《2018 入試対策》

岡山大学

理系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された岡山大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$, $\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。
 (1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
 (2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
 (3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
 (4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
 (5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分野別問題一覧 …… 3

分野別問題と解答例 …… 25

図形と式 …… 26

図形と計量 …… 33

ベクトル …… 36

整数と数列 …… 44

確　率 …… 52

論　証 …… 64

複素数 …… 65

曲　線 …… 77

極　限 …… 79

微分法 …… 86

積分法 …… 108

積分の応用 …… 115

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 (1)　すべての実数 $x,\ y$ に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1\geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 $a,\ b$ が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。　[2014]

2 xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P_1}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P_2}(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})$ を

$$d(\mathrm{P_1},\ \mathrm{P_2})=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3)　点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。　[2013]

3 xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点 $(1,\ 0)$ を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点 $(-1,\ 0)$ を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

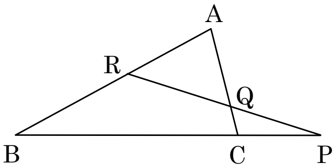
(2)　A と B が点 $(0,\ 1)$ で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3)　$n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点 $(-2,\ 0)$ を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。　[2003]

4 座標平面上に点 $\mathrm{A}(0,\ 2)$ と点 $\mathrm{B}(1,\ 0)$ があり，線分 AB 上の点 P から x 軸，y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。点 P が A から B まで動くとき，線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。　[2002]

■ 図形と計量

1 三角形 ABC において，$AB=BC=2$，$CA=1$ とする。$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす x に対して，辺 BC の延長上に点 P を，辺 CA 上に点 Q を，それぞれ $CP=AQ=x$ となるようにとる。さらに，直線 PQ と辺 AB の交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。



(1) AR を x の関数として表せ。

(2) (1)の関数を $f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。 [2014]

2 原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。 [2001]

■ ベクトル

1 座標空間内に，原点 $O(0,\ 0,\ 0)$ を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点 $A(0,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 0,\ -1)$ がある。O と異なる点 $P(s,\ t,\ 0)$ に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を $R(u,\ v,\ 0)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を u, v を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。 [2016]

2　座標空間内に 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$ の内積が 0 になるような点 $P(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする。3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r を求めよ。

(2)　原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。

(3)　(1)で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ。

(4)　(1)で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする。球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ。　[2015]

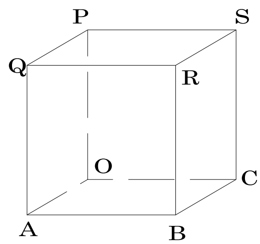
3　座標空間内の 8 点 $(0,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 0,\ 0)$，$(1,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 1,\ 0)$，$(0,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 0,\ 1)$，$(1,\ 1,\ 1)$，$(0,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を考える。$0<t<3$ のとき，3 点 $(t,\ 0,\ 0)$，$(0,\ t,\ 0)$，$(0,\ 0,\ t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし，$f(0)=f(3)=0$ とする。関数 $f(t)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq t\leqq 3$ ののとき，$f(t)$ を t の式で表せ。

(2)　関数 $f(t)$ の $0\leqq t\leqq 3$ における最大値を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ。　[2015]

4　辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D，辺 BC の中点を E，辺 CS の中点を F，辺 PS の中点を G，辺 PQ の中点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　ベクトル $\overrightarrow{OE}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}$，$\vec{f}$，$\vec{g}$ で表せ。ただし，$\vec{d}=\overrightarrow{OD}$，$\vec{f}=\overrightarrow{OF}$，$\vec{g}=\overrightarrow{OG}$ とする。

(2)　5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3)　五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4)　辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし，五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。　[1999]

■ 整数と数列

1　p は素数とする。正の整数 n に対し，p^d が n の約数となる整数 d $(d \geqq 0)$ のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$p=3$，$n=3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(2)　$p=5$，$n=5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(3)　m が正の整数で $n=p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。　[2016]

2　$f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x),\quad f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad (n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2)　$0 \leqq t < 1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする。c が $0 \leqq c < 1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ。　[2012]

3　数列 $\{a_n\}$ は次のように定められている。

$$a_1=1,\quad a_{n+1}(a_n+1)=1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1)　${a_{n+1}}^2+a_{n+1}-1$ を a_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{b_n\}$ を $b_n={a_n}^2+a_n-1$ で定める。このとき，b_{2n-1} は正，b_{2n} は負であることを示せ。

(3)　数列 $\{a_n\}$ について，不等式 $a_{2n} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2} < a_{2n-1}$ が成り立つことを示せ。

[2004]

4　$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は，$x=1,\ -1,\ -2$ で整数値 $f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ をとるとする。

(1)　a，b，c を r，s，t の式で表せ。

(2)　すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になることを示せ。　[2003]

5　n を自然数とする。$f(x)$ は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$ を通るとする。

(1)　2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2)　この関数 $f(x)$ について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。　[2001]

6　$n,\ k$ を自然数とする。等式 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①を満たす自然数 $x_1,\ x_2,\cdots,x_k$ の組の個数を $a(n,\ k)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，例えば $(x_1,\ x_2)=(1,\ 2)$ と $(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$ とは別の組と考える。

(1)　式①における x_k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　関係式 $a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$ が成り立つことを示せ。

(3)　$a(n,\ 1)$，$a(n,\ 2)$，$a(n,\ 3)$，$a(n,\ 4)$ を求め，$a(n,\ k)$ を推定せよ。

(4)　(3)において，$a(1,\ k)$，$a(2,\ k)$，…，$a(n,\ k)$ の推定が正しいとしたとき，$a(n,\ k+1)$ の推定が正しいことを証明せよ。　[1999]

■ 確率

1　以下の問いに答えよ。

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　A, B, C, D, E, F, G, H の 8 人から 7 人を選び，さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける。A, B の 2 人がともに選ばれて，かつ同じ組になる確率を求めよ。

[2017]

2　n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1)　用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2)　引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3)　引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4)　引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。　[2015]

3　n を 3 以上の整数とし，a, b, c は 1 以上 n 以下の整数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2)　$a \leqq b \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3)　$a<b$ かつ $a \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。　[2014]

4　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D=\{(x,\ y)\,|\,0 \leqq x \leqq 2,\ 0 \leqq y \leqq 2\}$$

とし，D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。

(2)　硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ。　[2012]

5　n を 3 以上の整数とする。$3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

(1)　3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。　[2011]

6　男性M_1, …, M_4の 4 人と女性F_1, …, F_4の 4 人が, 横一列に並んだ座席S_1, …, S_8に座る場合を考える。

(1)　同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2)　(1)の座り方の中で, M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3)　(1)の座り方の中で, M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。　[2010]

7　1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき, 単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角$\dfrac{\pi}{k}$だけ回転する。点 P の最初の位置をP_0として, 次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って, 点 P の回転した角の合計が$\dfrac{\pi}{2}$となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置をP_nとする。$P_4 = P_0$となる目の出方は何通りあるか。

(3)　さいころを 2 回振ったところ, 1 回目は 4 の目, 2 回目は 3 の目が出た。そのとき, 三角形$P_1P_2P_3$の面積を最大にするような, 3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。　[2009]

8　n を 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく$\dfrac{1}{n}$とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき, 次の問いに答えよ。

(1)　3 人のうち, 少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。

(2)　a と b が等しくなる確率を求めよ。

(3)　2 人が同じ数, 他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。

(4)　$a<b<c$ となる確率を求めよ。　[2008]

9 A, B, C の 3 人のうち 2 人が，1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き，大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし，最初に A と B が対戦し，その後は，直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また，カードを引く順番は最初は A から，その後は直前の対戦の勝者からとする。なお，対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし，引いたカードは対戦後，直ちに元の束に戻すものとする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。

(2) 4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。

(3) 5 回の対戦を行うとき，A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

[2007]

■ 論証

1 実数 x, y, z について，$(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し，等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて，命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ。 [2005]

■ 複素数

1　α は $0<|\alpha|<1$ を満たす虚数であるとする。複素数平面上の点の列 z_1，z_2，z_3，$\cdots$を，$z_1=0$，$z_2=1$ および

$$z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n})\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，虚数とは虚部が 0 でない複素数のことであり，また，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　次の等式が成り立つことを示せ。

$$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})\quad(n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2)　偶数番目の点の列 z_2，z_4，z_6，$\cdots$および奇数番目の点の列 z_1，z_3，z_5，$\cdots$は，それぞれ同一直線上にあることを示せ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$ を満たす複素数 w を求めよ。　[2017]

2　O を原点とする複素数平面上で，複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする。z の偏角を θ と表す。$w=z^2+\dfrac{1}{z}$ とおき，w を表す点を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(1)　$w=0$ となる θ をすべて求めよ。

(2)　$w\neq0$ のとき, w の偏角 β を θ で表せ。ただし，β は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(3)　三角形 OXY の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ。　[2005]

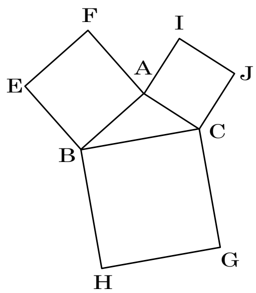
3　次の条件(a), (b)をともに満たす実数の組 $(p,\ q,\ r)$ をすべて求めよ。

(a)　p，q，r の絶対値は等しい。

(b)　3 次方程式 $x^3+px^2+qx+r=0$ は，絶対値が 1 であるような虚数解をもつ。

[2004]

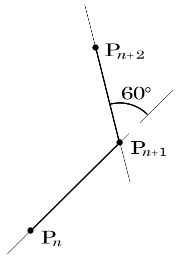
4　複素数平面上において，右の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形ABEF，BCGH，CAIJを作る。



(1)　点 A, B, C がそれぞれ複素数α，β，γで表されているとき，点 F, H, J をα，β，γの式で表せ。

(2)　3 つの正方形ABEF，BCGH，CAIJの中心をそれぞれ P，Q，R とする。このとき線分 AQ と線分 PR の長さは等しく，AQ$\perp$PR であることを証明せよ。　[2003]

5　複素数平面上で次のように点の列P_n $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$をつくる。点P_0，P_1はそれぞれ 0，1 を表し，線分$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$の長さは線分$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$の長さの r 倍$(r>0)$で直線$\mathrm{P}_n\mathrm{P}_{n+1}$から直線$\mathrm{P}_{n+1}\mathrm{P}_{n+2}$へ図のようにはかった角は60°である。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　P_3を求めよ。

(2)　P_{6n}を表す複素数$a+bi$の実部aと虚部bを求めよ。　[2002]

6　αを 0 でない複素数とし，その偏角θは$0°<\theta<90°$を満たすものとする。原点を O とする複素数平面においてα，$\dfrac{1}{\alpha}$の表す点をそれぞれ X, Y とする。

(1)　実数 1 の表す点を A とする。4 点 O，X，A，Y の順に結んでできる四角形において，∠A を∠O で表せ。

(2)　実数tの表す点を T とする。αによらず点 T がつねに三角形 OXY の外部にあるとき，実数tはどのような範囲にあるか。　[2001]

7　原点を O とする複素数平面上で，0 でない複素数 z，w の表す点をそれぞれ$\mathrm{P}(z)$，$\mathrm{Q}(w)$とする。z に対して w を，O を始点とする半直線$\mathrm{OP}(z)$上に$\mathrm{Q}(w)$があり，$|w|=\dfrac{2}{|z|}$を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$w=\dfrac{2}{\bar{z}}$を示せ。

(2)　±2，$\pm2i$の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点$\mathrm{P}(z)$が動く。このとき，$\mathrm{Q}(w)=\mathrm{P}(z)$となる$z$を求めよ。

(3)　$\mathrm{P}(z)$が(2)の正方形の周上を動くとき，点$\mathrm{Q}(w)$の描く図形を求めて図示せよ。

[2000]

8 複素平面上で $z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$, $z_2=-\dfrac{1}{z_0}$ を表す点をそれぞれP_0, P_1, P_2とする。

(1) z_1を極形式で表せ。

(2) z_2を極形式で表せ。

(3) 原点O, P_0, P_1, P_2の4点が同一円周上にあるときのz_0の値を求めよ。[1998]

■ 曲線

1 O を原点とする座標平面における曲線$C:\dfrac{x^2}{4}+y^2=1$上に，点$\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$をとる。

(1) Cの接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2) 点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値と，最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。 [2012]

2 座標平面において，曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を，P における C の法線とよぶ。双曲線$C_1:y=\dfrac{1}{x}$について，次の問いに答えよ。

(1) 点$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$における$C_1$の法線の方程式を求めよ。ただし，$p\neq0$とする。

(2) 点$\mathrm{Q}(q,\ -q)$を中心とする円C_2とC_1が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円C_2の半径rをqの式で表せ。 [2006]

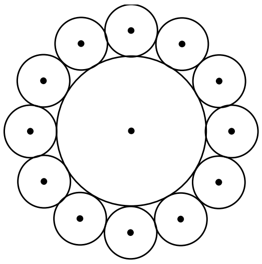
■ 極限

1 n を自然数とする。曲線$y=x^2(1-x)^n$ $(0\leqq x\leqq1)$と x 軸とで囲まれる図形の面積をS_nとする。

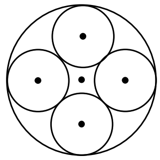
(1) S_nを求めよ。

(2) $T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$を求めよ。 [2011]

2　平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 1）のように配置し，その一つの円の半径を R_n とする。また，円 C に内接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 2）のように配置し，その一つの円の半径を r_n とする。ただし，$n \geqq 3$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



例1　$n=12$ の場合



例2　$n=4$ の場合

(1)　R_6，r_6 を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta}=1$ を用いてよい。　[2010]

3　x を実数とし，次の無限級数を考える。

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2-x^4}+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}}+\cdots$$

(1)　この無限級数が収束するような x の範囲を求めよ。

(2)　この無限級数が収束するとき，その和として得られる x の関数を $f(x)$ とかく。また，$h(x)=f(\sqrt{|x|})-|x|$ とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0} h(x)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値を α とするとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$ は存在するか。理由を付けて答えよ。　[2009]

4　次の各問いに答えよ。

(1)　p,q を 0 でない定数とする。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^{n-1}\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$b_n=(-1)^{n-1}\log\dfrac{n+2}{n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。　[2008]

5　a, b を正の実数とし, 2 つの数列 $\{a_n\}$, $\{b_n\}$ を

$$a_1 = a,\ b_1 = b$$
$$a_{n+1} = \frac{2a_nb_n + {a_n}^2}{{a_n}^2 + 5a_nb_n},\ b_{n+1} = \frac{3a_nb_n}{{a_n}^2 + 5a_nb_n}\quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　$c_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおく。数列 $\{c_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty} b_n$ を求めよ。　[2005]

■ 微分法

1　座標平面内の 2 つの曲線 $C_1 : y = \log(2x)$, $C_2 : y = 2\log x$ の共通接線を l とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　直線 l の方程式を求めよ。

(2)　C_1, C_2 および l で囲まれる領域の面積を求めよ。　[2017]

2　関数 $f(x) = 8x^3 - 6x - 1$ について, 以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x) = 0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$a = \cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき, $f(a)$ の値を求めよ。

(3)　不等式 $-\dfrac{1}{5} < \cos\dfrac{5\pi}{9} < -\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。　[2016]

3　xy 平面において, 点 $(1,\ 2)$ を通る傾き t の直線を l とする。また, l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき, 以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2 - ay = 0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また, そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし $a \neq 0$ とする。　[2013]

4　$f(x)=e^{-x^2}$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を l, 原点 O を通り l に垂直な直線を l' とし, l と l' との交点を P とする。

(1)　線分 OP の長さを求めよ。

(2)　l と y 軸との交点を Q とし, $\angle\mathrm{POQ}$ を $\theta\ (0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする。$\sin\theta$ を a を用いて表せ。

(3)　(2)で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と, そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

[2011]

5　原点を中心とする半径 1 の円を C_1 とし, 原点を中心とする半径 $\dfrac{1}{2}$ の円を C_2 とする。C_1 上に点 $\mathrm{P_1}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ があり, また C_2 上に点 $\mathrm{P_2}\left(\dfrac{1}{2}\cos 3\theta,\ \dfrac{1}{2}\sin 3\theta\right)$ がある。ただし, $0\leqq\theta<\dfrac{\pi}{2}$ であるとする。線分 $\mathrm{P_1P_2}$ の中点を Q とし, 点 Q の原点からの距離を $r(\theta)$ とする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　点 Q の x 座標のとりうる範囲を求めよ。

(2)　点 Q が y 軸上にあるときの θ の値を α とする。このとき, α および定積分 $\displaystyle\int_0^{\alpha}\{r(\theta)\}^2 d\theta$ を求めよ。

[2010]

6　座標平面上に, $f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ で与えられる曲線 $C: y=f(x)$ と, 直線 $l: y=ax$（a は実数）を考える。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　C と l がちょうど 2 個の共有点をもつための a の条件を求めよ。もし必要であれば, $\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=0$ を使ってもよい。

(2)　C と l が第 1 象限で接するとき, C と l, および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。

[2009]

7　xy 平面の曲線 $C: x=\dfrac{\cos t}{1-\sin t},\ y=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}\ \left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$ について, 次の問いに答えよ。

(1)　曲線 C 上の $t=\theta$ に対応する点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$ における C の接線 l の方程式を求めよ。

(2)　$\alpha=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$ における C の接線 l と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ。

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, (2)で求めた面積 S の値の範囲を求めよ。

[2008]

8　$f(x)=x^3-3a^2x-b$ とする。ただし，a，b は実数の定数であり，$a\geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ のすべての解が区間 $-1\leqq x\leqq 1$ に含まれる実数解であるための条件を，a と b に関する不等式で表せ。

(2)　座標平面上で，(1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の集合が表す領域を D とする。D の概形を描き，その面積を求めよ。　[2007]

9　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　実数 a, b は $b>a>0$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b>(b+1)^a$$

[2006]

10　a を正の実数とする。$x\geqq 0$ のとき，$y=\dfrac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

[2005]

11　次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x>0$ のとき，不等式 $\log(1+x)>1-e^{-x}$ が成り立つことを示せ。

(3)　実数 x，y が $0\leqq x\leqq e^y-1$，$0\leqq y\leqq 1-e^{-x}$ を満たせば，$x=y=0$ でなければならないことを示せ。　[2002]

12　x を 1 でない正の実数とし，$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　方程式 $f(x)=2$ の解を求めよ。

(2)　不等式 $f(x)\geqq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。　[2000]

13　$a,\ b$ を正の数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=ae^{x}+be^{-x}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ のグラフが，y 軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ。

(3)　x についての方程式 $f(x)=1$ の解のうち，$x\geqq 0$ を満たすものがただ 1 つであるような $a,\ b$ の範囲を ab 平面に図示せよ。　[1999]

14　曲線 C と D_a を次のように定める。

C：放物線 $y=x^2$

D_a ：中心が $(-1,\ a)$ で 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ と原点 O を通る円

(1)　不等式 $x>0$ によって表される領域において D_a が C と共有点をもつための a の条件を求めよ。

(2)　点 P が第 1 象限の C 上を動くとする。$\angle\mathrm{APO}$ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。また，そのときの $\sin\angle\mathrm{APO}$ の値を求めよ。　[1998]

■ 積分法

1　a を 0 以上の実数, n を正の整数とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2)　$\displaystyle\left(1+\frac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq e^a$ が成り立つことを示せ。

(3)　$\displaystyle e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\leqq\frac{a^2e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。　[2008]

2　関数 $f(x)=x\sin\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq\dfrac{3}{4\pi}$ ならば，$f'(x)>0$ であることを示せ。

(2)　$b\geqq a>0,\ b\geqq\dfrac{2}{\pi}$ のとき，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx\leqq(b-a)f(b)\leqq b-a$ が成り立つことを示せ。　[2007]

3　$f(t)$ を連続関数, x を実数として，関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1 |f(t)-x|\,dt$$

(1)　$f(t)=e^t$ のとき，関数 $g(x)$ の増減を調べ，$y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし，$e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である。

(2)　$f(t)$ は微分可能な単調増加関数で，その逆関数も微分可能とし，$a=f\left(\frac{1}{2}\right)$ とおく。このとき，$g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。　[2001]

4　関数 $f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x$ $(0\leqq x\leqq \pi)$ について次の問いに答えよ。

(1)　$t=\cos x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2)　$f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた x に対して，$f'(x)$ の値を求めよ。

(4)　定積分 $\int_0^{\pi} |f(x)|\,dx$ の値を求めよ。　[2000]

■ 積分の応用

1　座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2)　四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2017]

2　a は正の数とし，次の関数 $y=f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}}\quad (x\geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を求めよ。

(2)　a が区間 $1\leqq a\leqq 2$ 全体を動くとき，点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。

(3)　$x\geqq 0$ における曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ と(2)の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2016]

3　自然数$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$に対して，関数$f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$を考える。

(1)　曲線$y=f_n(x)$上の点$(a_n,\ f(a_n))$における接線が原点を通るとき，a_nをnの式で表せ。ただし，$a_n>0$とする。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$の範囲で，曲線$y=f_n(x)$とx軸とで囲まれた図形の面積をB_nとする。また，(1)で求めたa_nに対して，$0\leqq x\leqq a_n$の範囲で，曲線$y=f_n(x)$，x軸，および直線$x=a_n$で囲まれた図形の面積をC_nとする。B_nおよびC_nをnの式で表せ。

(3)　(2)で求めたB_nおよびC_nに対して，極限値$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$が自然対数の底$e$であることを用いてよい。　[2015]

4　曲線$y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$　$(x>0)$と直線$y=2$で囲まれた領域の面積Sを求めよ。

[2013]

5　aを正の定数とし，座標平面上の 2 曲線$C_1:y=e^{x^2}$，$C_2:y=ax^2$を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば$\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t}=+\infty$であることを用いてもよい。

(1)　$t>0$の範囲で，関数$f(t)=\dfrac{e^t}{t}$の最小値を求めよ。

(2)　2 曲線C_1，C_2の共有点の個数を求めよ。

(3)　C_1，C_2の共有点の個数が 2 のとき，これらの 2 曲線で囲まれた領域をy軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2012]

6　座標平面において，原点$\mathrm{O}(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円をC_1とし，点$\mathrm{P}(\cos\theta,\ \sin\theta)$と点$\mathrm{Q}(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$における$C_1$の接線をそれぞれ$l_1$，$l_2$とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$である。$l_1$と$l_2$の交点を$\mathrm{R}(\alpha,\ \beta)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　点 R の座標α，βをθの式で表せ。

(2)　θを$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を$C_2$とする。このとき，直線$y=\sqrt{3}x$と曲線$C_2$と$y$軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

7　O を原点とする座標平面において，点 A の座標を$(2,\ 0)$とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき, P が描く曲線の長さを求めよ。　[2005]

8 座標空間に定点$A(1,\ 0,\ 0)$をとる。点$P(x,\ y,\ z)$から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。$k>1$ である定数 k に対して，$PH : PA = k : 1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2) S のうちで，$y \geqq 0$ かつ $z = 0$ を満たす部分を C とする。S は C を x 軸のまわりに 1 回転させて得られる図形であることを示せ。

(3) S で囲まれる立体の体積を求めよ。 [2004]

9 $1<a<b$ とする。原点 O と点$A\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$を通る直線，原点 O と点$B\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$を通る直線，および曲線$y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$で囲まれた部分を R とする。R の面積を E，R を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。

(1) E を a と b の式で表せ。

(2) $c>1$ とし，曲線$y=\dfrac{1}{x}$上の点$P\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$から直線$y=-x$に下ろした垂線を PQ とする。線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2=s^2+2$ となることを示せ。

(3) V を a と b の式で表せ。

(4) $b=a+1$のとき$\displaystyle\lim_{a\to\infty}E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V$ を求めよ。 [2003]

10 $a,\ b$ を実数とする。2 つの関数$f(x)=\log(x^2+1)$，$g(x)=ax^2+b$について次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1) 関数$f(x)$の極値，曲線$y=f(x)$の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ。

(2) 曲線$y=f(x)$と曲線$y=g(x)$が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ。

(3) (2)の条件において，$a=\dfrac{1}{4}$，$b\neq 0$のとき，この 2 つの曲線$y=f(x)$と$y=g(x)$で囲まれた部分の面積を求めよ。 [1999]

11 xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ は

$$x(t)=f(t)\cos t,\quad y(t)=f(t)\sin t$$

で与えられているとする。ただし，$f(t)$ は微分可能で $f'(t)$ は連続とする。

$t=a$ から $t=b$ までに点 P が動く道のりを L とする。

(1) $L=\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$ が成り立つことを示せ。

(2) $L\leqq\int_a^b\{|f(t)|+|f'(t)|\}\,dt$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(t)=e^{-\sqrt{t}}$，$a=1$，$b=4$ のとき，(2)の不等式を用いて，$L\leqq\dfrac{5}{e}-\dfrac{7}{e^2}$ が成り立つことを示せ。 [1998]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

(1)　すべての実数 x, y に対して $x^2+y^2+2axy+2bx+1\geqq 0$ が成り立つとする。このとき，実数 a, b が満たすべき条件を求め，その条件を満たす点 $(a,\ b)$ のなす領域を座標平面上に図示せよ。

(2)　(1)の領域を点 $(a,\ b)$ が動くとき a^2+b の最大値と最小値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$F=x^2+y^2+2axy+2bx+1$ とおくと，

$$F=y^2+2axy+x^2+2bx+1=(y+ax)^2+(1-a^2)x^2+2bx+1$$

これより，すべての実数 y に対して $F\geqq 0$ が成立する条件は,

$$(1-a^2)x^2+2bx+1\geqq 0$$

さらに，$G=(1-a^2)x^2+2bx+1$ とおき，すべての実数 x に対して $G\geqq 0$ である条件を求める。

(i)　$1-a^2=0\ (a=\pm 1)$ のとき

$G=2bx+1$ より，求める条件は $b=0$ である。

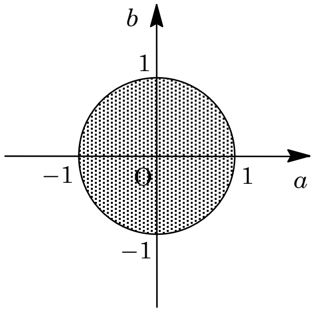
(ii)　$1-a^2\neq 0\ (a\neq\pm 1)$ のとき

$G=(1-a^2)\left(x+\dfrac{b}{1-a^2}\right)^2-\dfrac{b^2}{1-a^2}+1$ より，求める条件は,

$$1-a^2>0 \cdots\cdots\cdots ①,\quad -\frac{b^2}{1-a^2}+1\geqq 0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$a^2+b^2\leqq 1\ (-1<a<1)$

(i)(ii)より，実数 a, b が満たすべき条件は，$a^2+b^2\leqq 1$ となり，点 $(a,\ b)$ のなす領域は右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



(2)　$a^2+b=k$ とおくと，$b=-a^2+k \cdots\cdots\cdots ③$

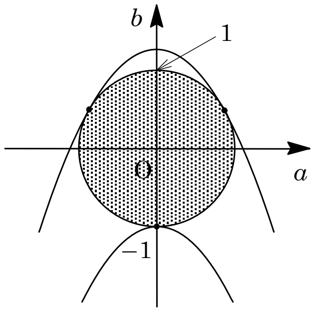
右図より，$(a,\ b)=(0,\ -1)$ のとき，k は最小値 -1 をとる。

また，境界線 $a^2+b^2=1$ と③を連立すると，

$$b=b^2-1+k,\quad b^2-b-1+k=0 \cdots\cdots\cdots ④$$

共有点の b 座標が 1 つである条件は,

$$D=1-4(-1+k)=0,\quad k=\frac{5}{4}$$



このとき，④より $b=\dfrac{1}{2}$，③より $a=\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

よって，$(a,\ b)=\left(\pm\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ のとき，k は最大値 $\dfrac{5}{4}$ をとる。

コメント

2 変数関数の最小値に関する問題です。まず, x を固定し y を変化させたときの最小値を求め, 次にその最小値について, x を変化させることにより 2 変数についての最小値を求めるという手順に従っています。

問　題

xy 平面上の 2 点 $\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$ に対して，$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)$ を

$$d(\mathrm{P}_1,\ \mathrm{P}_2)=|x_1-x_2|+|y_1-y_2|$$

で定義する。いま点 $\mathrm{A}(3,\ 0)$ と点 $\mathrm{B}(-3,\ 0)$ に対して，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ を満たす点 Q からなる図形を T とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 $(a,\ b)$ が T 上にあれば，点 $(a,\ -b)$ も T 上にあることを示せ。

(2)　T で囲まれる領域の面積を求めよ。

(3)　点 C の座標を $(13,\ 8)$ とする。点 D が T 上を動くとき，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$d(\mathrm{Q},\ \mathrm{A})=2d(\mathrm{Q},\ \mathrm{B})$ より，

$$T:|x-3|+|y|=2(|x+3|+|y|)$$

ここで，T 上に点 $(a,\ b)$ があれば，$|a-3|+|b|=2(|a+3|+|b|)$

すると，$|a-3|+|-b|=2(|a+3|+|-b|)$ から，点 $(a,\ -b)$ も T 上にある。

(2)　(1)より，図形 T は x 軸対称となるので，以下，$y\geqq 0$ で考えると，

$$|x-3|+y=2(|x+3|+y),\quad y=|x-3|-2|x+3|$$

(i)　$x<-3$ のとき　$y=-(x-3)+2(x+3)=x+9$

すると，$y\geqq 0$ より，$-9\leqq x<3$ となる。

(ii)　$-3\leqq x<3$ のとき　$y=-(x-3)-2(x+3)=-3x-3$

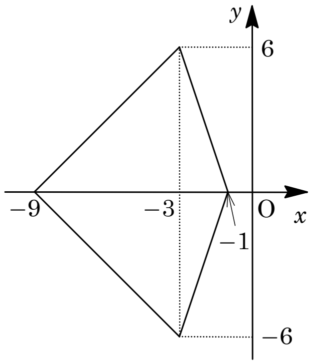
すると，$y\geqq 0$ より，$-3\leqq x\leqq -1$ となる。

(iii)　$x\geqq 3$ のとき

$$y=(x-3)-2(x+3)=-x-9$$

このとき，$y\geqq 0$ を満たす x は存在しない。

(i)～(iii)の結果をもとに，x 軸対称すると図形 T は右図のようになり，囲まれる領域の面積 S は，



$$S=\left\{\frac{1}{2}(-1+9)\cdot 6\right\}\cdot 2=48$$

(3)　$\mathrm{D}(x,\ y)$ が図形 T 上を動くとき，$x\leqq -1$，$y\leqq 6$ より，

$$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})=|x-13|+|y-8|=-(x-13)-(y-8)=21-(x+y)$$

ここで，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ が最小となるのは，$x+y$ が最大となるときで，上図より，$(x,\ y)=(-3,\ 6)$ の場合である。

これより，$d(\mathrm{D},\ \mathrm{C})$ の最小値は，$21-(-3+6)=18$ である。

コメント

絶対値つきの方程式で表される図形を描く問題で，丁寧な場合分けがすべてです。

問　題

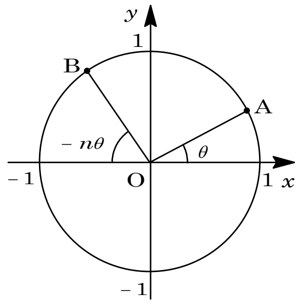
xy 平面の原点を中心とする単位円周 C 上を，A は点$(1,\ 0)$を出発して反時計回りに一定の速さで一周する。B は点$(-1,\ 0)$を A と同時に出発し，時計回りに A の n 倍の速さで C 上を回る。ただし n は 2 以上の整数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) A が C を一周する間に A と B は何回出会うか。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うのは n がどのような条件を満たすときか。

(3) $n=7$ とする。A が，B を通り y 軸に平行な直線の左側（点$(-2,\ 0)$を含む側）にある範囲を求めて，C 上に図示せよ。 [2003]

解答例



(1) A と B が 1 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta$，2 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2\pi$ であり，同様に考えると，k 回目に出会う条件は $\theta=\pi-n\theta+2(k-1)\pi$，すなわち $2(k-1)\pi=(n+1)\theta-\pi$ ……①である。

ここで，$0<\theta\leqq 2\pi$ より，

$$-\pi<(n+1)\theta-\pi\leqq(2n+1)\pi$$

①から，$-\pi<2(k-1)\pi\leqq(2n+1)\pi$，$\dfrac{1}{2}<k\leqq n+\dfrac{3}{2}$

よって，$k=1,\ 2,\ \cdots,\ n+1$ より，A と B は $n+1$ 回出会う。

(2) A と B が点$(0,\ 1)$で出会うとき，$\theta=\dfrac{\pi}{2}$ なので，①より，

$$2(k-1)\pi=(n+1)\frac{\pi}{2}-\pi,\ \ n=4(k-1)+1$$

よって，$n\geqq 2$ から，n は 4 で割って 1 余る 5 以上の整数である。

(3) $0<\theta\leqq 2\pi$ として，$\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{B}(\cos(\pi-7\theta),\ \sin(\pi-7\theta))$ とおくことができ，条件より，$\cos\theta<\cos(\pi-7\theta)$ である。

$$\cos\theta<-\cos 7\theta,\ \ \cos 7\theta+\cos\theta<0,\ \ 2\cos 4\theta\cos 3\theta<0\ \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\cos 4\theta=0$ の解は，

$$\theta=\frac{1}{8}\pi,\ \frac{3}{8}\pi,\ \frac{5}{8}\pi,\ \frac{7}{8}\pi,\ \frac{9}{8}\pi,\ \frac{11}{8}\pi,\ \frac{13}{8}\pi,\ \frac{15}{8}\pi$$

$\cos 3\theta=0$ の解は，

$$\theta=\frac{1}{6}\pi,\ \frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{6}\pi,\ \frac{7}{6}\pi,\ \frac{3}{2}\pi,\ \frac{11}{6}\pi$$

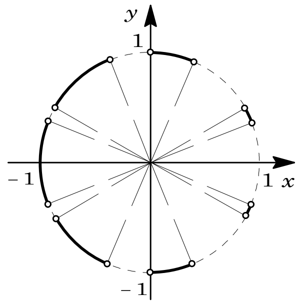
さて，$\theta = 2\pi$ は②を満たさないことから，不等式②の解は,

$$\frac{1}{8}\pi<\theta<\frac{1}{6}\pi,\ \frac{3}{8}\pi<\theta<\frac{1}{2}\pi,\ \frac{5}{8}\pi<\theta<\frac{5}{6}\pi$$

$$\frac{7}{8}\pi<\theta<\frac{9}{8}\pi,\ \frac{7}{6}\pi<\theta<\frac{11}{8}\pi,\ \frac{3}{2}\pi<\theta<\frac{13}{8}\pi$$

$$\frac{11}{6}\pi<\theta<\frac{15}{8}\pi$$

以上より，求める点 A の範囲を図示すると，右図の実線部となる。



コメント

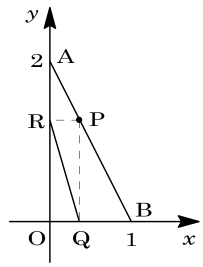
(3)は不等式②を解き図示するだけですが，たいへん時間がかかりました。最初は度数法で計算していましたが，あまりにも繁雑すぎるため，弧度法に切り換えました。

問　題

座標平面上に点 $A(0,\ 2)$ と点 $B(1,\ 0)$ があり，線分 AB 上の点 P から x 軸，y 軸におろした垂線の足をそれぞれ Q，R とする。点 P が A から B まで動くとき，線分 QR の通過する部分の面積を求めよ。 [2002]

解答例

直線 AB の方程式は，$y=-2x+2$ より，$P(t,\ -2t+2)$ とおく。ただし，$0\leqq t\leqq 1$ である。このとき，$Q(t,\ 0)$，$R(0,\ -2t+2)$ となる。



さて，$\overrightarrow{RQ}=(t,\ 2t-2)$ より，直線 RQ は法線ベクトルを $(2t-2,\ -t)$ とすることができ，その方程式は，

$$(2t-2)(x-t)-ty=0\cdots\cdots\cdots①$$

$0\leqq t\leqq 1$ のとき，①が通過する領域は，①を t に関する方程式としてみたとき，$0\leqq t\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ $(x,\ y)$ の条件として求められる。

①より，$2t^2-(2x-y+2)t+2x=0\cdots\cdots\cdots②$

②の左辺を $f(t)$ とおくと，$f(0)=2x$，$f(1)=2-2x+y-2+2x=y$

ここで，線分 QR の通過領域は△OAB の内部または周上なので，

$$x\geqq 0,\ \ y\geqq 0,\ \ y\leqq -2x+2\cdots\cdots\cdots③$$

よって，$f(0)\geqq 0$，$f(1)\geqq 0$ となる。

そこで，$f(t)=2\left(t-\dfrac{2x-y+2}{4}\right)^2-\dfrac{(2x-y+2)^2}{8}+2x$ から，求める条件は，

$$0\leqq\frac{2x-y+2}{4}\leqq 1\cdots\cdots④,\ \ -\frac{(2x-y+2)^2}{8}+2x\leqq 0\cdots\cdots⑤$$

④より，$0\leqq 2x-y+2\leqq 4$，$2x-2\leqq y\leqq 2x+2\cdots\cdots\cdots⑥$

⑤より，$(2x-y+2)^2-16x\geqq 0$，$(2x-y+2+4\sqrt{x})(2x-y+2-4\sqrt{x})\geqq 0$

⑥より $2x-y+2+4\sqrt{x}\geqq 0$ なので，$2x-y+2-4\sqrt{x}\geqq 0$

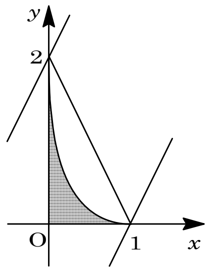
$$y\leqq 2x-4\sqrt{x}+2\cdots\cdots\cdots⑦$$

ここで，⑦の境界線 $y=2x-4\sqrt{x}+2$ に対して，

$$y'=2-4\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{2(\sqrt{x}-1)}{\sqrt{x}}$$

$$y''=x^{-\frac{3}{2}}=\frac{1}{x\sqrt{x}}>0$$

x	0	$\cdots$	1
y'	×	$-$	0
y	2	↘	0



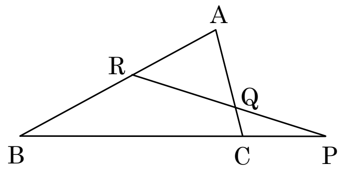
以上より，③⑥⑦を満たす領域は，右図の網点部になるので，この面積を S とすると，

$$S=\int_0^1(2x-4\sqrt{x}+2)\,dx=\left[x^2-4\cdot\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+2x\right]_0^1=\frac{1}{3}$$

コメント

直線の通過領域を求める頻出題です。実数解条件を用いて解いています。

問　題

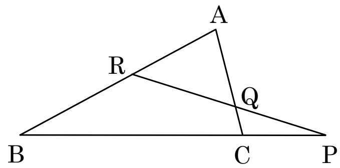


三角形 ABC において，AB＝BC＝2，CA＝1とする。$0 \leqq x \leqq 1$ を満たす x に対して，辺 BC の延長上に点 P を，辺 CA 上に点 Q を，それぞれ CP＝AQ＝x となるようにとる。さらに，直線 PQ と辺 AB の交点を R とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　AR を x の関数として表せ。

(2)　(1)の関数を $f(x)$ とおくとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を求めよ。　[2014]

解答例



(1)　△ABC と直線 PR について，メネラウスの定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\mathrm{RB}}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{\mathrm{PC}}\cdot\frac{\mathrm{CQ}}{\mathrm{QA}}=1$$

ここで，AB＝BC＝2，CA＝1，CP＝AQ＝x より，

$0 < x < 1$ のとき，

$$\frac{y}{2-y}\cdot\frac{2+x}{x}\cdot\frac{1-x}{x}=1,\quad \frac{2-y}{y}=\frac{2+x}{x}\cdot\frac{1-x}{x},\quad \frac{2}{y}=\frac{2-x-x^2}{x^2}+1=\frac{2-x}{x^2}$$

よって，$y=\dfrac{2x^2}{2-x}$ となり，この式は $x=0,\ 1$ のときも満たしている。

(2)　(1)より，$f(x)=\dfrac{2x^2}{2-x}=-2x-4-\dfrac{8}{x-2}$ より，

$$\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\left(-2x-4-\frac{8}{x-2}\right)dx=\Big[-x^2-4x-8\log|x-2|\Big]_0^1$$
$$=-1-4-8(-\log 2)=8\log 2-5$$

コメント

メネラウスの定理の適用問題であることは，図を見た瞬間にわかると思われます。もちろんベクトルを利用しても構いませんが。

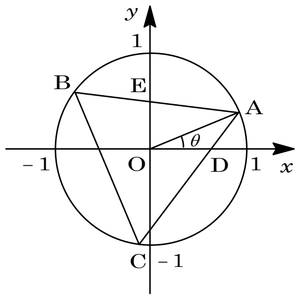
問　題

原点を中心とする半径 1 の円が座標平面上にある。この円に内接する正三角形を原点を中心に回転させるとき，この正三角形の第 1 象限にある部分の面積の最小値と最大値を求めよ。 [2001]

解答例

正三角形 ABC に対して $\mathrm{A}(\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，対称性から $0\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ の場合だけを考えても一般性を失わない。

(i)　$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ のとき



△OAD において，$\angle\mathrm{ADO}=\pi-\left(\theta+\dfrac{\pi}{6}\right)=\dfrac{5}{6}\pi-\theta$

$$\frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}$$

$$\mathrm{OD}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi-\theta\right)}=\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}$$

△OAE において，$\angle\mathrm{OEA}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{6}+\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)=\dfrac{1}{3}\pi+\theta$ より，

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}}=\frac{1}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)},\quad \mathrm{OE}=\frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{1}{3}\pi+\theta\right)}=\frac{1}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$$

△ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OD}\sin\theta+\frac{1}{2}\mathrm{OE}\cos\theta=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta}{\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos\theta}{\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta}$$

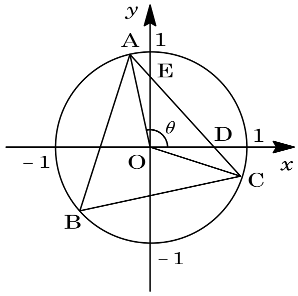
$$=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin^2\theta+2\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta+\cos^2\theta}{\sqrt{3}\sin^2\theta+4\sin\theta\cos\theta+\sqrt{3}\cos^2\theta}=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}\sin2\theta+1}{2\sin2\theta+\sqrt{3}}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{4(2\sin2\theta+\sqrt{3})}$$

$0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ なので，$0\leqq\sin2\theta\leqq1$ となる。

よって，$\sin2\theta=1$ のとき最大値 $S=\dfrac{\sqrt{3}+1}{2(2+\sqrt{3})}=\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，$\sin2\theta=0$ のとき最小値 $S=\dfrac{1}{2\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{3}}{6}$ をとる。

(ii)　$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ のとき



$\triangle$OCD において，$\angle\mathrm{ODC} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \left(\dfrac{2}{3}\pi - \theta\right) = \dfrac{\pi}{6} + \theta$

$$\frac{\mathrm{OD}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)}$$

$$\mathrm{OD} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{\pi}{6} + \theta\right)} = \frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}$$

$\triangle$OAE において，$\angle\mathrm{OEA} = \pi - \dfrac{\pi}{6} - \left(\theta - \dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{4}{3}\pi - \theta$ より，

$$\frac{\mathrm{OE}}{\sin\frac{\pi}{6}} = \frac{1}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)},\ \ \mathrm{OE} = \frac{\sin\frac{\pi}{6}}{\sin\left(\frac{4}{3}\pi - \theta\right)} = \frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$

$\triangle$ABC の第 1 象限にある部分の面積を S とすると，

$$S = \frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE} = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}\sin\theta + \cos\theta}\cdot\frac{1}{\sin\theta - \sqrt{3}\cos\theta}$$

$$= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{3}(\sin^2\theta - \cos^2\theta) - 4\sin\theta\cos\theta} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{\sin 2\theta + \sqrt{3}\cos 2\theta}$$

$$= -\frac{1}{4\sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)}$$

$\dfrac{\pi}{2} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$ より $\dfrac{4}{3}\pi \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{5}{3}\pi$ なので，$-1 \leqq \sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) \leqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる。

よって，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ のとき最大値 $S = \dfrac{1}{2\sqrt{3}} = \dfrac{\sqrt{3}}{6}$，$\sin\left(2\theta + \dfrac{\pi}{3}\right) = -1$ のとき最小値 $S = \dfrac{1}{4}$ をとる。

(i)(ii)より，S は最大値 $\dfrac{\sqrt{3}-1}{2}$，最小値 $\dfrac{1}{4}$ をとる。

コメント

よくありそうな問題です。内容的には正弦定理の応用ですが，意外に奥が深いという感じがします。

問　題

座標空間内に，原点$O(0,\ 0,\ 0)$を中心とする半径 1 の球面 S と 2 点$A(0,\ 0,\ 1)$，$B(0,\ 0,\ -1)$があある。O と異なる点$P(s,\ t,\ 0)$に対し，直線 AP と球面 S の交点で A と異なる点を Q とする。さらに直線 BQ と xy 平面の交点を$R(u,\ v,\ 0)$とする。このとき以下の問いに答えよ。

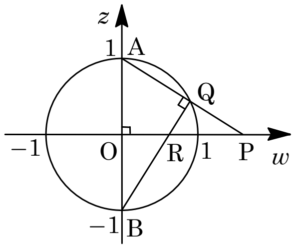
(1) 2 つの線分 OP と OR の長さの積を求めよ。

(2) s を u, v を用いて表せ。

(3) l は xy 平面内の直線で，原点 O を通らないものとする。直線 l 上を点 P が動くとき，対応する点 R は xy 平面内の同一円周上にあることを証明せよ。　[2016]

解答例

(1) $\overrightarrow{OP}$ を w 軸の正の向きとし，球面 S を wz 平面で切断したときの切り口を考える。

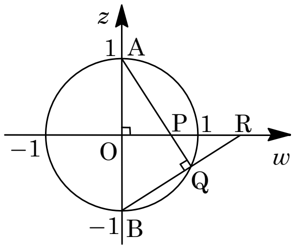


(i) 点 P が球面 S の外部にあるとき

△OAP と△ORB は相似なので，

$$OA : OR = OP : OB$$

よって，$OP\cdot OR = OA\cdot OB = 1$ である。



(ii) 点 P が球面 S 上にあるとき

点 Q，点 R は点 P と一致するので，$OP\cdot OR = 1$

(iii) 点 P が球面 S の内部にあるとき

(i)と同様に，△OAP と△ORB は相似なので，

$$OP\cdot OR = OA\cdot OB = 1$$

(2) $P(s,\ t,\ 0)$，$R(u,\ v,\ 0)$より，$OP=\sqrt{s^2+t^2}$，$OR=\sqrt{u^2+v^2}$ となり，(1)から，

$$\sqrt{s^2+t^2}\sqrt{u^2+v^2}=1,\ (s^2+t^2)(u^2+v^2)=1\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{OP}$ と $\overrightarrow{OR}$ は同じ向きなので，k を正の定数として，

$$\overrightarrow{OP}=k\overrightarrow{OR},\ (s,\ t,\ 0)=k(u,\ v,\ 0)\cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$(k^2u^2+k^2v^2)(u^2+v^2)=1$ となり，$k=\dfrac{1}{u^2+v^2}$ から，

$$s=\frac{u}{u^2+v^2}\cdots\cdots\cdots③,\ t=\frac{v}{u^2+v^2}\cdots\cdots\cdots④$$

(3) xy 平面内の原点を通らない直線 l を，$ax+by=1$，$z=0$ $(a^2+b^2\neq 0)$とする。

さて，点 P が l 上にあるので，$as+bt=1\cdots\cdots\cdots⑤$

③④を⑤に代入すると，$\dfrac{au}{u^2+v^2}+\dfrac{bv}{u^2+v^2}=1$となり，

$$u^2+v^2-au-bv=0\,,\ \left(u-\frac{a}{2}\right)^2+\left(v-\frac{b}{2}\right)^2=\frac{a^2+b^2}{4}$$

よって，点 R は xy 平面内の，中心$\left(\dfrac{a}{2},\ \dfrac{b}{2},\ 0\right)$で半径$\dfrac{\sqrt{a^2+b^2}}{2}$の円周上にある。

コメント

球面と直線の交わりに関する問題ですが，断面をみると有名な構図になっています。(1)の誘導から，数式的に処理するのではなく，図形的に考えることが示唆されています。しかし，このようなときは，位置関係に注意しなくてはいけません。

問　題

座標空間内に 3 点 $A(1,\ 0,\ 0)$，$B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ をとり，2 つのベクトル $\overrightarrow{AP}$ と $\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}$ の内積が 0 になるような点 $P(x,\ y,\ z)$ の集合を S とする。3 点 A, B, C を通る平面を α とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 集合 S は球面であることを示し，その中心 Q の座標と半径 r を求めよ。

(2) 原点 O から最も遠い距離にある S 上の点の座標を求めよ。

(3) (1)で求めた点 Q は，平面 α 上にあることを示せ。

(4) (1)で求めた点 Q を通って平面 α に垂直な直線を l とする。球面 S と直線 l のすべての共有点について，その座標を求めよ。 [2015]

解答例

(1) $B(0,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 0,\ 1)$ に対し，線分 BC の中点 M は $M\left(0,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ となり，

$$\frac{\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}}{2}=\overrightarrow{MP},\ \ \overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP}=2\overrightarrow{MP}$$

また，$A(1,\ 0,\ 0)$ に対し，条件より $\overrightarrow{AP}\cdot(\overrightarrow{BP}+\overrightarrow{CP})=0$，$\overrightarrow{AP}\cdot\overrightarrow{MP}=0$

すると，$\overrightarrow{AP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{MP}=\vec{0}$ または $\overrightarrow{AP}\perp\overrightarrow{MP}$ となり，点 P は 2 点 A, M を直径の両端とする球面を描く。

よって，その中心 Q は線分 AM の中点より，$Q\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)$ であり，半径 r は，

$$r=AQ=\sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

(2) $OQ=\sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2+\left(\frac{1}{4}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{4}$ より，球面 S は原点 O を通る。

これより，O から最も遠い距離にある S 上の点を R とすると，$\overrightarrow{OR}=2\overrightarrow{OQ}$ より，$R\left(1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ である。

(3) (1)より，$\overrightarrow{OQ}=\frac{1}{2}\overrightarrow{OA}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OB}+\frac{1}{4}\overrightarrow{OC}$ と表せる。

すると，$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$ から，点 Q は 3 点 A, B, C を通る平面 α 上にある。

(4) (1)より，$S:\left(x-\frac{1}{2}\right)^2+\left(y-\frac{1}{4}\right)^2+\left(z-\frac{1}{4}\right)^2=\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)^2$ ………①

また，平面 α に垂直な直線の方向ベクトルを $\vec{u}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AB}=(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ 1,\ 0)=0$，$\vec{u}\cdot\overrightarrow{AC}=(a,\ b,\ c)\cdot(-1,\ 0,\ 1)=0$

すると，$a=b$ かつ $a=c$ より，$\vec{u}=a(1,\ 1,\ 1)$ となり，直線 l は，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)+t(1,\ 1,\ 1)\ \ (t\text{ は実数})\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$t^2+t^2+t^2=\dfrac{3}{8}$ から $t^2=\dfrac{1}{8}$ となり，$t=\pm\dfrac{\sqrt{2}}{4}$

よって，S と l の共有点の座標は，複号同順で，

$$(x,\ y,\ z)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{4},\ \frac{1}{4}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{4}(1,\ 1,\ 1)=\left(\frac{2\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4},\ \frac{1\pm\sqrt{2}}{4}\right)$$

コメント

空間図形の問題です。なお，平面 α の方程式は $x+y+z=1$ ですので，これを利用すると，後半の記述量を圧縮できます。

問　題

座標空間内の 8 点 $(0,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 0,\ 0)$, $(1,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 1,\ 0)$, $(0,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 0,\ 1)$, $(1,\ 1,\ 1)$, $(0,\ 1,\ 1)$ を頂点とする立方体を考える。$0<t<3$ のとき, 3 点 $(t,\ 0,\ 0)$, $(0,\ t,\ 0)$, $(0,\ 0,\ t)$ を通る平面でこの立方体を切った切り口の面積を $f(t)$ とし, $f(0)=f(3)=0$ とする。関数 $f(t)$ について, 次の問いに答えよ。

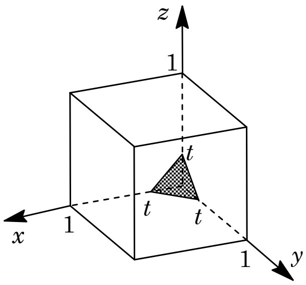
(1)　$0\leqq t\leqq 3$ ののとき, $f(t)$ を t の式で表せ。

(2)　関数 $f(t)$ の $0\leqq t\leqq 3$ における最大値を求めよ。

(3)　定積分 $\displaystyle\int_0^3 f(t)\,dt$ の値を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　まず, 1 辺の長さが 1 の立方体に対して, $0<t<3$ において, 3 点 $\mathrm{A}(t,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ t,\ 0)$, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ t)$ を通る平面 α で切断したとき, 切り口は右図の網点部にようになり, その面積を $f(t)$ とすると,

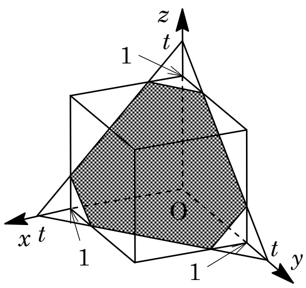


(i)　$0<t\leqq 1$ のとき

切り口は 1 辺の長さが $\sqrt{2}t$ の正三角形 ABC なので,

$$f(t)=\frac{1}{2}(\sqrt{2}t)^2\sin 60^\circ=\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

(ii)　$1<t<2$ のとき



切り口は六角形となる。また, 平面 α 上の立方体の外部の 3 つの正三角形は, 正三角形 ABC と相似になり, その相似比は $(t-1):t$ から,

$$f(t)=\left\{1-3\left(\frac{t-1}{t}\right)^2\right\}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}t^2$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\{t^2-3(t-1)^2\}=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2t^2-6t+3)$$

(iii)　$2\leqq t<3$ のとき

切り口は正三角形となり, その面積は(i)の $f(t)$ と $t=\dfrac{3}{2}$ について対称になるので,

$$f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2$$

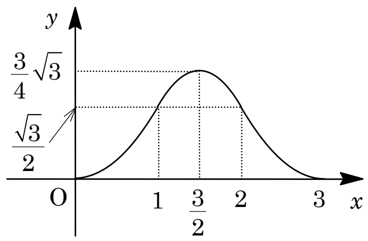
(i)～(iii)より, $f(0)=f(3)=0$ も合わせると, $f(t)=\dfrac{\sqrt{3}}{2}t^2$　$(0\leqq t\leqq 1)$,

$$f(t)=-\frac{\sqrt{3}}{2}(2t^2-6t+3)\ \ (1<t<2),\quad f(t)=\frac{\sqrt{3}}{2}(3-t)^2\ \ (2\leqq t\leqq 3)$$

(2)　(1)から，$1<t<2$ のとき，

$$f(t)=-\sqrt{3}\left(t-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\sqrt{3}$$

すると，$0\leqq t\leqq 3$ において，$y=f(t)$ のグラフをかくと，右図のようになり，$f(t)$ は $t=\dfrac{3}{2}$ のとき最大となり，最大値は $\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$ である。



(3)　$I=\displaystyle\int_0^3 f(t)dt=\frac{\sqrt{3}}{2}\int_0^1 t^2dt-\frac{\sqrt{3}}{2}\int_1^2(2t^2-6t+3)dt+\frac{\sqrt{3}}{2}\int_2^3(3-t)^2dt$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{t^3}{3}\right]_0^1-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{2}{3}t^3-3t^2+3t\right]_1^2-\frac{\sqrt{3}}{2}\left[\frac{(3-t)^3}{3}\right]_2^3$$

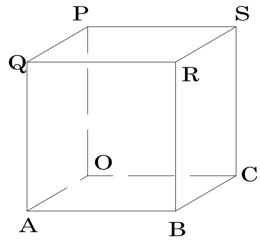
$$=\frac{\sqrt{3}}{6}-\frac{\sqrt{3}}{2}\left(\frac{2}{3}\cdot 7-3\cdot 3+3\right)+\frac{\sqrt{3}}{6}=\sqrt{3}$$

コメント

まったく同じ問題が繰り返し出題されている超有名問題です。また，3 点 A, B, C を通る平面の方程式は $x+y+z=t$ より，この式を用いて立方体の辺との交点の座標を求めても構いません。なお，(2)と(3)の設問は付録扱いでしょう。

問　題

辺の長さが 4 の立方体 OABC-PQRS がある。辺 AB の中点を D, 辺 BC の中点を E, 辺 CS の中点を F, 辺 PS の中点を G, 辺 PQ の中点を H とする。このとき，次の問いに答えよ。



(1) ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ を 3 つのベクトル $\vec{d}$, $\vec{f}$, $\vec{g}$ で表せ。ただし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OD}}$, $\vec{f}=\overrightarrow{\mathrm{OF}}$, $\vec{g}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}$ とする。

(2) 5 点 D, E, F, G, H は同一平面上にあることを証明せよ。

(3) 五角形 DEFGH の面積を求めよ。

(4) 辺 BR を $3:1$ の比に内分する点を K とする。点 K を頂点とし，五角形 DEFGH を底面とする五角錐の体積を求めよ。　[1999]

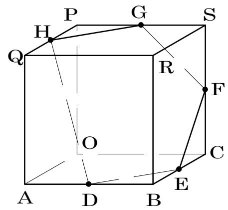
解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$, $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とおく。

$$\vec{d}=\vec{a}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots①,\quad \vec{f}=\vec{c}+\frac{1}{2}\vec{p}\cdots\cdots②,\quad \vec{g}=\vec{p}+\frac{1}{2}\vec{c}\cdots\cdots③$$

②③より，$\dfrac{3}{2}\vec{c}=2\vec{f}-\vec{g}$, $\vec{c}=\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots④$

①④より，$\vec{a}=\vec{d}-\dfrac{1}{2}\vec{c}=\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑤$



よって，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{c}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\right)$

$=\dfrac{1}{2}\vec{d}+\vec{f}-\dfrac{1}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑥$

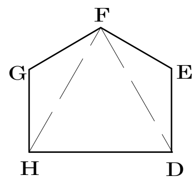
(2) ⑥より $\dfrac{1}{2}+1-\dfrac{1}{2}=1$ なので，点 E は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

また③④より，$\vec{p}=\vec{g}-\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{4}{3}\vec{f}-\dfrac{2}{3}\vec{g}\right)=-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{4}{3}\vec{g}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OH}}=\vec{p}+\dfrac{1}{2}\vec{a}=-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{4}{3}\vec{g}+\dfrac{1}{2}\left(\vec{d}-\dfrac{2}{3}\vec{f}+\dfrac{1}{3}\vec{g}\right)=\dfrac{1}{2}\vec{d}-\vec{f}+\dfrac{3}{2}\vec{g}\cdots\cdots\cdots⑦$

⑦より $\dfrac{1}{2}-1+\dfrac{3}{2}=1$ なので，点 H は 3 点 D, F, G で決まる平面上にある。

(3) 五角形 DEFGH において，$\mathrm{DE}=\mathrm{EF}=\mathrm{FG}=\mathrm{GH}=\sqrt{2^2+2^2}=2\sqrt{2}$ となり，また $\mathrm{AH}=\sqrt{2^2+4^2}=2\sqrt{5}$ より $\mathrm{HD}=\sqrt{(2\sqrt{5})^2+2^2}=2\sqrt{6}$，さらに $\mathrm{FH}=\mathrm{FD}=\mathrm{HD}$ なので，

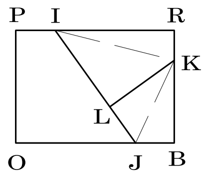


$$\triangle\mathrm{FGH}=\triangle\mathrm{FDE}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sqrt{(2\sqrt{2})^2-(\sqrt{6})^2}=2\sqrt{3}$$

$$\triangle\mathrm{FHD}=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{6}\cdot 2\sqrt{6}\cdot\sin 60^\circ=6\sqrt{3}$$

五角形 DEFGH の面積は，$2\sqrt{3}\times 2+6\sqrt{3}=10\sqrt{3}$

(4)　点 K から五角形 DEFGH に下ろした垂線の足を L とすると，対称性より L は長方形 OPRB 上にある。また長方形 OPRB と線分 GH，DE との交点をそれぞれ I, J とおくと，



$$\mathrm{IR}=\frac{3}{4}\cdot 4\sqrt{2}=3\sqrt{2},\ \ \mathrm{JB}=\frac{1}{4}\cdot 4\sqrt{2}=\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}(3\sqrt{2}+\sqrt{2})\cdot 4-\frac{1}{2}\cdot 3\sqrt{2}\cdot 1-\frac{1}{2}\cdot\sqrt{2}\cdot 3=5\sqrt{2}$$

$$\triangle\mathrm{IJK}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{IJ}\cdot\mathrm{KL}=\frac{1}{2}\cdot\mathrm{DH}\cdot\mathrm{KL}=\sqrt{6}\mathrm{KL}$$

よって，$\sqrt{6}\,\mathrm{KL}=5\sqrt{2}$，$\mathrm{KL}=\dfrac{5}{\sqrt{3}}$ より，五角錐の体積は，$\dfrac{1}{3}\cdot 10\sqrt{3}\cdot\dfrac{5}{\sqrt{3}}=\dfrac{50}{3}$

コメント

(4)では, OR が五角形 DEFGH に垂直であることを用いると計算量が減ります。

問　題

p は素数とする。正の整数 n に対し，p^d が n の約数となる整数 d $(d \geqq 0)$ のなかで最大のものを $f(n)$ とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　$p=3$，$n=3^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(2)　$p=5$，$n=5^2!$ のとき $f(n)$ の値を求めよ。

(3)　m が正の整数で $n=p^m!$ のとき $f(n)$ を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　3^d が $3^2!=9!=1\times2\times3\times\cdots\times9$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(3^2!)$ は，$3^2!$ の素因数 3 の個数より，

$$f(3^2!)=f(9!)=\frac{9}{3}+\frac{9}{3^2}=3+1=4$$

(2)　5^d が $5^2!=25!=1\times2\times3\times\cdots\times25$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(5^2!)$ は，$5^2!$ の素因数 5 の個数より，

$$f(5^2!)=f(25!)=\frac{25}{5}+\frac{25}{5^2}=5+1=6$$

(3)　p を素数，m を正の整数として，p^d が $p^m!$ の約数となるとき，整数 d のなかで最大のもの $f(p^m!)$ は，$p^m!$ の素因数 p の個数より，

$$f(p^m!)=\frac{p^m}{p}+\frac{p^m}{p^2}+\cdots+\frac{p^m}{p^m}=p^{m-1}+p^{m-2}+\cdots+1=\frac{p^m-1}{p-1}$$

コメント

自然数の積と素因数の個数についての問題です。教科書にも触れられている基本事項の 1 つです。

問　題

$f(x)=4x(1-x)$ とする。このとき

$$f_1(x)=f(x),\ f_{n+1}(x)=f_n(f(x))\quad(n=1,\ 2,\ \cdots\cdots)$$

によって定まる多項式 $f_n(x)$ について以下の問いに答えよ。

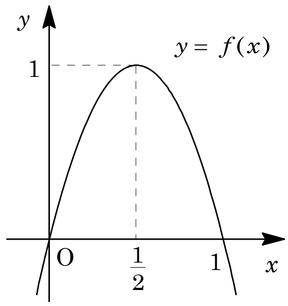
(1) 方程式 $f_2(x)=0$ を解け。

(2) $0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対し，方程式 $f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ とする。c が $0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たすとき，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解であることを示せ。

(3) $0\leqq x\leqq 1$ の範囲での方程式 $f_n(x)=0$ の異なる解の個数を S_n とする。このとき S_{n+1} を S_n で表し，一般項 S_n を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $f(x)=4x(1-x)$ に対して，条件より，



$$f_2(x)=f_1(f(x))=f(f(x))=4f(x)(1-f(x))$$

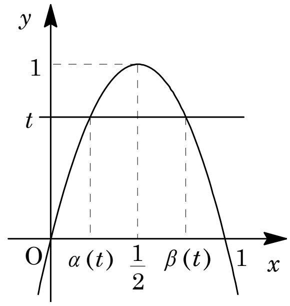
すると，$f_2(x)=0$ の解は，

(i) $f(x)=0$ のとき　$x=0,\ 1$

(ii) $f(x)=1$ のとき　$x=\dfrac{1}{2}$

(i)(ii)より，$x=0,\ \dfrac{1}{2},\ 1$

(2) $0\leqq t<1$ を満たす定数 t に対して，$f(x)=t$ の解を $\alpha(t)$，$\beta(t)$ $(\alpha(t)<\beta(t))$ とすると，



$$0\leqq\alpha(t)<\frac{1}{2}<\beta(t)\leqq 1$$

さて，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))$ より，$0\leqq c<1$ かつ $f_n(c)=0$ を満たす c に対して，

$$f_{n+1}(\alpha(c))=f_n(f(\alpha(c)))=f_n(c)=0$$
$$f_{n+1}(\beta(c))=f_n(f(\beta(c)))=f_n(c)=0$$

よって，$\alpha(c)$，$\beta(c)$ は $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(3) まず，$x=0,\ 1$ が $f_n(x)=0$ の解であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$ のとき　$f_1(x)=4x(1-x)$ より，$x=0,\ 1$ は $f_1(x)=0$ の解である。

(ii) $n=k$ のとき　$x=0,\ 1$ が $f_k(x)=0$ の解であると仮定すると，

$$f_{k+1}(0)=f_k(f(0))=f_k(0)=0,\ f_{k+1}(1)=f_k(f(1))=f_k(0)=0$$

$x=0,\ 1$ は $f_{k+1}(x)=0$ の解である。

(i)(ii)より，$x=0,\ 1$ は，ともに $f_n(x)=0$ の解である。

さて，$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，$f_n(x)=0$ の異なる S_n 個の解を，

$$0=c_1<c_2<c_3<\cdots<c_{S_n-1}<c_{S_n}=1$$

すると，$f_{n+1}(x)=f_n(f(x))=0$ の解は，$f(x)=c_1$，c_2，c_3，…，c_{S_n-1}，c_{S_n} より求めることができる。

(a)　$f(x)=c_1$，c_2，c_3，…，c_{S_n-1} のとき

(2)より，$\alpha(c_i)$，$\beta(c_i)$　$(1 \leqq i \leqq S_n-1)$ は，$f_{n+1}(x)=0$ の異なる解となり，その個数は $2(S_n-1)$ である。ただし，$0 \leqq \alpha(c_i)<\dfrac{1}{2}<\beta(c_i) \leqq 1$ である。

(b)　$f(x)=c_{S_n}$ のとき

$f(x)=1$ より $x=\dfrac{1}{2}$ となり，$\dfrac{1}{2}$ が $f_{n+1}(x)=0$ の解である。

(a)(b)より，$f_n(x)=0$ の異なる解の個数 S_n について，$S_1=2$ で，

$$S_{n+1}=2(S_n-1)+1,\ S_{n+1}=2S_n-1 \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$を $S_{n+1}-1=2(S_n-1)$ と変形すると，$S_n-1=(S_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$ となり，

$$S_n=2^{n-1}+1$$

コメント

合成関数の解の個数を題材としたおもしろい問題です。(1)と(2)が秀逸な誘導となっています。$n=1,\ 2,\ 3$ と具体的に考えて方針を立てましたが，解答例の記述には，かなり難航しました。

問　題

数列$\{a_n\}$は次のように定められている。

$$a_1=1,\ a_{n+1}(a_n+1)=1\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

このとき，次の問いに答えよ。

(1) $a_{n+1}{}^2+a_{n+1}-1$をa_nを用いて表せ。

(2) 数列$\{b_n\}$を$b_n=a_n{}^2+a_n-1$で定める。このとき，b_{2n-1}は正，b_{2n}は負であることを示せ。

(3) 数列$\{a_n\}$について，不等式$a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$が成り立つことを示せ。

[2004]

解答例

(1) $a_{n+1}(a_n+1)=1$から，$a_n+1\neq 0$なので，$a_{n+1}=\dfrac{1}{a_n+1}$………①

すると，$a_{n+1}{}^2+a_{n+1}-1=\dfrac{1}{(a_n+1)^2}+\dfrac{1}{a_n+1}-1=\dfrac{1+(a_n+1)-(a_n+1)^2}{(a_n+1)^2}$

$$=\frac{1-a_n-a_n{}^2}{(a_n+1)^2}=-\frac{a_n{}^2+a_n-1}{(a_n+1)^2}$$

(2) $b_n=a_n{}^2+a_n-1$とおくと，(1)より，$b_{n+1}=-\dfrac{b_n}{(a_n+1)^2}$………②

ここで，$b_{2n-1}>0$であることを，数学的帰納法を用いて示す。

(i) $n=1$のとき　$b_1=a_1{}^2+a_1-1=1>0$

(ii) $n=k$のとき　$b_{2k-1}>0$と仮定する。

②より，$b_{2k}=-\dfrac{b_{2k-1}}{(a_{2k-1}+1)^2}<0$，$b_{2k+1}=-\dfrac{b_{2k}}{(a_{2k}+1)^2}>0$

よって，$n=k+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$b_{2n-1}>0$である。

さらに，②から，$b_{2n}=-\dfrac{b_{2n-1}}{(a_{2n-1}+1)^2}<0$となる。

(3) (2)より，$b_{2n-1}=a_{2n-1}{}^2+a_{2n-1}-1>0$

①より，帰納的に$a_n>0$なので，$a_{2n-1}>0$から，$a_{2n-1}>\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

また，$b_{2n}=a_{2n}{}^2+a_{2n}-1<0$で，$a_{2n}>0$から，$0<a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$

以上より，$a_{2n}<\dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}<a_{2n-1}$

コメント

誘導が細かく付いていますので，(3)の結論がスムーズに導けます。

問　題

$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ は，$x=1,\ -1,\ -2$ で整数値 $f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ をとるとする。

(1)　$a,\ b,\ c$ を $r,\ s,\ t$ の式で表せ。

(2)　すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になることを示せ。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=ax^3+bx^2+cx$ に対して，$f(1)=r$，$f(-1)=s$，$f(-2)=t$ より，

$$a+b+c=r\cdots\cdots①,\ \ -a+b-c=s\cdots\cdots②,\ \ -8a+4b-2c=t\cdots\cdots③$$

①②より，$2b=r+s$，$b=\dfrac{r+s}{2}\cdots\cdots\cdots④$

①③より $-6a+6b=2r+t$ となり，④を代入して，

$$6a=6\cdot\frac{r+s}{2}-2r-t=r+3s-t,\ \ a=\frac{r+3s-t}{6}\cdots\cdots\cdots⑤$$

①に④⑤を代入すると，$c=r-\dfrac{r+3s-t}{6}-\dfrac{r+s}{2}=\dfrac{2r-6s+t}{6}$

(2)　(1)より，

$$\begin{aligned}f(n)&=\frac{r+3s-t}{6}n^3+\frac{r+s}{2}n^2+\frac{2r-6s+t}{6}n\\&=\frac{r}{6}(n^3+3n^2+2n)+\frac{s}{2}(n^3+n^2-2n)-\frac{t}{6}(n^3-n)\\&=\frac{r}{6}n(n+1)(n+2)+\frac{s}{2}(n-1)n(n+2)-\frac{t}{6}(n-1)n(n+1)\end{aligned}$$

ここで，$n(n+1)(n+2)$ および $(n-1)n(n+1)$ は連続 3 整数の積なので 6 の倍数となる。また，$(n-1)n$ は連続 2 整数の積なので 2 の倍数である。

よって，すべての整数 n について，$f(n)$ は整数になる。

コメント

(1)の誘導に従うと，(2)の結論までストレートに進むことができます。整数を題材にした頻出問題の 1 つです。

問　題

n を自然数とする。$f(x)$ は 2 次関数で，曲線 $y=f(x)$ は座標平面上の 3 点 $(-1,\ 0)$，$(0,\ 1)$，$(n,\ n)$ を通るとする。

(1) 2 次関数 $f(x)$ を求めよ。

(2) この関数 $f(x)$ について，$S=f(0)+f(1)+f(2)+\cdots\cdots+f(n)$ の値を n を用いて表せ。

(3) (2)で求めた S の値が整数であるためには，$n+2$ が 3 の倍数であることが必要十分である。このことを証明せよ。　[2001]

解答例

(1) $f(0)=1$ より，$f(x)=ax^2+bx+1$ とおくと，

$f(-1)=0$ から，$a-b+1=0$ ………①

$f(n)=n$ から，$an^2+bn+1=n$ ………②

①より $b=a+1$，②に代入して $an^2+(a+1)n+1=n$，$a(n^2+n)=-1$

$$a=-\frac{1}{n^2+n},\quad b=-\frac{1}{n^2+n}+1=\frac{n^2+n-1}{n^2+n}$$

よって，$f(x)=-\dfrac{1}{n^2+n}x^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}x+1$

(2) (1)より，$f(k)=-\dfrac{1}{n^2+n}k^2+\dfrac{n^2+n-1}{n^2+n}k+1$ なので，

$$S=\sum_{k=0}^{n}f(k)=-\frac{1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)+\frac{n^2+n-1}{n^2+n}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)+n+1$$
$$=-\frac{1}{6}(2n+1)+\frac{1}{2}(n^2+n-1)+n+1=\frac{1}{6}(n+2)(3n+1)$$

(3) $(n+2)(3n+1)=(n+2)(2n+n+1)=2n(n+2)+(n+1)(n+2)$ と変形すると，$2n(n+2)$ は偶数，さらに $n+1$，$n+2$ のいずれかは偶数なので，$(n+1)(n+2)$ も偶数となり，$(n+2)(3n+1)$ は偶数となる。

また，$(n+2)(3n+1)$ が 3 の倍数となる条件は，$3n+1$ が 3 の倍数でないので，$n+2$ が 3 の倍数となることである。

よって，S の値が整数であるためには，$(n+2)(3n+1)$ が 6 の倍数，すなわち $n+2$ が 3 の倍数であることことが必要十分である。

コメント

(2)の結果から，(3)では $(n+2)(3n+1)$ が偶数になることをいえば，題意の証明ができます。n を偶奇で分けてもよいのですが，上の解では式変形をしてみました。

問　題

$n,\ k$ を自然数とする。等式 $x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①を満たす自然数 $x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k$ の組の個数を $a(n,\ k)$ とするとき，次の問いに答えよ。ただし，例えば $(x_1,\ x_2)=(1,\ 2)$ と $(x_1,\ x_2)=(2,\ 1)$ とは別の組と考える。

(1) 式①における x_k のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 関係式 $a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$ が成り立つことを示せ。

(3) $a(n,\ 1)$，$a(n,\ 2)$，$a(n,\ 3)$，$a(n,\ 4)$ を求め，$a(n,\ k)$ を推定せよ。

(4) (3)において，$a(1,\ k)$，$a(2,\ k)$，$\cdots$，$a(n,\ k)$ の推定が正しいとしたとき，$a(n,\ k+1)$ の推定が正しいことを証明せよ。　[1999]

解答例

(1) $x_1+x_2+\cdots+x_k=n+k-1$ ……①から，$k\geqq 2$ で，

$$x_k=n+k-1-(x_1+x_2+\cdots+x_{k-1})\ \cdots\cdots\cdots②$$

$x_i\geqq 1\ \ (1\leqq i\leqq k)$ なので，②より $1\leqq x_k\leqq n+k-1-(k-1)=n$

$k=1$ のときは $x_1=n$ となるので，$k\geqq 2$ の場合と合わせて $1\leqq x_k\leqq n$ となる。

(2) $a(n,\ k+1)$ は $x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1}=n+k$ を満たす自然数解の個数を表す。

ここで，(1)より $1\leqq x_{k+1}\leqq n$ なので，$x_{k+1}=n-j+1\ \ (1\leqq j\leqq n)$ のときは，

$$x_1+x_2+\cdots+x_k+(n-j+1)=n+k,\ \ x_1+x_2+\cdots+x_k=j+k-1$$

となり，この式を満たす自然数解 $(x_1,\ x_2,\ \cdots,\ x_k)$ の個数は $a(j,\ k)$ である。

したがって，$a(n,\ k+1)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ k)$

(3) まず，$a(n,\ 1)$ は①より $x_1=n$ の解の個数より，$a(n,\ 1)=1$

(2)より，$a(n,\ 2)=\displaystyle\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 1)=\sum_{j=1}^{n}1=n$

$$a(n,\ 3)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 2)=\sum_{j=1}^{n}j=\frac{1}{2}n(n+1)$$

$$a(n,\ 4)=\sum_{j=1}^{n}a(j,\ 3)=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}j(j+1)$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{3}\{j(j+1)(j+2)-(j-1)j(j+1)\}=\frac{1}{6}n(n+1)(n+2)$$

以上より，$a(n,\ k)=\dfrac{n(n+1)\cdots\cdots(n+k-2)}{(k-1)!}=\dfrac{(n+k-2)!}{(k-1)!(n-1)!}$ と推測できる。

(4)　$1 \leqq j \leqq n$ に対して，$a(j,\ k) = \dfrac{j(j+1)\cdots\cdots(j+k-2)}{(k-1)!}$ と仮定したとき，

$$a(n,\ k+1) = \sum_{j=1}^{n} a(j,\ k) = \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n} j(j+1)\cdots(j+k-2)$$

$$= \frac{1}{(k-1)!}\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{k}\left\{j(j+1)\cdots(j+k-2)(j+k-1)-(j-1)j\cdots(j+k-2)\right\}$$

$$= \frac{n(n+1)\cdots(n+k-2)(n+k-1)}{k!} = \frac{(n+k-1)!}{k!(n-1)!}$$

コメント

おもしろい誘導のついた問題です。しかし，①の自然数解の個数は○を $n+k-1$ 個並べ，その間の $n+k-2$ か所に $k-1$ 個の仕切りを 1 つずつ割り込ませるという有名な方法で直接的に求まってしまいます。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は何通りあるか。

(3)　A, B, C, D, E, F, G, H の 8 人から 7 人を選び, さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける。A, B の 2 人がともに選ばれて, かつ同じ組になる確率を求めよ。

[2017]

解答例

(1)　6 人を 2 人ずつ 3 組に分ける方法は, 2 人ずつの 3 組を区別しないことより,

$$\frac{{}_6C_2\times{}_4C_2}{3!}=\frac{15\times6}{6}=15\ \text{（通り）}$$

(2)　7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分ける方法は, 2 人ずつの 2 組については区別しないことより,

$$\frac{{}_7C_2\times{}_5C_2}{2!}=\frac{21\times10}{2}=105\ \text{（通り）}$$

(3)　A～H の 8 人から 7 人を選び, さらにその 7 人を 2 人, 2 人, 3 人の 3 組に分けるとき, 組を区別して, Ⅰ組(2 人), Ⅱ組(2 人), Ⅲ組(3 人)とすると, その方法は,

$${}_8C_7\times{}_7C_2\times{}_5C_2=8\times21\times10\ \text{（通り）}$$

その中で A, B の 2 人がともに選ばれて, かつ同じ組になるのは, A, B 以外の 5 人が選ばれる方法が ${}_6C_5$ 通りであることに注意すると,

(i)　Ⅰ組で同じ組となるとき　${}_6C_5\times{}_5C_2=6\times10=60$（通り）

(ii)　Ⅱ組で同じ組となるとき　${}_6C_5\times{}_5C_2=6\times10=60$（通り）

(iii)　Ⅲ組で同じ組となるとき　${}_6C_5\times{}_5C_1\times{}_4C_2=6\times5\times6=180$（通り）

(i)～(iii)より, $60+60+180=300$ 通りとなる。

以上より, 求める確率は, $\dfrac{300}{8\times21\times10}=\dfrac{5}{28}$ である。

コメント

有名な組分け問題です。ただ, (3)では, 同じ人数の組も区別するという立場で確率を計算しています。もちろん(2)と同様でも構いませんが。

問　題

n を 2 以上の自然数とし，1 から n までの自然数 k に対して，番号 k をつけたカードをそれぞれ k 枚用意する。これらすべてを箱に入れ，箱の中から 2 枚のカードを同時に引くとき，次の問いに答えよ。

(1) 用意したカードは全部で何枚か答えよ。

(2) 引いたカード 2 枚の番号が両方とも k である確率を n と k の式で表せ。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を n の式で表せ。

(4) 引いたカード 2 枚の番号が連続している確率（すなわち，2 つの番号の差の絶対値が 1 である確率）を n の式で表せ。　[2015]

解答例

(1) 番号 k のカードは k 枚なので，用意したカードを N 枚とすると，

$$N=\sum_{k=1}^{n}k=\frac{1}{2}n(n+1)$$

(2) N 枚のカードから 2 枚のカードを引く ${}_N\mathrm{C}_2$ 通りが同様に確からしく，

$$\begin{aligned}{}_N\mathrm{C}_2&=\frac{1}{2}N(N-1)=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}n(n+1)\left\{\frac{1}{2}n(n+1)-1\right\}\\&=\frac{1}{8}n(n+1)(n^2+n-2)=\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)\end{aligned}$$

このとき，引いた 2 枚のカードの番号がともに k である場合は，$k\geqq 2$ では，${}_k\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}k(k-1)$ 通りより，求める確率は，

$$\frac{\frac{1}{2}k(k-1)}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

なお，この式は $k=1$ のときも成立している。

(3) 引いたカード 2 枚の番号が一致する確率を q_n とおくと，(2)より，

$$\begin{aligned}q_n&=\sum_{k=1}^{n}\frac{4k(k-1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\sum_{k=1}^{n}(k^2-k)\\&=\frac{4}{(n-1)n(n+1)(n+2)}\left\{\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)-\frac{1}{2}n(n+1)\right\}\\&=\frac{2}{(n-1)(n+2)}\left\{\frac{1}{3}(2n+1)-1\right\}=\frac{4}{3(n+2)}\end{aligned}$$

(4) 引いたカード 2 枚の番号が k と $k+1$ のとき，その確率は，

$$\frac{{}_k\mathrm{C}_1\,{}_{k+1}\mathrm{C}_1}{\frac{1}{8}(n-1)n(n+1)(n+2)}=\frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

すると，引いたカード 2 枚の番号が連続している確率 p_n は，

$$p_n = \sum_{k=1}^{n-1}\frac{8k(k+1)}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = \sum_{k=2}^{n}\frac{8(k-1)k}{(n-1)n(n+1)(n+2)}$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\frac{8(k-1)k}{(n-1)n(n+1)(n+2)} = 2q_n = \frac{8}{3(n+2)}$$

コメント

確率についての基本的な問題です。

問　題

n を 3 以上の整数とし，a，b，c は 1 以上 n 以下の整数とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　$a<b<c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(2)　$a \leqq b \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。

(3)　$a<b$ かつ $a \leqq c$ となる a, b, c の組は何通りあるか。　[2014]

解答例

(1)　$1 \leqq a<b<c \leqq n$ を満たす a, b, c の組は,

$${}_n\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\ \text{（通り）}$$

(2)　$a'=a$，$b'=b+1$，$c'=c+2$ とおくとき，$1 \leqq a \leqq b \leqq c \leqq n$ を満たす a, b, c の組の数は，$1 \leqq a'<b'<c' \leqq n+2$ を満たす a'，b'，c' の組の数に等しいので,

$${}_{n+2}\mathrm{C}_3=\frac{1}{6}(n+2)(n+1)n\ \text{（通り）}$$

(3)　$a<b$ かつ $a \leqq c$ となる場合の数は，次の通りである。

(i)　$1 \leqq a<b<c \leqq n$ のとき　(1)より，$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(ii)　$1 \leqq a<b=c \leqq n$ のとき　${}_n\mathrm{C}_2=\frac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(iii)　$1 \leqq a<c<b \leqq n$ のとき　(i)と同様に，$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$（通り）

(iv)　$1 \leqq a=c<b \leqq n$ のとき　(ii)と同様に，$\frac{1}{2}n(n-1)$（通り）

(i)～(iv)より，求める場合の数は,

$$\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)\times 2+\frac{1}{2}n(n-1)\times 2=\frac{1}{3}n(n-1)(n+1)\ \text{（通り）}$$

コメント

場合の数の典型問題です。(3)は(1)を利用して場合分けをしました。

問　題

表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を用意する。ここで p，q は正の定数で，$p+q=1$ を満たすとする。座標平面における領域 D を

$$D=\{(x,\ y)\mid 0\leqq x\leqq 2,\ 0\leqq y\leqq 2\}$$

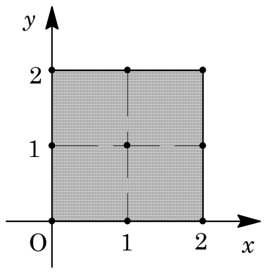
とし，D 上を動く点 Q を考える。Q は点 $(0,\ 0)$ から出発し，硬貨を投げて表が出れば x 軸方向に $+1$ だけ進み，裏が出れば y 軸方向に $+1$ だけ進む。なお，この規則で D 上を進めないときには，その回はその点にとどまるものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　硬貨を 4 回投げて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_4 を求めよ。

(2)　硬貨を 5 回投げて 5 回目に初めて Q が点 $(2,\ 2)$ に到達する確率 P_5 を求めよ。

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ のとき，p の値を求めよ。　[2012]

解答例



(1)　表の出る確率が p，裏の出る確率が q である硬貨を 4 回投げて，Q が点 $(2,\ 2)$ に到達するには，表が 2 回，裏が 2 回出る場合より，その確率 P_4 は，

$$P_4={}_4\mathrm{C}_2p^2q^2=6p^2q^2$$

(2)　硬貨を 5 回投げて，Q が 5 回目に初めて点 $(2,\ 2)$ に到達するには，

(i)　4 回目に点 $(2,\ 1)$ に到達するとき

4 回目までに表 3 回，裏 1 回出て，5 回目に裏が出る場合より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_3p^3q\times q=4p^3q^2$$

(ii)　4 回目に点 $(1,\ 2)$ に到達するとき

4 回目までに表 1 回，裏 3 回出て，5 回目に表が出る場合より，その確率は，

$${}_4\mathrm{C}_1pq^3\times p=4p^2q^3$$

(i)(ii)より，$P_5=4p^3q^2+4p^2q^3=4p^2q^2(p+q)=4p^2q^2$

(3)　$P_5=\dfrac{1}{9}$ より，(2)から $4p^2q^2=\dfrac{1}{9}$ となり，$6pq=1$ であるので，

$$6p(1-p)=1,\ 6p^2-6p+1=0$$

よって，$p=\dfrac{3\pm\sqrt{3}}{6}$ となり，この値はともに $0<p<1$ を満たしている。

コメント

確率の基本的な問題です。ただ，設問(3)の意図は何でしょうか。

問　題

n を 3 以上の整数とする。$3n$ 枚のカードに 1 から $3n$ までの数字が 1 つずつ書かれている。この中から 3 枚のカードを取り出す。ひとたび取り出したカードは戻さないものとする。

(1)　3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である確率を求めよ。

(2)　3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数である確率を求めよ。

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率と 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率とはどちらが大きいかを調べよ。　[2011]

解答例

(1)　$3n$ 枚のカードから 3 枚を取り出す ${}_{3n}\mathrm{C}_3$ 通りが同様に確からしいとする。

ここで，3 枚のカードの数字がすべて 3 の倍数である取り出し方は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りより，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{(n-1)(n-2)}{3(3n-1)(3n-2)}$$

(2)　まず, $3n$ 枚のカードを，書かれた数字によって，次の 3 つのタイプに分類する。

すなわち，書かれた数字が 3 の倍数の n 枚のカード，(3 の倍数＋1)の n 枚のカード，(3 の倍数＋2)の n 枚のカードである。

すると，3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数であるのは，同じタイプから 3 枚を取り出す ${}_n\mathrm{C}_3\times 3$ 通り，3 つのタイプから 1 枚ずつ取り出す $({}_n\mathrm{C}_1)^3=n^3$ 通りの場合がある。これより，その確率は,

$$\frac{3\,{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}=\frac{3n(n-1)(n-2)+6n^3}{3n(3n-1)(3n-2)}=\frac{3n^2-3n+2}{(3n-1)(3n-2)}$$

(3)　3 枚のカードの数字の積が 3 の倍数である確率 p_1 は，余事象を考えて，

$$p_1=1-\frac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

また, 3 枚のカードの数字の和が 3 の倍数でない確率 p_2 は, (2)より，

$$p_2=1-\frac{3\,{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$$

これより，$p_1-p_2=-\dfrac{{}_{2n}\mathrm{C}_3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}+\dfrac{3\,{}_n\mathrm{C}_3+n^3}{{}_{3n}\mathrm{C}_3}$ となり，

$$\begin{aligned}(p_1-p_2)\,{}_{3n}\mathrm{C}_3&=-\frac{2n}{6}(2n-1)(2n-2)+\frac{3}{6}n(n-1)(n-2)+n^3\\&=\frac{n}{6}(n^2+3n+2)>0\end{aligned}$$

よって，$p_1>p_2$ から，積が 3 の倍数である確率の方が大きい。

コメント

確率の基本問題です。なお, (2)の分類方法は必須事項です。

問　題

男性M_1, …, M_4の 4 人と女性F_1, …, F_4の 4 人が, 横一列に並んだ座席S_1, …, S_8に座る場合を考える。

(1) 同性どうしが隣り合わない座り方は何通りあるか。

(2) (1)の座り方の中で, M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は何通りあるか。

(3) (1)の座り方の中で, M_1とF_1が隣り合わない座り方は何通りあるか。 [2010]

解答例

(1) 男性がS_1, S_3, S_5, S_7に座る場合, S_2, S_4, S_6, S_8に座る場合があるので, 同性どうしが隣り合わない座り方は,

$\boxed{S_1}\ \boxed{S_2}\ \boxed{S_3}\ \boxed{S_4}\ \boxed{S_5}\ \boxed{S_6}\ \boxed{S_7}\ \boxed{S_8}$

$$2\times 4!\times 4! = 1152\ （通り）$$

(2) まず, M_1の座席はS_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7のいずれかであり, またF_1とF_2については$F_1\,M_1\,F_2$の場合と$F_2\,M_1\,F_1$の 2 つの場合がある。さらに, 残りの男性 3 人, 女性 2 人の座り方を合わせて考えると, M_1の両隣りがF_1とF_2になる座り方は,

$$6\times 2\times 3!\times 2! = 144\ （通り）$$

(3) まず, M_1とF_1が隣り合う座り方を考える。

(i) M_1がS_1またはS_8に座るとき

F_1の座席は 1 通りに決まるので, 残り男性 3 人, 女性 3 人の座り方を考えて,

$$2\times 1\times 3!\times 3! = 72\ （通り）$$

(ii) M_1がS_2, S_3, S_4, S_5, S_6, S_7のいずれかに座るとき

F_1の座席は 2 通りずつ決まるので, 残り男性 3 人, 女性 3 人の座り方を考えて,

$$6\times 2\times 3!\times 3! = 432\ （通り）$$

(i)(ii)より, M_1とF_1が隣り合う座り方は, $72+432=504$通りとなる。

よって, M_1とF_1が隣り合わない座り方は, (1)の結論を用いると,

$$1152-504=648\ （通り）$$

コメント

順列の基本問題です。(3)では, 図を描いて, 直接的に数えても大差はありません。

問　題

1 から 6 までの目があるさいころがある。さいころを振って出た目が k のとき，単位円周上の点 P が原点を中心として正の向きに角 $\dfrac{\pi}{k}$ だけ回転する。点 P の最初の位置を P_0 として，次の問いに答えよ。

(1)　さいころを何回か振って，点 P の回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ となるための目の出方を列挙せよ。

(2)　さいころを n 回振って移動した後の位置を P_n とする。$P_4 = P_0$ となる目の出方は何通りあるか。

(3) さいころを 2 回振ったところ，1 回目は 4 の目，2 回目は 3 の目が出た。そのとき，三角形 $P_1P_2P_3$ の面積を最大にするような，3 回目のさいころの目は何か。理由を付けて答えよ。　[2009]

解答例

(1)　回転した角の合計が $\dfrac{\pi}{2}$ になる目の出方は，右表より，

出た目	1	2	3	4	5	6
回転角	π	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{5}$	$\frac{\pi}{6}$

(i)　1 回振ったとき　2

(ii)　2 回振ったとき　3→6, 4→4, 6→3

(iii) 3 回振ったとき　6→6→6

(2)　$P_4 = P_0$ となるのは，4 回振って，回転した角の合計が 2π または 4π の場合である。

(i)　回転した角の合計が 2π になるとき

出た目を a, b, c, d として，$(a,\ b,\ c,\ d)$ の組は，$a \leqq b \leqq c \leqq d$ では，

$(1,\ 2,\ 4,\ 4)$，$(1,\ 2,\ 3,\ 6)$，$(1,\ 3,\ 3,\ 3)$，$(2,\ 2,\ 2,\ 2)$

すると，目の出方は，$\dfrac{4!}{2!} + 4! + \dfrac{4!}{3!} + 1 = 41$ 通りとなる。

(ii)　回転した角の合計が 4π になるとき

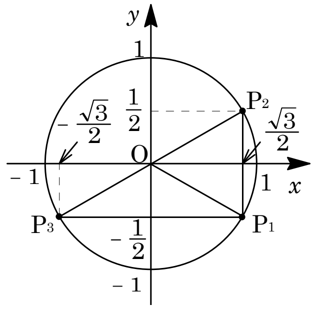
出た目が $(1,\ 1,\ 1,\ 1)$ の場合のみで，1 通りである。

(i)(ii)より，$P_4 = P_0$ となる目の出方は，$41 + 1 = 42$ 通り。

(3)　条件より，原点 O に対し，$\angle P_1OP_2 = \dfrac{\pi}{3}$ なので，

$P_1\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$，$P_2\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$としても一般性は失わない。

そこで，O を中心とし，OP_2 を角 $\dfrac{\pi}{k}$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ 6)$ だけ回転して OP_3 を決める。



このとき，$\triangle P_1P_2P_3$ の面積が最大になるのは，$P_3\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ のとき，すなわち出た目 k が 1 のときである。

コメント

場合の数を漏れなく数え上げる問題です。特に, (2)の(ii)が要注意です。

問　題

n を 3 以上の整数とする。A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 から n までの整数を 1 つ選ぶ。どの数を選ぶ確率も等しく $\dfrac{1}{n}$ とする。A, B, C が選んだ数を順に a, b, c とするとき，次の問いに答えよ。

(1) 3 人のうち，少なくとも 1 人が n を選ぶ確率を求めよ。

(2) a と b が等しくなる確率を求めよ。

(3) 2 人が同じ数，他の 1 人が異なる数を選ぶ確率を求めよ。

(4) $a<b<c$ となる確率を求めよ。 [2008]

解答例

(1) 3 人とも n を選ばない確率は $\left(\dfrac{n-1}{n}\right)^3$ より，少なくとも 1 人が n を選ぶ確率は，

$$1-\left(\frac{n-1}{n}\right)^3=\frac{3n^2-3n+1}{n^3}$$

(2) $a=b$ となる確率は, c が任意なので，$\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\times n\times 1=\dfrac{1}{n}$

(3) $a=b\neq c$ となる確率は，$\left(\dfrac{1}{n}\right)^2\times n\times\dfrac{n-1}{n}=\dfrac{n-1}{n^2}$ である。

また，$a=c\neq b$，$b=c\neq a$ の場合の確率も，同じく $\dfrac{n-1}{n^2}$ となる。

よって, 2 人が同じ数，他の 1 人が異なる数を選ぶ確率は，$\dfrac{3(n-1)}{n^2}$ である。

(4) $a<b<c$ となる場合は ${}_n\mathrm{C}_3$ 通りあるので，その確率は，

$$\frac{{}_n\mathrm{C}_3}{n^3}=\frac{n(n-1)(n-2)}{6n^3}=\frac{(n-1)(n-2)}{6n^2}$$

コメント

不気味なほど基本的な設問 4 題で，構成されています。

問　題

A, B, C の 3 人のうち 2 人が, 1 から 13 までの数字が書かれた 13 枚のカードの束から順に 1 枚ずつカードを引き, 大きい数のカードを引いた者を勝者とするルールで代わる代わる対戦する。

ただし, 最初に A と B が対戦し, その後は, 直前の対戦の勝者と休んでいた者が対戦を行う。また, カードを引く順番は最初は A から, その後は直前の対戦の勝者からとする。なお, 対戦に先立って毎回カードの束をシャッフルし, 引いたカードは対戦後, 直ちに元の束に戻すものとする。このとき, 次の問いに答えよ。

(1)　最初の対戦で A が勝つ確率を求めよ。

(2)　4 回目の対戦に A が出場する確率を求めよ。

(3)　5 回の対戦を行うとき, A が 3 人のなかで一番先に連勝を達成する確率を求めよ。

[2007]

解答例

(1)　A と B が対戦して, A が k のカードで勝つのは, B が $k-1$ 以下のカードのときであり, その確率 p_k は,

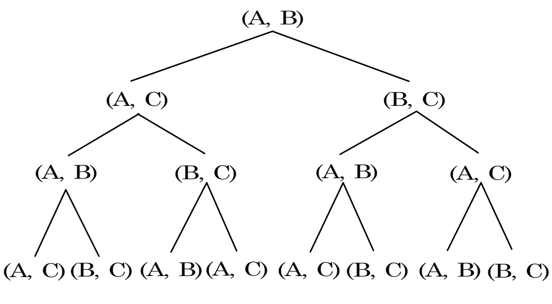
$$p_k = \frac{k-1}{13\cdot 12}\quad (2 \leqq k \leqq 13)$$

よって, A が勝つ確率は,

$$\sum_{k=2}^{13} p_k = \sum_{k=2}^{13}\frac{k-1}{13\cdot 12} = \sum_{k=1}^{12}\frac{k}{13\cdot 12} = \frac{1}{13\cdot 12}\cdot\frac{1}{2}\cdot 12\cdot 13 = \frac{1}{2}$$

(2)　(1)より, 対戦の結果, 一方が勝者となる確率は $\frac{1}{2}$ ずつである。

さて, 4 回目までの対戦をまとめると, 右図のようになる。



4 回目の対戦に A が出場するのは, (A, C)が 3 通り, (A, B)が 2 通りの合わせて 5 通りあるので, この確率は,

$$5\times\left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$$

(3)　5 回の対戦を行うとき, A が一番先に連勝するのは,

(i)　勝者が A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$

(ii)　勝者が A→C→B→A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^5 = \frac{1}{32}$

(iii)　勝者が B→C→A→A のとき　この場合の確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^4 = \frac{1}{16}$

(i)(ii)(iii)より, A が一番先に連勝する確率は,

$$\frac{1}{4}+\frac{1}{32}+\frac{1}{16}=\frac{11}{32}$$

コメント

巴戦を題材にした有名問題です。(1)は丁寧に記述しましたが, 引き分けはないので, A が勝つ確率は明らかに$\frac{1}{2}$です。

問　題

実数 x, y, z について, $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ を示し, 等号がいつ成り立つか答えよ。これを用いて, 命題

「$x^2+y^2+z^2 \leqq a$ ならば $x+y+z \leqq a$ である」

が真となる最小の正の実数 a を求めよ。 [2005]

解答例

まず, $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$ の証明をする。

右辺と左辺の差をとり,

$$3(x^2+y^2+z^2)-(x+y+z)^2 = 2x^2+2y^2+2z^2-2xy-2yz-2zx$$
$$= (x-y)^2+(y-z)^2+(z-x)^2 \geqq 0$$

よって, $(x+y+z)^2 \leqq 3(x^2+y^2+z^2)$………$(*)$

等号は, $x-y=y-z=z-x=0$, すなわち $x=y=z$ のときに成立する。

さて, $x^2+y^2+z^2 \leqq a$ が成立するとき, $(*)$より,

$$(x+y+z)^2 \leqq 3a\,,\ -\sqrt{3a} \leqq x+y+z \leqq \sqrt{3a}$$

なお, 等号の成立するのは, $x=y=z=\pm\dfrac{\sqrt{3a}}{3}$ のときである。

このとき, $x+y+z \leqq a$ が成立する条件は,

$$\sqrt{3a} \leqq a\,,\ 3a \leqq a^2\,,\ 3 \leqq a$$

よって, 求める最小の正の実数 a は 3 である。

コメント

有名な不等式の証明問題とその応用題です。

問　題

α は $0<|\alpha|<1$ を満たす虚数であるとする。複素数平面上の点の列 z_1，z_2，z_3，… を，$z_1=0$，$z_2=1$ および

$$z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$
$$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n})\quad (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。ただし，虚数とは虚部が 0 でない複素数のことであり，また，$\overline{\alpha}$ は α に共役な複素数を表すものとする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 次の等式が成り立つことを示せ。

$$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$$

(2) 偶数番目の点の列 z_2，z_4，z_6，…および奇数番目の点の列 z_1，z_3，z_5，…は，それぞれ同一直線上にあることを示せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$ を満たす複素数 w を求めよ。　[2017]

解答例

(1) 条件より，$n\geqq 1$ のとき，$z_{2n+1}-z_{2n}=\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})$………①

$$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}(z_{2n+1}-z_{2n})\text{………②}$$

①を②に代入し，$z_{2n+2}-z_{2n+1}=\overline{\alpha}\alpha(z_{2n}-z_{2n-1})=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-1})$………③

②より，$n\geqq 2$ のとき，$z_{2n}-z_{2n-1}=\overline{\alpha}(z_{2n-1}-z_{2n-2})$ となり，①に代入すると，

$$z_{2n+1}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n-1}-z_{2n-2})\text{………④}$$

③＋④より，$z_{2n+2}-z_{2n}=|\alpha|^2(z_{2n}-z_{2n-2})\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$………⑤

(2) $z_1=0$，$z_2=1$ なので，①より $z_3=1+\alpha(1-0)=1+\alpha$ となり，さらに②から，

$$z_4=(1+\alpha)+\overline{\alpha}(1+\alpha-1)=1+\alpha+|\alpha|^2\text{………⑥}$$

ここで，$z_{2n+2}-z_{2n}=0$ とすると，$|\alpha|\neq 0$ なので⑤から $z_{2n}-z_{2n-2}=0$ となり，帰納的に $z_4-z_2=0$ となるが，これは⑥に反する。これより，偶数番目の点 z_2，z_4，z_6，…はすべて異なる。

すると，⑤より，$\dfrac{z_{2n+2}-z_{2n}}{z_{2n}-z_{2n-2}}=|\alpha|^2$ なので，$\dfrac{z_{2n+2}-z_{2n}}{z_{2n-2}-z_{2n}}=-|\alpha|^2$ から，

$$\arg\frac{z_{2n+2}-z_{2n}}{z_{2n-2}-z_{2n}}=\arg(-|\alpha|^2)=\pi$$

よって，点の列 z_2，z_4，z_6，…は同一直線上にある。

また，③より，$n\geqq 2$ のとき，$z_{2n}-z_{2n-1}=|\alpha|^2(z_{2n-2}-z_{2n-3})$………⑦

④＋⑦より，$z_{2n+1}-z_{2n-1}=|\alpha|^2(z_{2n-1}-z_{2n-3})\quad (n=2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$………⑧

同様にすると，⑧から $\arg\dfrac{z_{2n+1}-z_{2n-1}}{z_{2n-3}-z_{2n-1}}=\pi$ となり，奇数番目の点の列 z_1，z_3，z_5，…は同一直線上にある。

(3)　⑤より，$z_{2n+2}-z_{2n}=(z_4-z_2)|\alpha|^{2(n-1)}=(\alpha+|\alpha|^2)|\alpha|^{2(n-1)}$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$z_{2n}=z_2+(\alpha+|\alpha|^2)\sum_{k=1}^{n-1}|\alpha|^{2(k-1)}=1+(\alpha+|\alpha|^2)\cdot\frac{1-|\alpha|^{2(n-1)}}{1-|\alpha|^2}$$

$n\to\infty$ のとき，$0<|\alpha|<1$ より，$|\alpha|^n\to 0$ となり，

$$z_{2n}\to 1+(\alpha+|\alpha|^2)\cdot\frac{1}{1-|\alpha|^2}=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$

⑧より，$z_{2n+1}-z_{2n-1}=(z_3-z_1)|\alpha|^{2(n-1)}=(1+\alpha)|\alpha|^{2(n-1)}$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$z_{2n-1}=z_1+(1+\alpha)\sum_{k=1}^{n-1}|\alpha|^{2(k-1)}=(1+\alpha)\cdot\frac{1-|\alpha|^{2(n-1)}}{1-|\alpha|^2}$$

$n\to\infty$ のとき，$z_{2n-1}\to(1+\alpha)\cdot\dfrac{1}{1-|\alpha|^2}=\dfrac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_{2n}=\lim_{n\to\infty}z_{2n-1}=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$ となり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$ である。

一方，条件より $\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$ から，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=w$ であるので，

$$w=\frac{1+\alpha}{1-|\alpha|^2}$$

コメント

複素数平面上の点列を題材とした問題です。(1)の漸化式の変形については，結論を見ながら方向を定めましたが，手堅く行うならば，奇数番目の項を消去するという方針でも構いません。また，解答例の下から 2 行目で，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}|z_n-w|=0$ から $\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n=w$ としていますが，この部分は，もう少し丁寧に書いた方がよいかもしれません。

問　題

O を原点とする複素数平面上で，複素数 z を表す点 X は O を中心とする半径 1 の円周上を動くものとする。z の偏角を θ と表す。$w=z^2+\dfrac{1}{z}$ とおき，w を表す点を Y とする。次の問いに答えよ。ただし，θ は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(1) $w=0$ となる θ をすべて求めよ。

(2) $w\neq 0$ のとき, w の偏角 β を θ で表せ。ただし，β は $-\pi$ 以上 π 未満とする。

(3) 三角形 OXY の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ の個数を求めよ。 [2005]

解答例

(1) $w=0$ より，$z^2+\dfrac{1}{z}=0$，$z^3+1=0$ となり，

$$(z+1)(z^2-z+1)=0$$

よって，$z=-1,\ \dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ から，$\theta=\arg z=-\pi,\ \pm\dfrac{\pi}{3}$

(2) $z=\cos\theta+i\sin\theta$ とおくと，

$$w=z^2+\frac{1}{z}=\cos 2\theta+i\sin 2\theta+\cos\theta-i\sin\theta$$

$$=2\cos\frac{3\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}+2i\cos\frac{3\theta}{2}\sin\frac{\theta}{2}=2\cos\frac{3\theta}{2}\left(\cos\frac{\theta}{2}+i\sin\frac{\theta}{2}\right)$$

ここで，$-\pi\leqq\theta<\pi$ より，$-\dfrac{3}{2}\pi\leqq\dfrac{3}{2}\theta<\dfrac{3}{2}\pi$ であり，また，$w\neq 0$ から，(1)より $\theta\neq-\pi$，$\theta\neq\pm\dfrac{\pi}{3}$，すなわち $\dfrac{3}{2}\theta\neq-\dfrac{3}{2}\pi$，$\dfrac{3}{2}\theta\neq\pm\dfrac{\pi}{2}$ となる。

(i) $-\dfrac{3}{2}\pi<\dfrac{3}{2}\theta<-\dfrac{\pi}{2}\left(-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき　このとき，$2\cos\dfrac{3\theta}{2}<0$ となるので，

$$w=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left\{\cos\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

すると，$\dfrac{\pi}{2}<\pi+\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{5}{6}\pi$ から，$\beta=\arg w=\pi+\dfrac{\theta}{2}$

(ii) $-\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3}{2}\theta<\dfrac{\pi}{2}\left(-\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{3}\right)$ のとき

このとき，$2\cos\dfrac{3\theta}{2}>0$ であり，$-\dfrac{\pi}{6}<\dfrac{\theta}{2}<\dfrac{\pi}{6}$ から，$\beta=\arg w=\dfrac{\theta}{2}$

(iii) $\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{3}{2}\theta<\dfrac{3}{2}\pi\left(\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi\right)$ のとき　このとき，$2\cos\dfrac{3\theta}{2}<0$ となるので，

$$w=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left(-\cos\frac{\theta}{2}-i\sin\frac{\theta}{2}\right)=-2\cos\frac{3\theta}{2}\left\{\cos\left(-\pi+\frac{\theta}{2}\right)+i\sin\left(-\pi+\frac{\theta}{2}\right)\right\}$$

すると，$-\dfrac{5}{6}\pi<-\pi+\dfrac{\theta}{2}<-\dfrac{\pi}{2}$ から，$\beta=\arg w=-\pi+\dfrac{\theta}{2}$

(3) △OXY の面積を S とすると，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{OX}\cdot\mathrm{OY}\left|\sin(\beta-\theta)\right|=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left|2\cos\frac{3}{2}\theta\right|\left|\sin(\beta-\theta)\right|$$

(i)　$-\pi<\theta<-\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$S=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\right|\left|\sin\left(\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)\right|=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

(ii)　$-\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{3}$ のとき　$S=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\right|\left|\sin\left(-\dfrac{\theta}{2}\right)\right|=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

(iii) $\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi$ のとき　$S=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\right|\left|\sin\left(-\pi-\dfrac{\theta}{2}\right)\right|=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right|$

(i)～(iii)より，$S=\left|\cos\dfrac{3}{2}\theta\sin\dfrac{\theta}{2}\right|=\dfrac{1}{2}\left|\sin 2\theta-\sin\theta\right|$

すると，条件より，$\dfrac{1}{2}\left|\sin 2\theta-\sin\theta\right|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，

$$\sin 2\theta-\sin\theta=\pm\sqrt{3}\,,\ \ 2\sin\theta\cos\theta-\sin\theta=\pm\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$x=\cos\theta$，$y=\sin\theta$ とおくと，

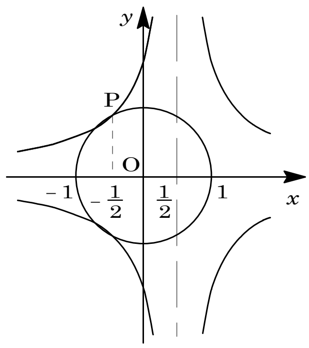
$$x^2+y^2=1\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ 2xy-y=\pm\sqrt{3}\ \cdots\cdots\cdots③$$

$-\pi\leqq\theta<\pi$ より，①の解の個数は，②かつ③の解の個数と一致する。

さて，③より，$(2x-1)y=\pm\sqrt{3}$

$x=\dfrac{1}{2}$ とすると成立しないので，$x\neq\dfrac{1}{2}$ から，

$$y=\frac{\sqrt{3}}{2x-1}\ \cdots\cdots\cdots④,\ \ y=\frac{-\sqrt{3}}{2x-1}\ \cdots\cdots\cdots⑤$$



ここで，円②と曲線⑤は，$x=-\dfrac{1}{2}$ のとき共有点をもち，この点を $\mathrm{P}\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおく。

②より，$2x+2y\dfrac{dy}{dx}=0$，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{x}{y}$ となり，点 P において $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

⑤より，$\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{2\sqrt{3}}{(2x-1)^2}$ となり，点 P において $\dfrac{dy}{dx}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ である。

すると，$\dfrac{1}{\sqrt{3}}<\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，円②と曲線⑤は 2 個の共有点をもつ。さらに，曲線④と曲線⑤は x 軸に関して対称なので，円②と曲線④も 2 個の共有点をもち，円②と曲線③は，合わせて 4 個の共有点をもつ。

よって，①の解は 4 個となり，△OXY の面積が $\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となる θ は 4 個存在する。

コメント

(2)から複雑さが増してきます。(3)の解の個数を求めるのに，関数設定をして増減を調べるというオーソドックスな方法では，多量の計算が必要となります。考え直して，図形的に解いてみました。押さえ込んだ印象のする解き方ですが。

問　題

次の条件(a), (b)をともに満たす実数の組$(p,\ q,\ r)$をすべて求めよ。

(a)　$p,\ q,\ r$の絶対値は等しい。

(b)　3 次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$は，絶対値が 1 であるような虚数解をもつ。

[2004]

解答例

実数係数の 3 次方程式$x^3+px^2+qx+r=0$は虚数解をもつので，αを実数，βを虚数として，その解をα，β，$\overline{\beta}$とおくことができる。解と係数の関係より，

$$\alpha+\beta+\overline{\beta}=-p\cdots\cdots\text{①},\quad \alpha\beta+\beta\overline{\beta}+\alpha\overline{\beta}=q\cdots\cdots\text{②},\quad \alpha\beta\overline{\beta}=-r\cdots\cdots\text{③}$$

また，$|\beta|=1$から$\beta\overline{\beta}=1$なので，②，③より，

$$\alpha(\beta+\overline{\beta})=q-1\cdots\cdots\text{②}',\quad \alpha=-r\cdots\cdots\text{③}'$$

③$'$を①，②$'$に代入して，$\beta+\overline{\beta}=r-p\cdots\cdots$④，$-r(\beta+\overline{\beta})=q-1\cdots\cdots$⑤

④⑤より，$-r(r-p)=q-1\cdots\cdots$⑥

ここで，条件から$|p|=|q|=|r|$であるので，$p=\pm r$となる。

(i)　$p=r$のとき　⑥より$q=1$

このとき，$|p|=|r|=1$から，$(p,\ r)=(1,\ 1),\ (-1,\ -1)$となる。

$(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1)$のとき

$x^3+x^2+x+1=0$，$(x+1)(x^2+1)=0$，$x=-1,\ \pm i$より適する。

$(p,\ q,\ r)=(-1,\ 1,\ -1)$のとき

$x^3-x^2+x-1=0$，$(x-1)(x^2+1)=0$，$x=1,\ \pm i$より適する。

(ii)　$p=-r$のとき　⑥より$-2r^2=q-1$

(ii-i)　$q=r$のとき　$-2r^2=r-1$，$2r^2+r-1=0$，$r=\frac{1}{2},\ -1$

$(p,\ q,\ r)=\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$のとき

$x^3-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}=0$，$\left(x+\frac{1}{2}\right)(x^2-x+1)=0$，$x=-\frac{1}{2},\ \frac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$より適する。

$(p,\ q,\ r)=(1,\ -1,\ -1)$のとき

$x^3+x^2-x-1=0$，$(x+1)^2(x-1)=0$，$x=\pm1$より適さない。

(ii-ii)　$q=-r$のとき　$-2r^2=-r-1$，$2r^2-r-1=0$，$r=-\frac{1}{2},\ 1$

$(p,\ q,\ r)=\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$のとき

$x^3+\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}x-\frac{1}{2}=0$，$\left(x-\frac{1}{2}\right)(x^2+x+1)=0$，$x=\frac{1}{2},\ \frac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$より適する。

$(p,\ q,\ r)=(-1,\ -1,\ 1)$のとき

$x^3-x^2-x+1=0$，$(x-1)^2(x+1)=0$，$x=\pm1$より適さない。

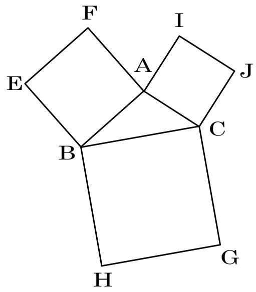
(i)(ii)より，$(p,\ q,\ r)=(1,\ 1,\ 1)$，$(-1,\ 1,\ -1)$，$\left(-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$，$\left(\frac{1}{2},\ \frac{1}{2},\ -\frac{1}{2}\right)$

コメント

必要条件から$(p,\ q,\ r)$の候補を絞り込み，その後，十分性を確認しました。

問　題

複素数平面上において，右の図のように三角形 ABC の各辺の外側に正方形 ABEF，BCGH，CAIJ を作る。

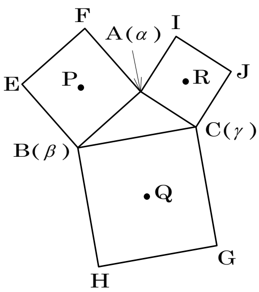


(1)　点 A, B, C がそれぞれ複素数 α，β，γ で表されているとき，点 F, H, J を α，β，γ の式で表せ。

(2)　3 つの正方形 ABEF，BCGH，CAIJ の中心をそれぞれ P，Q，R とする。このとき線分 AQ と線分 PR の長さは等しく，AQ ⊥ PR であることを証明せよ。　　[2003]

解答例

(1)　点 F，H，J を表す複素数をそれぞれ z_1，z_2，z_3 とおく。



条件より，A を中心として B を $-90°$ 回転すると F に一致するので，

$$z_1-\alpha=-i(\beta-\alpha),\ z_1=(1+i)\alpha-i\beta$$

同様に，B を中心とし C を $-90°$ 回転すると H に一致し，C を中心とし A を $-90°$ 回転すると J に一致するので，

$$z_2-\beta=-i(\gamma-\beta),\ z_2=(1+i)\beta-i\gamma$$

$$z_3-\gamma=-i(\alpha-\gamma),\ z_3=(1+i)\gamma-i\alpha$$

(2)　点 P, Q, R を表す複素数をそれぞれ w_1，w_2，w_3 とおく。

まず，2 点 B, F の中点が P より，$w_1=\dfrac{\beta+z_1}{2}=\dfrac{(1+i)\alpha+(1-i)\beta}{2}$

2 点 C, H の中点が Q より，$w_2=\dfrac{\gamma+z_2}{2}=\dfrac{(1+i)\beta+(1-i)\gamma}{2}$

2 点 A, J の中点が R より，$w_3=\dfrac{\alpha+z_3}{2}=\dfrac{(1+i)\gamma+(1-i)\alpha}{2}$

ここで，$w_2-\alpha=\dfrac{-2\alpha+(1+i)\beta+(1-i)\gamma}{2}$

$$w_3-w_1=\frac{-2i\alpha-(1-i)\beta+(1+i)\gamma}{2}=\frac{-2i\alpha+i(1+i)\beta+i(1-i)\gamma}{2}$$

すると，$w_3-w_1=i(w_2-\alpha)$ となるので，$\dfrac{w_3-w_1}{w_2-\alpha}=i$ から，

$$\frac{|w_3-w_1|}{|w_2-\alpha|}=1,\ \arg\frac{w_3-w_1}{w_2-\alpha}=90°$$

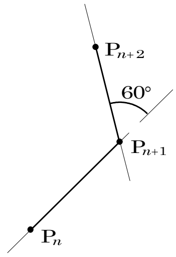
したがって，AQ = PR，AQ ⊥ PR である。

コメント

複素数の特徴を活かすことのできる証明問題です。有名な問題なので，参考書などには類題が載っています。

問　題

複素数平面上で次のように点の列 P_n ($n=0$, 1, 2, $\cdots$) をつくる。点 P_0，P_1 はそれぞれ 0，1 を表し，線分 $P_{n+1}P_{n+2}$ の長さは線分 P_nP_{n+1} の長さの r 倍 $(r>0)$ で直線 P_nP_{n+1} から直線 $P_{n+1}P_{n+2}$ へ図のようにはかった角は60°である。このとき，次の問いに答えよ。



(1) P_3 を求めよ。

(2) P_{6n} を表す複素数 $a+bi$ の実部 a と虚部 b を求めよ。　　　[2002]

解答例

(1) $P_n(z_n)$ とし，$\alpha = r(\cos 60° + i\sin 60°)$ とおくと，条件より，

$$z_{n+2} - z_{n+1} = \alpha(z_{n+1} - z_n) \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$w_n = z_{n+1} - z_n$ とおくと，①より，$w_{n+1} = \alpha w_n$

$$w_n = w_0\alpha^n = (z_1 - z_0)\alpha^n = \alpha^n$$

よって，$z_{n+1} - z_n = \alpha^n \cdots\cdots\cdots ②$

すると，$z_3 - z_2 = \alpha^2$，$z_2 - z_1 = \alpha$，$z_1 - z_0 = 1$ より，

$$z_3 = z_0 + (\alpha^2 + \alpha + 1) = r^2(\cos 120° + i\sin 120°) + r(\cos 60° + i\sin 60°) + 1$$

$$= -\frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}r^2 i + \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}ri + 1 = 1 + \frac{1}{2}r - \frac{1}{2}r^2 + \frac{\sqrt{3}}{2}(r + r^2)i$$

(2) ②より，$z_n = z_0 + \sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k = \dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ $(n \geqq 1)$ となるので，

$$z_{6n} = \frac{1-\alpha^{6n}}{1-\alpha} = \frac{1 - r^{6n}\{\cos(60° \times 6n) + i\sin(60° \times 6n)\}}{1 - r(\cos 60° + i\sin 60°)}$$

$$= \frac{1 - r^{6n}}{1 - \frac{1}{2}r - \frac{\sqrt{3}}{2}ri} = \frac{(1 - r^{6n})\left(1 - \frac{1}{2}r + \frac{\sqrt{3}}{2}ri\right)}{\left(1 - \frac{1}{2}r\right)^2 + \frac{3}{4}r^2} = \frac{(1 - r^{6n})(2 - r + \sqrt{3}ri)}{2(1 - r + r^2)}$$

$z_n = a + bi$ より，$a = \dfrac{(2-r)(1-r^{6n})}{2(1-r+r^2)}$，$b = \dfrac{\sqrt{3}r(1-r^{6n})}{2(1-r+r^2)}$

コメント

複素数平面上での点の回転を題材にした超頻出問題です。

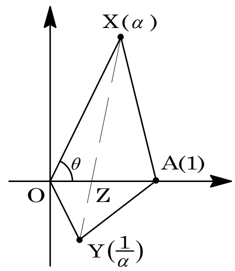
問　題

α を 0 でない複素数とし，その偏角 θ は $0^\circ < \theta < 90^\circ$ を満たすものとする。原点を O とする複素数平面において α，$\dfrac{1}{\alpha}$ の表す点をそれぞれ X, Y とする。

(1) 実数 1 の表す点を A とする。4 点 O，X，A，Y の順に結んでできる四角形において，$\angle$A を $\angle$O で表せ。

(2) 実数 t の表す点を T とする。α によらず点 T がつねに三角形 OXY の外部にあるとき，実数 t はどのような範囲にあるか。　[2001]

解答例



(1) $\arg\alpha = \theta$ より，$\arg\dfrac{1}{\alpha} = \arg 1 - \arg\alpha = -\theta$

よって，$\angle\mathrm{YOX} = \theta - (-\theta) = 2\theta$

$$\angle\mathrm{XAY} = \arg\frac{\frac{1}{\alpha} - 1}{\alpha - 1} = \arg\frac{1-\alpha}{\alpha(\alpha - 1)} = \arg\left(-\frac{1}{\alpha}\right)$$
$$= \arg(-1) - \arg\alpha = \pi - \theta$$

以上より，$\angle\mathrm{XAY} = \pi - \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{YOX}$，$\angle\mathrm{A} = \pi - \dfrac{1}{2}\angle\mathrm{O}$

(2) $t < 0$ のとき $T(t)$ は明らかに△OXY の外部にあるので，以下，$t \geqq 0$ の場合を考える。

まず，線分 XY と実軸との交点を $Z(z)$ とすると，(1)より，実軸は $\angle$XOY の二等分線なので，

$$\mathrm{XZ} : \mathrm{ZY} = \mathrm{OX} : \mathrm{OY} = |\alpha| : \left|\frac{1}{\alpha}\right| = |\alpha|^2 : 1$$

よって，$z = \dfrac{\alpha + |\alpha|^2 \cdot \frac{1}{\alpha}}{|\alpha|^2 + 1} = \dfrac{\alpha + \alpha\overline{\alpha} \cdot \frac{1}{\alpha}}{|\alpha|^2 + 1} = \dfrac{\alpha + \overline{\alpha}}{|\alpha|^2 + 1}$

ここで，$\alpha = r(\cos\theta + i\sin\theta)$ とおくと，$z = \dfrac{2r\cos\theta}{r^2 + 1}$ となる。

さて $0^\circ < \theta < 90^\circ$ より，$0 < z < \dfrac{2r}{r^2 + 1} = \dfrac{2}{r + \frac{1}{r}}$ であり，さらに $r > 0$ から $r + \dfrac{1}{r} \geqq 2$（等号は $r = 1$ のとき）なので，$0 < z < 1$ である。

以上より，$T(t)$ が△OXY の外部にある条件は，$t < 0$ または $t \geqq 1$ である。

コメント

(2)の問題文「α によらず」という部分は，内容が曖昧です。ここでは，複素数平面の第 1 象限において，任意の位置に α があると解釈しました。

問　題

原点を O とする複素数平面上で，0 でない複素数 z, w の表す点をそれぞれ $\mathrm{P}(z)$, $\mathrm{Q}(w)$ とする。z に対して w を，O を始点とする半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に $\mathrm{Q}(w)$ があり，$|w| = \dfrac{2}{|z|}$ を満たすようにとる。このとき，次の問いに答えよ。

(1) $w = \dfrac{2}{\bar{z}}$ を示せ。

(2) ± 2，$\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形の周上を点 $\mathrm{P}(z)$ が動く。このとき，$\mathrm{Q}(w) = \mathrm{P}(z)$ となる z を求めよ。

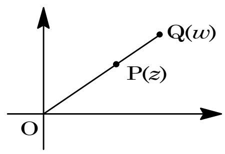
(3) $\mathrm{P}(z)$ が(2)の正方形の周上を動くとき，点 $\mathrm{Q}(w)$ の描く図形を求めて図示せよ。

[2000]

解答例

(1) 半直線 $\mathrm{OP}(z)$ 上に点 $\mathrm{Q}(w)$ があるので, $k>0$ として $w = kz$ より，$|w| = k|z|$

条件より，$|w| = \dfrac{2}{|z|}$ なので，$k|z| = \dfrac{2}{|z|}$，$k = \dfrac{2}{|z|^2}$

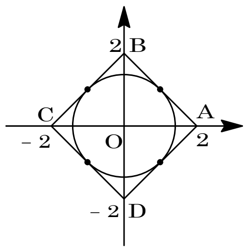


よって，$w = \dfrac{2}{|z|^2} z = \dfrac{2}{z\bar{z}} z = \dfrac{2}{\bar{z}}$

(2) $w = z$ とすると, (1)より，$z = \dfrac{2}{|z|^2} z$

$z \neq 0$ より，$|z|^2 = 2$，$|z| = \sqrt{2}$

よって，点 $\mathrm{P}(z)$ は原点を中心とする半径 $\sqrt{2}$ の円周上にあり，± 2, $\pm 2i$ の表す 4 点を頂点とする正方形との共有点を求めると,



$z = 1 \pm i$, $-1 \pm i$

(3) まず, 点 $\mathrm{P}(z)$ が線分 AB 上を動くとき,

$|z| = |z - (2+2i)|$ ………①, $|z| \leqq 2$ ………②

(1)より，$w = \dfrac{2}{\bar{z}}$ なので，$\bar{z} = \dfrac{2}{w}$ ………③

①より，$|\bar{z}| = |\overline{z - (2+2i)}|$，$|\bar{z}| = |\bar{z} - (2-2i)|$

③を代入して，$\left|\dfrac{2}{w}\right| = \left|\dfrac{2}{w} - (2-2i)\right|$，$\dfrac{2}{|w|} = \dfrac{2|1-(1-i)w|}{|w|}$

$\left|(1-i)\left(w - \dfrac{1}{1-i}\right)\right| = 1$，$\sqrt{2}\left|w - \dfrac{1+i}{2}\right| = 1$，$\left|w - \dfrac{1+i}{2}\right| = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$ ………④

②より$|\bar{z}|\leqq 2$となり，③を代入して，$\left|\dfrac{2}{w}\right|\leqq 2$，$\dfrac{2}{|w|}\leqq 2$，$|w|\geqq 1$ ………⑤

したがって，点$\mathrm{P}(z)$が線分 AB 上を動くとき，点$\mathrm{Q}(w)$は④と⑤を満たす曲線，すなわち点$\dfrac{1+i}{2}$を中心とし，半径$\dfrac{1}{\sqrt{2}}$の円周上で，原点中心の単位円の外部または周上の部分を動く。

さて，点z_1が線分 AB 上を動くとき，z_1を原点のまわりに$\dfrac{1}{2}\pi$だけ回転した点をz_2，z_1を原点のまわりにπだけ回転した点をz_3，z_1を原点のまわりに$\dfrac{3}{2}\pi$だけ回転した点をz_4とすると，

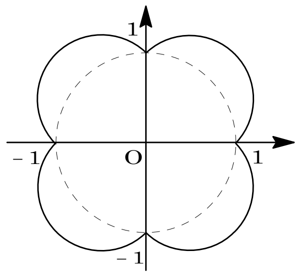
$$z_2=iz_1,\ z_3=-z_1,\ z_4=-iz_1$$

このとき点z_2は線分 BC 上，点z_3は線分 CD 上，点z_4は DA 上をそれぞれ動く。

ここで，$w_1=\dfrac{2}{\overline{z_1}}$とおくと，点$w_1$は④と⑤を満たす曲線上を動く。

すると，$w_2=\dfrac{2}{\overline{z_2}}=\dfrac{2}{-i\overline{z_1}}=i\dfrac{2}{\overline{z_1}}=iw_1$，$w_3=\dfrac{2}{\overline{z_3}}=\dfrac{2}{-\overline{z_1}}=-w_1$

$$w_4=\frac{2}{\overline{z_4}}=\frac{2}{i\overline{z_1}}=-i\frac{2}{\overline{z_1}}=-iw_1$$



以上より，点w_2，w_3，w_4は，動点w_1を原点のまわりに$\dfrac{1}{2}\pi$，π，$\dfrac{3}{2}\pi$だけ回転した点となり，点$\mathrm{Q}(w)$の軌跡は，まとめると右図の実線のようになる。

コメント

複素数平面上における軌跡の問題で，昨年，名市大・医に類題が出ています。そのとき考えたのと同じ方針で，上の解を作りました。

問　題

複素平面上で$z_0=2(\cos\theta+i\sin\theta)$ $\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$, $z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0$, $z_2=-\dfrac{1}{z_0}$を表す点をそれぞれP_0, P_1, P_2とする。

(1)　z_1を極形式で表せ。

(2)　z_2を極形式で表せ。

(3)　原点O, P_0, P_1, P_2の4点が同一円周上にあるときのz_0の値を求めよ。 [1998]

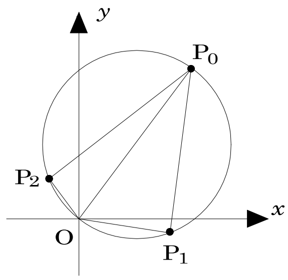
解答例

(1)　$z_1=\dfrac{1-\sqrt{3}i}{4}z_0=\dfrac{1}{2}\left\{\cos\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(-\dfrac{\pi}{3}\right)\right\}\cdot 2(\cos\theta+i\sin\theta)$

$$=\cos\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)+i\sin\left(\theta-\frac{\pi}{3}\right)$$

(2)　$z_2=-\dfrac{1}{z_0}=\dfrac{\cos\pi+i\sin\pi}{2(\cos\theta+i\sin\theta)}=\dfrac{1}{2}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\}$

(3)　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$より, $\theta-\dfrac{\pi}{3}<\theta<\pi-\theta$



$\angle\mathrm{P_0OP_1}=\theta-\left(\theta-\dfrac{\pi}{3}\right)=\dfrac{\pi}{3}$で,

$\mathrm{OP_0}=2$, $\mathrm{OP_1}=1$から, $\angle\mathrm{OP_1P_0}=\dfrac{\pi}{2}$

よって, $\mathrm{OP_0}$は円の直径となり, $\angle\mathrm{OP_2P_0}=\dfrac{\pi}{2}$

ここで, $\angle\mathrm{P_0OP_2}=(\pi-\theta)-\theta=\pi-2\theta$で,

$\mathrm{OP_0}=2$, $\mathrm{OP_2}=\dfrac{1}{2}$から,

$$\cos(\pi-2\theta)=\frac{\mathrm{OP_2}}{\mathrm{OP_0}}=\frac{1}{4}$$

よって, $\cos 2\theta=-\dfrac{1}{4}$, $2\cos^2\theta-1=-\dfrac{1}{4}$, $\cos\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

$$\sin\theta=\sqrt{1-\frac{3}{8}}=\frac{\sqrt{10}}{4}$$

以上より, $z_0=2\left(\dfrac{\sqrt{6}}{4}+\dfrac{\sqrt{10}}{4}i\right)=\dfrac{\sqrt{6}}{2}+\dfrac{\sqrt{10}}{2}i$

コメント

(3)では, 最初は一般的に4点が同一円周上にある条件から求めようと思ったのですが, たいへんな計算が待ち構えていました。そこで, これは何か特別な事情があると推測したところ, やはりその通りでした。この発見がポイントです。

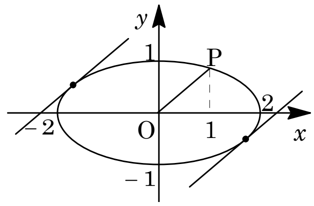
問　題

O を原点とする座標平面における曲線 $C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上に，点 $\mathrm{P}\left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ をとる。

(1)　C の接線で直線 OP に平行なものをすべて求めよ。

(2)　点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積の最大値と，最大値を与える Q の座標をすべて求めよ。　[2012]

解答例



(1)　$C : \dfrac{x^2}{4} + y^2 = 1$ 上の接点を，$(2\cos\theta,\ \sin\theta)$ とおくと，

接線の方程式は，$\dfrac{2x\cos\theta}{4} + y\sin\theta = 1$ から，

$$x\cos\theta + 2y\sin\theta = 2 \cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$の法線ベクトルは $\vec{n} = (\cos\theta,\ 2\sin\theta)$ となり，条件より $\vec{n}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \left(1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ は垂直なので，$\vec{n}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}} = 0$ から，

$$\cos\theta + \sqrt{3}\sin\theta = 0,\ 2\sin\left(\theta + \frac{\pi}{6}\right) = 0$$

$0 \leqq \theta < 2\pi$ とすると，$\theta + \dfrac{\pi}{6} = \pi,\ 2\pi$ となり，$\theta = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$

よって，OP に平行な接線の方程式は，$(*)$から，

$$x\cos\frac{5}{6}\pi + 2y\sin\frac{5}{6}\pi = 2,\ x\cos\frac{11}{6}\pi + 2y\sin\frac{11}{6}\pi = 2$$

したがって，$-\sqrt{3}x + 2y = 4$，$\sqrt{3}x - 2y = 4$ である。

(2)　$\theta = \dfrac{5}{6}\pi,\ \dfrac{11}{6}\pi$ のとき接点は，それぞれ $\mathrm{Q}_1\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$\mathrm{Q}_2\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

ここで，点 Q が C 上を動くとき，△OPQ の面積が最大値をとるのは，Q における接線と OP が平行である点 Q_1 または Q_2 においてである。

$$\triangle\mathrm{OPQ}_1 = \frac{1}{2}\left|1\cdot\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\sqrt{3}\right| = 1,\ \triangle\mathrm{OPQ}_2 = \frac{1}{2}\left|\sqrt{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\cdot 1\right| = 1$$

以上より，△OPQ の面積の最大値は 1 となり，このとき点 Q の座標は，$\mathrm{Q}\left(-\sqrt{3},\ \dfrac{1}{2}\right)$ または $\mathrm{Q}\left(\sqrt{3},\ -\dfrac{1}{2}\right)$ である。

コメント

上の解答例以外に，y 軸方向に 2 倍拡大して，楕円 C を円 $x^2 + y^2 = 4$ に対応させる解法もあります。この方法では，計算は暗算程度になります。

問　題

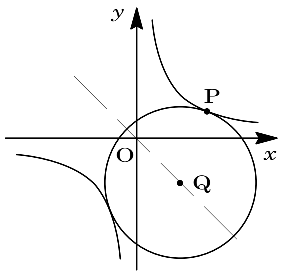
座標平面において，曲線 C 上の点 P における接線に垂直で P を通る直線を，P における C の法線とよぶ。双曲線 $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ について，次の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における C_1 の法線の方程式を求めよ。ただし，$p \neq 0$ とする。

(2) 点 $\mathrm{Q}(q,\ -q)$ を中心とする円 C_2 と C_1 が，ちょうど 2 個の共有点をもつとき，円 C_2 の半径 r を q の式で表せ。　[2006]

解答例

(1) $C_1 : y = \dfrac{1}{x}$ に対して，$y' = -\dfrac{1}{x^2}$



$\mathrm{P}\left(p,\ \dfrac{1}{p}\right)$ における法線は，その傾きが p^2 より，

$$y - \frac{1}{p} = p^2(x - p)$$

よって，$y = p^2 x - p^3 + \dfrac{1}{p}$ ………①

(2) 双曲線 C_1 と，中心が $\mathrm{Q}(q,\ -q)$，半径が r の円 C_2 は，直線 $y = -x$ に関して対称なので，C_1 と C_2 が 2 個の共有点をもつのは，C_1 と C_2 が接するときである。

すなわち，接点 P における C_1 の法線が点 Q を通る場合となり，①より，

$$-q = p^2 q - p^3 + \frac{1}{p},\quad p(p^2+1)q - (p^2+1)(p^2-1) = 0$$

$p^2 + 1 > 0$ から，$pq - p^2 + 1 = 0$，$p - \dfrac{1}{p} = q$ ………②

さて，$r^2 = \mathrm{PQ}^2 = (p-q)^2 + \left(\dfrac{1}{p} + q\right)^2 = 2q^2 - 2pq + \dfrac{2q}{p} + p^2 + \dfrac{1}{p^2}$

$$= 2q^2 - 2q\left(p - \frac{1}{p}\right) + \left(p - \frac{1}{p}\right)^2 + 2$$

②より，$r^2 = 2q^2 - 2q^2 + q^2 + 2 = q^2 + 2$

$r > 0$ から，$r = \sqrt{q^2 + 2}$

コメント

②式を導くのがポイントになっています。

問　題

n を自然数とする。曲線 $y=x^2(1-x)^n$ $(0\leqq x\leqq 1)$ と x 軸とで囲まれる図形の面積を S_n とする。

(1)　S_n を求めよ。

(2)　$T_n=S_1+S_2+\cdots+S_n$ とするとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n$ を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$y=x^2(1-x)^n\geqq 0$ より，この曲線と x 軸とで囲まれる図形の面積 S_n は，$1-x=t$ とおいて，

$$S_n=\int_0^1 x^2(1-x)^n\,dx=\int_1^0(1-t)^2t^n(-dt)=\int_0^1(1-2t+t^2)t^n\,dt$$
$$=\int_0^1(t^n-2t^{n+1}+t^{n+2})\,dt=\Big[\frac{t^{n+1}}{n+1}-\frac{2t^{n+2}}{n+2}+\frac{t^{n+3}}{n+3}\Big]_0^1$$
$$=\frac{1}{n+1}-\frac{2}{n+2}+\frac{1}{n+3}$$

(2)　(1)から，$S_n=\Big(\dfrac{1}{n+1}-\dfrac{1}{n+2}\Big)-\Big(\dfrac{1}{n+2}-\dfrac{1}{n+3}\Big)$となり，

$$T_n=\sum_{k=1}^{n}S_k=\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k+1}-\frac{1}{k+2}\Big)-\sum_{k=1}^{n}\Big(\frac{1}{k+2}-\frac{1}{k+3}\Big)$$
$$=\Big(\frac{1}{2}-\frac{1}{n+2}\Big)-\Big(\frac{1}{3}-\frac{1}{n+3}\Big)=\frac{1}{6}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}$$

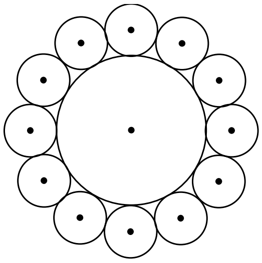
よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}T_n=\lim_{n\to\infty}\Big(\frac{1}{6}-\frac{1}{n+2}+\frac{1}{n+3}\Big)=\frac{1}{6}$

コメント

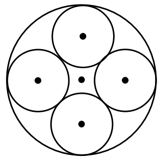
積分と極限の融合の形式ですが，内容や計算は平易です。

問　題

平面上に半径 1 の円 C がある。この円に外接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 1）のように配置し，その一つの円の半径を R_n とする。また，円 C に内接し，さらに隣り合う 2 つが互いに外接するように，同じ大きさの n 個の円を図（例 2）のように配置し，その一つの円の半径を r_n とする。ただし，$n \geqq 3$ とする。このとき，次の問いに答えよ。



例1　$n = 12$ の場合

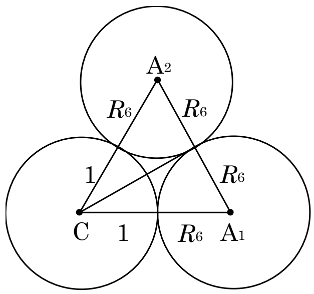


例2　$n = 4$ の場合

(1)　R_6，r_6 を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n^2(R_n - r_n)$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{\theta\to 0}\frac{\sin\theta}{\theta} = 1$ を用いてよい。　[2010]

解答例



(1)　右図において，$\angle A_1CA_2 = \dfrac{\pi}{3}$ であり，

$$CA_1 = CA_2 = 1 + R_6,\ A_1A_2 = 2R_6$$

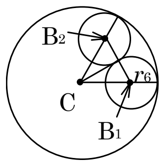
よって，$R_6 = (1 + R_6)\sin\dfrac{\pi}{6}$ となり，

$$2R_6 = 1 + R_6,\ R_6 = 1$$

また，$\angle B_1CB_2 = \dfrac{\pi}{3}$ であり，

$$CB_1 = CB_2 = 1 - r_6,\ B_1B_2 = 2r_6$$

よって，$r_6 = (1 - r_6)\sin\dfrac{\pi}{6}$ となり，$2r_6 = 1 - r_6$，$r_6 = \dfrac{1}{3}$



(2)　(1)と同様に考えると，

$$R_n = (1 + R_n)\sin\frac{\pi}{n},\ R_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}}$$

$$r_n = (1 - r_n)\sin\frac{\pi}{n},\ r_n = \frac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}}$$

よって，$R_n - r_n = \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin\frac{\pi}{n}} - \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}}{1 + \sin\frac{\pi}{n}} = \dfrac{\sin\frac{\pi}{n}\cdot 2\sin\frac{\pi}{n}}{1 - \sin^2\frac{\pi}{n}} = \dfrac{2\sin^2\frac{\pi}{n}}{\cos^2\frac{\pi}{n}}$

ここで，$\theta=\dfrac{\pi}{n}$ とおくと，$n\to\infty$ のとき $\theta\to 0$ となるので，

$$\lim_{n\to\infty} n^2(R_n-r_n)=\lim_{\theta\to 0}\frac{\pi^2}{\theta^2}\cdot\frac{2\sin^2\theta}{\cos^2\theta}=\lim_{\theta\to 0}\frac{2\pi^2}{\cos^2\theta}\left(\frac{\sin\theta}{\theta}\right)^2=2\pi^2$$

コメント

よく見かける 2 円の内接・外接を題材にした問題です。

問　題

xを実数とし，次の無限級数を考える。

$$x^2+\frac{x^2}{1+x^2-x^4}+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^2}+\cdots+\frac{x^2}{(1+x^2-x^4)^{n-1}}+\cdots$$

(1)　この無限級数が収束するようなxの範囲を求めよ。

(2)　この無限級数が収束するとき，その和として得られる x の関数を$f(x)$とかく。また，$h(x)=f(\sqrt{|x|})-|x|$とおく。このとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)$を求めよ。

(3)　(2)で求めた極限値をαとするとき，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$は存在するか。理由を付けて答えよ。　[2009]

解答例

(1)　初項x^2，公比$\dfrac{1}{1+x^2-x^4}$である無限等比級数が収束する条件は,

(i)　初項が 0 のとき

$x^2=0$から，$x=0$

(ii)　公比の絶対値が 1 より小のとき

$\left|\dfrac{1}{1+x^2-x^4}\right|<1$から，$1<|1+x^2-x^4|$となり，$(1+x^2-x^4)^2>1$

$$\{(1+x^2-x^4)-1\}\{(1+x^2-x^4)+1\}>0,\ (x^4-x^2)(x^4-x^2-2)>0$$

$$x^2(x+1)(x-1)(x+\sqrt{2})(x-\sqrt{2})(x^2+1)>0$$

よって，$x<-\sqrt{2}$，$-1<x<0$，$0<x<1$，$\sqrt{2}<x$

(i)(ii)より，$x<-\sqrt{2}$，$-1<x<1$，$\sqrt{2}<x$

(2)　与えられた無限等比級数が収束するとき，その和$f(x)$は，$x\neq 0$では,

$$f(x)=\frac{x^2}{1-\dfrac{1}{1+x^2-x^4}}=\frac{x^2(1+x^2-x^4)}{x^2-x^4}=\frac{x^4-x^2-1}{x^2-1}$$

ここで，$h(x)=f(\sqrt{|x|})-|x|$より,

$$h(x)=\frac{x^2-|x|-1}{|x|-1}-|x|=\frac{(x^2-|x|-1)-(x^2-|x|)}{|x|-1}=-\frac{1}{|x|-1}$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}h(x)=1$である。

(3)　$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{1}{x}\left(-\frac{1}{|x|-1}-1\right)=\lim_{x\to 0}\frac{-|x|}{x(|x|-1)}$より,

$$\lim_{x\to +0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to +0}\frac{-x}{x(x-1)}=\lim_{x\to +0}\frac{-1}{x-1}=1$$

$$\lim_{x\to -0}\frac{h(x)-\alpha}{x}=\lim_{x\to -0}\frac{x}{x(-x-1)}=\lim_{x\to -0}\frac{1}{-x-1}=-1$$

よって，$\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{h(x)-\alpha}{x}$ は存在しない。

コメント

無限等比級数の収束条件についての基本問題です。

問　題

次の各問いに答えよ。

(1)　p, q を 0 でない定数とする。

$$a_1=1,\ a_{n+1}=pa_n+\frac{q-p}{2}q^{n-1}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$$

で定められる数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　$b_n=(-1)^{n-1}\log\dfrac{n+2}{n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ で定められる数列 $\{b_n\}$ に対して，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ とする。このとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n$ を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　漸化式 $a_{n+1}=pa_n+\dfrac{q-p}{2}q^{n-1}$ を変形すると，

$$a_{n+1}-\frac{1}{2}q^n=p\left(a_n-\frac{1}{2}q^{n-1}\right)$$

よって，$a_n-\dfrac{1}{2}q^{n-1}=\left(a_1-\dfrac{1}{2}q^0\right)p^{n-1}=\dfrac{1}{2}p^{n-1}$ となり，

$$a_n=\frac{1}{2}p^{n-1}+\frac{1}{2}q^{n-1}$$

(2)　$b_n=(-1)^{n-1}\log\dfrac{n+2}{n}=(-1)^{n-1}\{\log(n+2)-\log n\}$ に対し，n を偶奇に分けて，$S_n=b_1+b_2+\cdots+b_n$ を求める。m を自然数とするとき，

(i)　$n=2m$ のとき

$$\begin{aligned}S_{2m}&=(b_1+b_3+\cdots+b_{2m-1})+(b_2+b_4+\cdots+b_{2m})\\&=-\log 1+\log(2m+1)-\{-\log 2+\log(2m+2)\}\\&=\log 2+\log\frac{2m+1}{2m+2}=\log 2+\log\left(1-\frac{1}{2m+2}\right)\end{aligned}$$

これより，$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より，$S_{2m}\to\log 2$

(ii)　$n=2m-1$ のとき

$$S_{2m-1}=S_{2m}-b_{2m}=S_{2m}+\log\frac{2m+2}{2m}=S_{2m}+\log\left(1+\frac{1}{m}\right)$$

これより，$n\to\infty$ のとき $m\to\infty$ より，$S_{2m-1}\to\log 2$

(i)(ii)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}S_n=\log 2$

コメント

(1)については，推測→帰納法という方法もあります。なお，上記の解法は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

$a,\ b$ を正の実数とし, 2 つの数列$\{a_n\}$, $\{b_n\}$を

$$a_1=a,\ \ b_1=b$$

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n+{a_n}^2}{{a_n}^2+5a_nb_n},\ \ b_{n+1}=\frac{3a_nb_n}{{a_n}^2+5a_nb_n}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定める。次の問いに答えよ。

(1)　$c_n=\dfrac{a_n}{b_n}\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおく。数列$\{c_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_n$, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n$ を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$a_1=a>0,\ b_1=b>0$ であり, 条件から,

$$a_{n+1}=\frac{2a_nb_n+{a_n}^2}{{a_n}^2+5a_nb_n}\cdots\cdots\cdots①,\ \ b_{n+1}=\frac{3a_nb_n}{{a_n}^2+5a_nb_n}\cdots\cdots\cdots②$$

よって, ①②より, 帰納的に$a_n>0$, $b_n>0$である。

すると, ①②から,

$$a_{n+1}=\frac{2b_n+a_n}{a_n+5b_n}\cdots\cdots\cdots①',\ \ b_{n+1}=\frac{3b_n}{a_n+5b_n}\cdots\cdots\cdots②'$$

これより, $c_{n+1}=\dfrac{a_{n+1}}{b_{n+1}}=\dfrac{2b_n+a_n}{a_n+5b_n}\cdot\dfrac{a_n+5b_n}{3b_n}=\dfrac{2b_n+a_n}{3b_n}=\dfrac{2}{3}+\dfrac{1}{3}c_n$

$$c_{n+1}-1=\frac{1}{3}(c_n-1)$$

よって, $c_n-1=(c_1-1)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$ から, $c_n=1+\left(\dfrac{a}{b}-1\right)\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}$

(2)　(1)より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}c_n=1$ となり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n}=1$

①′から, $a_{n+1}=\dfrac{2+\dfrac{a_n}{b_n}}{\dfrac{a_n}{b_n}+5}=\dfrac{2+c_n}{c_n+5}$ となり, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}a_{n+1}=\frac{2+1}{1+5}=\frac{1}{2}$ から,

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\frac{1}{2}$$

また, $b_n=\dfrac{a_n}{c_n}$ より, $\displaystyle\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{c_n}=\frac{1}{2}$

コメント

漸化式①と②は, 分母と分子をa_nで割った①′と②′と同じ式です。この点に, 数列$\{c_n\}$の漸化式をつくる段階まで気がつきませんでした。

問　題

座標平面内の 2 つの曲線 $C_1 : y = \log(2x)$，$C_2 : y = 2\log x$ の共通接線を l とする。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 直線 l の方程式を求めよ。

(2) C_1，C_2 および l で囲まれる領域の面積を求めよ。 [2017]

解答例

(1) $C_1 : y = \log(2x)$ に対して $y' = \dfrac{1}{x}$，$C_2 : y = 2\log x$ に対して $y' = \dfrac{2}{x}$ となる。

さて，C_1 上の点 $(s,\ \log(2s))$ のおける接線の方程式は,

$$y - \log(2s) = \frac{1}{s}(x - s),\quad y = \frac{1}{s}x - 1 + \log(2s) \cdots\cdots\cdots①$$

また，C_2 上の点 $(t\ \ 2\log t)$ のおける接線の方程式は,

$$y - 2\log t = \frac{2}{t}(x - t),\quad y = \frac{2}{t}x - 2 + 2\log t \cdots\cdots\cdots②$$

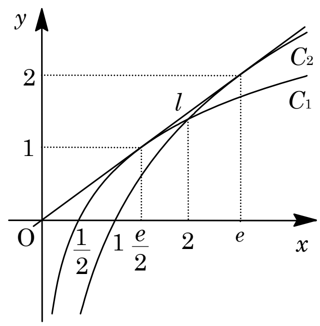
共通接線が存在するので，①と②が一致し,

$$\frac{1}{s} = \frac{2}{t} \cdots\cdots\cdots③,\quad -1 + \log(2s) = -2 + 2\log t \cdots\cdots\cdots④$$

③より $t = 2s$ となり，④に代入すると，$-1 + \log t = -2 + 2\log t$ より，$\log t = 1$

よって，$t = e$，$s = \dfrac{e}{2}$ となるので，共通接線 l の方程式は，②から $y = \dfrac{2}{e}x - 2 + 2\log e$ となり,

$$l : y = \frac{2}{e}x$$



(2) C_1 と C_2 の共有点は，$\log(2x) = 2\log x$ より $2x = x^2$ となり，$x > 0$ から $x = 2$ である。

すると，C_1，C_2，l の位置関係は右図のようになり，C_1，C_2，l で囲まれる領域の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}(1+2)\Big(e - \frac{e}{2}\Big) - \int_{\frac{e}{2}}^{2} \log(2x)\,dx - \int_{2}^{e} 2\log x\,dx$$

$$= \frac{3}{4}e - \int_{\frac{e}{2}}^{2} \log(2x)\,dx - \int_{2}^{e} 2\log x\,dx$$

ここで，$2x = u$ とおくと，$2dx = du$ となり,

$$\int_{\frac{e}{2}}^{2} \log(2x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{e}^{4} \log u\,du = \frac{1}{2}\big[\,u\log u - u\,\big]_{e}^{4} = \frac{1}{2}(4\log 4 - e - 4 + e)$$

$$= 4\log 2 - 2$$

$$\int_{2}^{e} 2\log x\,dx = 2\big[\,x\log x - x\,\big]_{2}^{e} = 2(e - 2\log 2 - e + 2) = -4\log 2 + 4$$

よって，$S=\frac{3}{4}e-(4\log 2-2)-(-4\log 2+4)=\frac{3}{4}e-2$ となる。

コメント

標準的な微積分の総合問題です。(2)の面積計算は，台形の面積から，C_1，C_2 と x 軸で挟まれた部分の面積を引いています。

問　題

関数 $f(x)=8x^3-6x-1$ について，以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=0$ を満たす実数 x の個数を求めよ。

(2)　$a=\cos\dfrac{5\pi}{9}$ とするとき，$f(a)$ の値を求めよ。

(3)　不等式 $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ を証明せよ。　[2016]

解答例

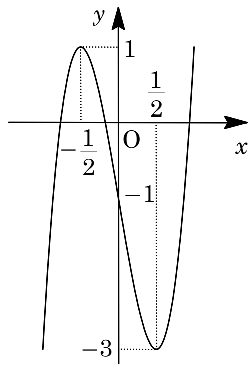
(1)　$f(x)=8x^3-6x-1$ に対し，

$$f'(x)=24x^2-6=6(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$	1	$\searrow$	-3	$\nearrow$

これより，$f(x)$ の増減は右表のようになり，$y=f(x)$ のグラフは x 軸と 3 つの共有点をもつ。

したがって，$f(x)=0$ を満たす実数 x は 3 個存在する。



(2)　$\theta=\dfrac{5}{9}\pi$ とおき，$a=\cos\theta$ のとき，

$$f(a)=8a^3-6a-1=2(4\cos^3\theta-3\cos\theta)-1$$
$$=2\cos3\theta-1=2\cos\frac{5\pi}{3}-1=2\cdot\frac{1}{2}-1=0$$

(3)　$\dfrac{\pi}{2}<\dfrac{5\pi}{9}<\dfrac{2\pi}{3}$ より，$\cos\dfrac{\pi}{2}>\cos\dfrac{5\pi}{9}>\cos\dfrac{2\pi}{3}$ となり，

$$-\frac{1}{2}<a<0$$

すると，(2)より，a は $f(x)=0$ の 3 つの解のうち，まん中のものであり，

$$f\Big(-\frac{1}{5}\Big)=-\frac{8}{125}+\frac{6}{5}-1=\frac{17}{125}>0,\ f\Big(-\frac{1}{6}\Big)=-\frac{1}{27}+1-1=-\frac{1}{27}<0$$

よって，$-\dfrac{1}{5}<a<-\dfrac{1}{6}$，すなわち $-\dfrac{1}{5}<\cos\dfrac{5\pi}{9}<-\dfrac{1}{6}$ である。

コメント

微分法の不等式への応用問題です。ここでは，余弦の 3 倍角の公式がポイントになっています。

問　題

xy 平面において，点 $(1,\ 2)$ を通る傾き t の直線を l とする。また，l に垂直で原点を通る直線と l との交点を P とする。このとき，以下の問いに答えよ。

(1)　点 P の座標を t を用いて表せ。

(2)　点 P の軌跡が 2 次曲線 $2x^2-ay=0$ と 3 点のみを共有するような a の値を求めよ。また，そのとき 3 つの共有点の座標を求めよ。ただし $a\neq 0$ とする。　[2013]

解答例

(1)　点 $(1,\ 2)$ を通る傾き t の直線 l は，$y-2=t(x-1)$，$y=tx-t+2$ ………①

また，原点を通り，l に垂直な直線は，$x+ty=0$ ………②

①②を連立して，$x+t(tx-t+2)=0$，$(t^2+1)x=t^2-2t$

$$x=\frac{t^2-2t}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots③,\quad y=\frac{t^3-2t^2}{t^2+1}-t+2=\frac{-t+2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots④$$

よって，①②の交点 P の座標は，$\mathrm{P}\Big(\dfrac{t^2-2t}{t^2+1},\ \dfrac{-t+2}{t^2+1}\Big)$ となる。

(2)　③④で表される点 P の軌跡と 2 次曲線 $2x^2-ay=0$ ……⑤を連立して，

$$2\Big(\frac{t^2-2t}{t^2+1}\Big)^2-a\cdot\frac{-t+2}{t^2+1}=0,\quad 2t^2(t-2)^2+a(t-2)(t^2+1)=0$$

$$(t-2)\{2t^3-4t^2+a(t^2+1)\}=0\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

ここで，点 P の軌跡と曲線⑤が 3 点のみを共有する条件は，⑥が異なる実数解を 3 つだけもつことに対応する。ここで，$2t^3-4t^2+a(t^2+1)=0$ ……⑦が解 $t=2$ をもつときは $a=0$ となり不適となり，⑦が $t\neq 2$ である実数解を 2 つだけもつ条件を求めると，

$$a=-\frac{2t^3-4t^2}{t^2+1}\ \cdots\cdots\cdots⑧$$

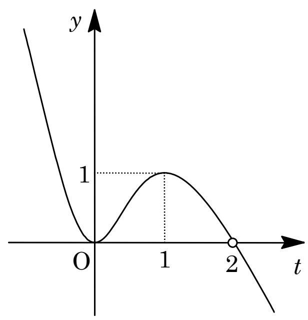
t	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(t)$	↘	0	↗	1	↘

さて，$f(t)=-\dfrac{2t^3-4t^2}{t^2+1}$ とおくと，

$$f'(t)=-\frac{(6t^2-8t)(t^2+1)-(2t^3-4t^2)\cdot 2t}{(t^2+1)^2}$$

$$=-\frac{2t^4+6t^2-8t}{(t^2+1)^2}=-\frac{2t(t-1)(t^2+t+4)}{(t^2+1)^2}$$

$\displaystyle\lim_{t\to\infty}f(t)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{t\to-\infty}f(t)=\infty$ より，$y=f(t)$ のグラフは右図のようになり，⑧が $t\neq 2$ である 2 実数解をもつ条件は，$a=1$ である。



このとき，⑦は，$2t^3-3t^2+1=0$，$(t-1)^2(2t+1)=0$ となるので，⑥の実数解は，$t=2,\ 1,\ -\dfrac{1}{2}$ となる。

すると，③④より，3 つの共有点の座標は，$t=2$ のとき $(x,\ y)=(0,\ 0)$，$t=1$ のとき $(x,\ y)=\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$，$t=-\dfrac{1}{2}$ のとき $(x,\ y)=(1,\ 2)$ である。

コメント

微分の応用問題です。なお，点 P の軌跡は，原点と点(1，2)を直径の両端とする円(ただし点(1，0)を除く)となり，t の値と点 P の位置は 1 対 1 に対応します。

問　題

$f(x)=e^{-x^2}$ とする。曲線 $y=f(x)$ 上の点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線を l, 原点 O を通り l に垂直な直線を l' とし, l と l' との交点を P とする。

(1) 線分 OP の長さを求めよ。

(2) l と y 軸との交点を Q とし, $\angle\mathrm{POQ}$ を θ $(0\leqq\theta\leqq\pi)$ とする。$\sin\theta$ を a を用いて表せ。

(3) (2)で求めた $\sin\theta$ を最大にする a の値と, そのときの $\sin\theta$ の値を求めよ。

[2011]

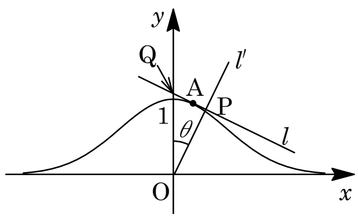
解答例

(1) $f(x)=e^{-x^2}$ より, $f'(x)=-2xe^{-x^2}$

さて, 点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ における接線 l は,

$$y-e^{-a^2}=-2ae^{-a^2}(x-a)$$

$$2ae^{-a^2}x+y-(2a^2+1)e^{-a^2}=0$$



線分 OP の長さは, 原点 O と直線 l の距離より,

$$\mathrm{OP}=\frac{(2a^2+1)e^{-a^2}}{\sqrt{4a^2e^{-2a^2}+1}}=\frac{2a^2+1}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(2) 直線 l の法線ベクトルの成分が, $(2ae^{-a^2},\ 1)=e^{-a^2}(2a,\ e^{a^2})$ より, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{u}=(2a,\ e^{a^2})$ とし, また $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ と同じ向きのベクトルを $\vec{v}=(0,\ 1)$ とすると, $\vec{u}$ と $\vec{v}$ のなす角 θ は,

$$\cos\theta=\frac{\vec{u}\cdot\vec{v}}{|\vec{u}||\vec{v}|}=\frac{e^{a^2}}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

よって, $\sin^2\theta=1-\dfrac{e^{2a^2}}{4a^2+e^{2a^2}}=\dfrac{4a^2}{4a^2+e^{2a^2}}$ となり, $0\leqq\theta\leqq\pi$ から,

$$\sin\theta=\frac{2|a|}{\sqrt{4a^2+e^{2a^2}}}$$

(3) $t=2a^2\geqq0$ とおき, $g(t)=\dfrac{2t}{2t+e^t}$ とすると, (2)より, $\sin\theta=\sqrt{g(t)}$ となる。

$$g'(t)=\frac{2(2t+e^t)-2t(2+e^t)}{(2t+e^t)^2}$$

$$=\frac{2(1-t)e^t}{(2t+e^t)^2}$$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$g'(t)$		$+$	0	$-$
$g(t)$		$\nearrow$	$\dfrac{2}{2+e}$	$\searrow$

右表より, $g(t)$ は, $t=1$ のとき最大値 $\dfrac{2}{2+e}$ をとる。

よって，$\sin\theta$ が最大となるのは，$2a^2=1$ から $a=\pm\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ のときであり，$\sin\theta$ の最大値は $\sqrt{\dfrac{2}{2+e}}$ である。

コメント

計算がやや難の部分もありますが，微分についての標準的な問題です。

問　題

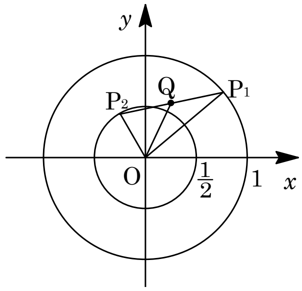
原点を中心とする半径 1 の円をC_1とし，原点を中心とする半径$\frac{1}{2}$の円をC_2とする。C_1上に点$P_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$があり，また$C_2$上に点$P_2\left(\frac{1}{2}\cos 3\theta,\ \frac{1}{2}\sin 3\theta\right)$がある。ただし，$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$であるとする。線分$P_1P_2$の中点を Q とし，点 Q の原点からの距離を$r(\theta)$とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 点 Q の x 座標のとりうる範囲を求めよ。

(2) 点 Q が y 軸上にあるときのθの値をαとする。このとき，αおよび定積分$\int_0^{\alpha}\{r(\theta)\}^2 d\theta$を求めよ。　[2010]

解答例

(1) 2 点$P_1(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$P_2\left(\frac{1}{2}\cos 3\theta,\ \frac{1}{2}\sin 3\theta\right)$に対して，



線分P_1P_2の中点を$Q(x,\ y)$とおくと，

$$x = \frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta \cdots\cdots\cdots ①$$

$$y = \frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta \cdots\cdots\cdots ②$$

すると, 3 倍角の公式を用いて，①より，

$$x = \frac{1}{2}\cos\theta + \cos^3\theta - \frac{3}{4}\cos\theta = \cos^3\theta - \frac{1}{4}\cos\theta$$

ここで，$t = \cos\theta$とおくと，$0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}$から$0 < t \leqq 1$であり，$x = t^3 - \frac{1}{4}t \cdots\cdots\cdots ③$

$$\frac{dx}{dt} = 3t^2 - \frac{1}{4} = 3\left(t + \frac{\sqrt{3}}{6}\right)\left(t - \frac{\sqrt{3}}{6}\right)$$

すると，x の値の増減は右表のようになり，点 Q の x 座標のとりうる範囲は,

$$-\frac{\sqrt{3}}{36} \leqq x \leqq \frac{3}{4}$$

t	0	$\cdots$	$\frac{\sqrt{3}}{6}$	$\cdots$	1
$\frac{dx}{dt}$		$-$	0	$+$	
x	0	↘	$-\frac{\sqrt{3}}{36}$	↗	$\frac{3}{4}$

(2) $0 < t \leqq 1$において，$x = 0$となるのは，③より$t = \frac{1}{2}$のときであり，

$$\cos\theta = \frac{1}{2},\quad \theta = \frac{\pi}{3}\ \left(0 \leqq \theta < \frac{\pi}{2}\right)$$

すると，$\alpha = \frac{\pi}{3}$となり，$r(\theta) = \mathrm{OQ}$なので，①②から，

$$\{r(\theta)\}^2 = \left(\frac{1}{2}\cos\theta + \frac{1}{4}\cos 3\theta\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{4}\sin 3\theta\right)^2$$

$$= \frac{1}{4} + \frac{1}{16} + \frac{1}{4}(\cos\theta\cos 3\theta + \sin\theta\sin 3\theta) = \frac{5}{16} + \frac{1}{4}\cos 2\theta$$

よって，$\displaystyle\int_0^{\alpha}\{r(\theta)\}^2d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\Big(\frac{5}{16}+\frac{1}{4}\cos 2\theta\Big)d\theta=\frac{5}{16}\cdot\frac{\pi}{3}+\frac{1}{8}\Big[\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}$

$$=\frac{5}{48}\pi+\frac{1}{8}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{5}{48}\pi+\frac{\sqrt{3}}{16}$$

コメント

微積分の融合問題です。計算量は少なめです。

問　題

座標平面上に，$f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ で与えられる曲線 $C: y=f(x)$ と，直線 $l: y=ax$ （a は実数）を考える。このとき，次の問いに答えよ。

(1) C と l がちょうど 2 個の共有点をもつための a の条件を求めよ。もし必要であれば，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ を使ってもよい。

(2) C と l が第 1 象限で接するとき，C と l，および x 軸で囲まれた領域の面積を求めよ。 [2009]

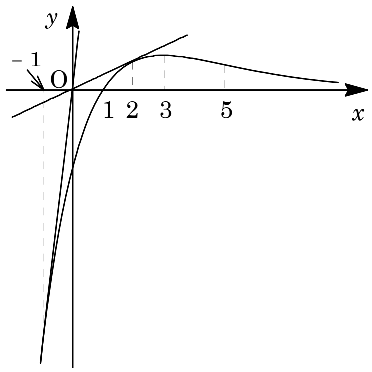
解答例

(1) $f(x)=2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}$ に対して，

$$f'(x)=2e^{1-\frac{1}{2}x}+2(x-1)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x}$$
$$=(3-x)e^{1-\frac{1}{2}x}$$
$$f''(x)=-e^{1-\frac{1}{2}x}+(3-x)\left(-\frac{1}{2}\right)e^{1-\frac{1}{2}x}$$
$$=\frac{1}{2}(x-5)e^{1-\frac{1}{2}x}$$

x	$\cdots$	3	$\cdots$	5	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$
$f(x)$	↗		↘		↘

また，$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)=0$ より，グラフの概形は右図のようになる。



さて，点$(t,\ f(t))$における接線の方程式は，

$$y-2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t}=(3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}(x-t)$$

原点を通る条件は，

$$-2(t-1)e^{1-\frac{1}{2}t}=(3-t)e^{1-\frac{1}{2}t}(-t)$$
$$2(t-1)=t(3-t),\ t^2-t-2=0,\ (t+1)(t-2)=0$$

よって，接点の x 座標は $t=-1,\ 2$ となり，接線の傾きは，それぞれ

$$f'(-1)=4e^{\frac{3}{2}},\ f'(2)=1$$

以上より，$C: y=f(x)$ と $l: y=ax$ が 2 個の共有点をもつ a の条件は，図から，

$$0<a<1,\ 4e^{\frac{3}{2}}<a$$

(2) $a=1$ のとき，接点は$(2,\ 2)$より，C, l, および x 軸で囲まれた領域の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2-\int_1^2 2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}dx=2-2\left[-2(x-1)e^{1-\frac{1}{2}x}\right]_1^2-4\int_1^2 e^{1-\frac{1}{2}x}dx$$
$$=2+4-4\left[-2e^{1-\frac{1}{2}x}\right]_1^2=6+8(1-\sqrt{e})=14-8\sqrt{e}$$

コメント

(1)では，定数 a を分離して条件を求めようかと考えましたが，(2)の設問まで考え合わせると，上の方法に落ち着きました。

問　題

xy 平面の曲線 $C: x=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$，$y=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ $\left(0<t<\dfrac{\pi}{2}\right)$について，次の問いに答えよ。

(1) 曲線 C 上の $t=\theta$ に対応する点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l の方程式を求めよ。

(2) $\alpha=\sin\theta+\cos\theta$ とおく。点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積 S を α の式で表せ。

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき, (2)で求めた面積 S の値の範囲を求めよ。 [2008]

解答例

(1) まず，$x=\dfrac{\cos t}{1-\sin t}$ より，$\dfrac{dx}{dt}=\dfrac{-\sin t(1-\sin t)+\cos^2 t}{(1-\sin t)^2}=\dfrac{1-\sin t}{(1-\sin t)^2}=\dfrac{1}{1-\sin t}$

また，$y=\dfrac{\sin t}{1-\cos t}$ より，$\dfrac{dy}{dt}=\dfrac{\cos t(1-\cos t)-\sin^2 t}{(1-\cos t)^2}=\dfrac{\cos t-1}{(1-\cos t)^2}=-\dfrac{1}{1-\cos t}$

よって，$\dfrac{dy}{dx}=-\dfrac{1-\sin t}{1-\cos t}$ となる。

さて，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{\cos\theta}{1-\sin\theta},\ \dfrac{\sin\theta}{1-\cos\theta}\right)$における C の接線 l の方程式は,

$$y-\frac{\sin\theta}{1-\cos\theta}=-\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}\left(x-\frac{\cos\theta}{1-\sin\theta}\right)$$

$$y=-\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}\ \cdots\cdots\cdots①$$

(2) ①と y 軸との交点の y 座標は，$y=\dfrac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}$ となる。

また, ①と x 軸との交点の x 座標は,

$$-\frac{1-\sin\theta}{1-\cos\theta}x+\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}=0,\quad x=\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta}$$

すると, C の接線 l と x 軸, y 軸で囲まれた三角形の面積 S は,

$$S=\frac{1}{2}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\sin\theta}\cdot\frac{\sin\theta+\cos\theta}{1-\cos\theta}=\frac{(\sin\theta+\cos\theta)^2}{2(1-\sin\theta-\cos\theta+\sin\theta\cos\theta)}$$

ここで，$\alpha=\sin\theta+\cos\theta$ とおくと，$\alpha^2=1+2\sin\theta\cos\theta$ より，

$$2\sin\theta\cos\theta=\alpha^2-1$$

よって，$S=\dfrac{\alpha^2}{2-2\alpha+\alpha^2-1}=\left(\dfrac{\alpha}{\alpha-1}\right)^2\cdots\cdots\cdots②$

(3) $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ のとき，$\alpha=\sqrt{2}\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{4}\right)$より，$1<\alpha\leqq\sqrt{2}$ となる。

すると，$\dfrac{\alpha}{\alpha-1}=1+\dfrac{1}{\alpha-1}\geqq 1+\dfrac{1}{\sqrt{2}-1}=2+\sqrt{2}$ となり，②より，

$$S\geqq(2+\sqrt{2})^2=6+4\sqrt{2}$$

コメント

パラメータ曲線の接線についての基本問題です。計算量も少なめです。

問　題

$f(x)=x^3-3a^2x-b$ とする。ただし, a, b は実数の定数であり, $a \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　3 次方程式 $f(x)=0$ のすべての解が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ に含まれる実数解であるための条件を, a と b に関する不等式で表せ。

(2)　座標平面上で, (1)で求めた条件を満たす点 $(a,\ b)$ の集合が表す領域を D とする。D の概形を描き, その面積を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-3a^2x-b$ より, $f'(x)=3(x+a)(x-a)$

(i)　$a=0$ のとき

$f(x)=0$ すなわち $x^3=b$ の解がすべて実数解である条件は $b=0$ である。

このとき, 解は $x=0$ より, 区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ に含まれている。

(ii)　$a>0$ のとき

右表の $f(x)$ の増減より, $f(x)=0$ のすべての解が実数解である条件は,

x	$\cdots$	$-a$	$\cdots$	a	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

$$f(-a)=2a^3-b \geqq 0$$
$$f(a)=-2a^3-b \leqq 0$$

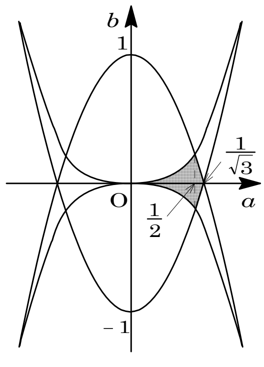
また, すべての解が区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ に含まれている条件は, $a \leqq 1$ で,

$$f(-1)=-1+3a^2-b \leqq 0,\quad f(1)=1-3a^2-b \geqq 0$$

以上まとめると, $0<a \leqq 1$, $-2a^3 \leqq b \leqq 2a^3$, $3a^2-1 \leqq b \leqq -3a^2+1$

(i)(ii)より, $a \leqq 1$, $-2a^3 \leqq b \leqq 2a^3$, $3a^2-1 \leqq b \leqq -3a^2+1$ ………(＊)

(2)　不等式(＊)を満たす領域 D を ab 平面上に図示すると, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含む。



また, 領域 D は a 軸に関して対称であり, この面積を S とすると,

$$S=2\int_0^{\frac{1}{2}}2a^3da+2\int_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}(-3a^2+1)da$$
$$=\Big[\ a^4\ \Big]_0^{\frac{1}{2}}+2\Big[\ -a^3+a\ \Big]_{\frac{1}{2}}^{\frac{1}{\sqrt{3}}}$$
$$=\frac{1}{16}+2\Big(\frac{2}{3\sqrt{3}}-\frac{3}{8}\Big)=-\frac{11}{16}+\frac{4}{9}\sqrt{3}$$

コメント

グラフを念頭に置きながら解いていく微分法の 3 次方程式への応用問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ の導関数 $f'(x)$ を求めよ。ただし，対数は自然対数とする。

(2)　実数 $a,\ b$ は $b>a>0$ を満たすとする。このとき，次の不等式を証明せよ。

$$(a+1)^b>(b+1)^a$$

[2006]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{\log(x+1)}{x}$ に対して，

$$f'(x)=\frac{\dfrac{x}{x+1}-\log(x+1)}{x^2}=\frac{x-(x+1)\log(x+1)}{x^2(x+1)}$$

(2)　$g(x)=x-(x+1)\log(x+1)$ とおくと，

$$g'(x)=1-(x+1)\frac{1}{x+1}-\log(x+1)=-\log(x+1)$$

$x>0$ において，$g'(x)<0$ となるので，

$$g(x)<g(0)=0$$

これより，$f'(x)<0$ となり, $x>0$ において，$f(x)$ は単調に減少する。

すると, $0<a<b$ に対して，$f(a)>f(b)$ となり,

$$\frac{\log(a+1)}{a}>\frac{\log(b+1)}{b},\quad \log(a+1)^b>\log(b+1)^a$$

よって，$(a+1)^b>(b+1)^a$

コメント

関数の単調性と不等式の証明をリンクさせた有名問題です。類した過去問は数え切れません。

問　題

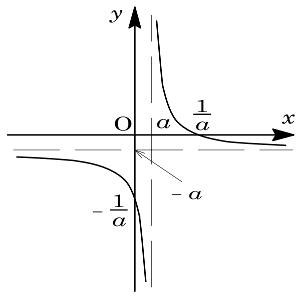
a を正の実数とする。$x\geqq 0$ のとき，$y=\dfrac{ax-1}{a-x}$ がとりうる値の範囲を求めよ。

[2005]

解答例

分数関数 $y=\dfrac{ax-1}{a-x}$ に対して，

$$y=\frac{-a(a-x)+a^2-1}{a-x}=-a+\frac{-a^2+1}{x-a}$$



(i)　$-a^2+1>0$ $(0<a<1)$ のとき

右図より, $x\geqq 0$ のとき, y のとりうる値の範囲は,

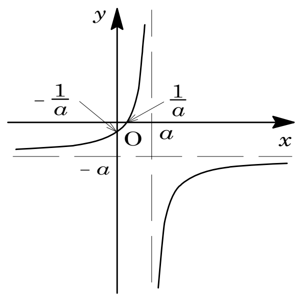
$$y\leqq -\frac{1}{a},\ -a<y$$

(ii)　$-a^2+1=0$ $(a=1)$ のとき

$$y=\frac{x-1}{1-x}=-1\ (x\neq 1)$$

よって, $x\geqq 0$ のとき，$y=-1$

(iii)　$-a^2+1<0$ $(a>1)$ のとき



右図より, $x\geqq 0$ のとき, y のとりうる値の範囲は,

$$y<-a,\ -\frac{1}{a}\leqq y$$

コメント

分数関数のとり得る値について，グラフを用いて処理しました。もちろん，微分法の利用でも構いませんが。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $e^x>1+x$ が成り立つことを示せ。

(2)　$x>0$ のとき，不等式 $\log(1+x)>1-e^{-x}$ が成り立つことを示せ。

(3)　実数 $x,\ y$ が $0\leqq x\leqq e^y-1$，$0\leqq y\leqq 1-e^{-x}$ を満たせば，$x=y=0$ でなければならないことを示せ。　[2002]

解答例

(1)　$f(x)=e^x-1-x$ とおくと，$f'(x)=e^x-1$

$x>0$ のとき，$f'(x)>0$ より，$f(x)>f(0)=0$

よって，$e^x>1+x$　$(x>0)$

(2)　$g(x)=\log(1+x)-1+e^{-x}$ とおくと，

$$g'(x)=\frac{1}{1+x}-e^{-x}=\frac{1}{1+x}-\frac{1}{e^x}=\frac{e^x-(1+x)}{(1+x)e^x}$$

$x>0$ のとき, (1)より $g'(x)>0$ なので，$g(x)>g(0)=0$

よって，$\log(1+x)>1-e^{-x}$　$(x>0)$

(3)　条件より，$0\leqq x\leqq e^y-1$ ……①，$0\leqq y\leqq 1-e^{-x}$ ……②

①から，$e^y\geqq x+1$，$y\geqq\log(x+1)$ ………③

ここで, $x>0$ のとき, (2)より $\log(1+x)>1-e^{-x}$ ………④

③④より，$y>1-e^{-x}$ となるが，このとき②は成立しない。

よって，①より $x=0$ である。

すると，②は $0\leqq y\leqq 1-e^0=0$ となり，$y=0$ となる。

以上より，①②を満たすのは，$x=y=0$ だけである。

コメント

(3)では，まず①と②の領域を図示して，その共通部分が原点のみということを示しました。しかし，これでは(2)の誘導の意味が不明ですので，考え直したのが上の解です。

問　題

x を 1 でない正の実数とし，$f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 方程式 $f(x)=2$ の解を求めよ。

(2) 不等式 $f(x)\geqq 2$ を満たす x の値の範囲を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $f(x)=(\log_2 2x)^2-5\log_2 x+3\log_x 2=(1+\log_2 x)^2-5\log_2 x+\dfrac{3}{\log_2 x}$

$$=(\log_2 x)^2-3\log_2 x+1+\frac{3}{\log_2 x}$$

ここで，$\log_2 x=t$ とおくと，方程式 $f(x)=2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}=2$

$$t^3-3t^2-t+3=0\ (t\neq 0),\ (t-1)(t-3)(t+1)=0\ (t\neq 0)$$

よって，$t=\pm 1$，3 から，$\log_2 x=\pm 1$，3 なので，

$$x=2,\ \frac{1}{2},\ 8$$

(2) (1)と同様にして，不等式 $f(x)\geqq 2$ は，$t^2-3t+1+\dfrac{3}{t}\geqq 2$

$$t(t^3-3t^2-t+3)\geqq 0\ (t\neq 0),\ t(t-1)(t-3)(t+1)\geqq 0\ (t\neq 0)$$

よって，$t\leqq -1$，$0<t\leqq 1$，$3\leqq t$ から，$\log_2 x\leqq -1$，$0<\log_2 x\leqq 1$，$3\leqq \log_2 x$

$$0<x\leqq \frac{1}{2},\ 1<x\leqq 2,\ 8\leqq x$$

コメント

(2)は分数不等式と 4 次不等式の解法を問う問題です。現行課程のカリキュラム上の弱点をついた設問となっています。

問　題

a, b を正の数とし，関数 $f(x)$ を $f(x)=ae^x+be^{-x}$ とおく。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 関数 $f(x)$ の最小値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ のグラフが，y 軸に平行なある直線に関して対称であることを証明せよ。

(3) x についての方程式 $f(x)=1$ の解のうち，$x\geqq 0$ を満たすものがただ 1 つであるような a, b の範囲を ab 平面に図示せよ。　[1999]

解答例

(1) $f(x)=ae^x+be^{-x}$，$f'(x)=ae^x-be^{-x}=e^{-x}(ae^{2x}-b)$

$f'(x)=0$ の解は，$e^{2x}=\dfrac{b}{a}$ より $x=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{b}{a}$

$\alpha=\dfrac{1}{2}\log\dfrac{b}{a}$ とおくと，$x=\alpha$ のとき $f(x)$ は極小かつ最小となるので，最小値は $e^\alpha=\sqrt{\dfrac{b}{a}}$ より，

x	$\cdots$	α	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$

$$f(\alpha)=a\sqrt{\frac{b}{a}}+b\sqrt{\frac{a}{b}}=2\sqrt{ab}$$

(2) まず，$f(2\alpha-x)=ae^{2\alpha-x}+be^{-2\alpha+x}=ae^{2\alpha}e^{-x}+be^{-2\alpha}e^x$

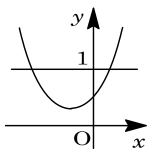
(1)より，$e^{2\alpha}=\dfrac{b}{a}$ なので，

$$f(2\alpha-x)=a\cdot\frac{b}{a}e^{-x}+b\cdot\frac{a}{b}e^x=be^{-x}+ae^x=f(x)$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフは直線 $x=\alpha$ に関して対称である。

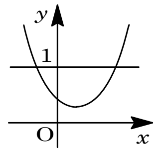
(3) 対称軸 $x=\alpha$ の位置で場合分けをする。

(i) $\alpha\leqq 0$ $\left(0<\dfrac{b}{a}\leqq 1\right)$ のとき



$f(0)=a+b$ より，$f(x)=1$ が $x\geqq 0$ にただ 1 つの解をもつ条件は，$a+b\leqq 1$ である。

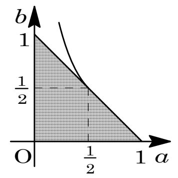
(ii) $\alpha>0$ $\left(\dfrac{b}{a}>1\right)$ のとき



$f(0)=a+b$，$f(\alpha)=2\sqrt{ab}$ より，$f(x)=1$ が $x\geqq 0$ にただ 1 つの解をもつ条件は，$a+b<1$ または $2\sqrt{ab}=1$，すなわち $a+b<1$ または $b=\dfrac{1}{4a}$ である。

(i)(ii)より，$a+b\leqq 1$ $(0<b\leqq a)$，$a+b<1$ または $b=\dfrac{1}{4a}$ $(b>a)$

　求める a, b の範囲を図示すると右図のようになる。なお, 領域の境界は $a+b=1$ $\left(\dfrac{1}{2}\leqq a<1\right)$ のみを含む。



コメント

(2)の y 軸に平行なある直線というのは $x=\alpha$ しかないのが, (1)の増減表からわかります。それを数式を用いて示せば事足ります。

問　題

曲線 C と D_a を次のように定める。

C: 放物線 $y = x^2$

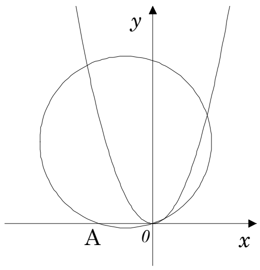
D_a : 中心が $(-1,\ a)$ で 2 点 $\mathrm{A}(-2,\ 0)$ と原点 O を通る円

(1) 不等式 $x > 0$ によって表される領域において D_a が C と共有点をもつための a の条件を求めよ。

(2) 点 P が第 1 象限の C 上を動くとする。$\angle\mathrm{APO}$ が最大となるときの点 P の座標を求めよ。また, そのときの $\sin\angle\mathrm{APO}$ の値を求めよ。 [1998]

解答例

(1) C: $y = x^2$ ………①



また, $D_a : (x+1)^2 + (y-a)^2 = 1 + a^2$ より,

$$x^2 + y^2 + 2x - 2ay = 0 \text{ ………②}$$

①を②に代入して,

$$x^4 + (1-2a)x^2 + 2x = 0$$

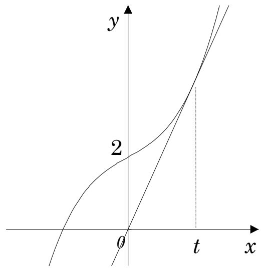
$$x = 0,\quad x^3 + (1-2a)x + 2 = 0 \text{ ………③}$$

条件より, ③が $x > 0$ で解をもつので, ③を変形して, $x^3 + x + 2 = 2ax$

$f(x) = x^3 + x + 2$ とおくと, $f'(x) = 3x^2 + 1$, $f''(x) = 6x$

$f(x)$ は単調増加で, 曲線 $y = f(x)$ は, $x < 0$ で上に凸, $x > 0$ で下に凸。

$y = f(x)$ と $y = 2ax$ が接するとき,



接点を $x = t$ とするとき,

$f(t) = 2at$ より, $t^3 + t + 2 = 2at$ ………④

$f'(t) = 2a$ より, $3t^2 + 1 = 2a$ ………⑤

⑤を④に代入して, $t^3 + t + 2 = t(3t^2 + 1)$

$$2t^3 - 2 = 0,\ t = 1$$

⑤より, $a = 2$

求める条件は, 図より $a \geqq 2$

(2) 2 定点 O, A を通る円の半径が大きくなるに従って, 弧 OA に対する鋭角の円周角は小さくなっていくことより, C と D_a が接するとき $\angle\mathrm{APO}$ は最大となる。

このとき(1)より, $a = 2$ で $t = 1$, すなわち $\mathrm{P}(1,\ 1)$ となる。

また, D_a の中心は $(-1,\ 2)$, 半径は $\sqrt{(-1)^2 + 2^2} = \sqrt{5}$ となる。

正弦定理を用いて,

$$\frac{\mathrm{OA}}{\sin\angle\mathrm{APO}} = 2\sqrt{5},\ \sin\angle\mathrm{APO} = \frac{2}{2\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

コメント

(1)の利用を考えると，(2)を図形的に考えるのは当然です。しかし，図形的な性質をどこまで定量的に記述すればよいのか迷います。上の解の(2)の冒頭の 2 行がその一例で，正弦定理を用いての記述も可能ですが，ここでは定性的な表現をしました。

問　題

a を 0 以上の実数, n を正の整数とするとき, 次の問いに答えよ。

(1) $\displaystyle\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n$ が成り立つことを示せ。

(2) $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq e^a$ が成り立つことを示せ。

(3) $e^a-\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq\dfrac{a^2e^a}{2n}$ が成り立つことを示せ。 [2008]

解答例

(1) 部分積分を用いて,

$$\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx=-\left[e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n\right]_0^a+\int_0^a e^{a-x}n\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\cdot\frac{1}{n}dx$$

$$=-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n+e^a+\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$$

$$=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx+e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n\cdots\cdots\cdots①$$

(2) $a\geqq0,\ n\geqq1$ より, $1+\dfrac{a}{n}\geqq1$ となり, $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\cdots\cdots\cdots②$

また, ①より, $\displaystyle e^a-\left(1+\frac{a}{n}\right)^n=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^n dx-\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx$

$$=\int_0^a e^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}\left(1+\frac{x}{n}-1\right)dx$$

$$=\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx\geqq0\cdots\cdots\cdots③$$

②③より, $\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^{n-1}\leqq\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq e^a\cdots\cdots\cdots④$

(3) ④より, $0\leqq x\leqq a$ において, $\left(1+\dfrac{x}{n}\right)^{n-1}\leqq e^x$ となり,

$$\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}\left(1+\frac{x}{n}\right)^{n-1}dx\leqq\frac{1}{n}\int_0^a xe^{a-x}e^x dx=\frac{e^a}{n}\int_0^a x\,dx=\frac{a^2e^a}{2n}$$

よって, ③から, $e^a-\left(1+\dfrac{a}{n}\right)^n\leqq\dfrac{a^2e^a}{2n}$

コメント

定積分と不等式の証明問題です。細かく付いた誘導に従えば, 式変形の方向を見失うことはないでしょう。

問　題

関数 $f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x>0)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq\frac{3}{4\pi}$ ならば，$f'(x)>0$ であることを示せ。

(2)　$b\geqq a>0$，$b\geqq\frac{2}{\pi}$ のとき，$\int_a^b f(x)dx\leqq(b-a)f(b)\leqq b-a$ が成り立つことを示せ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=x\sin\frac{1}{x}\ (x>0)$ に対して，

$$f'(x)=\sin\frac{1}{x}+x\cos\frac{1}{x}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)=\sin\frac{1}{x}-\frac{1}{x}\cos\frac{1}{x}$$

さて，$\frac{1}{x}=t$，$f'(x)=g(t)$ とおくと，$x\geqq\frac{3}{4\pi}$ より $0<t\leqq\frac{4}{3}\pi$ となり，

$$g(t)=\sin t-t\cos t$$

$$g'(t)=\cos t-\cos t+t\sin t=t\sin t$$

すると，$g(t)$ の増減は右表のようになり，

t	0	$\cdots$	π	$\cdots$	$\frac{4}{3}\pi$
$g'(t)$		$+$	0	$-$	
$g(t)$		$\nearrow$		$\searrow$	

$$g\left(\frac{4}{3}\pi\right)=\frac{2}{3}\pi-\frac{\sqrt{3}}{2}>2-\frac{\sqrt{3}}{2}>0$$

$$\lim_{t\to+0}g(t)=0$$

よって，$g(t)>0\ \left(0<t\leqq\frac{4}{3}\pi\right)$，すなわち $f'(x)>0\ \left(x\geqq\frac{3}{4\pi}\right)$ である。

(2)　まず, $b>a$ のとき，$b=a$ のときに場合分けをする。

(i)　$b>a>0$ のとき

$b\geqq\frac{2}{\pi}>\frac{3}{4\pi}$ より, (1)から，$x\geqq b$ で $f(x)$ は単調に増加し，しかも,

$$\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{\sin\frac{1}{x}}{\frac{1}{x}}=1$$

よって，$f(b)<1$ となり，$(b-a)f(b)<b-a$ ………①

また, $x>0$ において，$f(x)$ は連続なので，積分の平均値の定理より，

$$\int_a^b f(x)dx=(b-a)f(c)\quad(a<c<b)\ \text{………②}$$

(i-i)　$c\geqq\frac{2}{\pi}$ のとき

$\frac{2}{\pi}>\frac{3}{4\pi}$ なので，$x\geqq c$ で $f(x)$ は単調に増加し，$f(c)<f(b)$

(i-ii)　$0 < c < \dfrac{2}{\pi}$ のとき

$f\left(\dfrac{2}{\pi}\right) = \dfrac{2}{\pi}$ となり，$b \geqq \dfrac{2}{\pi} > \dfrac{3}{4\pi}$ より，

$$f(c) \leqq |f(c)| = \left|c\sin\frac{1}{c}\right| \leqq c < \frac{2}{\pi} = f\left(\frac{2}{\pi}\right) \leqq f(b)$$

(i-i)(i-ii)のいずれの場合も，$(b-a)f(c) < (b-a)f(b)$ ………③

②③より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b)$ ………④

①④をまとめると，

$$\int_a^b f(x)\,dx < (b-a)f(b) < b-a$$

(ii)　$b = a > 0$ のとき

$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx = (b-a)f(b) = b-a = 0$ より，成立している。

(i)(ii)より，$\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx \leqq (b-a)f(b) \leqq b-a$

コメント

(2)では，積分の平均値の定理が関係しているというのは，証明すべき不等式から推測できますが，それ以外にもう 1 つ，$f\left(\dfrac{\pi}{2}\right) = \dfrac{\pi}{2}$ がポイントとなっています。この設問はかなりハイレベルです。

問　題

$f(t)$ を連続関数, x を実数として, 関数 $g(x)$ を次のように定義する。

$$g(x)=\int_0^1 \left|f(t)-x\right|dt$$

(1)　$f(t)=e^t$ のとき, 関数 $g(x)$ の増減を調べ, $y=g(x)$ のグラフの概形を描け。ただし, $e=2.71828\cdots$ は自然対数の底である。

(2)　$f(t)$ は微分可能な単調増加関数で, その逆関数も微分可能とし, $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$ とおく。このとき, $g(x)$ は $x=a$ で最小値をとることを証明せよ。　[2001]

解答例

(1)　$f(t)=e^t$ のとき, $g(x)=\displaystyle\int_0^1\left|e^t-x\right|dt$ となる。

(i)　$x<1$ のとき　$g(x)=\displaystyle\int_0^1(e^t-x)dt=\left[e^t-xt\right]_0^1=-x+e-1$

このとき, 関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$1\leqq x\leqq e$ のとき

$$g(x)=\int_0^{\log x}-(e^t-x)dt+\int_{\log x}^1(e^t-x)dt=-\left[e^t-xt\right]_0^{\log x}+\left[e^t-xt\right]_{\log x}^1$$

$$=-(x-1)+x\log x+(e-x)-x(1-\log x)=2x\log x-3x+e+1$$

$g'(x)=2\log x+2x\cdot\dfrac{1}{x}-3=2\log x-1$ となり, 関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	1	$\cdots$	$\sqrt{e}$	$\cdots$	e
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$	$e-2$	↘		↗	1

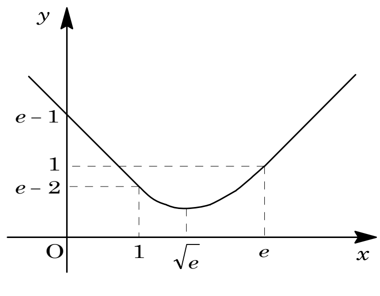
極小値は, $g(\sqrt{e})=e-2\sqrt{e}+1=(\sqrt{e}-1)^2$ である。

(iii) $x>e$ のとき

$$g(x)=\int_0^1-(e^t-x)dt=x-e+1$$

このとき, 関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より, $y=g(x)$ のグラフの概形は右図のようになる。



(2)　条件より $a=f\left(\dfrac{1}{2}\right)$, また $b=f(0)$, $c=f(1)$ とおく。すると, $f(t)$ は単調増加関数なので, $b<a<c$ となる。

さらに, $F'(t)=f(t)$ とおくと,

(i)　$x<b$ のとき　$g(x)=\displaystyle\int_0^1\{f(t)-x\}dt=\left[F(t)-xt\right]_0^1=F(1)-F(0)-x$

このとき, 関数 $g(x)$ は単調減少となる。

(ii)　$b \leqq x \leqq c$ のとき

$f(u) = x$，すなわち $u = f^{-1}(x)$ とおくと，

$$g(x) = \int_0^u -\{f(t) - x\}dt + \int_u^1 \{f(t) - x\}dt = -\Big[F(t) - xt\Big]_0^u + \Big[F(t) - xt\Big]_u^1$$

$$= -2F(u) + 2xu - x + F(0) + F(1)$$

$$g'(x) = -2F'(u)\frac{du}{dx} + 2u + 2x\frac{du}{dx} - 1 = -2f(u)\frac{du}{dx} + 2x\frac{du}{dx} + 2u - 1$$

$$= -2f(f^{-1}(x))\frac{du}{dx} + 2x\frac{du}{dx} + 2u - 1 = -2x\frac{du}{dx} + 2x\frac{du}{dx} + 2u - 1$$

$$= 2u - 1 = 2f^{-1}(x) - 1$$

条件より $a = f\left(\frac{1}{2}\right)$ なので，$f^{-1}(a) = \frac{1}{2}$ である。

さて，$f(t)$ が単調増加関数なので，$f^{-1}(x)$ も単調増加関数となり，$g'(x) = 0$ すなわち $f^{-1}(x) = \frac{1}{2}$ の解は $x = a$ となる。

さらに $g'(x)$ の符号は，$x = a$ の前後で負から正に変わる。

すると，関数 $g(x)$ の増減は右表のようになる。

x	b	$\cdots$	a	$\cdots$	c
$g'(x)$		$-$	0	$+$	
$g(x)$		↘		↗	

(iii)　$x > c$ のとき　$g(x) = \int_0^1 -\{f(t) - x\}dt = -F(1) + F(0) + x$

このとき，関数 $g(x)$ は単調増加となる。

(i)(ii)(iii)より，$g(x)$ はすべての x に対して連続なので，$x = a$ で最小値をとる。

コメント

(2)は(1)を一般化したもので，同じように論理を展開することができます。しかし，逆関数の扱い方など，かなり難易度はアップします。

問　題

関数 $f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x\ (0\leqq x\leqq \pi)$について次の問いに答えよ。

(1)　$t=\cos x$ とするとき，$f(x)$ を t の式で表せ。

(2)　$f(x)=0$ を満たす x の値を求めよ。

(3)　(2)で求めた x に対して，$f'(x)$ の値を求めよ。

(4)　定積分 $\displaystyle\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx$ の値を求めよ。 [2000]

解答例

(1)　$\cos x=t$ とすると，$\cos 3x=4t^3-3t$，$\cos 2t=2t^2-1$ なので，

$$f(x)=\cos 3x+\cos 2x+\cos x=4t^3+2t^2-2t-1$$

(2)　$f(x)=0$ より，$4t^3+2t^2-2t-1=0$，$(2t+1)(2t^2-1)=0$，$t=-\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

$\cos x=-\dfrac{1}{2}$，$\pm\dfrac{\sqrt{2}}{2}\ (0\leqq x\leqq\pi)$ より，$x=\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{3\pi}{4}$

(3)　$f'(x)=-3\sin 3x-2\sin 2x-\sin x$ より，

$$f'\left(\frac{\pi}{4}\right)=-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot 1-\frac{\sqrt{2}}{2}=-2\sqrt{2}-2$$

$$f'\left(\frac{2\pi}{3}\right)=-3\cdot 0-2\cdot\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)-\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$f'\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-3\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-2\cdot(-1)-\frac{\sqrt{2}}{2}=2-2\sqrt{2}$$

(4)　(3)より $f'\left(\dfrac{\pi}{4}\right)<0$，$f'\left(\dfrac{2\pi}{3}\right)>0$，$f'\left(\dfrac{3\pi}{4}\right)<0$ なので，$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$，$\dfrac{2\pi}{3}\leqq x\leqq\dfrac{3\pi}{4}$ のとき $f(x)\geqq 0$，$\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{2\pi}{3}$，$\dfrac{3\pi}{4}\leqq x\leqq\pi$ のとき $f(x)\leqq 0$ となる。

$F(x)$ を $f(x)$ の不定積分の 1 つとすると，$F(x)=\dfrac{1}{3}\sin 3x+\dfrac{1}{2}\sin 2x+\sin x$

$$I=\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|dx=\int_0^{\frac{\pi}{4}}f(x)dx-\int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{2\pi}{3}}f(x)dx+\int_{\frac{2\pi}{3}}^{\frac{3\pi}{4}}f(x)dx-\int_{\frac{3\pi}{4}}^{\pi}f(x)dx$$

$$=F\left(\frac{\pi}{4}\right)-F(0)-F\left(\frac{2\pi}{3}\right)+F\left(\frac{\pi}{4}\right)+F\left(\frac{3\pi}{4}\right)-F\left(\frac{2\pi}{3}\right)-F(\pi)+F\left(\frac{3\pi}{4}\right)$$

$$=-F(0)+2F\left(\frac{\pi}{4}\right)-2F\left(\frac{2\pi}{3}\right)+2F\left(\frac{3\pi}{4}\right)-F(\pi)$$

ここで，$F(0)=0$，$F\left(\frac{\pi}{4}\right)=\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}$，$F\left(\frac{2\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{4}$，$F\left(\frac{3\pi}{4}\right)=-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}$，$F(\pi)=0$ より，

$$I=2\left(\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{4}-\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{8}{3}\sqrt{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

コメント

計算力主体の問題です。特に(4)は疲れます。

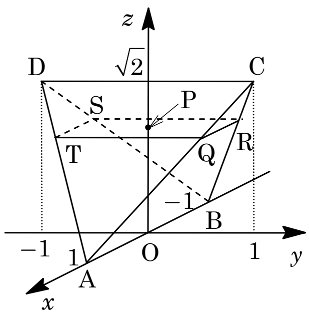
問　題

座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD を考える。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面と，辺 AC が点 Q において交わるとする。Q の座標を t で表せ。

(2) 四面体 ABCD（内部を含む）を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。 [2017]

解答例

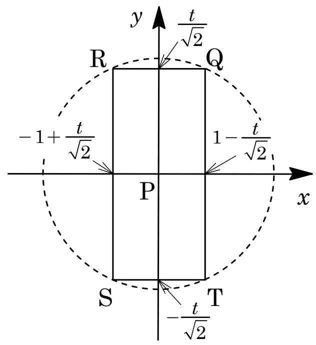


(1) 座標空間内の 4 点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{C}(0,\ 1,\ \sqrt{2})$，$\mathrm{D}(0,\ -1,\ \sqrt{2})$ を頂点とする四面体 ABCD に対して，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}=(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$ より，辺 AC は $0\leqq q\leqq 1$ として，

$$(x,\ y,\ z)=(1,\ 0,\ 0)+q(-1,\ 1,\ \sqrt{2})$$
$$=(1-q,\ q,\ \sqrt{2}q)$$

ここで，点 $\mathrm{P}(0,\ 0,\ t)$ を通り z 軸に垂直な平面 $z=t$ との交点は，$\sqrt{2}q=t$ より $q=\dfrac{t}{\sqrt{2}}$ となり，$(x,\ y,\ z)=\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ である。

よって，交点 Q の座標は $\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ \dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。



(2) 点 P を通り z 軸に垂直な平面と辺 BC, BD, AD との交点を，それぞれ R, S, T とおくと，(1)と同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(-1,\ -1,\ \sqrt{2})$ から $\mathrm{T}\left(1-\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ -\dfrac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$ となる。

また，点 R, S はそれぞれ点 Q, T を yz 平面に関して対称移動したものより，

$$\mathrm{R}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ \frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right),\ \mathrm{S}\left(-1+\frac{t}{\sqrt{2}},\ -\frac{t}{\sqrt{2}},\ t\right)$$

これより，平面 $z=t$ 上で，四角形 QRST は点 P を中心とする長方形であり，この長方形を z 軸のまわりに回転してできる円の面積を $S(t)$ とおくと，

$$S(t)=\pi\mathrm{PQ}^2=\pi\left\{\left(1-\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2+\left(\frac{t}{\sqrt{2}}\right)^2\right\}=\pi(1-\sqrt{2}t+t^2)$$

すると，四面体 ABCD を z 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V=\int_0^{\sqrt{2}}S(t)dt=\pi\int_0^{\sqrt{2}}(1-\sqrt{2}t+t^2)dt=\pi\Big[t-\frac{\sqrt{2}}{2}t^2+\frac{t^3}{3}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$
$$=\pi\left(\sqrt{2}-\sqrt{2}+\frac{2}{3}\sqrt{2}\right)=\frac{2}{3}\sqrt{2}\pi$$

コメント

立体の回転体の体積を求める頻出題です。誘導に従って計算していけばよいわけですが，それ以外に，対称性に注目して計算量を減らすことも重要です。

問　題

a は正の数とし，次の関数 $y=f_a(x)$ のグラフの変曲点を P とする。

$$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}}\quad (x\geqq 0)$$

このとき以下の問いに答えよ。

(1) 点 P の座標を求めよ。

(2) a が区間 $1\leqq a\leqq 2$ 全体を動くとき，点 P が描く曲線 C の概形を図示せよ。

(3) $x\geqq 0$ における曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ と(2)の曲線 C の 3 曲線で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2016]

解答例

(1) $a>0$ で，$f_a(x)=axe^{-\frac{x}{a}}$ $(x\geqq 0)$ に対し，

$$f_a{}'(x)=ae^{-\frac{x}{a}}+ax\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{x}{a}}=(a-x)e^{-\frac{x}{a}}$$

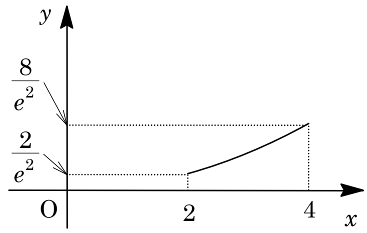
$$f_a{}''(x)=-e^{-\frac{x}{a}}+(a-x)\left(-\frac{1}{a}\right)e^{-\frac{x}{a}}=\frac{x-2a}{a}e^{-\frac{x}{a}}$$

すると，$x=2a$ の前後で $f_a{}''(x)$ の符号が変化するので，$f_a(2a)=\dfrac{2a^2}{e^2}$ より，$y=f_a(x)$ のグラフの変曲点 P の座標は，$\mathrm{P}\left(2a,\ \dfrac{2a^2}{e^2}\right)$ である。

(2) $\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，(1)より，$x=2a$ ……①，$y=\dfrac{2a^2}{e^2}$ ……②

ここで，a が $1\leqq a\leqq 2$ 全体を動くとき，①より $2\leqq x\leqq 4$ である。このとき，①から $a=\dfrac{x}{2}$ となり，②に代入すると，P の軌跡 C の方程式は，

$$y=\frac{2}{e^2}\left(\frac{x}{2}\right)^2=\frac{1}{2e^2}x^2\quad (2\leqq x\leqq 4)$$



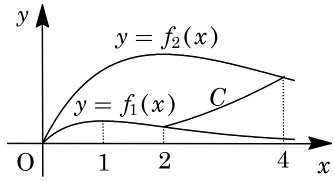
よって，C の概形は右図のようになる。

(3) (1)より，$x\geqq 0$ における $f_a(x)$ の増減は右表のようになり，$f_1(x)=xe^{-x}$，$f_2(x)=2xe^{-\frac{x}{2}}$ に対して，2 曲線 $y=f_1(x)$，$y=f_2(x)$ および曲線 C との位置関係は右下図のようになる。

x	0	$\cdots$	a	$\cdots$
$f_a{}'(x)$		$+$	0	$-$
$f_a(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{a^2}{e}$	$\searrow$

さて，この 3 曲線で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^4 f_2(x)dx-\int_0^2 f_1(x)dx-\int_2^4\frac{1}{2e^2}x^2dx$$



そこで，$f_1(x)$，$f_2(x)$を代入すると，

$$S=\int_0^4 2xe^{-\frac{x}{2}}dx-\int_0^2 xe^{-x}dx-\int_2^4\frac{1}{2e^2}x^2dx$$

$$=\Big[-4xe^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^4+\int_0^4 4e^{-\frac{x}{2}}dx-\Big[-xe^{-x}\Big]_0^2-\int_0^2 e^{-x}dx-\Big[\frac{1}{6e^2}x^3\Big]_2^4$$

$$=-16e^{-2}-8\Big[e^{-\frac{x}{2}}\Big]_0^4+2e^{-2}+\Big[e^{-x}\Big]_0^2-\frac{28}{3}e^{-2}$$

$$=-\frac{70}{3}e^{-2}-8(e^{-2}-1)+(e^{-2}-1)=7-\frac{91}{3e^2}$$

コメント

計算ミスに要注意の微積分の総合問題です。

問　題

自然数 $n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ に対して，関数 $f_n(x)=x^{n+1}(1-x)$ を考える。

(1)　曲線 $y=f_n(x)$ 上の点 $(a_n,\ f(a_n))$ における接線が原点を通るとき，a_n を n の式で表せ。ただし，$a_n>0$ とする。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$ と x 軸とで囲まれた図形の面積を B_n とする。また，(1)で求めた a_n に対して，$0\leqq x\leqq a_n$ の範囲で，曲線 $y=f_n(x)$，x 軸，および直線 $x=a_n$ で囲まれた図形の面積を C_n とする。B_n および C_n を n の式で表せ。

(3)　(2)で求めた B_n および C_n に対して，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}$ を求めよ。ただし，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n$ が自然対数の底 e であることを用いてよい。　[2015]

解答例

(1)　$f_n(x)=x^{n+1}(1-x)=x^{n+1}-x^{n+2}$ に対して，$f_n{}'(x)=(n+1)x^n-(n+2)x^{n+1}$

さて，点 $(a_n,\ f(a_n))$ における曲線 $y=f_n(x)$ の接線の方程式は,

$$y-f_n(a_n)=f_n{}'(a_n)(x-a_n)$$

原点を通ることより，$-f_n(a_n)=f_n{}'(a_n)(-a_n)$，$f_n(a_n)=a_n f_n{}'(a_n)$ となり，

$$a_n^{n+1}-a_n^{n+2}=a_n\{(n+1)a_n^n-(n+2)a_n^{n+1}\},\quad na_n^{n+1}-(n+1)a_n^{n+2}=0$$

すると，$a_n>0$ より $n-(n+1)a_n=0$ となり，$a_n=\dfrac{n}{n+1}$ である。

(2)　$0\leqq x\leqq 1$ において，$f_n(x)\geqq 0$ より，

$$B_n=\int_0^1 f_n(x)dx=\int_0^1(x^{n+1}-x^{n+2})dx=\Big[\frac{x^{n+2}}{n+2}-\frac{x^{n+3}}{n+3}\Big]_0^1$$

$$=\frac{1}{n+2}-\frac{1}{n+3}=\frac{1}{(n+2)(n+3)}$$

また，(1)より $0<a_n<1$ なので，$0\leqq x\leqq a_n$ において $f_n(x)\geqq 0$ となり，

$$C_n=\int_0^{a_n} f_n(x)dx=\int_0^{\frac{n}{n+1}}(x^{n+1}-x^{n+2})dx=\Big[\frac{x^{n+2}}{n+2}-\frac{x^{n+3}}{n+3}\Big]_0^{\frac{n}{n+1}}$$

$$=\frac{1}{n+2}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+2}-\frac{1}{n+3}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+3}$$

$$=\frac{(n+1)(n+3)n^{n+2}-(n+2)n^{n+3}}{(n+2)(n+3)(n+1)^{n+3}}=\frac{(2n+3)n^{n+2}}{(n+2)(n+3)(n+1)^{n+3}}$$

(3)　$$\frac{C_n}{B_n}=\frac{(2n+3)n^{n+2}}{(n+1)^{n+3}}=\frac{2n+3}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^{n+2}=\frac{2n+3}{n+1}\Big(\frac{n}{n+1}\Big)^2\frac{1}{\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)^n}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{C_n}{B_n}=\frac{2}{1}\cdot 1^2\cdot\frac{1}{e}=\frac{2}{e}$ である。

コメント

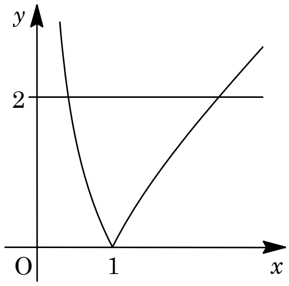
微積分の総合問題です。(2)の後半の計算がやや面倒ですが，全体的には標準レベルです。e の定義式も問題文中にありますし……。

問　題

曲線 $y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$ と直線 $y=2$ で囲まれた領域の面積 S を求めよ。　[2013]

解答例

曲線 $y=\left|x-\dfrac{1}{x}\right|$ $(x>0)$ ……(＊)に対して,



(i)　$x\geqq 1$ のとき　$y=x-\dfrac{1}{x}$

$y'=1+\dfrac{1}{x^2}>0$ より単調に増加する。

(ii)　$0<x<1$ のとき　$y=-\left(x-\dfrac{1}{x}\right)=-x+\dfrac{1}{x}$

(i)(ii)より，(＊)の概形は右図のようになり，直線 $y=2$ と 2 つの交点をもつ。

さて，曲線(＊)の方程式を x について解き直すと,

(i)　$x\geqq 1$ のとき　$y=x-\dfrac{1}{x}$ より，$x^2-yx-1=0$ となり,

$$x=\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

(ii)　$0<x<1$ のとき　$y=-x+\dfrac{1}{x}$ より，$x^2+yx-1=0$ となり,

$$x=\frac{-y+\sqrt{y^2+4}}{2}$$

よって，曲線(＊)と直線 $y=2$ で囲まれた領域の面積 S は,

$$S=\int_0^2\left(\frac{y+\sqrt{y^2+4}}{2}-\frac{-y+\sqrt{y^2+4}}{2}\right)dy=\int_0^2 y\,dy=\left[\frac{y^2}{2}\right]_0^2=2$$

コメント

交点の x 座標がややこしいので，y 軸方向に積分して面積を求めました。もっとも，x 軸方向に積分しても，それほどではありませんでしたが。

問　題

a を正の定数とし，座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y = e^{x^2}$，$C_2 : y = ax^2$ を考える。このとき以下の問いに答えよ。ただし，必要ならば $\displaystyle\lim_{t\to+\infty}\frac{e^t}{t} = +\infty$ であることを用いてもよい。

(1)　$t > 0$ の範囲で，関数 $f(t) = \dfrac{e^t}{t}$ の最小値を求めよ。

(2)　2 曲線 C_1，C_2 の共有点の個数を求めよ。

(3)　C_1，C_2 の共有点の個数が 2 のとき，これらの 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積を求めよ。　[2012]

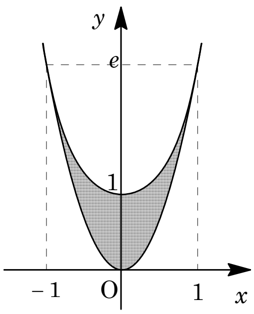
解答例

(1)　$f(t) = \dfrac{e^t}{t}$ に対して，$f'(t) = \dfrac{te^t - e^t}{t^2} = \dfrac{(t-1)e^t}{t^2}$

t	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$	∞	$\searrow$	e	$\nearrow$	∞

$t > 0$ において，$f(t)$ の値の増減は右表のようになり，$f(t)$ は $t = 1$ のとき最小値 e をとる。

(2)　$C_1 : y = e^{x^2}$，$C_2 : y = ax^2$ を連立して，$e^{x^2} = ax^2$ ………①



①は $x = 0$ を解としてもたないので，$\dfrac{e^{x^2}}{x^2} = a$ と同値であり，さらに $t = x^2 > 0$ とおきかえると，

$$\frac{e^t}{t} = a,\ f(t) = a\quad (t > 0)\ \cdots\cdots\cdots②$$

すると，(1)より，②の異なる解 t の個数は，$a > e$ のとき 2 個，$a = e$ のとき 1 個，$0 < a < e$ のとき 0 個である。

よって，①の異なる解 x の個数，すなわち C_1，C_2 の共有点の個数は，$a > e$ のとき 4 個，$a = e$ のとき 2 個，$0 < a < e$ のとき 0 個である。

(3)　(2)より，C_1，C_2 の共有点が 2 個となるのは $a = e$ のときで，このとき共有点は $t = 1$ から $x = \pm 1$ である。

また，C_1，C_2 の y 軸に関する対称性より，この 2 曲線で囲まれた領域を y 軸のまわりに 1 回転させてできる立体の体積 V は，

$$V = \int_0^1 2\pi x(e^{x^2} - ex^2)dx = 2\pi\int_0^1 (xe^{x^2} - ex^3)dx$$

$$= 2\pi\Big[\frac{1}{2}e^{x^2} - \frac{e}{4}x^4\Big]_0^1 = \pi(e-1) - \frac{\pi e}{2} = \frac{\pi(e-2)}{2}$$

コメント

(1)は(2)の誘導となっています。また，(3)の求積は円筒分割によりましたが，普通に y 軸方向に積分しても，計算量はほとんど変わりません。

問　題

座標平面において，原点$O(0,\ 0)$を中心とする半径 1 の円をC_1とし，点$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$と点$Q(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$における$C_1$の接線をそれぞれ$l_1$，$l_2$とする。ただし，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$である。$l_1$と$l_2$の交点を$R(\alpha,\ \beta)$とするとき，次の問いに答えよ。

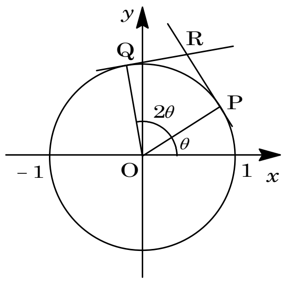
(1) 点Rの座標α，βをθの式で表せ。

(2) θを$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$の範囲で動かして得られる点 R の軌跡を$C_2$とする。このとき，直線$y=\sqrt{3}x$と曲線$C_2$と$y$軸とで囲まれる部分の面積を求めよ。　[2006]

解答例

(1) 点$P(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$Q(\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$における接線の方程式は，それぞれ，

$$x\cos\theta+y\sin\theta=1,\quad x\cos 3\theta+y\sin 3\theta=1$$



この 2 本の接線の交点$R(\alpha,\ \beta)$は，

$$\alpha\cos\theta+\beta\sin\theta=1,\quad \alpha\cos 3\theta+\beta\sin 3\theta=1$$

まとめると，$\begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \cos 3\theta & \sin 3\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$

さて，$\Delta=\cos\theta\sin 3\theta-\sin\theta\cos 3\theta=\sin(3\theta-\theta)=\sin 2\theta$

すると，$\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$より，$\sin 2\theta>0$なので，

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=\frac{1}{\sin 2\theta}\begin{pmatrix}\sin 3\theta & -\sin\theta\\ -\cos 3\theta & \cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\ 1\end{pmatrix}$$

よって，$\alpha=\dfrac{1}{\sin 2\theta}(\sin 3\theta-\sin\theta)=\dfrac{1}{2\sin\theta\cos\theta}\cdot 2\cos 2\theta\sin\theta=\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$

$$\beta=\frac{1}{\sin 2\theta}(-\cos 3\theta+\cos\theta)=\frac{1}{\sin 2\theta}\cdot 2\sin 2\theta\sin\theta=2\sin\theta$$

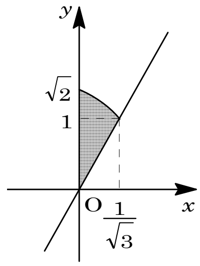
(2) (1)より，$x=\dfrac{\cos 2\theta}{\cos\theta}$，$y=2\sin\theta$となり，

$$\frac{dx}{d\theta}=\frac{-2\sin 2\theta\cos\theta+\cos 2\theta\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{-4\sin\theta\cos^2\theta+(2\cos^2\theta-1)\sin\theta}{\cos^2\theta}$$
$$=\frac{-\sin\theta(2\cos^2\theta+1)}{\cos^2\theta}$$

$$\frac{dy}{d\theta}=2\cos\theta$$

θ	$\dfrac{\pi}{6}$	$\cdots$	$\dfrac{\pi}{4}$
$\dfrac{dx}{d\theta}$		$-$	
x	$\dfrac{1}{\sqrt{3}}$	$\searrow$	0
$\dfrac{dy}{d\theta}$		$+$	
y	1	$\nearrow$	$\sqrt{2}$

よって，点 R の軌跡は右図のようになり，求める網点部の面積を S とすると，



$$S=\int_1^{\sqrt{2}}x\,dy+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\frac{1}{\sqrt{3}}=\int_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}\frac{\cos 2\theta}{\cos\theta}\cdot 2\cos\theta\,d\theta+\frac{\sqrt{3}}{6}$$
$$=\Big[\sin 2\theta\Big]_{\frac{\pi}{6}}^{\frac{\pi}{4}}+\frac{\sqrt{3}}{6}=1-\frac{\sqrt{3}}{3}$$

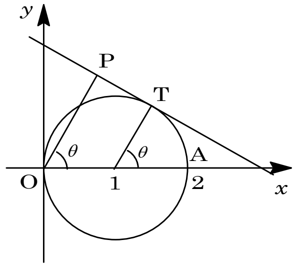
コメント

和積公式を利用して，点 R の座標を整理しておかないと，積分の実行が困難になってきます。また，(2)の面積計算は，計算量を考えると，y 軸方向で積分すべきです。

問　題

O を原点とする座標平面において，点 A の座標を$(2,\ 0)$とする。線分 OA を直径とする円周上の点 T における接線に O から下ろした垂線を OP とする。T が円周上を動くとき, P が描く曲線の長さを求めよ。 [2005]

解答例



線分 OA を直径とする円は，中心$(1,\ 0)$から,

$$(x-1)^2+y^2=1$$

$\mathrm{T}(1+\cos\theta,\ \sin\theta)$とすると, T における接線は,

$$(1+\cos\theta-1)(x-1)+y\sin\theta=1$$

$$x\cos\theta+y\sin\theta-\cos\theta-1=0$$

すると，$\mathrm{OP}=\dfrac{|-\cos\theta-1|}{\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}}=\cos\theta+1$

これから，$\mathrm{P}(x,\ y)$とおくと,

$$x=(\cos\theta+1)\cos\theta,\ \ y=(\cos\theta+1)\sin\theta$$

$0\leqq\theta\leqq 2\pi$ のとき，点 P が描く曲線の長さを l とおくと,

$$\frac{dx}{d\theta}=-\sin\theta\cos\theta-(\cos\theta+1)\sin\theta=-\sin2\theta-\sin\theta$$

$$\frac{dy}{d\theta}=-\sin^2\theta+(\cos\theta+1)\cos\theta=\cos2\theta+\cos\theta$$

よって，$l=\displaystyle\int_0^{2\pi}\sqrt{(-\sin2\theta-\sin\theta)^2+(\cos2\theta+\cos\theta)^2}\,d\theta$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{1+1+2(\sin2\theta\sin\theta+\cos2\theta\cos\theta)}\,d\theta$$

$$=\int_0^{2\pi}\sqrt{2(1+\cos\theta)}\,d\theta=\int_0^{2\pi}\sqrt{4\cos^2\frac{\theta}{2}}\,d\theta=2\int_0^{2\pi}\left|\cos\frac{\theta}{2}\right|d\theta$$

$$=4\int_0^{\pi}\cos\frac{\theta}{2}\,d\theta=8\Big[\sin\frac{\theta}{2}\Big]_0^{\pi}=8$$

コメント

有名曲線であるカージオイドの長さを求める頻出問題です。

問　題

座標空間に定点 $A(1,\ 0,\ 0)$ をとる。点 $P(x,\ y,\ z)$ から yz 平面に下ろした垂線の足を H とする。$k>1$ である定数 k に対して，$PH : PA = k : 1$ を満たす点 P 全体からなる図形を S で表す。このとき，次の問いに答えよ。

(1) S の点 P と x 軸との距離の最大値を求めよ。

(2) S のうちで，$y\geqq 0$ かつ $z=0$ を満たす部分を C とする。S は C を x 軸のまわりに1回転させて得られる図形であることを示せ。

(3) S で囲まれる立体の体積を求めよ。　[2004]

解答例

(1) $PH : PA = k : 1$ より，$PH = kPA$ となり, S の方程式は,

$$|x| = k\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}\ ,\ \ x^2 = k^2\{(x-1)^2+y^2+z^2\}\cdots\cdots\cdots(*)$$

点 P と x 軸との距離を d とすると，$d=\sqrt{y^2+z^2}$ なので, $(*)$より,

$$d^2 = \frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2 = -\frac{k^2-1}{k^2}x^2+2x-1 = -\frac{k^2-1}{k^2}\left(x-\frac{k^2}{k^2-1}\right)^2+\frac{1}{k^2-1}$$

$k>1$ より $-\dfrac{k^2-1}{k^2}<0$ となり，$x=\dfrac{k^2}{k^2-1}$ のとき d^2 は最大となる。このとき，d は最大値 $\sqrt{\dfrac{1}{k^2-1}}=\dfrac{1}{\sqrt{k^2-1}}$ をとる。

(2) $(*)$に $z=0$ を代入すると，$x^2=k^2\{(x-1)^2+y^2\}$，$y^2=\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$

$y\geqq 0$ より $y=\sqrt{\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2}$ となり, C の方程式は,

$$y=\sqrt{\frac{x^2}{k^2}-(x-1)^2}\ ,\ \ z=0$$

さて，C を x 軸のまわりに回転してできる図形を，x 軸の垂直な平面 $x=t$ で切断したとき，その切り口は半径が $\sqrt{\dfrac{t^2}{k^2}-(t-1)^2}$ の円になり，

$$y^2+z^2=\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2,\ \ x=t$$

t は任意なので，この図形は方程式 $y^2+z^2=\dfrac{x^2}{k^2}-(x-1)^2$ で表され，これは$(*)$と一致する。すなわち図形 S である。

(3) 切り口が存在する t の範囲は，$\dfrac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\geqq 0$，$(k^2-1)t^2-2k^2t+k^2\leqq 0$

$$\{(k+1)t-k\}\{(k-1)t-k\}\leqq 0\ ,\ \ \frac{k}{k+1}\leqq t\leqq\frac{k}{k-1}$$

S で囲まれる立体の体積を V とすると,

$$V=\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\left\{\frac{t^2}{k^2}-(t-1)^2\right\}dt=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\int_{\frac{k}{k+1}}^{\frac{k}{k-1}}\left(t-\frac{k}{k+1}\right)\left(t-\frac{k}{k-1}\right)dt$$

$$=-\frac{k^2-1}{k^2}\pi\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{k}{k-1}-\frac{k}{k+1}\right)^3=\frac{k^2-1}{6k^2}\pi\cdot\frac{8k^3}{(k^2-1)^3}=\frac{4\pi k}{3(k^2-1)^2}$$

コメント

S で囲まれる立体を x 軸に垂直な平面で切断すると, その断面は円になります。この点を問う(2)は, (3)への誘導となっています。

問　題

$1<a<b$ とする。原点 O と点 $\mathrm{A}\left(a,\ \dfrac{1}{a}\right)$ を通る直線，原点 O と点 $\mathrm{B}\left(b,\ \dfrac{1}{b}\right)$ を通る直線，および曲線 $y=\dfrac{1}{x}\ (x>0)$ で囲まれた部分を R とする。R の面積を E，R を直線 $y=-x$ のまわりに 1 回転させてできる回転体の体積を V とする。

(1)　E を a と b の式で表せ。

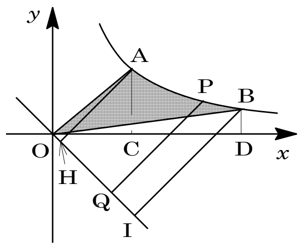
(2)　$c>1$ とし，曲線 $y=\dfrac{1}{x}$ 上の点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ から直線 $y=-x$ に下ろした垂線を PQ とする。線分 OQ の長さを s，線分 PQ の長さを t とすると，$t^2=s^2+2$ となることを示せ。

(3)　V を a と b の式で表せ。

(4)　$b=a+1$ のとき $\displaystyle\lim_{a\to\infty}E$，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}V$ を求めよ。　　　[2003]

解答例

(1)　$\mathrm{C}(a,\ 0)$，$\mathrm{D}(b,\ 0)$ とおくと，



$$E=\triangle\mathrm{OAC}+\int_a^b\frac{1}{x}dx-\triangle\mathrm{OBD}$$
$$=\frac{1}{2}a\cdot\frac{1}{a}+\big[\log x\big]_a^b-\frac{1}{2}b\cdot\frac{1}{b}$$
$$=\log b-\log a=\log\frac{b}{a}$$

(2)　点 $\mathrm{P}\left(c,\ \dfrac{1}{c}\right)$ と直線 $x+y=0$ との距離が t なので，

$$t=\frac{\left|c+\dfrac{1}{c}\right|}{\sqrt{1^2+1^2}},\quad \sqrt{2}t=c+\frac{1}{c}\cdots\cdots\cdots①$$

また，$\mathrm{OP}=\sqrt{c^2+\dfrac{1}{c^2}}$ から，三平方の定理より，$s^2+t^2=c^2+\dfrac{1}{c^2}\cdots\cdots\cdots②$

②より，$s^2+t^2=\left(c+\dfrac{1}{c}\right)^2-2$

①を代入して，$s^2+t^2=2t^2-2$，$t^2=s^2+2\cdots\cdots\cdots③$

(3)　点 A，B から直線 $y=-x$ に下ろした垂線の足をそれぞれ H，I とすると，①より $\mathrm{AH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a+\dfrac{1}{a}\right)$ となるので，③から $s^2=t^2-2$ として，

$$\mathrm{OH}^2=\mathrm{AH}^2-2=\frac{1}{2}\left(a+\frac{1}{a}\right)^2-2=\frac{1}{2}\left(a^2-2+\frac{1}{a^2}\right)=\frac{1}{2}\left(a-\frac{1}{a}\right)^2$$

$a>1$ より，$\mathrm{OH}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\dfrac{1}{a}\right)$

同様にして，$\mathrm{BI}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(b+\dfrac{1}{b}\right)$，$\mathrm{OI}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\dfrac{1}{b}\right)$

そこで，$\mathrm{OH}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(a-\frac{1}{a}\right)=\alpha$，$\mathrm{OI}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}\right)=\beta$ とおき，③を用いると，$\mathrm{AH}^2=\alpha^2+2$，$\mathrm{BI}^2=\beta^2+2$ となるので，

$$\begin{aligned}V&=\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{AH}^2\cdot\mathrm{OH}+\int_\alpha^\beta \pi t^2 ds-\frac{1}{3}\pi\,\mathrm{BI}^2\cdot\mathrm{OI}\\&=\frac{1}{3}\pi(\alpha^2+2)\alpha+\int_\alpha^\beta \pi(s^2+2)ds-\frac{1}{3}\pi(\beta^2+2)\beta\\&=\frac{1}{3}\pi(\alpha^3+2\alpha)+\pi\left[\frac{1}{3}s^3+2s\right]_\alpha^\beta-\frac{1}{3}\pi(\beta^3+2\beta)\\&=\frac{1}{3}\pi(\alpha^3+2\alpha)+\frac{1}{3}\pi(\beta^3-\alpha^3)+2\pi(\beta-\alpha)-\frac{1}{3}\pi(\beta^3+2\beta)\\&=\frac{2}{3}\pi\alpha+2\pi\beta-2\pi\alpha-\frac{2}{3}\pi\beta=\frac{4}{3}\pi(\beta-\alpha)\\&=\frac{4}{3}\pi\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\left(b-\frac{1}{b}-a+\frac{1}{a}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(b-a-\frac{1}{b}+\frac{1}{a}\right)\end{aligned}$$

(4)　$b=a+1$ のとき，$E=\log\frac{a+1}{a}=\log\left(a+\frac{1}{a}\right)$ より，

$$\lim_{a\to\infty}E=\lim_{a\to\infty}\log\left(a+\frac{1}{a}\right)=0$$

また，$V=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(a+1-a-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)$ より，

$$\lim_{a\to\infty}V=\lim_{a\to\infty}\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi\left(1-\frac{1}{a+1}+\frac{1}{a}\right)=\frac{2\sqrt{2}}{3}\pi$$

コメント

例年，どこかの大学で出題されている斜回転体の体積を求める問題です。誘導が非常に細かくつけられています。

問　題

$a,\ b$ を実数とする。2 つの関数 $f(x) = \log(x^2+1)$，$g(x) = ax^2+b$ について次の問いに答えよ。ただし，対数は自然対数とする。

(1) 関数 $f(x)$ の極値，曲線 $y = f(x)$ の変曲点を求め，そのグラフの概形をかけ。

(2) 曲線 $y = f(x)$ と曲線 $y = g(x)$ が共有点をもち，その点における 2 曲線の接線が一致する条件を求めよ。

(3) (2)の条件において，$a = \dfrac{1}{4}$，$b \neq 0$ のとき，この 2 つの曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。 [1999]

解答例

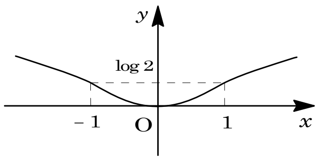
(1) $f(x) = \log(x^2+1)$，$f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$，

$$f''(x) = \frac{2(x^2+1) - 2x\cdot 2x}{(x^2+1)^2} = \frac{-2(x^2-1)}{(x^2+1)^2}$$

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$f'(x)$	0	＋		＋	
$f''(x)$		＋	0	－	
$f(x)$	0	↗	$\log 2$	↗	∞

ここで，$f(-x) = f(x)$ より，$y = f(x)$ のグラフは y 軸対称となるので，

極小値 0 （$x = 0$），変曲点 $(\pm 1,\ \log 2)$



(2) $y = g(x)$ のグラフも y 軸対称なので，2 曲線 $y = f(x)$ と $y = g(x)$ が接するとき，$\alpha \geqq 0$ として，

$$f(\alpha) = g(\alpha) \cdots\cdots ①,\quad f'(\alpha) = g'(\alpha) \cdots\cdots ②$$

①より $\log(\alpha^2+1) = a\alpha^2 + b \cdots\cdots ③$，②より $\dfrac{2\alpha}{\alpha^2+1} = 2a\alpha \cdots\cdots ④$

④から $a\alpha(\alpha^2+1) = \alpha$，$\alpha(a\alpha^2 + a - 1) = 0 \cdots\cdots\cdots ⑤$

(i) $\alpha = 0$ のとき　⑤は満たされており，③から $b = 0$

(ii) $\alpha > 0$ のとき　⑤から $a\alpha^2 + a - 1 = 0$，$a = 0$ とすると不成立なので $a \neq 0$

このとき，$\dfrac{1-a}{a} > 0$ すなわち $0 < a < 1$ で，$\alpha^2 = \dfrac{1-a}{a}$，$\alpha = \sqrt{\dfrac{1-a}{a}} \cdots\cdots\cdots ⑥$

⑥を③に代入して，$\log\left(\dfrac{1-a}{a} + 1\right) = a\cdot\dfrac{1-a}{a} + b$，$b = a - 1 - \log a \cdots\cdots\cdots ⑦$

(i)(ii)より，求める条件は，$b = 0$ （a は任意）または $b = a - 1 - \log a$ （$0 < a < 1$）

(3) $a = \dfrac{1}{4}$，$b \neq 0$ のとき，⑥より $\alpha = \sqrt{3}$，⑦より $b = -\dfrac{3}{4} + \log 4$

このとき，$-\sqrt{3} \leqq x \leqq \sqrt{3}$ で $f(x) \leqq g(x)$ より，求める面積を S とすると，

$$S = 2\int_0^{\sqrt{3}} \left\{ \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{4} + \log 4 - \log(x^2+1) \right\} dx$$

ここで，$\displaystyle\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{1}{4}x^2-\frac{3}{4}+\log 4\right)dx=\frac{3\sqrt{3}}{12}+\left(-\frac{3}{4}+\log 4\right)\sqrt{3}=-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\log 4$

$$\int_0^{\sqrt{3}}\log(x^2+1)\,dx=\Big[\,x\log(x^2+1)\,\Big]_0^{\sqrt{3}}-\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x^2}{x^2+1}dx$$

また，$x=\tan\theta$ と置換すると，

$$\int_0^{\sqrt{3}}\frac{2x^2}{x^2+1}dx=2\int_0^{\sqrt{3}}\left(1-\frac{1}{x^2+1}\right)dx=2\sqrt{3}-2\int_0^{\frac{\pi}{3}}d\theta=2\sqrt{3}-\frac{2}{3}\pi$$

以上より，$S=2\left\{-\frac{1}{2}\sqrt{3}+\sqrt{3}\log 4-\left(\sqrt{3}\log 4-2\sqrt{3}+\frac{2}{3}\pi\right)\right\}=3\sqrt{3}-\frac{4}{3}\pi$

コメント

微積分の総合問題です。確実な計算力が問われます。

問　題

xy 平面上を動く点 P の時刻 t における座標 $(x(t),\ y(t))$ は

$$x(t)=f(t)\cos t,\ \ y(t)=f(t)\sin t$$

で与えられているとする。ただし，$f(t)$ は微分可能で $f'(t)$ は連続とする。

$t=a$ から $t=b$ までに点 P が動く道のりを L とする。

(1) $L=\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$ が成り立つことを示せ。

(2) $L\leqq\int_a^b\{|f(t)|+|f'(t)|\}dt$ が成り立つことを示せ。

(3) $f(t)=e^{-\sqrt{t}}$，$a=1$，$b=4$ のとき，(2)の不等式を用いて，$L\leqq\dfrac{5}{e}-\dfrac{7}{e^2}$ が成り立つことを示せ。 [1998]

解答例

(1)
$$\begin{aligned}\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2&=\{f'(t)\cos t-f(t)\sin t\}^2+\{f'(t)\sin t+f(t)\cos t\}^2\\&=\{f'(t)\}^2(\cos^2t+\sin^2t)+\{f(t)\}^2(\sin^2t+\cos^2t)\\&=\{f'(t)\}^2+\{f(t)\}^2\end{aligned}$$

よって，$L=\int_a^b\sqrt{\{x'(t)\}^2+\{y'(t)\}^2}\,dt=\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt$

(2)
$$\begin{aligned}\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2&\leqq\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2+2|f(t)||f'(t)|\\&=(|f(t)|+|f'(t)|)^2\end{aligned}$$

$$\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\leqq|f(t)|+|f'(t)|$$

$a\leqq b$ より，$L=\int_a^b\sqrt{\{f(t)\}^2+\{f'(t)\}^2}\,dt\leqq\int_a^b\{|f(t)|+|f'(t)|\}dt$

(3) $f(t)=e^{-\sqrt{t}}$，$f'(t)=-\dfrac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}$ から，$s=\sqrt{t}$ とおくと，

$$\int_1^4\{|f(t)|+|f'(t)|\}dt=\int_1^4\left(e^{-\sqrt{t}}+\frac{1}{2\sqrt{t}}e^{-\sqrt{t}}\right)dt$$

$$=\int_1^2\left(e^{-s}+\frac{1}{2s}e^{-s}\right)2sds=\int_1^2(2s+1)e^{-s}ds=-\Big[(2s+1)e^{-s}\Big]_1^2+\int_1^2 2e^{-s}ds$$

$$=-\left(\frac{5}{e^2}-\frac{3}{e}\right)-2\left(\frac{1}{e^2}-\frac{1}{e}\right)=\frac{5}{e}-\frac{7}{e^2}$$

よって, (2)より，$L\leqq\dfrac{5}{e}-\dfrac{7}{e^2}$

コメント

(2)についても(1)との対比で証明は難しくなく, (3)は部分積分の計算だけなので，見かけよりはかなり簡単です。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆