《2018 入試対策》

岡山大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
　　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分　野　別　問　題　一　覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　a を実数とする。x を 2 次関数 $f(x)=x^2+ax+1$ の区間 $a-1\leqq x\leqq a+1$ における最小値を $m(a)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$m\left(\dfrac{1}{2}\right)$ を求めよ。

(2)　$m(a)$ を a の値で場合分けして求めよ。

(3)　a が実数全体を動くとき，$m(a)$ の最小値を求めよ。　[2017]

2　関数 $f(x)$ を，$f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1)　$f(x)\geqq x$ であることを示せ。

(2)　$f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4)　$0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)\,dx$ を求めよ。　[2014]

3　a, b を実数とし，$a\neq 0$ とする。x についての 3 次方程式

$$ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a=b=1$ のとき，①の実数解を求めよ。

(2)　①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。　[2010]

4　$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta\leqq\pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta-\sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta+\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。

(3)　$2\cos\left(2\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)\leqq -1$ のとき，$\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。　[2008]

5 次の問いに答えよ。

(1) x の方程式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2) $t=x-\dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2$ を a と t の式で表せ。

(3) 座標平面上の円 C_1 : $(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ と関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。 [2006]

6 xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点 $(1,\ 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点 $(-1,\ 0)$ を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点 $(0,\ 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点 $(-2,\ 0)$ を含む側）にある範囲を求めて, C 上に図示せよ。 [2003]

7 $0°<\theta<90°$ とする。x についての 2 次方程式

$$(1-\cos\theta)x^2+4(\sin^2\theta)x+(1+\cos\theta)=0$$

について，次の問いに答えよ。

(1) この方程式が，ただ 1 つの解をもつような θ の値と，そのときの解を求めよ。

(2) この方程式が，-1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。 [1999]

■ 微分と積分

1 a を実数とする。座標平面内の曲線 C : $y=x^3-ax$ について，以下の問いに答えよ。

(1) $a=5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2) C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

2 関数$f(x)=8x^3-6x-1$について，以下の問いに答えよ。

(1) $f(x)=0$を満たす実数xの個数を求めよ。

(2) $a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$とするとき，$f(a)$の値を求めよ。

(3) 不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$を証明せよ。 [2016]

3 2 次関数$y=f(x)$のグラフは，上に凸であり，原点および点$\mathrm{Q}(a,\ 0)$を通るものとする。ただし，$0<a<1$である。関数$y=x^2$のグラフを C，関数$y=f(x)$のグラフをDとし，CとDの共有点のうち，原点と異なるものを P とする。点 P におけるCの接線の傾きをm，Dの接線の傾きをnとするとき，$(2a-1)m=2an$が成り立つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)$をxとaの式で表せ。

(2) $0\leqq x\leqq a$の範囲で，曲線Dとx軸で囲まれた図形の面積を$S(a)$とする。$S(a)$をaの式で表せ。

(3) (2)で求めた$S(a)$の$0<a<1$における最大値を求めよ。 [2015]

4 Cをxy平面上の放物線$y=x^2$とする。不等式$y<x^2$で表される領域の点 P からCに引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点のx座標をα，β $(\alpha<\beta)$とする。また，2 つの接線とCで囲まれた部分の面積をSとする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2dx=\frac{(q-p)^3}{3}$を用いてもよい。

(1) 点 P の座標$(a,\ b)$をα，βを用いて表せ。

(2) $S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$を示せ。

(3) 点 P が曲線$y=x^3-1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$の値の範囲を調べよ。さらに，Sの最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。 [2013]

5 $0\leqq a\leqq 1$に対して，$f(a)=\displaystyle\int_0^1\left|(x-a)(x-3+a)\right|dx$と定める。$f(a)$の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

6 p を定数とする。$f(x)=x^3+x^2+px+1$ とおく。$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき，次の問いに答えよ。

(1) p の範囲を求めよ。

(2) 2 つの接点の x 座標を α，β とする。$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3) 2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4) 2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。 [2011]

7 a を正の実数とする。放物線 $P: y=x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を l_1 とし，点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また，l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。さらに，点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし，l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする。

(1) $b+c=2a$ であることを示せ。

(2) 放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。S を a を用いて表し，S が最小となるときの S と a の値を求めよ。 [2010]

8 次の問いに答えよ。

(1) a を実数とする。$x \leqq 0$ において，つねに $x^3+4x^2 \leqq ax+18$ が成り立っているものとする。このとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) (1)で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3+4x^2 \leqq a_0x+18$$

を解け。 [2009]

9 xy 平面上に，円 $C_1: x^2+y^2=1$，放物線 $C_2: y=x^2+5$ がある。また点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの，y_1 の値の範囲を求めよ。

(3) 円 C_1 の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。

(4) (3)の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。 [2008]

10 関数 $y=x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha<\beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\dfrac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また，その最大値を l を用いて表せ。 [2007]

11 関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

と定め，$g(x)=\displaystyle\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

(2) $g(1)$ の値を求めよ。

(3) $y=g(x)$ のグラフの概形を描け。 [2006]

12 関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 a，b の値を求めよ。 [2005]

13 曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り，B における C の接線と直交する直線を m とする。

(1) l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。

(2) l と m が直交するように点 A，B が動くとき，交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。 [2003]

14 座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2,\ 0)$ を P とし，他の 1 つを Q とする。

(1) 点 Q の座標を求めよ。

(2) 円 C の劣弧 PQ と放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，劣弧 PQ とは，点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち，長さが短い方の弧である。 [2002]

15　関数$f(x)$を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-7x+4 & (x\leqq 1\text{の場合})\\ x & (x>1\text{の場合})\end{cases}$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数$f(x)$のグラフの概形を描け。

(2)　実数tに対して$F(t)$を，$F(t)=\int_t^{t+1}f(x)\,dx$で定義するとき，関数$F(t)$の増減を調べ，そのグラフの概形を描け。また，$F(t)$の最小値を求めよ。　[2001]

16　xy平面上の曲線$C: y=|2x-1|-x^2+2x+1$について次の問いに答えよ。

(1)　曲線Cの概形を描け。

(2)　直線$l: y=ax+b$が曲線Cと相異なる2点において接するときのa，bの値を求めよ。

(3)　(2)の直線lと曲線Cで囲まれた図形の面積Sを求めよ。　[2000]

17　円$x^2+(y-1)^2=3$上の点Pから放物線$y=\dfrac{x^2}{2}+1$に異なる2本の接線を引くことができるものとし，その2つの接点をQ，Rとする。このとき線分QRとこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点Pの座標と，そのときの面積を求めよ。　[1999]

18　$f(x)=-ax(x-2b)$とする。ただし，$a>0$，$b>0$とする。

(1)　曲線$y=f(x)$と曲線$y=ax^2$とで囲まれた部分の面積Sをaとbで表せ。

(2)　曲線$y=f(x)$の頂点Pが直線$3x+2y=6$の上にあるとき，面積Sの最大値を求めよ。　[1998]

19　$f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$とする。ただしaは定数とする。

(1)　$f(x)$の極値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$のとき，常に$f(x)\geqq 0$となるようなaの範囲を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1 等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ を満たす xy 平面上の点 $(x,\ y)$ からなる図形を T とする。

(1) 点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。 [2013]

2 a を正の定数とし，x, y に関する次の不等式を考える。

$3y \geqq 5x$ ………①，$4y \geqq 7a$ ………②，$x-y \geqq 3-a$ ………③

(1) ①，②を同時に満たす点 $(x,\ y)$ のなす領域を xy 平面上に図示せよ。

(2) ①，②，③を同時に満たす実数の組 $(x,\ y)$ が存在するような a の範囲を求めよ。

[2012]

3 三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は，1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま，座標平面上の曲線 $K : y=\dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$，$\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) 三角形 ABC の垂心は，曲線 K 上にあることを示せ。

(2) 三角形 ABH の垂心は，点 C に一致することを示せ。 [2009]

4 座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 0)$，$\mathrm{B}(-b,\ 0)$ をとる。ただし，$b>0$ とする。点 A を中心とし原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通る円 C_1 と，点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第 1 象限にあるものを P とし，三角形 POA において $\angle\mathrm{POA}$ を θ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 P の x 座標を b の式で表せ。

(2) $\sin\theta$ を b の式で表せ。

(3) 点 B と直線 AP の距離が $\dfrac{20}{9}$ であるとき，b の値と $\sin\theta$ の値を求めよ。 [2006]

5 2 つの単位ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の問いに答えよ。

(1) 2 次関数 $f(x)=|x\vec{a}+\vec{b}|^2$ の $x \geqq 0$ における最小値を求めよ。

(2) θ が $0° \leqq \theta \leqq 180°$ の範囲を動くとき，放物線 $y=f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ。

(3) (2)で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。 [2005]

6　放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 $A(-1,\ 1)$，$B(2,\ 4)$ をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A, B と異なる点 P をとる。P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし，放物線と交わる点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　QR : RP = AP : PB であることを示せ。　[2004]

■ 図形と計量

1　3 辺の長さが $AB = 3$，$BC = 5$，$CA = 7$ の三角形 ABC がある。辺 AB, BC, CA 上の点 P, Q, R を，$AP = BQ = CR = x$ となるようにとる。ただし，$0 < x < 3$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\angle ABC$ の値を求めよ。

(2)　三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。

(3)　三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ。　[2015]

2　1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から，1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし，板の厚さは無視する。

(1)　図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり，これを単位として切り出すとする。ただし，平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき，正四面体の体積が最大となるような x と，そのときの体積を求めよ。

(2)　図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり，切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

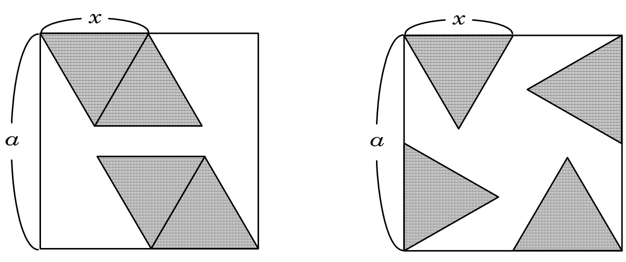


図1　図2

[2001]

■ ベクトル

1 座標平面の原点を$O(0,\ 0)$とする。以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}=0$を満たしているとする。このとき$\overrightarrow{RP}\perp\overrightarrow{RQ}$となることを示せ。

(2) 点 Q の座標を$(3,\ 4)$とし，点 R は$|\overrightarrow{OR}|=1$を満たしているとする。さらに，$|\overrightarrow{OP}|\leqq 1$を満たすすべての点 P に対して，$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{RQ}+|\overrightarrow{OR}|^2-\overrightarrow{OR}\cdot\overrightarrow{OQ}\leqq 0$が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。 [2017]

2 座標空間内に，原点$O(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点$A(0,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 0,\ -1)$がある。O と異なる点$P(s,\ t,\ 0)$に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を$R(u,\ v,\ 0)$とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) $s,\ t$をそれぞれ$u,\ v$を用いて表せ。

(3) 点 P が xy 平面内の直線$ax+by=1\ (a^2+b^2\neq 0)$上を動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

3 四面体 OABC において，AB の中点を P，PC の中点を Q，OQ を$m:n$に内分する点を R とする。ただし，$m>0$，$n>0$とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。$\vec{a}=\overrightarrow{OA}$，$\vec{b}=\overrightarrow{OB}$，$\vec{c}=\overrightarrow{OC}$とおいて以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}$，$\overrightarrow{OQ}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{OR}$，$\overrightarrow{OS}$を$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$m,\ n$を用いて表せ。

(3) $\dfrac{AR}{RS}$を$m,\ n$を用いて表せ。 [2014]

4 四角形 ABCD は平行四辺形ではないとし，辺 AB, BC, CD, DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

(1) 線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。

(2) 線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。

[2012]

5　平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が，$2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1)　P の軌跡が円となることを示せ。

(2)　(1)の円の中心を C とするとき，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3)　O との距離が最小となる(1)の円周上の点を P_0 とする。A, B が条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

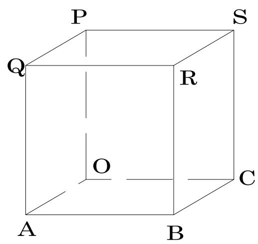
を満たすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s,t の値を求めよ。　[2011]

6　三角錐 ABCD において，$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=\mathrm{AD}=3$，$\mathrm{BC}=\mathrm{CD}=\mathrm{DB}=2$ とする。また，辺 BC を $1:3$ に内分する点を E とする。このとき，三角形 ADE に対して次の問いに答えよ。

(1)　辺 DE, AE の長さを求めよ。

(2)　三角形 ADE の面積を求めよ。　[2000]

7　辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ で表せ。ただし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする。

(2)　5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3)　五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4)　辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし，五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3})=R(2^n)$ となることを示せ。

(2)　$R(2^{2017})$ を求めよ。

(3)　自然数 m が $R(2^{2017}m+2^{29})=5$ を満たすとき，$R(m)$ の値を求めよ。　[2017]

2 複素数$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$について，以下の問いに答えよ。

(1) $\omega^2+\omega^4$，$\omega^5+\omega^{10}$の値を求めよ。

(2) nを正の整数とするとき，$\omega^n+\omega^{2n}$の値を求めよ。

(3) nを正の整数とするとき，$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$が整数であることを証明せよ。

[2016]

3 数列$\{a_n\}$は，関係式 $a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) b_{n+1}とb_nの間に成り立つ関係式を求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。 [2015]

4 数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=a_n(5-a_{n+1})$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

(1) nに関する数学的帰納法で，$a_n>0$であることを証明せよ。

(2) $b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくとき，b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(3) a_nを求めよ。 [2014]

5 以下の問いに答えよ。

(1) 整数x, yが$25x-31y=1$を満たすとき，$x-5$は31の倍数であることを示せ。

(2) $1\leqq y\leqq 100$とする。このとき，不等式 $0\leqq 25x-31y\leqq 1$を満たす整数の組$(x,\ y)$をすべて求めよ。 [2013]

6 数列$\{a_n\}$が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\quad a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1) a_{10}を求めよ。

(2) nが奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4}をa_nで表せ。

(3) a_nを3で割ったときの余りを求めよ。 [2011]

7　自然数 m, n に対して，自然数 $m \diamond n$ を次のように定める。

$\diamond$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	4	6	8	10	12	$\cdots$
2	9	13	17	21	25	$\cdots$
3	16	22	28	34	40	$\cdots$
4	25	33	41	49	57	$\cdots$
5	36	46	56	66	76	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m \diamond n$

例えば，$1\diamond 1=4$，$1\diamond 2=6$，$2\diamond 1=9$，$4\diamond 2=33$，$5\diamond 3=56$，$1\diamond 6=14$，$6\diamond 1=49$ である。

(1)　数列 $8\diamond 1$，$8\diamond 2$，$8\diamond 3$，……の初項 $8\diamond 1$ から第 25 項 $8\diamond 25$ までの和を求めよ。

(2)　$m\diamond n=474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。　[2010]

8　p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。　[2008]

9　k が 4 より大きい自然数であるとき，$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$ を，$\angle \mathrm{O}=\left(\frac{360}{k}\right)^\circ$，$\angle \mathrm{A_0}=90^\circ$ で，面積が 1 であるような直角三角形とする。また，$n=2,\ 3,\ \cdots,\ k$ に対して，点 A_n を，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が $\triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と相似であるように定める。$r=\cos\angle \mathrm{O}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$，$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$，$\cdots$，$\triangle \mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。

(2)　$\angle \mathrm{O}=45^\circ$ のときの S の値と $\angle \mathrm{O}=30^\circ$ のときの S の値を比較し，どちらが大きいか答えよ。ただし，$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。　[2007]

10　座標平面の原点を O とし，4 点$(1,\ 3)$，$(-1,\ 3)$，$(-1,\ -3)$，$(1,\ -3)$を頂点とする長方形の周を R とする。$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対し，$(1,\ 0)$を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置をP_nとし，OP_nとOP_{n+2}のなす角度をθ_nとおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\theta_0$，$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$を求めよ。

(2)　すべての n に対して，$\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$が成り立つような自然数 k のうち，もっとも値が小さいものを求めよ。

(3)　θ_nが最小となるときのP_nの座標をすべて求めよ。　[2007]

11　自然数 $n,\ k$ が $n\geqq k$ を満たすとき，${}_n\mathrm{C}_k$は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

(1)　不等式 $a>b>c$ と等式${}_a\mathrm{C}_3+{}_b\mathrm{C}_2+{}_c\mathrm{C}_1=29$をともに満たす 3 つの自然数の組$(a,\ b,\ c)$を 1 つ求めよ。

(2)　n を自然数とする。次の等式を証明せよ。　${}_{n+3}\mathrm{C}_3={}_{n+2}\mathrm{C}_3+{}_{n+1}\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_1+1$

(3)　自然数 $a,\ b,\ c,\ d$ は $a>b>c>d$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。　${}_a\mathrm{C}_3>{}_b\mathrm{C}_3+{}_c\mathrm{C}_2+{}_d\mathrm{C}_1$　[2006]

12　数列$\{a_n\}$を$a_n=n^2+1$で定め，数列$\{b_n\}$を$b_n=3n^2+3$で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を$\{c_n\}$とする。たとえば，初めの 3 項は，$c_1=2$，$c_2=5$，$c_3=6$となっている。このうち，$\{a_n\}$から来る項は$c_1=a_1$，$c_2=a_2$，$\{b_n\}$から来る項は$c_3=b_1$である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　c_4，c_5，c_6を求めよ。

(2)　$n=3k,\ 3k-1,\ 3k-2$（k は自然数）の場合に分けて考えることにより，a_nは 3 の倍数ではなく，したがってa_nは$\{b_n\}$のどの項とも一致しないことを示せ。

(3)　$\{c_n\}$において，$\{b_n\}$から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを，背理法を用いて示せ。　[2004]

13　$r,\ s,\ t$ は 0 でない定数とする。数列$\{a_n\}$は条件$ra_{n+1}+sa_n+t=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとし，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。

(1)　数列$\{b_n\}$は等比数列であることを示せ。

(2)　$a_1=1$，$a_2=4$，$a_2<a_3$，$a_4=13+3\sqrt{3}$であるとき，一般項a_nを求めよ。

(3)　(2)の条件の下で，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$を求めよ。　[2003]

14 k を自然数の定数とする。自然数 n に対して，$S_n = |n-1| + |n-2| + \cdots + |n-k|$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S_n を求めよ。

(2) S_n の最小値と，そのときの n の値を求めよ。 [2002]

15 n を自然数とする。$f(x)$ は 2 次関数で，曲線 $y = f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$ を通るとする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ について，$S = f(0) + f(1) + f(2) + \cdots\cdots + f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

16 数列 $\{a_n\}$ は，初項 $a_1 = 6$ で漸化式 $a_{n+1} - a_n = 2n + 4$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たす。また，数列 $\{b_n\}$ を $b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ と定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{a_n\}$ の第 n 項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{b_n\}$ の第 $n+1$ 項 b_{n+1} から第 $2n$ 項 b_{2n} までの和を求めよ。 [2000]

17 数列 $\{a_n\}$ は初項と漸化式 $a_1 = 1$，$a_{n+1} = 2a_n + n - 1$ $(n = 1,\ 2,\ 3, \cdots\cdots)$ で定義されている。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) 数列 $\{a_n\}$ の初項から第 n 項までの和 S_n を求めよ。 [1998]

■ 確率

1　1 つのサイコロを 3 回振り，出た目を順に u，v，w とする。そして座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を

$$a_1 = u,\ a_2 = 0,\ b_1 = v\cos\frac{(w+2)\pi}{12},\ b_2 = v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}$$

で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点$(0,\ 0)$とする。

(1)　△OAB が正三角形となる確率を求めよ。

(2)　△OAB が大きさ $\frac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。　[2016]

2　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4)　引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。　[2015]

3　A と B が続けて試合を行い，先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える。1 試合ごとに A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q，引き分ける確率を $1-p-q$ とする。

(1)　3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(2)　5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(3)　$p = q = \frac{1}{3}$ としたとき，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。

(4)　$p = q = \frac{1}{2}$ としたとき，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

[2014]

4　正 n 角形の頂点を A_0，A_1，…，A_{n-1} とする。頂点 A_1，A_2，…，A_{n-1} から 2 点をとり，それらと A_0 を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数を a_n，そのうちの二等辺三角形の総数を b_n とする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　a_6 および b_6 を求めよ。

(2)　整数 $m \geqq 3$ に対し，$S = \displaystyle\sum_{k=3}^{m} a_k$ を求めよ。

(3)　b_9 を求めよ。　[2012]

5　空間内に点 $O(0,\ 0,\ 0)$ と点 $A(2,\ 2,\ 2)$ がある。点 P は O から出発し，1 回につき x 軸，y 軸，z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1)　P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2)　さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し，4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し，6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3)　(2)と同じルールで，さいころを 6 回投げて P が点 $B(1,\ 1,\ 1)$ を通って A に到達する確率を求めよ。　[2011]

6　男性 M_1，…，M_4 の 4 人と女性 F_1，…，F_4 の 4 人が，横一列に並んだ座席 S_1，…，S_8 に座る場合を考える。

(1)　同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2)　(1)の座り方の中で，M_1 の両隣りが F_1 と F_2 になる座り方は何通りあるか。

(3)　(1)の座り方の中で，M_1 と F_1 が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

7　1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$\mathrm{P}_4=\mathrm{P}_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $\mathrm{P}_1\mathrm{P}_2\mathrm{P}_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。 [2009]

8　1，2，3，4 の数字が書かれたカードを各 1 枚，数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び，左から順に横一列に並べる。このとき，先頭のカードの数字が 0 でなければ，カードの数字の列は，選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について，次の問いに答えよ。

(1)　0，1，2，3，4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ，計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。

(2)　用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。 [2007]

9　次の問いに答えよ。

(1)　英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき，英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が，$\dfrac{7}{40}$ となる。このとき，日本語の本は何冊あるか答えよ。

(2)　各組が 12 枚ずつからなる赤，青，黄色の 3 組のカードがあり，各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき，数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。 [2005]

10 定数aは，$0<a<1$を満たすものとする。空間に，次の3つのグループからなる12点をとる。

$$X=\{(1,\ a,\ 0),\ (1,\ -a,\ 0),\ (-1,\ a,\ 0),\ (-1,\ -a,\ 0)\}$$
$$Y=\{(0,\ 1,\ a),\ (0,\ 1,\ -a),\ (0,\ -1,\ a),\ (0,\ -1,\ -a)\}$$
$$Z=\{(a,\ 0,\ 1),\ (-a,\ 0,\ 1),\ (a,\ 0,\ -1),\ (-a,\ 0,\ -1)\}$$

これらの12点から異なる2点を選ぶ選び方は，

(ア)　同一グループ内の2点となる場合

(イ)　異なるグループから1点ずつの2点となる場合

の2種類に分けられる。このとき，次の問いに答えよ。

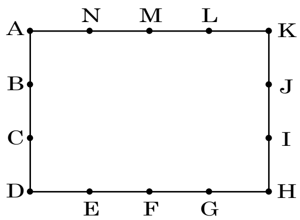
(1)　(ア), (イ)それぞれの場合の数を求めよ(答のみでよい)。

(2)　(ア)の場合，2点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(3)　(イ)の場合，2点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(4)　(2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるようにaの値を定めよ。また，そのとき選んだ2点の位置ベクトルのなす角をθとして，$\cos\theta$の値を求めよ。ただし，位置ベクトルは原点Oを基準とする。　[2004]

11 図のように，AからNまでの14個の点が，縦の長さが3，横の長さが4の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　これらの点のうち3点を結んでできる三角形は何個あるか。

(2)　これらの点のうち3点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。　[2002]

■ 論証

1 実数 x_i，a_i，b_i，c_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ は，以下の条件(い)～(に)を満たすものとする。

(い)　$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$

(ろ)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i \geqq 0$，$b_i \geqq 0$，$c_i \geqq 0$

(は)　$i=1,\ 2,\ 3$ に対して $a_i+b_i+c_i=1$

(に)　$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=1$

実数 y_i $(i=1,\ 2,\ 3)$ を

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,\quad y_2=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3,\quad y_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$y_1+y_2+y_3=x_1+x_2+x_3$ を示せ。

(2)　$y_1 \geqq x_1$ を示せ。

(3)　$y_1+y_2 \geqq x_1+x_2$ を示せ。　[2009]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

aを実数とする。xを2次関数$f(x)=x^2+ax+1$の区間$a-1\leqq x\leqq a+1$における最小値を$m(a)$とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$m\left(\frac{1}{2}\right)$を求めよ。

(2)　$m(a)$をaの値で場合分けして求めよ。

(3)　aが実数全体を動くとき，$m(a)$の最小値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$f(x)=x^2+ax+1=\left(x+\frac{a}{2}\right)^2-\frac{a^2}{4}+1$の区間$a-1\leqq x\leqq a+1$における最小値を$m(a)$とすると，$a=\frac{1}{2}$のとき，

$$f(x)=\left(x+\frac{1}{4}\right)^2+\frac{15}{16}\quad\left(-\frac{1}{2}\leqq x\leqq\frac{3}{2}\right)$$

よって，$m\left(\frac{1}{2}\right)=f\left(-\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{16}$である。

(2)　(i)　$-\frac{a}{2}<a-1\left(a>\frac{2}{3}\right)$のとき

$$m(a)=f(a-1)=(a-1)^2+a(a-1)+1=2a^2-3a+2$$

(ii)　$a-1\leqq-\frac{a}{2}\leqq a+1\left(-\frac{2}{3}\leqq a\leqq\frac{2}{3}\right)$のとき

$$m(a)=f\left(-\frac{a}{2}\right)=-\frac{a^2}{4}+1$$

(iii)　$-\frac{a}{2}>a+1\left(a<-\frac{2}{3}\right)$のとき

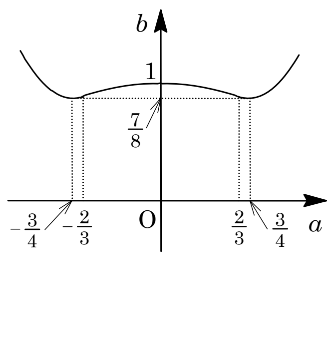
$$m(a)=f(a+1)=(a+1)^2+a(a+1)+1=2a^2+3a+2$$

(3)　(2)より，$m(a)$は，$m(a)=2\left(a-\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\quad\left(a>\frac{2}{3}\right)$

$$m(a)=-\frac{a^2}{4}+1\quad\left(-\frac{2}{3}\leqq a\leqq\frac{2}{3}\right)$$

$$m(a)=2\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{7}{8}\quad\left(a<-\frac{2}{3}\right)$$

これより，$b=m(a)$のグラフをかくと右図のようになり，$m(a)$の最小値は$m\left(\pm\frac{3}{4}\right)=\frac{7}{8}$である。



コメント

2次関数の最大・最小に関する基本的な問題です。(2)では図を省きましたが，グラフの軸と区間との位置関係で場合分けをしています。

問　題

関数 $f(x)$ を，$f(x)=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2$ と定める。ここで，$[x]$ は $n\leqq x$ を満たす最大の整数 n を表す。

(1)　$f(x)\geqq x$ であることを示せ。

(2)　$f(x+1)=f(x)+1$ であることを示せ。

(3)　$0\leqq x\leqq 2$ において $y=f(x)$ のグラフを描け。

(4)　$0\leqq a<1$ とするとき，$\displaystyle\int_a^{a+1} f(x)dx$ を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$f(x)-x=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2-x=(x-[x])-(x-[x])^2$

ここで，$t=x-[x]$ とおくと，$0\leqq t<1$ となり，

$$f(x)-x=t-t^2=t(1-t)\geqq 0$$

よって，$f(x)\geqq x$（等号は x が整数のとき成立）

(2)　$n\leqq x<n+1$ のとき，$[x]=n$，$[x+1]=n+1$ となり，

$$\begin{aligned}f(x+1)&=[x+1]+2(x+1-[x+1])-(x+1-[x+1])^2\\&=n+1+2(x+1-n-1)-(x+1-n-1)^2\\&=n+2(x-n)-(x-n)^2+1=[x]+2(x-[x])-(x-[x])^2+1\\&=f(x)+1\end{aligned}$$

(3)　(i)　$0\leqq x<1$ のとき　$[x]=0$ より，

$$f(x)=2x-x^2=-(x-1)^2+1$$

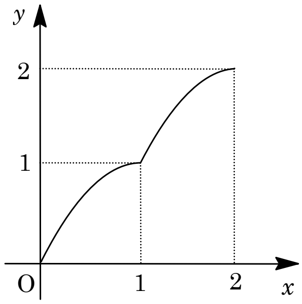
(ii)　$1\leqq x<2$ のとき　(2)より，$f(x)=f(x-1)+1$

すると，$0\leqq x-1<1$ より，

$$f(x)=-(x-1-1)^2+1+1=-(x-2)^2+2$$

(iii)　$x=2$ のとき　(1)より，$f(x)=2$

(i)～(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(4)　$0\leqq a<1$ のとき，$\displaystyle\int_1^{a+1} f(x)dx=\int_0^a\{f(x)+1\}dx=\int_0^a f(x)dx+a$ なので，

$$\begin{aligned}\int_a^{a+1} f(x)dx&=\int_a^1 f(x)dx+\int_1^{a+1} f(x)dx\\&=\int_a^1 f(x)dx+\int_0^a f(x)dx+a=\int_0^1 f(x)dx+a\\&=\Big[-\frac{x^3}{3}+x^2\Big]_0^1+a=a+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

コメント

ガウス記号のついた関数が題材で，誘導つきであるものの慣れないとやや難しめと思われます。(4)については，(3)のグラフから面積を対応させて計算していますが，内容的には置換積分となっています。文系では範囲外ですが。

問　題

a, b を実数とし，$a \neq 0$ とする。x についての 3 次方程式

$$ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

を考える。

(1)　$a=b=1$ のとき，①の実数解を求めよ。

(2)　①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつ条件を a, b を用いて表せ。　[2010]

解答例

(1) 方程式 $ax^3+(a+1)x^2+(b+1)x+b=0$ $(a \neq 0)$ ……①に対して，$a=b=1$ のとき，

$$x^3+2x^2+2x+1=0,\ (x+1)(x^2+x+1)=0$$

$x^2+x+1=0$ は実数解をもたないので，①の実数解は $x=-1$ である。

(2)　まず，①より，$(x+1)(ax^2+x+b)=0 \cdots\cdots\cdots ②$

ここで，②より，$f(x)=ax^2+x+b$ おくと，①がちょうど 2 つの相異なる実数解をもつのは，次の 2 つの場合がある。

(i)　$f(x)=0$ が異なる 2 つの実数解をもち，その一方が $x=-1$ であるとき

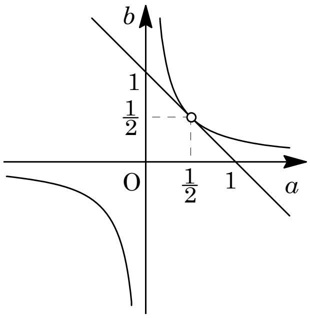
$$D=1-4ab>0,\ f(-1)=a-1+b=0$$

よって，$ab<\frac{1}{4}$，$a+b=1$

(ii)　$f(x)=0$ が $x \neq -1$ である重解をもつとき

$$D=1-4ab=0,\ f(-1)=a-1+b \neq 0$$

よって，$ab=\frac{1}{4}$，$a+b \neq 1$



(i)(ii)より，ab 平面上で図示すると，右図のようになる。

よって，求める条件は，$a \neq 0$ を考え合わせて，

$$a+b=1,\ ab=\frac{1}{4},\ (a,\ b) \neq \left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right),\ (a,\ b) \neq (0,\ 1)$$

コメント

私大の入試によく見かける問題です。条件がやや複雑なので，まとめる際に，図を用いています。

問　題

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$\cos\theta - \sin\theta$ の値を求めよ。

(2)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right)$ の値を求めよ。

(3)　$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ のとき，$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta$ の最大値と最小値を求めよ。 [2008]

解答例

(1)　$\sin\theta + \cos\theta = \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ のとき，$1 + 2\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1}{5}$ より，$\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{2}{5}$

さて，$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\cos\theta - \sin\theta < 0$ となり，

$$\cos\theta - \sin\theta = -\sqrt{(\cos\theta - \sin\theta)^2} = -\sqrt{1 - 2\sin\theta\cos\theta} = -\frac{3}{\sqrt{5}}$$

(2)　(1)より，$\sin 2\theta = 2\sin\theta\cos\theta = -\dfrac{4}{5}$ であり，

$$\cos 2\theta = \cos^2\theta - \sin^2\theta = (\cos\theta + \sin\theta)(\cos\theta - \sin\theta) = -\frac{3}{5}$$

すると，$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) = 2\cos 2\theta\cos\dfrac{\pi}{3} + 2\sin 2\theta\sin\dfrac{\pi}{3} = \dfrac{-3 - 4\sqrt{3}}{5}$

(3)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \pi$ より，$\dfrac{2}{3}\pi \leqq 2\theta - \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ のもとで，$2\cos\left(2\theta - \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -1$ の解は，

$$\frac{2}{3}\pi \leqq 2\theta - \frac{\pi}{3} \leqq \frac{4}{3}\pi,\ \ \frac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \frac{5}{6}\pi \cdots\cdots\cdots (*)$$

そこで，$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 2\sin\left(\theta + \dfrac{\pi}{6}\right)$ と変形すると，$(*)$のとき，最大値は $\sqrt{3}\ \left(\theta = \dfrac{\pi}{2}\right)$，最小値は $0\left(\theta = \dfrac{5}{6}\pi\right)$ となる。

コメント

三角関数の式変形の問題です。なお, 3 つの問いの関係は考えずに解きました。

問　題

次の問いに答えよ。

(1) x の方程式 $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ の実数解をすべて求めよ。

(2) $t=x-\dfrac{1}{x}$ とするとき，$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2$ を a と t の式で表せ。

(3) 座標平面上の円 C_1 : $(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$ と関数 $y=\dfrac{1}{x}$ のグラフ C_2 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_1 の半径 r を a の式で表せ。 [2006]

解答例

(1) $\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2-3\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2=0$ より，$\left(x-\dfrac{1}{x}-1\right)\left(x-\dfrac{1}{x}-2\right)=0$

$x-\dfrac{1}{x}-1=0$，$x-\dfrac{1}{x}-2=0$

よって，$x^2-x-1=0$，$x^2-2x-1=0$ から，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{5}}{2}$，$1\pm\sqrt{2}$

(2) $(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2=x^2+\dfrac{1}{x^2}-2a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2a^2$

$=\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2+2x\cdot\dfrac{1}{x}-2a\left(x-\dfrac{1}{x}\right)+2a^2$

$=t^2-2at+2a^2+2$

(3) C_1 : $(x-a)^2+(y+a)^2=r^2$……①と C_2 : $y=\dfrac{1}{x}$……②の共有点の x 座標は，

$(x-a)^2+\left(\dfrac{1}{x}+a\right)^2=r^2$

(2)より，$t^2-2at+2a^2+2-r^2=0$………③

ここで，$t=x-\dfrac{1}{x}$ から，$x^2-tx-1=0$ となり，その判別式は，

$D=t^2+4>0$

よって，どんな t の値に対しても，$x\neq0$ は 2 個ずつ対応する。すなわち，①と②が 2 個の共有点をもつ条件は，③が重解をもつことと同値である。③の判別式は，

$D/4=a^2-(2a^2+2-r^2)=0$，$r^2=a^2+2$

よって，$r>0$ より，$r=\sqrt{a^2+2}$

コメント

xt 平面上に $t=x-\dfrac{1}{x}$ のグラフを描くと，1 個の t の値に対して 2 個の x の値が対応することは明らかです。ただし，文系の範囲ではありませんが。

問　題

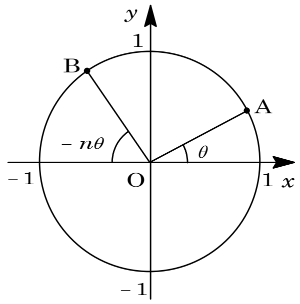
xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2)　A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3)　$n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。　[2003]

解答例



(1)　A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta$，2 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2\pi$ であり，同様に考えると，k 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2(k-1)\pi$，すなわち $2(k-1)\pi=(n+1)\theta-\pi$ ……①である。

ここで，$0<\theta\leqq 2\pi$ より，

$$-\pi<(n+1)\theta-\pi\leqq(2n+1)\pi$$

①から，$-\pi<2(k-1)\pi\leqq(2n+1)\pi$，$\dfrac{1}{2}<k\leqq n+\dfrac{3}{2}$

よって，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ より，A と B は $n+1$ 回出会う。

(2)　A と B が点$(0,\ 1)$で出会うとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ なので，①より，

$$2(k-1)\pi=(n+1)\frac{\pi}{2}-\pi,\ \ n=4(k-1)+1$$

よって，$n\geqq 2$ から，n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

(3)　$0<\theta\leqq 2\pi$ として，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos(\pi-7\theta),\ \sin(\pi-7\theta))$ とおくことができ，条件より，$\cos\theta<\cos(\pi-7\theta)$ である。

$$\cos\theta<-\cos 7\theta,\ \ \cos 7\theta+\cos\theta<0,\ \ 2\cos 4\theta\cos 3\theta<0\ \cdots\cdots\text{②}$$

ここで，$\cos 4\theta=0$ の解は，

$$\theta=\frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$$

$\cos 3\theta=0$ の解は，

$$\theta=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

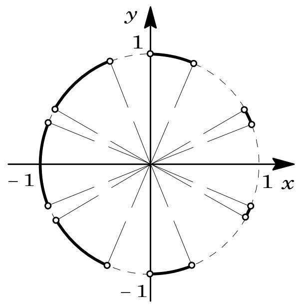
さて，$\theta = 2\pi$ は②を満たさないことから，不等式②の解は，

$$\frac{1}{8}\pi < \theta < \frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{8}\pi < \theta < \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{8}\pi < \theta < \frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{7}{8}\pi < \theta < \frac{9}{8}\pi,\ \frac{7}{6}\pi < \theta < \frac{11}{8}\pi,\ \frac{3}{2}\pi < \theta < \frac{13}{8}\pi$$

$$\frac{11}{6}\pi < \theta < \frac{15}{8}\pi$$

以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。



コメント

(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。

問　題

$0° < \theta < 90°$ とする。x についての 2 次方程式

$$(1-\cos\theta)x^2 + 4(\sin^2\theta)x + (1+\cos\theta) = 0$$

について，次の問いに答えよ。

(1)　この方程式が，ただ 1 つの解をもつような θ の値と，そのときの解を求めよ。

(2)　この方程式が，-1 以上の解をもつような θ の値の範囲を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$(1-\cos\theta)x^2 + 4(\sin^2\theta)x + (1+\cos\theta) = 0$ ………①

条件より，①の判別式 $D/4 = 4\sin^4\theta - (1-\cos\theta)(1+\cos\theta) = 0$

$$4\sin^4\theta - \sin^2\theta = 0,\ \ \sin^2\theta(2\sin\theta+1)(2\sin\theta-1) = 0$$

$0° < \theta < 90°$ より $0 < \sin\theta < 1$ なので，$\sin\theta = \dfrac{1}{2}$

よって，$\theta = 30°$

このとき，①の重解は，$x = \dfrac{-2\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = -2(1+\cos\theta) = -2-\sqrt{3}$

(2)　①の左辺を $f(x)$ とおくと，放物線 $y = f(x)$ の軸は，

$$x = \frac{-2\sin^2\theta}{1-\cos\theta} = -2(1+\cos\theta)$$

$0° < \theta < 90°$ より $0 < \cos\theta < 1$ なので，$-2(1+\cos\theta) < -2$

したがって，$f(x) = 0$ すなわち①は，-1 以上に 2 つの解をもつ場合はないので，①が -1 以上の解をもつ条件は $f(-1) \leqq 0$ となる。

$$(1-\cos\theta) - 4\sin^2\theta + (1+\cos\theta) \leqq 0,\ \ 2\sin^2\theta - 1 \geqq 0$$

$0° < \theta < 90°$ より $0 < \sin\theta < 1$ なので，$\sin\theta \geqq \dfrac{1}{\sqrt{2}}$

よって，$45° \leqq \theta < 90°$

コメント

(2)の題意は，少なくとも 1 つの解が -1 以上ということなので，解の個数が 1 個のときと 2 個のときで場合分けをしようと，まず考えました。ところが，軸に注目すると, 2 個の場合はありませんでした。

問　題

a を実数とする。座標平面内の曲線 $C: y = x^3 - ax$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$a = 5$ のとき，C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものの方程式を求めよ。

(2)　C の接線で点 $(1,\ 0)$ を通るものが 3 本存在するような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

解答例

(1)　$C: y = x^3 - ax$ ……①に対して，$a = 5$ のとき $y = x^3 - 5x$ となる。

すると，$y' = 3x^2 - 5$ から，接点 $(t,\ t^3 - 5t)$ における接線の方程式は，

$$y - (t^3 - 5t) = (3t^2 - 5)(x - t),\ \ y = (3t^2 - 5)x - 2t^3 \ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，②が点 $(1,\ 0)$ を通ることより，$0 = 3t^2 - 5 - 2t^3$ となり，

$$2t^3 - 3t^2 + 5 = 0,\ \ (t+1)(2t^2 - 5t + 5) = 0$$

ここで，$2t^2 - 5t + 5 = 0$ は，判別式 $D = -15 < 0$ から実数解をもたない。

よって，$t = -1$ となり，②に代入すると，接線の方程式は $y = -2x + 2$ である。

(2)　(1)と同様にすると，$y' = 3x^2 - a$ から，接線の方程式は，

$$y = (3t^2 - a)x - 2t^3$$

点 $(1,\ 0)$ を通ることより，$2t^3 - 3t^2 + a = 0$，$-2t^3 + 3t^2 = a$ ………③

ここで，$f(t) = -2t^3 + 3t^2$ とおくと，

$$f'(t) = -6t^2 + 6t = -6t(t-1)$$

すると，$f(t)$ の増減は右表のようになる。

t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	$\searrow$	0	$\nearrow$	1	$\searrow$

そこで，点 $(1,\ 0)$ を通る C の接線が 3 本存在する条件は，方程式③が異なる 3 つの実数解をもつことに対応するので，求める a の値の範囲は，$0 < a < 1$ である。

コメント

微分の応用についての基本的で頻出の問題です。

問　題

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3)　不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。　[2016]

解答例

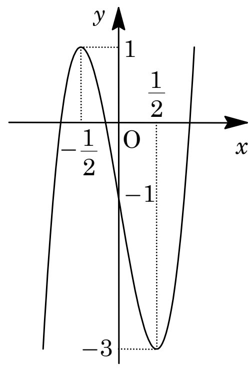
(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。



(2)　$\theta=\dfrac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{9}<\dfrac{2\pi}{3}$ より，$\cos\dfrac{\pi}{2}>\cos\dfrac{5\pi}{9}>\cos\dfrac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\Big(-\frac{1}{5}\Big)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0,\quad f\Big(-\frac{1}{6}\Big)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\dfrac{1}{5}<a<-\dfrac{1}{6}$，すなわち $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ である。

コメント

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

問　題

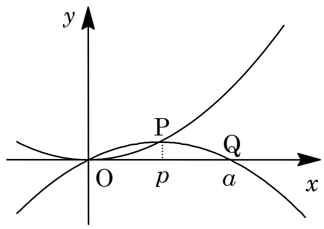
2 次関数 $y=f(x)$ のグラフは，上に凸であり，原点および点 $\mathrm{Q}(a,\ 0)$ を通るものとする。ただし，$0<a<1$ である。関数 $y=x^2$ のグラフを C，関数 $y=f(x)$ のグラフを D とし，C と D の共有点のうち，原点と異なるものを P とする。点 P における C の接線の傾きを m，D の接線の傾きを n とするとき，$(2a-1)m=2an$ が成り立つとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ を x と a の式で表せ。

(2)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積を $S(a)$ とする。$S(a)$ を a の式で表せ。

(3)　(2)で求めた $S(a)$ の $0<a<1$ における最大値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　条件より，$k<0$ として，$f(x)=kx(x-a)$ とおく。

$C: y=x^2$ ……①，$D: y=f(x)=kx(x-a)$ ……②

を連立すると，

$$x^2=kx(x-a),\ (k-1)x^2-akx=0$$

よって，$x=0,\ \dfrac{ak}{k-1}$ ………③

C と D の共有点のうち，原点と異なるものを $\mathrm{P}(p,\ p^2)$ とおくと，③より，

$$p=\frac{ak}{k-1}\ \text{………④。}$$

ここで，①から $y'=2x$ となり，点 P における C の接線の傾き m は $m=2p$，②から $y'=2kx-ak$ となり，点 P における D の接線の傾き n は，$n=2kp-ak$

そこで，条件 $(2a-1)m=2an$ に代入すると，

$$(2a-1)2p=2a(2kp-ak),\ (2ak-2a+1)p-a^2k=0\ \text{………⑤}$$

④⑤より，$(2ak-2a+1)ak-a^2k(k-1)=0$ となり，

$$(2ak-2a+1)-a(k-1)=0,\ ak-a+1=0$$

よって，$k=\dfrac{a-1}{a}$ となり，$f(x)=\dfrac{a-1}{a}x(x-a)$

(2)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲で，曲線 D と x 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^a\frac{a-1}{a}x(x-a)\,dx=-\frac{a-1}{6a}\cdot a^3=\frac{a^2(1-a)}{6}$$

(3)　$S'(a)=\dfrac{2a-3a^2}{6}=\dfrac{-a(3a-2)}{6}$

これより，$0<a<1$ における $S(a)$ の増減は右表のようになる。

a	0	$\cdots$	$\dfrac{2}{3}$	$\cdots$	1
$S'(a)$	0	$+$	0	$-$	
$S(a)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{81}$	$\searrow$	

よって，$S(a)$ の最大値は $\dfrac{2}{81}$ である。

コメント

微積分の総合問題です。(1)の計算はやや量がありますが，その後の設問は基本的なものです。

問　題

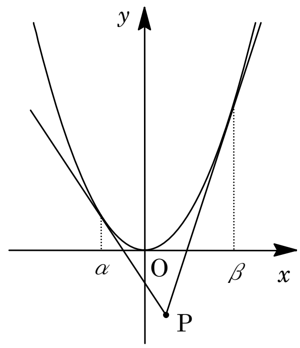
C を xy 平面上の放物線 $y=x^2$ とする。不等式 $y<x^2$ で表される領域の点 P から C に引いた 2 つの接線に対して，それぞれの接点の x 座標を α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ とする。また，2 つの接線と C で囲まれた部分の面積を S とする。このとき，以下の問いに答えよ。ただし，等式 $\displaystyle\int_p^q (x-p)^2\,dx=\frac{(q-p)^3}{3}$ を用いてもよい。

(1)　点 P の座標 $(a,\ b)$ を α，β を用いて表せ。

(2)　$S=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{12}$ を示せ。

(3)　点 P が曲線 $y=x^3-1\ \ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くとき，$(\beta-\alpha)^2$ の値の範囲を調べよ。さらに，S の最大値および最小値を与える点 P の座標を求めよ。　[2013]

解答例



(1)　$C: y=x^2$ より $y'=2x$ となり，C 上の点 $(t,\ t^2)$ における接線は，$y-t^2=2t(x-t)$，$y=2tx-t^2$ ………①

ここで，点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ とすると，①が通過することより，

$$b=2ta-t^2,\ \ t^2-2at+b=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

点 P は領域 $y<x^2$ にあることより $b<a^2$ であり，これから②の判別式 $D/4=a^2-b>0$ となるので，②は異なる 2 実数解をもつ。これを $x=\alpha,\ \beta\ \ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha+\beta=2a,\ \ \alpha\beta=b$$

よって，点 P の座標は，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \alpha\beta\Big)$ である。

(2)　(1)より，2 つの接線は，$y=2\alpha x-\alpha^2$，$y=2\beta x-\beta^2$ となり，この 2 つの接線と C で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^{\frac{\alpha+\beta}{2}}(x-\alpha)^2\,dx+\int_{\frac{\alpha+\beta}{2}}^{\beta}(x-\beta)^2\,dx$$

$$=\frac{1}{3}\Big(\frac{\beta-\alpha}{2}\Big)^3-\frac{1}{3}\Big(\frac{\alpha-\beta}{2}\Big)^3=\frac{(\beta-\alpha)^3}{12}$$

(3)　点 $\mathrm{P}(a,\ b)$ が $y=x^3-1\ (-1\leqq x\leqq 1)$ 上を動くので，$b=a^3-1\ (-1\leqq a\leqq 1)$ となり，

$$(\beta-\alpha)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=4a^2-4b=4a^2-4(a^3-1)$$

$$=-4a^3+4a^2+4$$

ここで，$f(a)=-4a^3+4a^2+4$ とおくと，

$$f'(a)=-4(3a^2-2a)$$
$$=-4a(3a-2)$$

すると，$-1\leqq a\leqq 1$ における $f(a)$ の値の増減は，右表のようになる。

a	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$f(a)$	12	$\searrow$	4	$\nearrow$	$\frac{124}{27}$	$\searrow$	4

これより，$(\beta-\alpha)^2$ のとりうる値の範囲は，$4\leqq(\beta-\alpha)^2\leqq 12$ である。

さて，(2)より，$S=\dfrac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\dfrac{1}{12}\{(\beta-\alpha)^2\}^{\frac{3}{2}}$ となるので，S が最大値をとるのは，$a=-1$，$b=-2$ のときから $\mathrm{P}(-1,\ -2)$ である。

また，S が最小値をとるのは，$a=0$，$b=-1$ または $a=1$，$b=0$ のときから $\mathrm{P}(0,\ -1)$ または $\mathrm{P}(1,\ 0)$ である。

コメント

放物線と接線についての超頻出の問題です。誘導も細かく付けられています。

問　題

$0 \leqq a \leqq 1$ に対して，$f(a)=\int_0^1 \left|(x-a)(x-3+a)\right|dx$ と定める。$f(a)$ の最大値と最小値を求めよ。 [2012]

解答例

$0 \leqq a \leqq 1$ に対して，$2 \leqq 3-a \leqq 3$ となり，$0 \leqq x \leqq 1$ において，

$$\left|(x-a)(x-3+a)\right| = \begin{cases} (x-a)(x-3+a) & (0 \leqq x \leqq a) \\ -(x-a)(x-3+a) & (a \leqq x \leqq 1) \end{cases}$$

これより，$f(a)=\int_0^1 \left|(x-a)(x-3+a)\right|dx$

$$= \int_0^a (x-a)(x-3+a)dx + \int_a^1 -(x-a)(x-3+a)dx$$

$$= \int_0^a (x^2-3x+3a-a^2)dx - \int_a^1 (x^2-3x+3a-a^2)dx$$

$$= \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+(3a-a^2)x\right]_0^a - \left[\frac{x^3}{3}-\frac{3}{2}x^2+(3a-a^2)x\right]_a^1$$

$$= \frac{a^3}{3}-\frac{3}{2}a^2+(3a-a^2)a-\frac{1-a^3}{3}+\frac{3}{2}(1-a^2)-(3a-a^2)(1-a)$$

$$= -\frac{4}{3}a^3+4a^2-3a+\frac{7}{6}$$

$$f'(a) = -4a^2+8a-3$$
$$= -(2a-1)(2a-3)$$

すると，$f(a)$ の増減は右表のようになり，$f(a)$ は最大値 $\frac{7}{6}$ $(a=0)$，最小値 $\frac{1}{2}$ $\left(a=\frac{1}{2}\right)$ をとる。

a	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		$-$	0	$+$	
$f(a)$	$\frac{7}{6}$	$\searrow$	$\frac{1}{2}$	$\nearrow$	$\frac{5}{6}$

コメント

微積分の基本的な計算問題です。

問　題

p を定数とする。$f(x)=x^3+x^2+px+1$ とおく。$y=f(x)$ のグラフに傾き 1 の 2 つの異なる接線が引けるという。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　p の範囲を求めよ。

(2)　2 つの接点の x 座標を α，β とする。$(\alpha-\beta)^2$ を p を用いて表せ。

(3)　2 つの接線の y 軸との交点を A, B とするとき，線分 AB の長さを p を用いて表せ。

(4)　2 つの接線の間の距離が $\dfrac{8}{27}$ となるような p の値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+x^2+px+1$ より，$f'(x)=3x^2+2x+p$

条件から，$f'(x)=1$，すなわち $3x^2+2x+p-1=0$ ……(＊)は，異なる 2 つの実数解をもつことより，

$$D/4=1-3(p-1)=-3p+4>0,\quad p<\frac{4}{3}$$

(2)　(＊)の実数解が α，β より，$\alpha+\beta=-\dfrac{2}{3}$，$\alpha\beta=\dfrac{p-1}{3}$ となり，

$$(\alpha-\beta)^2=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta=\frac{4}{9}-\frac{4}{3}(p-1)=\frac{4(4-3p)}{9}$$

(3)　接線の方程式は，その傾きが 1 より，$y-f(\alpha)=x-\alpha$，$y-f(\beta)=x-\beta$

これより，y 軸との交点は，$\mathrm{A}(0,\ f(\alpha)-\alpha)$，$\mathrm{B}(0,\ f(\beta)-\beta)$ となり，

$$\begin{aligned}\mathrm{AB}&=\left|(f(\alpha)-\alpha)-(f(\beta)-\beta)\right|=\left|\alpha^3-\beta^3+\alpha^2-\beta^2+(p-1)(\alpha-\beta)\right|\\&=\left|\alpha-\beta\right|\left|(\alpha-\beta)^2+3\alpha\beta+(\alpha+\beta)+(p-1)\right|\\&=\frac{2}{3}\sqrt{4-3p}\left|\frac{4(4-3p)}{9}+(p-1)-\frac{2}{3}+(p-1)\right|\\&=\frac{2}{3}\sqrt{4-3p}\cdot\frac{2}{9}\left|3p-4\right|=\frac{4}{27}\left(\sqrt{4-3p}\right)^3\end{aligned}$$

(4)　2 つの接線は，傾きがともに 1 より，その距離は $\dfrac{\mathrm{AB}}{\sqrt{2}}$ となり，条件から，

$$\frac{4}{27\sqrt{2}}\left(\sqrt{4-3p}\right)^3=\frac{8}{27},\quad \left(\sqrt{4-3p}\right)^3=2\sqrt{2}$$

よって，$4-3p=2$ から，$p=\dfrac{2}{3}$ である。

コメント

接線についての基本題です。丁寧な誘導つきです。

問　題

a を正の実数とする。放物線 $P : y = x^2$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線を l_1 とし，点 A を通り l_1 と直交する直線を l_2 とする。また，l_2 と放物線 P との交点のうち A でない方を $\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。さらに，点 B を通り l_1 に平行な直線を l_3 とし，l_3 と放物線 P との交点のうち B でない方を $\mathrm{C}(c,\ c^2)$ とする。

(1)　$b + c = 2a$ であることを示せ。

(2)　放物線 P と l_3 で囲まれた部分の面積を S とする。S を a を用いて表し，S が最小となるときの S と a の値を求めよ。　[2010]

解答例

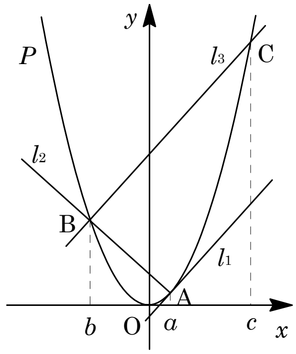
(1)　$P : y = x^2$ ……①に対して，$y' = 2x$ となり，

$$l_2 : y - a^2 = -\frac{1}{2a}(x - a)\ \cdots\cdots\text{②}$$

①②を連立して，$x^2 - a^2 = -\dfrac{1}{2a}(x - a)$

$x \neq a$ の解は，$x + a = -\dfrac{1}{2a}$，$x = -a - \dfrac{1}{2a}$ となり，

$$b = -a - \frac{1}{2a}\ \cdots\cdots\text{③}$$



また，$l_3 : y - b^2 = 2a(x - b)$ より，

$$y = 2ax - 2ab + b^2\ \cdots\cdots\text{④}$$

①④を連立して，$x^2 - 2ax + 2ab - b^2 = 0\ \cdots\cdots$⑤

⑤の解が，$x = b$，c より，解と係数の関係を用いると，$b + c = 2a\ \cdots\cdots$⑥

(2)　P と l_3 で囲まれた部分の面積 S は，③⑥を用いると，

$$S = \int_b^c (2ax - 2ab + b^2 - x^2)\,dx = -\int_b^c (x - b)(x - c)\,dx = \frac{1}{6}(c - b)^3$$

$$= \frac{1}{6}(2a - b - b)^3 = \frac{4}{3}(a - b)^3 = \frac{4}{3}\left(2a + \frac{1}{2a}\right)^3$$

ここで，$a > 0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いると，

$$2a + \frac{1}{2a} \geqq 2\sqrt{2a \cdot \frac{1}{2a}} = 2$$

なお，等号は $2a = \dfrac{1}{2a}\ \left(a = \dfrac{1}{2}\right)$ のときに成立する。

よって，$a = \dfrac{1}{2}$ のとき，S は最小値 $\dfrac{4}{3} \cdot 2^3 = \dfrac{32}{3}$ をとる。

コメント

放物線と直線に囲まれた部分の面積を求める典型題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　a を実数とする。$x \leqq 0$ において，つねに $x^3+4x^2 \leqq ax+18$ が成り立っているものとする。このとき, a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた範囲にある a のうち，最大のものを a_0 とするとき，不等式

$$x^3+4x^2 \leqq a_0x+18$$

を解け。 [2009]

解答例

(1)　$x^3+4x^2 \leqq ax+18$ より，

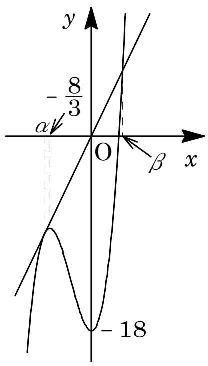
$$x^3+4x^2-18 \leqq ax \cdots\cdots\cdots ①$$

さて，$f(x)=x^3+4x^2-18$ とおくと，

$$f'(x)=3x^2+8x=x(3x+8)$$

x	$\cdots$	$-\frac{8}{3}$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$	-18	$\nearrow$

ここで，$x \leqq 0$ において不等式①が成立する条件は，$x \leqq 0$ のとき曲線 $y=f(x)$ が直線 $y=ax$ の下方に位置することである。



さて，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が，$x=\alpha$ で接し，$x=\beta$ で交わるとすると，

$$x^3+4x^2-ax-18=(x-\alpha)^2(x-\beta) \cdots\cdots\cdots ②$$

②の係数を比べると，

$$2\alpha+\beta=-4 \cdots\cdots\cdots ③，\ \alpha^2+2\alpha\beta=-a \cdots\cdots\cdots ④$$

$$\alpha^2\beta=18 \cdots\cdots\cdots ⑤$$

③⑤より，$\alpha^2(-4-2\alpha)=18$，$\alpha^3+2\alpha^2+9=0$

すると，$(\alpha+3)(\alpha^2-\alpha+3)=0$ となり，α は実数から，$\alpha=-3$ であり，

$$\beta=-4-2\cdot(-3)=2$$

④に代入して，$a=-\alpha^2-2\alpha\beta=3$

したがって, $x \leqq 0$ において不等式①が成立する条件は，図より，$a \leqq 3$ である。

(2)　(1)より，$a_0=3$ となり，このとき不等式①は,

$$x^3+4x^2-3x-18 \leqq 0，\ (x+3)^2(x-2) \leqq 0$$

よって，求める解は, $x \leqq 2$ である。

コメント

3 次関数のグラフを対応させて, 3 次不等式の解を求める基本問題です。

問　題

xy 平面上に，円 $C_1 : x^2+y^2=1$，放物線 $C_2 : y=x^2+5$ がある。また点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を円 C_1 上の点とする。このとき，次の問いに答えよ。

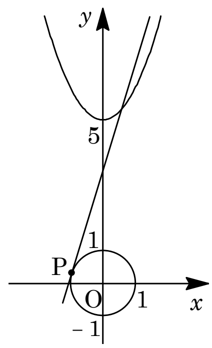
(1) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l の方程式を求めよ(答のみでよい)。

(2) 点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における円 C_1 の接線 l が放物線 C_2 と共有点をもつときの，y_1 の値の範囲を求めよ。

(3) 円 C_1 の接線で，その接点の y 座標が負であり，放物線 C_2 の接線となるものは 2 本ある。これら 2 本の直線それぞれが放物線 C_2 と接する点の座標を求めよ。

(4) (3)の 2 本の直線と放物線 C_2 で囲まれる図形の面積を求めよ。　[2008]

解答例



(1) $C_1 : x^2+y^2=1$ 上の点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ における接線 l の方程式は，

$$x_1x+y_1y=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

(2) l と $C_2 : y=x^2+5 \cdots\cdots ②$に対して，

②を①に代入すると，$x_1x+y_1(x^2+5)=1$

$$y_1x^2+x_1x+5y_1-1=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

(i) $y_1=0$ のとき　$x_1=\pm1$ から，③は実数解をもつ。

(ii) $y_1\neq0$ のとき　③が実数解をもつ条件は，

$$D={x_1}^2-4y_1(5y_1-1)=(1-{y_1}^2)-20{y_1}^2+4y_1$$
$$=-21{y_1}^2+4y_1+1\geqq0$$

よって，$(3y_1-1)(7y_1+1)\leqq0$ から，$-\dfrac{1}{7}\leqq y_1\leqq\dfrac{1}{3}\ (y_1\neq0)$

(i)(ii)より，l と C_2 が共有点をもつ条件は，$-\dfrac{1}{7}\leqq y_1\leqq\dfrac{1}{3}$ である。

(3) l と C_2 が接するのは，③が重解をもつ，すなわち $D=0$ のときである。

このとき，$y_1<0$ となるのは $y_1=-\dfrac{1}{7}$ であり，$x_1=\pm\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2}=\pm\dfrac{4}{7}\sqrt{3}$

すると，③の重解は，$x=\dfrac{-x_1}{2y_1}=\pm2\sqrt{3}$ となり，このとき，②より，

$$y=(\pm2\sqrt{3})^2+5=17$$

よって，円 C_1 の接線と放物線 C_2 と接する点の座標は，$(\pm2\sqrt{3},\ 17)$ である。

(4) (3)より，円 C_1 の接線と C_2 は $x=\pm2\sqrt{3}$ 接する。

そこで，求める図形の面積を S とおくと，y 軸に関する対称性より，

$$S=2\int_0^{2\sqrt{3}}(x-2\sqrt{3})^2dx=\frac{2}{3}\Big[(x-2\sqrt{3})^3\Big]_0^{2\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}(-2\sqrt{3})^3=16\sqrt{3}$$

コメント

微積分の基本問題です。空欄形式にすると，センター数学ⅡB の問題です。

問　題

関数 $y=x^2$ のグラフ C 上に 2 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ \alpha^2)$ と $\mathrm{B}(\beta,\ \beta^2)$ をとる。ただし，$\alpha<\beta$ とする。次の問いに答えよ。

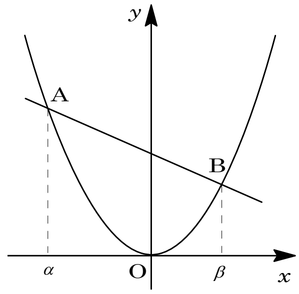
(1)　線分 AB と C で囲まれる部分の面積が $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ であることを示せ。

(2) 線分 AB の長さが一定値 l であるという条件のもとで(1)の面積が最大になるのは，線分 AB が x 軸に平行な場合であることを示せ。また，その最大値を l を用いて表せ。 [2007]

解答例

(1)　直線 AB の方程式は，

$$y-\alpha^2=\frac{\beta^2-\alpha^2}{\beta-\alpha}(x-\alpha),\quad y=(\alpha+\beta)x-\alpha\beta$$



すると，線分 AB と C で囲まれる部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\{(\alpha+\beta)x-\alpha\beta-x^2\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)\{(x-\alpha)-(\beta-\alpha)\}dx$$

$$=-\int_\alpha^\beta\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\}dx=-\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta$$

$$=-\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3+\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

(2)　$\mathrm{AB}=l$ より，$\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(\beta^2-\alpha^2)^2}=l$ となり，

$$(\beta-\alpha)\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}=l,\quad \beta-\alpha=\frac{l}{\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}}$$

すると, (1)より，$S=\frac{1}{6}\cdot\frac{l^3}{\left(\sqrt{1+(\beta+\alpha)^2}\right)^3}$

よって, S が最大となるのは，$\beta+\alpha=0$ のときであり，最大値は $\frac{l^3}{6}$ である。

このとき，線分 AB の方程式は $y=-\alpha\beta$ となり, x 軸に平行である。

コメント

有名な $\frac{1}{6}$ 公式の証明とその応用です。

問　題

関数 $f(x)$ を

$$f(x)=\begin{cases}1-|x| & (|x|\leqq 1)\\ 0 & (|x|>1)\end{cases}$$

と定め，$g(x)=\int_0^1 f(t-x)\,dt$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形を描け。

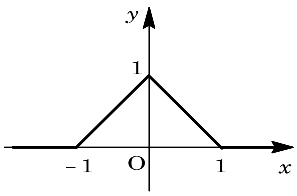
(2)　$g(1)$ の値を求めよ。

(3)　$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。　[2006]

解答例

(1)　$|x|\leqq 1$ において $f(x)=1-|x|$ より，$y=f(x)$ のグラフは $y=-|x|$ のグラフを y 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

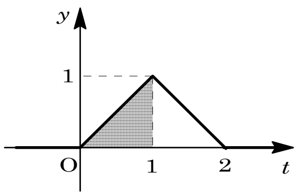
　また，$|x|>1$ において $f(x)=0$ より，$y=f(x)$ のグラフは右図の太線部となる。



(2)　$y=f(t-1)$ のグラフは，$y=f(t)$ のグラフを t 軸方向に 1 だけ平行移動したものである。

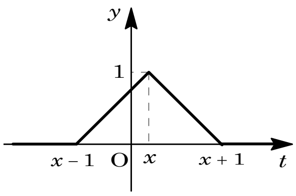
　すると，$g(1)=\int_0^1 f(t-1)\,dt$ より，$g(1)$ は右図の網点部の面積を表す。

$$g(1)=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot 1=\frac{1}{2}$$



(3)　$y=f(t-x)$ のグラフは，$y=f(t)$ のグラフを t 軸方向に x だけ平行移動したものである。

　また，(2)と同様に考えて，$g(x)$ は $0\leqq t\leqq 1$ の範囲で，$y=f(t-x)$ のグラフと t 軸にはさまれた部分の面積を表す。



(i)　$x+1\leqq 0$ $(x\leqq -1)$ のとき　$g(x)=0$

(ii)　$x\leqq 0$，$0\leqq x+1$ $(-1\leqq x\leqq 0)$ のとき　$g(x)=\frac{1}{2}(x+1)^2$

(iii)　$x-1\leqq 0$，$0\leqq x$ $(0\leqq x\leqq 1)$ のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}\times 2-\frac{1}{2}(1-x)^2-\frac{1}{2}(x+1-1)^2$$

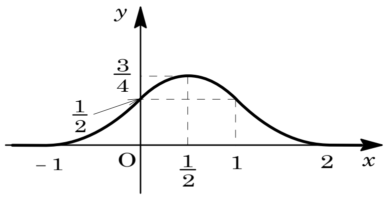
$$=-x^2+x+\frac{1}{2}=-\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

(iv)　$x-1 \leqq 1,\ 1 \leqq x\ (1 \leqq x \leqq 2)$のとき

$$g(x)=\frac{1}{2}(1-x+1)^2=\frac{1}{2}(x-2)^2$$

(v)　$x-1 \geqq 1\ (x \geqq 2)$のとき　$g(x)=0$

以上より，$y=g(x)$のグラフは右図の太線部となる。



コメント

絶対値付きの関数の積分ですが，面積を対応させれば，積分計算を実行するまでもありません。

問　題

関数 $f(x)=x^3-ax^2+b$ の極大値が 5，極小値が 1 となるとき，定数 a，b の値を求めよ。　[2005]

解答例

$f(x)=x^3-ax^2+b$ に対し，$f'(x)=3x^2-2ax=x(3x-2a)$

$f'(x)=0$ の解は，$x=0,\ \dfrac{2}{3}a$ となり，極値をもつことから $a\neq 0$ である。

(i)　$a>0$ のとき

極大値が 5，極小値が 1 より，

$f(0)=b=5$ ………①

$f\left(\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{4}{27}a^3+b=1$ ………②

x	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

①②より，$-\dfrac{4}{27}a^3=-4$，$a=3$

(ii)　$a<0$ のとき

極大値が 5，極小値が 1 より，

$f\left(\dfrac{2}{3}a\right)=-\dfrac{4}{27}a^3+b=5$ ………③

$f(0)=b=1$ ………④

x	$\cdots$	$\frac{2}{3}a$	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

③④より，$-\dfrac{4}{27}a^3=4$，$a=-3$

(i)(ii)より，$(a,\ b)=(3,\ 5),\ (-3,\ 1)$

コメント

3 次関数の増減を調べる微分の基本題です。

問　題

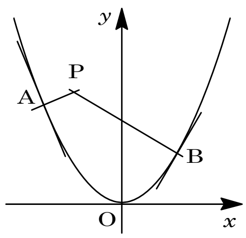
曲線 $y=x^2$ を C とし，C 上の異なる 2 点を $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$ とする。A を通り，A における C の接線と直交する直線を l とする。B を通り，B における C の接線と直交する直線を m とする。

(1)　l と m の交点 P の座標を a と b の式で表せ。

(2)　l と m が直交するように点 A, B が動くとき，交点 P が描く曲線の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた曲線の接線と C で囲まれた部分の面積の最小値を求めよ。　　[2003]

解答例



(1)　$y=x^2$ より $y'=2x$ なので，点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$ における接線の方向ベクトル $(1,\ 2a)$ が，法線 l の法線ベクトルとなるので，l の方程式は，

$$x-a+2a(y-a^2)=0\,,\ \ x+2ay=a+2a^3\ \cdots\cdots\cdots①$$

同様にして，法線 m の方程式は，

$$x+2by=b+2b^3\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$2(a-b)y=a-b+2(a^3-b^3)$

$$y=\frac{1}{2}+a^2+ab+b^2\,,\ \ x=a+2a^3-2a\left(\frac{1}{2}+a^2+ab+b^2\right)=-2ab(a+b)$$

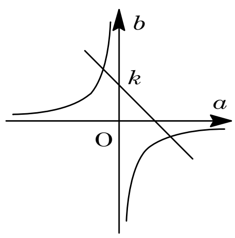
よって，$\mathrm{P}\left(-2ab(a+b),\ \dfrac{1}{2}+a^2+ab+b^2\right)$となる。

(2)　l と m が直交するとき, l と m の法線ベクトルどうしも直交するので,

$$1+2a\cdot 2b=0\,,\ \ ab=-\frac{1}{4}\ \cdots\cdots\cdots③$$

このとき，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，③を代入して，

$$x=\frac{1}{2}(a+b)\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ y=\frac{1}{2}+(a+b)^2-ab=(a+b)^2+\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$



さて，$a+b=k$ ……⑥とおくと，ab 平面上で，どんな k に対しても③と⑥は共有点をもつ。すなわち $a+b$ は任意の値をとり，④より $a+b=2x$ を⑤に代入すると，点 P の軌跡の方程式は，$y=4x^2+\dfrac{3}{4}$ ……⑦となる。

(3) ⑦より $y'=8x$ なので，⑦上の接点を $\left(t,\ 4t^2+\dfrac{3}{4}\right)$とおくと，

接線の方程式は,

$$y-\left(4t^2+\frac{3}{4}\right)=8t(x-t)\,,\ \ y=8tx-4t^2+\frac{3}{4}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

$y=x^2$ と⑧の交点は，$x^2-8tx+4t^2-\dfrac{3}{4}=0$，$x=4t\pm\sqrt{12t^2+\dfrac{3}{4}}$

これを $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とおくと，$y=x^2$ と⑧で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_{\alpha}^{\beta}\left(8tx-4t^2+\frac{3}{4}-x^2\right)dx=-\int_{\alpha}^{\beta}(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(2\sqrt{12t^2+\frac{3}{4}}\right)^3$$

よって，$t=0$ のとき S は最小値 $\dfrac{1}{6}\left(2\sqrt{\dfrac{3}{4}}\right)^3=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題で，しかも超頻出のものです。

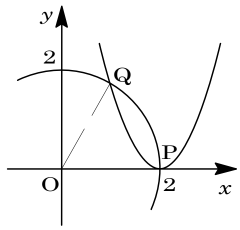
問　題

座標平面上の原点 O を中心とする半径 2 の円を C とする。放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ と円 C の交点の 1 つ $(2,\ 0)$ を P とし，他の 1 つを Q とする。

(1) 点 Q の座標を求めよ。

(2) 円 C の劣弧 PQ と放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ により囲まれた図形の面積を求めよ。ただし，劣弧 PQ とは，点 P と点 Q を結ぶ円 C の 2 つの弧のうち，長さが短い方の弧である。 [2002]

解答例



(1) 円 $C: x^2+y^2=4$ ……①，放物線 $y=\sqrt{3}(x-2)^2$ ……②の交点は，①②より，

$$x^2+3(x-2)^4-4=0,\ (x+2)(x-2)+3(x-2)^4=0$$

$$(x-2)\{(x+2)+3(x^3-6x^2+12x-8)\}=0$$

$$(x-2)(x-1)(3x^2-15x+22)=0$$

$x\neq 2$ より $x=1$，②より $y=\sqrt{3}$ となり，$\mathrm{Q}(1,\ \sqrt{3})$ である。

(2) $\angle\mathrm{QOP}=60^\circ$ より，求める図形の面積を S とすると，

$$S=\pi\cdot 2^2\cdot\frac{1}{6}-\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}-\int_1^2\sqrt{3}(x-2)^2dx=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}\Big[(x-2)^3\Big]_1^2$$

$$=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{3}\pi-\frac{5}{6}\sqrt{3}$$

コメント

落とせない積分の基本題です。

問　題

関数$f(x)$を次のように定義する。

$$f(x)=\begin{cases}4x^2-7x+4 & (x\leqq 1\text{の場合})\\ x & (x>1\text{の場合})\end{cases}$$

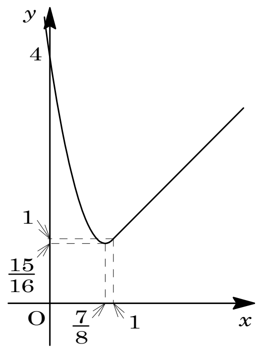
このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数$f(x)$のグラフの概形を描け。

(2)　実数tに対して$F(t)$を，$F(t)=\displaystyle\int_t^{t+1}f(x)\,dx$で定義するとき，関数$F(t)$の増減を調べ，そのグラフの概形を描け。また，$F(t)$の最小値を求めよ。　[2001]

解答例

(1)　$x\leqq 1$ のとき $f(x)=4x^2-7x+4=4\left(x-\dfrac{7}{8}\right)^2+\dfrac{15}{16}$，$x>1$のとき$f(x)=x$より，$y=f(x)$のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　$F(t)$は，$y=f(x)$のグラフと x 軸，および$x=t$，$x=t+1$によって囲まれた領域の面積を表す。

(i)　$t\leqq 0$のとき

$$F(t)=\int_t^{t+1}(4x^2-7x+4)\,dx$$
$$=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_t^{t+1}$$
$$=\frac{4}{3}\{(t+1)^3-t^3\}-\frac{7}{2}\{(t+1)^2-t^2\}+4\{(t+1)-t\}$$
$$=4t^2-3t+\frac{11}{6}=4\left(t-\frac{3}{8}\right)^2+\frac{61}{48}$$

(ii)　$0\leqq t\leqq 1$のとき

$$F(t)=\int_t^1(4x^2-7x+4)\,dx+\int_1^{t+1}x\,dx=\left[\frac{4}{3}x^3-\frac{7}{2}x^2+4x\right]_t^1+\left[\frac{1}{2}x^2\right]_1^{t+1}$$
$$=\frac{4}{3}(1-t^3)-\frac{7}{2}(1-t^2)+4(1-t)+\frac{1}{2}\{(t+1)^2-1\}$$
$$=-\frac{4}{3}t^3+4t^2-3t+\frac{11}{6}$$

$F'(t)=-4t^2+8t-3=-(2t-1)(2t-3)$ より，$F(t)$の増減は右表のようになる。

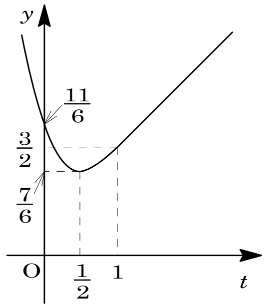
t	0	…	$\frac{1}{2}$	…	1
$F'(t)$		−	0	+	
$F(t)$	$\frac{11}{6}$	↘	$\frac{7}{6}$	↗	$\frac{3}{2}$

(iii)　$t\geqq 1$のとき

$$F(t)=\int_t^{t+1}x\,dx=\left[\frac{1}{2}x^2\right]_t^{t+1}=\frac{1}{2}\{(t+1)^2-t^2\}$$
$$=t+\frac{1}{2}$$

以上より，$y=F(t)$ のグラフの概形は右図のようになる。

また，$F(t)$ の最小値は $F\left(\frac{1}{2}\right)=\frac{7}{6}$ である。



コメント

$F(t)$ を求めるのに場合分けが必要ですが，(1)の $y=f(x)$ のグラフを利用すれば難しくはありません。

問　題

xy 平面上の曲線 $C: y=|2x-1|-x^2+2x+1$ について次の問いに答えよ。

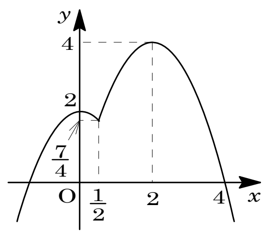
(1)　曲線 C の概形を描け。

(2)　直線 $l: y=ax+b$ が曲線 C と相異なる 2 点において接するときの $a,\ b$ の値を求めよ。

(3)　(2)の直線 l と曲線 C で囲まれた図形の面積 S を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$C: y=|2x-1|-x^2+2x+1$ に対して,



(i)　$x \geqq \dfrac{1}{2}$ のとき　$y=2x-1-x^2+2x+1=-x^2+4x$

$$=-(x-2)^2+4 \cdots\cdots\cdots ①$$

(ii)　$x<\dfrac{1}{2}$ のとき　$y=-(2x-1)-x^2+2x+1$

$$=-x^2+2 \cdots\cdots\cdots ②$$

(2)　①より，$y'=-2x+4$

ここで，$t>\dfrac{1}{2}$ として，接点を $(t,\ -t^2+4t)$ とすると，接線の方程式は,

$$y-(-t^2+4t)=(-2t+4)(x-t),\quad y=(-2t+4)x+t^2 \cdots\cdots\cdots ③$$

②と③の共有点は，$-x^2+2=(-2t+4)x+t^2$

$$x^2-2(t-2)x+t^2-2=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

接する場合は，$D/4=(t-2)^2-(t^2-2)=0$ から，$t=\dfrac{3}{2}$

このとき，④の重解は $x=t-2=-\dfrac{1}{2}<\dfrac{1}{2}$ となり，題意に適する。

よって，求める接線 l は③より，$y=x+\dfrac{9}{4}$ となり，$a=1,\ b=\dfrac{9}{4}$

(3)　$S=\displaystyle\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left\{x+\frac{9}{4}-(-x^2+2)\right\}dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left\{x+\frac{9}{4}-(-x^2+4x)\right\}dx$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x^2+x+\frac{1}{4}\right)dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x^2-3x+\frac{9}{4}\right)dx$$

$$=\int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}\left(x+\frac{1}{2}\right)^2dx+\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\frac{1}{3}\left[\left(x+\frac{1}{2}\right)^3\right]_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_{\frac{1}{2}}^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

コメント

微積分の総合問題です。計算ミスに注意して完答しましょう。

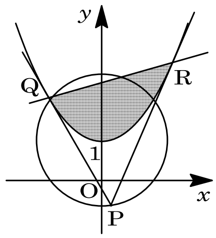
問　題

円 $x^2+(y-1)^2=3$ 上の点 P から放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ に異なる 2 本の接線を引くことができるものとし，その 2 つの接点を Q，R とする。このとき線分 QR とこの放物線とで囲まれた部分の面積を最大とするような点 P の座標と，そのときの面積を求めよ。

[1999]

解答例

円 $x^2+(y-1)^2=3$ ……①，放物線 $y=\dfrac{x^2}{2}+1$ ……②



①上の点 $\mathrm{P}(s,\ t)$ とおくと，$s^2+(t-1)^2=3$ ………③

②より，$y'=x$ なので，点 $\left(u,\ \dfrac{1}{2}u^2+1\right)$ における接線は，

$$y=u(x-u)+\frac{1}{2}u^2+1=ux-\frac{1}{2}u^2+1$$

$\mathrm{P}(s,\ t)$ を通るので，$t=us-\dfrac{1}{2}u^2+1$

$$u^2-2su+2t-2=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

④が異なる 2 実数解をもつことより，$D/4=s^2-2t+2>0$

③より，$3-(t-1)^2-2t+2>0$，$4-t^2>0$

ここで，④の解 $u=s\pm\sqrt{s^2-2t+2}=s\pm\sqrt{4-t^2}$ を $u=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$ とおくと，

$$\alpha=s-\sqrt{4-t^2},\ \beta=s+\sqrt{4-t^2}$$

線分 QR を $y=mx+n$ とすると，線分 QR と放物線で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_\alpha^\beta\left(mx+n-\frac{1}{2}x^2-1\right)dx=-\frac{1}{2}\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{12}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{12}\left(2\sqrt{4-t^2}\right)^3=\frac{2}{3}\left(\sqrt{4-t^2}\right)^3$$

よって，$t=0$ のとき S は最大値 $\dfrac{2}{3}(\sqrt{4})^3=\dfrac{16}{3}$ をとる。

このとき③より，$\mathrm{P}(\pm\sqrt{2},\ 0)$ となる。

コメント

よくある構図の問題です。いわゆる $\dfrac{1}{6}$ 公式を用いる典型題です。

問　題

$f(x)=-ax(x-2b)$ とする。ただし，$a>0$，$b>0$ とする。

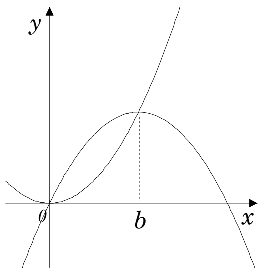
(1)　曲線 $y=f(x)$ と曲線 $y=ax^2$ とで囲まれた部分の面積 S を a と b で表せ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ の頂点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるとき，面積 S の最大値を求めよ。 [1998]

解答例

(1)　$y=-ax(x-2b)$ と $y=ax^2$ の交点は，

$-ax^2+2abx=ax^2$，$2ax^2-2abx=0$ より，$x=0$，b



よって，$S=\int_0^b-(2ax^2-2abx)\,dx$

$$=-2a\int_0^b x(x-b)\,dx$$

$$=-2a\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)b^3=\frac{1}{3}ab^3\cdots\cdots\cdots①$$

(2)　$f(x)=-ax(x-2b)=-a(x-b)^2+ab^2$

これより，$\mathrm{P}(b,\ ab^2)$ となり，点 P が直線 $3x+2y=6$ の上にあるので，

$$3b+2ab^2=6\cdots\cdots\cdots②$$

②より，$a=\dfrac{6-3b}{2b^2}$ となり，これを①に代入すると，

$$S=\frac{1}{3}\cdot\frac{6-3b}{2b^2}\cdot b^3=-\frac{1}{2}(b^2-2b)=-\frac{1}{2}(b-1)^2+\frac{1}{2}$$

以上より，$b=1$，②から $a=\dfrac{3}{2}$ のとき，S は最大値 $\dfrac{1}{2}$ をとる。

コメント

数Ⅱの積分の基本題です。

問　題

$f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$ とする。ただし a は定数とする。

(1)　$f(x)$ の極値を求めよ。

(2)　$x\geqq 0$ のとき，常に $f(x)\geqq 0$ となるような a の範囲を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+3ax^2+3(a^2-1)x$

$f'(x)=3x^2+6ax+3(a^2-1)$

$=3(x^2+2ax+a^2-1)$

$=3(x+a+1)(x+a-1)$

x	$\cdots$	$-a-1$	$\cdots$	$-a+1$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

極大値：$f(-a-1)=(-a-1)^2\{-a-1+3a+3(-a+1)\}=-(a+1)^2(a-2)$

極小値：$f(-a+1)=(-a+1)^2\{-a+1+3a+3(-a-1)\}=-(a-1)^2(a+2)$

(2)　$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq 0$ の条件は，$f(0)=0$ から，

(i)　$-a+1\leqq 0$　$(a\geqq 1)$ のとき

$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq f(0)=0$ となり，つねに成立する。

(ii)　$-a+1>0$　$(a<1)$ のとき

$x\geqq 0$ のとき $f(x)\geqq f(-a+1)=-(a-1)^2(a+2)$ となる。

よって，$-(a-1)^2(a+2)\geqq 0$

$a+2\leqq 0$ から，$a\leqq -2$　($a<1$ をみたす)

(i)(ii)より，$a\leqq -2$，$1\leqq a$

コメント

数Ⅱの微分の基本題です。

問　題

等式 $|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ を満たす xy 平面上の点 $(x,\ y)$ からなる図形を T とする。

(1) 点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2) T で囲まれる領域の面積を求めよ。 [2013]

解答例

(1) $T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$ 上の点 $(a,\ b)$ があれば，

$$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$$

これより，$|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$ となり，点 $(a,\ -b)$ も T 上にある。

(2) (1)より，図形 T は x 軸対称となるので，以下，$y\geqq 0$ で考えると，

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y),\quad y=|x-3|-2|x+3|$$

(i) $x<-3$ のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると，$y\geqq 0$ より，$-9\leqq x<3$ となる。

(ii) $-3\leqq x<3$ のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

すると，$y\geqq 0$ より，$-3\leqq x\leqq -1$ となる。

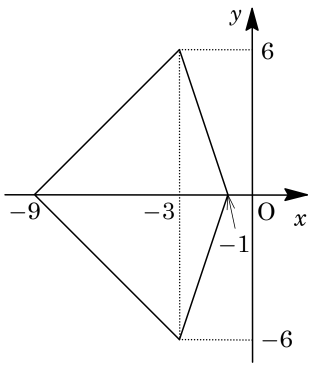
(iii) $x\geqq 3$ のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき，$y\geqq 0$ を満たす x は存在しない。

(i)～(iii)の結果をもとに，x 軸対称すると図形 T は右図のようになり，囲まれる領域の面積 S は，

$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$



コメント

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題です。ていねいな場合分けがすべてです。

問　題

a を正の定数とし，x, y に関する次の不等式を考える。

$$3y \geqq 5x \cdots\cdots\cdots ①,\quad 4y \geqq 7a \cdots\cdots\cdots ②,\quad x-y \geqq 3-a \cdots\cdots\cdots ③$$

(1)　①，②を同時に満たす点$(x,\ y)$のなす領域を xy 平面上に図示せよ。

(2)　①，②，③を同時に満たす実数の組$(x,\ y)$が存在するような a の範囲を求めよ。

[2012]

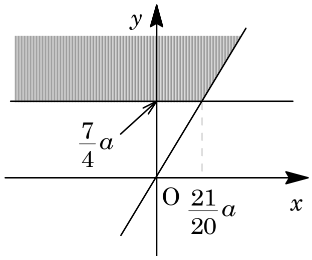
解答例

(1)　$3y \geqq 5x \cdots\cdots ①,\ 4y \geqq 7a \cdots\cdots ②$より，

$$y \geqq \frac{5}{3}x,\quad y \geqq \frac{7}{4}a$$

①②を連立して，$\dfrac{5}{3}x = \dfrac{7}{4}a$ から，$x = \dfrac{21}{20}a$

よって，①，②を同時に満たす点$(x,\ y)$のなす領域は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$x-y \geqq 3-a \cdots\cdots ③$より，$y \leqq x+a-3$ となり，①，②，③を同時に満たす実数の組$(x,\ y)$が存在する条件は，(1)より，点$\left(\dfrac{21}{20}a,\ \dfrac{7}{4}a\right)$が③を満たすことであり，

$$\frac{21}{20}a - \frac{7}{4}a \geqq 3-a,\quad \frac{3}{10}a \geqq 3$$

よって，$a \geqq 10$ である。

コメント

領域の基本問題です。場合分けも必要ありません。

問　題

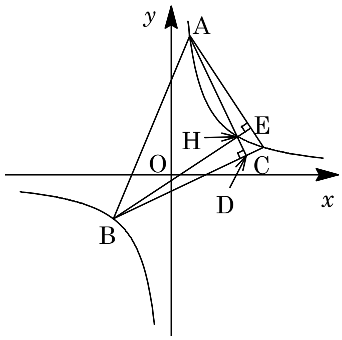
三角形の各頂点から対辺またはその延長に下ろした垂線は, 1 点で交わることが知られている。この交点を三角形の「垂心」という。

いま, 座標平面上の曲線 $K: y=\dfrac{1}{x}$ 上に 3 つの頂点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$, $\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ をもつ三角形を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　三角形 ABC の垂心は, 曲線 K 上にあることを示せ。

(2)　三角形 ABH の垂心は, 点 C に一致することを示せ。　[2009]

解答例



(1)　$\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$, $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$, $\mathrm{C}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ に対し,

$$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\left(c-b,\ \frac{1}{c}-\frac{1}{b}\right)=\frac{b-c}{bc}(bc,\ -1)$$

頂点 A から直線 BC に引いた垂線の足を D とすると, 直線 AD は,

$$bc(x-a)-\left(y-\frac{1}{a}\right)=0$$

$$bcx-y=abc-\frac{1}{a}\cdots\cdots\cdots①$$

同様に, 頂点 B から直線 CA に引いた垂線の足を E とすると, 直線 BE は,

$$cax-y=abc-\frac{1}{b}\cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $c(b-a)x=-\dfrac{b-a}{ab}$, $x=-\dfrac{1}{abc}$

①から, $y=bc\left(-\dfrac{1}{abc}\right)-abc+\dfrac{1}{a}=-abc$

よって, $\mathrm{H}\left(-\dfrac{1}{abc},\ -abc\right)$ となり, H は曲線 $K: y=\dfrac{1}{x}$ 上にある。

(2)　(1)より, 頂点 A から直線 BH に引いた垂線は AE, 頂点 B から直線 AH に引いた垂線は BD となる。

これより, 直線 AE と直線 BD の交点, すなわち点 C が△ABH の垂心である。

コメント

(2)は, (1)の結果を利用する方法もありますが, 上のように垂心の定義を述べるだけでもよいでしょう。

問　題

座標平面上に 2 点 $A(1,\ 0)$，$B(-b,\ 0)$ をとる。ただし，$b>0$ とする。点 A を中心とし原点 $O(0,\ 0)$ を通る円 C_1 と，点 B を中心とし点 A を通る円 C_2 を描く。円 C_1 と円 C_2 との交点のうち第 1 象限にあるものを P とし，三角形 POA において $\angle$POA を θ とする。このとき，次の問いに答えよ。

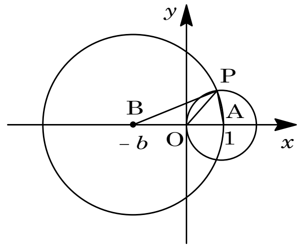
(1) 点 P の x 座標を b の式で表せ。

(2) $\sin\theta$ を b の式で表せ。

(3) 点 B と直線 AP の距離が $\dfrac{20}{9}$ であるとき，b の値と $\sin\theta$ の値を求めよ。　[2006]

解答例

(1) 円 C_1 の半径は 1 より，$(x-1)^2+y^2=1$ ………①



また，円 C_2 の半径は $b+1$ より，

$$(x+b)^2+y^2=(b+1)^2 \text{………②}$$

円 C_1，C_2 の共通弦の方程式は，②－①より，

$$(2b+2)x+b^2-1=b^2+2b,\quad x=\frac{2b+1}{2b+2}$$

よって，点 P の x 座標は，$x=\dfrac{2b+1}{2b+2}$ である。

(2) $\triangle$OAP は $AO=AP=1$ の二等辺三角形より，

$$OP=2OA\cos\theta=2\cos\theta \text{………③}$$

(1)より，$OP\cos\theta=\dfrac{2b+1}{2b+2}$ ………④

③④から，$2\cos^2\theta=\dfrac{2b+1}{2b+2}$，$\cos^2\theta=\dfrac{2b+1}{4b+4}$ となり，

$$\sin^2\theta=1-\frac{2b+1}{4b+4}=\frac{2b+3}{4b+4}$$

$\sin\theta>0$ より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{2b+3}{4b+4}}=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{2b+3}{b+1}}$

(3) $\triangle$BAP は $BA=BP=b+1$，$AP=1$ の二等辺三角形である。

すると，B から AP に下ろした垂線の長さが $\dfrac{20}{9}$ より，

$$\sqrt{(b+1)^2-\left(\frac{1}{2}\right)^2}=\frac{20}{9},\quad (b+1)^2=\frac{400}{81}+\frac{1}{4},\quad (b+1)^2=\frac{41^2}{81\times4}$$

よって，$b>0$ から，$b+1=\dfrac{41}{18}$，$b=\dfrac{23}{18}$

また，(2)より，$\sin\theta=\dfrac{1}{2}\sqrt{\dfrac{46+54}{23+18}}=\dfrac{5}{\sqrt{41}}$

コメント

点 P の y 座標を求める計算に対しては，気乗りがしませんでした。そのため，(2)からは図形的に解いています。

問　題

2 つの単位ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とする。次の問いに答えよ。

(1)　2 次関数 $f(x)=|x\vec{a}+\vec{b}|^2$ の $x\geqq 0$ における最小値を求めよ。

(2)　θ が $0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ の範囲を動くとき，放物線 $y=f(x)$ の頂点が描く軌跡を求めよ。

(3)　(2)で求めた軌跡と x 軸が囲む図形の面積を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　条件より，$f(x)=|x\vec{a}+\vec{b}|^2=|\vec{a}|^2x^2+2x\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=x^2+2x\cos\theta+1$

$$=(x+\cos\theta)^2-\cos^2\theta+1=(x+\cos\theta)^2+\sin^2\theta$$

(i)　$\cos\theta<0$ $(90^\circ<\theta\leqq 180^\circ)$ のとき

$x=-\cos\theta>0$ より，$x\geqq 0$ における最小値は，$\sin^2\theta$ $(x=-\cos\theta)$ となる。

(ii)　$\cos\theta\geqq 0$ $(0^\circ\leqq\theta\leqq 90^\circ)$ のとき

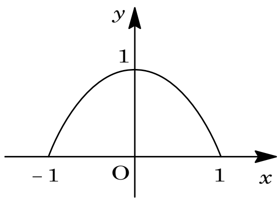
$x=-\cos\theta\leqq 0$ より，$x\geqq 0$ における最小値は，1 $(x=0)$ となる。

(2)　放物線 $y=f(x)$ の頂点を $(x,\ y)$ とおくと，

$$x=-\cos\theta,\quad y=-\cos^2\theta+1$$

よって，$y=-x^2+1$ となる。

また，$0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ$ より $-1\leqq x\leqq 1$ となり，求める軌跡は，放物線 $y=-x^2+1$ $(-1\leqq x\leqq 1)$ である。



(3)　(2)の放物線と x 軸が囲む図形の面積を S とすると，

$$S=2\int_0^1(-x^2+1)\,dx=2\left[-\frac{x^3}{3}+x\right]_0^1=\frac{4}{3}$$

コメント

数Ⅱと 数 B の基本問題の組合せです。

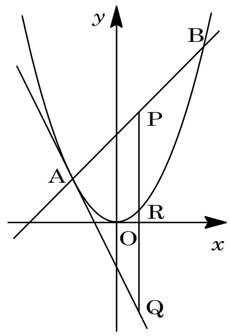
問　題

放物線 $y = x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(-1,\ 1)$，$\mathrm{B}(2,\ 4)$ をとる。放物線の A における接線を l とする。線分 AB 上に A, B と異なる点 P をとる。P を通り y 軸に平行な直線が l と交わる点を Q とし，放物線と交わる点を R とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) $\mathrm{QR} : \mathrm{RP} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB}$ であることを示せ。 [2004]

解答例



(1) $y = x^2$ より $y' = 2x$ なので，$x = -1$ のとき $y' = -2$

これより，$\mathrm{A}(-1,\ 1)$ における接線 l の方程式は，

$$l : y-1 = -2(x+1),\quad y = -2x-1$$

(2) 直線 $\mathrm{AB} : y-1 = \dfrac{4-1}{2+1}(x+1)$，$y = x+2$

$\mathrm{P}(t,\ t+2)\ (-1<t<2)$ とおくと，

$$\mathrm{R}(t,\ t^2),\ \mathrm{Q}(t,\ -2t-1)$$

すると，$\mathrm{AP} : \mathrm{PB} = (t+1) : (2-t)$

$$\begin{aligned}\mathrm{QR} : \mathrm{RP} &= \{t^2-(-2t-1)\} : \{(t+2)-t^2\}\\ &= (t^2+2t+1) : (-t^2+t+2) = (t+1)^2 : (t+1)(2-t)\\ &= (t+1) : (2-t)\end{aligned}$$

よって，$\mathrm{QR} : \mathrm{RP} = \mathrm{AP} : \mathrm{PB}$

コメント

放物線と直線について，基本確認のための問題です。

問　題

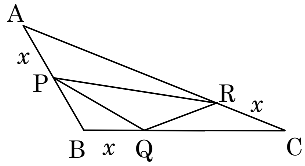
3 辺の長さが AB＝3，BC＝5，CA＝7 の三角形 ABC がある。辺 AB, BC, CA 上の点 P, Q, R を，AP＝BQ＝CR＝x となるようにとる。ただし，$0<x<3$ である。このとき，次の問いに答えよ。

(1) ∠ABC の値を求めよ。

(2) 三角形 BPQ の面積を x の式で表せ。

(3) 三角形 PQR の面積が最小となるときの x の値を求めよ。 [2015]

解答例



(1) △ABC に余弦定理を適用すると，

$$\cos\angle ABC=\frac{3^2+5^2-7^2}{2\cdot3\cdot5}=-\frac{1}{2}$$

よって，∠ABC＝120° である。

(2) $\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot3\cdot5\sin120^\circ=\frac{15}{4}\sqrt{3}$ となり，

$$\triangle BPQ=\frac{3-x}{3}\cdot\frac{x}{5}\triangle ABC=\frac{15}{4}\sqrt{3}\cdot\frac{x(3-x)}{15}=\frac{\sqrt{3}}{4}x(3-x)$$

(3) (2)と同様に，$\triangle CQR=\frac{5-x}{5}\cdot\frac{x}{7}\triangle ABC$，$\triangle ARP=\frac{7-x}{7}\cdot\frac{x}{3}\triangle ABC$

これより，△PQR の面積 S は，

$$S=\left\{1-\frac{x(3-x)}{15}-\frac{x(5-x)}{35}-\frac{x(7-x)}{21}\right\}\cdot\frac{15}{4}\sqrt{3}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{28}\{105-7x(3-x)-3x(5-x)-5x(7-x)\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=7x(3-x)+3x(5-x)+5x(7-x)$ とおくと，

$$f(x)=x(71-15x)=-15\left(x-\frac{71}{30}\right)^2+\frac{71^2}{60}$$

すると，$(*)$から $S=\frac{\sqrt{3}}{28}\{105-f(x)\}$ なので，S が最小となるときは，$f(x)$ が最大になるときに一致し，$0<x<3$ から $x=\frac{71}{30}$ のときである。

コメント

三角比の図形への応用問題です。基本的な内容ですので，計算ミスに要注意です。

問　題

1 辺の長さが a の正方形の板が 1 枚ある。この板から, 1 辺の長さが x の正三角形 4 枚を切り出して正四面体をつくることを考える。次の問いに答えよ。ただし, 板の厚さは無視する。

(1) 図 1 のように正三角形 2 枚で平行四辺形をつくり, これを単位として切り出すとする。ただし, 平行四辺形の 1 辺は正方形の辺上にとるものとする。このとき, 正四面体の体積が最大となるような x と, そのときの体積を求めよ。

(2) 図 2 ように各三角形の 1 辺を正方形の各辺上にとり, 切り出すとする。正四面体の体積が最大となるような x を求めよ。

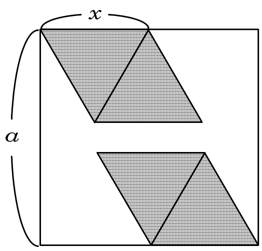


図1

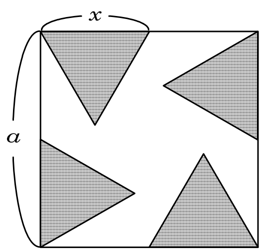
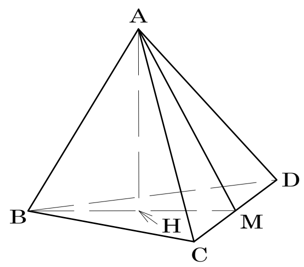


図2

[2001]

解答例

(1) 1 辺の長さが x の正四面体において, 頂点 A から $\triangle$BCD に下ろした垂線の足を H とすると, H は $\triangle$BCD の重心となる。



ここで, 辺 CD の中点を M とおくと,

$$\cos\angle\mathrm{AMH}=\frac{\mathrm{HM}}{\mathrm{AM}}=\frac{1}{3}$$

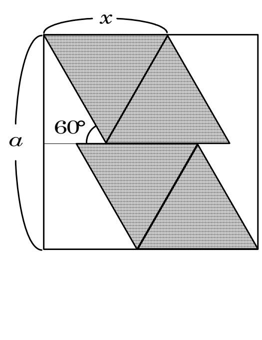
$$\sin\angle\mathrm{AMH}=\sqrt{1-\frac{1}{9}}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

このとき, $\mathrm{BM}=\mathrm{AM}=x\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}x$, $\mathrm{AH}=\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}=\frac{\sqrt{6}}{3}x$

この正四面体の体積を V とすると, $V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}x\cdot\frac{\sqrt{6}}{3}x=\frac{\sqrt{2}}{12}x^3$

したがって, V が最大となるのは, x が最大となるときである。

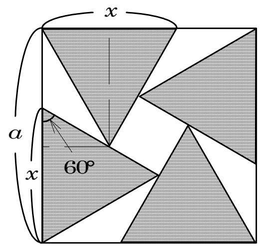
さて, 題意のように正方形から 4 つの正三角形を切り出すとき, その 1 辺の長さが最大になるのは右図の場合である。



このとき, $x\sin 60^\circ=\frac{a}{2}$ より, $x=\frac{a}{\sqrt{3}}$ となり,

$$V=\frac{\sqrt{2}}{12}\left(\frac{a}{\sqrt{3}}\right)^3=\frac{\sqrt{6}}{108}a^3$$

(2)　題意のように正方形から 4 つの正三角形を切り出すとき，その 1 辺の長さが最大になるのは右図の場合である。



このとき，$\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}x+x-a\right)\tan 60^\circ=\dfrac{x}{2}$

$$\frac{3}{2}x+\sqrt{3}x-\sqrt{3}a=\frac{x}{2},\ (1+\sqrt{3})x=\sqrt{3}a$$

よって，$x=\dfrac{\sqrt{3}}{1+\sqrt{3}}a=\dfrac{3-\sqrt{3}}{2}a$

コメント

正三角形の 1 辺の長さが最大なとき，正四面体の体積も最大です。そのため，題意を満たすなるべく大きな正三角形を切り出せばよいことになります。

問　題

座標平面の原点を$\mathrm{O}(0,\ 0)$とする。以下の問いに答えよ。

(1) 座標平面上の異なる 3 点 P, Q, R が, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$を満たしているとする。このとき$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$となることを示せ。

(2) 点 Q の座標を$(3,\ 4)$とし, 点 R は$|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|=1$を満たしているとする。さらに, $|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\leqq 1$を満たすすべての点 P に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 0$が成り立っているとする。このとき点 R の座標を求めよ。　[2017]

解答例

(1) 異なる 3 点 P, Q, R に対して, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=0$より,

$$(\overrightarrow{\mathrm{RP}}-\overrightarrow{\mathrm{RO}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{RO}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{RO}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RO}})=0$$

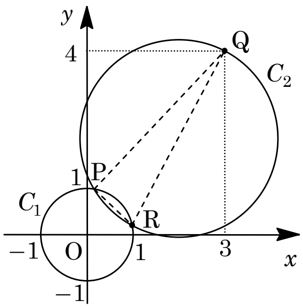
$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-\overrightarrow{\mathrm{RO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{RO}}|^2+\overrightarrow{\mathrm{RO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}-|\overrightarrow{\mathrm{RO}}|^2=0$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}=0$となり, $\overrightarrow{\mathrm{RP}}\perp\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$である。

(2) 条件より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}+|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\leqq 0$なので, (1)と同様にして,

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{RQ}}\leqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

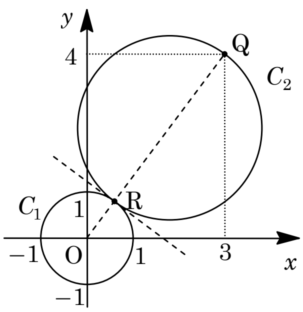
ここで, 原点が中心で半径 1 の円をC_1とし, $\mathrm{Q}(3,\ 4)$およびC_1上の点 R に対して, 線分 QR を直径とする円をC_2とおく。



さて, C_1の内部または周上の任意の点 P で(*)が成り立つことについて,

(i) C_1とC_2が交わるとき

2 交点の一方が点 R となるので, もう一方の交点を点 P としてとると, $\angle\mathrm{QPR}=\dfrac{\pi}{2}$より$\angle\mathrm{QRP}<\dfrac{\pi}{2}$となり, (*)は成立しない。



(ii) C_1とC_2が外接するとき

点 R は 2 円の接点となり, C_1の内部または周上の任意の点 P は, R に一致するか, または R におけるC_1, C_2の共通接線についてC_2の反対側にあるので, (*)はつねに成立する。

(iii) C_1とC_2が内接するとき

点 R は 2 円の接点となり, 点 P が原点に一致するとき$\angle\mathrm{QRP}=0$となり, (*)は成立しない。

(i)～(iii)より, 求める点 R は, C_1とC_2の外接するときの接点である。

したがって，$\left|\overrightarrow{\mathrm{OR}}\right|=1$ に注意すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{1}{\left|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}\right|}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{\sqrt{3^2+4^2}}(3,\ 4)=\frac{1}{5}(3,\ 4)$$

よって，$\mathrm{R}\left(\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right)$ である。

コメント

(2)は(1)の結果を利用するものの，数式的な処理では，うまくいきません。そこで，$\overrightarrow{\mathrm{RP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{RQ}}$ のなす角が 90° 以上と大雑把に考えて，解答例を作りました。

問　題

座標空間内に，原点O(0, 0, 0)を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点A(0, 0, 1)，B(0, 0, −1)がある。O と異なる点P(s, t, 0)に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点をR(u, v, 0)とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

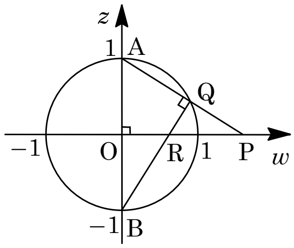
(2) s, t をそれぞれ u, v を用いて表せ。

(3) 点 P が xy 平面内の直線 $ax+by=1$ $(a^2+b^2\neq 0)$ 上を動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。　　　　[2016]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ を w 軸の正の向きとし，球面 S を wz 平面で切断したときの切り口を考える。

(i) 点 P が球面 S の外部にあるとき



△OAP と△ORB は相似なので，

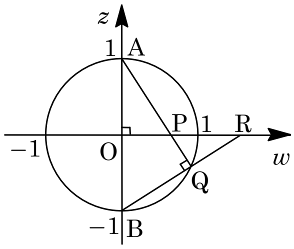
$$\mathrm{OA}:\mathrm{OR}=\mathrm{OP}:\mathrm{OB}$$

よって，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$ である。

(ii) 点 P が球面 S 上にあるとき

点 Q，点 R は点 P と一致するので，$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=1$

(iii) 点 P が球面 S の内部にあるとき



(i)と同様に，△OAP と△ORB は相似なので，

$$\mathrm{OP}\cdot\mathrm{OR}=\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}=1$$

(2) P(s, t, 0)，R(u, v, 0)より，$\mathrm{OP}=\sqrt{s^2+t^2}$，$\mathrm{OR}=\sqrt{u^2+v^2}$ となり，(1)から，

$$\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2}=1,\ (s^2+t^2)(u^2+v^2)=1\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$ は同じ向きなので，k を正の定数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\overrightarrow{\mathrm{OR}},\ (s,\ t,\ 0)=k(u,\ v,\ 0)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(k^2u^2+k^2v^2)(u^2+v^2)=1$ となり，$k=\dfrac{1}{u^2+v^2}$ から，

$$s=\frac{u}{u^2+v^2}\cdots\cdots\cdots③,\ t=\frac{v}{u^2+v^2}\cdots\cdots\cdots④$$

(3) 点 P が xy 平面内の直線 $ax+by=1$ 上にあるので，$as+bt=1\cdots\cdots\cdots⑤$

③④を⑤に代入すると，$\dfrac{au}{u^2+v^2}+\dfrac{bv}{u^2+v^2}=1$ となり，

$$u^2+v^2-au-bv=0,\ \left(u-\frac{a}{2}\right)^2+\left(v-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

よって，点 R は xy 平面内の，中心$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2},\ 0\right)$で半径$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$の円周上にある。

コメント

球面と直線の交わりに関する問題ですが，断面をみると有名な構図になっています。(1)の誘導から，数式的に処理するのではなく，図形的に考えることが示唆されています。しかし，このようなときは，位置関係に注意しなくてはいけません。

問　題

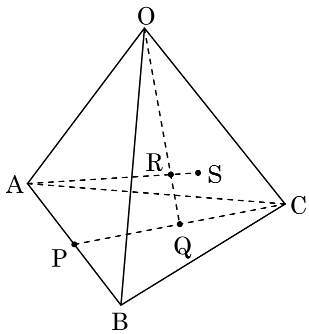
四面体 OABC において, AB の中点を P, PC の中点を Q, OQ を $m:n$ に内分する点を R とする。ただし, $m>0$, $n>0$ とする。さらに直線 AR が平面 OBC と交わる点を S とする。$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$, $\vec{c}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ とおいて以下の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OR}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}$ を $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$, m, n を用いて表せ。

(3) $\dfrac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}$ を m, n を用いて表せ。 [2014]

解答例



(1) AB の中点を P, PC の中点を Q とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OB}})=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OP}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$$

(2) OQ を $m:n$ に内分する点を R とすると,

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\frac{m}{m+n}\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\frac{m}{4(m+n)}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})$$

また, 点 S は直線 AR 上にあるので, t を実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\vec{a}+t\left\{\frac{m}{4(m+n)}(\vec{a}+\vec{b}+2\vec{c})-\vec{a}\right\}$$

$$=\left\{1+\frac{mt}{4(m+n)}-t\right\}\vec{a}+\frac{mt}{4(m+n)}(\vec{b}+2\vec{c})$$

さらに, 点 S は平面 OBC 上にあるので, $1+\dfrac{mt}{4(m+n)}-t=0$ となり,

$$4(m+n)+mt-4(m+n)t=0,\quad t=\frac{4(m+n)}{3m+4n}$$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{m}{4(m+n)}\cdot\dfrac{4(m+n)}{3m+4n}(\vec{b}+2\vec{c})=\dfrac{m}{3m+4n}(\vec{b}+2\vec{c})$

(3) (2)より, $\mathrm{AR}:\mathrm{RS}=1:(t-1)=1:\left\{\dfrac{4(m+n)}{3m+4n}-1\right\}=(3m+4n):m$ より,

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RS}}=\frac{3m+4n}{m}$$

コメント

空間ベクトルの応用問題です。まったく同じ構図で, 毎年, かなり出題されている超頻出のものです。

問　題

四角形 ABCD は平行四辺形ではないとし，辺 AB，BC，CD，DA の中点をそれぞれ P, Q, R, S とする。

(1)　線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L は一致することを示せ。

(2)　線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N を結ぶ直線は点 K を通ることを示せ。

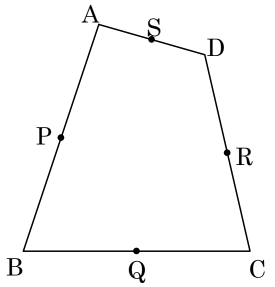
[2012]

解答例

(1)　A, B, C, D, P, Q, R, S の位置ベクトルを，それぞれ$\vec{a}$，$\vec{b}$，$\vec{c}$，$\vec{d}$，$\vec{p}$，$\vec{q}$，$\vec{r}$，$\vec{s}$とおくと，条件より，

$$\vec{p}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b}),\ \vec{q}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{c}),\ \vec{r}=\frac{1}{2}(\vec{c}+\vec{d})$$

$$\vec{s}=\frac{1}{2}(\vec{d}+\vec{a})$$



さらに，線分 PR の中点 K と線分 QS の中点 L の位置ベクトルを，それぞれ$\vec{k}$，$\vec{l}$とおくと，

$$\vec{k}=\frac{1}{2}(\vec{p}+\vec{r})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}+\vec{d})$$

$$\vec{l}=\frac{1}{2}(\vec{q}+\vec{s})=\frac{1}{4}(\vec{b}+\vec{c}+\vec{d}+\vec{a})$$

よって，$\vec{k}=\vec{l}$から，点 K と点 L は一致する。

(2)　まず，線分 AC の中点 M と線分 BD の中点 N の位置ベクトルを，それぞれ$\vec{m}$，$\vec{n}$とおくと，

$$\vec{m}=\frac{1}{2}(\vec{a}+\vec{c}),\ \vec{n}=\frac{1}{2}(\vec{b}+\vec{d})$$

ここで，線分 MN の中点 X の位置ベクトルを$\vec{x}$とおくと，

$$\vec{x}=\frac{1}{2}(\vec{m}+\vec{n})=\frac{1}{4}(\vec{a}+\vec{c}+\vec{b}+\vec{d})$$

よって，$\vec{x}=\vec{k}$から，点 X と点 K は一致，すなわち直線 MN は点 K を通る。

コメント

平面ベクトルの基本題です。対称性から位置ベクトルを設定しています。

問　題

平面上の異なる 3 点 O, A, B は同一直線上にないものとする。この平面上の点 P が, $2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) P の軌跡が円となることを示せ。

(2) (1)の円の中心を C とするとき, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ で表せ。

(3) O との距離が最小となる(1)の円周上の点を P_0 とする。A, B が条件

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=0$$

を満たすとき, $\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=s\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となる s, t の値を求めよ。 [2011]

解答例

(1) 条件より, $2|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から,

$$|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2-\frac{1}{2}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$\left|\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})\right|^2=\frac{1}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2+\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$=\frac{1}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=\frac{1}{16}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

P の軌跡は, 中心の位置ベクトルが $\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$, 半径が $\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$ の円となる。

(2) 円の中心が C より, (1)から, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{1}{4}(\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}})$

(3) (1)より, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}-2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}|=\frac{1}{4}|\overrightarrow{\mathrm{OA}}+2\overrightarrow{\mathrm{OB}}|$

また, 条件より, $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2=-5\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}<0$ となり,

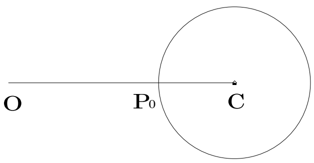
$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\frac{1}{16}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2-4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)=-\frac{9}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}|^2=\frac{1}{16}(|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+4\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+4|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2)=-\frac{1}{16}\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

よって, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=9|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}|^2$ となり, $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3|\overrightarrow{\mathrm{CP_0}}|$

O, P_0, C は, この順に同一直線上にあることより,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP_0}}=\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{OB}}\right)=\frac{1}{6}\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$



よって, $s=\frac{1}{6}$, $t=-\frac{1}{3}$

コメント

(1)では, 与えられた式を「因数分解」して直径の両端のベクトル表示を求めるという方法もあります。(2)の設問をみると, 出題者はこの解法を予測したのではないかと思えます。

問　題

三角錐 ABCD において，$AB = AC = AD = 3$，$BC = CD = DB = 2$ とする。また，辺 BC を $1:3$ に内分する点を E とする。このとき，三角形 ADE に対して次の問いに答えよ。

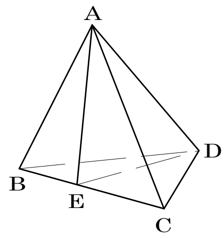
(1) 辺 DE, AE の長さを求めよ。

(2) 三角形 ADE の面積を求めよ。　[2000]

解答例

(1) △ABC において，余弦定理より，$4 = 9 + 9 - 2\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}$

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} = \frac{9+9-4}{2} = 7$$



同様にして，$\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} = 7$

条件より，$\overrightarrow{AE} = \dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}$ なので，

$$|\overrightarrow{AE}|^2 = \frac{1}{16}\left(9|\overrightarrow{AB}|^2 + 6\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC} + |\overrightarrow{AC}|^2\right)$$

$$= \frac{1}{16}(9\cdot 9 + 6\cdot 7 + 9) = \frac{33}{4}$$

よって，$AE = \sqrt{\dfrac{33}{4}} = \dfrac{\sqrt{33}}{2}$

また，$\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}\cdot\overrightarrow{AD} = \dfrac{1}{4}\left(3\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{AD}\right) = \dfrac{1}{4}(3\cdot 7 + 7) = 7$

すると，$\overrightarrow{DE} = \overrightarrow{AE} - \overrightarrow{AD}$ より，同様にして，

$$|\overrightarrow{DE}|^2 = |\overrightarrow{AE}|^2 - 2\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD} + |\overrightarrow{AD}|^2 = \frac{33}{4} - 2\cdot 7 + 9 = \frac{13}{4}$$

よって，$DE = \sqrt{\dfrac{13}{4}} = \dfrac{\sqrt{13}}{2}$

(2) (1)より△ADE の面積 S は，

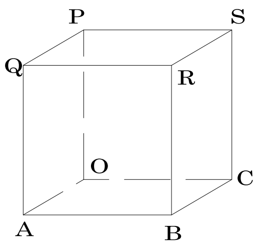
$$S = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{AE}|^2|\overrightarrow{AD}|^2 - \left(\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AD}\right)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{33}{4}\cdot 9 - 7^2} = \frac{\sqrt{101}}{4}$$

コメント

ベクトルで解こうか，三角比で解こうか，迷いました。(2)の設問を見て，前者に決めました。

問　題

辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき, 次の問いに答えよ。



(1) ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{OE}}$を 3 つのベクトル$\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$で表せ。ただし, $\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$とする。

(2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4) 辺 BR を$3:1$の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし, 五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。 [1999]

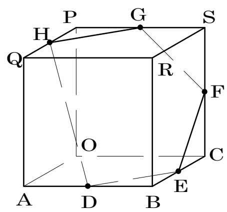
解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$とおく。

$$\vec{d}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots①,\quad \vec{f}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdots\cdots②,\quad \vec{g}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots③$$

②③より, $\frac{3}{2}\vec{c}=2\vec{f}-\vec{g}$, $\vec{c}=\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots④$

①④より, $\vec{a}=\vec{d}-\frac{1}{2}\vec{c}=\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑤$



よって, $\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{a}=\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}+\frac{1}{2}\left(\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\right)$

$$=\frac{1}{2}\vec{d}+\vec{f}-\frac{1}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑥$$

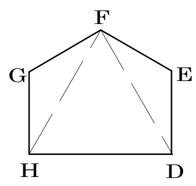
(2) ⑥より$\frac{1}{2}+1-\frac{1}{2}=1$なので, 点 E は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

また③④より, $\vec{p}=\vec{g}-\frac{1}{2}\left(\frac{4}{3}\vec{f}-\frac{2}{3}\vec{g}\right)=-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{4}{3}\vec{g}$

よって, $\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{a}=-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{4}{3}\vec{g}+\frac{1}{2}\left(\vec{d}-\frac{2}{3}\vec{f}+\frac{1}{3}\vec{g}\right)=\frac{1}{2}\vec{d}-\vec{f}+\frac{3}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑦より$\frac{1}{2}-1+\frac{3}{2}=1$なので, 点 H は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

(3) 五角形 DEFGH において, $\mathrm{DE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FG}=\mathrm{GH}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$となり, また$\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$より$\mathrm{HD}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$, さらに$\mathrm{FH}=\mathrm{FD}=\mathrm{HD}$なので,

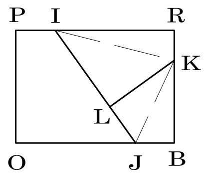


$$\triangle\mathrm{FGH}=\triangle\mathrm{FDE}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{FHD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$$

五角形 DEFGH の面積は, $2\sqrt{3}\times 2+6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

(4)　点 K から五角形 DEFGH に下ろした垂線の足を L とすると，対称性より L は長方形 OPRB 上にある。また長方形 OPRB と線分 GH，DE との交点をそれぞれ I, J とおくと，



$$\mathrm{IR}=\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{2}=3\sqrt{2},\ \ \mathrm{JB}=\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3=5\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{IJ}\cdot\mathrm{KL}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DH}\cdot\mathrm{KL}=\sqrt{6}\mathrm{KL}$$

よって，$\sqrt{6}\,\mathrm{KL}=5\sqrt{2}$，$\mathrm{KL}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ より，五角錐の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{50}{3}$

コメント

(4)では, OR が五角形 DEFGH に垂直であることを用いると計算量が減ります。

問　題

自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ と書くことにする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n に対して $R(2^{n+3})=R(2^n)$ となることを示せ。

(2) $R(2^{2017})$ を求めよ。

(3) 自然数 m が $R(2^{2017}m+2^{29})=5$ を満たすとき，$R(m)$ の値を求めよ。　[2017]

解答例

(1) 自然数 a を 7 で割った余りを $R(a)$ とし，以下，mod7 で記すと，

$$2^{n+3}=2^n\cdot 8\equiv 2^n\cdot 1=2^n$$

よって，$R(2^{n+3})=R(2^n)$ となる。

(2) $2017=3\cdot 672+1$ より，$2^{2017}=2^{3\cdot 672+1}=8^{672}\cdot 2\equiv 1^{672}\cdot 2=2$

よって，$R(2^{2017})=R(2)=2$ である。

(3) m を自然数とし，また $29=3\cdot 9+2$ より，

$$2^{2017}m+2^{29}=8^{672}\cdot 2m+8^9\cdot 2^2\equiv 1^{672}\cdot 2m+1^9\cdot 4=2m+4$$

ここで，$R(2^{2017}m+2^{29})=5\cdots\cdots(*)$に対して，

(i) $R(m)=0$ $(m\equiv 0)$ のとき　$2m+4\equiv 4$ より$(*)$を満たさない。

(ii) $R(m)=1$ $(m\equiv 1)$ のとき　$2m+4\equiv 6$ より$(*)$を満たさない。

(iii) $R(m)=2$ $(m\equiv 2)$ のとき　$2m+4\equiv 8\equiv 1$ より$(*)$を満たさない。

(iv) $R(m)=3$ $(m\equiv 3)$ のとき　$2m+4\equiv 10\equiv 3$ より$(*)$を満たさない。

(v) $R(m)=4$ $(m\equiv 4)$ のとき　$2m+4\equiv 12\equiv 5$ より$(*)$を満たす。

(vi) $R(m)=5$ $(m\equiv 5)$ のとき　$2m+4\equiv 14\equiv 0$ より$(*)$を満たさない。

(vii) $R(m)=6$ $(m\equiv 6)$ のとき　$2m+4\equiv 16\equiv 2$ より$(*)$を満たさない。

(i)～(vii)より，$(*)$を満たすのは $R(m)=4$ である。

コメント

自然数を 7 で割った余りというのが題材の整数問題です。記述を簡潔するために合同式を利用しています。ただ，(3)は書きすぎたような……。

問　題

複素数 $\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$\omega^2+\omega^4$，$\omega^5+\omega^{10}$ の値を求めよ。

(2)　n を正の整数とするとき，$\omega^n+\omega^{2n}$ の値を求めよ。

(3)　n を正の整数とするとき，$(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ が整数であることを証明せよ。

[2016]

解答例

(1)　$\omega=\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$\omega^2=\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}i}{2}\right)^2=\dfrac{1-2\sqrt{3}i+3i^2}{4}=\dfrac{-1-\sqrt{3}i}{2}$ となり，

$$\omega+\omega^2=-1\cdots\cdots\cdots①,\ \ \omega^3=\omega\omega^2=\frac{1-3i^2}{4}=1\cdots\cdots\cdots②$$

すると，①②より，$\omega^2+\omega^4=\omega^2+\omega^3\omega=\omega^2+\omega=-1$

$$\omega^5+\omega^{10}=\omega^3\omega^2+\omega^9\omega=\omega^2+\omega=-1$$

(2)　k を 0 以上の整数として，n を 3 で割った余りで場合分けをすると，①②から，

(i)　$n=3k+1$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+1}+\omega^{6k+2}=\omega^{3k}\omega+\omega^{6k}\omega^2=\omega+\omega^2=-1$$

(ii)　$n=3k+2$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+2}+\omega^{6k+4}=\omega^{3k}\omega^2+\omega^{6k+3}\omega=\omega^2+\omega=-1$$

(iii)　$n=3k+3$ のとき

$$\omega^n+\omega^{2n}=\omega^{3k+3}+\omega^{6k+6}=1+1=2$$

(i)～(iii)より，n が 3 の倍数のとき $\omega^n+\omega^{2n}=2$，それ以外のとき $\omega^n+\omega^{2n}=-1$

(3)　$a_n=(\omega+2)^n+(\omega^2+2)^n$ とおき，$\omega^0=1$ として二項展開すると，

$$a_n=\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l\,\omega^l\,2^{n-l}+\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l\,\omega^{2l}\,2^{n-l}=\sum_{l=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_l\,(\omega^l+\omega^{2l})2^{n-l}$$

すると，l が 0 以上の整数のとき，(2)から $\omega^l+\omega^{2l}$ は整数となり a_n は整数である。

コメント

有名なオメガの問題です。ポイントは①式と②式です。

問　題

数列$\{a_n\}$は，関係式　$a_1=1$，$a_2=2$，$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たすとする。$b_n=a_{n+1}-a_n$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　b_{n+1}とb_nの間に成り立つ関係式を求めよ。

(2)　数列$\{b_n\}$の一般項を求めよ。

(3)　数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　$a_{n+2}-4a_{n+1}+3a_n=1$より，$a_{n+2}-a_{n+1}=3(a_{n+1}-a_n)+1$

ここで，$b_n=a_{n+1}-a_n$とおくと，$b_{n+1}=3b_n+1$ ………(＊)

(2)　(＊)より，$b_{n+1}+\dfrac{1}{2}=3\Big(b_n+\dfrac{1}{2}\Big)$となり，$b_1=a_2-a_1=1$から，

$$b_n+\frac{1}{2}=\Big(b_1+\frac{1}{2}\Big)\cdot 3^{n-1}=\frac{3}{2}\cdot 3^{n-1}=\frac{3^n}{2}$$

よって，$b_n=\dfrac{3^n}{2}-\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$

(3)　(2)から，$a_{n+1}-a_n=\dfrac{1}{2}(3^n-1)$より，$n\geqq 2$において，

$$a_n=a_1+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{2}(3^k-1)=1+\frac{1}{2}\cdot\frac{3(3^{n-1}-1)}{3-1}-\frac{1}{2}(n-1)=\frac{3^n}{4}-\frac{1}{2}n+\frac{3}{4}$$

なお，この式は$n=1$のときも成立している。

コメント

ノーヒントでも出題される隣接3項間型の漸化式を，誘導つきで解く問題です。

問　題

数列$\{a_n\}$が，$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=a_n(5-a_{n+1})$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしているとき，以下の問いに答えよ。

(1)　nに関する数学的帰納法で，$a_n>0$であることを証明せよ。

(2)　$b_n=\dfrac{1}{a_n}$とおくとき，b_{n+1}をb_nを用いて表せ。

(3)　a_nを求めよ。　[2014]

解答例

(1)　漸化式　$a_1=1$，$a_{n+1}-a_n=a_n(5-a_{n+1})$……①を満たす数列$\{a_n\}$に対して，数学的帰納法により，$a_n>0$を示す。

(i)　$n=1$のとき　$a_1=1>0$より成立。

(ii)　$n=k$のとき　$a_k>0$とすると，①より，

$a_{k+1}-a_k=a_k(5-a_{k+1})$，$(a_k+1)a_{k+1}=6a_k$………②

すると，$a_k+1>0$，$6a_k>0$より$a_{k+1}>0$

(i)(ii)より，任意の自然数nに対して，$a_n>0$である。

(2)　$a_n>0$なので，②より，$a_{n+1}=\dfrac{6a_n}{a_n+1}$となり，$\dfrac{1}{a_{n+1}}=\dfrac{a_n+1}{6a_n}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6a_n}$

すると，$b_n=\dfrac{1}{a_n}$から，$b_{n+1}=\dfrac{1}{6}+\dfrac{1}{6}b_n$………③

(3)　$b_1=\dfrac{1}{a_1}=1$で，③より，$b_{n+1}-\dfrac{1}{5}=\dfrac{1}{6}\left(b_n-\dfrac{1}{5}\right)$となり，

$$b_n-\frac{1}{5}=\left(b_1-\frac{1}{5}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}=\frac{4}{5}\left(\frac{1}{6}\right)^{n-1}$$

よって，$b_n=\dfrac{1}{5}+\dfrac{4}{5}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{n-1}=\dfrac{6^{n-1}+4}{5\cdot 6^{n-1}}$から，$a_n=\dfrac{1}{b_n}=\dfrac{5\cdot 6^{n-1}}{6^{n-1}+4}$

コメント

誘導つきで漸化式を解く問題です。ただ，著名なタイプですので，誘導なしで出題されることもあります。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1) 整数 x, y が $25x-31y=1$ を満たすとき，$x-5$ は 31 の倍数であることを示せ。

(2) $1\leqq y\leqq 100$ とする。このとき，不等式 $0\leqq 25x-31y\leqq 1$ を満たす整数の組 $(x,\ y)$ をすべて求めよ。　[2013]

解答例

(1) 方程式 $25x-31y=1$ ……①を満たす整数 $(x,\ y)$ として $(5,\ 4)$ をとると，

$$25\cdot 5-31\cdot 4=1 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$25(x-5)-31(y-4)=0$，$25(x-5)=31(y-4)$ ………③

ここで，25 と 31 は互いに素なので，③より $x-5$ は 31 の倍数である。

(2) 不等式 $0\leqq 25x-31y\leqq 1$ ……④を満たす整数 $(x,\ y)$ に対して，

(i) $25x-31y=1$ のとき

(1)より，k を整数として，$x-5=31k$，$y-4=25k$

$$x=5+31k,\ \ y=4+25k$$

$1\leqq y\leqq 100$ より，$k=0,\ 1,\ 2,\ 3$ となり，

$$(x,\ y)=(5,\ 4),\ (36,\ 29),\ (67,\ 54),\ (98,\ 79)$$

(ii) $25x-31y=0$ のとき

$25x=31y$ より，l を整数として，$x=31l$，$y=25l$

$1\leqq y\leqq 100$ より，$l=1,\ 2,\ 3,\ 4$ となり，

$$(x,\ y)=(31,\ 25),\ (62,\ 50),\ (93,\ 75),\ (124,\ 100)$$

(i)(ii)より，④を満たす整数 $(x,\ y)$ は，

$(5,\ 4)$，$(31,\ 25)$，$(36,\ 29)$，$(62,\ 50)$，$(67,\ 54)$，$(93,\ 75)$，$(98,\ 79)$，$(124,\ 100)$

コメント

不定方程式の有名問題です。このタイプは，新課程の数 A の教科書には記載されていて，先取りのような扱いとなっています。

問　題

数列$\{a_n\}$が次のように帰納的に定められている。

$$a_1=0,\ a_{n+1}=\begin{cases}2a_n & (n\text{が奇数のとき})\\ a_n+1 & (n\text{が偶数のとき})\end{cases}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

(1)　a_{10}を求めよ。

(2)　nが奇数の場合と偶数の場合それぞれについて，a_{n+4}をa_nで表せ。

(3)　a_nを 3 で割ったときの余りを求めよ。　[2011]

解答例

(1)　条件より，$a_1=0$から，$a_2=2a_1=0$，$a_3=a_2+1=1$，$a_4=2a_3=2$，

$a_5=a_4+1=3$，$a_6=2a_5=6$，$a_7=a_6+1=7$，$a_8=2a_7=14$，

$a_9=a_8+1=15$，$a_{10}=2a_9=30$

(2)　まず，$n+4$とnの偶奇は一致し，

(i)　nが奇数の場合

$$a_{n+4}=a_{n+3}+1=2a_{n+2}+1=2(a_{n+1}+1)+1=2a_{n+1}+3$$
$$=2\cdot 2a_n+3=4a_n+3\cdots\cdots\cdots①$$

(ii)　nが偶数の場合

$$a_{n+4}=2a_{n+3}=2(a_{n+2}+1)=2a_{n+2}+2=2\cdot 2a_{n+1}+2=4a_{n+1}+2$$
$$=4(a_n+1)+2=4a_n+6\cdots\cdots\cdots②$$

(3)　①より$a_{n+4}=3(a_n+1)+a_n$，②より$a_{n+4}=3(a_n+2)+a_n$

これより，nの偶奇にかかわらず，a_{n+4}を 3 で割ったときの余りは，a_nを 3 で割ったときの余りに一致する。

すると，$a_1=a_2=0$，$a_3=1$，$a_4=2$から，a_nを 3 で割ったときの余りr_nは，kを 0 以上の整数として，

$$r_n=0\ (n=4k+1,\ 4k+2),\ r_n=1\ (n=4k+3),\ r_n=2\ (n=4k+4)$$

コメント

誘導に乗っていけば結論まで到達します。漸化式に整数を融合した頻出問題です。

問　題

自然数 m, n に対して，自然数 $m \diamond n$ を次のように定める。

$\diamond$	1	2	3	4	5	$\cdots$
1	4	6	8	10	12	$\cdots$
2	9	13	17	21	25	$\cdots$
3	16	22	28	34	40	$\cdots$
4	25	33	41	49	57	$\cdots$
5	36	46	56	66	76	$\cdots$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$

$\diamond$	n
m	$m \diamond n$

例えば，$1\diamond 1=4$，$1\diamond 2=6$，$2\diamond 1=9$，$4\diamond 2=33$，$5\diamond 3=56$，$1\diamond 6=14$，$6\diamond 1=49$ である。

(1)　数列 $8\diamond 1$，$8\diamond 2$，$8\diamond 3$，……の初項 $8\diamond 1$ から第 25 項 $8\diamond 25$ までの和を求めよ。

(2)　$m\diamond n=474$ を満たす自然数 m, n の組をすべて求めよ。　[2010]

解答例

(1)　条件より，$m\diamond n=(m+1)^2+2m(n-1)$ なので，

$$8\diamond 1+8\diamond 2+\cdots+8\diamond 25=\sum_{n=1}^{25}\{\,9^2+16(n-1)\,\}=\frac{81+465}{2}\times 25=6825$$

(2)　$m\diamond n=474$ から，$(m+1)^2+2m(n-1)=474$ となり，

$$m^2+2mn-473=0,\quad m(m+2n)=473\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$473=11\times 43$ より，$(*)$を満たす自然数 m, n は，$m<m+2n$ から，

$$(m,\ m+2n)=(1,\ 473),\ (11,\ 43)$$

よって，$(m,\ n)=(1,\ 236),\ (11,\ 16)$

コメント

中学入試のような問題です。常識的な感覚で規則性を見つければよいのでしょう。

問　題

$p,\ q$ を 0 でない定数とする。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^n\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列$\{a_n\}$について，次の問いに答えよ。

(1)　a_2，a_3，a_4 を求めよ。

(2)　数列$\{a_n\}$の一般項を推測し，その推測が正しいことを数学的帰納法を用いて証明せよ。　[2008]

解答例

(1)　$a_1=1$，$a_{n+1}=pa_n+\dfrac{q-p}{2}q^n$ に対して，

$$a_2=pa_1+\frac{q-p}{2}q^1=p+\frac{q-p}{2}q=\frac{2p-pq+q^2}{2}$$

$$a_3=pa_2+\frac{q-p}{2}q^2=p\cdot\frac{2p-pq+q^2}{2}+\frac{q-p}{2}q^2=\frac{2p^2-p^2q+q^3}{2}$$

$$a_4=pa_3+\frac{q-p}{2}q^3=p\cdot\frac{2p^2-p^2q+q^3}{2}+\frac{q-p}{2}q^3=\frac{2p^3-p^3q+q^4}{2}$$

(2)　(1)より，$a_n=\dfrac{2p^{n-1}-p^{n-1}q+q^n}{2}$ と推測でき，これを数学的帰納法で証明する。

(i)　$n=1$ のとき　$a_1=\dfrac{2p^0-p^0q+q}{2}=1$ より成立する。

(ii)　$n=k$ のとき　$a_k=\dfrac{2p^{k-1}-p^{k-1}q+q^k}{2}$ と仮定する。

$$a_{k+1}=pa_k+\frac{q-p}{2}q^k=p\cdot\frac{2p^{k-1}-p^{k-1}q+q^k}{2}+\frac{q-p}{2}q^k=\frac{2p^k-p^kq+q^{k+1}}{2}$$

よって，$n=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より，$a_n=\dfrac{2p^{n-1}-p^{n-1}q+q^n}{2}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$

コメント

推測→帰納法の誘導がついた漸化式の基本問題です。

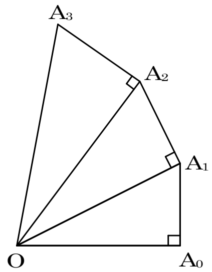
問　題

k が 4 より大きい自然数であるとき，$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$ を，$\angle \mathrm{O} = \left(\dfrac{360}{k}\right)^\circ$，$\angle \mathrm{A_0} = 90^\circ$ で，面積が 1 であるような直角三角形とする。また，$n = 2,\ 3,\ \cdots,\ k$ に対して，点 A_n を，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ が $\triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ と相似であるように定める。$r = \cos\angle \mathrm{O}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\triangle \mathrm{OA_0A_1}$，$\triangle \mathrm{OA_1A_2}$，$\cdots$，$\triangle \mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$ の面積の和 S を r と k を用いて表せ。

(2)　$\angle \mathrm{O} = 45^\circ$ のときの S の値と $\angle \mathrm{O} = 30^\circ$ のときの S の値を比較し，どちらが大きいか答えよ。ただし，$\log_{10} 2 = 0.3010$，$\log_{10} 3 = 0.4771$ とする。　[2007]

解答例



(1)　まず，$r = \cos\angle \mathrm{A}_{n-1}\mathrm{OA}_{n-2} = \dfrac{\mathrm{OA}_{n-2}}{\mathrm{OA}_{n-1}}$

すると，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ と $\triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ の相似比は，

$$\mathrm{OA}_{n-1} : \mathrm{OA}_{n-2} = 1 : r$$

これより，$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n$ と $\triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1}$ の面積比は，

$$\triangle \mathrm{OA}_{n-1}\mathrm{A}_n : \triangle \mathrm{OA}_{n-2}\mathrm{A}_{n-1} = 1 : r^2$$

よって，相似な直角三角形の面積の列は，公比 $\dfrac{1}{r^2}$ の等比数列をなし，$\triangle \mathrm{OA_0A_1} = 1$ から，

$$S = \triangle \mathrm{OA_0A_1} + \triangle \mathrm{OA_1A_2} + \triangle \mathrm{OA_2A_3} + \cdots + \triangle \mathrm{OA}_{k-1}\mathrm{A}_k$$
$$= 1 + \frac{1}{r^2} + \left(\frac{1}{r^2}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{1}{r^2}\right)^{k-1}$$
$$= \frac{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^k}{1-\frac{1}{r^2}} = \frac{r^2}{r^2-1}\left\{1-\left(\frac{1}{r^2}\right)^k\right\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2)　$\angle \mathrm{O} = 45^\circ$ のとき $r = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$，$k = 8$ となり，このとき $S = S_1$ とおく。$\angle \mathrm{O} = 30^\circ$ のとき $r = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$k = 12$ となり，このとき $S = S_2$ とおく。

すると，$(*)$から，$S_1 = \dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}-1}(1-2^8) = 255$

$$S_2 = \frac{\frac{3}{4}}{\frac{3}{4}-1}\left\{1-\left(\frac{4}{3}\right)^{12}\right\} = 3\cdot\left(\frac{4}{3}\right)^{12} - 3$$

ここで，$S_1 - S_2 = 255 - 3\cdot\left(\dfrac{4}{3}\right)^{12} + 3 = 3\left\{86 - \left(\dfrac{4}{3}\right)^{12}\right\}$となり，

$$\log_{10} 86 > \log_{10} 81 = 4\log_{10} 3 = 1.9084$$

$$\log_{10}\left(\frac{4}{3}\right)^{12} = 12(2\log_{10} 2 - \log_{10} 3) = 1.4988$$

よって，$S_1 > S_2$ より，$\angle\mathrm{O} = 45^\circ$ のときの S の値の方が大きい。

コメント

図形と数列の融合問題です。題意を把握するのに時間がかかりますが，内容は基本的なものです。

問　題

座標平面の原点を O とし，4 点$(1,\ 3)$，$(-1,\ 3)$，$(-1,\ -3)$，$(1,\ -3)$を頂点とする長方形の周を R とする。$n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対し，$(1,\ 0)$を出発して R 上を反時計回りに秒速 1 で移動する点の n 秒後の位置をP_nとし，OP_nとOP_{n+2}のなす角度をθ_nとおく。次の問いに答えよ。

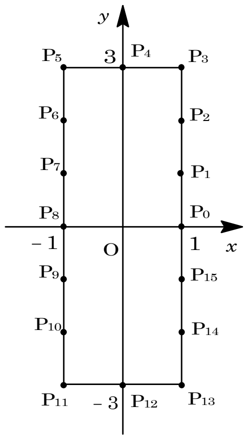
(1)　$\cos\theta_0$，$\cos\theta_1$，$\cos\theta_2$，$\cos\theta_3$を求めよ。

(2)　すべての n に対して，$\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$が成り立つような自然数 k のうち，もっとも値が小さいものを求めよ。

(3)　θ_nが最小となるときのP_nの座標をすべて求めよ。　[2007]

解答例

(1)　題意より，$\mathrm{P}_0(1,\ 0)$，$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 2)$，$\mathrm{P}_3(1,\ 3)$，$\mathrm{P}_4(0,\ 3)$，$\mathrm{P}_5(-1,\ 3)$，……となり，OP_nとOP_{n+2}のなす角度がθ_nから，



$$\cos\theta_n=\frac{\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}_n}||\overrightarrow{\mathrm{OP}_{n+2}}|}$$

これより，$\cos\theta_0=\dfrac{1}{1\cdot\sqrt{5}}=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$，$\cos\theta_1=\dfrac{1+3}{\sqrt{2}\cdot\sqrt{10}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$

$$\cos\theta_2=\frac{6}{\sqrt{5}\cdot 3}=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta_3=\frac{-1+9}{\sqrt{10}\cdot\sqrt{10}}=\frac{4}{5}$$

(2)　まず，P_nとP_{n+8}は原点対称なので，$\cos\theta_{n+8}=\cos\theta_n$が成立する。

また，y 軸に関する対称性より，

$$\cos\theta_4=\cos\theta_2=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta_5=\cos\theta_1=\frac{2}{\sqrt{5}},\quad \cos\theta_6=\cos\theta_0=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

さらに，$\cos\theta_7=0$ となり，(1)の結果と合わせると，すべての n に対して，$\cos\theta_{n+k}=\cos\theta_n$が成り立つような自然数 k の最小値は 8 である。

(3)　θ_nが最小となるのは，$\cos\theta_n$が最大のときである。

$0\leqq n\leqq 7$ において，$\cos\theta_n$が最大であるのは, (1)(2)より,

$$\cos\theta_1=\cos\theta_2=\cos\theta_4=\cos\theta_5=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

周期性を考慮すると，θ_nが最小となるときのP_nは,

$\mathrm{P}_1(1,\ 1)$，$\mathrm{P}_2(1,\ 2)$，$\mathrm{P}_4(0,\ 3)$，$\mathrm{P}_5(-1,\ 3)$，$\mathrm{P}_9(-1,\ -1)$，

$\mathrm{P}_{10}(-1,\ -2)$，$\mathrm{P}_{12}(0,\ -3)$，$\mathrm{P}_{13}(1,\ -3)$

コメント

(2)の周期を求めるとき，図から明らかに 8 であることはわかりますが，同時に 7 以下の場合についての記述も必要です。

問　題

自然数 n, k が $n \geqq k$ を満たすとき，${}_n\mathrm{C}_k$ は二項係数を表す。次の問いに答えよ。

(1) 不等式 $a > b > c$ と等式 ${}_a\mathrm{C}_3 + {}_b\mathrm{C}_2 + {}_c\mathrm{C}_1 = 29$ をともに満たす 3 つの自然数の組 $(a,\ b,\ c)$ を 1 つ求めよ。

(2) n を自然数とする。次の等式を証明せよ。　${}_{n+3}\mathrm{C}_3 = {}_{n+2}\mathrm{C}_3 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1 + 1$

(3) 自然数 a, b, c, d は $a > b > c > d$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。　${}_a\mathrm{C}_3 > {}_b\mathrm{C}_3 + {}_c\mathrm{C}_2 + {}_d\mathrm{C}_1$　[2006]

解答例

(1) ${}_a\mathrm{C}_3 + {}_b\mathrm{C}_2 + {}_c\mathrm{C}_1 = 29$ より，$\dfrac{1}{6}a(a-1)(a-2) + \dfrac{1}{2}b(b-1) + c = 29$

すると，$a > b > c$ のもとで，この式を満たす 1 組の $(a,\ b,\ c)$ は，

$(a,\ b,\ c) = (6,\ 4,\ 3)$

(2)
$$\begin{aligned}{}_{n+2}\mathrm{C}_3 + {}_{n+1}\mathrm{C}_2 + {}_n\mathrm{C}_1 + 1 &= \frac{1}{6}(n+2)(n+1)n + \frac{1}{2}(n+1)n + n + 1\\ &= \frac{1}{6}(n+1)\{(n+2)n + 3n + 6\} = \frac{1}{6}(n+1)(n^2+5n+6)\\ &= \frac{1}{6}(n+1)(n+2)(n+3) = {}_{n+3}\mathrm{C}_3\end{aligned}$$

(3) $a > b > c > d \geqq 1$ より，$a \geqq 4$ となり，(2)から，

${}_a\mathrm{C}_3 = {}_{a-1}\mathrm{C}_3 + {}_{a-2}\mathrm{C}_2 + {}_{a-3}\mathrm{C}_1 + 1$

ここで，$a-1 \geqq b \geqq 3$，$a-2 \geqq c \geqq 2$，$a-3 \geqq d \geqq 1$ となるので，

${}_{a-1}\mathrm{C}_3 \geqq {}_b\mathrm{C}_3$，${}_{a-2}\mathrm{C}_2 \geqq {}_c\mathrm{C}_2$，${}_{a-3}\mathrm{C}_1 \geqq {}_d\mathrm{C}_1$

よって，${}_a\mathrm{C}_3 \geqq {}_b\mathrm{C}_3 + {}_c\mathrm{C}_2 + {}_d\mathrm{C}_1 + 1 > {}_b\mathrm{C}_3 + {}_c\mathrm{C}_2 + {}_d\mathrm{C}_1$

コメント

二項係数についての証明問題です。(2)は(3)の誘導となっています。(1)の役割は定義の確認でしょうか。

問　題

数列$\{a_n\}$を$a_n = n^2 + 1$で定め，数列$\{b_n\}$を$b_n = 3n^2 + 3$で定める。これら 2 つの数列の項を小さい順に並べてできる新しい数列を$\{c_n\}$とする。たとえば，初めの 3 項は，$c_1 = 2$，$c_2 = 5$，$c_3 = 6$となっている。このうち，$\{a_n\}$から来る項は$c_1 = a_1$，$c_2 = a_2$，$\{b_n\}$から来る項は$c_3 = b_1$である。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　c_4，c_5，c_6を求めよ。

(2)　$n = 3k$，$3k - 1$，$3k - 2$（kは自然数）の場合に分けて考えることにより，a_nは 3 の倍数ではなく，したがってa_nは$\{b_n\}$のどの項とも一致しないことを示せ。

(3)　$\{c_n\}$において，$\{b_n\}$から来る項は連続して 2 個以上並ばないことを，背理法を用いて示せ。　[2004]

解答例

(1)　$a_n = n^2 + 1$より，$a_1 = 2$，$a_2 = 5$，$a_3 = 10$，$a_4 = 17$，$a_5 = 26$

$b_n = 3n^2 + 3$より，$b_1 = 6$，$b_2 = 15$，$b_3 = 30$

よって，$c_1 = 2$，$c_2 = 5$，$c_3 = 6$，$c_4 = 10$，$c_5 = 15$，$c_6 = 17$

(2)　(i)　$n = 3k$のとき　$a_{3k} = (3k)^2 + 1 = 3\cdot 3k^2 + 1$

a_{3k}は 3 で割ると 1 余る数である。

(ii)　$n = 3k - 1$のとき　$a_{3k-1} = (3k-1)^2 + 1 = 3(3k^2 - 2k) + 2$

a_{3k-1}は 3 で割ると 2 余る数である。

(iii)　$n = 3k - 2$のとき　$a_{3k-2} = (3k-2)^2 + 1 = 3(3k^2 - 4k + 1) + 2$

a_{3k-2}は 3 で割ると 2 余る数である。

(i)(ii)(iii)より，a_nは 3 の倍数ではなく，数列$\{b_n\}$のどの項とも一致しない。

(3)　数列$\{c_n\}$において，$\{b_n\}$から来る項が連続して並ぶと仮定する。

すなわち, (2)から，ある自然数l, mに対して，

$$a_l < b_m < b_{m+1} < a_{l+1}\text{，}\quad a_l < 3a_m < 3a_{m+1} < a_{l+1}$$

$a_l < 3a_m$より，$3a_m - a_l = 3(m^2+1) - (l^2+1) = 3m^2 - l^2 + 2 > 0$となり，

$$l < \sqrt{3m^2+2}$$

このとき，
$$\begin{aligned}3a_{m+1} - a_{l+1} &= 3\{(m+1)^2 + 1\} - \{(l+1)^2 + 1\}\\ &= 3m^2 - l^2 + 6m - 2l + 4 > 6m - 2l + 2\\ &> 6m - 2\sqrt{3m^2+2} + 2 = 2(3m + 1 - \sqrt{3m^2+2})\\ &= 2\cdot\frac{(3m+1)^2 - (3m^2+2)}{3m+1+\sqrt{3m^2+2}} = \frac{2\{6m(m+1)-1\}}{3m+1+\sqrt{3m^2+2}} > 0\end{aligned}$$

これは，$3a_{m+1} < a_{l+1}$と矛盾する。

したがって，$\{c_n\}$において，$\{b_n\}$から来る項は連続して 2 個以上並ばない。

コメント

(3)の背理法は，無理矢理おさえ込んだような証明になってしまいました。

問　題

r，s，t は 0 でない定数とする。数列 $\{a_n\}$ は条件 $ra_{n+1}+sa_n+t=0$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしているとし，$b_n=a_{n+1}-a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。

(1) 数列 $\{b_n\}$ は等比数列であることを示せ。

(2) $a_1=1$，$a_2=4$，$a_2<a_3$，$a_4=13+3\sqrt{3}$ であるとき，一般項 a_n を求めよ。

(3) (2)の条件の下で，$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}$ を求めよ。　[2003]

解答例

(1) $ra_{n+1}+sa_n+t=0$ ……①より，$ra_{n+2}+sa_{n+1}+t=0$ ……②となり，②－①から，

$$r(a_{n+2}-a_{n+1})+s(a_{n+1}-a_n)=0$$

$b_n=a_{n+1}-a_n$ より，$rb_{n+1}+sb_n=0$，$b_{n+1}=-\dfrac{s}{r}b_n$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 $-\dfrac{s}{r}$ の等比数列である。

(2) $b_1=a_2-a_1=3$ であり，$-\dfrac{s}{r}=q$ とおくと，(1)より $b_n=3q^{n-1}$

$a_2<a_3$ より $b_2>0$ なので，$3q>0$ すなわち $q>0$ である。

このとき，$a_4=a_1+b_1+b_2+b_3=1+3+3q+3q^2=4+3q+3q^2$ となり，

$$4+3q+3q^2=13+3\sqrt{3},\quad q^2+q-(3+\sqrt{3})=0,\quad (q-\sqrt{3})(q+\sqrt{3}+1)=0$$

$q>0$ より，$q=\sqrt{3}$

よって，$n\geqq 2$ で，$a_n=1+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}3(\sqrt{3})^{k-1}=1+3\cdot\frac{(\sqrt{3})^{n-1}-1}{\sqrt{3}-1}$

$$=1+\frac{3}{2}(\sqrt{3}+1)\{(\sqrt{3})^{n-1}-1\}\ \cdots\cdots\cdots③$$

なお，③は $n=1$ のときも成立している。

(3) (2)より，$\log_3 b_k=\log_3 3(\sqrt{3})^{k-1}=\log_3(\sqrt{3})^{k+1}=\log_3 3^{\frac{k+1}{2}}=\dfrac{k+1}{2}$ となるので，

$$S_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{(\log_3 b_{k+1})(\log_3 b_k)}=\sum_{k=1}^{n}\frac{2}{k+2}\cdot\frac{2}{k+1}=4\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\right)$$

$$=4\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\right)=4\cdot\frac{n}{2(n+2)}=\frac{2n}{n+2}$$

コメント

隣接 2 項間型の漸化式が題材ですが，スムーズに解けるように誘導がついています。

問　題

k を自然数の定数とする。自然数 n に対して，$S_n = |n-1|+|n-2|+\cdots+|n-k|$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　S_n を求めよ。

(2)　S_n の最小値と，そのときの n の値を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$S_n = |n-1|+|n-2|+\cdots+|n-k|$ に対して，

(i)　$k \leqq n$ のとき

$$S_n = (n-1)+(n-2)+\cdots+(n-k) = \frac{(n-1)+(n-k)}{2}\cdot k = kn - \frac{1}{2}k(k+1)$$

(ii)　$1 \leqq n \leqq k$ のとき

$$S_n = (n-1)+(n-2)+\cdots+1+0+1+\cdots+(k-n)$$
$$= \frac{(n-1)+1}{2}\cdot(n-1)+\frac{1+(k-n)}{2}\cdot(k-n) = n^2-(k+1)n+\frac{1}{2}(k^2+k)$$

(2)　$k \leqq n$ のとき，n の増加に伴って S_n が増加するので，S_n が最小となるのは，$1 \leqq n \leqq k$ のときである。このとき，S_n は n の 2 次式なので，

$$S_n = \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(k+1)^2 + \frac{1}{2}(k^2+k) = \left(n-\frac{k+1}{2}\right)^2 + \frac{1}{4}k^2 - \frac{1}{4}$$

よって，n が奇数のとき，$n = \frac{k+1}{2}$ で S_n は最小値をとり，その値は $\frac{1}{4}k^2-\frac{1}{4}$ である。また，n が偶数のとき，$n=\frac{k}{2}$ または $n=\frac{k}{2}+1$ で S_n は最小値をとり，その値は $\frac{k^2}{4}-(k+1)\cdot\frac{k}{2}+\frac{1}{2}(k^2+k)=\frac{k^2}{4}$ である。

コメント

正確に絶対値をはずすことがポイントです。わかりにくいときは，k の値を具体的に決めて，見当をつけるのも 1 つの手です。

問　題

n を自然数とする。$f(x)$ は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$ を通るとする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。 [2001]

解答例

(1) $f(0)=1$ より，$f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，

$f(-1)=0$ から，$a-b+1=0$ ………①

$f(n)=n$ から，$an^2+bn+1=n$ ………②

①より $b=a+1$，②に代入して $an^2+(a+1)n+1=n$，$a(n^2+n)=-1$

$$a=-\frac{1}{n^2+n},\ \ b=-\frac{1}{n^2+n}+1=\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$$

よって，$f(x)=-\dfrac{1}{n^2+n}x^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}x+1$

(2) (1)より，$f(k)=-\dfrac{1}{n^2+n}k^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}k+1$ なので，

$$S=\sum_{k=0}^{n}f(k)=-\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n^2+n-1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$$

$$=-\frac{1}{6}(2n+1)+\frac{1}{2}(n^2+n-1)+n+1=\frac{1}{6}(n+2)(3n+1)$$

(3) $(n+2)(3n+1)=(n+2)(2n+n+1)=2n(n+2)+(n+1)(n+2)$ と変形すると，$2n(n+2)$ は偶数，さらに $n+1$，$n+2$ のいずれかは偶数なので，$(n+1)(n+2)$ も偶数となり，$(n+2)(3n+1)$ は偶数となる。

また，$(n+2)(3n+1)$ が 3 の倍数となる条件は，$3n+1$ が 3 の倍数でないので，$n+2$ が 3 の倍数となることである。

よって，S の値が整数であるためには，$(n+2)(3n+1)$ が 6 の倍数，すなわち $n+2$ が 3 の倍数であることことが必要十分である。

コメント

(2)の結果から，(3)では $(n+2)(3n+1)$ が偶数になることをいえば，題意の証明ができます。n を偶奇で分けてもよいのですが，上の解では式変形をしてみました。

問　題

数列$\{a_n\}$は，初項$a_1 = 6$で漸化式$a_{n+1} - a_n = 2n + 4$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たす。また，数列$\{b_n\}$を$b_n = \dfrac{1}{a_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$と定める。このとき次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{a_n\}$の第n項a_nを求めよ。

(2) 数列$\{b_n\}$の第$n+1$項b_{n+1}から第$2n$項b_{2n}までの和を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $a_1 = 6$，$a_{n+1} - a_n = 2n + 4$より，

$$a_n = 6 + \sum_{k=1}^{n-1}(2k+4) = 6 + 2\cdot\frac{1}{2}(n-1)n + 4(n-1) = n^2 + 3n + 2 \quad (n \geqq 2)$$

$n = 1$をあてはめると，$a_1 = 1^2 + 3\cdot 1 + 2 = 6$となり，定義と一致する。

以上より，$n \geqq 1$で，$a_n = n^2 + 3n + 2 = (n+1)(n+2)$

(2) $b_n = \dfrac{1}{a_n} = \dfrac{1}{(n+1)(n+2)} = \dfrac{1}{n+1} - \dfrac{1}{n+2}$より，

$$\sum_{k=n+1}^{2n} b_k = \sum_{k=n+1}^{2n}\left(\frac{1}{k+1} - \frac{1}{k+2}\right) = \frac{1}{n+2} - \frac{1}{2n+2} = \frac{n}{2(n+1)(n+2)}$$

コメント

教科書の例題に載っているような漸化式の基本問題です。

問　題

数列$\{a_n\}$は初項と漸化式$a_1=1$, $a_{n+1}=2a_n+n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$で定義されている。

(1) 一般項a_nを求めよ。

(2) 数列$\{a_n\}$の初項から第n項までの和S_nを求めよ。　[1998]

解答例

(1) $a_{n+1}=2a_n+n-1\cdots\cdots\cdots$①

①をみたす等差数列を$\{\alpha n+\beta\}$とすると,

$$\alpha(n+1)+\beta=2(\alpha n+\beta)+n-1,\ \ \alpha n+\alpha+\beta=(2\alpha+1)n+2\beta-1$$

任意のnに対して成立することより,

$$\alpha=2\alpha+1,\ \ \alpha+\beta=2\beta-1$$

よって, $\alpha=-1$, $\beta=0$

すると, $-(n+1)=2(-n)+n-1\cdots\cdots\cdots$②

①－②より, $a_{n+1}+n+1=2(a_n+n)$

$$a_n+n=(a_1+1)2^{n-1}=2\cdot2^{n-1}=2^n$$

$$a_n=2^n-n$$

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}(2^k-k)=\frac{2(2^n-1)}{2-1}-\frac{1}{2}n(n+1)=2^{n+1}-\frac{1}{2}n^2-\frac{1}{2}n-2$

コメント

(1)の漸化式は, 階差数列をつくる方法など, いろいろな解法がありますが, 最も簡明なのは上記の方法です。このように特殊解を考えて等比数列に帰着させるという考え方は, 汎用性があります。

問　題

1 つのサイコロを 3 回振り，出た目を順に u，v，w とする。そして座標平面上の 2 点 $\mathrm{A}(a_1,\ a_2)$，$\mathrm{B}(b_1,\ b_2)$ を

$$a_1 = u,\ a_2 = 0,\ b_1 = v\cos\frac{(w+2)\pi}{12},\ b_2 = v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}$$

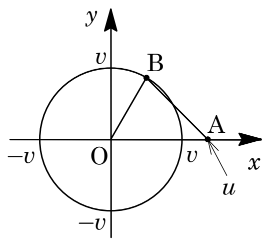
で定める。このとき以下の問いに答えよ。ただし O は原点$(0,\ 0)$とする。

(1) △OAB が正三角形となる確率を求めよ。

(2) △OAB が大きさ $\frac{\pi}{3}$ の内角をもつ直角三角形となる確率を求めよ。　[2016]

解答例

(1) サイコロを 3 回振り，出た目を順に u，v，w とし，$\mathrm{A}(u,\ 0)$，$\mathrm{B}\left(v\cos\frac{(w+2)\pi}{12},\ v\sin\frac{(w+2)\pi}{12}\right)$を対応させる。



このとき，△OAB が正三角形となるのは，$\mathrm{OA} = \mathrm{OB}$かつ$\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$の場合より，

$$u = v \cdots\cdots\cdots①,\quad \frac{(w+2)\pi}{12} = \frac{\pi}{3} \cdots\cdots\cdots②$$

①②を満たす$(u,\ v,\ w)$の組は，②より $w = 2$ となるので，$6\times1\times1 = 6$ 通りとなり，この確率は$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$ である。

(2) △OAB が大きさ$\frac{\pi}{3}$の内角をもつ直角三角形となるのは，もう 1 つの内角の大きさが$\frac{\pi}{6}$ となることより，その 3 辺の長さの比は$2:1:\sqrt{3}$ となる。

そこで，$\mathrm{OA} = u$，$\mathrm{OB} = v$ は整数値に注意すると，$\angle\mathrm{AOB} = \frac{\pi}{3}$ $(w = 2)$となり，

(i) $\mathrm{OA}:\mathrm{OB} = 1:2$のとき　$(u,\ v) = (1,\ 2)$，$(2,\ 4)$，$(3,\ 6)$

(ii) $\mathrm{OA}:\mathrm{OB} = 2:1$のとき　$(u,\ v) = (2,\ 1)$，$(4,\ 2)$，$(6,\ 3)$

よって，$(u,\ v,\ w)$の組は$3+3 = 6$通りとなり，この確率は$\frac{6}{6^3} = \frac{1}{36}$ である。

コメント

確率の基本問題です。(2)は 6 パターンがありますが，そのうち 4 パターンが不適というのは，少し手を動かせばわかるでしょう。

問　題

n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4) 引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率を p_n とする。不等式 $p_n \geqq 0.9$ を満たす最小の自然数 n の値を求めよ。 [2015]

解答例

(1) 番号 k のカードは k 枚なので，用意したカードを N 枚とすると，

$$N=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) N 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_N\mathrm{C}_2$ 通りが同様に確からしく，

$${}_N\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}$$

$$=\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n-2)=\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)$$

このとき，引いた 2 枚のカードの番号がともに k である場合は，$k\geqq 2$ では，${}_k\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}k(k-1)$ 通りより，求める確率は，

$$\frac{\frac{1}{2}k(k-1)}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

なお，この式は $k=1$ のときも成立している。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を q_n とおくと，(2)より，

$$q_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)$$

$$=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}$$

$$=\frac{2}{(n-1)(n+2)}\left\{\frac{1}{3}(2n+1)-1\right\}=\frac{4}{3(n+2)}$$

(4) 引いたカード 2 枚の番号が異なっている確率 p_n は，

$$p_n=1-q_n=1-\frac{4}{3(n+2)}$$

条件より，$p_n \geqq 0.9$ なので，$1-\dfrac{4}{3(n+2)} \geqq \dfrac{9}{10}$ となり，

$$\frac{4}{3(n+2)} \leqq \frac{1}{10},\ \ 3(n+2) \geqq 40,\ \ n \geqq \frac{34}{3}$$

よって，求める最小の自然数 n の値は，$n=12$ である。

コメント

確率についての基本的な問題です。

問　題

A と B が続けて試合を行い，先に 3 勝した方が優勝するというゲームを考える。1 試合ごとに A が勝つ確率を p，B が勝つ確率を q，引き分ける確率を$1-p-q$とする。

(1)　3 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(2)　5 試合目で優勝が決まる確率を求めよ。

(3)　$p=q=\dfrac{1}{3}$としたとき，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率を求めよ。

(4)　$p=q=\dfrac{1}{2}$としたとき，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値を求めよ。

[2014]

解答例

(1)　3 試合目で優勝が決まるのは，A が 3 連勝または B が 3 連勝の場合より，その確率は，p^3+q^3である。

(2)　5 試合目で優勝が決まるのは，次の場合である。

(i)　4 回目まで A が 2 回勝ち，5 回目に A が勝つとき
この確率は，${}_4\mathrm{C}_2p^2(1-p)^2\cdot p=6p^3(1-p)^2$

(ii)　4 回目まで B が 2 回勝ち，5 回目に B が勝つとき
この確率は，${}_4\mathrm{C}_2q^2(1-q)^2\cdot q=6q^3(1-q)^2$

(i)(ii)より，5 試合目で優勝が決まる確率は，$6p^3(1-p)^2+6q^3(1-q)^2$である。

(3)　$p=q=1-p-q=\dfrac{1}{3}$のとき，(1)(2)より，

(i)　3 試合目で優勝が決まる確率　$\left(\dfrac{1}{3}\right)^3+\left(\dfrac{1}{3}\right)^3=\dfrac{2}{27}$

(ii)　4 試合目で優勝が決まる確率　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}+{}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{3}\right)^2\dfrac{2}{3}\cdot\dfrac{1}{3}=\dfrac{4}{27}$

(iii) 5 試合目で優勝が決まる確率　$6\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2+6\left(\dfrac{1}{3}\right)^3\left(\dfrac{2}{3}\right)^2=\dfrac{16}{81}$

(i)～(iii)より，5 試合目までに優勝が決まる確率は，$\dfrac{2}{27}+\dfrac{4}{27}+\dfrac{16}{81}=\dfrac{34}{81}$となる。

これより，5 試合目が終了した時点でまだ優勝が決まらない確率は，

$$1-\frac{34}{81}=\frac{47}{81}$$

(4)　$p=q=\dfrac{1}{2}$のとき，引き分けがないことより，5 試合目までに優勝が決まる。

(i)　3 試合目で優勝が決まる確率　$\left(\dfrac{1}{2}\right)^3+\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{4}$

(ii)　4 試合目で優勝が決まる確率　${}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4+{}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{3}{8}$

(iii) 5 試合目で優勝が決まる確率　$6\left(\frac{1}{2}\right)^5+6\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{3}{8}$

(i)～(iii)より，優勝が決まるまでに行われる試合数の期待値 E は，

$$E=3\times\frac{1}{4}+4\times\frac{3}{8}+5\times\frac{3}{8}=\frac{33}{8}$$

コメント

優勝までの回数の期待値という有名な問題です。(3)では，最初，場合分けを試みたのですが，すぐ引き返して(2)までの結果を利用することにしました。

問　題

正 n 角形の頂点をA_0，A_1，…，A_{n-1}とする。頂点A_1，A_2，…，A_{n-1}から 2 点をとり，それらとA_0を頂点とする三角形を作る。このようにして得られる三角形の総数をa_n，そのうちの二等辺三角形の総数をb_nとする。ただし正三角形は二等辺三角形とみなす。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　a_6およびb_6を求めよ。

(2)　整数$m \geqq 3$に対し，$S=\displaystyle\sum_{k=3}^{m} a_k$ を求めよ。

(3)　b_9を求めよ。　[2012]

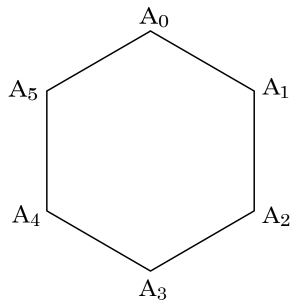
解答例

(1)　正六角形の頂点A_1，A_2，…，A_5から 2 点をとると三角形ができるので，その総数は，

$$a_6={}_5C_2=10$$

また，二等辺三角形は，$(A_0,\ A_1,\ A_2)$，$(A_0,\ A_1,\ A_5)$，$(A_0,\ A_2,\ A_4)$，$(A_0,\ A_4,\ A_5)$と選べばよいので，

$$b_6=4$$



(2)　正 n 角形の頂点A_1，A_2，…，A_{n-1}から 2 点をとると三角形ができるので，その総数は$a_n={}_{n-1}C_2$となり，

$$S=\sum_{k=3}^{m} a_k={}_2C_2+{}_3C_2+{}_4C_2+\cdots+{}_{m-1}C_2$$

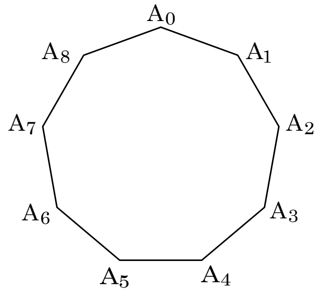
$$={}_2C_2+({}_4C_3-{}_3C_3)+({}_5C_3-{}_4C_3)+\cdots+({}_mC_3-{}_{m-1}C_3)$$

$$=1-{}_3C_3+{}_mC_3={}_mC_3=\frac{1}{6}m(m-1)(m-2)$$

(3)　正九角形において，頂点A_0とA_1，A_2，…，A_8から 2 点をとってできる三角形が二等辺三角形となるのは，

$(A_0,\ A_1,\ A_2)$，$(A_0,\ A_1,\ A_5)$，$(A_0,\ A_1,\ A_8)$
$(A_0,\ A_2,\ A_4)$，$(A_0,\ A_2,\ A_7)$，$(A_0,\ A_3,\ A_6)$
$(A_0,\ A_4,\ A_5)$，$(A_0,\ A_4,\ A_8)$，$(A_0,\ A_5,\ A_7)$
$(A_0,\ A_7,\ A_8)$

よって，$b_9=10$である。



コメント

(2)は，公式${}_{n+1}C_{r+1}={}_nC_{r+1}+{}_nC_r$より，${}_nC_r={}_{n+1}C_{r+1}-{}_nC_{r+1}$を利用しています。普通にシグマ計算をしても構いません。なお，(3)は列挙した方が早いと思い，そのようにしました。

問　題

空間内に点$\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$と点$\mathrm{A}(2,\ 2,\ 2)$がある。点Pは O から出発し，1 回につき x 軸，y 軸，z 軸いずれか 1 つの方向に長さ 1 だけ移動する。

(1)　P が O から A へ移動する最短経路は何通りあるか求めよ。

(2)　さいころを投げて 1, 2, 3 の目が出たら P は x 軸正の方向に移動し，4, 5 の目が出たら y 軸正の方向に移動し，6 の目が出たら z 軸正の方向に移動するものとする。さいころを 6 回投げて P が A に到達する確率を求めよ。

(3)　(2)と同じルールで，さいころを 6 回投げて P が点$\mathrm{B}(1,\ 1,\ 1)$を通って A に到達する確率を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　点 P が x 軸，y 軸，z 軸正の方向に長さ 1 だけ移動することを，X, Y, Z と表す。

さて，P が O から A へ移動する最短経路は，X を 2 個，Y を 2 個，Z を 2 個並べる順列に対応するので，$\dfrac{6!}{2!2!2!}=90$ 通りある。

(2)　点 P が x 軸，y 軸，z 軸正の方向に長さ 1 だけ移動する確率は，それぞれ$\dfrac{1}{2}$，$\dfrac{1}{3}$，$\dfrac{1}{6}$より，6 回移動後，P が A に到達する確率は，(1)より，

$$90\times\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{3}\right)^2\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{5}{72}$$

(3)　P が O から B へ移動する最短経路は，X を 1 個，Y を 1 個，Z を 1 個並べる順列に対応する。また，B から A へ移動する場合も同じなので，P が B を通って A に到達する確率は，

$$\left\{3!\times\left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{6}\right)\right\}^2=\left(\frac{1}{6}\right)^2=\frac{1}{36}$$

コメント

確率の基本題です。教科書の例に載っているような問題です。

問　題

男性M_1，…，M_4の 4 人と女性F_1，…，F_4の 4 人が，横一列に並んだ座席S_1，…，S_8に座る場合を考える。

(1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2) (1)の座り方の中で，M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3) (1)の座り方の中で，M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

解答例

(1) 男性がS_1，S_3，S_5，S_7に座る場合，S_2，S_4，S_6，S_8に座る場合があるので，同性どうしが隣り合わない座り方は，

$\boxed{S_1}\ \boxed{S_2}\ \boxed{S_3}\ \boxed{S_4}\ \boxed{S_5}\ \boxed{S_6}\ \boxed{S_7}\ \boxed{S_8}$

$$2\times 4!\times 4!=1152\ （通り）$$

(2) まず，M_1の座席はS_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7のいずれかであり，またF_1とF_2については$F_1\ M_1\ F_2$の場合と$F_2\ M_1\ F_1$の 2 つの場合がある。さらに，残りの男性 3 人，女性 2 人の座り方を合わせて考えると，M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は，

$$6\times 2\times 3!\times 2!=144\ （通り）$$

(3) まず，M_1とF_1が隣り合う座り方を考える。

(i) M_1がS_1またはS_8に座るとき

F_1の座席は 1 通りに決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$2\times 1\times 3!\times 3!=72\ （通り）$$

(ii) M_1がS_2，S_3，S_4，S_5，S_6，S_7のいずれかに座るとき

F_1の座席は 2 通りずつ決まるので，残り男性 3 人，女性 3 人の座り方を考えて，

$$6\times 2\times 3!\times 3!=432\ （通り）$$

(i)(ii)より，M_1とF_1が隣り合う座り方は，$72+432=504$通りとなる。

よって，M_1とF_1が隣り合わない座り方は, (1)の結論を用いると,

$$1152-504=648\ （通り）$$

コメント

順列の基本問題です。(3)では，図を描いて，直接的に数えても大差はありません。

問　題

1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\frac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。　[2009]

解答例

(1)　回転した角の合計が $\frac{\pi}{2}$ になる目の出方は，右表より，

出た目	1	2	3	4	5	6
回転角	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$

(i)　1 回振ったとき　2

(ii)　2 回振ったとき　3→6, 4→4, 6→3

(iii) 3 回振ったとき　6→6→6

(2)　$P_4 = P_0$ となるのは，4 回振って，回転した角の合計が 2π または 4π の場合である。

(i)　回転した角の合計が 2π になるとき

出た目を a, b, c, d として，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は, $a \leqq b \leqq c \leqq d$ では,

$$(1,\ 2,\ 4,\ 4),\ (1,\ 2,\ 3,\ 6),\ (1,\ 3,\ 3,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2,\ 2)$$

すると，目の出方は，$\frac{4!}{2!} + 4! + \frac{4!}{3!} + 1 = 41$ 通りとなる。

(ii)　回転した角の合計が 4π になるとき

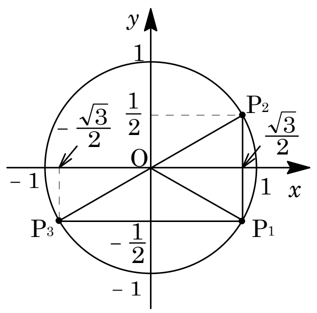
出た目が $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の場合のみで, 1 通りである。

(i)(ii)より，$P_4 = P_0$ となる目の出方は，$41 + 1 = 42$ 通り。

(3)　条件より，原点 O に対し，$\angle P_1OP_2 = \frac{\pi}{3}$ なので，

$P_1\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$，$P_2\left(\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\right)$としても一般性は失わない。

そこで, O を中心とし，OP_2 を角 $\frac{\pi}{k}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ だけ回転して OP_3 を決める。



このとき，$\triangle P_1P_2P_3$ の面積が最大になるのは，$P_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，すなわち出た目 k が 1 のときである。

コメント

場合の数を漏れなく数え上げる問題です。特に, (2)の(ii)が要注意です。

問　題

1, 2, 3, 4 の数字が書かれたカードを各 1 枚，数字 0 が書かれたカードと数字 5 が書かれたカードを各 2 枚ずつ用意する。この中からカードを何枚か選び，左から順に横一列に並べる。このとき，先頭のカードの数字が 0 でなければ，カードの数字の列は，選んだカードの枚数を桁数とする正の整数を表す。このようにして得られる整数について，次の問いに答えよ。

(1)　0，1，2，3，4 の数字が書かれたカード各 1 枚ずつ，計 5 枚のカードだけを用いて表すことができる 5 桁の整数はいくつあるか。

(2)　用意されたカードをすべて用いて表すことができる 8 桁の整数はいくつあるか。

[2007]

解答例

(1)　0，1，2，3，4 の 5 枚のカードで 5 桁の整数を得るには，先頭の数字が 0 以外であればよいので，その個数は，

$$4\times 4!=96$$

(2)　先頭の数字が 5 の場合と 5 以外の場合に分けて，得られる 8 桁の整数の個数を，それぞれ求める。

(i)　先頭の数字が 5 のとき

$$1\times\frac{7!}{2!}=2520$$

(ii)　先頭の数字が 1, 2, 3, 4 のいずれかのとき

$$4\times\frac{7!}{2!\cdot 2!}=5040$$

(i)(ii)より，得られる 8 桁の整数の個数は，

$$2520+5040=7560$$

コメント

何か裏があるのではないかと疑心暗鬼になる内容です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　英語の本と日本語の本が全部で 10 冊ある。その中から 3 冊取り出すとき，英語の本が 2 冊と日本語の本が 1 冊である確率が，$\dfrac{7}{40}$ となる。このとき，日本語の本は何冊あるか答えよ。

(2)　各組が 12 枚ずつからなる赤，青，黄色の 3 組のカードがあり，各組ごとに 1 から 12 までの異なる数がひとつずつカードに書かれている。それぞれの色のカードの組から 1 枚ずつ取り出すとき，数の合計が 15 となる取り出し方は何通りあるか答えよ。　[2005]

解答例

(1)　日本語の本が x 冊，英語の本が $10-x$ 冊とすると，条件より，

$$\frac{{}_{10-x}\mathrm{C}_2\times{}_x\mathrm{C}_1}{{}_{10}\mathrm{C}_3}=\frac{7}{40},\quad 40\cdot\frac{(10-x)(9-x)}{2}x=7\times120$$

$$(10-x)(9-x)x=42,\quad (x-7)(x^2-12x+6)=0$$

よって，$x=7,\ 6\pm\sqrt{30}$ となり，x は整数より，日本語の本は 7 冊ある。

(2)　赤色の組から取り出すカードの数を a，青色の組から取り出すカードの数を b，黄色の組から取り出すカードの数を c とおくと，条件より，

$$a+b+c=15\quad(1\leqq a\leqq12,\ 1\leqq b\leqq12,\ 1\leqq c\leqq12)\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，$1\leqq a$，$1\leqq b$，$1\leqq c$ の条件のもとで，$a+b+c=15$ を満たす $(a,\ b,\ c)$ の組の個数は，○を 15 個並べて，その間の 14 か所に 2 つの「しきり」を入れる場合の数として数えられるので，${}_{14}\mathrm{C}_2=91$ 通りとなる。

次に，この 91 通りのなかで，$a\leqq12$，$b\leqq12$，$c\leqq12$ を満たさない場合は，

$$(a,\ b,\ c)=(1,\ 1,\ 13),\ (1,\ 13,\ 1),\ (13,\ 1,\ 1)$$

よって，(＊)を満たす場合の数は，$91-3=88$ 通りとなる。

コメント

(1)の 3 次方程式の因数分解については，$42=3\times2\times7$ に注目して，因数の「あたり」をつけることができます。

問　題

定数 a は，$0<a<1$ を満たすものとする。空間に，次の 3 つのグループからなる 12 点をとる。

$$X=\{(1,\ a,\ 0),\ (1,\ -a,\ 0),\ (-1,\ a,\ 0),\ (-1,\ -a,\ 0)\}$$
$$Y=\{(0,\ 1,\ a),\ (0,\ 1,\ -a),\ (0,\ -1,\ a),\ (0,\ -1,\ -a)\}$$
$$Z=\{(a,\ 0,\ 1),\ (-a,\ 0,\ 1),\ (a,\ 0,\ -1),\ (-a,\ 0,\ -1)\}$$

これらの 12 点から異なる 2 点を選ぶ選び方は，

(ア)　同一グループ内の 2 点となる場合

(イ)　異なるグループから 1 点ずつの 2 点となる場合

の 2 種類に分けられる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　(ア), (イ)それぞれの場合の数を求めよ(答のみでよい)。

(2)　(ア)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

(3)　(イ)の場合，2 点間の距離が最小になる選び方は何通りあるか。また，その距離を求めよ。

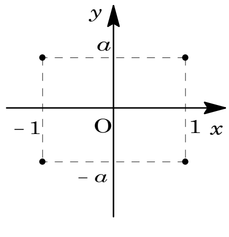
(4)　(2)で求めた距離と(3)で求めた距離が等しくなるように a の値を定めよ。また，そのとき選んだ 2 点の位置ベクトルのなす角を θ として，$\cos\theta$ の値を求めよ。ただし，位置ベクトルは原点 O を基準とする。　[2004]

解答例

(1)　(ア)の場合　${}_3\mathrm{C}_1\times{}_4\mathrm{C}_2=18$ 通り

(イ)の場合　${}_3\mathrm{C}_2\times 4^2=48$ 通り

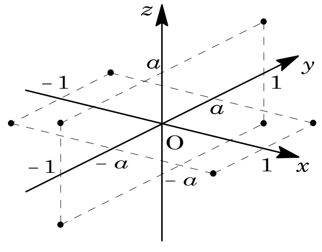
(2)　X から 2 点を選んだとき，2 点間の距離は，2, $2a$, $\sqrt{4+4a^2}$ のいずれかである。



$0<a<1$ より，最小の距離は $2a$ であり，この選び方は 2 通りある。すると，Y から，また Z から 2 点を選んだときも同様なので，(ア)の場合は $3\times 2=6$ 通りである。

(3)　X, Y から 1 点ずつ選んだとき，2 点間の距離は，

$$\sqrt{1+(a-1)^2+a^2}=\sqrt{2a^2-2a+2}$$
$$\sqrt{1+(a+1)^2+a^2}=\sqrt{2a^2+2a+2}$$



$0<a<1$ より，最小の距離は $\sqrt{2a^2-2a+2}$ であり，この選び方は $2\times 4=8$ 通りある。そして，Y, Z から，また Z, X から 1 点ずつ選んだときも同様である。

よって, (イ)の場合は$3\times 8=24$通りである。

(4) 条件より，$2a=\sqrt{2a^2-2a+2}$，$4a^2=2a^2-2a+2$，$a^2+a-1=0$ ………①

$0<a<1$ より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ となる。

さて, (2)のとき，$(1,\ a,\ 0)$と$(1,\ -a,\ 0)$を選んで,

$$\cos\theta=\frac{1-a^2}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a^2}}=\frac{1-a^2}{1+a^2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

また, (3)のとき，$(1,\ a,\ 0)$と$(0,\ 1,\ a)$を選んで,

$$\cos\theta=\frac{a}{\sqrt{1+a^2}\sqrt{1+a^2}}=\frac{a}{1+a^2}\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，①より$a=1-a^2$なので，②と③は等しくなり,

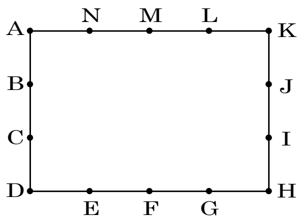
$$\cos\theta=\frac{a}{1+a^2}=\frac{a}{1+(1-a)}=\frac{-1+\sqrt{5}}{5-\sqrt{5}}=\frac{-1+\sqrt{5}}{\sqrt{5}(-1+\sqrt{5})}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

コメント

難しそうな雰囲気ですが，図を書いていくと，全体像が見えてきます。

問　題

図のように，A から N までの 14 個の点が，縦の長さが 3，横の長さが 4 の長方形の周上に等間隔でのっている。このとき，次の問いに答えよ。

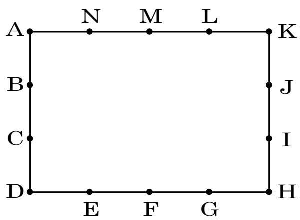


(1)　これらの点のうち 3 点を結んでできる三角形は何個あるか。

(2)　これらの点のうち 3 点を結んでできる二等辺三角形は何個あるか。

[2002]

解答例



(1)　A から N までの中から 3 点を選ぶ組合せは ${}_{14}C_3 = 364$ 通りである。

この中で三角形ができないのは，同一辺上の 3 点を選んだときである。まず，3 点が辺 AK または DH 上にあるときは ${}_5C_3 \times 2 = 20$ 通り，また 3 点が辺 AD または KH 上にあるときは ${}_4C_3 \times 2 = 8$ 通りである。

したがって，三角形は $364 - 20 - 8 = 336$ 個できる。

(2)　対称性から，二等辺三角形の頂点が，A, B, N, M の場合を考える。

(i)　A が頂点の場合　△ABN，△ACM，△ADL の 3 通り

D, H, K が頂点の場合も，同様に 3 通りずつである。

(ii)　B が頂点の場合　△BME，△BKI の 2 通り

C, I, J が頂点の場合も，同様に 2 通りずつである。

(iii) N が頂点の場合　△NDJ，△NDF，△NEK，△NFJ，△NGI の 5 通り

E, G, L が頂点の場合も，同様に 5 通りずつである。

(iv) M が頂点の場合　△MBJ，△MCI，△MDH，△MEG の 4 通り

F が頂点の場合も，同様に 4 通りである。

(i)～(iv)より，正三角形となる場合はないので，二等辺三角形の個数は，

$$3\times4+2\times4+5\times4+4\times2=48$$

コメント

(1)は頻出題ですが，(2)は注意力がすべてです。

問　題

実数x_i, a_i, b_i, c_i $(i=1,\ 2,\ 3)$は, 以下の条件(い)～(に)を満たすものとする。

(い)　$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$

(ろ)　$i=1,\ 2,\ 3$に対して$a_i \geqq 0$, $b_i \geqq 0$, $c_i \geqq 0$

(は)　$i=1,\ 2,\ 3$に対して$a_i+b_i+c_i=1$

(に)　$a_1+a_2+a_3=b_1+b_2+b_3=c_1+c_2+c_3=1$

実数y_i $(i=1,\ 2,\ 3)$を

$$y_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3,\quad y_2=b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3,\quad y_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3$$

により定義する。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$y_1+y_2+y_3=x_1+x_2+x_3$を示せ。

(2)　$y_1 \geqq x_1$を示せ。

(3)　$y_1+y_2 \geqq x_1+x_2$を示せ。　[2009]

解答例

(1)　条件(は)より,

$$\begin{aligned} y_1+y_2+y_3 &= (a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3)+(b_1x_1+b_2x_2+b_3x_3)+(c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3) \\ &= (a_1+b_1+c_1)x_1+(a_2+b_2+c_2)x_2+(a_3+b_3+c_3)x_3 \\ &= x_1+x_2+x_3 \end{aligned}$$

(2)　条件(い), (ろ), (に)より,

$$y_1-x_1=a_1x_1+a_2x_2+a_3x_3-(a_1+a_2+a_3)x_1=a_2(x_2-x_1)+a_3(x_3-x_1) \geqq 0$$

よって, $y_1 \geqq x_1$である。

(3)　(2)と同様にして,

$$y_3-x_3=c_1x_1+c_2x_2+c_3x_3-(c_1+c_2+c_3)x_3=c_1(x_1-x_3)+c_2(x_2-x_3) \leqq 0$$

よって, $y_3 \leqq x_3$であり, (1)より,

$$y_1+y_2-(x_1+x_2)=x_1+x_2+x_3-y_3-(x_1+x_2)=x_3-y_3 \geqq 0$$

以上より, $y_1+y_2 \geqq x_1+x_2$である。

コメント

文字がたくさんある不等式の証明です。ただ, 見かけほど難ではありません。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆