\pi}{8}\right)=\sin 2x$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ から，$x+\dfrac{\pi}{8}=2x$ または $x+\dfrac{\pi}{8}=\pi-2x$

よって，①②のグラフの交点は，$x=\dfrac{\pi}{8}$，$\dfrac{7}{24}\pi$ となる。



さて，①②のグラフで囲まれる領域を，x 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\pi\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\left\{\sin^2 2x-\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)\right\}dx$$

ここで，$I_1=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\sin^2 2x\,dx$，$I_2=\displaystyle\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}\sin^2\left(x+\frac{\pi}{8}\right)dx$ とおくと，

$$I_1=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}(1-\cos 4x)\,dx=\frac{1}{2}\Big[x-\frac{1}{4}\sin 4x\Big]_{\frac{\pi}{8}}^{\frac{7}{24}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{8}\cdot\left(-\frac{3}{2}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{3}{16}$$

また，$x+\dfrac{\pi}{8}=t$ とおくと，$x=\dfrac{\pi}{8}\to\dfrac{7}{24}\pi$ のとき $t=\dfrac{\pi}{4}\to\dfrac{5}{12}\pi$ となり，

$$I_2=\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi}\sin^2 t\,dt=\frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi}(1-\cos 2t)\,dt=\frac{1}{2}\Big[t-\frac{1}{2}\sin 2t\Big]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{5}{12}\pi}$$

$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\pi}{6}-\frac{1}{4}\cdot\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{\pi}{12}+\frac{1}{8}$$

以上より，$V=\pi(I_1-I_2)=\pi\left(\dfrac{\pi}{12}+\dfrac{3}{16}-\dfrac{\pi}{12}-\dfrac{1}{8}\right)=\dfrac{\pi}{16}$

コメント

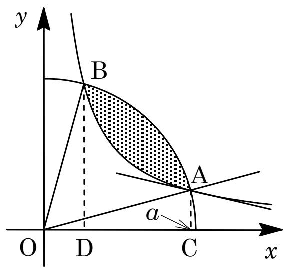
回転体の体積を求める基本題です。計算量も少なめです。なお，交点を求める際には，和積公式という手もあります。

問　題

双曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ の第 1 象限にある部分と，原点 O を中心とする円の第 1 象限にある部分を，それぞれ C_1，C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 つの異なる点 A, B で交わり，点 A における C_1 の接線 l と線分 OA のなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ であるとする。このとき，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2014]

解答例

まず，双曲線 $C_1 : y=\dfrac{1}{x}$ と原点 O を中心とする円 C_2 の交点 A, B は，直線 $y=x$ に関して対称なので，点 A の x 座標 a を，$a>1$ としておくことができる。



さて，$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ から，線分 OA と x 軸の正の部分とのなす角を α とすると，$\tan\alpha=\dfrac{1}{a^2}$ である。

次に，$y=\dfrac{1}{x}$ に対して $y'=-\dfrac{1}{x^2}$ より，A における双曲線の接線 l と x 軸の正の部分とのなす角を β とおくと，$\tan\beta=-\dfrac{1}{a^2}$ である。

すると，l と OA のなす角 $\dfrac{\pi}{6}$ から $\alpha-\beta=\dfrac{\pi}{6}$ となり，$\tan(\alpha-\beta)=\tan\dfrac{\pi}{6}$ より，

$$\frac{1}{\sqrt{3}}=\frac{\dfrac{1}{a^2}-\left(-\dfrac{1}{a^2}\right)}{1+\dfrac{1}{a^2}\left(-\dfrac{1}{a^2}\right)}=\frac{2a^2}{a^4-1},\quad a^4-2\sqrt{3}a^2-1=0$$

よって，$a^2=\sqrt{3}+2$ より，$\tan\alpha=\dfrac{1}{\sqrt{3}+2}=2-\sqrt{3}$，すなわち $\alpha=\dfrac{\pi}{12}$ であり，

$$\mathrm{OA}=\sqrt{a^2+\frac{1}{a^2}}=\sqrt{\sqrt{3}+2+2-\sqrt{3}}=2$$

ここで，対称性から $\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{a},\ a\right)$ なので，線分 OA, OB と C_1 によって囲まれた図形の面積を S_1，線分 OA, OB と C_2 によって囲まれた図形の面積を S_2 とおくと，

$$S_2=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\left(\frac{\pi}{2}-2\cdot\frac{\pi}{12}\right)=\frac{2}{3}\pi$$

また，$\mathrm{C}(a,\ 0)$，$\mathrm{D}\left(\dfrac{1}{a},\ 0\right)$ とおくと，△OAC と△OBD は合同であり，

$$S_1=\int_{\frac{1}{a}}^{a}\frac{1}{x}dx+\triangle\mathrm{OBD}-\triangle\mathrm{OAC}=\Big[\log x\Big]_{\frac{1}{a}}^{a}=\log a-\log\frac{1}{a}=2\log a$$
$$=\log a^2=\log(2+\sqrt{3})$$

したがって，C_1 と C_2 で囲まれる図形の面積 S は，

$$S = S_2 - S_1 = \frac{2}{3}\pi - \log(2+\sqrt{3})$$

コメント

$\tan\alpha = 2-\sqrt{3}$ を満たす α は，$\alpha = \dfrac{\pi}{12}$ という知識を利用しています。もし，この関係を使わなければ，$\tan\beta = -\tan\alpha$ に注目して，x 軸，接線 l，線分 OA で二等辺三角形を作るという方法も考えられますが……。

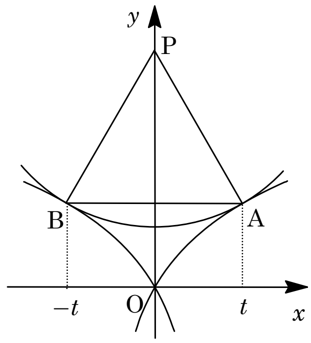
問　題

xy 平面上で，y 軸上の点 P を中心とする円 C が 2 つの曲線

$$C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x),\ C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$$

とそれぞれ点 A，点 B で接しているとする。さらに△PAB は A と B が y 軸に関して対称な位置にある正三角形であるとする。このとき 3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を求めよ。ただし，2 つの曲線がある点で接するとは，その点を共有し，さらにその点において共通の接線をもつことである。　[2013]

解答例



曲線 $C_1 : y=\sqrt{3}\log(1+x)$ と $C_2 : y=\sqrt{3}\log(1-x)$ は y 軸対称なので，y 軸上の点 P を中心とする円 C が C_1 に接するとき，円 C は C_2 にも接する。

さて，円 C と C_1，C_2 との接点をそれぞれ A，B とするとき，△PAB が正三角形となることから，辺 PA と y 軸とのなす角は $\dfrac{\pi}{6}$ である。すなわち，線分 PA の傾きは $-\sqrt{3}$ となる。

C と C_1 の接点 A$(t,\ \sqrt{3}\log(1+t))$ とおくと，A における C_1 の接線は，線分 PA と垂直になるので，$y'=\dfrac{\sqrt{3}}{1+x}$ より，

$$(-\sqrt{3})\cdot\frac{\sqrt{3}}{1+t}=-1,\ -\frac{3}{1+t}=-1$$

すると，$1+t>0$ より，$t=2$

よって，A$(2,\ \sqrt{3}\log 3)$ となり，直線 PA の方程式は，

$$y-\sqrt{3}\log 3=-\sqrt{3}(x-2),\ y=-\sqrt{3}x+\sqrt{3}(2+\log 3)$$

これより，P$(0,\ \sqrt{3}(2+\log 3))$ となり，円 C の半径 PA は，

$$\mathrm{PA}=\sqrt{2^2+(2\sqrt{3})^2}=4$$

そこで，3 つの曲線 C，C_1，C_2 で囲まれた部分の面積を S とすると，

$$\frac{S}{2}=\int_0^2\{-\sqrt{3}x+\sqrt{3}(2+\log 3)-\sqrt{3}\log(1+x)\}dx-\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\Big[-\frac{\sqrt{3}}{2}x^2+\sqrt{3}(2+\log 3)x\Big]_0^2-\sqrt{3}\Big[(1+x)\log(1+x)\Big]_0^2+\sqrt{3}\int_0^2 dx-\frac{4}{3}\pi$$

$$=-2\sqrt{3}+2\sqrt{3}(2+\log 3)-3\sqrt{3}\log 3+2\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi=\sqrt{3}(4-\log 3)-\frac{4}{3}\pi$$

以上より，$S=2\sqrt{3}(4-\log 3)-\dfrac{8}{3}\pi$ である。

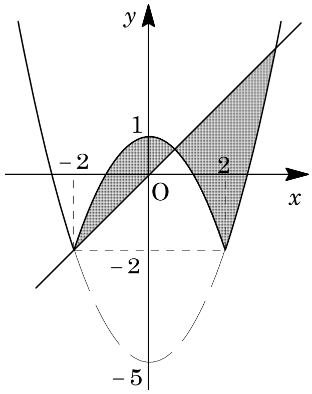
コメント

y 軸に関する対称性を利用すると，計算量は標準的なものです。なお，点 P が x 軸の上側というのは感覚的にわかるものの，下側のときも考慮して記述しています。

問　題

xy 平面上で，$y=x$ のグラフと $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2011]

解答例



直線 $y=x$ ……①と $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフに対して，

(i)　$x\leqq -2$，$2\leqq x$ のとき

$$y=\frac{3}{4}(x^2-4)-2=\frac{3}{4}x^2-5\ \cdots\cdots\cdots②$$

$y=x$ と連立すると，$x=\dfrac{3}{4}x^2-5$ から，

$$3x^2-4x-20=0,\ (x+2)(3x-10)=0$$

よって，$x=-2,\ \dfrac{10}{3}$ となる。

(ii)　$-2\leqq x\leqq 2$ のとき

$$y=-\frac{3}{4}(x^2-4)-2=-\frac{3}{4}x^2+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

$y=x$ と連立すると，$x=-\dfrac{3}{4}x^2+1$ から，$3x^2+4x-4=0$，$(x+2)(3x-2)=0$

よって，$x=-2,\ \dfrac{2}{3}$ となる。

さて，直線①と曲線②に囲まれる図形の面積を S_1 とおくと，

$$S_1=\int_{-2}^{\frac{10}{3}}\left(x-\frac{3}{4}x^2+5\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{10}{3}}\left(x-\frac{10}{3}\right)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{10}{3}+2\right)^3=\frac{512}{27}$$

また，直線①と曲線③に囲まれる図形の面積を S_2 とおくと，

$$S_2=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+1-x\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)^3=\frac{64}{27}$$

さらに，直線 $y=-2$ と曲線③に囲まれる図形の面積を S_3 とおくと，

$$S_3=\int_{-2}^{2}\left(-\frac{3}{4}x^2+1+2\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{2}(x-2)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)(2+2)^3=8$$

以上より，$y=x$ と $y=\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ のグラフによって囲まれる図形の面積 S は，

$$S=S_1+2S_2-2S_3=\frac{512}{27}+\frac{128}{27}-16=\frac{208}{27}$$

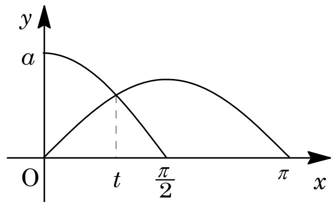
コメント

いわゆる$\dfrac{1}{6}$公式だけで面積計算の可能な有名な頻出問題です。もちろん，普通に計算しても構いません。

問　題

a を正の実数とする。座標平面において曲線 $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を S とし，曲線 $y=\sin x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$，$y=a\cos x$ $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}\right)$および x 軸で囲まれた図形の面積を T とする。このとき $S:T=3:1$ となるような a の値を求めよ。 [2010]

解答例



曲線 $y=\sin x$ $(0 \leqq x \leqq \pi)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積 S は，

$$S=\int_0^{\pi}\sin x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{\pi}=2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$0 \leqq x \leqq \dfrac{\pi}{2}$ における曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ の交点を $x=t$ とおくと，

$$\sin t=a\cos t \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，2 曲線 $y=\sin x$，$y=a\cos x$ と x 軸で囲まれた図形の面積 T は，

$$T=\int_0^{t}\sin x\,dx+\int_t^{\frac{\pi}{2}}a\cos x\,dx=-\Big[\cos x\Big]_0^{t}+a\Big[\sin x\Big]_t^{\frac{\pi}{2}}$$

$$=-\cos t+1+a(1-\sin t)=-a\sin t-\cos t+a+1 \cdots\cdots\cdots ③$$

さて，条件より $S:T=3:1$ なので，$S=3T$ となり，①③から，

$$2=3(-a\sin t-\cos t+a+1),\ \ 3a\sin t+3\cos t-3a-1=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

②④より，$3(a^2+1)\cos t=3a+1$ となり，

$$\cos t=\frac{3a+1}{3(a^2+1)},\ \ \sin t=\frac{a(3a+1)}{3(a^2+1)} \cdots\cdots\cdots ⑤$$

⑤を，$\sin^2 t+\cos^2 t=1$ に代入すると，$\dfrac{a^2(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}+\dfrac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)^2}=1$

$$\frac{(3a+1)^2}{9(a^2+1)}=1,\ \ 9a^2+6a+1=9a^2+9$$

よって，$a=\dfrac{4}{3}$ となり，この値は $a>0$ を満たす。

コメント

交点の x 座標を文字でおき，その条件②を用いて，間接的に解き進めるタイプの有名問題です。演習必須の 1 題です。

問　題

xy 平面上で原点を極, x 軸の正の部分を始線とする極座標に関して, 極方程式

$$r = 2+\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$$

により表される曲線を C とする。C と x 軸とで囲まれた図形を x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積を求めよ。 [2009]

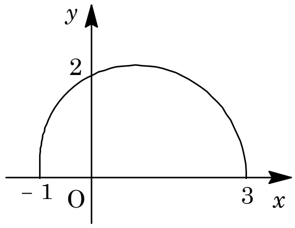
解答例

曲線 C： $r = 2+\cos\theta \quad (0 \leqq \theta \leqq \pi)$ に対して,

$$x = (2+\cos\theta)\cos\theta,\quad y = (2+\cos\theta)\sin\theta$$

ここで, $\dfrac{dx}{d\theta} = -\sin\theta\cos\theta - (2+\cos\theta)\sin\theta$

$$= -2\sin\theta - 2\sin\theta\cos\theta$$



すると, C と x 軸とで囲まれた図形を, x 軸のまわりに 1 回転して得られる立体の体積 V は,

$$V = \int_{-1}^{3} \pi y^2 dx = \pi\int_{\pi}^{0} (2+\cos\theta)^2 \sin^2\theta(-2\sin\theta - 2\cos\theta\sin\theta)\,d\theta$$

$$= 2\pi\int_0^{\pi} (2+\cos\theta)^2(1-\cos^2\theta)(1+\cos\theta)\sin\theta\,d\theta$$

ここで, $t = \cos\theta$ とおくと, $\dfrac{dt}{d\theta} = -\sin\theta$ から,

$$V = 2\pi\int_1^{-1} (2+t)^2(1-t^2)(1+t)(-dt) = 2\pi\int_{-1}^{1} (2+t)^2(1-t^2)(1+t)\,dt$$

$$= 4\pi\int_0^1 (4+t^2-5t^4)\,dt = 4\pi\left(4+\frac{1}{3}-1\right) = \frac{40}{3}\pi$$

コメント

2 倍角や半角などの公式を用いて次数下げをした後, 積分を実行した方がよいかどうか, 迷うところです。ところが, 本問では, それが不要でした。

問　題

次の式で与えられる底面の半径が 2，高さが 1 の円柱 C を考える。

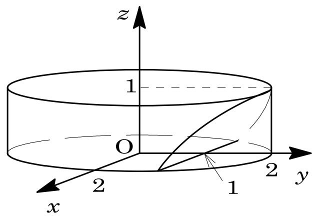
$$C=\{(x,\ y,\ z)\mid x^2+y^2\leqq 4,\ \ 0\leqq z\leqq 1\}$$

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面のうち，点 $(0,\ 2,\ 1)$ を通るものを H とする。円柱 C を平面 H で 2 つに分けるとき，点 $(0,\ 2,\ 0)$ を含む方の体積を求めよ。 [2008]

解答例

xy 平面上の直線 $y=1$ を含み，xy 平面と $45°$ の角をなす平面 H の方程式は，

$$z=y-1$$



円柱 C を平面 H で分けた下方の部分を A としたとき，A を表す不等式は，

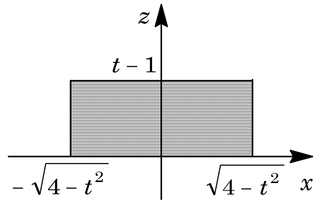
$$x^2+y^2\leqq 4,\ \ 0\leqq z\leqq 1,\ \ z\leqq y-1$$

ここで, A を $y=t$ $(1\leqq t\leqq 2)$ で切断したとき，その切り口は，$y=t$ 上で,

$$x^2\leqq 4-t^2,\ \ 0\leqq z\leqq 1,\ \ z\leqq t-1$$

$1\leqq t\leqq 2$ より，$4-t^2\geqq 0$，$0\leqq t-1\leqq 1$ から,

$$-\sqrt{4-t^2}\leqq x\leqq\sqrt{4-t^2}\,,\ \ 0\leqq z\leqq t-1$$



この切り口の面積を $S(t)$ とおくと,

$$S(t)=2(t-1)\sqrt{4-t^2}$$

よって, A の体積を V とすると,

$$V=\int_1^2 S(t)\,dt=\int_1^2 2t\sqrt{4-t^2}\,dt-2\int_1^2\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\Big[-\frac{2}{3}(4-t^2)\sqrt{4-t^2}\,\Big]_1^2-2\Big(\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{\pi}{3}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 2\sin\frac{\pi}{3}\Big)$$

$$=\frac{2}{3}\cdot 3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi+\sqrt{3}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$$

コメント

非回転体の体積を求める頻出問題です。京大では必須の平面の方程式を利用しています。なお，積分の第 2 項は，半径 2 の円を用いて，面積として計算しています。

問　題

関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x\leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

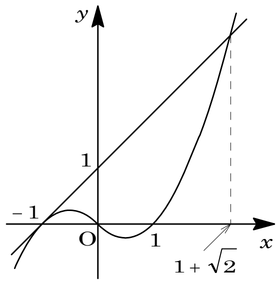
解答例

関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\leqq 0$ の部分は，頂点が $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ の放物線より，a を 0 でない定数として，

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$

原点を通るので，$0=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$，$a=-1$

よって，$y=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，$y=-x^2-x$ ………①



また，関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\geqq 0$ の部分は，$x\leqq 0$ の部分を原点対称したものなので，

$$-y=-(-x)^2-(-x),\quad y=x^2-x\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，①より $y'=-2x-1$ なので，$x=-1$ のとき $y'=1$ となり，点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は，

$$y=x+1\ \cdots\cdots\cdots③$$

②と③の交点は，$x^2-x=x+1$，$x^2-2x-1=0$ より，$x=1+\sqrt{2}$

以上より，求める図形の面積を S とすると，

$$S=\int_{-1}^{0}(x+1+x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(x+1-x^2+x)\,dx$$
$$=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(-x^2+2x+1)\,dx$$
$$=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}$$
$$=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})=2+\frac{4}{3}\sqrt{2}$$

コメント

微積分のセンターレベルの基本題です。なお，定積分の計算は，工夫なしで実行しています。

問　題

$\alpha>0$ とし，$x>0$ で定義された関数 $f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}$ を考える。$y=f(x)$ のグラフより下側で x 軸より上側の部分の面積を α で表せ。ただし，e は自然対数の底である。 [2004]

解答例

$f(x)=\left(\dfrac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\dfrac{\log x}{x}$ に対して，$f(x)\geqq 0$ とすると，

$$\frac{(e-x^{\alpha})\log x}{x^{\alpha+1}}\geqq 0,\ (e-x^{\alpha})\log x\geqq 0$$

(i)　$e\geqq x^{\alpha}$ かつ $\log x\geqq 0$ のとき

$x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$ かつ $x\geqq 1$ となり，$e^{\frac{1}{\alpha}}>1$ から，$1\leqq x\leqq e^{\frac{1}{\alpha}}$

(ii)　$e\leqq x^{\alpha}$ かつ $\log x\leqq 0$ のとき

$x\geqq e^{\frac{1}{\alpha}}$ かつ $0<x\leqq 1$ となり，$e^{\frac{1}{\alpha}}>1$ から，共通範囲は存在しない。

これより，求める面積を S とすると，

$$S=\int_1^{e^{\frac{1}{\alpha}}}\left(\frac{e}{x^{\alpha}}-1\right)\frac{\log x}{x}dx$$

ここで，$\log x=t$ とおくと $x=e^t$ で，$x=1\to e^{\frac{1}{\alpha}}$ のとき $t=0\to\dfrac{1}{\alpha}$ となり，

$$S=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}\left(\frac{e}{e^{\alpha t}}-1\right)t\,dt=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}(e^{1-\alpha t}-1)t\,dt=\int_0^{\frac{1}{\alpha}}te^{1-\alpha t}dt-\left[\frac{1}{2}t^2\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}$$

$$=\left[-\frac{1}{\alpha}te^{1-\alpha t}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}+\frac{1}{\alpha}\int_0^{\frac{1}{\alpha}}e^{1-\alpha t}dt-\frac{1}{2\alpha^2}=-\frac{1}{\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}\left[e^{1-\alpha t}\right]_0^{\frac{1}{\alpha}}-\frac{1}{2\alpha^2}$$

$$=-\frac{3}{2\alpha^2}-\frac{1}{\alpha^2}(1-e)=\frac{1}{\alpha^2}\left(e-\frac{5}{2}\right)$$

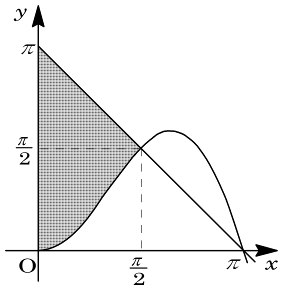
コメント

微分して増減表を作り，グラフの概形を書いて面積計算をするのが手順です。しかし，微分の計算が複雑になったため，この作業を止め，必要な情報だけ抽出して計算したのが上の解です。

問　題

$f(x)=x\sin x\ (x\geqq 0)$ とする。点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ における $y=f(x)$ の法線と，$y=f(x)$ のグラフの $0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{2}$ の部分，および y 軸とで囲まれる図形を考える。この図形を x 軸のまわりに回転して得られる回転体の体積を求めよ。 [2003]

解答例



$f(x)=x\sin x$ より，$f'(x)=\sin x+x\cos x$

$f'\left(\dfrac{\pi}{2}\right)=1$ より，点 $\left(\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}\right)$ における $y=f(x)$ の法線の傾きは -1 となり，その方程式は，

$$y-\frac{\pi}{2}=-\left(x-\frac{\pi}{2}\right),\quad y=-x+\pi$$

求める回転体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-x+\pi)^2dx-\pi\int_0^{\frac{\pi}{2}}x^2\sin^2x\,dx$$

$$=-\frac{\pi}{3}\Big[(-x+\pi)^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\frac{\pi}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(x^2-x^2\cos 2x)\,dx$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{\pi}{6}\Big[x^3\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{\pi}{2}\left\{\frac{1}{2}\Big[x^2\sin 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}-\int_0^{\frac{\pi}{2}}x\sin 2x\,dx\right\}$$

$$=\frac{7}{24}\pi^4-\frac{\pi^4}{48}-\frac{\pi}{2}\left\{-\frac{1}{2}\Big[x\cos 2x\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}+\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos 2x\,dx\right\}$$

$$=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi}{2}\cdot\frac{\pi}{4}=\frac{13}{48}\pi^4-\frac{\pi^2}{8}$$

コメント

計算ミスに注意することが，最大のポイントです。

問　題

(1)　$x \geqq 0$ で定義された関数 $f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ について，導関数 $f'(x)$ を求めよ。

(2)　極方程式 $r = \theta$ $(\theta \geqq 0)$ で定義される曲線の，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを求めよ。

[2002]

解答例

(1)　$f(x) = \log(x + \sqrt{1+x^2})$ に対して，

$$f'(x) = \frac{1}{x+\sqrt{1+x^2}}\Big(1 + \frac{2x}{2\sqrt{1+x^2}}\Big) = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

(2)　曲線 $r = \theta$ 上の点を $(x,\ y)$ とすると，$x = r\cos\theta = \theta\cos\theta$，$y = r\sin\theta = \theta\sin\theta$

$$\Big(\frac{dx}{d\theta}\Big)^2 + \Big(\frac{dy}{d\theta}\Big)^2 = (\cos\theta - \theta\sin\theta)^2 + (\sin\theta + \theta\cos\theta)^2 = 1 + \theta^2$$

曲線 $r = \theta$ の $0 \leqq \theta \leqq \pi$ の部分の長さを l とすると，

$$l = \int_0^\pi \sqrt{1+\theta^2}\,d\theta = \Big[\theta\sqrt{1+\theta^2}\Big]_0^\pi - \int_0^\pi \theta\cdot\frac{2\theta}{2\sqrt{1+\theta^2}}d\theta$$

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} - \int_0^\pi \frac{1+\theta^2-1}{\sqrt{1+\theta^2}}d\theta = \pi\sqrt{1+\pi^2} - \int_0^\pi\Big(\sqrt{1+\theta^2} - \frac{1}{\sqrt{1+\theta^2}}\Big)d\theta$$

$$= \pi\sqrt{1+\pi^2} - l + \Big[\log(\theta + \sqrt{1+\theta^2})\Big]_0^\pi = \pi\sqrt{1+\pi^2} - l + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$$

$$2l = \pi\sqrt{1+\pi^2} + \log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$$

よって，$l = \dfrac{1}{2}\pi\sqrt{1+\pi^2} + \dfrac{1}{2}\log(\pi + \sqrt{1+\pi^2})$

コメント

(2)の部分積分による計算は有名なものですが，経験がないと無理でしょう。

問　題

x, y は t を媒介変数として，次のように表示されているものとする。

$$x=\frac{3t-t^2}{t+1},\quad y=\frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

変数 t が $0\leqq t\leqq 3$ を動くとき，x と y の動く範囲をそれぞれ求めよ。さらに，この $(x,\ y)$ が描くグラフが囲む図形と領域 $y\geqq x$ の共通部分の面積を求めよ。　[1999]

解答例

$x=\dfrac{3t-t^2}{t+1}$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{(3-2t)(t+1)-(3t-t^2)}{(t+1)^2}=-\dfrac{(t+3)(t-1)}{(t+1)^2}$

$y=\dfrac{3t^2-t^3}{t+1}$ より，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{(6t-3t^2)(t+1)-(3t^2-t^3)}{(t+1)^2}=-\dfrac{2t(t^2-3)}{(t+1)^2}$

右表より x と y の動く範囲は，

$$0\leqq x\leqq 1,\quad 0\leqq y\leqq 6\sqrt{3}-9$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$	3
$\dfrac{dx}{dt}$		$+$	0	$-$		$-$	
x	0	↗	1	↘	$6-3\sqrt{3}$	↘	0
$\dfrac{dy}{dt}$	0	$+$		$+$	0	$-$	
y	0	↗	1	↗	$6\sqrt{3}-9$	↘	0

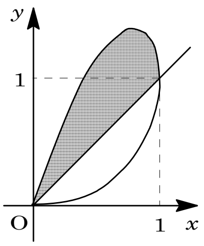
また点 $(x,\ y)$ の描くグラフを C とすると，C と直線 $y=x$ との共有点は，

$$\frac{3t-t^2}{t+1}=\frac{3t^2-t^3}{t+1}$$

$$t(t-1)(t-3)=0$$

$$t=0,\ 1,\ 3$$

よって，C の概形は右図のようになる。



求める面積を S とすると，

$$S=\int_0^1 y\,dx-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\int_3^1\frac{3t^2-t^3}{t+1}\cdot\frac{-(t+3)(t-1)}{(t+1)^2}dt-\frac{1}{2}$$

$$=\int_1^3\frac{t^2(3-t)(t+3)(t-1)}{(t+1)^3}dt-\frac{1}{2}$$

ここで，$t+1=u$ とおくと，

$$\int_1^3\frac{t^2(3-t)(t+3)(t-1)}{(t+1)^3}dt=\int_2^4\frac{(u-1)^2(4-u)(u+2)(u-2)}{u^3}du$$

$$=\int_2^4\frac{-u^5+6u^4-5u^3-20u^2+36u-16}{u^3}du$$

$$=\int_2^4\left(-u^2+6u-5-\frac{20}{u}+\frac{36}{u^2}-\frac{16}{u^3}\right)du$$

$$=\left[-\frac{1}{3}u^3+3u^2-5u-20\log u-\frac{36}{u}+\frac{8}{u^2}\right]_2^4=\frac{89}{6}-20\log 2$$

以上より，$S=\dfrac{89}{6}-20\log 2-\dfrac{1}{2}=\dfrac{43}{3}-20\log 2$

コメント

最後の積分計算が煩雑なのですが，難しいところはその点だけです。内容は基本的です。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆