

## 第5講 連立漸化式

**イントロ** 次の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  のはじめの3項を求めよ。 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 3b_n$$

**解説**  $a_1 = 2, b_1 = 1, a_2 = 3a_1 + b_1 = 7, b_2 = a_1 + 3b_1 = 5$

$$a_3 = 3a_2 + b_2 = 26, b_3 = a_2 + 3b_2 = 22$$

このように  $a_1, b_1$  の値から  $a_2, b_2$ ,  $a_2, b_2$  の値から  $a_3, b_3$  が求まっていく連立型の定数係数の漸化式には、大別して2種類のタイプがある。その1つは  $a_n$  と  $b_n$  の係数の等しい対称型と呼ばれるタイプであり、もう1つは等しくない非対称型である。対称型については、数列  $\{a_n + b_n\}$ ,  $\{a_n - b_n\}$  がともに等比数列となることから、連立式の両辺の和と差をとって、一般項を求める。

### Point 9

$a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = pa_n + qb_n, b_{n+1} = qa_n + pb_n$  ( $q \neq 0$ ) で定められた数列

連立式の両辺の和をとり、 $a_{n+1} + b_{n+1} = (p+q)(a_n + b_n)$

$$a_n + b_n = (a_1 + b_1)(p+q)^{n-1} = (a+b)(p+q)^{n-1} \dots\dots\dots ①$$

連立式の両辺の差をとり、 $a_{n+1} - b_{n+1} = (p-q)(a_n - b_n)$

$$a_n - b_n = (a_1 - b_1)(p-q)^{n-1} = (a-b)(p-q)^{n-1} \dots\dots\dots ②$$

①+②, ①-②より、 $a_n, b_n$  を求める。

**例題9** 次の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 3a_n + b_n, b_{n+1} = a_n + 3b_n$$

**解**  $a_{n+1} = 3a_n + b_n \dots\dots\dots ①, b_{n+1} = a_n + 3b_n \dots\dots\dots ②$

①+②より、 $a_{n+1} + b_{n+1} = 4(a_n + b_n)$  となり数列  $\{a_n + b_n\}$  は等比数列なので、

$$a_n + b_n = (a_1 + b_1)4^{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1} \dots\dots\dots ③$$

①-②より、 $a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n)$  となり数列  $\{a_n - b_n\}$  は等比数列なので、

$$a_n - b_n = (a_1 - b_1)2^{n-1} = 2^{n-1} \dots\dots\dots ④$$

③④より、 $a_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 4^{n-1} + 2^{n-1}), b_n = \frac{1}{2}(3 \cdot 4^{n-1} - 2^{n-1})$

**練習9** 次の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_1 = 2, b_1 = 1, a_{n+1} = 2a_n - b_n, b_{n+1} = -a_n + 2b_n$$

**イントロ** 次の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  のはじめの 3 項を求めよ。 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_1 = 5, b_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 7b_n, b_{n+1} = a_n - 4b_n$$

**解説**  $a_1 = 5, b_1 = 3, a_2 = 2a_1 + 7b_1 = 31, b_2 = a_1 - 4b_1 = -7$

$$a_3 = 2a_2 + 7b_2 = 13, b_3 = a_2 - 4b_2 = 59$$

非対称型の連立漸化式では、両辺の和と差をとって、数列  $\{a_n + b_n\}$ ,  $\{a_n - b_n\}$  を考えても、一般的には等比数列にはならない。すなわち、

$$a_{n+1} = 2a_n + 7b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, b_{n+1} = a_n - 4b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

として、 $\textcircled{1} + \textcircled{2}$  や  $\textcircled{1} - \textcircled{2}$  ではなく、 $\textcircled{1} - \textcircled{2} \times k$  を計算し、数列  $\{a_n - kb_n\}$  が公比  $\alpha$  の等比数列となるように  $\alpha, k$  を決めることを考える。つまり、式変形の目標を、

$$a_{n+1} - kb_{n+1} = \alpha(a_n - kb_n)$$

とするわけである。一般的には、次の Point 10 のようになる。

### Point 10

$a_1 = a, b_1 = b, a_{n+1} = pa_n + qb_n, b_{n+1} = ra_n + sb_n$  ( $qr \neq 0$ ) で定められた数列

式変形の目標を  $a_{n+1} - kb_{n+1} = \alpha(a_n - kb_n)$  とする。左辺の  $a_{n+1}, b_{n+1}$  に漸化式を適用すると、 $(p - kr)a_n + (q - ks)b_n = \alpha a_n - kab_n$  となり、

$$p - kr = \alpha \cdots \cdots \textcircled{1}, q - ks = -k\alpha \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} \text{ を } \textcircled{2} \text{ に代入すると, } q - ks = -k(p - kr), rk^2 + (s - p)k - q = 0 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  が異なる 2 つの解をもつとき、 $k = k_1, k_2$  とすると、数列  $\{a_n - k_1 b_n\}$  および  $\{a_n - k_2 b_n\}$  が等比数列となり、両者の一般項から  $a_n, b_n$  を求めることができる。

$\textcircled{3}$  が重解をもつときは、数列  $\{a_n - k_1 b_n\}$  の一般項ともとの漸化式を連立する。

《注》 Point 10 の  $\textcircled{1}$  と  $\textcircled{2}$  から、公比  $\alpha$  に関する条件式を求めてみる。

$\textcircled{1}$  より  $k = \frac{p - \alpha}{r}$  とし、 $\textcircled{2}$  に代入すると  $q - \frac{p - \alpha}{r}s = -\frac{p - \alpha}{r}\alpha$  となり、まとめると  $\alpha^2 - (p + s)\alpha + (ps - qr) = 0$  となっている。これから、 $\alpha$  は 2 次方程式

$$x^2 - (p + s)x + (ps - qr) = 0 \cdots \cdots \textcircled{4}$$

の解であることがわかる。

連立漸化式は、行列を用いて表すことができ、

$$\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_n \\ b_n \end{pmatrix}$$

これから、数列の一般項を行列の  $n$  乗を利用して求めることができる。

なお、 $\textcircled{4}$  は行列  $\begin{pmatrix} p & q \\ r & s \end{pmatrix}$  の固有方程式と呼ばれており、その解  $\alpha$  を固有値という。

例題 10 次の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_1 = 5, b_1 = 3, a_{n+1} = 2a_n + 7b_n, b_{n+1} = a_n - 4b_n$$

解

$$a_{n+1} = 2a_n + 7b_n \cdots \cdots \textcircled{1}, b_{n+1} = a_n - 4b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \times k \text{ より, } a_{n+1} - kb_{n+1} = (2-k)a_n + (7+4k)b_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$  と  $a_{n+1} - kb_{n+1} = \alpha(a_n - kb_n)$  が一致することより,

$$2-k = \alpha \cdots \cdots \textcircled{4}, 7+4k = -k\alpha \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{ を } \textcircled{5} \text{ に代入して, } 7+4k = -k(2-k), k^2 - 6k - 7 = 0$$

よって,  $k = -1, 7$  となり,  $\textcircled{4}$  から,  $(\alpha, k) = (3, -1), (-5, 7)$

$(\alpha, k) = (3, -1)$  のとき,  $a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$  から,

$$a_n + b_n = (a_1 + b_1) \cdot 3^{n-1} = 8 \cdot 3^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$(\alpha, k) = (-5, 7)$  のとき,  $a_{n+1} - 7b_{n+1} = -5(a_n - 7b_n)$

$$a_n - 7b_n = (a_1 - 7b_1) \cdot (-5)^{n-1} = -16(-5)^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{7}$$

$\textcircled{6} \textcircled{7}$  より,  $8a_n = 56 \cdot 3^{n-1} - 16(-5)^{n-1}, a_n = 7 \cdot 3^{n-1} - 2(-5)^{n-1}$

$$8b_n = 8 \cdot 3^{n-1} + 16(-5)^{n-1}, b_n = 3^{n-1} + 2(-5)^{n-1}$$

《注》 Point 10 の《注》のように, 公比  $\alpha$  に関する条件から求めてもよい。

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 7b_n \\ b_{n+1} = a_n - 4b_n \end{cases} \text{ に対して, 方程式 } x^2 - (2-4)x + (-8-7) = 0 \text{ の解は,}$$

$$x^2 + 2x - 15 = 0 \quad \text{すなわち} \quad x = 3, -5$$

まず,  $x = 3$  のとき  $a_{n+1} - kb_{n+1} = 3(a_n - kb_n)$  とすると,

$$(2-k)a_n + (7+4k)b_n = 3a_n - 3kb_n$$

よって,  $k = -1$  となり,  $a_{n+1} + b_{n+1} = 3(a_n + b_n)$

また,  $x = -5$  のとき  $a_{n+1} - kb_{n+1} = -5(a_n - kb_n)$  とすると,

$$(2-k)a_n + (7+4k)b_n = -5a_n + 5kb_n$$

よって,  $k = 7$  となり,  $a_{n+1} - 7b_{n+1} = -5(a_n - 7b_n)$

このように式変形すると, 数列  $\{a_n + b_n\}$ ,  $\{a_n - 7b_n\}$  がともに等比数列であることがわかる。

---

練習 10 次の数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  の一般項を求めよ。 ( $n = 1, 2, 3, \dots$ )

$$a_1 = 1, b_1 = 2, a_{n+1} = a_n - b_n, b_{n+1} = 4a_n + 5b_n$$

---

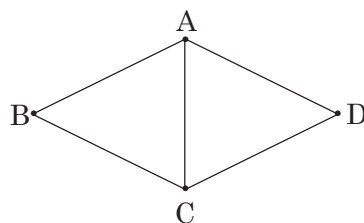
### 問題 9

2つの数列  $\{a_n\}$ ,  $\{b_n\}$  は  $a_1 = 2$ ,  $b_1 = -1$ ,  $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n - \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2}$ ,  
 $b_{n+1} = -\frac{3}{4}a_n + \frac{5}{4}b_n - \frac{1}{2}$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ) によって定義されている。

- (1)  $a_n + b_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (2)  $a_n - b_n$  を  $n$  の式で表せ。
- (3)  $a_n$  を  $n$  の式で表せ。

### 問題 10

図のような4個の点 A, B, C, D を結んだ図形を考える。動点 P は点 A を出発点として A, B, C, D 上を移動する。P が A または C にいるときは、残りの3点にそれぞれ  $\frac{1}{3}$  の確率で移動し、P が B または D にいるときは、A, C にそれぞれ  $\frac{1}{2}$  の確率で移動する。 $n$  回の移動後 P が A, B, C, D にいる確率をそれぞれ  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$  とする。



- (1)  $a_{n+1}$ ,  $c_{n+1}$  を  $a_n$ ,  $b_n$ ,  $c_n$ ,  $d_n$  を用いて表せ。
- (2) 数列  $\{a_n + c_n\}$ ,  $\{a_n - c_n\}$  のそれぞれの漸化式を導け。
- (3)  $a_n$  を求めよ。

## 第5講 連立漸化式

### 練習9

$a_{n+1} = 2a_n - b_n \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $b_{n+1} = -a_n + 2b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して,

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より,  $a_{n+1} + b_{n+1} = a_n + b_n$

$$a_n + b_n = a_1 + b_1 = 3 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より,  $a_{n+1} - b_{n+1} = 3(a_n - b_n)$

$$a_n - b_n = (a_1 - b_1) \cdot 3^{n-1} = 3^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{4}$$

$\textcircled{3} \textcircled{4}$ より,  $a_n = \frac{1}{2}(3 + 3^{n-1})$ ,  $b_n = \frac{1}{2}(3 - 3^{n-1})$

### 練習10

$a_{n+1} = a_n - b_n \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $b_{n+1} = 4a_n + 5b_n \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して,

$$x^2 - (1+5)x + \{1 \times 5 - (-1) \times 4\} = 0, \quad x^2 - 6x + 9 = 0, \quad x = 3$$

$a_{n+1} - kb_{n+1} = 3(a_n - kb_n)$ とすると,  $\textcircled{1} \textcircled{2}$ より,

$$(1-4k)a_n + (-1-5k)b_n = 3a_n - 3kb_n$$

これより,  $k = -\frac{1}{2}$ となり,  $a_{n+1} + \frac{1}{2}b_{n+1} = 3(a_n + \frac{1}{2}b_n)$

$$a_n + \frac{1}{2}b_n = (a_1 + \frac{1}{2}b_1) \cdot 3^{n-1} = 2 \cdot 3^{n-1}, \quad b_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2a_n \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$\textcircled{3}$ を $\textcircled{1}$ に代入して,  $a_{n+1} = a_n - (4 \cdot 3^{n-1} - 2a_n) = 3a_n - 4 \cdot 3^{n-1}$

$$\frac{a_{n+1}}{3^{n+1}} = \frac{a_n}{3^n} - \frac{4}{9}$$

すると,  $\frac{a_n}{3^n} = \frac{a_1}{3^1} - \frac{4}{9}(n-1) = \frac{-4n+7}{9}$ より,

$$a_n = \frac{-4n+7}{9} \cdot 3^n = (-4n+7) \cdot 3^{n-2}$$

$\textcircled{3}$ より,  $b_n = 4 \cdot 3^{n-1} - 2(-4n+7) \cdot 3^{n-2} = 2(4n-1) \cdot 3^{n-2}$

### 問題9

(1)  $a_{n+1} = \frac{5}{4}a_n - \frac{3}{4}b_n + \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{1}$ ,  $b_{n+1} = -\frac{3}{4}a_n + \frac{5}{4}b_n - \frac{1}{2} \cdots \cdots \textcircled{2}$ に対して,

$\textcircled{1} + \textcircled{2}$ より,  $a_{n+1} + b_{n+1} = \frac{1}{2}(a_n + b_n)$

$$a_n + b_n = (a_1 + b_1) \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} \cdots \cdots \textcircled{3}$$

(2)  $\textcircled{1} - \textcircled{2}$ より,  $a_{n+1} - b_{n+1} = 2(a_n - b_n) + 1$ となり,  $a_{n+1} - b_{n+1} + 1 = 2(a_n - b_n + 1)$

$$a_n - b_n + 1 = (a_1 - b_1 + 1) \cdot 2^{n-1} = 4 \cdot 2^{n-1} = 2^{n+1}$$

よって,  $a_n - b_n = 2^{n+1} - 1 \cdots \cdots \textcircled{4}$

$$(3) \quad \textcircled{3}\textcircled{4} \text{より, } 2a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1} + 2^{n+1} - 1, \quad a_n = \left(\frac{1}{2}\right)^n + 2^n - \frac{1}{2}$$

## 問題 10

- (1) 点 P が,  $n+1$  回移動後, A にいるのは,  $\square$  回後  $\rightarrow n+1$  回後の位置に関して,  $B \rightarrow A$ ,  $C \rightarrow A$ ,  $D \rightarrow A$  の 3 つの場合があるので,

$$a_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}c_n + \frac{1}{2}d_n \cdots \cdots \textcircled{1}$$

同様に,  $n+1$  回移動後, A にいるのは,  $B \rightarrow C$ ,  $A \rightarrow C$ ,  $D \rightarrow C$  の 3 つの場合があり,

$$c_{n+1} = \frac{1}{2}b_n + \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{2}d_n \cdots \cdots \textcircled{2}$$

$$(2) \quad \textcircled{1} + \textcircled{2} \text{より, } a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + b_n + \frac{1}{3}c_n + d_n$$

ここで,  $a_n + b_n + c_n + d_n = 1$  より,

$$a_{n+1} + c_{n+1} = \frac{1}{3}a_n + \frac{1}{3}c_n + (1 - a_n - c_n) = -\frac{2}{3}(a_n + c_n) + 1 \cdots \cdots \textcircled{3}$$

$$\textcircled{1} - \textcircled{2} \text{より, } a_{n+1} - c_{n+1} = -\frac{1}{3}(a_n - c_n) \cdots \cdots \textcircled{4}$$

ただし,  $a_0 = 1$ ,  $c_0 = 0$  である。

$$(3) \quad \textcircled{3} \text{より, } a_{n+1} + c_{n+1} - \frac{3}{5} = -\frac{2}{3}\left(a_n + c_n - \frac{3}{5}\right)$$

$$a_n + c_n - \frac{3}{5} = \left(a_0 + c_0 - \frac{3}{5}\right)\left(-\frac{2}{3}\right)^n = \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{よって, } a_n + c_n = \frac{2}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{3}{5} \cdots \cdots \textcircled{5}$$

$$\textcircled{4} \text{より, } a_n - c_n = (a_0 + c_0)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \left(-\frac{1}{3}\right)^n \cdots \cdots \textcircled{6}$$

$$\textcircled{5}\textcircled{6} \text{より, } a_n = \frac{1}{5}\left(-\frac{2}{3}\right)^n + \frac{1}{2}\left(-\frac{1}{3}\right)^n + \frac{3}{10}$$