$\boxed{5}$ ［大阪大］

次の問いに答えよ。

(1) c を正の定数とする。正の実数 x, y が $x+y=c$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ の最小値を c を用いて表せ。

(2) 正の実数 x, y, z が $x+y+z=1$ を満たすとき，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ の最大値を求めよ。

６　　［名古屋大］

2 つの円 $C:(x-1)^2+y^2=1$ と $D:(x+2)^2+y^2=7^2$ を考える。また原点を O(0, 0) とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 円 C 上に，y 座標が正であるような点 P をとり，x 軸の正の部分と線分 OP のなす角を θ とする。このとき，点 P の座標と線分 OP の長さを θ を用いて表せ。

(2) (1)でとった点 P を固定したまま，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積が最大になるときの Q の座標を θ を用いて表せ。

(3) 点 P が円 C 上を動き，点 Q が円 D 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値を求めよ。

ただし(2), (3)においては，3 点 O, P, Q が同一直線上にあるときは，△OPQ の面積は 0 であるとする。

$\boxed{7}$ ［金沢大］

$a,\ b$ を実数とする。$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ とし，x についての方程式 $f(x)=b$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$a>0$ のとき，関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(2)　方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数が最も多くなるときの点 $(a,\ b)$ の範囲を図示せよ。

$\boxed{8}$ ［東京大］

e を自然対数の底，すなわち $e=\lim_{t\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{t}\right)^t$ とする。すべての正の実数 x に対し，次の不等式が成り立つことを示せ。

$$\left(1+\frac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$$

9　　［千葉大］

以下の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ において，不等式 $\log x < x$ を示せ。

(2)　$1<a<b$ のとき，不等式 $\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ を示せ。

(3)　$x \geqq e$ において，不等式 $\displaystyle\int_e^x \frac{dt}{t\log(t+1)} \geqq \log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$ を示せ。ただし，e は自然対数の底である。

$\boxed{5}$　　［大阪大］

(1)　c は正の定数，$x+y=c\ (x>0,\ y>0)$ のとき，$P=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)$ とおくと，

$$P=1+\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{xy}=1+\frac{x+y}{xy}+\frac{1}{xy}=1+\frac{c+1}{xy}$$

ここで，相加平均と相乗平均の関係より，$c=x+y\geqq 2\sqrt{xy}$ となり，

$\dfrac{1}{xy}\geqq\dfrac{4}{c^2}$　（等号は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき成立）

よって，$P\geqq 1+\dfrac{4(c+1)}{c^2}=\dfrac{(c+2)^2}{c^2}=\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ となり，P は $x=y=\dfrac{c}{2}$ のとき最小値 $\left(\dfrac{c+2}{c}\right)^2$ をとる。

(2)　$x+y+z=1\ (x>0,\ y>0,\ z>0)$ のとき，$Q=\left(1+\dfrac{1}{x}\right)\left(1+\dfrac{1}{y}\right)\left(1-\dfrac{4}{3z}\right)$ とおく。

ここで，$x+y=1-z$ から $0<z<1$ となり，$1-\dfrac{4}{3z}=\dfrac{3z-4}{3z}<0$

すると，(1)の結果から，

$$Q=P\left(1-\frac{4}{3z}\right)\leqq\left(\frac{1-z+2}{1-z}\right)^2\left(1-\frac{4}{3z}\right)=\left(\frac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\frac{3z-4}{3z}$$

なお，等号は $x=y=\dfrac{1-z}{2}$ のとき成立する。

ここで，$f(z)=\left(\dfrac{3-z}{1-z}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}=\left(\dfrac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\dfrac{3z-4}{3z}$ とおくと，

$$f'(z)=2\cdot\frac{z-3}{z-1}\cdot\frac{2}{(z-1)^2}\cdot\frac{3z-4}{3z}+\left(\frac{z-3}{z-1}\right)^2\cdot\frac{4}{3z^2}$$

$$=\frac{4(z-3)}{3z(z-1)^2}\left(\frac{3z-4}{z-1}+\frac{z-3}{z}\right)=\frac{4(z-3)(4z^2-8z+3)}{3z^2(z-1)^3}$$

$$=\frac{4(z-3)(2z-1)(2z-3)}{3z^2(z-1)^3}$$

z	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$	1
$f'(z)$		$+$	0	$-$	
$f(z)$		$\nearrow$	$-\frac{125}{3}$	$\searrow$	

これより，$f(z)$ の増減は右表のようになり，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

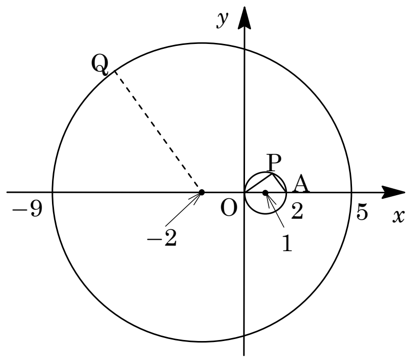
したがって，Q は $x=y=\dfrac{1}{4}$，$z=\dfrac{1}{2}$ のとき最大値 $-\dfrac{125}{3}$ をとる。

［解 説］

条件付きの最大・最小問題です。(2)では，(1)の結果の利用するため，いったん z を固定して考えています。なお，$f'(z)$ を商の微分法を利用してまとめていくと，相当な計算量になります。

6　［名古屋大］

(1)　$A(2,\ 0)$ とおくと，線分 OA が円 C の直径となるので，$\angle APO=\dfrac{\pi}{2}$ となる。



条件から，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ として $\angle AOP=\theta$ より，

$$OP=OA\cos\theta=2\cos\theta$$

また，$P(x,\ y)$ とおくと，

$$x=OP\cos\theta,\ y=OP\sin\theta$$

よって，$P(2\cos^2\theta,\ 2\sin\theta\cos\theta)$ である。

(2)　中心 $(-2,\ 0)$ で半径 7 の円 D 上の点 Q を，$Q(-2+7\cos\varphi,\ 7\sin\varphi)$ $(0\leqq\varphi<2\pi)$ とおくと，△OPQ の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\left|2\cos^2\theta\cdot7\sin\varphi-2\sin\theta\cos\theta(-2+7\cos\varphi)\right|$$
$$=\left|7\cos^2\theta\sin\varphi-7\sin\theta\cos\theta\cos\varphi+2\sin\theta\cos\theta\right|$$
$$=\cos\theta\left|7(\cos\theta\sin\varphi-\sin\theta\cos\varphi)+2\sin\theta\right|=\cos\theta\left|7\sin(\varphi-\theta)+2\sin\theta\right|$$

ここで，θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で固定すると，$\sin\theta>0$ で $-\theta\leqq\varphi-\theta<2\pi-\theta$ より，$\varphi-\theta=\dfrac{\pi}{2}\left(\varphi=\theta+\dfrac{\pi}{2}\right)$ のとき S は最大になる。

このとき，$\cos\varphi=-\sin\theta$，$\sin\varphi=\cos\theta$ より，$Q(-2-7\sin\theta,\ 7\cos\theta)$ である。

(3)　(2)より，S の最大値は，$S=\cos\theta\left|7+2\sin\theta\right|=\cos\theta(7+2\sin\theta)$

そこで，この φ と θ の関係を保ったまま，x 軸に関する対称性から点 P の y 座標が正，すなわち θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ で動かすと，

$$S'=-\sin\theta(7+2\sin\theta)+\cos\theta\cdot2\cos\theta=-7\sin\theta-2\sin^2\theta+2(1-\sin^2\theta)$$
$$=-4\sin^2\theta-7\sin\theta+2$$
$$=-(4\sin\theta-1)(\sin\theta+2)$$

そこで，$\sin\alpha=\dfrac{1}{4}\left(0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，S は増減が右表のようになり，$\theta=\alpha$ で最大となる。

θ	0	$\cdots$	α	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{2}$
S'		$+$	0	$-$	
S		↗		↘	

そして，点 P が O, A に一致する場合も考え合わせて，S の最大値は，

$$\cos\alpha(7+2\sin\alpha)=\sqrt{1-\frac{1}{16}}\left(7+2\cdot\frac{1}{4}\right)=\frac{15}{8}\sqrt{15}$$

［解　説］

2 変数関数の最大・最小問題ですが，まず 1 文字を固定して考えるという丁寧な誘導がついています。なお，(2)は図形的な処理も可能です。

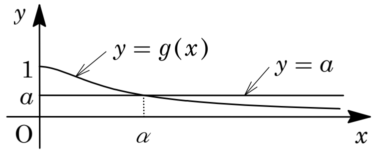
７　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　　[金沢大]

(1)　$a>0$ のとき，$f(x)=2\sqrt{1+x^2}-ax^2$ に対して，$f(-x)=f(x)$ から $y=f(x)$ のグラフは y 軸対称となる。そこで，以下，$x\geqq 0$ で考える。

$$f'(x)=2\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{2x}{\sqrt{1+x^2}}-2ax=2x\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}-a\right)$$

ここで，$g(x)=\dfrac{1}{\sqrt{1+x^2}}$ とおくと，$x\geqq 0$ において $g(x)$ は単調に減少し，

$$1=g(0)\geqq g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=0$$



(i)　$0<a<1$ のとき

$g(\alpha)=a$ となる α が $\alpha>0$ でただ 1 つ存在し，このとき $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	2	$\nearrow$		$\searrow$

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{1+\alpha^2}}=a$ から $1+\alpha^2=\dfrac{1}{a^2}$ となり，$f(x)$ の最大値は,

$$f(\alpha)=2\sqrt{1+\alpha^2}-a\alpha^2=\frac{2}{a}-a\left(\frac{1}{a^2}-1\right)=a+\frac{1}{a}$$

(ii)　$a\geqq 1$ のとき

$x\geqq 0$ において $f'(x)\leqq 0$ となり，$f(x)$ の最大値は $f(0)=2$ である。

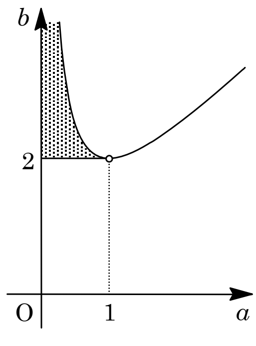
(2)　$a>0$ のとき，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=-\infty$ となり，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は，$0<a<1$ のとき 4 個，$a\geqq 1$ のとき 2 個である。

$a\leqq 0$ のとき，$x\geqq 0$ において $f(x)$ は単調に増加するので，ある b における方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 2 個である。

したがって，方程式 $f(x)=b$ の異なる実数解の個数の最大数は 4 個であり，このとき，

$$0<a<1,\ 2<b<a+\frac{1}{a}$$

そして，相加平均と相乗平均の関係から $a+\dfrac{1}{a}\geqq 2$ に注意して点 $(a,\ b)$ の範囲を図示すると，右図の網点部になる。ただし，境界は領域に含まない。



[解　説]

場合分けをして増減を考えるという微分の応用の典型題です。なお，(3)の領域の境界線は有名ですので，増減表などのプロセスは省略しています。

8　　［東京大］

まず，$f(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x-1=x\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$f'(x)=\log(x+1)-\log x+x\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)=\log(x+1)-\log x-\frac{1}{x+1}$$

$$f''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{1}{(x+1)^2}=-\frac{1}{x(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $f''(x)<0$ より，$f'(x)$ は単調に減少し，

$$f'(x)>\lim_{x\to\infty}f'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{1}{x+1}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $f(x)$ は単調に増加し，

$$f(x)<\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x-1\right\}=\log e-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e$ ………①

また，$g(x)=\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}-1=\left(x+\dfrac{1}{2}\right)\{\log(x+1)-\log x\}-1$ とおくと，

$$g'(x)=\log(x+1)-\log x+\left(x+\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}\right)$$

$$=\log(x+1)-\log x-\frac{2x+1}{2x(x+1)}$$

$$g''(x)=\frac{1}{x+1}-\frac{1}{x}+\frac{2x^2+2x+1}{2x^2(x+1)^2}=\frac{1}{2x^2(x+1)^2}$$

すると，$x>0$ で $g''(x)>0$ より，$g'(x)$ は単調に増加し，

$$g'(x)<\lim_{x\to\infty}g'(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)-\frac{2+\frac{1}{x}}{2(x+1)}\right\}=0$$

よって，$x>0$ で $g(x)$ は単調に減少し，

$$g(x)>\lim_{x\to\infty}g(x)=\lim_{x\to\infty}\left\{\log\left(1+\frac{1}{x}\right)^x\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{2}}-1\right\}=\log(e\cdot 1)-1=0$$

すなわち，$\log\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>1$，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}>e$ ………②

したがって，①②より，$\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x<e<\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^{x+\frac{1}{2}}$

［解　説］

微分の不等式への応用問題です。まず，証明すべき式の各辺に対数をとって，式の同値変形をした後に，差をとって微分するという定型的な処理をしています。

9　　　　［千葉大］

(1)　$x>0$ において $f(x)=x-\log x$ とおくと，$f'(x)=1-\dfrac{1}{x}=\dfrac{x-1}{x}$

すると，$f(x)$ の増減は右表のようになり，

$f(x)\geqq 1>0$

よって，$x>0$ において，$\log x<x$ ………①

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(x)$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	×	↘	1	↗

(2)　$g(x)=\dfrac{1}{\log x}$ とおくと，$g'(x)=-\dfrac{1}{x(\log x)^2}$

ここで，$1<a<c<b$ となる c に対して，$\dfrac{g(b)-g(a)}{b-a}=g'(c)$ から，

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(c)\,,\ \ \frac{1}{\log b}-\frac{1}{\log a}=-\frac{b-a}{c(\log c)^2}$$

これより，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}=\dfrac{b-a}{c(\log c)^2}$ ………②

また，$0<a(\log a)^2<c(\log c)^2$ から，$0<\dfrac{1}{c(\log c)^2}<\dfrac{1}{a(\log a)^2}$ ………③

②③より，$\dfrac{1}{\log a}-\dfrac{1}{\log b}<\dfrac{b-a}{a(\log a)^2}$ ………④

(3)　$x\geqq e$ において，$F(x)=\displaystyle\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}-\log(\log x)-\frac{1}{2(\log x)^2}+\frac{1}{2}$ とおくと，

$$F'(x)=\frac{1}{x\log(x+1)}-\frac{1}{x\log x}+\frac{1}{x(\log x)^3}$$
$$=-\frac{1}{x}\left\{-\frac{1}{\log(x+1)}+\frac{1}{\log x}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}$$

④より $\dfrac{1}{\log x}-\dfrac{1}{\log(x+1)}<\dfrac{1}{x(\log x)^2}$ となり，①から $\log x<x$ なので，

$$F'(x)>-\frac{1}{x}\left\{\frac{1}{x(\log x)^2}-\frac{1}{(\log x)^3}\right\}=-\frac{\log x-x}{x^2(\log x)^3}>0$$

すると，$x\geqq e$ において，$F(x)\geqq F(e)=0-\log 1-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=0$ となり，

$$\int_e^x\frac{dt}{t\log(t+1)}\geqq\log(\log x)+\frac{1}{2(\log x)^2}-\frac{1}{2}$$

［解　説］

微分法の不等式への応用問題です。(1)(2)の誘導で(3)の見通しは良好です。なお，(2)では，不等式の形から平均値の定理の出番です。