《2018 入試対策》

広島大学

理系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

まえがき

本書には，1998 年度以降に出題された広島大学（前期日程）の理系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「行列」は範囲外ですので除外しました。
　「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

■ 図形と式

1 座標平面上の 2 点 $A(0,\ 1)$　$B(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t \geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y = kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。 [2013]

2 座標平面上の 3 点 $A(0,\ 0)$，$B(1,\ 0)$，$C(x,\ y)$ を考える。ただし $y > 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\triangle$ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2) $\triangle$ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3) 3 つの角 $\angle$CAB, $\angle$ABC, $\angle$BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式 $\alpha \leqq \beta \leqq \gamma < \dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4) x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。 [2009]

3 次の問いに答えよ。

(1) 点 $(3,\ 3)$ における円 $x^2 + y^2 - 4x - 2y = 0$ の接線の方程式を求めよ。

(2) 次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y,\quad \log_2(x^2 + y^2 - 4x - 2y + 5) \leqq \log_2 5$$

(3) a を正の数とする。点 $(x,\ y)$ が(2)で求めた領域を動くとき，$ax + y$ の最大値が 4 になるように a の値を定めよ。 [2004]

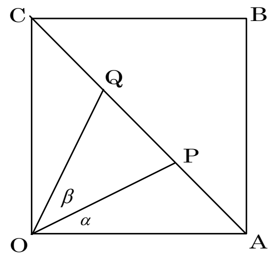
■ 図形と計量

1　正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P, C に近い点を Q とする。また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるようにとる。このとき，比 AR : RC を求めよ。　[2006]



■ ベクトル

1　座標空間に 4 点 O(0, 0, 0)，A(s, s, s)，B(−1, 1, 1)，C(0, 0, 1) がある。ただし，$s>0$ とする。t, u, v を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ のとき，t を s を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$ のとき，u, v を s を用いて表せ。

(3)　(2)のとき，2 点 D, E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。　[2016]

2　座標空間内に 5 点 O(0, 0, 0)，$\mathrm{A}\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$\mathrm{B}\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，C($s$, t, 0)，D(0, u, 0) がある。ただし，s, t, u は実数で，$s>0$，$t>0$，$s+t=1$ を満たすとする。3 点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1)　直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

(2)　u を t を用いて表せ。また，$0<u<1$ であることを示せ。

(3)　点(0, 1, 0) を E とする。点 D が線分 OE を 12 : 1 に内分するとき，t の値を求めよ。　[2015]

3　四面体 OABC において $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=\mathrm{OC}=\mathrm{AB}=\mathrm{AC}=1$ とする。$\triangle\mathrm{OAB}$ の重心を F, $\triangle\mathrm{OAC}$ の重心を G とし，辺 OA の中点を M とする。また，$\angle\mathrm{BOC}=2\theta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OF}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{FG}} \parallel \overrightarrow{\mathrm{BC}}$ であることを示せ。

(3)　$\triangle\mathrm{MBC}$ の面積を θ を用いて表せ。　[2014]

4　$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件 $(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直であることを証明せよ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$，$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ を θ を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC の周の長さ $\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}$ を最大にする θ を求めよ。　[2012]

5　平面上で，線分 AB を $1:2$ に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ とする。$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。　[2011]

6 四面体 OABC において $\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s，t を用いて $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき，s, t の値を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q，直線 BP と直線 AC の交点を R とする。$\mathrm{BQ}:\mathrm{QC}$ および $\mathrm{AR}:\mathrm{RC}$ を求めよ。

(4) (2)の条件を満たす点 P について，3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。 [2009]

7 座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$，および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$，$\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$，$\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2) 上で求めた点 P に対し，$\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3) 上で求めた点 P と C に対し，P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

[2007]

8 $\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ を満たす二等辺三角形 OAB において，頂点 A, B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G，辺 AB の中点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす s, t を θ を用いて表せ。

(2) 点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときの θ の値の範囲を求めよ。

(3) $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}$ の値の範囲を求めよ。 [1999]

9 空間に 4 点 $P_1\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$, $P_2\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$, $P_3\left(1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $P_4\left(-1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$を定め，線分$P_1P_2$の中点を Q とする。

(1) 内積$\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_3}$と$\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_4}$を求めよ。

(2) $\overrightarrow{QP_3}$と$\overrightarrow{QP_4}$のなす角をθとするとき，$\sin\theta$の値を求めよ。

(3) 四面体$P_1P_2P_3P_4$の体積を求めよ。 [1998]

■ 整数と数列

1 x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 $O(0,\ 0)$および$A(50,\ 14)$を考える。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=6$を満たす格子点 P を 1 つ求めよ。

(2) m を自然数とする。$\overrightarrow{OP}\cdot\overrightarrow{OA}=6$を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点をP_mとする。P_1およびP_2を求めよ。

(3) P_mを(2)で定めた格子点とする。自然数 k に対し，ベクトル$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+1}}$および$\overrightarrow{P_{2k}P_{2k+2}}$を成分表示せよ。

(4) P_mを(2)で定めた格子点とする。Q を$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{P_{14}P_{16}}$を満たす点とする。四角形$OQP_{16}P_{14}$の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。 [2017]

2 数列$x_n=2^n$ $(n=0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, …となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

(1) 数列$\{x_n\}$の各項の下 2 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすとする。たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする。

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ。

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ。

(4) 数列$\{x_n\}$の各項の下 3 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，2^mを 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい。 [2016]

3　$\alpha>1$ とする。数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=\alpha$，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1)　$a_n>1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$\sqrt{x}-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$（ただし，$x\geqq0$ とする。）

(3)　$a_n-1\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$　[2014]

4　座標平面上の点で，x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし，連立不等式 $x\geqq0$，$y\geqq0$，$x+y\leqq n$ の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して，領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき，点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1)　領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(2)　領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき，隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし，格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

(3)　領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，互いに隣接点である確率を求めよ。ただし，異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。　[2013]

5　a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a,\ x_{n+1}=f(x_n)\ \ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1)　すべての自然数 n について $x_n=a$ となるとき，a を求めよ。

(2)　$a<1$ のとき，$x_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3)　$0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

[2012]

6　4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は0以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1)　x および y が A に属するならば, その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2)　0 以上の偶数 m に対して, 3^m は A に属することを証明せよ。

(3)　m, n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し, $m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4)　m, n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。　[2010]

7　平面上のベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$ は, その大きさがともに $\sqrt{2}$ であり, なす角が $120°$ である。このとき, 次の問いに答えよ。

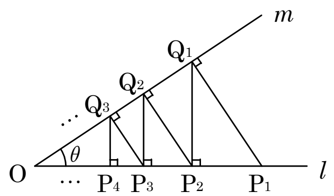
(1)　内積 $(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$ を求めよ。

(2)　k, l を整数とするとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は偶数であることを示せ。

(3)　(2)で, k または l が奇数のとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$ は 4 の倍数ではないことを示せ。

(4)　m, n が整数であり, $m=n=0$ ではないならば, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではないことを示せ。　[2008]

8　右図のように, 点 O から出る 2 本の半直線 l, m があり, l と m のなす角を θ $\left(0<\theta<\frac{\pi}{2}\right)$ とする。l 上に $\mathrm{OP_1}=1$ となるように点 $\mathrm{P_1}$ を定め, $\mathrm{P_1}$ から m に垂線 $\mathrm{P_1Q_1}$ を下ろし, $\mathrm{Q_1}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_1P_2}$ を下ろし, $\mathrm{P_2}$ から m に垂線 $\mathrm{P_2Q_2}$ を下ろし, $\mathrm{Q_2}$ から l に垂線 $\mathrm{Q_2P_3}$ を下ろす。同様にくりかえして, 点 P_n, Q_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を定め, 三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。



(1)　$\dfrac{\mathrm{P_2Q_2}}{\mathrm{P_1Q_1}}$ を求めよ。

(2)　$\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3)　$S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め, $\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(4)　(3)で求めた S を θ の関数と考えて, S の最大値を求めよ。ただし, その最大値を与える θ の値は求めなくてよい。　[2008]

9　条件$a_1=-30$，$9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定義される数列$\{a_n\}$がある。

(1)　$b_n=3^n a_n$とおくとき，数列$\{b_n\}$の漸化式を求めよ。

(2)　一般項a_nを求めよ。

(3)　a_nを最大にするnの値を求めよ。　[2002]

10　1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと，1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ，次に 99，98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ，さらに，97，96，95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下，この操作を続けて，k 番目の箱に k 枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし，1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって，1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号をNとするとき，次の問いに答えよ。

(1)　Nの値を求めよ。また，N番の箱には何枚のカードが入っているか。

(2)　k 番$(1\leqq k\leqq N)$の箱において，その箱の中のカードに書かれている最大の数を k の式で表せ。

(3)　k 番$(1\leqq k\leqq N)$の箱の中のカードに書かれている数の合計をS_kとする。$1\leqq k\leqq N-1$のとき，S_kをkの式で表せ。また，$1\leqq k\leqq N$のとき，S_kの最大値を求めよ。　[2000]

11　nが自然数のとき，次の不等式を証明せよ。ただし，$a>0$とする。

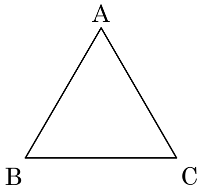
(1)　$(a+1)^n\geqq a^n+na^{n-1}$

(2)　$(n+1)^n\geqq 2n^n$

(3)　$n!\leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$　[1999]

■ 確率

1 　表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0<p<1$ である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



　コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

R は最初 A にあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 　P_2, P_3 を求めよ。

(2) 　P_{2m}, P_{2m+1} $(2 \leqq m \leqq N+1)$ を求めよ。

(3) 　$p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。 [2017]

2 　xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり, 次の試行を行う。

　1 枚の硬貨を投げ, 表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1, 裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし, 点 $(3,\ 1)$ に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を $(x_n,\ y_n)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 　$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2) 　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

(3) 　$x_8+y_8 \leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4) 　$x_{4n}+y_{4n} \leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

[2016]

3　$m,\ n$ を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m\geqq 2$，$n\geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)　$n\geqq 3$ とする。3 種類の文字 $a,\ b,\ c$ から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき $a,\ b,\ c$ すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)　$n\geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\}$，

$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\}$，$\{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$

の 5 通りであるので，$p_3=\dfrac{3}{5}$ である。

(4)　(3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。　　[2015]

4　1 辺の長さが 1 の正六角形において，頂点を反時計回りに P_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6 とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に $j,\ k$ とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点となるとき，この 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする。P_1，P_j，P_k が異なる 3 点とならないときは，$S=0$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$S>0$ となる確率を求めよ。

(2)　S が最大となる確率を求めよ。

(3)　S の期待値を求めよ。　　[2014]

5　n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：

(A)　P は，はじめに点 $(1,\ 2)$ にある。

(B)　さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに 120° 回転し, 3 以上の目が出れば時計回りに 60° 回転する。

(C)　(B)を n 回繰り返す。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，出た目が 4, 1, 2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。

(3)　$n=6$ のとき，P が点 $(-1,\ -2)$ にある確率を求めよ。

(4)　$n=3m$ のとき，P が点 $(1,\ 2)$ にある確率を求めよ。ただし，m は自然数とする。

[2012]

6　△ABC の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が，次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り，裏がでたときは動かない。なお，コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ $\dfrac{1}{2}$ とする。

コインを n 回投げたとき，石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，b_1，c_1 の値を求めよ。

(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。また，a_2，b_2，c_2 および a_3，b_3，c_3 の値を求めよ。

(3)　a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。

(4)　(3)において一致する値を p_n とする。p_n を n で表せ。　[2011]

$\boxed{7}$ n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A，B，C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A，B，C の得点がそれぞれ 4，2，4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A，B，C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2) $n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3) 勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

(4) $P_n(1) \geqq 0.9$ となる最小の n を求めよ。　[2010]

$\boxed{8}$ 2 人のプレーヤーA，B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり，B が勝つ確率は $1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき，ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1) P_4 を求めよ。

(2) P_{2n-1} を求めよ。

(3) P_{2n} を求めよ。

(4) $2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

(5) $S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ とする。p と S の大小関係を調べよ。　[2009]

9　2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石がある。この石は，時刻$t=0$では点 A にあり，その後，次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各$t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$に対して，

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば，時刻$t+1$に石が点 A にある確率は c，点 B にある確率は$1-c$である。

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば，時刻$t+1$に石が点 B にある確率は $2c$，点 A にある確率は$1-2c$である。

ただし，c は$0<c<\dfrac{1}{2}$を満たす定数とする。

いま，n を自然数とし，時刻$t=n$において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。

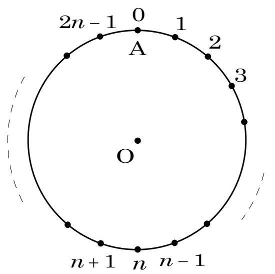
(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。　[2008]

10　n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から$2n-1$までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方，袋の中に 1 から$2n-1$までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える。次の問いに答えよ。



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。

(2)　△ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ。

(3)　△ABC の内部に点 O がある確率は$\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$であることを示せ。

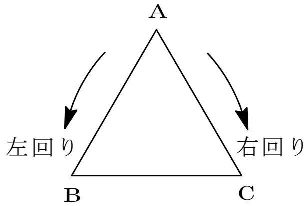
(4)　△ABC の辺上に点 O があるとき$X=1$，△ABC の内部に点 O があるとき$X=2$，それ以外のとき$X=0$とする。Xの期待値を求めよ。　[2007]

11　2 枚のコインを同時に投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

2 枚とも表が出たとき左回りで隣りの頂点に移し，

2 枚とも裏が出たとき右回りで隣りの頂点に移し，

表と裏が出たとき動かさない



という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。この試行を n 回繰り返したとき，1 回目の試行後の駒の位置を X_1，2 回目の試行後の駒の位置を X_2，…，n 回目の試行後の駒の位置を X_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，X_2 が A である確率 P_2 を求めよ。

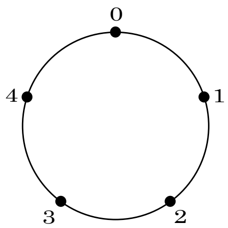
(2)　この試行を 4 回繰り返したとき，最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ。

(3)　この試行を n 回($n \geqq 2$)繰り返したとき，最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ。

(4)　この試行を n 回($n \geqq 2$)繰り返したとき，X_n が A である確率 P_n を求めよ。

[2005]

12　円周を 5 等分して図のように 0 から 4 の目盛りをふる。初めに点 P を目盛り 0 の位置に置く。硬貨を 1 回投げるごとに，表が出れば，点 P を右回りに 2 目盛り動かし，裏が出れば，点 P を左回りに 1 目盛り動かすという操作をくり返し行う。硬貨を n 回投げた後，点 P が目盛り i の位置にある確率を $p_n(i)$ と表す。



(1)　$p_2(1)$，$p_3(2)$，$p_3(3)$ を求めよ。

(2)　硬貨を 4 回投げて，点 P が初めて目盛り 2 の位置で止まる確率を求めよ。

(3)　$p_{n+1}(0) = \dfrac{1}{2}\{p_n(3) + p_n(1)\}$ ($n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$) を示せ。

(4)　z を $z^5 = 1$ を満たす複素数とする。すべての自然数 n に対して，

$\displaystyle\sum_{i=0}^{4} p_n(i) z^i = \frac{(z^2 + z^{-1})^n}{2^n}$ が成り立つことを示せ。

[2004]

13　xy 平面上を移動する点 P を考える。はじめに，点 P は原点にあるとする。4 枚のカードに上，下，左，右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて，それらを袋に入れておく。

1 枚のカードを取り出し，カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて，取り出したカードを袋に戻す，という試行をくり返す。上，下，左，右と書かれたカードは，それぞれ同じ確からしさで取り出されるものとする。

(1)　上，上，下，左，右，右，右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか。

(2)　この試行を 7 回くり返したときに，点 P が座標$(2,\ 1)$にある確率を求めよ。

(3)　この試行を 5 回くり返したときに，点 P が x 軸上にある確率を求めよ。

(4)　この試行を 2 回くり返したときの点 P の座標を$(X,\ Y)$とする。$|X-Y|$の期待値を求めよ。　[2002]

14　A, B, C の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする。A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は $p\,(0<p<1)$，負ける確率は$1-p$ であるとする。第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ。

(1)　第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する。C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。

(2)　第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。F_2，F_3，F_4 をそれぞれ求めよ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} F_{3n}$ を計算せよ。　[2001]

15　1 つのさいころを n 回投げる試行において，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目がちょうど k 回$(0\leqq k\leqq n)$出る確率を p_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，p_1 を求めよ。

(2)　$p_k\ (0\leqq k\leqq n)$ を n と k の式で表せ。また，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q を求めよ。

(3)　$n=3m+2$ (m は自然数)とする。$0\leqq k\leqq n-1$ のとき，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k}\leqq 1$ となる k の範囲を求めよ。さらに，$0\leqq k\leqq n$ のとき，p_k が最大となる k を求めよ。　[2000]

■ 論証

1 　次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3 = \dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 m, n は存在しないことを証明せよ。

(2)　p, q を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。　[2011]

2 　以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(2)　n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[2009]

3 　$f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ。

(2)　$x \geqq 0$ ならば $f(x) \geqq 2$ であることを示せ。

(3)　$x \geqq 2, y \geqq 2$ ならば，$|f(x)-f(y)| \leqq \dfrac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。

(4)　$x \geqq 2$ ならば，$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right| \leqq \dfrac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し，これを用いて，$|r-\sqrt{7}|<10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。　[2007]

■ 複素数

1 複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1) z_3，z_4 を求めよ。

(2) z_n を α，n を用いて表せ。

(3) P が $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，…と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4) z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

[2016]

2 正の実数 a, b, c を係数とする 3 次方程式

$$(*)\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

が，純虚数の解をもつとする。次の問いに答えよ。

(1) $ab-c$ の値を求めよ。

(2) 複素数平面上で方程式 $x^3+8=0$ の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える。方程式(＊)の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき a, b, c の値を求めよ。

[2005]

3　複素数平面上で不等式$2|z-2| \leqq |z-5| \leqq |z+1|$を満たす点 z が描く図形を D とする。

(1)　D を図示せよ。

(2)　点 z が D 上を動くものとする。$\arg z=\theta$ とするとき，$\tan\theta$ の値のとりうる範囲を求めよ。

(3)　D の面積を求めよ。　[2004]

4　θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，複素数平面において $0 \leqq \arg z \leqq \pi-\theta$ を満たすすべての点 $z(\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする。

(1)　複素数平面上に D を図示せよ。

(2)　a を $a>0$ を満たす実数とする。このとき，D に属する点 z に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。　$|z|\sin\theta \leqq |z+a|$

また，等号が成り立つときの z を a，θ を用いて表せ。　[2003]

5　l を複素数平面上の直線 $z=t(1+i)$ (t は実数)，α，β を複素数とする。ただし，点 α は l 上にないとする。

(1)　$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ ならば，l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ であることを示せ。

(2)　l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ ならば，$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ であることを示せ。

(3)　l 上に異なる 2 定点 z_1，z_2 があって，$\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}$ と $\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}$ が同じ複素数になるとする。この複素数を γ とおくとき，l 上のすべての点 z に対し $\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\gamma$ となることを示せ。また γ の値を求めよ。　[2002]

6 z は $0° < \arg z < 90°$ を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(1)，B(z) を頂点とする△OAB を考える。また，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく。

(1) $\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ。

(2) 点 P(w) を，直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3) 点 Q($z + \alpha - \alpha z$) に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ。

(4) $\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)$ を求めよ。ただし，偏角の範囲は，0° 以上 360° 未満とする。

[2001]

7 複素数平面上に，3 点 A($-2i$)，B($1-i$)，C($-1+3i$) と，点 D($1+i$) を中心とする半径 1 の円 K がある。点 P(z) は K の周上にあり，点 Q(w) は，三角形 APQ と三角形 ABC が同じ向きに相似になる点とする(すなわち，AP : AQ = AB : AC で，AP から AQ に反時計まわりに測った角が，AB から AC に反時計まわりに測った角に等しい)。このとき，次の問いに答えよ。

(1) w を z の式で表せ。

(2) 点 P が円 K の周上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。 [2000]

■ 曲線

1 $0 < b < a$ を満たす定数 a, b に対し，2 つの楕円 $A : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$，$B : \dfrac{x^2}{b^2} + \dfrac{y^2}{a^2} = 1$ を考える。また α，β は，$\sin\alpha = \dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta = \dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $\alpha + \beta = \dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(2) 2 つの楕円 A, B の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。

(3) 楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x \geqq 0$, $y \geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を a, b, β を用いて表せ。 [2007]

2　C を曲線 $a^2x^2+y^2=1$，l を直線 $y=ax+2a$ とする。ただし，a は正の定数である。

(1)　C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2)　C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　(1)における交点を P，Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする。a が(1)の範囲を動くとき，X，Y の関係式と Y の範囲を求めよ。　[2002]

3　曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$C : x=\cos^2\theta-\sqrt{3}\sin\theta\cos\theta,\ \ y=\sin\theta\cos\theta-\sqrt{3}\sin^2\theta\ \ \left(0\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi\right)$$

と表されている。

(1)　曲線 C が $C : x=a+b\cos(2\theta+A),\ \ y=c+d\sin(2\theta+A)\ \ \left(0\leqq\theta\leqq\frac{5}{12}\pi\right)$ と表されるような $a,\ b,\ c,\ d,\ A\ (0\leqq A<\pi)$ を求めよ。

(2)　曲線 C の長さを求めよ。　[1998]

■ 極限

1　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3=\tan\dfrac{\pi}{12}$ であることを示せ。

(2)　一般項 a_n を表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n$ を求めよ。　[2017]

2　座標平面上の放物線 $C_n : y = x^2 - p_n x + q_n \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。ただし，p_n，q_n は，$p_1{}^2 - 4q_1 = 4$，$p_n{}^2 - 4q_n > 0 \quad (n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を満たす実数とする。C_n と x 軸との 2 つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする。また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3 \quad (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$p_n = n\sqrt{n}\ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。　[2015]

3　$a,\ b,\ p$ は $a > 0$，$b > 0$，$p < 0$ を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y = e^x$，$C_2 : \dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1$ を考える。ただし，e は自然対数の底である。C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し，その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき，次の問いに答えよ。

(1)　p を a を用いて表せ。

(2)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p + a)$ を求めよ。

(3)　$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2 e^{2a}}{a}$ を求めよ。　[2015]

4　$a_1 = 2$，$a_2 = 1$ と $a_{n+2} = a_{n+1} + 2a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n = a_{n+1} + a_n \ (n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ。

(2)　$n \geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1} b_k$ を n の式で表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。

(4)　数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ。　[2006]

5　数列$\{a_n\}$は，関係式

$$a_1=2,\ (a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n),\ a_{n+1}>a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まっている。

(1)　a_2，a_3，a_4を計算せよ。

(2)　一般項a_nをnの式で表せ。

(3)　$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$を求めよ。　[2001]

6　自然数 n に対して，関数$f_n(x)=p_ne^{nx}+q_ne^{-nx}$が$f_n(0)=1$，$f_n{}'(1)=-n$を満たすとする。

(1)　p_nとq_nを求め，$f_n{}'(x)<0$を示せ。

(2)　方程式$f_n(x)=0$の解z_nを求めよ。

(3)　数列$\{z_n\}$に対して，$\lim_{n\to\infty}z_n$を求めよ。　[1998]

■ 微分法

1　$a>0$とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数$f(t)=t^3-2at+1$の区間$t\geqq 0$における最小値を，aを用いて表せ。

(2)　(1)で求めた最小値が 0 となるときのaの値をAとおく。A^3を求めよ。

(3)　座標平面上の曲線$y=x^4$をC_1，点$(0,\ a)$を中心とする半径aの円をC_2とする。C_1とC_2の共有点の個数を調べよ。

(4)　座標平面において，点 P が曲線$y=x^4$上を動くときの点 P と点$(0,\ a)$の距離の最小値を考える。その最小値がaに等しくなるようなaの値の範囲を求めよ。

[2017]

2　2 つの関数 $f(x)=x\sin x$，$g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ について，次の問いに答えよ。ただし, (3)と(4)において, a および $h(x)$ は(2)で定めたものとする。

(1)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi\leqq x\leqq\pi$ であるものをすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線を $y=h(x)$ と表す。$h(x)$ を求めよ。

(3)　$0\leqq x\leqq a$ のとき，$h(x)\geqq g(x)$ であることを示せ。

(4)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2014]

3　平面上の 3 点 O, A, B は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ を満たすとする。線分 AB の中点を M とする。$t>1$ として，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるように定める。△ABC の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　S を t と θ を用いて表せ。

(2)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S を t のみを用いて表せ。

(3)　$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S が最大となる t の値を求めよ。　[2013]

4　関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。ただし, e は自然対数の底である。

(1)　$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)$ の値を求めよ。

(2)　関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ。

(3)　$\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)$ とおく。正の実数 t に対して，曲線 $y=f(x)$，3 直線 $x=t$，$x=0$ および $y=\alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{t\to\infty}S(t)$ の値を求めよ。　[2012]

5　p, a を実数の定数とする。多項式 $P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であり，3 次方程式 $P(x)=0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1)　実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。

(2)　a の値を求めよ。

(3)　関数 $y=P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。　[2010]

6　関数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ。

(3)　$m<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。　[2006]

7　次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2)　公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を用いて，$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。

(3)　$k>\dfrac{3}{4}$ であることを示せ。

(4)　方程式 $\cos x=x$ の解を α とするとき，$\dfrac{2\pi}{9}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を示せ。ここで，$3.14<\pi<3.15$ を利用してもよい。　[2005]

8　C_1 を曲線 $y=e^x$，C_2 を曲線 $y=x\log x\ (x>0)$ とする。ただし，log は自然対数を表す。また，$x=e$ で定義される直線を l_1，l_1 と C_2 との交点 P を通り x 軸に平行な直線を l_2，l_2 と C_1 との交点 Q を通り y 軸に平行な直線を l_3 とする。

(1)　2 点 P, Q の座標を求めよ。

(2)　$x\geqq 1$ のとき，$e^x>x\log x$ であることを示せ。

(3)　2 直線 l_1，l_3 と 2 曲線 C_1，C_2 によって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2002]

9　関数 $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}\ (x\neq 0)$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$y=f(x)\ (x\neq 0)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

(2)　右側からの極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在するか。存在するならばその値を求め，存在しないならばその理由をいえ。　[2000]

10　$0<a<1$ とする。点$(1,\ 0)$から楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$に引いた接線の接点の x 座標を b とする。

(1)　b を a で表せ。

(2)　楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$の $b \leqq x \leqq a$ の部分と直線$x=b$で囲まれた図形を，x 軸のまわりに1回転してできる立体の体積 V を a で表せ。

(3)　Vの値が最大となる a の値と，そのときの Vの最大値を求めよ。　[1999]

11　k を定数とする。曲線$y=x^3-kx$上の点$\mathrm{P}(a,\ a^3-ka)$における接線 l が，曲線上の P と異なる点$\mathrm{Q}(b,\ b^3-kb)$を通るものとする。

(1)　b を a で表せ。

(2)　Q における曲線$y=x^3-kx$の接線が l と直交するとき，k, a の満たす関係式を求めよ。

(3)　(2)で求めた関係式を満たす a が存在するような k の値の範囲を求めよ。　[1999]

■ 積分法

1　次の問いに答えよ。

(1)　a, b, c を定数とする。関数$f(x)=a\cos^2 x+2b\cos x\sin x+c\sin^2 x$が定数となるための a, b, c の条件を求めよ。

(2)　関数$g(x)=4\cos^2 x+2\cos x\sin x+\sin^2 x-\dfrac{5}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$が最大値をとる x の値をθとする。$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$の値を求めよ。

(3)　(2)の関数$g(x)$とθに対して，定積分$\displaystyle\int_0^{\theta} g(x)\,dx$を求めよ。　[2011]

2　$t>1$ を満たす実数 t に対して，$S(t)=\displaystyle\int_0^1 |xe^x-tx|\,dx$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$0\leqq x\leqq 1$ の範囲で，方程式$xe^x=tx$を満たす x をすべて求めよ。

(2)　$S(t)$を求めよ。

(3)　$S(t)$を最小にする t の値を求めよ。　[2010]

3 次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して, 不等式 $\dfrac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqq \dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし, 対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を, $a_n = \left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき, 極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。 [2008]

4 実数全体で定義された関数 $f(x) = \dfrac{4x+a}{x^2+1}$ は, $x = \dfrac{1}{2}$ で極値をもつ。ただし, a は定数である。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 関数 $y = f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。 [2005]

5 $S_n = \displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{1-\cos x}{x^2}\,dx$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ とおくとき, 次の問いに答えよ。

(1) すべての $n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots$ について, $\dfrac{1}{\pi(n+1)^2} \leqq S_n \leqq \dfrac{1}{\pi n^2}$ が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$ の値を求めよ。 [2003]

6 関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して, $f(x) = x^2 - \displaystyle\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$ を満たすとき, 次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求め, さらに $f'(x) = 2x - f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $(e^x f(x))' = 2xe^x$ を示せ。

(3) $f(x)$ を求めよ。 [2001]

7　閉区間$\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$上の関数$f(x)$を次の式で定義する。

$$f(x)=\int_x^{x+1}\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$$

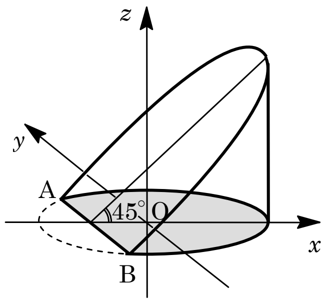
(1)　$f(x)$の導関数$f'(x)$　$\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}\right)$を求めよ。

(2)　$f(x)$を最小にするxの値aと，そのときの最小値を求めよ。

(3)　(2)で求めたaに対して，$\displaystyle\int_a^{a+1}t\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$を求めよ。　[1998]

■ 積分の応用

1　座標空間内の平面$H: z=0$とその上の曲線$C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$を考える。C上の点を通りz軸に平行な直線の全体が作る曲面をKとする。C上の2点$\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$，$\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$に対し，線分ABを含み平面$H$と$45^\circ$の角をなす平面を$T$とする。ただし，平面$T$と$z$軸の交点の$z$座標は正であるとする。平面$H$，平面$T$および曲面$K$が囲む2つの立体のうち$z$軸と交わるものを$V$とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体Vと平面Hの共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

(2)　立体Vを平面$x=t$ $(-1<t<2)$で切ったとき，断面の面積$S(t)$をtを用いて表せ。

(3)　立体Vの体積を求めよ。　[2017]

2　次の問いに答えよ。

(1)　aを正の定数とする。関数$f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$の逆関数$f^{-1}(x)$を求めよ。

(2)　(1)で求めた$f^{-1}(x)$の導関数を求めよ。

(3)　cを正の定数とする。x軸，y軸，直線$x=c$および曲線$y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2016]

3 座標平面上の点$P(1,\ 1)$を中心とし，原点 O を通る円をC_1とする。k を正の定数として，曲線$y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$をC_2とする。C_1とC_2は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

(1) $k,\ q,\ r$ の値を求めよ。

(2) 曲線C_2と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積Sを求めよ。

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$とおくことにより，定積分$\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$の値を求めよ。

(4) 円C_1の原点 O を含まない弧 QR と曲線C_2で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積Vを求めよ。 [2015]

4 次の問いに答えよ。ただし，eは自然対数の底である。

(1) $x\geqq 2$ のとき，$x^4e^{-3x}\leqq 16e^{-6}$を示せ。また，これを用いて$\displaystyle\lim_{x\to\infty}x^3e^{-3x}$を求めよ。

(2) k を定数とする。$x>0$の範囲で方程式$xe^{-3x}=\dfrac{k}{x^2}$がちょうど 2 つの解α，β $(\alpha<\beta)$をもつようなkの値の範囲を求めよ。

(3) (2)の α，β が $\beta=2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y=xe^{-3x}$ $(x>0)$ と曲線 $y=\dfrac{k}{x^2}$ $(x>0)$で囲まれた部分の面積を求めよ。 [2013]

5 曲線$y=e^x$上の点$A(0,\ 1)$における接線を l とし，点$B(0,\ 2)$を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線$y=e^x$の 2 つの交点 P, Q の x 座標をそれぞれα，β（ただし$\alpha<\beta$）とする。直線$x=\alpha$と直線 l の交点をP'，直線$x=\beta$と直線 l の交点をQ'とする。次の問いに答えよ。

(1) 平行四辺形$PP'Q'Q$の面積Sをα，βで表せ。

(2) 直線mと曲線$y=e^x$によって囲まれる図形の面積Tをα，βの多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4) $\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。 [2009]

6 Aを正の定数，θは$0 \leqq \theta \leqq \pi$を満たす実数とし, 2つの曲線

$$y = A\cos x,\quad y = \sin(x-\theta)\quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積をSとする。また，この2つの曲線の交点のx座標をa, $b\,(a<b)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1) $\cos b\sin(a-\theta) = \cos a\sin(b-\theta)$が成り立っているとき，$\cos\theta\sin(b-a) = 0$を示せ。

(2) $b-a=\pi$を示せ。

(3) SをA，a，θを用いて表せ。

(4) S^2をA，θを用いて表せ。

(5) Sを最大にするθの値およびそのときのSの値を求めよ。 [2004]

7 aを$2<a<3$を満たす定数とし，$f(x) = \dfrac{1}{2}\left(e^x - 1 + \dfrac{a-e^x}{a-2} - \left|\, e^x - 1 - \dfrac{a-e^x}{a-2}\,\right|\right)$

とおく。ただし, eは自然対数の底である。

(1) $y=f(x)$のグラフの概形をかけ。

(2) $y=f(x)$のグラフの$y \geqq 0$の部分とx軸とで囲まれる図形を直線$x=\log 2$のまわりに1回転してできる立体の体積Vを求めよ。 [2003]

8 $a>0$とし，極方程式$r = 2a\sin\theta\ \left(0 \leqq \theta \leqq \dfrac{\pi}{4}\right)$で表される曲線を$C$とする。

(1) 曲線Cは円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線Cを図示せよ。

(2) 曲線Cとx軸および直線$x=a$で囲まれた図形を，x軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ。 [2001]

9 次の問いに答えよ。

(1) 不定積分$\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}\,d\theta$を求めよ。

(2) 媒介変数θを用いて,

$$x(\theta) = \int_0^{\theta}(1+\tan u)\,du,\quad y(\theta) = \int_0^{\theta}(1-\tan u)\,du\quad \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線の長さを求めよ。 [2000]

分野別問題と解答例

図形と式／図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

複素数／曲　線／極　限

微分法／積分法／積分の応用

問　題

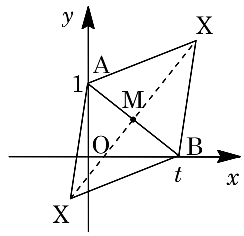
座標平面上の 2 点 $A(0,\ 1)$　$B(t,\ 0)$ を考える。ただし，$t\geqq 0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) 線分 AB を 1 辺とする正三角形は 2 つある。それぞれの正三角形について，2 点 A, B 以外の頂点の座標を t を用いて表せ。

(2) (1)で求めた 2 点のうち x 座標が小さい方を C とする。t を動かすとき，点 C の軌跡を図示せよ。

(3) k を定数とする。点 B と直線 $y=kx$ 上の点 P をそれぞれうまく選ぶことで 3 点 A, B, P を頂点とする正三角形ができるとき，k の値の範囲を求めよ。　[2013]

解答例



(1) 線分 AB の中点 M は $M\left(\dfrac{t}{2},\ \dfrac{1}{2}\right)$ となる。

また，$\overrightarrow{AB}=(t,\ -1)$ に垂直な単位ベクトル $\vec{e}$ は，

$$\vec{e}=\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

さて，線分 AB を 1 辺とする正三角形のもう 1 つの頂点を X とおくと，$|\overrightarrow{AB}|=\sqrt{1+t^2}$，$|\overrightarrow{MX}|=\dfrac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}$ から，

$$\overrightarrow{OX}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MX}=\overrightarrow{OM}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\,\vec{e}=\left(\frac{t}{2},\ \frac{1}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{3}}{2}\sqrt{1+t^2}\cdot\frac{1}{\sqrt{1+t^2}}(1,\ t)$$

$$=\left(\frac{t}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2},\ \frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{3}}{2}t\right)$$

よって，$X\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ または $X\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$

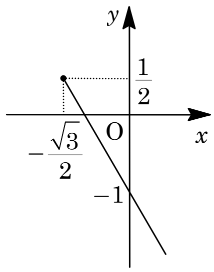
(2) 条件より，$C\left(\dfrac{t}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}-\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ となり，$C(x,\ y)$ とおくと，

$$x=\frac{t}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}\cdots\cdots\text{①},\quad y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}t\cdots\cdots\text{②}$$

①より，$t=2x+\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，

$$y=\frac{1}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}(2x+\sqrt{3})=-\sqrt{3}x-1$$

$t\geqq 0$ から $x\geqq -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ となり，点 C の軌跡は右図のようになる。



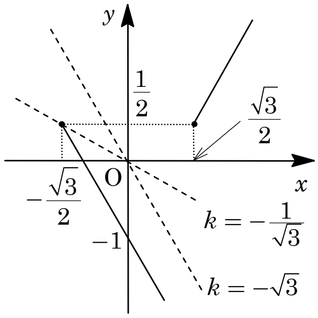
(3) 点 C 以外のもう 1 つの頂点 $D\left(\dfrac{t}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{\sqrt{3}}{2}t\right)$ についても同様にすると，

$$y=\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}(2x-\sqrt{3})=\sqrt{3}x-1\quad\left(x\geqq\frac{\sqrt{3}}{2}\right)$$

よって，点 C と点 D の軌跡は右図の実線となる。

さて，直線 $y=kx$ 上の点 P に対して，3 点 A，B，P を頂点とする正三角形ができるのは，点 C，D の軌跡と直線 $y=kx$ が共有点をもつことなので，

$$k<-\sqrt{3}\,,\ -\frac{1}{\sqrt{3}}\leqq k$$



コメント

とらえにくい(3)の設問への誘導が，うまくつけられている問題です。なお，(1)の解答例では単位ベクトルを利用しましたが，回転を利用する方法もあります。

問　題

座標平面上の 3 点 A$(0,\ 0)$，B$(1,\ 0)$，C$(x,\ y)$を考える。ただし $y>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1) △ABC が二等辺三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(2) △ABC が鋭角三角形であるとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(3) 3 つの角 ∠CAB, ∠ABC, ∠BCA をそれぞれ α，β，γ とし，不等式 $\alpha\leqq\beta\leqq\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ を満たすとする。そのとき x, y が満たす条件を求め，点 C の存在範囲を図示せよ。

(4) x, y が(3)の条件を満たすとき，γ がとりうる値の範囲を求めよ。　[2009]

解答例

(1) △ABC が二等辺三角形であるとき，点 C$(x,\ y)$の存在範囲は，$y>0$ において，

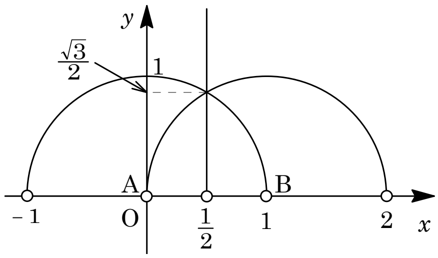
(i) AC = BC のとき　点 C は線分 AB の垂直二等分線 $x=\dfrac{1}{2}$ 上にある。

(ii) AB = AC のとき

点 C は点 A を中心とする半径 1 の円 $x^2+y^2=1$ 上にある。

(iii) BC = BA のとき

点 C は点 B を中心とする半径 1 の円 $(x-1)^2+y^2=1$ 上にある。



(i)(ii)(iii)より，点 C は右上図の円または直線上にある。

(2) △ABC が鋭角三角形である条件は，

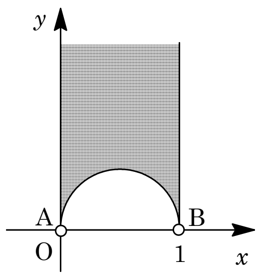
$$\angle\mathrm{CAB}<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\text{①},\ \angle\mathrm{ABC}<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\text{②},\ \angle\mathrm{BCA}<\frac{\pi}{2}\ \cdots\cdots\text{③}$$

$y>0$ において，①②③がすべて成立する点 C$(x,\ y)$の存在範囲を求める。

①より，点 C は y 軸の右側，すなわち領域 $x>0$ にある。

②より，点 C は直線 $x=1$ の左側，すなわち領域 $x<1$ にある。

③より，点 C は AB を直径とする円の外部，すなわち領域 $\left(x-\dfrac{1}{2}\right)^2+y^2>\dfrac{1}{4}$ にある。



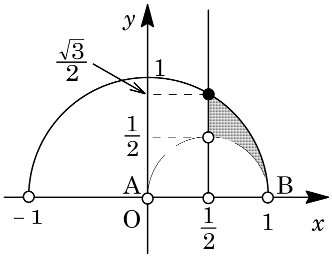
①②③より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，境界は領域に含まない。

(3)　まず，$\alpha=\angle\mathrm{CAB}<\dfrac{\pi}{2}$，$\beta=\angle\mathrm{ABC}<\dfrac{\pi}{2}$，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}<\dfrac{\pi}{2}$ より，点 C は(2)の領域内に存在する。

ここで，条件から，$\alpha\leqq\beta\leqq\gamma$ なので，三角形の角と辺の大小関係を用いると，

$$\mathrm{BC}\leqq\mathrm{AC}\leqq\mathrm{AB}$$

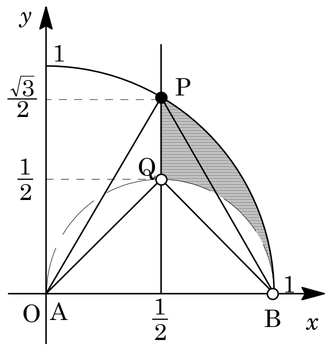
すると，BC≦AC から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x\geqq\dfrac{1}{2}$ にある。



また，AC≦AB から，(1)の結果を利用すると，点 C は領域 $x^2+y^2\leqq1$ にある。

以上より，点 C は右図の網点部に存在する。ただし，破線の境界は領域に含まない。

(4)　まず，点 $\mathrm{P}\left(\dfrac{1}{2}\ \ \dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$ とおくと，△ABP は正三角形となるので，$\angle\mathrm{APB}=\dfrac{\pi}{3}$ である。



また，AB を直径とする円周上に点 Q をとると，$\angle\mathrm{AQB}=\dfrac{\pi}{2}$ である。

すると，点 C が右図の網点部に存在するとき，線分 AB を弦とする円弧を考え，$\gamma=\angle\mathrm{BCA}$ のとりうる値を求めると，右図より，$\dfrac{\pi}{3}\leqq\gamma<\dfrac{\pi}{2}$ である。

コメント

巧みな誘導がついている平面図形と領域の総合問題です。式だけで攻めるのではなく，図形的に解くと，スッキリした解になります。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　点$(3,\ 3)$における円$x^2+y^2-4x-2y=0$の接線の方程式を求めよ。

(2)　次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y,\quad \log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5$$

(3)　a を正の数とする。点$(x,\ y)$が(2)で求めた領域を動くとき，$ax+y$の最大値が4になるようにaの値を定めよ。　[2004]

解答例

(1)　$x^2+y^2-4x-2y=0$ より，$(x-2)^2+(y-1)^2=5$

点$(3,\ 3)$における接線の方程式は,

$$(3-2)(x-2)+(3-1)(y-1)=5,\quad x+2y=9$$

(2)　$\log_{\frac{1}{2}}(2x-3) \geqq \log_{\frac{1}{2}} y$ ……①，$\log_2(x^2+y^2-4x-2y+5) \leqq \log_2 5$ ……②

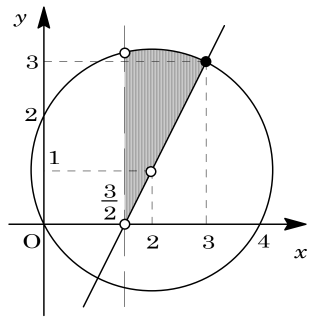
①より，$x>\dfrac{3}{2}$かつ$y>0$として，$2x-3 \leqq y$

②より，$x^2+y^2-4x-2y+5>0$として，$x^2+y^2-4x-2y+5 \leqq 5$から,

$$(x,\ y) \neq (2,\ 1),\ (x-2)^2+(y-1)^2 \leqq 5$$

以上をまとめて，連立不等式の表す領域を図示すると，右図の網点部のようになる。

なお，実線の境界線と黒丸の点は含み，破線の境界線と白丸の点は含まない。



(3)　$ax+y=k$ とおくと，$y=-ax+k$ となり，(1)から，点$(3,\ 3)$における接線の傾きが$-\dfrac{1}{2}$より,

(i)　$-a \leqq -\dfrac{1}{2}\left(a \geqq \dfrac{1}{2}\right)$のとき

kは点$(3,\ 3)$で最大となり，最大値は$k=3a+3$

条件より$3a+3=4$とすると，$a=\dfrac{1}{3}$となるが，$a \geqq \dfrac{1}{2}$を満たさない。

(ii)　$-a>-\dfrac{1}{2}\left(0<a<\dfrac{1}{2}\right)$のとき

直線$ax+y-k=0$と円$(x-2)^2+(y-1)^2=5$が接する場合にkは最大となり,

$$\frac{|2a+1-k|}{\sqrt{a^2+1}}=\sqrt{5},\quad |2a+1-k|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}$$

条件より，このとき$k=4$なので，$|2a-3|=\sqrt{5}\cdot\sqrt{a^2+1}$

$$(2a-3)^2=5(a^2+1),\quad a^2+12a-4=0$$

$0 < a < \dfrac{1}{2}$ より，$a = -6 + 2\sqrt{10}$

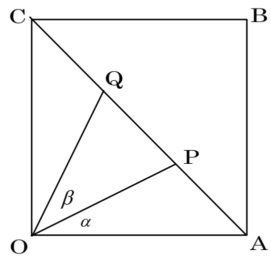
(i)(ii)より，$a = -6 + 2\sqrt{10}$

コメント

対数不等式を用いて条件づけられた最大・最小問題です。解き終えても，あまり疲労を感じません。

問　題

正方形 OABC の対角線 AC を 3 等分し，図のように，A に近い点を P，C に近い点を Q とする。また，$\angle\mathrm{AOP}=\alpha$，$\angle\mathrm{POQ}=\beta$ とする。次の問いに答えよ。

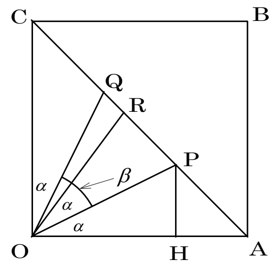


(1)　$\cos\alpha$，$\cos\beta$ の値を求めよ。

(2)　$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ を示せ。

(3)　線分 PQ 上に点 R を $\angle\mathrm{POR}=\alpha$ となるようにとる。このとき，比 AR : RC を求めよ。　　[2006]

解答例



(1)　まず，一般性を失うことなく，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=1$ とすることができる。

ここで，P から OA に下ろした垂線の足を H とすると，$\mathrm{OH}:\mathrm{HA}=\mathrm{CP}:\mathrm{PA}=2:1$ から，

$$\mathrm{OP}=\sqrt{\mathrm{OH}^2+\mathrm{PH}^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{5}}{3}$$

これより，$\cos\alpha=\dfrac{\mathrm{OH}}{\mathrm{OP}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}=\dfrac{2}{5}\sqrt{5}$

$$\cos\beta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-2\alpha\right)=\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha=2\sqrt{1-\left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{4}{5}$$

(2)　まず，$4>\sqrt{15}$ より $\dfrac{2}{\sqrt{5}}>\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$5\sqrt{3}>8$ より $\dfrac{\sqrt{3}}{2}>\dfrac{4}{5}$ となるので，

$$\frac{2}{\sqrt{5}}>\frac{\sqrt{3}}{2}>\frac{4}{5},\quad \cos\alpha>\cos\frac{\pi}{6}>\cos\beta$$

$f(x)=\cos x$ は $0<x<\dfrac{\pi}{2}$ で単調減少するので，$\alpha<\dfrac{\pi}{6}<\beta$ となる。

(3)　(1)から $\sin 2\alpha=\dfrac{4}{5}$ なので，$\cos 2\alpha=\sqrt{1-\left(\dfrac{4}{5}\right)^2}=\dfrac{3}{5}$

さて，$\angle\mathrm{ORA}=\pi-\left(\dfrac{\pi}{4}+2\alpha\right)=\dfrac{3}{4}\pi-2\alpha$ から，$\triangle\mathrm{OAR}$ に正弦定理を適用すると，

$$\frac{\mathrm{AR}}{\sin 2\alpha}=\frac{1}{\sin\left(\frac{3}{4}\pi-2\alpha\right)},\quad \mathrm{AR}=\frac{\sin 2\alpha}{\sin\frac{3}{4}\pi\cos 2\alpha-\cos\frac{3}{4}\pi\sin 2\alpha}$$

よって，$\mathrm{AR}=\dfrac{4}{5}\cdot\dfrac{1}{\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{3}{5}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{4}{5}}=\dfrac{8}{7\sqrt{2}}=\dfrac{4}{7}\sqrt{2}$

これより，$\mathrm{RC}=\sqrt{2}-\dfrac{4}{7}\sqrt{2}=\dfrac{3}{7}\sqrt{2}$ となり，$\mathrm{AR}:\mathrm{RC}=4:3$ である。

コメント

ベクトルを利用した設定で，文系に類題が出ていますが，理系ではこの誘導はありません。しかし，そのために逆に発想が制約されず，本問の方が魅力ある問題となっています。

問　題

座標空間に 4 点 O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(s,\ s,\ s)$，B$(-1,\ 1,\ 1)$，C$(0,\ 0,\ 1)$があある。ただし，$s>0$ とする。$t,\ u,\ v$ を実数とし，$\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$のとき，$t$ を s を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$，$\vec{d}\perp\vec{e}$のとき，$u,\ v$ を s を用いて表せ。

(3) (2)のとき，2 点 D，E を，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}$，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}$ となる点とする。四面体 OADE の体積が 2 であるとき，s の値を求めよ。　[2016]

解答例

(1) $s>0$ で，O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(s,\ s,\ s)$，B$(-1,\ 1,\ 1)$，C$(0,\ 0,\ 1)$に対して，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{s^2+s^2+s^2}=\sqrt{3}s,\ |\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=\sqrt{1+1+1}=\sqrt{3},\ |\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=-s+s+s=s,\ \overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=s,\ \overrightarrow{\mathrm{OB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=1$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{d}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{d}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})=0$ となり，

$$s-3s^2t=0,\ t=\frac{1}{3s}\cdots\cdots\cdots①$$

(2) まず，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\vec{e}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\vec{e}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$s-3s^2u-sv=0,\ 1-3su-v=0\cdots\cdots\cdots②$$

また，$\vec{d}\perp\vec{e}$ より，$\vec{d}\cdot\vec{e}=(\overrightarrow{\mathrm{OB}}-t\overrightarrow{\mathrm{OA}})\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-u\overrightarrow{\mathrm{OA}}-v\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$1-su-3v-st+3s^2tu+stv=0\cdots\cdots\cdots③$$

①③より，$1-su-3v-\frac{1}{3}+su+\frac{1}{3}v=0$，$\frac{2}{3}-\frac{8}{3}v=0$，$v=\frac{1}{4}\cdots\cdots\cdots④$

②④より，$\frac{3}{4}-3su=0$，$u=\frac{1}{4s}\cdots\cdots\cdots⑤$

(3) ①より，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}=\vec{d}=(-1,\ 1,\ 1)-\frac{1}{3s}(s,\ s,\ s)=\frac{2}{3}(-2,\ 1,\ 1)$

④⑤より，$\overrightarrow{\mathrm{OE}}=\vec{e}=(0,\ 0,\ 1)-\frac{1}{4s}(s,\ s,\ s)-\frac{1}{4}(-1,\ 1,\ 1)=\frac{1}{2}(0,\ -1,\ 1)$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OD}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より△ODE は直角三角形となり，また$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OD}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OE}}$ より OA は△ODE に垂直である。これより，四面体 OADE の体積 V は，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}\mathrm{OD}\cdot\mathrm{OE}\cdot\mathrm{OA}=\frac{1}{6}\cdot\frac{2}{3}\sqrt{4+1+1}\cdot\frac{1}{2}\sqrt{1+1}\cdot\sqrt{3}s=\frac{s}{3}$$

よって，条件から $V=2$ なので，$\frac{s}{3}=2$ すなわち $s=6$ である。

コメント

空間ベクトルの基本的な問題です。成分表示して計算していくと，スムーズに結論まで導けます。

問　題

座標空間内に 5 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$B\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$，$C(s,\ t,\ 0)$，$D(0,\ u,\ 0)$ がある。ただし，$s,\ t,\ u$ は実数で，$s>0$，$t>0$，$s+t=1$ を満たすとする。3 点 A, B, C の定める平面が y 軸と点 D で交わっているとき，次の問いに答えよ。

(1) 直線 AB と x 軸との交点の x 座標を求めよ。

(2) u を t を用いて表せ。また，$0<u<1$ であることを示せ。

(3) 点 $(0,\ 1,\ 0)$ を E とする。点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき，t の値を求めよ。　[2015]

解答例

(1) 点 $A\left(0,\ 0,\ \dfrac{3}{4}\right)$，$B\left(\dfrac{1}{2},\ 0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ に対して，直線 AB と x 軸との交点を $P(v,\ 0,\ 0)$ とおくと，k を実数として，$\overrightarrow{AP}=k\overrightarrow{AB}$ となり，

$$\left(v,\ 0,\ -\frac{3}{4}\right)=k\left(\frac{1}{2},\ 0,\ -\frac{1}{4}\right)$$

すると，$-\dfrac{3}{4}=-\dfrac{1}{4}k$ より $k=3$ となり，$v=3\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{2}$ である。

(2) 3 点 A, B, C の定める平面と，3 点 A, P, C の定める平面は一致し，この平面と y 軸との交点 D は，l を実数として，$\overrightarrow{PD}=l\overrightarrow{PC}$ と表せる。

そこで，(1)から $P\left(\dfrac{3}{2},\ 0,\ 0\right)$，また $s=1-t>0$ として $C(1-t,\ t,\ 0)$ となるので，

$$\left(-\frac{3}{2},\ u,\ 0\right)=l\left(-\frac{1}{2}-t,\ t,\ 0\right)$$

すると，$-\dfrac{3}{2}=l\left(-\dfrac{1}{2}-t\right)$ より $l=\dfrac{3}{2t+1}$ となり，$u=\dfrac{3t}{2t+1}$ ………(＊)

そこで，(＊)より $u=\dfrac{3}{2}\left(1-\dfrac{1}{2t+1}\right)$ となり，$0<t<1$ のとき，

$$\frac{1}{3}<\frac{1}{2t+1}<1,\ 0<1-\frac{1}{2t+1}<\frac{2}{3}$$

これより，$0<u<1$ である。

(3) 点 $E(0,\ 1,\ 0)$ に対し，点 D が線分 OE を $12:1$ に内分するとき $u=\dfrac{12}{13}$ であり，

$$\frac{3t}{2t+1}=\frac{12}{13},\ 39t=24t+12$$

よって，$t=\dfrac{4}{5}$ となる。

コメント

空間座標についての計算問題です。ただ，それだけです。

問　題

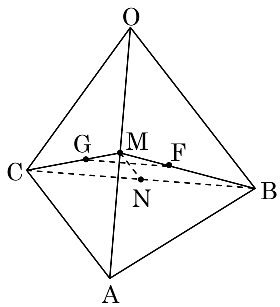
四面体 OABC において $OA = OB = OC = AB = AC = 1$ とする。$\triangle OAB$ の重心を F, $\triangle OAC$ の重心を G とし, 辺 OA の中点を M とする。また, $\angle BOC = 2\theta$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{OF}$ を $\overrightarrow{OA}$, $\overrightarrow{OB}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{FG} \,/\!/\, \overrightarrow{BC}$ であることを示せ。

(3)　$\triangle MBC$ の面積を θ を用いて表せ。　[2014]

解答例



(1)　F は $\triangle OAB$ の重心より, $\overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$

(2)　G は $\triangle OAC$ の重心より, $\overrightarrow{OG} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC})$

$$\overrightarrow{FG} = \overrightarrow{OG} - \overrightarrow{OF} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OC}) - \frac{1}{3}(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB})$$

$$= \frac{1}{3}(\overrightarrow{OC} - \overrightarrow{OB}) = \frac{1}{3}\overrightarrow{BC}$$

よって, $\overrightarrow{FG} \,/\!/\, \overrightarrow{BC}$ である。

(3)　$OA = OB = OC = AB = AC = 1$ より, $\triangle OAB$, $\triangle OAC$ は正三角形であり,

$$MB = MC = 1 \cdot \sin 60^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

すると, $\triangle MBC$ は二等辺三角形となり, 辺 BC の中点を N とおくと, $MN \perp BC$ である。さらに, $ON \perp BC$, $\angle BOC = 2\theta$ から, $\angle BON = \theta$ となり,

$$BC = 2BN = 2 \cdot 1 \cdot \sin\theta = 2\sin\theta,\quad MN = \sqrt{MB^2 - NB^2} = \sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2\theta}$$

よって, $\triangle MBC$ の面積 S は,

$$S = \frac{1}{2}BC \cdot MN = \frac{1}{2} \cdot 2\sin\theta\sqrt{\frac{3}{4} - \sin^2\theta} = \frac{1}{2}\sin\theta\sqrt{3 - 4\sin^2\theta}$$

コメント

空間ベクトルの基本の確認です。(3)は二等辺三角形に着目すると, 利用するのは三平方の定理だけです。

問　題

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。原点 O を中心とする単位円周上の異なる 3 点 A, B, C が条件 $(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1) 2 つのベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直であることを証明せよ。

(2) $|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|$, $|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|$ を θ を用いて表せ。

(3) 三角形 ABC の周の長さ AB＋BC＋CA を最大にする θ を求めよ。　[2012]

解答例

(1) $(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{0}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}-(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|^2=\cos^2\theta|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|^2+2\cos\theta\sin\theta\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\sin^2\theta|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|^2$$

ここで，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ から，$\cos\theta\sin\theta\,\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$

$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ より $\cos\theta\sin\theta>0$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ は垂直である。

(2) まず，$\overrightarrow{\mathrm{CA}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos\theta+1)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CA}}|^2=(\cos\theta+1)^2+\sin^2\theta=2+2\cos\theta,\ |\overrightarrow{\mathrm{CA}}|=\sqrt{2+2\cos\theta}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{CB}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OC}}=(\cos\theta)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+(\sin\theta+1)\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ から，

$$|\overrightarrow{\mathrm{CB}}|^2=\cos^2\theta+(\sin\theta+1)^2=2+2\sin\theta,\ |\overrightarrow{\mathrm{CB}}|=\sqrt{2+2\sin\theta}$$

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}=0$ より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{2}$ となり，

$$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=\sqrt{2}+\sqrt{2+2\sin\theta}+\sqrt{2+2\cos\theta}$$

$f(\theta)=\sqrt{1+\sin\theta}+\sqrt{1+\cos\theta}$ とおくと，$\mathrm{AB}+\mathrm{BC}+\mathrm{CA}=\sqrt{2}\{1+f(\theta)\}$

$$f'(\theta)=\frac{\cos\theta}{2\sqrt{1+\sin\theta}}-\frac{\sin\theta}{2\sqrt{1+\cos\theta}}=\frac{\cos\theta\sqrt{1+\cos\theta}-\sin\theta\sqrt{1+\sin\theta}}{2\sqrt{1+\sin\theta}\sqrt{1+\cos\theta}}$$

$$=\frac{\cos^2\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta(1+\sin\theta)}{2\sqrt{1+\sin\theta}\sqrt{1+\cos\theta}\left\{\cos\theta\sqrt{1+\cos\theta}+\sin\theta\sqrt{1+\sin\theta}\right\}}$$

さらに，$g(\theta)=\cos^2\theta(1+\cos\theta)-\sin^2\theta(1+\sin\theta)$ とおくと，

$$g(\theta)=\cos^3\theta+\cos^2\theta-\sin^3\theta-\sin^2\theta$$
$$=(\cos\theta-\sin\theta)(1+\cos\theta\sin\theta+\cos\theta+\sin\theta)$$

すると，$g(\theta)$ と $f'(\theta)$ の符号は一致するので，$f(\theta)$ の増減は右表のようになる。

θ	0	$\cdots$	$\frac{\pi}{4}$	$\cdots$	$\frac{\pi}{2}$
$f'(\theta)$		＋	0	－	
$f(\theta)$		↗		↘	

したがって，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき $f(\theta)$ は最大となる。

すなわち，AB＋BC＋CA は，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最大である。

コメント

(3)の計算は，半角の公式を利用した方が簡単だろうと思いつつ，そのまま微分して増減を調べました。

問　題

平面上で，線分 AB を$1:2$に内分する点を O とし，O を中心とする半径 OB の円を S，円 S と直線 AB との交点のうち点 B と異なる方を C とする。点 P は円 S の内部にあり，線分 BC 上にないものとする。円 S と直線 PB との交点のうち点 B と異なる方を Q とする。$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{APB}=\theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

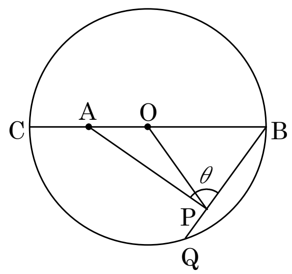
(1)　$\overrightarrow{\mathrm{PO}}$，$\overrightarrow{\mathrm{PC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ を $\vec{a}$，$\vec{b}$ で表せ。

(2)　点 P が円 S の内部にあることを用いて，$\cos\theta<\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$ を証明せよ。

(3)　PQ の長さを $|\vec{a}|$，$|\vec{b}|$，θ で表せ。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ とする。$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ を満たすとき，$\triangle\mathrm{PAB}$ の面積を求めよ。　[2011]

解答例



(1)　線分 AB を$1:2$に内分する点が O，$1:4$に外分する点が C より，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{PB}}=\vec{b}$ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{PO}}=\frac{2\vec{a}+\vec{b}}{3},\ \overrightarrow{\mathrm{PC}}=\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\dfrac{-2\vec{a}+2\vec{b}}{3}$

(2)　点 P は円 S の内部にあるので，$\angle\mathrm{BPC}>90^\circ$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PC}}=\vec{b}\cdot\frac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}<0,\ 4\vec{a}\cdot\vec{b}<|\vec{b}|^2$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}<\dfrac{|\vec{b}|^2}{4|\vec{a}||\vec{b}|}=\dfrac{|\vec{b}|}{4|\vec{a}|}$

(3)　$\overrightarrow{\mathrm{QP}}=k\vec{b}$ $(k>0)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}=(1+k)\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{QC}}=k\vec{b}+\dfrac{4\vec{a}-\vec{b}}{3}=\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}$

点 Q は円 S 上の点より，$\overrightarrow{\mathrm{QB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{QC}}=(1+k)\vec{b}\cdot\dfrac{4\vec{a}+(3k-1)\vec{b}}{3}=0$ となり，

$$4\vec{a}\cdot\vec{b}+(3k-1)|\vec{b}|^2=0,\ 4|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta+(3k-1)|\vec{b}|^2=0$$

よって，$3k|\vec{b}|=|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta$ から，$\mathrm{PQ}=k|\vec{b}|=\dfrac{|\vec{b}|-4|\vec{a}|\cos\theta}{3}$ となる。

(4)　$\mathrm{PA}=3$，$\mathrm{PB}=2$ から，(2)の結果を用いると，$\mathrm{PQ}=\dfrac{2-12\cos\theta}{3}$ となり，

$$\mathrm{BQ}=2+\frac{2-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}=\frac{8-12\cos\theta}{3}\cdot\frac{\mathrm{BP}}{2}=\frac{4-6\cos\theta}{3}\mathrm{BP}$$

また，$\mathrm{BA}=\dfrac{3}{2}\mathrm{BO}$ から，$\triangle\mathrm{QAB}=\dfrac{4-6\cos\theta}{3}\cdot\dfrac{3}{2}\triangle\mathrm{POB}=(2-3\cos\theta)\triangle\mathrm{POB}$

条件より，$\triangle\mathrm{QAB}=3\triangle\mathrm{POB}$ なので，$2-3\cos\theta=3$ となり，

$$\cos\theta=-\frac{1}{3},\ \sin\theta=\sqrt{1-\left(-\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

以上より，$\triangle\mathrm{PAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{PA}\cdot\mathrm{PB}\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot3\cdot2\cdot\dfrac{2\sqrt{2}}{3}=2\sqrt{2}$

コメント

平面ベクトルの標準題です。計算量も適切なものです。

問　題

四面体 OABC において$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{AOC}=\dfrac{\pi}{2}$，$\angle\mathrm{BOC}=\dfrac{\pi}{3}$，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=2$，$\mathrm{OC}=1$ とする。3 点 A, B, C を通る平面上の点 P を考え，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{p}$ とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\vec{c}$ とするとき，$\vec{p}$ は実数 s, t を用いて $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ と表される。このとき，次の問いに答えよ。

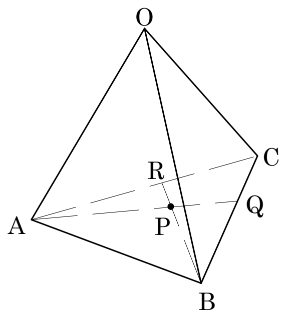
(1) 内積 $\vec{p}\cdot\vec{a}$，$\vec{p}\cdot\vec{b}$，$\vec{p}\cdot\vec{c}$ を s, t を用いて表せ。

(2) 点 P が $\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ を満たすとき，s, t の値を求めよ。

(3) (2)の条件を満たす点 P について，直線 AP と直線 BC の交点を Q，直線 BP と直線 AC の交点を R とする。BQ : QC および AR : RC を求めよ。

(4) (2)の条件を満たす点 P について，3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積の比を求めよ。　[2009]

解答例



(1) 条件より，$|\vec{a}|=|\vec{b}|=2$，$|\vec{c}|=1$ であり，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}=0,\ \vec{b}\cdot\vec{c}=2\cdot1\cdot\cos\frac{\pi}{3}=1$$

すると，$\vec{p}\cdot\vec{a}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{a}=4(1-s-t)$

$$\vec{p}\cdot\vec{b}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{b}=4s+t$$

$$\vec{p}\cdot\vec{c}=\left((1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}\right)\cdot\vec{c}=s+t$$

(2) 条件より，$\angle\mathrm{AOP}=\angle\mathrm{BOP}=\angle\mathrm{COP}$ から，

$$\cos\angle\mathrm{AOP}=\cos\angle\mathrm{BOP}=\cos\angle\mathrm{COP}$$

$$\frac{\vec{p}\cdot\vec{a}}{|\vec{p}||\vec{a}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{b}}{|\vec{p}||\vec{b}|}=\frac{\vec{p}\cdot\vec{c}}{|\vec{p}||\vec{c}|}$$

(1)の結果を用いると，$\dfrac{4(1-s-t)}{2}=\dfrac{4s+t}{2}=s+t$ から，

$$4(1-s-t)=4s+t\ \cdots\cdots\cdots①,\quad 4s+t=2(s+t)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$s=\dfrac{2}{9}$，$t=\dfrac{4}{9}$

(3) $\vec{p}=(1-s-t)\vec{a}+s\vec{b}+t\vec{c}$ より，$\vec{p}-\vec{a}=s(\vec{b}-\vec{a})+t(\vec{c}-\vec{a})$ となり，(2)から，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AB}}+t\overrightarrow{\mathrm{AC}}=\frac{2}{9}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{4}{9}\overrightarrow{\mathrm{AC}}\ \cdots\cdots\cdots③$$

さて，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと，③から，$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\dfrac{2}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}k\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

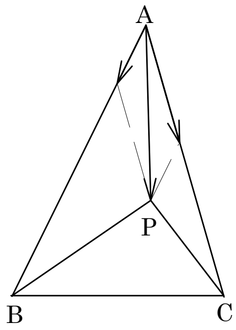
Q は直線 BC 上にあるので，$\dfrac{2}{9}k+\dfrac{4}{9}k=1$ から $k=\dfrac{3}{2}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\frac{1}{3}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \mathrm{BQ}:\mathrm{QC}=2:1$$

同様にして，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=(1-l)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ とおくと，③から，$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\left(1-\dfrac{7}{9}l\right)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\dfrac{4}{9}l\overrightarrow{\mathrm{AC}}$

R は直線 AC 上にあるので，$1-\dfrac{7}{9}l=0$ から $l=\dfrac{9}{7}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{AR}}=\frac{4}{7}\overrightarrow{\mathrm{AC}},\ \ \mathrm{AR}:\mathrm{RC}=4:3$$



(4)　△ABP, △BCP, △CAP の面積比は, ③より,

$$\frac{4}{9}:\left(1-\frac{4}{9}-\frac{2}{9}\right):\frac{2}{9}=4:3:2$$

これより, 3 つの四面体 OABP, OBCP, OCAP の体積比は, 4 : 3 : 2 である。

コメント

空間ベクトルの有名問題です。なお, ③式の係数に△ABC との面積比が明示されていますので, (4)では, (3)の結果を利用しない方がストレートです。

問　題

座標空間の 2 点 $\mathrm{A}(2,\ 0,\ 0)$, $\mathrm{B}(0,\ -1,\ 0)$, および $\vec{u}=(-1,\ 2,\ 5)$, $\vec{v}=(1,\ 1,\ 1)$, $\vec{w}=(-1,\ 3,\ 1)$ と成分表示される 3 つのベクトルがある。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ と $\vec{u}$ が平行かつ $\overrightarrow{\mathrm{BP}}$ と $\vec{v}$ が平行となるような点 P の座標を求めよ。

(2) 上で求めた点 P に対し, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}$ と $\vec{w}$ が直交するような点 $\mathrm{C}(0,\ 0,\ c)$ を求めよ。

(3) 上で求めた点 P と C に対し, P は 3 点 A, B, C の定める平面上にあることを示せ。

[2007]

解答例

(1) $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とおくと, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x-2,\ y,\ z)$, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=(x,\ y+1,\ z)$ となる。

さて, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}\,/\!/\,\vec{u}$ より, s を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\vec{u}$, $(x-2,\ y,\ z)=s(-1,\ 2,\ 5)$

$x=-s+2$, $y=2s$, $z=5s$ ………①

また, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}\,/\!/\,\vec{v}$ より, t を実数として, $\overrightarrow{\mathrm{BP}}=t\vec{v}$, $(x,\ y+1,\ z)=t(1,\ 1,\ 1)$

$x=t$, $y=t-1$, $z=t$ ………②

①②より, $-s+2=t$ ……③, $2s=t-1$ ……④, $5s=t$ ……⑥

③④より, $t=\dfrac{5}{3}$, $s=\dfrac{1}{3}$ となり, この値は⑥を満たす。

よって, ①より $x=\dfrac{5}{3}$, $y=\dfrac{2}{3}$, $z=\dfrac{5}{3}$ となり, $\mathrm{P}\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}\right)$ である。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{5}{3}-c\right)$ となり, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\perp\vec{w}$ から, $\overrightarrow{\mathrm{CP}}\cdot\vec{w}=0$

$-\dfrac{5}{3}+3\times\dfrac{2}{3}+\dfrac{5}{3}-c=0$, $c=2$

よって, $\mathrm{C}(0,\ 0,\ 2)$ となる。

(3) $\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\left(\dfrac{5}{3},\ \dfrac{2}{3},\ -\dfrac{1}{3}\right)$, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}=(2,\ 0,\ -2)$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}=(0,\ -1,\ -2)$ より,

$\overrightarrow{\mathrm{CP}}=\dfrac{5}{6}\overrightarrow{\mathrm{CA}}-\dfrac{2}{3}\overrightarrow{\mathrm{CB}}$

よって, P は 3 点 A, B, C の定める平面上にある。

コメント

(3)では, x 成分, y 成分より, $\overrightarrow{\mathrm{CA}}$, $\overrightarrow{\mathrm{CB}}$ の係数をそれぞれ定め, その後, z 成分を確認しました。連立方程式を立てるほどでもありません。

問　題

$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}$ を満たす二等辺三角形 OAB において，頂点 A, B からそれぞれの対辺またはその延長上に引いた 2 つの垂線の交点を G, 辺 AB の中点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$，$\angle\mathrm{AOB}=\theta$ とおく。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{OG}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ を満たす s, t を θ を用いて表せ。

(2) 点 G が三角形 OAB の外部または周上にあるときの θ の値の範囲を求めよ。

(3) $\dfrac{\pi}{6}\leqq\theta\leqq\dfrac{2}{3}\pi$ のとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}$ の値の範囲を求めよ。 [1999]

解答例

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(s-1)\vec{a}+t\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{BG}}=\overrightarrow{\mathrm{OG}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=s\vec{a}+(t-1)\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{AG}}\cdot\vec{b}=0$ より，$(s-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=0$

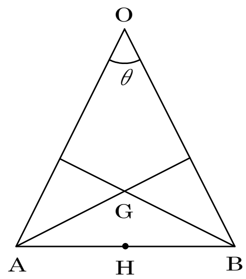
$s\vec{a}\cdot\vec{b}+t|\vec{b}|^2=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$s\cos\theta+t=\cos\theta$ ………①

$\overrightarrow{\mathrm{BG}}\cdot\vec{a}=0$ より，$s|\vec{a}|^2+(t-1)\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$s|\vec{a}|^2+t\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{b}$

$|\vec{a}|=|\vec{b}|$ より，$s+t\cos\theta=\cos\theta$ ………②



①②より，$\cos\theta\neq\pm1$ なので，$s=t=\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}$

(2) 点 G が三角形 OAB の外部または周上にある条件は，$s\leqq0$ または $t\leqq0$ または $s+t\geqq1$ である。

(1)から，$\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}\leqq0$ ……③，または $\dfrac{2\cos\theta}{\cos\theta+1}\geqq1$ ……④

③より $\cos\theta\leqq0$ となり，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$

④より $2\cos\theta\geqq\cos\theta+1$ となり，$\cos\theta\geqq1$ から不成立。

以上より，$\dfrac{\pi}{2}\leqq\theta<\pi$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{GH}}=\overrightarrow{\mathrm{OH}}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\dfrac{1}{2}(\vec{a}+\vec{b})-\dfrac{\cos\theta}{\cos\theta+1}(\vec{a}+\vec{b})=\dfrac{1-\cos\theta}{2(\cos\theta+1)}(\vec{a}+\vec{b})$ より，

$$|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|=\left|\dfrac{1-\cos\theta}{2(\cos\theta+1)}\right||\vec{a}+\vec{b}|,\ |\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\dfrac{1}{2}|\vec{a}+\vec{b}|$$

よって，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|}=\left|\dfrac{1-\cos\theta}{\cos\theta+1}\right|=\dfrac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}=-1+\dfrac{2}{1+\cos\theta}$

ここで$\dfrac{\pi}{6} \leqq \theta \leqq \dfrac{2}{3}\pi$より，$-\dfrac{1}{2} \leqq \cos\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$なので，$\dfrac{1}{2} \leqq 1+\cos\theta \leqq \dfrac{2+\sqrt{3}}{2}$

$$7-4\sqrt{3} \leqq -1+\frac{2}{1+\cos\theta} \leqq 3$$

以上より，$7-4\sqrt{3} \leqq \dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{GH}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|} \leqq 3$

コメント

(3)では(2)の結果を用いて，点 G が△OAB の内部にあるときと外部または周上にあるときに場合分けをしてもよいのですが，解が長くなるだけです。もっとも，最初はそうしたのですが。

問　題

空間に 4 点 $P_1\left(0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$, $P_2\left(0,\ -\dfrac{\sqrt{5}-1}{2},\ 1\right)$, $P_3\left(1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$, $P_4\left(-1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-1}{2}\right)$ を定め，線分 P_1P_2 の中点を Q とする。

(1) 内積 $\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_3}$ と $\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_4}$ を求めよ。

(2) $\overrightarrow{QP_3}$ と $\overrightarrow{QP_4}$ のなす角を θ とするとき，$\sin\theta$ の値を求めよ。

(3) 四面体 $P_1P_2P_3P_4$ の体積を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $\overrightarrow{P_2P_1}=(0,\ \sqrt{5}-1,\ 0)$, $\overrightarrow{QP_3}=\left(1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ より，$\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_3}=0$

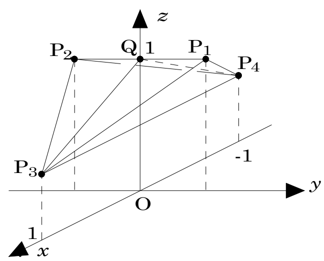
また，$\overrightarrow{QP_4}=\left(-1,\ 0,\ \dfrac{\sqrt{5}-3}{2}\right)$ より，$\overrightarrow{P_2P_1}\cdot\overrightarrow{QP_4}=0$

(2) $l=QP_3=QP_4$ とおくと，

$$l^2=1+\frac{(\sqrt{5}-3)^2}{4}=\frac{9-3\sqrt{5}}{2}$$

$$\sin\theta=2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=2\cdot\frac{1}{l}\cdot\frac{1-\dfrac{\sqrt{5}-1}{2}}{l}$$

$$=2\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{9-3\sqrt{5}}=\frac{2}{3}$$



(3) (1)より，P_1P_2 は平面 QP_3P_4 に垂直である。

また(2)より，$\triangle QP_3P_4=\dfrac{1}{2}l^2\sin\theta=\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{9-3\sqrt{5}}{2}\cdot\dfrac{2}{3}=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}$

四面体 $P_1P_2P_3P_4$ の体積を V とすると，

$$V=\frac{1}{3}\cdot\triangle QP_3P_4\cdot P_1P_2=\frac{1}{3}\cdot\frac{3-\sqrt{5}}{2}\cdot(\sqrt{5}-1)=\frac{1}{3}(2\sqrt{5}-4)$$

コメント

一見、複雑そうでますが，図形に対称性があるので，見かけほどではありません。(2)では，内積を利用して $\cos\theta$，さらに $\sin\theta$ を求める解もありますが，少々計算が複雑です。

問　題

x 座標，y 座標がともに整数である座標平面上の点を格子点とよぶ。格子点 O$(0,\ 0)$ および A$(50,\ 14)$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P を 1 つ求めよ。

(2)　m を自然数とする。$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ を満たす格子点 P のうち，長さ OP が m 番目に小さい点を P_m とする。P_1 および P_2 を求めよ。

(3)　P_m を(2)で定めた格子点とする。自然数 k に対し，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}$ および $\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}$ を成分表示せよ。

(4)　P_m を(2)で定めた格子点とする。Q を $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}$ を満たす点とする。四角形 $\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$ の周および内部に含まれる格子点をすべて求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(50,\ 14)$ に対して，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(x,\ y)$ とおくと，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=6$ より，

$$50x+14y=6,\ 25x+7y=3\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，①を満たす解の 1 つとして $(x,\ y)=(-1,\ 4)$ から，P$(-1,\ 4)$ となる。

(2)　(1)より，$25\cdot(-1)+7\cdot4=3\ \cdots\cdots②$となり，①－②から，

$$25(x+1)+7(y-4)=0,\ 25(x+1)=-7(y-4)$$

すると，25 と 7 は互いに素なので l を整数として，$x+1=-7l$，$y-4=25l$

$$(x,\ y)=(-7l-1,\ 25l+4)\ \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，OP が m 番目に小さい点を P_m とすると，③から，

$$\mathrm{OP}^2=(-7l-1)^2+(25l+4)^2=674l^2+214l+17$$
$$=674\left(l+\frac{107}{674}\right)^2-\frac{107^2}{674}+17$$

これより，$-\dfrac{1}{2}<-\dfrac{107}{674}<0$ から，OP が一番小さい$(m=1)$のは $l=0$ のときより $\mathrm{P}_1(-1,\ 4)$，次に小さい$(m=2)$のは $l=-1$ のときより $\mathrm{P}_2(6,\ -21)$ である。

(3)　(2)と同様に考えて，$m=1$ のとき $l=0$，$m=2$ のとき $l=-1$，$m=3$ のとき $l=1$，$m=4$ のとき $l=-2$，$m=5$ のとき $l=2$，…より，自然数 k に対して帰納的に，$m=2k+1$ のとき $l=k$，$m=2k$ のとき $l=-k$ となり，③から，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{2k+1}}=(-7k-1,\ 25k+4),\ \overrightarrow{\mathrm{OP}_{2k}}=(7k-1,\ -25k+4)$$

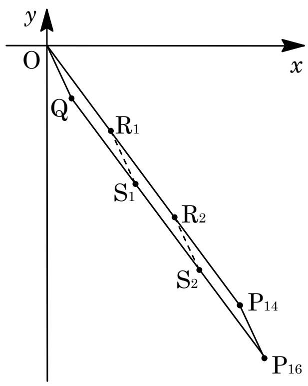
よって，$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+1}}=(-7k-1-(7k-1),\ 25k+4-(-25k+4))=(-14k,\ 50k)$

$$\overrightarrow{\mathrm{P}_{2k}\mathrm{P}_{2k+2}}=(7k+6-(7k-1),\ -25k-21-(-25k+4))=(7,\ -25)$$

(4)　(3)より，$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{14}}=(7\cdot7-1,\ -25\cdot7+4)=(48,\ -171)$

$\overrightarrow{\mathrm{OP}_{16}}=(7\cdot8-1,\ -25\cdot8+4)=(55,\ -196)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}}=(7,\ -25)$



すると，右図のように四角形$\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$は平行四辺形となり，この周および内部に含まれる格子点を調べる。

まず，頂点O，Q，P_{16}，P_{14}はすべて格子点である。

次に，辺 OQ の方程式は，$y=-\dfrac{25}{7}x$から，両端点以外に格子点はない。また，辺$\mathrm{P}_{14}\mathrm{P}_{16}$も同様である。

また，辺OP_{14}の方程式は，$y=-\dfrac{171}{48}x=-\dfrac{57}{16}x$から，両端点以外に格子点$\mathrm{R}_1(16,\ -57)$，$\mathrm{R}_2(32,\ -114)$が存在する。また，辺$\mathrm{QP}_{16}$も同様で，両端点以外に格子点$\mathrm{S}_1(23,\ -82)$，$\mathrm{S}_2(39,\ -139)$が存在する。

さらに，四角形$\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$の内部に格子点$(a,\ b)$が存在すると仮定すると，

$$-\frac{57}{16}(a-7)-25<b<-\frac{57}{16}a,\quad -\frac{57a+1}{16}<b<-\frac{57}{16}a\ \cdots\cdots\cdots④$$

④より，$-57a-1<16b<-57a$，$-1<57a+16b<0$となり，a，b は整数より成立しない。すなわち，四角形$\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$の内部に格子点は存在しない。

以上より，$\mathrm{OQP}_{16}\mathrm{P}_{14}$の周および内部に含まれる格子点の座標は，

$(0,\ 0)$，$(7,\ -25)$，$(23,\ -82)$，$(39,\ -139)$，$(55,\ -196)$，$(48,\ -171)$
$(16,\ -57)$，$(32,\ -114)$

コメント

格子点と整数についての問題です。(3)までは標準的ですが，最後の設問の(4)は数値が大きく，さらに図が描きにくいために，かなり面倒です。

問　題

数列 $x_n = 2^n$ $(n = 0,\ 1,\ 2,\ \cdots)$ を考える。この数列は 1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …であるが，各項の下 1 桁をみると，1, 2, 4, 8, 6, 2, 4, 8, 6, …となっており，2 から循環が始まり循環の周期は 4 である。次の問いに答えよ。

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，1 桁の数に対しては 0 を補って下 2 桁とみなすとする。たとえば，2 の下 2 桁は 02 とする。

(2) 4 の倍数で，25 で割って 1 余る 2 桁の自然数 A を求めよ。

(3) 8 の倍数で，125 で割って 1 余る 3 桁の自然数 B を求めよ。

(4) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，あるところから循環する。循環が始まるところと，循環の周期を求めよ。ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることを用いてもよい。　[2016]

解答例

(1) 数列 $\{x_n\}$ の各項の下 2 桁，すなわち 100 で割った余りについて，循環が始まるところを x_l，循環の周期を p とおく。

すると，x_0 のみ奇数なので $l \geqq 1$ となり，k を自然数として，

$$x_{l+p} - x_l = 100k,\ \ 2^l(2^p - 1) = 2^2 \cdot 5^2 k \cdots\cdots\cdots ①$$

①より，2^l は偶数，$2^p - 1$ は奇数なので，$l \geqq 2$ で $2^p - 1$ は $5^2 = 25$ の倍数となり，

$$2^p \equiv 1 \pmod{25} \cdots\cdots\cdots ②$$

②を満たす最小の自然数 p を求めるために，以下，mod25 で記すと，

$$2^1 \equiv 2,\ 2^2 \equiv 4,\ 2^3 \equiv 8,\ 2^4 \equiv 16,\ 2^5 \equiv 7,\ 2^6 \equiv 14,\ 2^7 \equiv 3,\ 2^8 \equiv 6$$

$$2^9 \equiv 12,\ 2^{10} \equiv 24 \equiv -1$$

すると，$2^{20} \equiv (-1)^2 = 1$ となり，②を満たす最小の自然数 p は 20 である。

よって，①は $l = 2$，$p = 20$ で成立するので，$\{x_n\}$ の各項の下 2 桁は，$x_2 = 4$ から周期 20 の循環が始まる。

(2) 25 で割って 1 余る 2 桁の自然数は, 26, 51, 76 である。この中で, 4 の倍数であるのは 76 より，$A = 76$ である。

(3) 125 で割って 1 余る 3 桁の自然数は, 126, 251, 376, 501, 626, 751, 876 である。この中で, 8 の倍数であるのは 376 より，$B = 376$ である。

(4) (1)と同様に設定し，数列 $\{x_n\}$ の各項の下 3 桁，すなわち 1000 で割った余りについて，循環が始まるところを x_l $(l \geqq 1)$，循環の周期を p とおき，k を自然数として，

$$x_{l+p} - x_l = 1000k,\ \ 2^l(2^p - 1) = 2^3 \cdot 5^3 k \cdots\cdots\cdots ③$$

③より，$l \geqq 3$ で，2^p-1 は125の倍数となり，

$$2^p \equiv 1 \pmod{125} \cdots\cdots\cdots ④$$

ここで，2^m を 125 で割って 1 余るような最小の自然数 m が 100 であることより，④を満たす最小の自然数 p は 100 である。

よって，③は $l=3$，$p=100$ で成立するので，$\{x_n\}$ の各項の下 3 桁は，$x_3=8$ から周期 100 の循環が始まる。

コメント

数列の周期性についての問題です。(1)は，はじめ下 2 桁の数値を列挙して求めようと思ったのですが，なかなか同じものが現れず，途中で止めて方針転換をしました。ただ，後続の設問をみると，出題意図は放棄した方法だったかもしれません。

問　題

$\alpha>1$ とする。数列$\{a_n\}$を，$a_1=\alpha$ ，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$によって定める。次の不等式が成り立つことを証明せよ。

(1) $a_n>1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2) $\sqrt{x}-1\leqq\dfrac{1}{2}(x-1)$（ただし，$x\geqq0$ とする。）

(3) $a_n-1\leqq\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ [2014]

解答例

(1) 漸化式 $a_1=\alpha>1$ ，$a_{n+1}=\sqrt{\dfrac{2a_n}{a_n+1}}$ で定められる数列$\{a_n\}$に対して，$a_n>1$ であることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i) $n=1$のとき　$a_1=\alpha>1$ より成立する。

(ii) $n=k$のとき　$a_k>1$ と仮定する。

$$a_{k+1}-1=\sqrt{\frac{2a_k}{a_k+1}}-1=\frac{\sqrt{2a_k}-\sqrt{a_k+1}}{\sqrt{a_k+1}}=\frac{a_k-1}{\sqrt{a_k+1}\left(\sqrt{2a_k}+\sqrt{a_k+1}\right)}>0$$

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，$a_n>1$ である

(2) $x\geqq0$ のとき，$x-1-2(\sqrt{x}-1)=x-2\sqrt{x}+1=(\sqrt{x}-1)^2\geqq0$ より，

$$x-1\geqq2(\sqrt{x}-1),\ \sqrt{x}-1\leqq\frac{1}{2}(x-1)\cdots\cdots\cdots(*)$$

(3) (1)より $a_n>1$ なので，$\dfrac{2a_n}{a_n+1}-1=\dfrac{a_n-1}{a_n+1}>0$ となり，(*)を適用すると，

$$a_{n+1}-1=\sqrt{\frac{2a_n}{a_n+1}}-1\leqq\frac{1}{2}\left(\frac{2a_n}{a_n+1}-1\right)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{a_n+1}<\frac{1}{2}\cdot\frac{a_n-1}{2}=\frac{1}{4}(a_n-1)$$

これより，$n\geqq2$ のとき，$a_n-1<\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(a_1-1)=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)$

また，$n=1$のときは，$a_1-1=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{1-1}(\alpha-1)$ となるので，

$$a_n-1\leqq\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}(\alpha-1)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

コメント

漸化式と不等式の問題です。(1)(2)を誘導として(3)につなげるという意図と思えますので，その通りにしました。ただ，(1)の証明を上記のように行うと，(2)の不等式は不可欠ではありません。

問　題

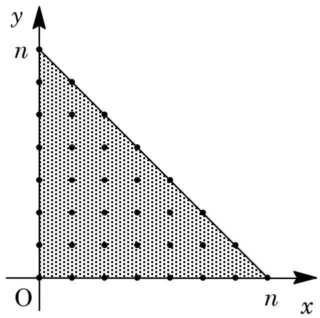
座標平面上の点で, x 座標と y 座標がともに整数である点を格子点という。n を 3 以上の自然数とし, 連立不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \leqq n$ の表す領域を D とする。格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して, 領域 D 内の格子点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ が $|a-c|+|b-d|=1$ を満たすとき, 点 B を点 A の隣接点という。次の問いに答えよ。

(1) 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものの個数を求めよ。

(2) 領域 D から格子点を 1 つ選ぶとき, 隣接点の個数の期待値が 3 以上となるような n の範囲を求めよ。ただし, 格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。

(3) 領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき, 互いに隣接点である確率を求めよ。ただし, 異なる格子点の選ばれ方は同様に確からしいものとする。　[2013]

解答例



(1) まず, 連立不等式 $x \geqq 0$, $y \geqq 0$, $x+y \leqq n$ で表される領域 D は, 右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まれる。

さて, a, b, c, d が整数で, $|a-c|+|b-d|=1$ のとき,

$$(a-c,\ b-d)=(\pm 1,\ 0),\ (0,\ \pm 1)$$

これより, 格子点 $\mathrm{A}(a,\ b)$ に対して, その隣接点 $\mathrm{B}(c,\ d)$ は, 領域 D 内にあり,

$$(c,\ d)=(a-1,\ b),\ (a+1,\ b),\ (a,\ b-1),\ (a,\ b+1)$$

すると, 領域 D 内の格子点のうち隣接点の個数が 4 であるものは, 連立不等式 $x \geqq 1$, $y \geqq 1$, $x+y \leqq n-1$ で表される領域内の格子点である。その個数は,

$$1+2+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

(2) 領域 D の境界線上の格子点 P について, 隣接点の個数は,

(i) $\mathrm{P}(0,\ 0)$ のとき　隣接点は点 $(1,\ 0)$ と点 $(0,\ 1)$ となり, 個数は 2 である。

(ii) $\mathrm{P}(n,\ 0)$ のとき　隣接点は点 $(n-1,\ 0)$ となり, 個数は 1 である。

(iii) $\mathrm{P}(0,\ n)$ のとき　隣接点は点 $(0,\ n-1)$ となり, 個数は 1 である。

(iv) $\mathrm{P}(k,\ 0)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は, 点 $(k-1,\ 0)$, 点 $(k,\ 1)$, 点 $(k+1,\ 0)$ となり, 個数は 3 である。

(v) $\mathrm{P}(0,\ k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は, 点 $(0,\ k-1)$, 点 $(1,\ k)$, 点 $(0,\ k+1)$ となり, 個数は 3 である。

(vi) $\mathrm{P}(k,\ n-k)$ $(k=1,\ 2,\ \cdots,\ n-1)$ のとき

隣接点は, 点 $(k-1,\ n-k)$ および点 $(k,\ n-k-1)$ となり, 個数は 2 である。

さて，領域 D 内の格子点の総数 N は，$N=1+2+\cdots+(n+1)=\dfrac{1}{2}(n+1)(n+2)$

(a)　隣接点の個数が 1 のとき

(ii)(iii)より 2 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2}{N}$ となる。

(b)　隣接点の個数が 2 のとき

(i)(vi)より $1+(n-1)=n$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{n}{N}$ となる。

(c)　隣接点の個数が 3 のとき

(iv)(v)より $2(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{2(n-2)}{N}$ となる。

(d)　隣接点の個数が 4 のとき

(1)より $\dfrac{1}{2}(n-2)(n-1)$ 通りの場合があり，その確率は $\dfrac{(n-2)(n-1)}{2N}$ となる。

(a)〜(d)より，隣接点の個数の期待値 E は,

$$E=\frac{1}{N}\left\{1\cdot 2+2\cdot n+3\cdot 2(n-1)+4\cdot\frac{1}{2}(n-2)(n-1)\right\}$$
$$=\frac{2}{(n+1)(n+2)}2n(n+1)=\frac{4n}{n+2}$$

すると，$E=\dfrac{4n}{n+2}\geqq 3$ となるのは，$4n\geqq 3n+6$ から，$n\geqq 6$ である。

(3)　領域 D から異なる格子点を 2 つ選ぶとき，${}_N\mathrm{C}_2$ 通りの場合があり，

$${}_N\mathrm{C}_2=\frac{N(N-1)}{2}=\frac{1}{8}(n+1)(n+2)\{(n+1)(n+2)-2\}$$
$$=\frac{1}{8}n(n+1)(n+2)(n+3)$$

2 つの格子点が隣接点のとき，その方向が上下または左右の 2 パターンあり，

$$(1+2+\cdots+n)\times 2=n(n+1)$$

よって，その確率は，$\dfrac{8n(n+1)}{n(n+1)(n+2)(n+3)}=\dfrac{8}{(n+2)(n+3)}$ である。

コメント

格子点の個数と確率の融合問題です。領域 D の図を見ながら，個数を数えています。

問　題

a を実数とし，$f(x)=x^3-3x^2+3x$ とおく。数列 $\{x_n\}$ を

$$x_1=a\,,\ x_{n+1}=f(x_n)\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

で定める。次の問いに答えよ。

(1) すべての自然数 n について $x_n=a$ となるとき, a を求めよ。

(2) $a<1$ のとき，$x_n<1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

(3) $0<a<1$ のとき，$x_n<x_{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ が成り立つことを証明せよ。

[2012]

解答例

(1) 条件は，$x_n=x_{n+1}=a$ と同値なので，$a^3-3a^2+3a=a$

$$a^3-3a^2+2a=0\,,\ a(a-1)(a-2)=0$$

よって，$a=0,\ 1,\ 2$

(2) $a<1$ のとき，$x_n<1$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$x_1=a<1$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$x_k<1$ と仮定する。

$$x_{k+1}-1=x_k^{\ 3}-3x_k^{\ 2}+3x_k-1=(x_k-1)^3<0$$

よって，$x_{k+1}<1$ が成り立つ。

(i)(ii)より, $a<1$ のとき, すべての自然数 n について $x_n<1$ である。

(3) まず, $0<a<1$ のとき，$x_n>0$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i) $n=1$ のとき　$x_1=a>0$ より成り立つ。

(ii) $n=k$ のとき　$x_k>0$ と仮定する。

$$x_{k+1}=x_k^{\ 3}-3x_k^{\ 2}+3x_k=x_k\left\{\left(x_k-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}\right\}>0$$

よって，$x_{k+1}>0$ が成り立つ。

(i)(ii)より, $0<a<1$ のとき, すべての自然数 n について $x_n>0$ である。

すると, (2)と合わせて，$0<x_n<1$ となり,

$$x_{n+1}-x_n=x_n^{\ 3}-3x_n^{\ 2}+2x_n=x_n(x_n-1)(x_n-2)>0$$

よって，すべての自然数 n について $x_n<x_{n+1}$ が成り立つ。

コメント

上の解答例では省いていますが, 解き始める前に，$y=f(x)$ と $y=x$ のグラフをかいて, (1)〜(3)の結論を図でチェックしています。

問　題

4 で割ると余りが 1 である自然数全体の集合を A とする。すなわち,

$$A=\{4k+1 \mid k\text{は}0\text{以上の整数}\}$$

とする。次の問いに答えよ。

(1) x および y が A に属するならば，その積 xy も A に属することを証明せよ。

(2) 0 以上の偶数 m に対して，3^m は A に属することを証明せよ。

(3) m，n を 0 以上の整数とする。$m+n$ が偶数ならば 3^m7^n は A に属し，$m+n$ が奇数ならば 3^m7^n は A に属さないことを証明せよ。

(4) m，n を 0 以上の整数とする。$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数のうち A に属する数全体の和を m と n を用いて表せ。　[2010]

解答例

(1) 条件より, k, l を 0 以上の整数として，$x=4k+1$，$y=4l+1$ と表すと,

$$xy=(4k+1)(4l+1)=4(4kl+k+l)+1$$

よって，積 xy は 4 で割ると 1 余り，集合 A に属する。

(2) 条件より，$m=2k$ とおくと, $k\geqq 1$ のとき，二項定理より,

$$3^m=3^{2k}=9^k=(8+1)^k=8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8+1$$

$8^k+{}_k\mathrm{C}_1 8^{k-1}+{}_k\mathrm{C}_2 8^{k-2}+\cdots+{}_k\mathrm{C}_{k-1}8$ は 4 の倍数より，3^m は 4 で割ると 1 余る。

なお，$m=0$ のときは $3^m=1$ から，このときも 4 で割ると 1 余る。

以上より，3^m は A に属する。

(3) まず, (2)と同様に考え，$m+n$ が偶数の場合は, M, N を整数として,

(i) $m=2k$，$n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l}=9^k49^l=(8+1)^k(48+1)^l=(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，3^m7^n は A に属する。

(ii) $m=2k+1$，$n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l+1}=3(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(20+1)(4M+1)(4N+1)$$

すると, (1)の結果から，3^m7^n は A に属する。

次に，$m+n$ が奇数の場合は,

(iii) $m=2k$，$n=2l+1$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k}7^{2l+1}=(4M+1)\cdot 7(4N+1)=(4+3)(16MN+4M+4N+1)$$

すると，3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(iv) $m=2k+1$，$n=2l$ のとき

$$3^m7^n=3^{2k+1}7^{2l}=3(4M+1)(4N+1)=3(16MN+4M+4N+1)$$

すると，3^m7^n は 4 で割った余りが 3 となり, A には属さない。

(4)　$3^{2m+1}7^{2n+1}$ の正の約数は，$0 \leqq k \leqq 2m+1$，$0 \leqq l \leqq 2n+1$ として $3^k 7^l$ と表せ，この中で A に属する数は，(3)の結果から $k+l$ が偶数の場合である。この数全体の和を S とすると，

$$S = (1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n}) + (3+3^3+\cdots+3^{2m+1})(7+7^3+\cdots+7^{2n+1})$$
$$= (1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n}) + 21(1+3^2+\cdots+3^{2m})(1+7^2+\cdots+7^{2n})$$
$$= 22\cdot\frac{9^{m+1}-1}{9-1}\cdot\frac{49^{n+1}-1}{49-1} = \frac{11}{192}(9^{m+1}-1)(49^{n+1}-1)$$

コメント

整数についての問題です。(1)と(2)が(3)の，そして(3)が(4)の誘導になっています。

問　題

平面上のベクトル$\vec{a}$, $\vec{b}$は, その大きさがともに$\sqrt{2}$であり, なす角が$120°$である。このとき, 次の問いに答えよ。

(1) 内積$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})$を求めよ。

(2) k, lを整数とするとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は偶数であることを示せ。

(3) (2)で, kまたはlが奇数のとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は4の倍数ではないことを示せ。

(4) m, nが整数であり, $m=n=0$ではないならば, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$は整数ではないことを示せ。　[2008]

解答例

(1) $|\vec{a}|=|\vec{b}|=\sqrt{2}$, $\vec{a}\cdot\vec{b}=\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cos 120°=-1$ より,

$$(\vec{a}+\vec{b})\cdot(\vec{a}+\vec{b})=|\vec{a}|^2+2\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2=2$$

(2) $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2=k^2|\vec{a}|^2+2kl\vec{a}\cdot\vec{b}+l^2|\vec{b}|^2=2(k^2-kl+l^2)$

よって, k, lは整数より, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は偶数である。

(3) (i) kが奇数, lが奇数のとき

k^2, kl, l^2はすべて奇数より, k^2-kl+l^2は奇数となるので, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は 4 の倍数ではない。

(ii) kが奇数, lが偶数のとき

k^2は奇数, kl, l^2は偶数より, k^2-kl+l^2は奇数となるので, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は 4 の倍数ではない。

(iii) kが偶数, lが奇数のとき

k^2, klは偶数, l^2は奇数より, k^2-kl+l^2は奇数となるので, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は 4 の倍数ではない。

(i)～(iii)より, kまたはlが奇数のとき, $|k\vec{a}+l\vec{b}|^2$は4の倍数ではない。

(4) まず, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$が整数ならば, $m=n=0$を証明する。

$|m\vec{a}+n\vec{b}|=\sqrt{2(m^2-mn+n^2)}$が整数となるためには, (3)より, m^2-mn+n^2が偶数, すなわちm, nがともに偶数であることが必要である。

そこで, $m=2m_1$, $n=2n_1$ (m_1, n_1は整数)とおくと,

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2\sqrt{2({m_1}^2-m_1n_1+{n_1}^2)}$$

すると, $|m\vec{a}+n\vec{b}|$が整数となるためには, m_1, n_1がともに偶数であることが必要であり, $k=1, 2, \cdots$として, $m_k=2m_{k+1}$, $n_k=2n_{k+1}$ (m_k, n_kは整数)とおくと,

$$|m\vec{a}+n\vec{b}|=2^k\sqrt{2({m_k}^2-m_kn_k+{n_k}^2)}$$

これより，m_k，n_k がともに偶数であるのは，$m=n=0$ の場合しかありえない。

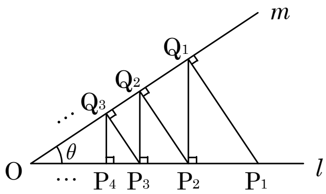
よって，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ が整数ならば，$m=n=0$ である。

この命題の対偶をとると，$m=n=0$ ではないならば，$|m\vec{a}+n\vec{b}|$ は整数ではない。

コメント

(4)は，0 以外の整数を 2 でドンドン割っていくと，いつかは奇数になるということを利用しています。もっと詳しく記述した方がよかったかもしれませんが。

問　題



右図のように，点Oから出る2本の半直線 l, m があり，l と m のなす角を $\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とする。l 上に $\mathrm{OP}_1=1$ となるように点 P_1 を定め，P_1 から m に垂線 $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1$ を下ろし，Q_1 から l に垂線 $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ を下ろし，P_2 から m に垂線 $\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2$ を下ろし，Q_2 から l に垂線 $\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$ を下ろす。同様にくりかえして，点 P_n，Q_n $(n=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を定め，三角形 $\mathrm{P}_n\mathrm{Q}_n\mathrm{P}_{n+1}$ の面積を S_n とする。次の問いに答えよ。

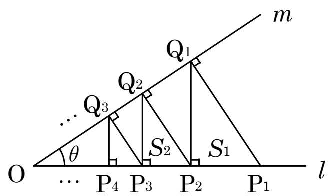
(1) $\dfrac{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}$ を求めよ。

(2) $\dfrac{S_2}{S_1}$ を求めよ。

(3) $S=\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}S_n$ を求め，$\sin 2\theta$ と $\cos 2\theta$ を用いて表せ。

(4) (3)で求めた S を θ の関数と考えて，S の最大値を求めよ。ただし，その最大値を与える θ の値は求めなくてよい。　[2008]

解答例



(1) $\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2=\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\cos\theta$，$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2=\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2\cos\theta$ より，

$$\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2=\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\cos^2\theta,\quad \frac{\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2}{\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1}=\cos^2\theta$$

(2) $\triangle\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2$ と $\triangle\mathrm{P}_2\mathrm{Q}_2\mathrm{P}_3$ は相似なので，(1)より，

$$\frac{S_2}{S_1}=\cos^4\theta$$

(3) $\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1=\mathrm{OP}_1\sin\theta=\sin\theta$ より，

$$S_1=\frac{1}{2}\mathrm{P}_1\mathrm{Q}_1\cdot\mathrm{Q}_1\mathrm{P}_2\sin\theta=\frac{1}{2}\sin^3\theta\cos\theta$$

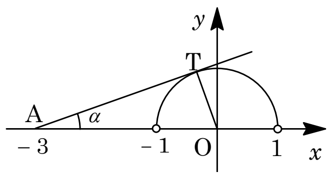
(2)と同様にして，$S_{n+1}=S_n\cos^4\theta$ となり，$0<\cos^4\theta<1$ から，

$$S=\sum_{n=1}^{\infty}S_n=\frac{S_1}{1-\cos^4\theta}=\frac{\sin^3\theta\cos\theta}{2(1+\cos^2\theta)(1-\cos^2\theta)}=\frac{\sin\theta\cos\theta}{2(1+\cos^2\theta)}$$

$$=\frac{\frac{1}{2}\sin 2\theta}{2\left(1+\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)}=\frac{\sin 2\theta}{2(3+\cos 2\theta)}$$

(4) $m=\dfrac{\sin 2\theta}{3+\cos 2\theta}=\dfrac{\sin 2\theta}{\cos 2\theta-(-3)}$ とおくと，$0<2\theta<\pi$ より，m は点 $\mathrm{A}(-3,\ 0)$ と半円 $x^2+y^2=1$ $(y>0)$ 上の点を結ぶ直線の傾きになる。

ここで，m の値が最大となるのは，この直線が円に接するときであり，接点を T とし，x 軸の正の部分となす角をαとおくと，



$$\tan\alpha = \frac{\mathrm{OT}}{\mathrm{AT}} = \frac{1}{\sqrt{3^2 - 1^2}} = \frac{\sqrt{2}}{4}$$

よって, (3)より$S = \frac{1}{2}m$なので, Sの最大値は，$\frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{4} = \frac{\sqrt{2}}{8}$である。

コメント

有名な構図の頻出問題です。(4)では，微分法の利用が一般的ですが，ここでは分数関数を直線の傾きとしてみる解法を採用しました。

問　題

条件 $a_1=-30$，$9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定義される数列 $\{a_n\}$ がある。

(1)　$b_n=3^n a_n$ とおくとき，数列 $\{b_n\}$ の漸化式を求めよ。

(2)　一般項 a_n を求めよ。

(3)　a_n を最大にする n の値を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　条件より，$a_1=-30$ $9a_{n+1}=a_n+\dfrac{4}{3^n}$ ………①

$b_n=3^n a_n$ より，$b_{n+1}=3^{n+1}a_{n+1}$ となり，①に代入して，

$$9\frac{b_{n+1}}{3^{n+1}}=\frac{b_n}{3^n}+\frac{4}{3^n},\ 3b_{n+1}=b_n+4,\ b_{n+1}=\frac{1}{3}b_n+\frac{4}{3}\ \cdots\cdots\cdots②$$

(2)　②を変形して，$b_{n+1}-2=\dfrac{1}{3}(b_n-2)$

$$b_n-2=(b_1-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=(3a_1-2)\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}=-92\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

よって，$b_n=2-92\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-1}=2-276\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$

$$a_n=\frac{b_n}{3^n}=2\left(\frac{1}{3}\right)^n-276\left(\frac{1}{9}\right)^n$$

(3)　(2)より，$a_{n+1}=2\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n+1}-276\left(\dfrac{1}{9}\right)^{n+1}$ なので，

$$\begin{aligned}a_{n+1}-a_n&=2\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}-276\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}-2\left(\frac{1}{3}\right)^n+276\left(\frac{1}{9}\right)^n\\&=-4\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}+276\times8\times\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}=4\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}(-3^{n+1}+552)\\&=12\left(\frac{1}{9}\right)^{n+1}(-3^n+184)\end{aligned}$$

$n\leqq4$ のとき $-3^n+184>0$ より，$a_{n+1}-a_n>0$，$a_n<a_{n+1}$

$n\geqq5$ のとき $-3^n+184<0$ より，$a_{n+1}-a_n<0$，$a_n>a_{n+1}$

以上より，$a_1<a_2<a_3<a_4<a_5>a_6>a_7>\cdots\cdots$ となり，$n=5$ のとき a_n は最大である。

コメント

前半は誘導つきの漸化式の解法，後半は数列の最大・最小という頻出問題です。

問　題

1 から 100 までの自然数が 1 つずつ書いてある 100 枚のカードと，1 から 100 までの番号が 1 つずつついている 100 個の箱がある。100 のカードをまず 1 番の箱に入れ，次に 99, 98 のカード 2 枚を 2 番の箱に入れ，さらに, 97, 96, 95 のカード 3 枚を 3 番の箱に入れる。以下，この操作を続けて，k 番目の箱に k 枚のカードを数の大きい方から順に入れていく。ただし，1 のカードを入れた段階でこの操作は終了するものとする。したがって，1 のカードの入っている箱には箱の番号と同じ枚数のカードが入っていない可能性がある。1 のカードが入っている箱の番号を N とするとき，次の問いに答えよ。

(1) N の値を求めよ。また, N 番の箱には何枚のカードが入っているか。

(2) k 番$(1\leqq k\leqq N)$の箱において，その箱の中のカードに書かれている最大の数を k の式で表せ。

(3) k 番$(1\leqq k\leqq N)$の箱の中のカードに書かれている数の合計を S_k とする。$1\leqq k\leqq N-1$ のとき，S_k を k の式で表せ。また，$1\leqq k\leqq N$ のとき，S_k の最大値を求めよ。 [2000]

解答例

(1) k 番の箱までに入っているカードの枚数の和は，$1+2+3+\cdots+k=\dfrac{1}{2}k(k+1)$

さて, 1 のカードが N 番の箱に入っているとすると,

$$\frac{1}{2}(N-1)N<100\leqq\frac{1}{2}N(N+1),\ (N-1)N<200\leqq N(N+1)$$

すると，$13\cdot14=182$，$14\cdot15=210$ より，$N=14$

また，13 番までの箱に入っているカードの枚数の和は $\dfrac{1}{2}\cdot13\cdot14=91$ より，14 番の箱に入っているカードは，$100-91=9$ 枚である。

(2) k 番の箱に入っているカードは, 100, 99, 98, 97, …と数えて，$\dfrac{1}{2}(k-1)k+1$ 枚目から $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 枚目までなので，最大数は $\dfrac{1}{2}(k-1)k+1$ 枚目となり,

$$100+\left\{\frac{1}{2}(k-1)k+1-1\right\}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}k^2+\frac{1}{2}k+100$$

(3) k 番の箱に入っているカードの最小数は $\dfrac{1}{2}k(k+1)$ 枚目で,

$$100+\left\{\frac{1}{2}k(k+1)-1\right\}\cdot(-1)=-\frac{1}{2}k^2-\frac{1}{2}k+101$$

すると，$1 \leqq k \leqq 13$ のとき，

$$S_k = \frac{\left(-\frac{1}{2}k^2 - \frac{1}{2}k + 101\right) + \left(-\frac{1}{2}k^2 + \frac{1}{2}k + 100\right)}{2} \cdot k = -\frac{1}{2}k^3 + \frac{201}{2}k$$

ここで，$f(x) = -\frac{1}{2}x^3 + \frac{201}{2}x \ (1 \leqq x \leqq 13)$ とおくと，

$$f'(x) = -\frac{3}{2}x^2 + \frac{201}{2} = -\frac{3}{2}(x^2 - 67)$$

x	0	$\cdots$	$\sqrt{67}$	$\cdots$	13
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$		$\searrow$	

右表より，$f(x)$ は $x = \sqrt{67}$ のとき最大値をとる。

よって，$8 < \sqrt{67} < 9$ で，$f(8) = 548$，$f(9) = 540$ となるので，$1 \leqq k \leqq 13$ のとき，S_k は $k = 8$ のとき最大となる。

なお $k = 14$ のとき，$S_k = 9 + 8 + \cdots + 1 = 45$ となるので，$1 \leqq k \leqq 14$ において，S_k の最大値は $S_8 = 548$ である。

コメント

長い問題文ですが，要は，初項 100，公差 -1 の等差数列をグループ分けした群数列の問題です。各群の項数に注目するのがポイントです。

問　題

n が自然数のとき，次の不等式を証明せよ。ただし，$a>0$ とする。

(1)　$(a+1)^n \geqq a^n + na^{n-1}$

(2)　$(n+1)^n \geqq 2n^n$

(3)　$n! \leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$　[1999]

解答例

(1)　二項定理より，$a>0$ なので，

$$(a+1)^n \geqq a^n + {}_n\mathrm{C}_1 a^{n-1} = a^n + na^{n-1} \cdots\cdots\cdots ①$$

(2)　①において，$a=n$ とおくと，

$$(n+1)^n \geqq n^n + n\cdot n^{n-1} = 2n^n \cdots\cdots\cdots ②$$

(3)　$n! \leqq 2\left(\dfrac{n}{2}\right)^n$ ……③が成立することを数学的帰納法を用いて示す。

(i)　$n=1$ のとき

③の左辺 $=1!=1$，③の右辺 $=2\cdot\dfrac{1}{2}=1$ となり，$n=1$ のとき③は成り立つ。

(ii)　$n=k$ のとき

$k! \leqq 2\left(\dfrac{k}{2}\right)^k$ ……④が成り立つと仮定する。

④の両辺に $(k+1)$ をかけて

$$(k+1)! \leqq 2(k+1)\left(\frac{k}{2}\right)^k = \frac{2(k+1)}{2^k}\cdot k^k$$

②より，$\dfrac{2(k+1)}{2^k}\cdot k^k \leqq \dfrac{2(k+1)}{2^k}\cdot\dfrac{(k+1)^k}{2} = 2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}$

よって，$(k+1)! \leqq 2\left(\dfrac{k+1}{2}\right)^{k+1}$ となり，$n=k+1$ のときも成り立つ。

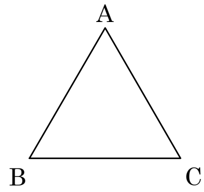
(i)(ii)より，自然数 n に対して，③が成り立つ。

コメント

②式は，誘導を細かくするために後から入れたような不等式です。それとも，いきなり②式では難しいので，①式を②式の誘導として追加したのでしょうか。

問　題

表が出る確率が p, 裏が出る確率が $1-p$ であるようなコインがある。ただし, $0<p<1$ である。このとき, 右図のような正三角形の 3 頂点 A, B, C を次の規則で移動する動点 R を考える。



コインを投げて表が出れば R は反時計まわりに隣の頂点に移動し, 裏が出れば R は時計まわりに隣の頂点に移動する。

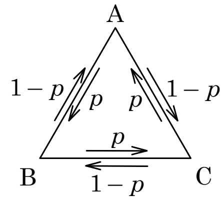
R は最初 A にあり, 全部で $(2N+3)$ 回移動する。ここで, N は自然数である。移動回数がちょうど k に達したときに R が A に初めて戻る確率を P_k $(k=2,\ 3,\ \cdots,\ 2N+3)$ とする。次の問いに答えよ。

(1) P_2, P_3 を求めよ。

(2) P_{2m}, P_{2m+1} $(2\leqq m\leqq N+1)$ を求めよ。

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ とする。移動回数がちょうど $2N+3$ に達したときに R が A に 2 度目に戻る確率 Q を求めよ。 [2017]

解答例



(1) まず, R が 2 回目に A に初めて戻るのは, A → B → A または A → C → A から, その確率 P_2 は,

$$P_2=p(1-p)+(1-p)p=2p(1-p)$$

また, R が 3 回目に A に初めて戻るのは, A → B → C → A または A → C → B → A から, その確率 P_3 は,

$$P_3=p^3+(1-p)^3=1-3p+3p^2$$

(2) R が $2m$ 回目に A に初めて戻るのは, A→B→C→B→C→B→⋯→C→B→A または A→C→B→C→B→C→⋯→B→C→A から, その確率 P_{2m} は,

$$P_{2m}=p\{p(1-p)\}^{m-1}(1-p)+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}p=2p^m(1-p)^m$$

また, R が $2m+1$ 回目に A に初めて戻るのは, A→B→C→B→C→⋯→B→C→A または A→C→B→C→B→⋯→C→B→A から, その確率 P_{2m+1} は,

$$\begin{aligned}P_{2m+1}&=p\{p(1-p)\}^{m-1}p^2+(1-p)\{(1-p)p\}^{m-1}(1-p)^2\\&=p^3\{p(1-p)\}^{m-1}+(1-p)^3\{(1-p)p\}^{m-1}\\&=(1-3p+3p^2)p^{m-1}(1-p)^{m-1}\end{aligned}$$

(3) $p=\dfrac{1}{2}$ のとき, (2)より, $P_{2m}=2\left(\dfrac{1}{2}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^m=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}$

$$P_{2m+1}=\left(1-\frac{3}{2}+\frac{3}{4}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{m-1}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}\right)^{2m-2}=\left(\frac{1}{2}\right)^{2m}$$

さて, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻るのは,

(i)　R が A に初めて戻るのが $2m$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は, $P_{2m}P_{2N+3-2m}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m-1}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+2}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(ii)　R が A に初めて戻るのが $2m+1$ 回目 $(m=1,\ 2,\ \cdots,\ N)$ のとき

その確率は, $P_{2m+1}P_{2N+3-(2m+1)}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2m}\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N-2m+1}=\left(\dfrac{1}{2}\right)^{2N+1}$

(i)(ii)より, R が $2N+3$ 回目に A に 2 度目に戻る確率 Q は,

$$Q=\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}+\sum_{m=1}^{N}\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}=2N\left(\frac{1}{2}\right)^{2N+1}=\frac{N}{2^{2N}}$$

コメント

確率の計算問題です。ミスを防ぐような丁寧な誘導がついています。

問　題

xy 平面上に原点を出発点として動く点 Q があり，次の試行を行う。

1 枚の硬貨を投げ，表が出たら Q は x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。ただし，点$(3,\ 1)$に到達したら Q は原点に戻る。

この試行を n 回繰り返した後の Q の座標を$(x_n,\ y_n)$とする。次の問いに答えよ。

(1)　$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となる確率を求めよ。

(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となる確率を求めよ。

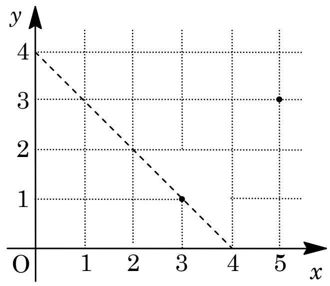
(3)　$x_8+y_8\leqq 4$ となる確率を求めよ。

(4)　$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$ となる確率を n と k で表せ。ここで k は n 以下の自然数とする。

[2016]

解答例

(1)　原点から出発した点 Q は，表が出たら x 軸の正の方向に 1，裏が出たら y 軸の正の方向に 1 動く。そして，この試行を n 回繰り返したとき，その到達点$(x_n,\ y_n)$は，点$(3,\ 1)$を通らないときは線分 $x+y=n$ $(x\geqq 0,\ y\geqq 0)$ 上の点，また点$(3,\ 1)$を通るといったん原点に戻り，続けて残りの試行を繰り返す。



さて，$(x_4,\ y_4)=(0,\ 0)$ となるのは，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達したときより，その確率は，${}_4\mathrm{C}_1\left(\frac{1}{2}\right)^3\frac{1}{2}=4\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{4}$ である。

(2)　$(x_8,\ y_8)=(5,\ 3)$ となるのは，8 回目の試行で点$(5,\ 3)$に到達し，しかも 4 回目の試行では点$(3,\ 1)$を通らないときより，その確率は，(1)を利用すると，

$$ {}_8\mathrm{C}_3\left(\frac{1}{2}\right)^5\left(\frac{1}{2}\right)^3-\frac{1}{4}\cdot{}_4\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^2=56\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8-\frac{1}{4}\cdot 6\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{8} $$

(3)　試行を 8 回行い，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を通らないときは $x_8+y_8=8$ となる。

また，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を到達し原点に戻った後，8 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達しないときは $x_8+y_8=4$ となり，8 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達するときは$(x_8,\ y_8)=(0,\ 0)$である。

したがって，$x_8+y_8\leqq 4$ となるのは 4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達するときであり，その確率は，(1)から $\frac{1}{4}$ である。

(4)　試行を $4n$ 回行うとき，到達点$(x_{4n},\ y_{4n})$を考える。

まず，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$を通らないときは，つねに $x_{4n}+y_{4n}=4n$ となる。

次に，4 回目の試行で点$(3,\ 1)$に到達し原点に戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-1)$となり，その確率は$\dfrac{1}{4}$である。

さらに，4 回目と 8 回目に点$(3,\ 1)$に到達し原点に 2 回戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-2)$となり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^2=\dfrac{1}{16}$である。

同様に考えて，lを整数$(0\leqq l\leqq n-1)$とし，4 回目，8 回目，…，$4l$回目に点$(3,\ 1)$に到達し原点に l 回戻った後，試行を続けるときは$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4(n-l)$となり，その確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^l$である。そこで，$k=n-l$とおくと$1\leqq k\leqq n$となり，$x_{4n}+y_{4n}\leqq 4k$となる確率は$\left(\dfrac{1}{4}\right)^l=\left(\dfrac{1}{4}\right)^{n-k}$である。

コメント

確率の頻出問題ですが，振り出しに戻るというひねりが加えられています。

問　題

m, n を自然数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m \geqq 2$，$n \geqq 2$ とする。異なる m 種類の文字から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき，ちょうど 2 種類の文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(2)　$n \geqq 3$ とする。3 種類の文字 a, b, c から重複を許して n 個を選び，1 列に並べる。このとき a, b, c すべての文字を含む文字列は何通りあるか求めよ。

(3)　$n \geqq 3$ とする。n 人を最大 3 組までグループ分けする。このときできたグループ数が 2 である確率 p_n を求めよ。ただし，どのグループ分けも同様に確からしいとする。たとえば，$n=3$ のとき，A, B, C の 3 人をグループ分けする方法は，

$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B},\ \mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$，$\{(\mathrm{A},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{B})\}$，

$\{(\mathrm{B},\ \mathrm{C}),\ (\mathrm{A})\}$，$\{(\mathrm{A}),\ (\mathrm{B}),\ (\mathrm{C})\}$

の 5 通りであるので，$p_3 = \dfrac{3}{5}$ である。

(4)　(3)の確率 p_n が $\dfrac{1}{3}$ 以下となるような n の値の範囲を求めよ。　[2015]

解答例

(1)　異なる m 種類の文字から 2 種類の文字を選ぶ方法は，${}_m\mathrm{C}_2 = \dfrac{m(m-1)}{2}$ 通り。

そして，この文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，2^n 通り。この中で，2 種類の文字を含むのは，1 種類が 2 通りあるので，2^n-2 通りである。

よって，求める場合は，$\dfrac{m(m-1)}{2}(2^n-2) = m(m-1)(2^{n-1}-1)$ 通りである。

(2)　3 種類の文字から重複を許して n 個を選び 1 列に並べるのは，3^n 通り。

この中で，1 種類となるのは 3 通り，2 種類となるのは ${}_3\mathrm{C}_2(2^n-2) = 3(2^n-2)$ 通りなので，3 種類の文字を含む方法は，

$$3^n-3-3(2^n-2) = 3^n-3\cdot 2^n+3 \quad（通り）$$

(3)　(i)　n 人を 1 組にグループ分けするとき　明らかに 1 通り。

(ii)　n 人を 2 組にグループ分けするとき

2 組のグループを区別したとき，その分け方は，2 種類の文字を 1 列に並べ，2 種類とも含む場合に一致するので，(1)から 2^n-2 通りとなる。これより，グループを区別しないときは，$\dfrac{2^n-2}{2!} = 2^{n-1}-1$ 通りである。

(iii) n 人を 3 組にグループ分けするとき

3 組のグループを区別したとき，その分け方は，3 種類の文字を 1 列に並べ，3 種類とも含む場合に一致するので，(2)から $3^n-3\cdot 2^n+3$ 通りとなる。そして，グループを区別しないときは，$\dfrac{3^n-3\cdot 2^n+3}{3!}=\dfrac{3^{n-1}-2^n+1}{2}$ 通りである。

(i)〜(iii)より，n 人を最大 3 組までグループ分けする方法は，

$$1+(2^{n-1}-1)+\frac{3^{n-1}-2^n+1}{2}=\frac{3^{n-1}+1}{2}\quad(\text{通り})$$

すると，このときグループ数が 2 である確率 p_n は，$p_n=\dfrac{2(2^{n-1}-1)}{3^{n-1}+1}=\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}$

(4)　$p_n\leqq\dfrac{1}{3}$ のとき，$\dfrac{2^n-2}{3^{n-1}+1}\leqq\dfrac{1}{3}$ となり，$3^{n-1}-3\cdot 2^n+7\geqq 0$ ………(＊)

ここで，$f(n)=3^{n-1}-3\cdot 2^n+7=3^{n-1}-6\cdot 2^{n-1}+7$ とおくと，

$$f(3)=-8<0,\ f(4)=-14<0,\ f(5)=-8<0,\ f(6)=58>0$$

さて，$n\geqq 6$ において，$\left(\dfrac{3}{2}\right)^{n-1}\geqq\left(\dfrac{3}{2}\right)^5=\dfrac{243}{32}>6$ より，$f(n)>7>0$ である。

よって，(＊)が成り立つ n の値の範囲は，$n\geqq 6$ である。

コメント

ポイントは，(1)(2)が(3)の誘導となっていることです。樹形図で要確認です。

問　題

1 辺の長さが 1 の正六角形において，頂点を反時計回りにP_1，P_2，P_3，P_4，P_5，P_6とする。1 個のさいころを 2 回投げて，出た目を順に j, k とする。P_1，P_j，P_kが異なる 3 点となるとき，この 3 点を頂点とする三角形の面積を S とする。P_1，P_j，P_kが異なる 3 点とならないときは，$S=0$ と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$S>0$ となる確率を求めよ。

(2)　S が最大となる確率を求めよ。

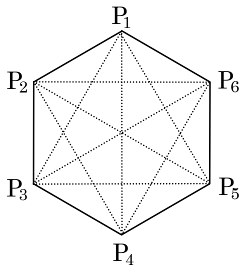
(3)　S の期待値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　P_1，P_j，P_kを頂点とする三角形の面積 S について，$S>0$ となる場合は，P_1，P_j，P_kが異なる 3 点のときである。

すなわち，$(i,\ j)$ が $i\neq1$ かつ $j\neq1$ かつ $i\neq j$ を満たすときより，その場合の数は ${}_5P_2=20$ 通りある。

よって，その確率は $\dfrac{20}{6^2}=\dfrac{5}{9}$ となる。



(2)　P_1，P_j，P_kを頂点とする三角形は，次の 3 種類となる。

(i)　$\triangle P_1P_2P_3$ と合同な二等辺三角形　$S=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi=\dfrac{\sqrt{3}}{4}$

(ii)　$\triangle P_1P_2P_4$ と合同な直角三角形　$S=\dfrac{1}{2}\cdot1\cdot2\cdot\sin\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}$

(iii)　正三角形 $P_1P_3P_5$　$S=\dfrac{1}{2}\cdot1^2\cdot\sin\dfrac{2}{3}\pi\times3=\dfrac{3}{4}\sqrt{3}$

(i)～(iii)より，面積が最大となるのは，正三角形 $P_1P_3P_5$ の場合である。

このとき，$(i,\ j)=(3,\ 5)$，$(5,\ 3)$ より，その確率は $\dfrac{2}{6^2}=\dfrac{1}{18}$ である。

(3)　(i)　$\triangle P_1P_2P_3$ と合同な二等辺三角形のとき

$(i,\ j)=(2,\ 3)$，$(3,\ 2)$，$(2,\ 6)$，$(6,\ 2)$，$(5,\ 6)$，$(6,\ 5)$ より 6 通りとなり，その確率は $\dfrac{6}{6^2}=\dfrac{1}{6}$ である。

(ii)　$\triangle P_1P_2P_4$ と合同な直角三角形のとき

(1)(2)の結果より，その確率は，$\dfrac{5}{9}-\dfrac{1}{18}-\dfrac{1}{6}=\dfrac{1}{3}$ である。

以上より，S の期待値 E は，

$$E=0\times\left(1-\frac{5}{9}\right)+\frac{\sqrt{3}}{4}\times\frac{1}{6}+\frac{\sqrt{3}}{2}\times\frac{1}{3}+\frac{3}{4}\sqrt{3}\times\frac{1}{18}=\frac{\sqrt{3}}{4}$$

コメント

確率の基本題です。なお，(3)の(ii)の場合は，斜辺の位置で場合分けをして直接的に求めても構いません。

問　題

n は自然数とし，点 P は次の規則にしたがって座標平面上を動くとする。

規則：

(A)　P は，はじめに点$(1,\ 2)$にある。

(B)　さいころを投げて 2 以下の目が出れば P は原点を中心に反時計回りに$120°$回転し, 3 以上の目が出れば時計回りに$60°$回転する。

(C)　(B)を n 回繰り返す。

ただし，さいころの目の出方は同様に確からしいとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，出た目が 4, 1, 2 であったとする。このとき P が最後に移った点の座標を求めよ。

(2)　$n=3$ のとき, P が点$(1,\ 2)$にある確率を求めよ。

(3)　$n=6$ のとき, P が点$(-1,\ -2)$にある確率を求めよ。

(4)　$n=3m$ のとき, P が点$(1,\ 2)$にある確率を求めよ。ただし, m は自然数とする。

[2012]

解答例

(1)　点 P が原点を中心に$120°$回転する確率は$\dfrac{1}{3}$，$-60°$回転する確率は$\dfrac{2}{3}$である。

さて，出た目が 4，1，2 であったとき，点 P$(1,\ 2)$は$-60°+120°+120°=180°$回転することより，点$(-1,\ -2)$に移る。

(2)　$n=3$ のとき，点 P が点$(1,\ 2)$に移るのは，$120°$回転が 3 回か，または$120°$回転が 1 回で$-60°$回転が 2 回の場合より，その確率は,

$$\left(\frac{1}{3}\right)^3+{}_3\mathrm{C}_1\frac{1}{3}\left(\frac{2}{3}\right)^2=\frac{1}{27}+\frac{12}{27}=\frac{13}{27}$$

(3)　(2)と同様に考えると，$n=3$ のとき，点 P が点$(-1,\ -2)$に移る確率は,

$${}_3\mathrm{C}_2\left(\frac{1}{3}\right)^2\cdot\frac{2}{3}+\left(\frac{2}{3}\right)^3=\frac{6}{27}+\frac{8}{27}=\frac{14}{27}$$

すると，$n=3$ のとき，点 P は点$(1,\ 2)$または点$(-1,\ -2)$に移っている。

これより，$n=6$ のとき，点 P が点$(-1,\ -2)$にある確率は,

$${}_2\mathrm{C}_1\frac{13}{27}\cdot\frac{14}{27}=\frac{364}{729}$$

(4)　$n=3m$ のとき，点 P が点$(1,\ 2)$にある確率を p_m とすると，$p_0=1$ で,

$$p_{m+1}=\frac{13}{27}p_m+\frac{14}{27}(1-p_m)=-\frac{1}{27}p_m+\frac{14}{27}$$

この式を変形すると，$p_{m+1}-\dfrac{1}{2}=-\dfrac{1}{27}\left(p_m-\dfrac{1}{2}\right)$となり,

$$p_m-\frac{1}{2}=\left(p_0-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{1}{27}\right)^m=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m,\quad p_m=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{27}\right)^m$$

コメント

最初，(1)の誘導に気付かず，(3)を120°回転が x 回，-60°回転が y 回として計算しましたが，(4)の設問を見るとあまりにも面倒そうだったので，方針を転換しました。その結果が上の解答例です。

問　題

△ABC の頂点は反時計回りに A, B, C の順に並んでいるとする。点 A を出発した石が, 次の規則で動くとする。

コインを投げて表が出たとき反時計回りに隣の頂点に移り, 裏がでたときは動かない。なお, コインを投げて表と裏の出る確率はそれぞれ$\dfrac{1}{2}$とする。

コインを n 回投げたとき, 石が点 A, B, C にある確率をそれぞれ a_n，b_n，c_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　a_1，b_1，c_1 の値を求めよ。

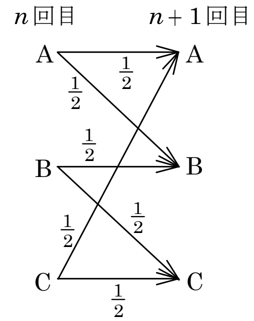
(2)　a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} を a_n，b_n，c_n で表せ。また，a_2，b_2，c_2 および a_3，b_3，c_3 の値を求めよ。

(3)　a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致することを証明せよ。

(4)　(3)において一致する値を p_n とする。p_n を n で表せ。　[2011]

解答例

(1)　最初, 石は点 A にあるので，$a_1=\dfrac{1}{2}$，$b_1=\dfrac{1}{2}$，$c_1=0$



(2)　右の状態の遷移図より,

$$a_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}(1-b_n)\cdots\cdots\cdots①$$

$$b_{n+1}=\frac{1}{2}a_n+\frac{1}{2}b_n=\frac{1}{2}(1-c_n)\cdots\cdots\cdots②$$

$$c_{n+1}=\frac{1}{2}b_n+\frac{1}{2}c_n=\frac{1}{2}(1-a_n)\cdots\cdots\cdots③$$

①②③より,

$$a_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ b_2=\frac{1}{2}(1-0)=\frac{1}{2},\ c_2=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4}$$

$$a_3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{2}\right)=\frac{1}{4},\ b_3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8},\ c_3=\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{4}\right)=\frac{3}{8}$$

(3)　(1)より，$a_1=b_1=\dfrac{1}{2}$ となり，a_1，b_1，c_1 のうち 2 つの値は一致する。

また，a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値が一致するとき，a_{n+1}，b_{n+1}，c_{n+1} のうち 2 つの値は, ①②③より, 明らかに一致する。

よって，帰納的に，a_n，b_n，c_n のうち 2 つの値は一致する。

(4)　a_n，b_n，c_n のうち一致する 2 つの値を p_n とするとき，$p_1=\dfrac{1}{2}$ で,

$$p_{n+1}=\frac{1}{2}(1-p_n),\ p_{n+1}-\frac{1}{3}=-\frac{1}{2}\left(p_n-\frac{1}{3}\right)$$

これより，$p_n-\frac{1}{3}=\left(p_1-\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}=-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$となり，

$$p_n=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}\left(-\frac{1}{2}\right)^{n}$$

コメント

確率と漸化式の融合についての典型題です。このタイプでは「全確率の和は 1」という当たり前のことを，いつも気にかけておく必要があります。

問　題

n は 2 以上の自然数とする。袋の中に 1 から n までの数字が 1 つずつ書かれた n 個の玉が入っている。この袋から無作為に玉を 1 個取り出し，それに書かれている数を自分の得点としたのち，取り出した玉を袋に戻す。この試行を A, B, C の 3 人が順に行い，3 人の中で最大の得点の人を勝者とする。たとえば，A, B, C の得点がそれぞれ 4, 2, 4 のときは A と C の 2 人が勝者であり，3 人とも同じ得点のときは A, B, C の 3 人とも勝者である。勝者が k 人 $(k=1,\ 2,\ 3)$ である確率を $P_n(k)$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) 勝者が 3 人である確率 $P_n(3)$ を n を用いて表せ。

(2) $n=3$ の場合に勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ を求めよ。

(3) 勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ を n を用いて表せ。

(4) $P_n(1)\geqq 0.9$ となる最小の n を求めよ。 [2010]

解答例

(1) 勝者が 3 人であるのは, 3 人とも同じ得点のときより，その確率 $P_n(3)$ は,

$$P_n(3)=\frac{n}{n^3}=\frac{1}{n^2}$$

(2) $n=3$ の場合，勝者が 2 人であるのは，まず勝者の選び方が ${}_3C_2=3$ 通り。次に, 得点を 2 つ選び，大きい方を勝者の得点に対応させると，その対応は ${}_3C_2=3$ 通りとなる。これより，勝者が 2 人である確率 $P_3(2)$ は,

$$P_3(2)=\frac{3\times3}{3^3}=\frac{1}{3}$$

(3) 勝者が 2 人である確率は, (2)と同様に考えると,

$$P_n(2)=\frac{{}_3C_2\times{}_nC_2}{n^3}=\frac{3n(n-1)}{2n^3}=\frac{3(n-1)}{2n^2}$$

すると，勝者が 1 人である確率 $P_n(1)$ は，余事象を考えて,

$$P_n(1)=1-P_n(3)-P_n(2)=1-\frac{1}{n^2}-\frac{3(n-1)}{2n^2}=\frac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}$$

(4) 条件より，$P_n(1)\geqq 0.9$ から，$\dfrac{(2n-1)(n-1)}{2n^2}\geqq\dfrac{9}{10}$ となり,

$$5(2n-1)(n-1)\geqq 9n^2,\quad n^2-15n+5\geqq 0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$f(x)=x^2-15x+5=\left(x-\dfrac{15}{2}\right)^2+5-\left(\dfrac{15}{2}\right)^2$ とおくと,

$$f(0)=5>0,\quad f(1)=-9<0$$

よって，$f(14)<0$，$f(15)>0$ となり, $(*)$を満たす最小の n は $n=15$ である。

コメント

確率の基本問題です。(3)は(2)を誘導と考えて解いています。なお, (4)は 2 次関数のグラフをイメージして解いています。

問　題

2 人のプレーヤーA, B が対戦を繰り返すゲームを行う。1 回の対戦につき A が勝つ確率は p であり, B が勝つ確率は$1-p$ であるとする(ただし $0<p<1$)。A と B は初めにそれぞれ 2 枚の金貨を持っている。1 回の対戦につき勝者は敗者から 1 枚の金貨を受け取る。対戦を繰り返して一方のプレーヤーがすべての金貨を手に入れたとき, ゲームを終了する。ちょうど n 回の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率を P_n とする。ただし n は自然数とする。

(1)　P_4 を求めよ。

(2)　P_{2n-1} を求めよ。

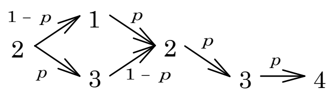
(3)　P_{2n} を求めよ。

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n を求めよ。

(5)　$S=\lim\limits_{n\to\infty} S_n$ とする。p と S の大小関係を調べよ。　[2009]

解答例

(1)　A の持っている金貨の枚数に注目する。4 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは, A の枚数が右図のように変化する場合であり, その確率 P_4 は,



$$P_4=2p(1-p)\cdot p^2=2p^3(1-p)$$

(2)　$2n-1$回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは, $2n-3$回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり, その後, A が 2 回続けて勝つ場合である。

ところが, A の枚数が 2 となるのは, 偶数回の対戦の後だけであるので, このような場合はない。よって, この確率 P_{2n-1} は, $P_{2n-1}=0$ である。

(3)　$2n$ 回の対戦で, A が 4 枚の金貨を手に入れるのは, $2n-2$回まで対戦を繰り返した結果 A の枚数が 2 となり, その後, A が 2 回続けて勝つ場合である。この確率 P_{2n} は,

$$P_{2n}=\{2p(1-p)\}^{n-1}\cdot p^2=p^2\{2p(1-p)\}^{n-1}$$

(4)　$2n$ 回以内の対戦で A がすべての金貨を手に入れる確率 S_n は,

$$S_n=P_2+P_4+\cdots+P_{2n}=\frac{p^2\{1-(2p(1-p))^n\}}{1-2p(1-p)}=\frac{p^2-p^2(2p(1-p))^n}{1-2p+2p^2}$$

(5)　$2p(1-p)=-2p^2+2p=-2\left(p-\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{2}$ より, $0<p<1$ で, $0<2p(1-p)\leqq\frac{1}{2}$

これより, $n\to\infty$のとき, $(2p(1-p))^n\to 0$ となることより,

$$S=\lim_{n\to\infty}S_n=\frac{p^2}{1-2p+2p^2}$$

すると，$S-p=\dfrac{p^2}{1-2p+2p^2}-p=\dfrac{p(-2p^2+3p-1)}{1-2p+2p^2}=\dfrac{p(1-p)(2p-1)}{1-2p+2p^2}$

よって，$0<p<\dfrac{1}{2}$ のとき $S<p$，$p=\dfrac{1}{2}$ のとき $S=p$，$\dfrac{1}{2}<p<1$ のとき $S>p$

コメント

(1)で具体的に考えた結果を一般化すれば, (4)の結論まで一直線です。

問　題

2 点 A, B と，その上を動く 1 個の石がある。この石は，時刻 $t=0$ では点 A にあり，その後，次の規則(a), (b)にしたがって動く。

各 $t=0,\ 1,\ 2,\ \cdots$ に対して，

(a)　時刻 t に石が点 A にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 A にある確率は c，点 B にある確率は $1-c$ である。

(b)　時刻 t に石が点 B にあれば，時刻 $t+1$ に石が点 B にある確率は $2c$，点 A にある確率は $1-2c$ である。

ただし, c は $0<c<\dfrac{1}{2}$ を満たす定数とする。

いま, n を自然数とし，時刻 $t=n$ において石が点 A にある確率を p_n とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　p_1，p_2 を求めよ。

(2)　p_{n+1} を p_n と c を用いて表せ。

(3)　p_n を求めよ。

(4)　$\displaystyle\lim_{n\to\infty} p_n$ を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　石は，時刻 $t=0$ で点 A にあるので，時刻 $t=1$ においても点 A にある確率 p_1 は，規則(a)より，$p_1=c$ である。

また，時刻 $t=1$ において，石が点 B にある確率は $1-p_1$ より，

$$p_2=cp_1+(1-2c)(1-p_1)=c^2+(1-2c)(1-c)=3c^2-3c+1$$

(2)　石が時刻 $t=n$ に点 A にあるとき，時刻 $t=n+1$ にも点 A にある確率は c，また時刻 $t=n$ に点 B にあるとき，時刻 $t=n+1$ に点 A にある確率は $1-2c$ より，

$$p_{n+1}=cp_n+(1-2c)(1-p_n)=(3c-1)p_n+(1-2c)\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

(3)　$(*)$を変形すると，$p_{n+1}-\dfrac{1-2c}{2-3c}=(3c-1)\left(p_n-\dfrac{1-2c}{2-3c}\right)$

また，$p_0=1$ としたとき，$n=0$ のときも$(*)$は成立することより，

$$p_n-\frac{1-2c}{2-3c}=\left(p_0-\frac{1-2c}{2-3c}\right)(3c-1)^n=\frac{1-c}{2-3c}(3c-1)^n$$

よって，$p_n=\dfrac{1-2c}{2-3c}+\dfrac{1-c}{2-3c}(3c-1)^n$

(4)　$0<c<\dfrac{1}{2}$ より $-1<3c-1<\dfrac{1}{2}$ となり, $n\to\infty$ のとき，$(3c-1)^n\to 0$ であるので，

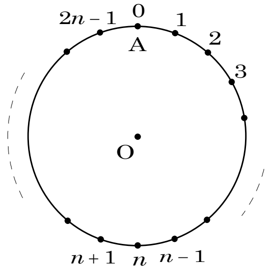
$$\lim_{n\to\infty} p_n=\frac{1-2c}{2-3c}$$

コメント

有名な漸化式の確率への応用で，その中でも，最も基本的なタイプです。なお，(3)では，計算を容易にするため，p_0 を初期値としています。

問　題

n を 2 以上の整数とする。中心を O とする円の周を $2n$ 等分して，図のように 0 から $2n-1$ までの目盛りを付ける。目盛りが 0 の点を A とする。一方，袋の中に 1 から $2n-1$ までの整数を書いた玉がそれぞれ 1 個ずつ入っている。この袋から玉を 2 つ取り出して，玉に書かれた数と同じ目盛りをもつ 2 点をとる。2 点のうち目盛りの大きい方を B，目盛りの小さい方を C として，△ABC を考える。次の問いに答えよ。



(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は何通りあるか。

(2)　△ABC の辺上に点 O がある確率を求めよ。

(3)　△ABC の内部に点 O がある確率は $\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$ であることを示せ。

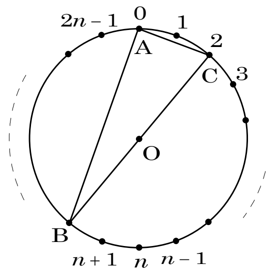
(4)　△ABC の辺上に点 O があるとき $X=1$，△ABC の内部に点 O があるとき $X=2$，それ以外のとき $X=0$ とする。X の期待値を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　辺 BC 上に点 O がある場合は，

$$(B,\ C)=(n+1,\ 1),\ (n+2,\ 2),\ \cdots,\ (2n-1,\ n-1)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。



(2)　辺 AB 上に点 O がある場合は，

$$(B,\ C)=(n,\ 1),\ (n,\ 2),\ \cdots,\ (n,\ n-1)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

また，辺 AC 上に点 O がある場合は，

$$(B,\ C)=(n+1,\ n),\ (n+2,\ n),\ \cdots,\ (2n-1,\ n)$$

よって，$n-1$ 通りの場合がある。

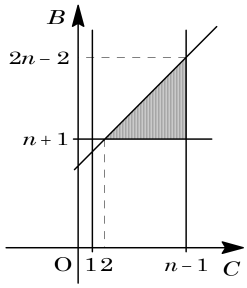
以上より，(1)の場合も考え合わせて，△ABC の辺上に点 O がある確率は，

$$\frac{3(n-1)}{{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\frac{6(n-1)}{(2n-1)(2n-2)}=\frac{3}{2n-1}$$

(3)　△ABC の内部に点 O がある場合は，

$$1\leqq C\leqq n-1,\ n+1\leqq B\leqq n+C-1$$

この不等式を CB 平面上に図示すると，右図の網点部となる。この領域内にある格子点$(C,\ B)$の個数は，



$$1+2+3+\cdots+(n-2)=\frac{1}{2}(n-2)(n-1)$$

よって，この場合の確率は，$\dfrac{(n-2)(n-1)}{2\times{}_{2n-1}\mathrm{C}_2}=\dfrac{n-2}{2(2n-1)}$

(4)　X の期待値を E とすると，

$$E=1\times\frac{3}{2n-1}+2\times\frac{n-2}{2(2n-1)}+0\times\left\{1-\frac{3}{2n-1}-\frac{n-2}{2(2n-1)}\right\}=\frac{n+1}{2n-1}$$

コメント

たびたび出題されている確率の有名問題です。(3)では，格子点の個数を対応させて数えています。

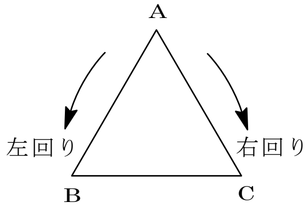
問　題

2 枚のコインを同時に投げて，三角形 ABC の 1 つの頂点にある駒を，

2 枚とも表が出たとき左回りで隣りの頂点に移し，

2 枚とも裏が出たとき右回りで隣りの頂点に移し，

表と裏が出たとき動かさない



という試行を考える。初めに駒を頂点 A に置く。この試行を n 回繰り返したとき，1 回目の試行後の駒の位置を X_1，2 回目の試行後の駒の位置を X_2，…，n 回目の試行後の駒の位置を X_n とする。次の問いに答えよ。

(1)　この試行を 2 回繰り返したとき，X_2 が A である確率 P_2 を求めよ。

(2)　この試行を 4 回繰り返したとき，最後の X_4 のみが A である確率 Q_4 を求めよ。

(3)　この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，最後の X_n のみが A である確率 Q_n を求めよ。

(4)　この試行を n 回 $(n \geqq 2)$ 繰り返したとき，X_n が A である確率 P_n を求めよ。

[2005]

解答例

(1)　駒が左回りに移動する確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$，右回りに移動する確率は $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$，動かない確率は $1 - \frac{1}{4} - \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ である。

さて，X_2 が A であるのは，駒が A→A→A，A→B→A，または A→C→A と移動する場合より，

$$P_2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 + \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{3}{8}$$

(2)　最後の X_4 のみが A であるのは，X_2，X_3 が B または C のときである。

まず, B にある駒が動かないか，または C に移動する確率は $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4}$ である。

また, C にある駒が動かないか，または B に移動する確率も同じく $\frac{3}{4}$ である。

これより，X_2 が B のとき，X_4 のみが A である確率は,

$$\frac{1}{4} \times \left(\frac{3}{4}\right)^2 \times \frac{1}{4} = \frac{9}{256}$$

X_2 が C のとき，X_4 のみが A である確率も $\frac{9}{256}$ から,

$$Q_4 = \frac{9}{256} + \frac{9}{256} = \frac{9}{128}$$

(3)　(2)と同様に考えて，X_2 が B のとき，X_n のみが A である確率は,

$$\frac{1}{4}\times\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

X_2 が C のとき，X_n のみが A である確率も $\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$ から,

$$Q_n=\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}+\frac{1}{16}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}=\frac{1}{8}\left(\frac{3}{4}\right)^{n-2}$$

(4)　X_{n+1} が A となるのは，X_n が A のときは駒が不動であればよいので，その確率は $\frac{1}{2}$，また X_n が A でないときは，X_n が B であれば右回り，X_n が C であれば左回りに駒が移動すればよく，その確率はいずれも $\frac{1}{4}$ なので,

$$P_{n+1}=\frac{1}{2}P_n+\frac{1}{4}(1-P_n)\,,\ \ P_{n+1}=\frac{1}{4}P_n+\frac{1}{4}$$

これより，$P_{n+1}-\frac{1}{3}=\frac{1}{4}\left(P_n-\frac{1}{3}\right)$ と変形すると，$P_1=\frac{1}{2}$ から,

$$P_n-\frac{1}{3}=\left(P_1-\frac{1}{3}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}=\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$$

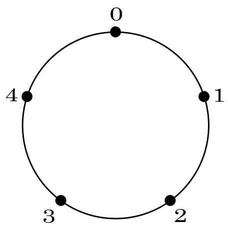
よって，$P_n=\frac{1}{3}+\frac{1}{6}\left(\frac{1}{4}\right)^{n-1}$

コメント

(4)の設問で，頭の切換えができるかどうかがポイントです。

問　題

円周を 5 等分して図のように 0 から 4 の目盛りをふる。初めに点 P を目盛り 0 の位置に置く。硬貨を 1 回投げるごとに, 表が出れば, 点 P を右回りに 2 目盛り動かし, 裏が出れば, 点 P を左回りに 1 目盛り動かすという操作をくり返し行う。硬貨を n 回投げた後, 点 P が目盛り i の位置にある確率を $p_n(i)$ と表す。



(1) $p_2(1)$, $p_3(2)$, $p_3(3)$ を求めよ。

(2) 硬貨を 4 回投げて, 点 P が初めて目盛り 2 の位置で止まる確率を求めよ。

(3) $p_{n+1}(0)=\dfrac{1}{2}\{p_n(3)+p_n(1)\}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を示せ。

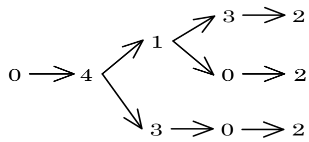
(4) z を $z^5=1$ を満たす複素数とする。すべての自然数 n に対して,
$\displaystyle\sum_{i=0}^{4}p_n(i)z^i=\frac{(z^2+z^{-1})^n}{2^n}$ が成り立つことを示せ。　[2004]

解答例

(1) 硬貨を 2 回投げたとき, 点 P が目盛り 1 の位置にあるのは, 表が 1 回, 裏が 1 回出る場合より, $p_2(1)={}_2\mathrm{C}_1\cdot\dfrac{1}{2}\cdot\dfrac{1}{2}=\dfrac{1}{2}$ である。

硬貨を 3 回投げたとき, 点 P が目盛り 2 の位置にあるのは, 3 回とも裏が出る場合であり, また点 P が目盛り 3 の位置にあるのは, 表が 2 回, 裏が 1 回出る場合なので, $p_3(2)=\left(\dfrac{1}{2}\right)^3=\dfrac{1}{8}$, $p_3(3)={}_3\mathrm{C}_2\left(\dfrac{1}{2}\right)^2\dfrac{1}{2}=\dfrac{3}{8}$ である。

(2) 4 回目に初めて目盛り 2 の位置で止まるのは, 1 回目に裏が出て, 右図のように点 P の位置が変化する場合より, その確率は, $3\times\left(\dfrac{1}{2}\right)^4=\dfrac{3}{16}$ である。



(3) $n+1$ 回目に 0 の位置にあるのは, n 回目には 3 の位置で硬貨を投げて表が出る場合か, n 回目には 1 の位置で硬貨を投げて裏が出る場合のいずれかより,

$$p_{n+1}(0)=p_n(3)\times\frac{1}{2}+p_n(1)\times\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\{p_n(3)+p_n(1)\}\cdots\cdots\cdots①$$

(4) ①より, $p_{n+1}(1)z=\dfrac{z}{2}\{p_n(4)+p_n(2)\}$, $p_{n+1}(2)z^2=\dfrac{z^2}{2}\{p_n(0)+p_n(3)\}$

$$p_{n+1}(3)z^3=\frac{z^3}{2}\{p_n(1)+p_n(4)\},\ p_{n+1}(4)z^4=\frac{z^4}{2}\{p_n(2)+p_n(0)\}$$

①と合わせて, 両辺の和をとると,

$$p_{n+1}(0)+p_{n+1}(1)z+p_{n+1}(2)z^2+p_{n+1}(3)z^3+p_{n+1}(4)z^4$$
$$=\frac{z^2+z^4}{2}p_n(0)+\frac{1+z^3}{2}p_n(1)+\frac{z+z^4}{2}p_n(2)+\frac{1+z^2}{2}p_n(3)+\frac{z+z^3}{2}p_n(4)$$

さて，$z^5=1$ より，$z^4=z^{-1}$，$z^2=z^{-3}$ となり，

$$\frac{z^2+z^4}{2}=\frac{z^2+z^{-1}}{2},\quad \frac{1+z^3}{2}=\frac{z(z^{-1}+z^2)}{2},\quad \frac{z+z^4}{2}=\frac{z^2(z^{-1}+z^2)}{2}$$
$$\frac{1+z^2}{2}=\frac{z^3(z^2+z^{-1})}{2},\quad \frac{z+z^3}{2}=\frac{z^4(z^2+z^{-1})}{2}$$

よって，$a_n=\displaystyle\sum_{i=0}^{4}p_n(i)z^i$ とおくと，$a_{n+1}=\dfrac{z^2+z^{-1}}{2}a_n$ ………②

ここで，$a_1=\displaystyle\sum_{i=0}^{4}p_1(i)z^i=\frac{1}{2}z^2+\frac{1}{2}z^4=\frac{z+z^{-1}}{2}$ となるので，②より，

$$\sum_{i=0}^{4}p_n(i)z^i=a_n=a_1\left(\frac{z^2+z^{-1}}{2}\right)^{n-1}=\left(\frac{z^2+z^{-1}}{2}\right)^n$$

コメント

確率と複素数という一見，畑違いな分野がうまく融合された問題です。

問　題

xy 平面上を移動する点 P を考える。はじめに，点 P は原点にあるとする。4 枚のカードに上，下，左，右の 4 つの文字を 1 つずつ書いて，それらを袋に入れておく。

1 枚のカードを取り出し，カードに書かれた文字の方向に 1 だけ点 P を移動させて，取り出したカードを袋に戻す，という試行をくり返す。上，下，左，右と書かれたカードは，それぞれ同じ確からしさで取り出されるものとする。

(1)　上，上，下，左，右，右，右の 7 文字すべてを 1 列に並べてできる文字列は何通りあるか。

(2)　この試行を 7 回くり返したときに，点 P が座標 $(2,\ 1)$ にある確率を求めよ。

(3)　この試行を 5 回くり返したときに，点 P が x 軸上にある確率を求めよ。

(4)　この試行を 2 回くり返したときの点 P の座標を $(X,\ Y)$ とする。$|X-Y|$ の期待値を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　上 2 枚，下 1 枚，左 1 枚，右 3 枚を 1 列に並べる順列は，$\dfrac{7!}{2!3!}=420$ 通りである。

(2)　上に a 回，下に b 回，左に c 回，右に d 回とすると，

$$a+b+c+d=7\cdots\cdots①,\ \ a-b=1\cdots\cdots②,\ \ -c+d=2\cdots\cdots③$$

②より $b=a-1$，③より $c=d-2$ となり，①に代入して，

$$a+a-1+d-2+d=7,\ \ a+d=5$$

$b\geqq 0, c\geqq 0$ より $a\geqq 1, d\geqq 2$ となり，$(a,\ d)=(1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2)$

(i)　$(a,\ b,\ c,\ d)=(1,\ 0,\ 2,\ 4)$ のとき　$\dfrac{7!}{2!4!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=105\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$

(ii)　$(a,\ b,\ c,\ d)=(2,\ 1,\ 1,\ 3)$ のとき　$\dfrac{7!}{2!3!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=420\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$

(iii)　$(a,\ b,\ c,\ d)=(3,\ 2,\ 0,\ 2)$ のとき　$\dfrac{7!}{3!2!2!}\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=210\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$(105+420+210)\times\left(\dfrac{1}{4}\right)^7=\dfrac{735}{16384}$

(3)　(2)と同様にして，$a+b+c+d=5\cdots\cdots④,\ \ a-b=0\cdots\cdots⑤$

⑤より $b=a$，④に代入して，$2a+c+d=5$

(i) $a=b=0$ のとき　$(c,\ d)=(0,\ 5),\ (1,\ 4),\ (2,\ 3),\ (3,\ 2),\ (4,\ 1),\ (5,\ 0)$

$$\left(1+\frac{5!}{4!}+\frac{5!}{2!3!}+\frac{5!}{3!2!}+\frac{5!}{4!}+1\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=32\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

(ii)　$a=b=1$ のとき　$(c,\ d)=(0,\ 3),\ (1,\ 2),\ (2,\ 1),\ (3,\ 0)$

$$\left(\frac{5!}{3!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{2!}+\frac{5!}{3!}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=160\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

(iii) $a=b=2$ のとき　$(c,\ d)=(0,\ 1),\ (1,\ 0)$

$$\left(\frac{5!}{2!\,2!}+\frac{5!}{2!\,2!}\right)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=60\times\left(\frac{1}{4}\right)^5$$

(i)(ii)(iii)より，求める確率は，$(32+160+60)\times\left(\frac{1}{4}\right)^5=\frac{63}{256}$

(4)　まず，$(X,\ Y)=(1,\ 1)$ となる確率は $2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$，$(X,\ Y)=(0,\ 0)$ は $4\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$，$(X,\ Y)=(-1,\ -1)$ は $2\times\left(\frac{1}{4}\right)^2$ より，$|X-Y|=0$ となる確率は,

$$(2+4+2)\times\left(\frac{1}{4}\right)^2=\frac{1}{2}$$

$|X-Y|$ の値は 0 または 2 なので，$|X-Y|=2$ となる確率は $1-\frac{1}{2}=\frac{1}{2}$ である。

以上より，$|X-Y|$ の期待値は，$0\times\frac{1}{2}+2\times\frac{1}{2}=1$

コメント

場合分けをして，ていねいに数えていくというセンター風の問題です。

問　題

A, B, C の 3 人が優勝決定戦を行う。まず 3 人のうち 2 人が対戦し，その勝者が残りの 1 人と対戦する。これをくり返して，2 回続けて勝ったものを優勝者とする。A と B が対戦したときにそれぞれが勝つ確率は$\dfrac{1}{2}$とし，C が A または B と対戦したときに C が勝つ確率は $p\,(0<p<1)$，負ける確率は$1-p$ であるとする。第 1 回戦は A と B の対戦として次の問いに答えよ。

(1)　第 2 回戦では第 1 回戦の勝者が残りの C と対戦する。C が負ければ勝者は優勝者となるが，C が勝てば C は第 1 回戦の敗者と第 3 回戦を行う。第 3 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者を順に並べると，ACC と BCC の 2 通りの順列が得られる。第 4 回戦で優勝者が決まる場合の各対戦の勝者の順列を答えよ。

(2)　第 m 回戦で優勝者が決まる確率を F_m とする。F_2，F_3，F_4 をそれぞれ求めよ。

(3)　2 以上の自然数 n に対して，確率 F_{3n} を求めよ。

(4)　$\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty}F_{3n}$ を計算せよ。　[2001]

解答例

(1)　第 4 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は, ACBB または BCAA である。

(2)　第 2 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は AA または BB より，その確率 F_2 は,

$$F_2=\frac{1}{2}(1-p)+\frac{1}{2}(1-p)=1-p$$

次に，第 3 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は ACC または BCC より，その確率 F_3 は,

$$F_3=\frac{1}{2}p^2+\frac{1}{2}p^2=p^2$$

また，第 4 回戦で優勝者が決まる確率 F_4 は, (1)より,

$$F_4=\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{2}p(1-p)\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{2}p(1-p)$$

(3)　$n\geqq 2$ の場合に，第 $3n$ 回戦で優勝者が決まる勝者の順列は，$3(n-1)$ 回まで ACBACB……ACB とくり返し最後の 3 回が ACC となる場合，および$3(n-1)$ 回まで BCABCA……BCA とくり返し最後の 3 回が BCC となる場合である。この確率 F_{3n} は,

$$F_{3n}=\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}p^2+\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}\cdot\frac{1}{2}p^2=p^2\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}$$

(4)　(3)の式に $n=1$ をあてはめると $F_3=p^2$ となるが，これは(2)より $n=1$ に対しても(3)の式が成立していることを示す。

さて，$0<p<1$ より $0<\dfrac{1}{2}p(1-p)<1$ なので，

$$\sum_{n=1}^{\infty}F_{3n}=p^2\sum_{n=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{2}p(1-p)\right\}^{n-1}=\frac{p^2}{1-\dfrac{1}{2}p(1-p)}=\frac{2p^2}{2-p+p^2}$$

コメント

問題文が長いのですが，これは詳しすぎるくらいのヒントです。なお，本問は有名な巴戦の問題です。

問　題

1 つのさいころを n 回投げる試行において，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目がちょうど k 回$(0 \leqq k \leqq n)$出る確率を p_k とする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=3$ のとき，p_1 を求めよ。

(2)　$p_k\ (0 \leqq k \leqq n)$ を n と k の式で表せ。また，出た目がすべて奇数で，かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q を求めよ。

(3)　$n=3m+2$ (m は自然数)とする。$0 \leqq k \leqq n-1$ のとき，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leqq 1$ となる k の範囲を求めよ。さらに，$0 \leqq k \leqq n$ のとき，p_k が最大となる k を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　さいころを 3 回投げて, 1 の目が 1 回, 3 または 5 の目が 2 回出る確率 p_1 は,

$$p_1 = {}_3\mathrm{C}_1 \frac{1}{6}\left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{18}$$

(2)　さいころを n 回投げて, 1 の目が k 回, 3 または 5 の目が $n-k$ 回出る確率 p_k は,

$$p_k = {}_n\mathrm{C}_k \left(\frac{1}{6}\right)^k \left(\frac{1}{3}\right)^{n-k}$$

また, n 回投げて, 出た目がすべて奇数の確率は $\left(\dfrac{1}{2}\right)^n$ で, すべて 3 または 5 の目の確率は $\left(\dfrac{1}{3}\right)^n$ なので, 出た目がすべて奇数で, かつ 1 の目が少なくとも 1 回出る確率 q は,

$$q = \left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(\frac{1}{3}\right)^n$$

(3)　(2)より，$p_{k+1} = {}_n\mathrm{C}_{k+1}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k-1}$ となるので,

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k+1}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k-1}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\left(\dfrac{1}{6}\right)^{k}\left(\dfrac{1}{3}\right)^{n-k}} = \frac{n-k}{2(k+1)}$$

ここで，$\dfrac{p_{k+1}}{p_k} \leqq 1 \iff n-k \leqq 2(k+1) \iff k \geqq \dfrac{n-2}{3} \iff k \geqq m$

よって, $k > m$ で $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} < 1$，$k=m$ のとき $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} = 1$, $k < m$ で $\dfrac{p_{k+1}}{p_k} > 1$ から,

$$p_0 < p_1 < p_2 \cdots < p_{m-1} < p_m = p_{m+1} > p_{m+2} > \cdots > p_{3m+2}$$

以上より，p_k が最大となるのは $k=m$ または $k=m+1$ のときである。

コメント

確率の最大値を求める典型問題です。誘導なしが普通です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 $m,\ n$ は存在しないことを証明せよ。

(2)　$p,\ q$ を異なる自然数とするとき，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくないことを証明せよ。

(3)　$\log_2 3$ の値の小数第 1 位を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　自然数 $m,\ n$ に対して，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ と仮定すると，

$$2^{\frac{m}{n}}=3,\ \ 2^m=3^n\ \cdots\cdots\cdots①$$

すると，①は左辺が偶数，右辺が奇数となり成立しない。

したがって，$\log_2 3=\dfrac{m}{n}$ を満たす自然数 $m,\ n$ は存在しない。

(2)　$p,\ q$ を異なる自然数とし，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分が等しいと仮定する。

ここで，$p>q$ としても一般性を失わないので，l を自然数として，

$$p\log_2 3-q\log_2 3=l,\ \ \log_2 3=\frac{l}{p-q}\ \cdots\cdots\cdots②$$

これは，(1)の結論に反するので，$p\log_2 3$ と $q\log_2 3$ の小数部分は等しくない。

(3)　まず，$\log_2 8<\log_2 9$ より，$\log_2 2^3<\log_2 3^2$，$3<2\log_2 3$ となり，

$$1.5<\log_2 3\ \cdots\cdots\cdots③$$

また，$\log_2 243<\log_2 256$ より，$\log_2 3^5<\log_2 2^8$，$5\log_2 3<8$ となり，

$$\log_2 3<1.6\ \cdots\cdots\cdots④$$

③④より，$\log_2 3$ の値の小数第 1 位は 5 である。

コメント

(1)と(2)はつながっているものの，(3)は独立の設問です。2 の累乗を 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, …, 3 の累乗を 3, 9, 27, 81, 243, …と書き並べて，評価式を考えました。

問　題

以下のそれぞれの命題が真であるか偽であるかを答え，真の場合は証明を，偽の場合は反例を与えよ。

(1)　微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる。

(2)　n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

[2009]

解答例

(1)　命題「微分可能な関数 $f(x)$ が $f'(a)=0$ を満たすならば，$f(x)$ は $x=a$ において極値をとる」は偽である。

反例は，$f(x)=x^3$，$a=0$

(2)　命題「n が 2 以上の自然数ならば，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある」は真である。

証明は以下のようになる。

$1+2+\cdots+n=\dfrac{1}{2}n(n+1)$ から，n，$n+1$ の一方は偶数，もう一方は奇数であり，$1+2+\cdots+n$ は奇数の約数をもつ。

$n\geqq 2$ から最小の奇数は 3 となり，$1+2+\cdots+n$ の約数の中に 3 以上の奇数がある。

コメント

命題の真偽の問題です。

問　題

$f(x)=\dfrac{8x+21}{3x+8}$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ であることを示せ。

(2)　$x\geqq 0$ ならば $f(x)\geqq 2$ であることを示せ。

(3)　$x\geqq 2,\ y\geqq 2$ ならば，$|f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{|x-y|}{100}$ となることを示せ。

(4)　$x\geqq 2$ ならば，$\left|f(f(x))-\sqrt{7}\right|\leqq\dfrac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$ となることを示し，これを用いて，$|r-\sqrt{7}|<10^{-4}$ を満たす有理数 r を 1 つ求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(\sqrt{7})=\dfrac{8\sqrt{7}+21}{3\sqrt{7}+8}=\dfrac{\sqrt{7}(8+3\sqrt{7})}{3\sqrt{7}+8}=\sqrt{7}$

(2)　$f(x)-2=\dfrac{8x+21}{3x+8}-2=\dfrac{2x+5}{3x+8}$ より，$x\geqq 0$ のとき $f(x)-2\geqq 0$ である。

よって，$x\geqq 0$ ならば $f(x)\geqq 2$ である。

(3)　$x\geqq 2,\ y\geqq 2$ のとき，

$$|f(x)-f(y)|=\left|\frac{8x+21}{3x+8}-\frac{8y+21}{3y+8}\right|$$
$$=\frac{|(8x+21)(3y+8)-(3x+8)(8y+21)|}{(3x+8)(3y+8)}=\frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)}$$

ここで，$(3x+8)(3y+8)\geqq 14^2>100$ より，

$$\frac{|x-y|}{(3x+8)(3y+8)}\leqq\frac{|x-y|}{100}$$

よって，$|f(x)-f(y)|\leqq\dfrac{|x-y|}{100}$ ………①

(4)　(1)(2)より，$x\geqq 2$ のとき $f(x)\geqq 2$，$f(\sqrt{7})=\sqrt{7}\geqq 2$ なので，①より，

$$|f(f(x))-f(f(\sqrt{7}))|\leqq\frac{|f(x)-f(\sqrt{7})|}{100}\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}$$

ここで，$f(f(\sqrt{7}))=f(\sqrt{7})=\sqrt{7}$ より，

$$|f(f(x))-\sqrt{7}|\leqq\frac{|x-\sqrt{7}|}{10000}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，②に $x=2$ を代入すると，

$$|f(f(2))-\sqrt{7}|\leqq\frac{|2-\sqrt{7}|}{10000}<\frac{1}{10000}=10^{-4}$$

よって，求める有理数 r の 1 つは，$r=f(f(2))=f\left(\dfrac{37}{14}\right)=\dfrac{590}{223}$

コメント

$\sqrt{7}$ の近似値を求める問題です。きめ細かい誘導のために，解の流れは明快です。

問　題

複素数平面上を，点 P が次のように移動する。

1. 時刻 0 では，P は原点にいる。時刻 1 まで，P は実軸の正の方向に速さ 1 で移動する。移動後の P の位置を $Q_1(z_1)$ とすると，$z_1=1$ である。
2. 時刻 1 に P は $Q_1(z_1)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 2 までその方向に速さ $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_2(z_2)$ とすると，$z_2=\dfrac{3+i}{2}$ である。
3. 以下同様に，時刻 n に P は $Q_n(z_n)$ において進行方向を $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，時刻 $n+1$ までその方向に速さ $\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n$ で移動する。移動後の P の位置を $Q_{n+1}(z_{n+1})$ とする。ただし n は自然数である。

$\alpha=\dfrac{1+i}{2}$ として，次の問いに答えよ。

(1)　z_3，z_4 を求めよ。

(2)　z_n を α, n を用いて表せ。

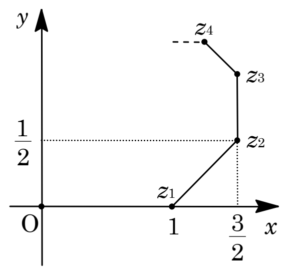
(3)　P が $Q_1(z_1)$，$Q_2(z_2)$，…と移動するとき，P はある点 $Q(w)$ に限りなく近づく。w を求めよ。

(4)　z_n の実部が(3)で求めた w の実部より大きくなるようなすべての n を求めよ。

[2016]

解答例

(1)　$\alpha=\dfrac{1+i}{2}=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\left(\cos\dfrac{\pi}{4}+i\sin\dfrac{\pi}{4}\right)$ なので，点 αz は点 z を原点回りに $\dfrac{\pi}{4}$ 回転し，原点との距離 $\dfrac{1}{\sqrt{2}}$ 倍した点である。



すると，与えられた条件から，

$$z_{n+2}-z_{n+1}=\alpha(z_{n+1}-z_n)\cdots\cdots\cdots(*)$$

$$z_3=z_2+\alpha(z_2-z_1)=\frac{3+i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{1+i}{2}$$

$$=\frac{3+i}{2}+\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}$$

$$z_4=z_3+\alpha(z_3-z_2)=\frac{3+2i}{2}+\frac{1+i}{2}\cdot\frac{i}{2}=\frac{3+2i}{2}+\frac{-1+i}{4}=\frac{5+5i}{4}$$

(2)　$(*)$より，$z_{n+1}-z_n=(z_2-z_1)\alpha^{n-1}=\dfrac{1+i}{2}\alpha^{n-1}=\alpha^n$ となり，$n\geqq 2$ で，

$$z_n=z_1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=1+\sum_{k=1}^{n-1}\alpha^k=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha^k=\frac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$$

$n=1$ のときも成立するので，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}$ である。

(3)　$n\to\infty$ のとき $|\alpha^n|=|\alpha|^n=\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\to 0$ より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\alpha^n=0$ となり，

$$w=\lim_{n\to\infty}z_n=\frac{1}{1-\alpha}=\frac{2}{1-i}=1+i$$

(4)　(2)より，$z_n=\dfrac{1-\alpha^n}{1-\alpha}=(1+i)(1-\alpha^n)=(1+i)\left\{1-\left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\left(\cos\dfrac{n}{4}\pi+i\sin\dfrac{n}{4}\pi\right)\right\}$

ここで，z_n の実部が w の実部 1 より大きくなることより，

$$1-\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\cos\frac{n}{4}\pi+\left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^n\sin\frac{n}{4}\pi>1,\ \ \sin\frac{n}{4}\pi-\cos\frac{n}{4}\pi>0$$

すると，$\sqrt{2}\sin\left(\dfrac{n}{4}-\dfrac{1}{4}\right)\pi>0$ となるので，k を 0 以上の整数として，

$$2k\pi<\left(\frac{n}{4}-\frac{1}{4}\right)\pi<(2k+1)\pi,\ \ 8k+1<n<8k+5$$

よって，$n=8k+2$，$8k+3$，$8k+4$ である。

コメント

複素数平面上の点の移動を題材にした頻出問題です。現行課程で復活し，日も浅いためなのか，問題文の説明が度を超えた丁寧さです。

問　題

正の実数 $a,\ b,\ c$ を係数とする 3 次方程式

$$(*)\quad x^3+ax^2+bx+c=0$$

が，純虚数の解をもつとする。次の問いに答えよ。

(1)　$ab-c$ の値を求めよ。

(2)　複素数平面上で方程式 $x^3+8=0$ の 3 個の解が表す点を頂点とする三角形を考える。方程式(*)の解が表すすべての点がこの三角形の頂点または辺上にあるとき $a,\ b,\ c$ の値を求めよ。　[2005]

解答例

(1)　$x^3+ax^2+bx+c=0$ ……(*)の解の 1 つが純虚数 $x=ki$ $(k\neq 0)$ より，

$$k^3i^3+ak^2i^2+bki+c=0,\ (-ak^2+c)+(-k^3+bk)i=0$$

$a,\ b,\ c$ は実数より，

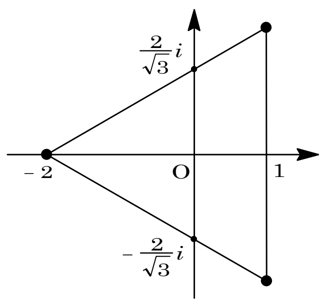
$$-ak^2+c=0\ \cdots\cdots\text{①},\ -k^3+bk=0\ \cdots\cdots\text{②}$$

②より，$k\neq 0$ から $k^2=b$ となり，①に代入すると，$ab-c=0$ である。

(2)　$x^3+8=0$ より，$(x+2)(x^2-2x+4)=0$

$$x=-2,\ x=1\pm\sqrt{3}i$$

すると，この 3 つの解が表す点を頂点とする三角形は右図のようになる。



また(1)より，(*)は，$x^3+ax^2+bx+ab=0$ となり，

$$(x+a)(x^2+b)=0,\ x=-a,\ \pm\sqrt{b}i$$

$a>0$ から，$-a=-2$，$\sqrt{b}=\dfrac{2}{\sqrt{3}}$

よって，$a=2$，$b=\dfrac{4}{3}$，$c=ab=\dfrac{8}{3}$

コメント

(2)において，(*)の純虚数解はすぐにわかってしまいます。解と係数の関係を用いるまでもありません。

問　題

複素数平面上で不等式$2|z-2| \leqq |z-5| \leqq |z+1|$を満たす点$z$が描く図形を$D$とする。

(1) Dを図示せよ。

(2) 点zがD上を動くものとする。$\arg z=\theta$とするとき，$\tan\theta$の値のとりうる範囲を求めよ。

(3) Dの面積を求めよ。 [2004]

解答例

(1) 条件より，$2|z-2| \leqq |z-5|$………①，$|z-5| \leqq |z+1|$………②

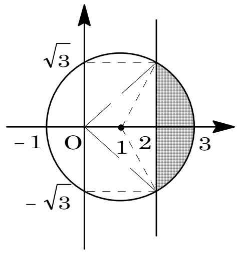
①より，$4|z-2|^2 \leqq |z-5|^2$，$4(z-2)(\bar{z}-2) \leqq (z-5)(\bar{z}-5)$，$z\bar{z}-z-\bar{z} \leqq 3$

$$(z-1)(\bar{z}-1) \leqq 4,\ |z-1|^2 \leqq 4,\ |z-1| \leqq 2$$

よって，点zは，点 1 を中心とする半径 2 の円の内部または周上にある。

②より，点 z は，点 5 と点-1を結ぶ線分の垂直二等分線，すなわち点 2 を通り実軸に垂直な直線を境界とし，点 5 を含む領域にある。

以上より，①②を満たす図形 D は右図の網点部である。ただし，境界を含む。



(2) ①と②の境界線の交点は$2 \pm \sqrt{3}i$である。

そこで，$\arg z=\theta$とするとき，$-\dfrac{\sqrt{3}}{2} \leqq \tan\theta \leqq \dfrac{\sqrt{3}}{2}$となる。

(3) Dの面積をSとすると，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi-\frac{1}{2}\cdot 2^2\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{4}{3}\pi-\sqrt{3}$$

コメント

①の境界線はアポロニウスの円ですが，その知識は用いなくても，普通に計算していけば，結論が導けます。基本的な 1 題です。

問　題

θ を $0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ を満たす定数とし，複素数平面において $0 \leqq \arg z \leqq \pi-\theta$ を満たすすべての点 $z(\neq 0)$ と点 0 からなる集合を D とする。

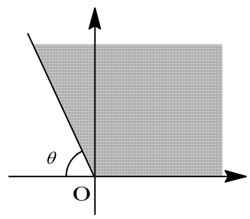
(1) 複素数平面上に D を図示せよ。

(2) a を $a>0$ を満たす実数とする。このとき，D に属する点 z に対して，次の不等式が成り立つことを示せ。　$|z|\sin\theta \leqq |z+a|$

　また，等号が成り立つときの z を a，θ を用いて表せ。 [2003]

解答例

(1) 原点を含み，$0 \leqq \arg z \leqq \pi-\theta$ を満たす点 z の集合 D は，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



(2) $z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$ $(r \geqq 0,\ 0 \leqq \varphi \leqq \pi-\theta)$ とおく。

$$\begin{aligned}|z+a|^2 &= |(r\cos\varphi+a)+ir\sin\varphi|^2\\ &= (r\cos\varphi+a)^2 + r^2\sin^2\varphi\\ &= r^2+2ra\cos\varphi+a^2\end{aligned}$$

すると，
$$\begin{aligned}|z+a|^2-|z|^2\sin^2\theta &= r^2+2ra\cos\varphi+a^2-r^2\sin^2\theta\\ &= r^2\cos^2\theta+2ra\cos\varphi+a^2\\ &\geqq r^2\cos^2\theta+2ra\cos(\pi-\theta)+a^2\\ &= r^2\cos^2\theta-2ra\cos\theta+a^2\\ &= (r\cos\theta-a)^2 \geqq 0\end{aligned}$$

よって，$|z|\sin\theta \leqq |z+a|$ が成り立つ。

等号は，$\varphi=\pi-\theta$ かつ $r\cos\theta-a=0$ のとき成立し，このとき z は，

$$z = \frac{a}{\cos\theta}\{\cos(\pi-\theta)+i\sin(\pi-\theta)\} = \frac{a}{\cos\theta}(-\cos\theta+i\sin\theta) = -a+ia\tan\theta$$

コメント

初めは，(2)を図形的に考えようとしました。しかし，z の位置について，場合分けが出てきそうなので止め，式計算で証明をしました。

問　題

l を複素数平面上の直線 $z=t(1+i)$ (t は実数)，α，β を複素数とする。ただし，点 α は l 上にないとする。

(1) $\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ ならば，l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ であることを示せ。

(2) l 上のすべての点 z に対して $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ ならば，$\alpha=i\beta$ または $\alpha=\overline{\beta}$ であることを示せ。

(3) l 上に異なる 2 定点 z_1，z_2 があって，$\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}$ と $\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}$ が同じ複素数になるとする。この複素数を γ とおくとき，l 上のすべての点 z に対し $\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\gamma$ となることを示せ。また γ の値を求めよ。 [2002]

解答例

(1) $\alpha=i\beta$ のとき，$|z-\alpha|=|t(1+i)-i\beta|=|t+ti-i\beta|$

$$|\overline{z}-\beta|=|t(1-i)-\beta|=|t-ti-\beta|=|-i(ti+t-i\beta)|=|ti+t-i\beta|$$

また，$\alpha=\overline{\beta}$ のとき，$|z-\alpha|=|t(1+i)-\overline{\beta}|=|t+ti-\overline{\beta}|$

$$|\overline{z}-\beta|=|t(1-i)-\beta|=|t-ti-\beta|=|\overline{t+ti-\overline{\beta}}|$$

以上より，いずれの場合も $|z-\alpha|=|\overline{z}-\beta|$ なので，$\dfrac{|\overline{z}-\beta|}{|z-\alpha|}=1$，$\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$

(2) $\left|\dfrac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}\right|=1$ のとき，$|z-\alpha|=|\overline{z}-\beta|$ より，$|z-\alpha|^2=|\overline{z}-\beta|^2$

$$(z-\alpha)(\overline{z}-\overline{\alpha})=(\overline{z}-\beta)(z-\overline{\beta}),\ (\overline{\alpha}-\beta)z+(\alpha-\overline{\beta})\overline{z}-(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})=0$$

$z=t(1+i)$ を代入してまとめると，

$$t\{(\overline{\alpha}-\beta+\alpha-\overline{\beta})+i(\overline{\alpha}-\beta-\alpha+\overline{\beta})\}-(\alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta})=0\cdots\cdots\cdots①$$

①がどんな t に対しても成立する条件は，

$$(\overline{\alpha}-\beta+\alpha-\overline{\beta})+i(\overline{\alpha}-\beta-\alpha+\overline{\beta})=0\cdots\cdots②,\ \alpha\overline{\alpha}-\beta\overline{\beta}=0\cdots\cdots③$$

③より，$|\alpha|^2=|\beta|^2$ なので，$|\alpha|=|\beta|=r$，$0\leqq\theta<2\pi$，$0\leqq\varphi<2\pi$ とおくと，

$$\alpha=r(\cos\theta+i\sin\theta),\ \beta=r(\cos\varphi+i\sin\varphi)\cdots\cdots\cdots④$$

②より，$(\alpha+\overline{\alpha})-(\beta+\overline{\beta})-i(\alpha-\overline{\alpha})-i(\beta-\overline{\beta})=0$

④を代入すると，$2r\cos\theta-2r\cos\varphi-i\cdot 2ir\sin\theta-i\cdot 2ir\sin\varphi=0$

$$\cos\theta+\sin\theta-\cos\varphi+\sin\varphi=0,\ \sqrt{2}\sin\left(\theta+\frac{\pi}{4}\right)+\sqrt{2}\sin\left(\varphi-\frac{\pi}{4}\right)=0$$

$$\sin\frac{\theta+\varphi}{2}\cos\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\theta-\varphi}{2}\right)=0$$

$\sin\dfrac{\theta+\varphi}{2}=0$ のとき，$0\leqq\dfrac{\theta+\varphi}{2}<2\pi$ より $\dfrac{\theta+\varphi}{2}=0,\ \pi$ となる。よって，$\theta=-\varphi$ または $\theta=2\pi-\varphi$ より，$\alpha=\overline{\beta}$ である。

$\cos\left(\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta-\varphi}{2}\right)=0$ のとき，$-\dfrac{3}{4}\pi<\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta-\varphi}{2}<\dfrac{5}{4}\pi$ より $\dfrac{\pi}{4}+\dfrac{\theta-\varphi}{2}=-\dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{2}$ となる。よって，$\theta=\varphi-\dfrac{3}{2}\pi$ または $\theta=\varphi+\dfrac{\pi}{2}$ より，$\alpha=i\beta$ である。

(3) 条件より，$\dfrac{\overline{z_1}-\beta}{z_1-\alpha}=\dfrac{\overline{z_2}-\beta}{z_2-\alpha}=\gamma$ なので，

$$\overline{z_1}-\beta=\gamma(z_1-\alpha)\cdots\cdots⑤,\ \overline{z_2}-\beta=\gamma(z_2-\alpha)\cdots\cdots⑥$$

ここで, k を実数として, l 上の任意の点を $z=kz_1+(1-k)z_2$ とおくと,

$$\frac{\overline{z}-\beta}{z-\alpha}=\frac{k\overline{z_1}+(1-k)\overline{z_2}-\beta}{kz_1+(1-k)z_2-\alpha}=\frac{k\{\beta+\gamma(z_1-\alpha)\}+(1-k)\{\beta+\gamma(z_2-\alpha)\}-\beta}{kz_1+(1-k)z_2-\alpha}$$
$$=\frac{k\gamma(z_1-\alpha)+(1-k)\gamma(z_2-\alpha)}{kz_1+(1-k)z_2-\alpha}=\gamma$$

また，⑤⑥より $\overline{z_1}-\overline{z_2}=\gamma(z_1-z_2)$ なので，$\dfrac{\overline{z_1}-\overline{z_2}}{z_1-z_2}=\gamma$ となり，$z_1=t_1(1+i)$，$z_2=t_2(1+i)$ とおくと，

$$\gamma=\frac{(t_1-t_2)(1-i)}{(t_1-t_2)(1+i)}=\frac{(1-i)^2}{2}=-i$$

コメント

証明問題が 3 題も入っており，ボリュームがかなりあります。特に，(2)は時間がかかりました。

問　題

z は $0° < \arg z < 90°$ を満たす複素数とし，複素数平面上の 3 点 O(0)，A(1)，B(z) を頂点とする△OAB を考える。また，$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ とおく。

(1)　$\alpha^2 - \alpha + 1$ の値を求めよ。

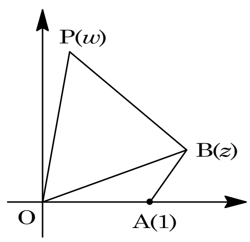
(2)　点 P(w) を，直線 OB に関して点 A と反対側に，△POB が正三角形になるようにとる。複素数 w を z と α を用いて表せ。

(3)　点 Q$(z+\alpha-\alpha z)$ に対し，△ABQ は正三角形であることを示せ。

(4)　$\arg\left(\dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}\right)$ を求めよ。ただし，偏角の範囲は，$0°$ 以上 $360°$ 未満とする。

[2001]

解答例



(1)　$\alpha = \dfrac{1+\sqrt{3}i}{2}$ のとき，$2\alpha - 1 = \sqrt{3}i$ より，

$$4\alpha^2 - 4\alpha + 1 = -3,\quad \alpha^2 - \alpha + 1 = 0$$

(2)　条件より，点 P(w) は点 B(z) を原点まわりに $60°$ 回転した点である。

$\alpha = \cos 60° + i\sin 60°$ より，$w = \alpha z$

(3)　$u = z + \alpha - \alpha z$ とおくと，$u - z = \alpha(1-z)$

よって，点 Q(u) は点 A(1) を点 B(z) のまわりに $60°$ 回転した点である。すなわち，△ABQ は正三角形となる。

(4)　$v = \dfrac{z+\alpha-\alpha z}{w-1}$ とおくと，(1)(2)より，

$$v = \frac{(1-\alpha)z+\alpha}{\alpha z - 1} = \frac{-\alpha^2 z + \alpha}{\alpha z - 1} = \frac{-\alpha(\alpha z - 1)}{\alpha z - 1} = -\alpha$$

よって，$v = -\cos 60° - i\sin 60° = \cos 240° + i\sin 240°$ より，$\arg v = 240°$

コメント

複素数平面上の正三角形が題材となっている頻出基本問題です。

問　題

複素数平面上に，3 点 $A(-2i)$，$B(1-i)$，$C(-1+3i)$ と，点 $D(1+i)$ を中心とする半径 1 の円 K がある。点 $P(z)$ は K の周上にあり，点 $Q(w)$ は，三角形 APQ と三角形 ABC が同じ向きに相似になる点とする(すなわち，AP : AQ = AB : AC で，AP から AQ に反時計まわりに測った角が，AB から AC に反時計まわりに測った角に等しい)。このとき，次の問いに答えよ。

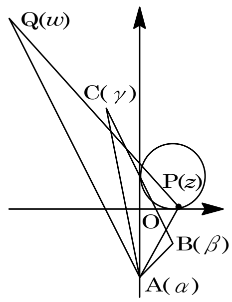
(1) w を z の式で表せ。

(2) 点 P が円 K の周上を動くとき，点 Q の軌跡を求めよ。 [2000]

解答例

(1) $\triangle$APQ と$\triangle$ABC が同じ向きに相似なので，$\dfrac{w-\alpha}{z-\alpha}=\dfrac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}$ より，

$$w=\alpha+\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}(z-\alpha)=-2i+\frac{-1+5i}{1+i}(z+2i)$$
$$=-2i+(2+3i)(z+2i)=(2+3i)z-6+2i$$



(2) (1)より，$z=\dfrac{w+6-2i}{2+3i}$ ………①

また条件より，$\left|z-(1+i)\right|=1$ ………②

①を②に代入して，$\left|\dfrac{w+6-2i}{2+3i}-(1+i)\right|=1$

$$\left|\frac{w+7-7i}{2+3i}\right|=1,\ \frac{\left|w+7-7i\right|}{\left|2+3i\right|}=1$$

$$\left|w+7-7i\right|=\left|2+3i\right|,\ \left|w-(-7+7i)\right|=\sqrt{13}$$

よって，点 $Q(w)$は点 $-7+7i$ を中心とする半径 $\sqrt{13}$ の円を描く。

コメント

同じ向きに相似という条件式の説明は省略しました。もし解を丁寧に書くならば，絶対値と偏角を用いて説明をします。

問　題

$0<b<a$ を満たす定数 $a,\ b$ に対し，2 つの楕円 $A:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$B:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ を考える。また α，β は，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ を満たす 0 と $\dfrac{\pi}{2}$ の間の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$ を示せ。

(2)　2 つの楕円 $A,\ B$ の第 1 象限にある交点の座標を求めよ。

(3)　楕円 A で囲まれる図形と楕円 B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲にある部分の面積 S を $a,\ b$，β を用いて表せ。　[2007]

解答例

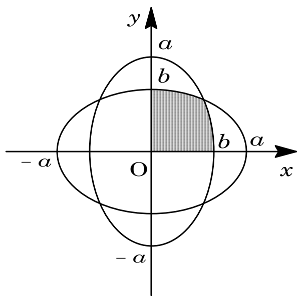
(1)　$0<\alpha<\dfrac{\pi}{2}$，$0<\beta<\dfrac{\pi}{2}$，$\sin\alpha=\dfrac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$，$\sin\beta=\dfrac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$ より，

$$\cos\alpha=\sqrt{1-\frac{a^2}{a^2+b^2}}=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}},\quad \cos\beta=\sqrt{1-\frac{b^2}{a^2+b^2}}=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

すると，$\sin(\alpha+\beta)=\sin\alpha\cos\beta+\cos\alpha\sin\beta$

$$=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}+\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}=1$$

よって，$0<\alpha+\beta<\pi$ から，$\alpha+\beta=\dfrac{\pi}{2}$



(2)　$A:\dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$，$B:\dfrac{x^2}{b^2}+\dfrac{y^2}{a^2}=1$ より，

$$b^2x^2+a^2y^2=a^2b^2\cdots\cdots\text{①}$$
$$a^2x^2+b^2y^2=a^2b^2\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$(a^2-b^2)(x^2-y^2)=0$

$0<b<a$ より，$x^2=y^2$ となり，①に代入して，

$$(a^2+b^2)x^2=a^2b^2,\quad x^2=\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}$$

$x>0$，$y>0$ となるのは，$x=y=\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ のときで，第 1 象限にある A と B の交点の座標は，$\left(\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}},\ \dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\right)$となる。

(3)　楕円 A の第 1 象限の部分は，①より，$y=\dfrac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}$

さて，楕円 A と B で囲まれる図形の共通部分のうち，$x\geqq 0$，$y\geqq 0$ の範囲にある部分は，直線 $y=x$ に関して対称であるので，その面積 S は，

$$\frac{S}{2}=\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\frac{b}{a}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{1}{2}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

$$=\frac{b}{a}\int_0^{\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}}\sqrt{a^2-x^2}\,dx-\frac{a^2b^2}{2(a^2+b^2)}$$

ここで，$\dfrac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}=a\sin\beta$ であり，$x=a\sin\theta$ とおくと，

$$\int_0^{a\sin\beta}\sqrt{a^2-x^2}\,dx=\int_0^{\beta}\sqrt{a^2(1-\sin^2\theta)}\cdot a\cos\theta\,d\theta=a^2\int_0^{\beta}\cos^2\theta\,d\theta$$

$$=\frac{a^2}{2}\int_0^{\beta}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\frac{a^2}{2}\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\beta}$$

$$=\frac{a^2}{2}\beta+\frac{a^2}{4}\sin 2\beta$$

以上より，$S=\dfrac{2b}{a}\Big(\dfrac{a^2}{2}\beta+\dfrac{a^2}{4}\sin 2\beta\Big)-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}=ab\beta+ab\sin\beta\cos\beta-\dfrac{a^2b^2}{a^2+b^2}$

$$=ab\beta+ab\cdot\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}\cdot\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}-\frac{a^2b^2}{a^2+b^2}=ab\beta$$

コメント

楕円が境界線となっている図形の面積を求める問題です。直線 $y=x$ に関して対称であることに気付けば，積分が 1 回で済みます。

問　題

C を曲線 $a^2x^2+y^2=1$，l を直線 $y=ax+2a$ とする。ただし，a は正の定数である。

(1)　C と l とが異なる 2 点で交わるための a の範囲を求めよ。

(2)　C 上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式を求めよ。

(3)　(1)における交点を P, Q とし，点 P における C の接線と点 Q における C の接線との交点を $\mathrm{R}(X,\ Y)$ とする。a が(1)の範囲を動くとき, X, Y の関係式と Y の範囲を求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$a^2x^2+y^2=1$ ……①，$y=ax+2a$ ……②の共有点は,

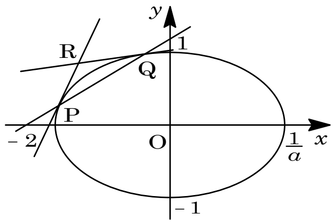
$$a^2x^2+(ax+2a)^2=1,\ 2a^2x^2+4a^2x+4a^2-1=0$$

異なる 2 点で交わる条件は，$D/4=4a^4-2a^2(4a^2-1)>0$

$a>0$ より，$-2a^2+1>0$，$0<a<\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

(2)　①上の点 $(x_0,\ y_0)$ における接線の方程式は,

$$a^2x_0x+y_0y=1$$



(3)　$\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ とおくと，P, Q における接線は, それぞれ,

$$a^2x_1x+y_1y=1,\ a^2x_2x+y_2y=1$$

ともに $\mathrm{R}(X,\ Y)$ を通るので,

$$a^2Xx_1+Yy_1=1\ \cdots\cdots③,\ a^2Xx_2+Yy_2=1\ \cdots\cdots④$$

ここで，方程式 $a^2Xx+Yy=1$ ……⑤を考えると，これは直線を表し，③より点 $\mathrm{P}(x_1,\ y_1)$ を通り，④より点 $\mathrm{Q}(x_2,\ y_2)$ も通る。すると，⑤は直線 PQ を表す。

⑤を変形すると，$y=-\dfrac{a^2X}{Y}x+\dfrac{1}{Y}$ となり，これが②と一致することから,

$$-\frac{a^2X}{Y}=a\ \cdots\cdots⑥,\ \frac{1}{Y}=2a\ \cdots\cdots⑦$$

⑦より $a=\dfrac{1}{2Y}$，⑥に代入して，$-\dfrac{1}{2Y}\cdot\dfrac{X}{Y}=1$，$X=-2Y^2$

また，⑦より $Y=\dfrac{1}{2a}$ なので, (1)より，$Y>\dfrac{1}{\sqrt{2}}$

コメント

(2)は結論だけですが，プロセスを書いた方がよいのかどうか迷います。(3)は有名問題の有名な解法を用いて解きました。

問　題

曲線 C は媒介変数 θ を用いて

$$C : x = \cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta,\ \ y = \sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta\ \ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{12}\pi\right)$$

と表されている。

(1)　曲線 C が $C : x = a + b\cos(2\theta + A),\ \ y = c + d\sin(2\theta + A)\ \left(0 \leqq \theta \leqq \frac{5}{12}\pi\right)$ と表されるような $a, b, c, d, A\,(0 \leqq A < \pi)$ を求めよ。

(2)　曲線 C の長さを求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$x = \cos^2\theta - \sqrt{3}\sin\theta\cos\theta = \dfrac{1+\cos 2\theta}{2} - \sqrt{3}\cdot\dfrac{\sin 2\theta}{2}$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos 2\theta - \frac{\sqrt{3}}{2}\sin 2\theta = \frac{1}{2} + \cos\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

$y = \sin\theta\cos\theta - \sqrt{3}\sin^2\theta = \dfrac{\sin 2\theta}{2} - \sqrt{3}\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}$

$$= -\frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sin 2\theta + \frac{\sqrt{3}}{2}\cos 2\theta = -\frac{\sqrt{3}}{2} + \sin\left(2\theta + \frac{\pi}{3}\right)$$

よって，$a = \dfrac{1}{2}$，$b = 1$，$c = -\dfrac{\sqrt{3}}{2}$，$d = 1$，$A = \dfrac{\pi}{3}$

(2)　$0 \leqq \theta \leqq \dfrac{5}{12}\pi$ より，$\dfrac{\pi}{3} \leqq 2\theta + \dfrac{\pi}{3} \leqq \dfrac{7}{6}\pi$ となる。

(1)より，曲線 C は中心 $\left(\dfrac{1}{2},\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2}\right)$，半径 1 の円弧で，中心角は $\dfrac{7}{6}\pi - \dfrac{\pi}{3} = \dfrac{5}{6}\pi$ より，その長さは，$1\cdot\dfrac{5}{6}\pi = \dfrac{5}{6}\pi$ となる。

コメント

(1)に cos での合成が出ました。なお，(2)の弧長を求めるのに，積分を利用してももちろん構いません。しかし，これは「やりすぎ」というものです。

問　題

数列$\{a_n\}$を，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定める。次の問いに答えよ。

(1) $a_2=\tan\dfrac{\pi}{6}$，$a_3=\tan\dfrac{\pi}{12}$であることを示せ。

(2) 一般項a_nを表す n の式を推定し，それが正しいことを数学的帰納法により証明せよ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n$を求めよ。 [2017]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{x}{\sqrt{x^2+1}+1}$とおくと，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$のとき，

$$f(\tan\theta)=\frac{\tan\theta}{\sqrt{\tan^2\theta+1}+1}=\frac{\tan\theta}{\dfrac{1}{\cos\theta}+1}=\frac{\sin\theta}{1+\cos\theta}=\frac{2\sin\dfrac{\theta}{2}\cos\dfrac{\theta}{2}}{2\cos^2\dfrac{\theta}{2}}=\tan\frac{\theta}{2}$$

さて，$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3}$，$a_{n+1}=\dfrac{a_n}{\sqrt{{a_n}^2+1}+1}=f(a_n)$に対して，$\theta_1=\dfrac{\pi}{3}$とおくと，

$$a_2=f(a_1)=f(\tan\theta_1)=\tan\frac{\theta_1}{2}=\tan\frac{\pi}{6}$$

さらに，$\theta_2=\dfrac{\pi}{6}$とおくと，$a_3=f(a_2)=f(\tan\theta_2)=\tan\dfrac{\theta_2}{2}=\tan\dfrac{\pi}{12}$

(2) まず，$a_n=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$と推測できるので，これを数学的帰納法により証明する。

(i) $n=1$のとき　$a_1=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^0}=\tan\dfrac{\pi}{3}$より成立している。

(ii) $n=k$のとき　$a_k=\tan\theta_k\left(\theta_k=\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{k-1}}\right)$と仮定すると，$0<\theta_k<\dfrac{\pi}{2}$で，

$$a_{k+1}=f(a_k)=f(\tan\theta_k)=\tan\frac{\theta_k}{2}=\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^k}$$

よって，$n=k+1$のときも成立している。

(i)(ii)より，$a_n=\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}$である。

(3) まず，$\theta\to 0$のとき$\dfrac{\tan\theta}{\theta}\to 1$であることに着目して変形すると，

$$2^n a_n=2^n\tan\frac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}=\frac{2\pi}{3}\cdot\frac{\tan\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}{\dfrac{\pi}{3\cdot 2^{n-1}}}$$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}2^n a_n=\frac{2\pi}{3}$である。

コメント

数列の極限に関する基本的な問題です。ただ，同じプロセスを 3 回記すのは気後れしましたので，初めに作った解をリフォームしています。

問　題

座標平面上の放物線 $C_n : y = x^2 - p_n x + q_n$ 　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を考える。ただし，p_n，q_n は，$p_1{}^2 - 4q_1 = 4$，$p_n{}^2 - 4q_n > 0$ 　$(n = 2,\ 3,\ 4,\ \cdots)$ を満たす実数とする。C_n と x 軸との 2 つの交点を結ぶ線分の長さを l_n とする。また，C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は，$\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$ 　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　C_n の頂点の y 座標を l_n を用いて表せ。

(2)　数列 $\{l_n\}$ の一般項を求めよ。

(3)　$p_n = n\sqrt{n}$ $(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ であるとき，$\displaystyle\lim_{n\to\infty} n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)$ を求めよ。ただし，$\log x$ は x の自然対数である。 [2015]

解答例

(1)　$C_n : y = x^2 - p_n x + q_n$ と x 軸の交点は，$p_n{}^2 - 4q_n > 0$ から $x = \dfrac{p_n \pm \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n}}{2}$ となり，これを $x = \alpha_n$，β_n $(\alpha_n < \beta_n)$ とおくと，

$$l_n = \beta_n - \alpha_n = \sqrt{p_n{}^2 - 4q_n} \cdots\cdots\cdots①$$

また，$C_n : y = \left(x - \dfrac{p_n}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{4}(p_n{}^2 - 4q_n)$ より，頂点の y 座標は $-\dfrac{1}{4}(p_n{}^2 - 4q_n)$ となり，①から $-\dfrac{1}{4}l_n{}^2$ と表せる。

(2)　C_n と x 軸で囲まれた部分の面積 S_n は，

$$S_n = \int_{\alpha_n}^{\beta_n} -(x^2 - p_n x + q_n)dx = -\int_{\alpha_n}^{\beta_n}(x-\alpha_n)(x-\beta_n)dx = \frac{1}{6}(\beta_n - \alpha_n)^3$$

①より，$S_n = \dfrac{1}{6}l_n{}^3$ となり，条件 $\dfrac{S_{n+1}}{S_n} = \left(\dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3$ に代入すると，

$$\frac{l_{n+1}{}^3}{l_n{}^3} = \left(\frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}\right)^3,\quad \frac{l_{n+1}}{l_n} = \frac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}} \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$f(n) = \dfrac{n+2}{\sqrt{n(n+1)}}$ とおくと，②から $l_{n+1} = f(n)l_n$ となり，

$$l_n = l_1 f(1)f(2)f(3)\cdots\cdots f(n-1) \quad (n \geqq 2)$$

よって，$l_1 = \sqrt{p_1{}^2 - 4q_1} = \sqrt{4} = 2$ から，

$$l_n = 2\cdot\frac{3}{\sqrt{1\cdot 2}}\cdot\frac{4}{\sqrt{2\cdot 3}}\cdot\frac{5}{\sqrt{3\cdot 4}}\cdots\cdots\frac{n+1}{\sqrt{(n-1)n}} = 2\cdot\frac{n(n+1)}{2\sqrt{n}} = \sqrt{n}(n+1)$$

この式は，$n = 1$ のときも成立する。

(3) (1)(2)より，$\sqrt{{p_n}^2-4q_n}=\sqrt{n}\,(n+1)$ となり，${p_n}^2-4q_n=n(n+1)^2$ ………③

そこで，$p_n=n\sqrt{n}$ のとき，${p_n}^2=n^3$ となり，③より，

$$q_n=\frac{1}{4}\{n^3-n(n+1)^2\}=-\frac{1}{4}n(2n+1)$$

これより，$\log\left(-\dfrac{2q_n}{n^2}\right)=\log\dfrac{2n+1}{2n}$ となり，

$$\lim_{n\to\infty}n\log\left(-\frac{2q_n}{n^2}\right)=\lim_{n\to\infty}n\log\frac{2n+1}{2n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2}\log\left(1+\frac{1}{2n}\right)^{2n}=\frac{1}{2}\log e=\frac{1}{2}$$

コメント

漸化式と極限を題材にした標準的な問題です。

問　題

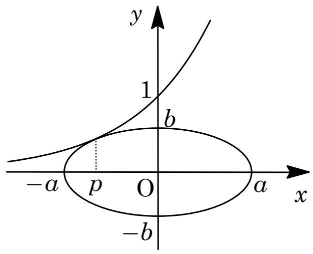
$a,\ b,\ p$ は $a>0$，$b>0$，$p<0$ を満たす実数とする。座標平面上の 2 曲線 $C_1 : y=e^x$，$C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1$ を考える。ただし, e は自然対数の底である。C_1 と C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を共有し, その点における C_1 の接線と C_2 の接線が一致するとき, 次の問いに答えよ。

(1) p を a を用いて表せ。

(2) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)$ を求めよ。

(3) $\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}$ を求めよ。　　[2015]

解答例



(1) $C_1 : y=e^x \cdots\cdots①$，$C_2 : \dfrac{x^2}{a^2}+\dfrac{y^2}{b^2}=1\cdots\cdots②$に対して,

まず, C_2 が点 $(p,\ e^p)$ を通るので, ②より,

$$\frac{p^2}{a^2}+\frac{e^{2p}}{b^2}=1,\quad b^2p^2+a^2e^{2p}=a^2b^2\cdots\cdots\cdots③$$

また, ①より $y'=e^x$ となり, 点 $(p,\ e^p)$ における C_1 の接線の方向ベクトル $\overrightarrow{u_1}$ は, $\overrightarrow{u_1}=(1,\ e^p)$ である。

そして, C_2 の点 $(p,\ e^p)$ における接線は $\dfrac{px}{a^2}+\dfrac{e^py}{b^2}=1$ と表せ, この法線ベクトル $\overrightarrow{n_2}$ は $\overrightarrow{n_2}=\left(\dfrac{p}{a^2},\ \dfrac{e^p}{b^2}\right)=\dfrac{1}{a^2b^2}(b^2p,\ a^2e^p)$ となる。

すると, $\overrightarrow{u_1}\perp\overrightarrow{n_2}$ より, $b^2p+a^2e^{2p}=0\cdots\cdots\cdots④$

③④より, $b^2p^2-b^2p=a^2b^2$，$p^2-p-a^2=0$ となり, $p<0$ より,

$$p=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}$$

(2) $$p+a=\frac{1-\sqrt{1+4a^2}}{2}+a=\frac{2a+1-\sqrt{1+4a^2}}{2}=\frac{(2a+1)^2-(1+4a^2)}{2\left(2a+1+\sqrt{1+4a^2}\right)}$$

$$=\frac{2a}{2a+1+\sqrt{1+4a^2}}=\frac{2}{2+\dfrac{1}{a}+\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+4}}$$

よって, $\displaystyle\lim_{a\to\infty}(p+a)=\frac{2}{2+\sqrt{4}}=\frac{1}{2}$

(3)　④より，$b^2=-\dfrac{a^2e^{2p}}{p}$ となるので，

$$\frac{b^2e^{2a}}{a}=-\frac{a^2e^{2p}e^{2a}}{ap}=-\frac{ae^{2(p+a)}}{p}=\frac{2a}{\sqrt{1+4a^2}-1}\cdot e^{2(p+a)}$$

$$=\frac{2}{\sqrt{\dfrac{1}{a^2}+4}-\dfrac{1}{a}}\cdot e^{2(p+a)}$$

(2)の結果を用いると，$\displaystyle\lim_{a\to\infty}\frac{b^2e^{2a}}{a}=\frac{2}{\sqrt{4}}e^{2\cdot\frac{1}{2}}=e$

コメント

2 曲線が接する条件をもとに，極限と絡めたものです。誘導がていねいです。

問　題

$a_1=2$，$a_2=1$ と $a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ によって定義される数列 $\{a_n\}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$b_n=a_{n+1}+a_n$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots\cdots)$ とするとき，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列であることを示せ。

(2)　$n\geqq 2$ のとき，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k$ を n の式で表せ。

(3)　a_n を n の式で表せ。

(4)　数列 $\left\{\dfrac{a_n}{a_{n+1}}\right\}$ の収束，発散を調べ，収束する場合はその極限値を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$a_{n+2}=a_{n+1}+2a_n$，$b_n=a_{n+1}+a_n$ より，

$$b_{n+1}=a_{n+2}+a_{n+1}=a_{n+1}+2a_n+a_{n+1}=2(a_{n+1}+a_n)=2b_n$$

よって，数列 $\{b_n\}$ は公比 2 の等比数列である。

(2)　$b_1=a_2+a_1=3$ より, (1)から，$b_n=3\cdot 2^{n-1}$ となり，

$$\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k=3\sum_{k=1}^{n-1}(-2)^{k-1}=3\cdot\frac{1-(-2)^{n-1}}{1-(-2)}=1-(-2)^{n-1}$$

(3)　$n\geqq 2$ で，$\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}b_k=\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}(a_{k+1}+a_k)=\sum_{k=1}^{n-1}\{(-1)^{k+1}a_{k+1}-(-1)^k a_k\}$

$$=(-1)^n a_n-(-1)^1 a_1=(-1)^n a_n+2$$

(2)の結果と合わせて，$(-1)^n a_n+2=1-(-2)^{n-1}$

$$a_n=\frac{-(-2)^{n-1}-1}{(-1)^n}=2^{n-1}+(-1)^{n-1}$$

$n=1$ をあてはめると，$a_1=2^0+(-1)^0=2$ となり，このときも満たしている。

(4)　$\displaystyle\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{2^{n-1}+(-1)^{n-1}}{2^n+(-1)^n}=\frac{1+\left(-\frac{1}{2}\right)^{n-1}}{2-\left(-\frac{1}{2}\right)^n}$ であり，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(-\frac{1}{2}\right)^n=0$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{a_{n+1}}=\frac{1}{2}$$

コメント

(3)では，無理をして，(2)を誘導として位置付けて解きましたが，パターン的に解いた方が簡明なのは言うまでもありません。

問　題

数列$\{a_n\}$は，関係式

$$a_1=2,\ (a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n),\ a_{n+1}>a_n\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$$

によって定まっている。

(1) a_2，a_3，a_4を計算せよ。

(2) 一般項a_nをnの式で表せ。

(3) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})$を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 条件より，$a_1=2$，$(a_{n+1}-a_n)^2=2(a_{n+1}+a_n)\cdots\cdots\cdots(*)$

$(*)$に$n=1$を代入して，$(a_2-a_1)^2=2(a_2+a_1)$

$$(a_2-2)^2=2(a_2+2),\ a_2{}^2-6a_2=0,\ a_2(a_2-6)=0$$

$a_2>a_1=2$より，$a_2=6$

次に, $(*)$に$n=2$を代入して，$(a_3-a_2)^2=2(a_3+a_2)$

$$(a_3-6)^2=2(a_3+6),\ a_3{}^2-14a_3+24=0,\ (a_3-2)(a_3-12)=0$$

$a_3>a_2=6$より，$a_3=12$

さらに, $(*)$に$n=3$を代入して，$(a_4-a_3)^2=2(a_4+a_3)$

$$(a_4-12)^2=2(a_4+12),\ a_4{}^2-26a_4+120=0,\ (a_4-6)(a_4-20)=0$$

$a_4>a_3=12$より，$a_4=20$

(2) (1)より，$a_n=n(n+1)$と推測でき，これが正しいことを数学的帰納法で示す。

(i) $n=1$のとき　$a_1=1\cdot 2=2$より成立する。

(ii) $n=k$のとき　$a_k=k(k+1)$と仮定する。

$(*)$に$n=k$を代入して，$\{a_{k+1}-k(k+1)\}^2=2\{a_{k+1}+k(k+1)\}$

$$a_{k+1}{}^2-(2k^2+2k+2)a_{k+1}+k(k+1)(k-1)(k+2)=0$$

$$\{a_{k+1}-(k-1)k\}\{a_{k+1}-(k+1)(k+2)\}=0$$

$a_{k+1}>a_k=k(k+1)$より$a_{k+1}=(k+1)(k+2)$となり，$n=k+1$のときも成立。

(i)(ii)より，$a_n=n(n+1)$

(3) (2)より，

$$\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n}=\sqrt{(n+2)(n+1)}-\sqrt{n(n+1)}=\frac{(n+2)(n+1)-n(n+1)}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n+1)}}=\frac{2(n+1)}{\sqrt{(n+2)(n+1)}+\sqrt{n(n+1)}}$$

よって，

$$\lim_{n\to\infty}(\sqrt{a_{n+1}}-\sqrt{a_n})=\lim_{n\to\infty}\frac{2(1+n^{-1})}{\sqrt{(1+2n^{-1})(1+n^{-1})}+\sqrt{1+n^{-1}}}=\frac{2}{1+1}=1$$

コメント

　初項から第 4 項までを求めることによって一般項を推測し，これを数学的帰納法で証明，さらに極限計算という作成者の意図がはっきりわかる問題です。

問　題

自然数 n に対して，関数 $f_n(x)=p_ne^{nx}+q_ne^{-nx}$ が $f_n(0)=1$，$f_n{}'(1)=-n$ を満たすとする。

(1) p_n と q_n を求め，$f_n{}'(x)<0$ を示せ。

(2) 方程式 $f_n(x)=0$ の解 z_n を求めよ。

(3) 数列 $\{z_n\}$ に対して，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}z_n$ を求めよ。 [1998]

解答例

(1) $f_n(x)=p_ne^{nx}+q_ne^{-nx}$，$f_n{}'(x)=n(p_ne^{nx}-q_ne^{-nx})$

条件より，$f_n(0)=p_n+q_n=1$ ………①

$f_n{}'(1)=n(p_ne^n-q_ne^{-n})=-n$ より，$e^np_n-\dfrac{1}{e^n}q_n=-1$ ………②

①②より，$\left(e^n+\dfrac{1}{e^n}\right)p_n=-1+\dfrac{1}{e^n}$，$p_n=\dfrac{1-e^n}{1+e^{2n}}$

①から，$q_n=1-\dfrac{1-e^n}{1+e^{2n}}=\dfrac{e^n(1+e^n)}{1+e^{2n}}$

また，$n\geqq1$ より $e^n>1$ となり，$p_n<0$，$q_n>0$

よって，$f_n{}'(x)<0$

(2) $f_n(x)=0$ より，$\dfrac{1-e^n}{1+e^{2n}}e^{nx}+\dfrac{e^n(1+e^n)}{1+e^{2n}}e^{-nx}=0$

$$(1-e^n)e^{2nx}+e^n(1+e^n)=0,\quad e^{2nx}=\frac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}$$

$x=\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}$ より，$z_n=\dfrac{1}{2n}\log\dfrac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}$

(3) $$\lim_{n\to\infty}z_n=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\log\frac{e^n(e^n+1)}{e^n-1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{2n}\left(\log e^n+\log\frac{e^n+1}{e^n-1}\right)$$
$$=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1}{2}\log e+\frac{1}{2n}\log\frac{1+e^{-n}}{1-e^{-n}}\right)=\frac{1}{2}$$

コメント

もう「ひとひねり」あると思って解くと，肩すかしをくらってしまいます。たとえば，(1)の $f_n{}'(x)<0$ を示すのに，$f_n{}''(x)$ を計算して $f_n{}'(x)$ の増減を調べようとすると，たいへんなことになります。また(3)についても同様です。このように，素直に考えれば素直に解けるという問題です。

問　題

$a>0$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(t)=t^3-2at+1$ の区間 $t\geqq 0$ における最小値を，a を用いて表せ。

(2)　(1)で求めた最小値が 0 となるときの a の値を A とおく。A^3 を求めよ。

(3)　座標平面上の曲線 $y=x^4$ を C_1，点 $(0,\ a)$ を中心とする半径 a の円を C_2 とする。C_1 と C_2 の共有点の個数を調べよ。

(4)　座標平面において，点 P が曲線 $y=x^4$ 上を動くときの点 P と点 $(0,\ a)$ の距離の最小値を考える。その最小値が a に等しくなるような a の値の範囲を求めよ。

[2017]

解答例

(1)　$a>0$ のとき，$f(t)=t^3-2at+1$ に対して，

$$f'(t)=3t^2-2a$$

$t\geqq 0$ において $f(t)$ の増減を調べると，右表のようになり，最小値は，

t	0	$\cdots$	$\sqrt{\dfrac{2a}{3}}$	$\cdots$
$f'(t)$		$-$	0	$+$
$f(t)$	1	$\searrow$		$\nearrow$

$$f\left(\sqrt{\frac{2a}{3}}\right)=\left(\frac{2a}{3}-2a\right)\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{3}a\sqrt{\frac{2a}{3}}+1=-\frac{4}{9}a\sqrt{6a}+1$$

(2)　条件より，$-\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}+1=0$ となるので，$\dfrac{4}{9}A\sqrt{6A}=1$ から，

$$\frac{16\cdot 6}{81}A^3=1,\quad A^3=\frac{81}{16\cdot 6}=\frac{27}{32}$$

(3)　$C_1: y=x^4\cdots\cdots$①，$C_2: x^2+(y-a)^2=a^2\cdots\cdots$②を連立し，

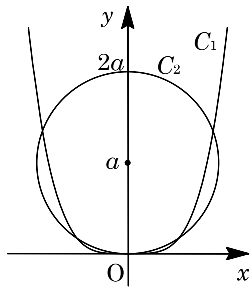
$$x^2+(x^4-a)^2=a^2,\quad x^8-2ax^4+x^2=0$$

ここで，$x^2=t\geqq 0$ とおくと，$t^4-2at^2+t=0$ から，

$$t(t^3-2at+1)=0\cdots\cdots\cdots③$$

すると，$t=0\cdots\cdots$④または $t^3-2at+1=0\cdots\cdots$⑤

さて，(1)から⑤は $f(t)=0$ となり，しかも $t\neq 0$ である。



また，(2)から $A=\sqrt[3]{\dfrac{27}{32}}=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$ となるので，C_1 と C_2 の共有点の個数は，

(i)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1>0\ \left(0<a<\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の実数解は 0 個なので，③の実数解は④の $t=0$ のみとなる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は 1 である。

(ii)　$-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1=0\ \left(a=\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$ のとき

⑤の異なる正の実数解は 1 個なので，③の実数解は④の $t=0$ と合わせて 2 個となる。よって，C_1 と C_2 の共有点の個数は $1+1\times 2=3$ である。

(iii) $-\dfrac{4}{9}a\sqrt{6a}+1<0\left(a>\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}\right)$のとき

⑤の異なる正の実数解は 2 個なので，③の実数解は④の$t=0$と合わせて 3 個となる。よって，C_1とC_2の共有点の個数は$1+2\times 2=5$である。

(4) C_1上の点$\mathrm{P}(p,\ p^4)$と点$(0,\ a)$の距離をdとおくと，

$$d^2=p^2+(p^4-a)^2=p^8-2ap^4+p^2+a^2$$

ここで，$p^2=t\geqq 0$とおくと，$d^2=t^4-2at^2+t+a^2=tf(t)+a^2$

さて，d^2の最小値はa^2なので，$t\geqq 0$において$tf(t)\geqq 0$すなわち$f(t)\geqq 0$が必要となり，(3)から，$0<a\leqq\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$である。

逆に，このとき$t=0$で$tf(t)=0$となるので，d^2の最小値はa^2である。

以上より，求める条件は$0<a\leqq\dfrac{3}{4}\sqrt[3]{2}$である。

コメント

微分の応用についての問題です。(3)ではxを消去するか，yを消去するか迷いますが，(1)を誘導とみると後者に落ち着きます。また，tの個数とxの個数の対応関係に注意が必要です。なお，(4)の結論は(3)から明らかですが，その過程も念のため記しておきました。重複しますが。

問　題

2 つの関数 $f(x)=x\sin x$, $g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ について，次の問いに答えよ。ただし，(3)と(4)において，a および $h(x)$ は(2)で定めたものとする。

(1)　2 曲線 $y=f(x)$，$y=g(x)$ の共有点のうち，x 座標が $-\pi\leqq x\leqq\pi$ であるものをすべて求めよ。

(2)　(1)で求めた共有点のうち，x 座標が正である点を $\mathrm{A}(a,\ f(a))$ とする。点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線を $y=h(x)$ と表す。$h(x)$ を求めよ。

(3)　$0\leqq x\leqq a$ のとき，$h(x)\geqq g(x)$ であることを示せ。

(4)　$0\leqq x\leqq a$ の範囲において，y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　$f(x)=x\sin x$, $g(x)=\sqrt{3}x\cos x$ に対して，$y=f(x)$，$y=g(x)$ を連立し，

$$x\sin x=\sqrt{3}x\cos x\,,\ \ x(\sin x-\sqrt{3}\cos x)=0\,,\ \ 2x\sin\left(x-\frac{\pi}{3}\right)=0$$

$-\pi\leqq x\leqq\pi$ であるものは，$x=-\dfrac{2}{3}\pi,\ 0,\ \dfrac{\pi}{3}$

よって，共有点の座標は，$\left(-\dfrac{2}{3}\pi,\ \dfrac{\sqrt{3}}{3}\pi\right)$，$(0,\ 0)$，$\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$

(2)　条件より，$\mathrm{A}\left(\dfrac{\pi}{3},\ \dfrac{\sqrt{3}}{6}\pi\right)$ となり，$g'(x)=\sqrt{3}\cos x-\sqrt{3}x\sin x$ から，

$$g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}$$

すると，点 A における曲線 $y=g(x)$ の接線は，

$$y-\frac{\sqrt{3}}{6}\pi=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\left(x-\frac{\pi}{3}\right),\ \ y=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}$$

この接線を $y=h(x)$ とおくと，$h(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)x+\dfrac{\pi^2}{6}$

(3)　$l(x)=h(x)-g(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)x+\dfrac{\pi^2}{6}-\sqrt{3}x\cos x$ とおくと，(2)より，

$$l\left(\frac{\pi}{3}\right)=h\left(\frac{\pi}{3}\right)-g\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ l'\left(\frac{\pi}{3}\right)=h'\left(\frac{\pi}{3}\right)-g'\left(\frac{\pi}{3}\right)=0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$l'(x)=\left(\dfrac{\sqrt{3}}{2}-\dfrac{\pi}{2}\right)-\sqrt{3}\cos x+\sqrt{3}x\sin x$

$$l''(x)=\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}x\cos x=2\sqrt{3}\sin x+\sqrt{3}x\cos x$$

$0\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{3}$ において，$l''(x)\geqq 0$ より $l'(x)$ は単調増加し，②より $l'(x)\leqq l'\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$

よって，$l(x)$ は単調減少し，①より $l(x)\geqq l\left(\dfrac{\pi}{3}\right)=0$ となり，$h(x)\geqq g(x)$ である。

(4)　y 軸，曲線 $y=g(x)$，および直線 $y=h(x)$ で囲まれた部分の面積 S は，(3)より，

$$S=\int_0^{\frac{\pi}{3}} l(x)\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)x+\frac{\pi^2}{6}-\sqrt{3}x\cos x\right\}dx$$

$$=\left[\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\frac{x^2}{2}+\frac{\pi^2}{6}x\right]_0^{\frac{\pi}{3}}-\sqrt{3}\Big[x\sin x\Big]_0^{\frac{\pi}{3}}+\sqrt{3}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sin x\,dx$$

$$=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{2}\right)\frac{\pi^2}{18}+\frac{\pi^3}{18}-\sqrt{3}\cdot\frac{\pi}{3}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\sqrt{3}\left(\frac{1}{2}-1\right)=\frac{\pi^3}{36}+\frac{\sqrt{3}}{36}\pi^2-\frac{\pi}{2}+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

コメント

微積分の総合問題です。(3)の設問から，面積を求める際に，あらかじめ図を描いておくという作業は，必須というわけではなくなってきます。

問　題

平面上の 3 点 O, A, B は $|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=1$ かつ $\angle\mathrm{AOB}=\theta\ (0<\theta<\pi)$ を満たすとする。線分 AB の中点を M とする。$t>1$ として，点 C を $\overrightarrow{\mathrm{OC}}=-t\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ となるように定める。△ABC の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) S を t と θ を用いて表せ。

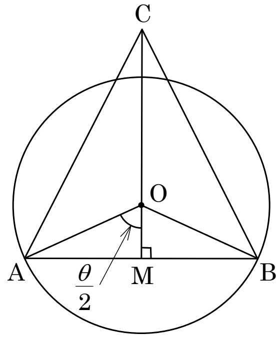
(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S を t のみを用いて表せ。

(3) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，S が最大となる t の値を求めよ。　[2013]

解答例

(1) △ABC は二等辺三角形であり，その面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\mathrm{AB}\cdot\mathrm{CM}=\frac{1}{2}\cdot 2\mathrm{AM}\cdot(t+1)\mathrm{OM}$$
$$=(t+1)\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{2}(t+1)\sin\theta$$



(2) $|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=1$ のとき，$t\cos\frac{\theta}{2}=1$ より，$\cos\frac{\theta}{2}=\frac{1}{t}$

$0<\theta<\pi$ から，$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}$ となり，(1)より，

$$S=(t+1)\sqrt{1-\frac{1}{t^2}}\cdot\frac{1}{t}=\frac{(t+1)\sqrt{t^2-1}}{t^2}$$

(3) $t>1$ のとき，(2)より，

$$S'=\frac{\left\{\sqrt{t^2-1}+(t+1)\cdot\frac{1}{2}(t^2-1)^{-\frac{1}{2}}\cdot 2t\right\}t^2-(t+1)\sqrt{t^2-1}\cdot 2t}{t^4}$$
$$=\frac{(t^2-1+t^2+t)t^2-2(t+1)(t^2-1)t}{t^4\sqrt{t^2-1}}=\frac{(2t^2+t-1)t-2(t^3+t^2-t-1)}{t^3\sqrt{t^2-1}}$$
$$=\frac{-t^2+t+2}{t^3\sqrt{t^2-1}}=-\frac{(t-2)(t+1)}{t^3\sqrt{t^2-1}}$$

t	1	$\cdots$	2	$\cdots$
S'		$+$	0	$-$
S		↗		↘

すると，S の増減は右表のようになり，$t=2$ のとき最大値をとる。

コメント

図形量の最大・最小に，微分法を応用した基本題です。(3)はそのまま微分計算を行いましたが，S^2 を考えて，その式を微分しても構いません。

問　題

関数 $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1) $\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty} f(x)$ の値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸および変曲点を調べ，グラフの概形をかけ。

(3) $\alpha=\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)$ とおく。正の実数 t に対して，曲線 $y=f(x)$，3 直線 $x=t$，$x=0$ および $y=\alpha$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ を求めよ。

(4) $\displaystyle\lim_{t\to\infty} S(t)$ の値を求めよ。 [2012]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{e^x}{1+e^x}$ に対して，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} f(x)=\lim_{x\to\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{e^{-x}+1}=1$ ………(＊)

$$\lim_{x\to-\infty} f(x)=\lim_{x\to-\infty}\frac{e^x}{1+e^x}=0$$

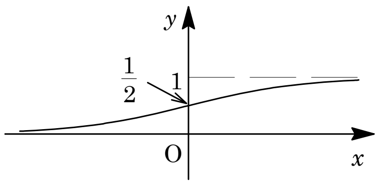
(2) $f'(x)=\dfrac{e^x(1+e^x)-e^x\cdot e^x}{(1+e^x)^2}=\dfrac{e^x}{(1+e^x)^2}$

$$f''(x)=\frac{e^x(1+e^x)^2-e^x\cdot 2(1+e^x)e^x}{(1+e^x)^4}=\frac{e^x(1-e^x)}{(1+e^x)^3}$$

x	$\cdots$	0	$\cdots$
$f'(x)$	$+$		$+$
$f''(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	⤴	$\frac{1}{2}$	⤴

すると，$y=f(x)$ の増減，グラフの凹凸は右表のようになり，変曲点の座標は $\left(0,\ \dfrac{1}{2}\right)$ である。

また，グラフの概形は右図のようになる。



(3) 曲線 $y=f(x)$，3 直線 $x=t$，$x=0$ および $y=1$ で囲まれた図形の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=1\times t-\int_0^t\frac{e^x}{1+e^x}dx=t-\Big[\log(1+e^x)\Big]_0^t=t-\log(1+e^t)+\log 2$$

(4) (3)に(＊)を適用すると，

$$\lim_{t\to\infty} S(t)=\lim_{t\to\infty}\Big\{\log e^t-\log(1+e^t)+\log 2\Big\}=\lim_{t\to\infty}\log f(t)+\log 2=\log 2$$

コメント

グラフの概形を描く典型題です。計算も簡単です。

問　題

p, a を実数の定数とする。多項式 $P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ を $x-3$ で割った余りが $10-6p$ であり，3 次方程式 $P(x)=0$ の実数解は a のみとする。次の問いに答えよ。

(1) 実数の範囲で $P(x)$ を因数分解せよ。

(2) a の値を求めよ。

(3) 関数 $y=P(x)$ が極値をもたないときの p の値を求めよ。　[2010]

解答例

(1) $P(x)=x^3-(2p+a)x^2+(2ap+1)x-a$ に対し，条件より，

$$P(3)=10-6p \cdots\cdots\cdots ①,\quad P(a)=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$P(x)$ を $x-a$ で割ると，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

ここで，$P(x)=0$ の実数解は a のみより，$x^2-2px+1=0$ が重解 $x=a$ をもつ場合を考えると，

(i) $a=p=1$ のとき

$P(x)=(x-1)^3$ となり，$P(3)=8$ から，①を満たさない。

(ii) $a=p=-1$ のとき

$P(x)=(x+1)^3$ となり，$P(3)=64$ から，①を満たさない。

(i)(ii)より，$P(x)=(x-a)(x^2-2px+1)$

(2) (1)より，$x^2-2px+1=0$ は虚数解をもつことより，

$$D/4=p^2-1<0,\quad -1<p<1 \cdots\cdots\cdots ③$$

①より，$(3-a)(9-6p+1)=10-6p$

③から $10-6p\neq 0$ なので，$3-a=1$ となり，$a=2$

(3) (2)より，$P(x)=x^3-(2p+2)x^2+(4p+1)x-2$ となり，

$$P'(x)=3x^2-2(2p+2)x+(4p+1)$$

関数 $y=P(x)$ が極値をもたない条件は，つねに $P'(x)\geqq 0$ であることより，

$$D/4=(2p+2)^2-3(4p+1)\leqq 0,\quad 4p^2-4p+1\leqq 0$$

これより，$(2p-1)^2\leqq 0$ となり，$p=\dfrac{1}{2}$ である。

なお，この値は③を満たしている。

コメント

剰余の定理と微分法の応用を組み合わせた問題です。なお，(1)は用心深く書いていますが，冒頭の 3 行だけでも構わないでしょう。

問　題

関数 $f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ の増減と極値を調べて，$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が，3 個になるような m の値の範囲を求めよ。

(3)　$m<0$ のとき，$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ で囲まれた 2 つの部分の面積の和を求めよ。　[2006]

解答例

(1)　$f(x)=x+\dfrac{x}{x^2-1}$ に対して，$f(-x)=-f(x)$ より，$y=f(x)$ のグラフは原点対称となる。

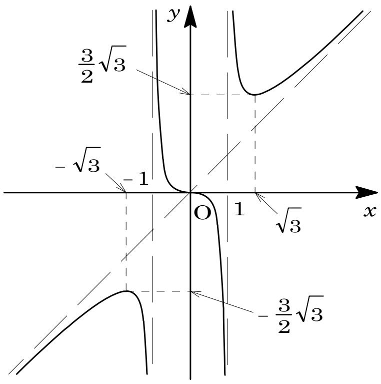
$$f'(x)=1+\frac{(x^2-1)-x\cdot 2x}{(x^2-1)^2}=\frac{(x^2-1)^2-(x^2+1)}{(x^2-1)^2}=\frac{x^2(x^2-3)}{(x^2-1)^2}$$

よって，$x\geqq 0$ における $f(x)$ の増減は右表のようになる。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	$\sqrt{3}$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	×	$-$	0	$+$
$f(x)$	0	↘	×	↘	$\frac{3}{2}\sqrt{3}$	↗

また，$\lim\limits_{x\to 1-0}f(x)=-\infty$，$\lim\limits_{x\to 1+0}f(x)=\infty$，$\lim\limits_{x\to\infty}\{f(x)-x\}=\lim\limits_{x\to\infty}\dfrac{x}{x^2-1}=0$ より，漸近線 $x=1$，$y=x$ が存在する。

以上より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。



(2)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の交点が 3 個になるのは，対称性から，$x>0$ において交点が 1 個となる場合より，

$$m<0,\ 1<m$$

(3)　$y=f(x)$ のグラフと直線 $y=mx$ の $x>0$ における交点は，

$$x+\frac{x}{x^2-1}=mx,\ 1+\frac{1}{x^2-1}=m,\ x^2=m(x^2-1)$$

よって，$x=\sqrt{\dfrac{-m}{1-m}}$ となり，これを $x=\alpha$ とおくと，求める部分の面積 S は，

$$S=2\int_0^{\alpha}\Big(x+\frac{x}{x^2-1}-mx\Big)dx=2\Big[(1-m)\frac{x^2}{2}+\frac{1}{2}\log|x^2-1|\Big]_0^{\alpha}$$

$$=(1-m)\alpha^2+\log|\alpha^2-1|=-m-\log(1-m)$$

コメント

(2)では，$x \neq 0$ で定数 m を分離して考えた方がクリアーですが，次の(3)の設問から判断すると，それには及ばないでしょう。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　関数 $f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ の増減を調べて極値を求めよ。

(2)　公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ を用いて，$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は方程式 $f(x)=0$ の解であることを示せ。

(3)　$k>\dfrac{3}{4}$ であることを示せ。

(4)　方程式 $\cos x=x$ の解を α とするとき，$\dfrac{2\pi}{9}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ を示せ。ここで，$3.14<\pi<3.15$ を利用してもよい。　[2005]

解答例

(1)　$f(x)=4x^3-3x+\dfrac{1}{2}$ より，

$$f'(x)=12x^2-3=3(2x+1)(2x-1)$$

x	$\cdots$	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$	$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$

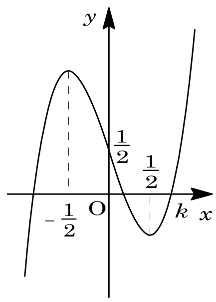
よって，極大値 $\dfrac{3}{2}\left(x=-\dfrac{1}{2}\right)$，極小値 $-\dfrac{1}{2}\left(x=\dfrac{1}{2}\right)$ となる。

(2)　公式 $\cos 3\theta=4\cos^3\theta-3\cos\theta$ に，$\theta=\dfrac{2\pi}{9}$ を代入すると，

$$\cos\frac{2\pi}{3}=4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9},\quad 4\cos^3\frac{2\pi}{9}-3\cos\frac{2\pi}{9}+\frac{1}{2}=0$$

よって，$x=\cos\dfrac{2\pi}{9}$ は，方程式 $f(x)=0$ の解である。

(3)　$k=\cos\dfrac{2\pi}{9}>\cos\dfrac{\pi}{3}=\dfrac{1}{2}$ より，k は方程式 $f(x)=0$ の最大の解である。



ここで，$f\left(\dfrac{3}{4}\right)=-\dfrac{1}{16}<0$ なので，右図より $k>\dfrac{3}{4}$ となる。

(4)　$g(x)=\cos x-x$ とおくと，$g'(x)=-\sin x-1\leqq 0$ から，$g(x)$ は単調に減少する。

ここで，$3.14<\pi<3.15$，また(3)より $\cos\dfrac{2\pi}{9}>\dfrac{3}{4}$ なので，

$$g\left(\frac{2\pi}{9}\right)=\cos\frac{2\pi}{9}-\frac{2\pi}{9}>\frac{3}{4}-\frac{2\pi}{9}>\frac{3}{4}-\frac{2}{9}\times 3.15=0.05>0$$

$$g\left(\frac{\pi}{4}\right)=\cos\frac{\pi}{4}-\frac{\pi}{4}=\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{\pi}{4}<\frac{\sqrt{2}}{2}-\frac{1}{4}\times 3.14=\frac{\sqrt{2}-1.57}{2}<0$$

よって，$g(x)=0$ すなわち $\cos x=x$ の解はただ 1 つ存在し，それを $x=\alpha$ とするとき，$\dfrac{2\pi}{9}<\alpha<\dfrac{\pi}{4}$ となる。

コメント

3 倍角の公式と 3 次方程式を対応させて，三角関数の値を絞り込む有名な問題です。ただ，誘導が親切なので，過去問の経験がなくても不安は感じないでしょう。

問　題

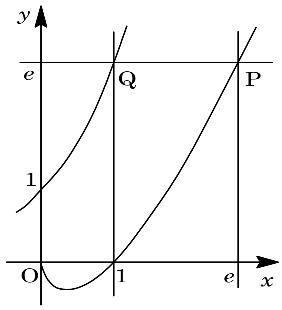
C_1を曲線$y=e^x$，C_2を曲線$y=x\log x$ $(x>0)$とする。ただし, logは自然対数を表す。また，$x=e$で定義される直線をl_1，l_1とC_2との交点Pを通りx軸に平行な直線をl_2，l_2とC_1との交点Qを通りy軸に平行な直線をl_3とする。

(1)　2点P, Qの座標を求めよ。

(2)　$x\geqq 1$のとき，$e^x>x\log x$であることを示せ。

(3)　2直線l_1，l_3と2曲線C_1，C_2によって囲まれた図形の面積を求めよ。　[2002]

解答例



(1)　$x=e$のとき，$y=e\log e=e$より，$\mathrm{P}(e,\ e)$

　またy=eのとき，$e=e^x$より$x=1$となり，$\mathrm{Q}(1,\ e)$

(2)　$f(x)=e^x-x\log x$とおくと，$f'(x)=e^x-\log x-1$

$$f''(x)=e^x-\frac{1}{x}$$

　$x\geqq 1$のとき，$f''(x)>0$より，$f'(x)\geqq f'(1)=e-1>0$

$$f(x)\geqq f(1)=e>0$$

　以上より, $x\geqq 1$のとき，$e^x>x\log x$

(3)　求める図形の面積をSとすると，

$$S=\int_1^e(e^x-x\log x)\,dx=\Big[\,e^x\,\Big]_1^e-\Big[\,\frac{x^2}{2}\log x\,\Big]_1^e+\int_1^e\frac{x^2}{2}\cdot\frac{1}{x}\,dx$$

$$=e^e-e-\frac{e^2}{2}+\Big[\,\frac{x^2}{4}\,\Big]_1^e=e^e-\frac{e^2}{4}-e-\frac{1}{4}$$

コメント

微積分の超基本題です。

問　題

関数 $f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ $(x\neq 0)$ について，次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$y=f(x)$ $(x\neq 0)$ の増減，極値，グラフの凹凸および変曲点を調べ，曲線 $y=f(x)$ の概形をかけ。

(2)　右側からの極限値 $\displaystyle\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ を求めよ。

(3)　極限値 $\displaystyle\lim_{x\to 0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在するか。存在するならばその値を求め，存在しないならばその理由をいえ。 [2000]

解答例

(1)　$f(x)=(x+2)e^{\frac{1}{x}}$ より，$f'(x)=e^{\frac{1}{x}}+(x+2)e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\dfrac{1}{x^2}\right)=\dfrac{(x-2)(x+1)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}$

$$f''(x)=\frac{(2x-1)x^2-(x^2-x-2)\cdot 2x}{x^4}e^{\frac{1}{x}}+\frac{(x-2)(x+1)}{x^2}e^{\frac{1}{x}}\cdot\left(-\frac{1}{x^2}\right)$$

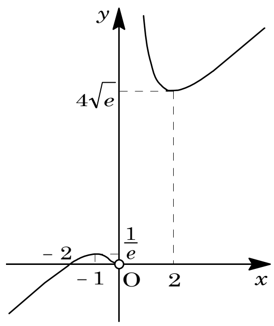
$$=\frac{5x+2}{x^4}e^{\frac{1}{x}}$$

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$-\frac{2}{5}$	$\cdots$	0	$\cdots$	2	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$		$-$	×	$-$	0	$+$
$f''(x)$	$-$		$-$	0	$+$	×	$+$		$+$
$f(x)$	↗	$\frac{1}{e}$	↘		↘	×	↘	$4\sqrt{e}$	↗

右表より，極大値は $\dfrac{1}{e}$ $(x=-1)$，極小値は $4\sqrt{e}$ $(x=2)$ となる。

また，$x=-\dfrac{2}{5}$ のとき $y=\dfrac{8}{5e^2\sqrt{e}}$ より，変曲点は $\left(-\dfrac{2}{5},\ \dfrac{8}{5e^2\sqrt{e}}\right)$ である。

さらに，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}f(x)=-\infty$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\infty$ であり，$\displaystyle\lim_{x\to-0}f(x)=0$，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$ より，$y=f(x)$ の概形は右図のようになる。



(2)　(1)より，$\displaystyle\lim_{x\to+0}f(x)=\infty$ なので，

$$\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}=\lim_{x\to+0}\frac{\dfrac{3}{f(x)}-1}{\dfrac{1}{f(x)}+2}=-\frac{1}{2}$$

(3)　(1)より，$\displaystyle\lim_{x\to-0} f(x)=0$ なので，$\displaystyle\lim_{x\to-0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}=3$ となり，

$$\lim_{x\to+0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}\neq\lim_{x\to-0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$$

したがって，$\displaystyle\lim_{x\to0}\frac{3-f(x)}{1+2f(x)}$ は存在しない。

コメント

微分の計算力だけの問題です。特に(3)は構えていたのですが，拍子抜けしました。

問　題

$0<a<1$ とする。点$(1,\ 0)$から楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$に引いた接線の接点の x 座標を b とする。

(1) b を a で表せ。

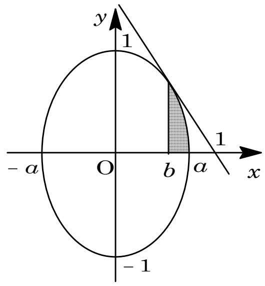
(2) 楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$の $b\leqq x\leqq a$ の部分と直線$x=b$で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積 Vを a で表せ。

(3) Vの値が最大となる a の値と，そのときの Vの最大値を求めよ。　[1999]

解答例

(1) 接点を$(b,\ c)$とするとき，接線は$\dfrac{b}{a^2}x+cy=1$

点$(1,\ 0)$を通ることより，$\dfrac{b}{a^2}=1$から，$b=a^2$



(2) 楕円$\dfrac{x^2}{a^2}+y^2=1$は x 軸対称なので，右図の網点部を x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積が Vとなる。

ここで，$y^2=1-\dfrac{x^2}{a^2}$から，

$$V=\int_{a^2}^{a}\pi\left(1-\frac{x^2}{a^2}\right)dx=\pi\left[\,x-\frac{x^3}{3a^2}\,\right]_{a^2}^{a}$$

$$=\frac{\pi}{3}(a^4-3a^2+2a)$$

(3) $f(a)=a^4-3a^2+2a$ とおくと，

$$f'(a)=4a^3-6a+2$$
$$=2(a-1)(2a^2+2a-1)$$

$f'(a)=0$の解は，$a=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}}{2}$

a	0	$\cdots$	$\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$	$\cdots$	1
$f'(a)$		＋	0	−	
$f(a)$		↗		↘	

右表より，$a=\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}$のとき，$f(a)$は最大となる。

ここで，$f(a)=(2a^2+2a-1)\left(\dfrac{1}{2}a^2-\dfrac{1}{2}a-\dfrac{3}{4}\right)+3a-\dfrac{3}{4}$ より，

$$f\left(\frac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=3\cdot\frac{-1+\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{4}=\frac{-9+6\sqrt{3}}{4}$$

よって，Vは最大値$\dfrac{\pi}{3}\cdot f\left(\dfrac{-1+\sqrt{3}}{2}\right)=\dfrac{-3+2\sqrt{3}}{4}\pi$をとる。

コメント

(3)の極大値を求める計算がポイントとなります。ここでは，整式の除法に関する等式を用いました。これは複雑な数値計算を回避する必修技法の一つです。

問　題

k を定数とする。曲線 $y=x^3-kx$ 上の点 $\mathrm{P}(a,\ a^3-ka)$ における接線 l が，曲線上の P と異なる点 $\mathrm{Q}(b,\ b^3-kb)$ を通るものとする。

(1) b を a で表せ。

(2) Q における曲線 $y=x^3-kx$ の接線が l と直交するとき，k, a の満たす関係式を求めよ。

(3) (2)で求めた関係式を満たす a が存在するような k の値の範囲を求めよ。 [1999]

解答例

(1) 接線 $l: y=mx+n$ とおくと，条件より，

$$x^3-kx-(mx+n)=(x-a)^2(x-b)$$

x^2 の係数を比べて，$0=-b-2a$，$b=-2a$

なお $b\neq a$ より，$a\neq 0$

(2) $y=x^3-kx$ より，$y'=3x^2-k$

$x=a$ のとき $y'=3a^2-k$，また $x=b=-2a$ のとき $y'=12a^2-k$

条件より，$(3a^2-k)(12a^2-k)=-1$

$$36a^4-15ka^2+k^2+1=0 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3) ①において，$a^2=t$ とおくと，$t>0$ で，

$$36t^2-15kt+k^2+1=0 \cdots\cdots\cdots ②$$

①を満たす a が存在する条件は，②の解の少なくとも 1 つが $t>0$ であることに等しい。

ここで，$y=36t^2-15kt+k^2+1$ のグラフの軸は $t=\dfrac{5}{24}k$ であり，y 軸との交点は $y=k^2+1>0$ から，求める条件は，②の判別式 $D\geqq 0$ かつ軸 $t=\dfrac{5}{24}k$ が正である。

$$D=(15k)^2-4\cdot 36(k^2+1)\geqq 0 \cdots\cdots ③,\ \ \frac{5}{24}k>0 \cdots\cdots ④$$

④より $k>0$, ③より $9k^2-16\geqq 0$

よって，$k\geqq\dfrac{4}{3}$

コメント

文系風の微分の応用問題です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$a,\ b,\ c$ を定数とする。関数 $f(x)=a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x$ が定数となるための a, b, c の条件を求めよ。

(2)　関数 $g(x)=4\cos^2x+2\cos x\sin x+\sin^2x-\dfrac{5}{2}\ \left(-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ が最大値をとる x の値を θ とする。$\cos 2\theta$，$\sin 2\theta$ の値を求めよ。

(3)　(2)の関数 $g(x)$ と θ に対して，定積分 $\displaystyle\int_0^\theta g(x)\,dx$ を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　k を定数として，$f(x)=a\cos^2x+2b\cos x\sin x+c\sin^2x=k$ ……(＊)とおく。

まず，$x=0,\ \dfrac{\pi}{2},\ \dfrac{\pi}{4}$ に対して，(＊)が成り立つことより，

$$a=k,\ c=k,\ \frac{1}{2}a+b+\frac{1}{2}c=k$$

すると，$a=c=k$，$b=0$ となり，このとき任意の x で，明らかに(＊)は成り立つ。
よって，$f(x)$ が定数となる条件は，$a=c$，$b=0$ である。

(2)　$g(x)=4\cos^2x+2\cos x\sin x+\sin^2x-\dfrac{5}{2}=4\cdot\dfrac{1+\cos 2x}{2}+\sin 2x+\dfrac{1-\cos 2x}{2}-\dfrac{5}{2}$

$$=\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x=\frac{\sqrt{13}}{2}\sin(2x+\alpha)$$

ただし，$\cos\alpha=\dfrac{2}{\sqrt{13}}$，$\sin\alpha=\dfrac{3}{\sqrt{13}}$ であり，これより $\dfrac{\pi}{4}<\alpha<\dfrac{\pi}{3}$ となる。

さて，$-\dfrac{\pi}{4}\leqq x\leqq\dfrac{\pi}{4}$ から，$-\dfrac{\pi}{2}+\alpha\leqq 2x+\alpha\leqq\dfrac{\pi}{2}+\alpha$ となり，$g(x)$ は $2x+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大値をとる。すなわち，$2\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ であり，

$$\cos 2\theta=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha=\frac{3}{\sqrt{13}},\ \sin 2\theta=\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)=\cos\alpha=\frac{2}{\sqrt{13}}$$

(3)　$\displaystyle\int_0^\theta g(x)\,dx=\int_0^\theta\left(\sin 2x+\frac{3}{2}\cos 2x\right)dx=\Big[-\frac{1}{2}\cos 2x+\frac{3}{4}\sin 2x\Big]_0^\theta$

$$=-\frac{1}{2}(\cos 2\theta-1)+\frac{3}{4}\sin 2\theta$$

(2)の結果を用いると，$\displaystyle\int_0^\theta g(x)\,dx=-\frac{3}{2\sqrt{13}}+\frac{1}{2}+\frac{3}{2\sqrt{13}}=\frac{1}{2}$

コメント

三角関数の理解を問う問題です。(1)とそれ以降の設問には，直接的な関連は見当たりません。

問　題

$t>1$ を満たす実数 t に対して，$S(t)=\int_0^1 |xe^x - tx|dx$ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　$0 \leqq x \leqq 1$ の範囲で，方程式 $xe^x = tx$ を満たす x をすべて求めよ。

(2)　$S(t)$ を求めよ。

(3)　$S(t)$ を最小にする t の値を求めよ。　[2010]

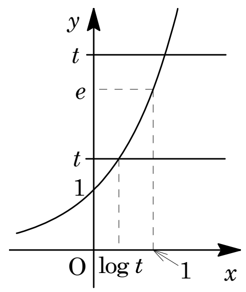
解答例

(1)　$xe^x = tx$ ……(＊)より，$x=0$ または $e^x = t$ である。

　$0 \leqq x \leqq 1$ における(＊)の解は，$t>1$ に注意して，

(i)　$1<t \leqq e$ のとき　$x=0,\ \log t$

(ii)　$t>e$ のとき　$x=0$



(2)　$S(t)=\int_0^1 |xe^x - tx|dx = \int_0^1 x|e^x - t|dx$ に対して，

(i)　$1<t \leqq e$ のとき

$$S(t) = -\int_0^{\log t}(xe^x - tx)dx + \int_{\log t}^1 (xe^x - tx)dx$$

$$= -\left[xe^x\right]_0^{\log t} + \int_0^{\log t} e^x dx + \frac{t}{2}\left[x^2\right]_0^{\log t} + \left[xe^x\right]_{\log t}^1 - \int_{\log t}^1 e^x dx - \frac{t}{2}\left[x^2\right]_{\log t}^1$$

$$= -t\log t + (t-1) + \frac{t}{2}(\log t)^2 + e - t\log t - (e-t) - \frac{t}{2}\{1-(\log t)^2\}$$

$$= t(\log t)^2 - 2t\log t + \frac{3}{2}t - 1$$

(ii)　$t>e$ のとき

$$S(t) = -\int_0^1 (xe^x - tx)dx = -\left[xe^x\right]_0^1 + \int_0^1 e^x dx + \frac{t}{2}\left[x^2\right]_0^1$$

$$= -e + (e-1) + \frac{t}{2} = \frac{t}{2} - 1$$

(3)　(i)　$1<t \leqq e$ のとき

$$S'(t) = (\log t)^2 + 2t(\log t)\cdot\frac{1}{t} - 2\log t - 2 + \frac{3}{2} = (\log t)^2 - \frac{1}{2}$$

　$1<t \leqq e$ において，$S'(t)=0$ の解は $t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ となり，$S(t)$ の増減は右表のようになる。

t	1	$\cdots$	$e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$	$\cdots$	e
$S'(t)$		$-$	0	$+$	
$S(t)$	$\frac{1}{2}$	↘		↗	$\frac{e}{2}-1$

(ii)　$t>e$ のとき

　(2)より，$S(t) > \frac{e}{2} - 1$

(i)(ii)より，$S(t)$ を最小にする t は，$t=e^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ である。

コメント

定積分の計算問題です。いったん不定積分を求めておいた方が，計算上，よかったかもしれません。

問　題

次の問いに答えよ。ただし, n は自然数を表す。

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ を満たす実数 x に対して，不等式 $\dfrac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqq \dfrac{x}{n}$ が成り立つことを示せ。ただし，対数は自然対数とする。

(2) 次の値を求めよ。 $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$

(3) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_n = \left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ で定めるとき，極限値 $\displaystyle\lim_{n\to\infty} a_n$ を求めよ。 [2008]

解答例

(1) $0 \leqq x \leqq 1$ において，$f(x) = \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right) - \dfrac{x}{n+1}$ とおく。

$$f'(x) = \frac{1}{n+x} - \frac{1}{n+1} = \frac{1-x}{(n+1)(n+x)} \geqq 0$$

よって，$f(x) \geqq f(0) = 0$

また, $0 \leqq x \leqq 1$ において，$g(x) = \dfrac{x}{n} - \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right)$ とおく。

$$g'(x) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+x} = \frac{x}{n(n+x)} \geqq 0$$

よって，$g(x) \geqq g(0) = 0$

以上より, $0 \leqq x \leqq 1$ において，$\dfrac{x}{n+1} \leqq \log\left(1+\dfrac{x}{n}\right) \leqq \dfrac{x}{n}$

(2) 区間 $0 \leqq x \leqq 1$ を n 等分して,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \int_0^1 x^5 dx = \frac{1}{6}$$

(3) $a_n = \left(1+\dfrac{1^5}{n^6}\right)\left(1+\dfrac{2^5}{n^6}\right)\cdots\left(1+\dfrac{n^5}{n^6}\right)$ のとき,

$$\log a_n = \log\left(1+\frac{1^5}{n^6}\right) + \log\left(1+\frac{2^5}{n^6}\right) + \cdots + \log\left(1+\frac{n^5}{n^6}\right) = \sum_{k=1}^{n}\log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right)$$

ここで，$x = \left(\dfrac{k}{n}\right)^5$ とおくと, $0 \leqq x \leqq 1$ となり, (1)より,

$$\frac{1}{n+1}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \leqq \log\left(1+\frac{k^5}{n^6}\right) \leqq \frac{1}{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5,\quad \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 \leqq \log a_n \leqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5$$

(2)より，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = \lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{k}{n}\right)^5 = 1\times\frac{1}{6} = \frac{1}{6}$ なので,

$$\lim_{n\to\infty}\log a_n = \frac{1}{6}$$

すると，対数関数は定義域で連続であることより，$\lim_{n\to\infty} a_n = e^{\frac{1}{6}}$ となる。

コメント

基本的で，しかも頻出するタイプの融合問題です。しかも，(3)への誘導が，無理のない形になっており，演習する価値のある 1 題です。

問　題

実数全体で定義された関数 $f(x)=\dfrac{4x+a}{x^2+1}$ は，$x=\dfrac{1}{2}$ で極値をもつ。ただし，a は定数である。次の問いに答えよ。

(1) a の値を求めよ。

(2) 関数 $y=f(x)$ の最大値と最小値を求めよ。

(3) 定積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ の値を求めよ。　[2005]

解答例

(1) $f(x)=\dfrac{4x+a}{x^2+1}$ より，$f'(x)=\dfrac{4(x^2+1)-(4x+a)\cdot 2x}{(x^2+1)^2}=-\dfrac{4x^2+2ax-4}{(x^2+1)^2}$

$x=\dfrac{1}{2}$ で極値をもつことより，$f'\left(\dfrac{1}{2}\right)=0$ が必要であり，

$$4\cdot\frac{1}{4}+2a\cdot\frac{1}{2}-4=0,\ a=3$$

このとき，$f'(x)=-\dfrac{4x^2+6x-4}{(x^2+1)^2}$

$$=-\frac{2(2x-1)(x+2)}{(x^2+1)^2}$$

x	$\cdots$	-2	$\cdots$	$\frac{1}{2}$	$\cdots$
$f'(x)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(x)$	$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$

よって，$x=\dfrac{1}{2}$ で極大となるので，$a=3$ である。

(2) $f(-2)=-1$，$f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}f(x)=\lim_{x\to-\infty}f(x)=0$ より，$y=f(x)$ の最大値は $f\left(\dfrac{1}{2}\right)=4$，最小値は $f(-2)=-1$ である。

(3) $I=\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx=\int_0^1\frac{4x+3}{x^2+1}dx=\int_0^1\frac{4x}{x^2+1}dx+\int_0^1\frac{3}{x^2+1}dx$

すると，$\displaystyle\int_0^1\frac{4x}{x^2+1}dx=2\Big[\log(x^2+1)\Big]_0^1=2\log 2$

また，$x=\tan\theta\ \left(-\dfrac{\pi}{2}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$ とおくと，

$$\int_0^1\frac{3}{x^2+1}dx=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{\tan^2\theta+1}\cdot\frac{1}{\cos^2\theta}d\theta=3\int_0^{\frac{\pi}{4}}d\theta=\frac{3}{4}\pi$$

よって，$I=2\log 2+\dfrac{3}{4}\pi$

コメント

微分と積分の計算問題です。

問　題

$S_n=\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\ (n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$とおくとき，次の問いに答えよ。

(1) すべての$n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots$について，$\dfrac{1}{\pi(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\dfrac{1}{\pi n^2}$が成り立つことを示せ。

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}$の値を求めよ。 [2003]

解答例

(1) $n\pi\leqq x\leqq(n+1)\pi$において，$1-\cos x\geqq 0$より，

$$\frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2}\leqq\frac{1-\cos x}{x^2}\leqq\frac{1-\cos x}{\pi^2n^2}$$

$$\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{\pi^2(n+1)^2}\,dx\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{x^2}\,dx\leqq\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}\frac{1-\cos x}{\pi^2n^2}\,dx$$

ここで，$\displaystyle\int_{n\pi}^{(n+1)\pi}(1-\cos x)\,dx=\Big[\,x-\sin x\,\Big]_{n\pi}^{(n+1)\pi}=\pi$より，

$$\frac{\pi}{\pi^2(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\frac{\pi}{\pi^2n^2},\quad \frac{1}{\pi(n+1)^2}\leqq S_n\leqq\frac{1}{\pi n^2}$$

(2) (1)から$\pi k^2\leqq\dfrac{1}{S_k}\leqq\pi(k+1)^2$なので，$\displaystyle\pi\sum_{k=1}^{n}k^2\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\leqq\pi\sum_{k=1}^{n}(k+1)^2=\pi\sum_{l=2}^{n+1}l^2$

$$\frac{\pi}{6}n(n+1)(2n+1)\leqq\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\leqq\frac{\pi}{6}(n+1)(n+2)(2n+3)-\pi\cdot 1^2$$

$$\frac{\pi}{6}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(2+\frac{1}{n}\Big)\leqq\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}\leqq\frac{\pi}{6}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)\Big(1+\frac{2}{n}\Big)\Big(2+\frac{3}{n}\Big)-\frac{\pi}{n^3}$$

$n\to\infty$のとき，$\dfrac{\pi}{6}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big(2+\dfrac{1}{n}\Big)\to\dfrac{\pi}{3}$，$\dfrac{\pi}{6}\Big(1+\dfrac{1}{n}\Big)\Big(1+\dfrac{2}{n}\Big)\Big(2+\dfrac{3}{n}\Big)-\dfrac{\pi}{n^3}\to\dfrac{\pi}{3}$

よって，$\displaystyle\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{S_k}=\frac{\pi}{3}$

コメント

誘導に従っていけば，方針を迷うこともありません。演習に適切な無理のない問題です。

問　題

関数 $f(x)$ が任意の実数 x に対して，$f(x)=x^2-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt$ を満たすとき，次の問いに答えよ。

(1) $f(0)$ の値を求め，さらに $f'(x)=2x-f(x)$ が成り立つことを示せ。

(2) $(e^x f(x))'=2xe^x$ を示せ。

(3) $f(x)$ を求めよ。 [2001]

解答例

(1) 条件より，$f(x)=x^2-\int_0^x (x-t)f'(t)\,dt=x^2-x\int_0^x f'(t)\,dt+\int_0^x tf'(t)\,dt$ ……①

①に $x=0$ を代入すると，$f(0)=0$

また，①の両辺を x で微分すると，

$$f'(x)=2x-\int_0^x f'(t)\,dt-xf'(x)+xf'(x)=2x-\int_0^x f'(t)\,dt$$

$$=2x-\big[f(t)\big]_0^x=2x-f(x)+f(0)=2x-f(x) \text{ ……②}$$

(2) ②より，$(e^x f(x))'=e^x f(x)+e^x f'(x)=e^x f(x)+e^x\{2x-f(x)\}=2xe^x$

(3) (2)より，$e^x f(x)=\int 2xe^x dx=2xe^x-\int 2e^x dx=2xe^x-2e^x+C$

$$f(x)=2x-2+Ce^{-x}=Ce^{-x}+2x-2$$

$f(0)=0$ より，$C-2=0$ となり，$C=2$

以上より，$f(x)=2e^{-x}+2x-2$

コメント

微分型の積分方程式ですが，誘導がていねいについているので，方針に迷うことはありません。

問　題

閉区間$\left[-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{2}\right]$上の関数$f(x)$を次の式で定義する。

$$f(x)=\int_x^{x+1}\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$$

(1)　$f(x)$の導関数$f'(x)$　$\left(-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}\right)$を求めよ。

(2)　$f(x)$を最小にするxの値aと，そのときの最小値を求めよ。

(3)　(2)で求めたaに対して，$\displaystyle\int_a^{a+1}t\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$g(t)=\log\left(\left|t-\dfrac{1}{2}\right|+\dfrac{1}{2}\right)$とおくと，

$$f'(x)=g(x+1)(x+1)'-g(x)=\log\left(\left|x+\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)-\log\left(\left|x-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)$$

$-\dfrac{1}{2}<x<\dfrac{1}{2}$より，$x+\dfrac{1}{2}>0$，$x-\dfrac{1}{2}<0$となるので，

$$f'(x)=\log\left(x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)-\log\left(-x+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)=\log(x+1)-\log(-x+1)$$

(2)　$f'(x)=0$の解は，$x+1=-x+1$より$x=0$

$x=0$のとき，$f(x)$は最小値をとるので，

$a=0$となる。最小値は，

x	$-\frac{1}{2}$	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{2}$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	

$$f(0)=\int_0^1\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\log\left(-t+\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\log\left(t-\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\right)dt$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}\log(-t+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt$$

ここで，$-t+1=s$とおくと，$\displaystyle\int_0^{\frac{1}{2}}\log(-t+1)\,dt=\int_1^{\frac{1}{2}}\log s(-ds)=\int_{\frac{1}{2}}^1\log s\,ds$

よって，$\displaystyle f(0)=2\int_{\frac{1}{2}}^1\log t\,dt=2\Big[t\log t-t\Big]_{\frac{1}{2}}^1=2\left(-\frac{1}{2}\log\frac{1}{2}-\frac{1}{2}\right)=\log 2-1$

(3)　$\displaystyle I=\int_0^1 t\log\left(\left|t-\frac{1}{2}\right|+\frac{1}{2}\right)dt=\int_0^{\frac{1}{2}}t\log(-t+1)\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^1 t\log t\,dt$

ここで，$-t+1=s$とおくと，

$$\int_0^{\frac{1}{2}}t\log(-t+1)\,dt=\int_1^{\frac{1}{2}}(1-s)\log s(-ds)=\int_{\frac{1}{2}}^1(1-s)\log s\,ds$$

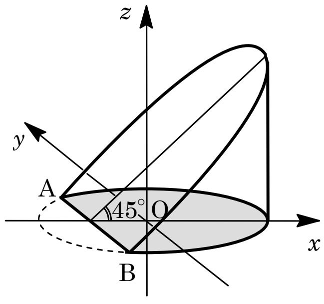
よって，$I=\int_{\frac{1}{2}}^{1}(1-t)\log t\,dt+\int_{\frac{1}{2}}^{1}t\log t\,dt=\int_{\frac{1}{2}}^{1}\log t\,dt=\frac{1}{2}(\log 2-1)$

コメント

(3)の積分は，(2)の $f(0)$ の値を使うらしいということが，問題文から匂ってきます。実際，そのとおりになりました。

問　題

座標空間内の平面 $H: z=0$ とその上の曲線 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ を考える。C 上の点を通り z 軸に平行な直線の全体が作る曲面を K とする。C 上の 2 点 $\mathrm{A}\left(-1,\ \dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$, $\mathrm{B}\left(-1,\ -\dfrac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$ に対し，線分 AB を含み平面 H と $45°$ の角をなす平面を T とする。ただし，平面 T と z 軸の交点の z 座標は正であるとする。平面 H, 平面 T および曲面 K が囲む 2 つの立体のうち z 軸と交わるものを V とする。次の問いに答えよ。



(1)　立体 V と平面 H の共通部分（右図で灰色で示される部分）の面積を求めよ。

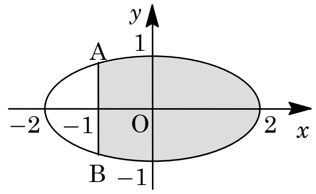
(2)　立体 V を平面 $x=t$ $(-1<t<2)$ で切ったとき，断面の面積 $S(t)$ を t を用いて表せ。

(3)　立体 V の体積を求めよ。　[2017]

解答例

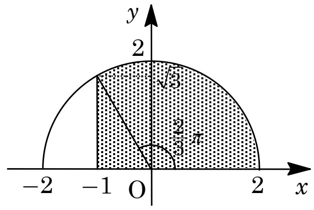
(1)　楕円 $C: \dfrac{x^2}{4}+y^2=1$ に対して，

$$y=\pm\sqrt{1-\frac{x^2}{4}}=\pm\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$



さて，C に囲まれる図形の $x \geqq -1$ の部分の面積を T とすると，x 軸に関する対称性より，

$$T=2\int_{-1}^{2}\frac{1}{2}\sqrt{4-x^2}\,dx=\int_{-1}^{2}\sqrt{4-x^2}\,dx$$

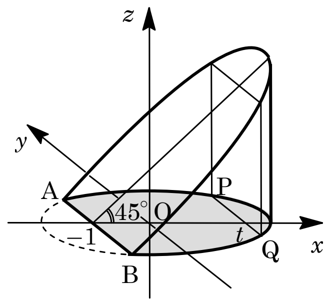


そして，T の値は右図の網点部の面積が対応し，

$$T=\frac{1}{2}\cdot 2^2\cdot\frac{2}{3}\pi+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

(2)　$(*)$に $x=t$ を代入すると，$y=\pm\dfrac{1}{2}\sqrt{4-t^2}$ となり，C と直線 $x=t$ の交点を P, Q とおくと，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{4-t^2}$$



これより，立体 V を平面 $x=t$ で切ったとき，断面の長方形の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\mathrm{PQ}\cdot\{t-(-1)\}\tan 45°=(t+1)\sqrt{4-t^2}$$

(3)　立体 V の体積 W は，(1)の結果も利用して，

$$W=\int_{-1}^{2}S(t)dt=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\int_{-1}^{2}\sqrt{4-t^2}\,dt$$

$$=\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt+\frac{4}{3}\pi+\frac{\sqrt{3}}{2}$$

ここで，$4-t^2=u$ とおくと，$-2tdt=du$ から，

$$\int_{-1}^{2}t\sqrt{4-t^2}\,dt=\int_{3}^{0}\sqrt{u}\left(-\frac{1}{2}\right)du=\frac{1}{2}\int_{0}^{3}u^{\frac{1}{2}}\,du=\frac{1}{3}\Big[\,u^{\frac{3}{2}}\,\Big]_0^3=\sqrt{3}$$

よって，$W=\sqrt{3}+\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{\sqrt{3}}{2}=\dfrac{4}{3}\pi+\dfrac{3}{2}\sqrt{3}$ となる。

コメント

立体の体積を求める頻出タイプの問題です。問題文に参考図が書かれているため，見通しはかなりよくなっています。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　a を正の定数とする。関数 $f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ の逆関数 $f^{-1}(x)$ を求めよ。

(2)　(1)で求めた $f^{-1}(x)$ の導関数を求めよ。

(3)　c を正の定数とする。x 軸, y 軸, 直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　$f(x)=\dfrac{e^x-ae^{-x}}{2}$ のとき $y=f(x)$ とおくと, $x=f^{-1}(y)$ となり,

$$2y=e^x-ae^{-x},\quad e^{2x}-2ye^x-a=0$$

$a>0$, $e^x>0$ から, $e^x=y+\sqrt{y^2+a}$ となり, $x=\log\left(y+\sqrt{y^2+a}\right)$

よって, $f^{-1}(x)=\log\left(x+\sqrt{x^2+a}\right)$ である。

(2)　$\dfrac{d}{dx}f^{-1}(x)=\dfrac{1}{x+\sqrt{x^2+a}}\left(1+\dfrac{2x}{2\sqrt{x^2+a}}\right)=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+a}}$

(3)　x 軸, y 軸, 直線 $x=c$ および曲線 $y=\dfrac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}$ で囲まれる部分の面積 S は,

$$S=\int_0^c\frac{1}{\sqrt{x^2+c^2}}dx=\Big[\log\left(x+\sqrt{x^2+c^2}\right)\Big]_0^c=\log\left(c+\sqrt{2c^2}\right)-\log\sqrt{c^2}$$

$$=\log c+\log(1+\sqrt{2})-\log c=\log(1+\sqrt{2})$$

コメント

定積分の有名問題ですが, 丁寧な誘導がついているため, 知識がなくても迷うことはありません。

問　題

座標平面上の点 $\mathrm{P}(1,\ 1)$ を中心とし，原点 O を通る円を C_1 とする。k を正の定数として，曲線 $y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)$ を C_2 とする。C_1 と C_2 は 2 点で交わるとし，その交点を Q, R とするとき，直線 PQ は x 軸に平行であるとする。点 Q の x 座標を q とし，点 R の x 座標を r とする。次の問いに答えよ。

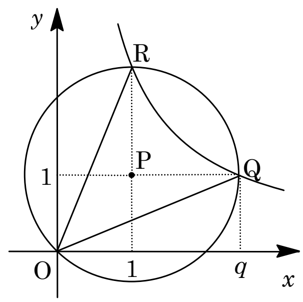
(1) $k,\ q,\ r$ の値を求めよ。

(2) 曲線 C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S を求めよ。

(3) $x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくことにより，定積分 $\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ の値を求めよ。

(4) 円 C_1 の原点 O を含まない弧 QR と曲線 C_2 で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる回転体の体積 V を求めよ。　[2015]

解答例



(1) 円 C_1 は中心 $\mathrm{P}(1,\ 1)$，半径は $\sqrt{2}$ から，

$$C_1:(x-1)^2+(y-1)^2=2\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，C_1 と $C_2: y=\dfrac{k}{x}\ (x>0)\cdots\cdots②$は点 Q, R で交わり，PQ は x 軸に平行であることより，$\mathrm{Q}(1+\sqrt{2},\ 1)$ となる。これより，$q=1+\sqrt{2}$ である。そして，C_2 が点 Q を通ることより，②から $k=(1+\sqrt{2})\cdot 1=1+\sqrt{2}$ である。

さらに，C_1，C_2 がともに直線 $y=x$ について対称なので $\mathrm{R}(1,\ 1+\sqrt{2})$ となり，$r=1$ である。

(2) C_2 と線分 OQ, OR で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(1+\sqrt{2})+\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1+\sqrt{2}}{x}dx-\frac{1}{2}\cdot(1+\sqrt{2})\cdot 1$$
$$=(1+\sqrt{2})\big[\log x\big]_1^{1+\sqrt{2}}=(1+\sqrt{2})\log(1+\sqrt{2})$$

(3) $I=\displaystyle\int_r^q\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx$ に対して，$x=1+\sqrt{2}\sin\theta$ とおくと，

$$I=\int_1^{1+\sqrt{2}}\sqrt{2-(x-1)^2}\,dx=\int_0^{\frac{\pi}{2}}\sqrt{2-2\sin^2\theta}\cdot\sqrt{2}\cos\theta\,d\theta$$
$$=2\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\theta\,d\theta=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos 2\theta)\,d\theta=\Big[\theta+\frac{1}{2}\sin 2\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{2}$$

(4) 円 C_1 の $y\geqq 1$ の部分は，①より $y=1+\sqrt{2-(x-1)^2}$ となる。

すると，求める回転体の体積 V は，

$$V=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left(1+\sqrt{2-(x-1)^2}\right)^2dx-\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{(1+\sqrt{2})^2}{x^2}dx$$

$$=\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\left\{3-(x-1)^2+2\sqrt{2-(x-1)^2}\right\}dx-(1+\sqrt{2})^2\pi\int_1^{1+\sqrt{2}}\frac{1}{x^2}dx$$

$$=\pi\left[3x-\frac{1}{3}(x-1)^3\right]_1^{1+\sqrt{2}}+2\pi I-(1+\sqrt{2})^2\pi\left[-\frac{1}{x}\right]_1^{1+\sqrt{2}}$$

$$=\left(3\sqrt{2}-\frac{2\sqrt{2}}{3}\right)\pi+2\pi\cdot\frac{\pi}{2}-(1+\sqrt{2})^2\left(-\frac{1}{1+\sqrt{2}}+1\right)\pi$$

$$=\frac{7\sqrt{2}}{3}\pi+\pi^2-\sqrt{2}(1+\sqrt{2})\pi=\left(\frac{4\sqrt{2}}{3}-2\right)\pi+\pi^2$$

コメント

定積分による求積問題です。誘導つきで計算量も標準的です。なお，(2)はよく見かけるものです。

問　題

次の問いに答えよ。ただし，e は自然対数の底である。

(1)　$x \geqq 2$ のとき，$x^4e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ を示せ。また，これを用いて $\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x}$ を求めよ。

(2)　k を定数とする。$x>0$ の範囲で方程式 $xe^{-3x} = \dfrac{k}{x^2}$ がちょうど 2 つの解 α，β $(\alpha<\beta)$ をもつような k の値の範囲を求めよ。

(3)　(2)の α，β が $\beta = 2\alpha$ を満たすとき，曲線 $y = xe^{-3x}$ $(x>0)$ と曲線 $y = \dfrac{k}{x^2}$ $(x>0)$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$x \geqq 2$ のとき，$f(x) = x^4e^{-3x}$ とおくと，

$$f'(x) = 4x^3e^{-3x} - 3x^4e^{-3x} = x^3(4-3x)e^{-3x} < 0$$

よって，$f(x) \leqq f(2) = 16e^{-6}$，すなわち $x^4e^{-3x} \leqq 16e^{-6}$ が成立し，

$$0 < x^3e^{-3x} \leqq \frac{16e^{-6}}{x}$$

すると，$x\to\infty$ のとき $\dfrac{16e^{-6}}{x} \to 0$ より，$\displaystyle\lim_{x\to\infty} x^3e^{-3x} = 0$

(2)　$x>0$ のとき $g(x) = x^3e^{-3x}$ とおき，$g(x) = k$ すなわち $xe^{-3x} = \dfrac{k}{x^2}$ が異なる 2 つの解をもつ条件を求める。

$$g'(x) = 3x^2e^{-3x} - 3x^3e^{-3x}$$
$$= 3x^2(1-x)e^{-3x}$$

そこで，(1)の結果を用いると，$g(x)$ の増減は右表のようになり，求める条件は，$0 < k < \dfrac{1}{e^3}$ である。

x	0	$\cdots$	1	$\cdots$	∞
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	0	$\nearrow$	$\dfrac{1}{e^3}$	$\searrow$	0

(3)　(2)のもとで，2 つの解 $x = \alpha$，β $(\alpha<\beta)$ が $\beta = 2\alpha$ となるとき，

$$\alpha^3e^{-3\alpha} = k \cdots\cdots\text{①},\quad 8\alpha^3e^{-6\alpha} = k \cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$\alpha^3e^{-3\alpha} = 8\alpha^3e^{-6\alpha}$ となり，$e^{3\alpha} = 8$ から $e^{\alpha} = 2$ となり，

$$\alpha = \log 2,\quad k = \frac{1}{8}\alpha^3 = \frac{1}{8}(\log 2)^3$$

さて，$x>0$ において，2 曲線 $y = xe^{-3x}$，$y = \dfrac{k}{x^2}$ で囲まれた部分の面積 S は，

$$S = \int_{\alpha}^{2\alpha}\left(xe^{-3x} - \frac{k}{x^2}\right)dx = \left[-\frac{1}{3}xe^{-3x}\right]_{\alpha}^{2\alpha} + \frac{1}{3}\int_{\alpha}^{2\alpha} e^{-3x}\,dx + \left[\frac{k}{x}\right]_{\alpha}^{2\alpha}$$

$$= -\frac{1}{3}(2\alpha e^{-6\alpha} - \alpha e^{-3\alpha}) - \frac{1}{9}\left[e^{-3x}\right]_{\alpha}^{2\alpha} + k\left(\frac{1}{2\alpha} - \frac{1}{\alpha}\right)$$

$$= -\frac{1}{3}\left(\frac{1}{32}\alpha - \frac{1}{8}\alpha\right) - \frac{1}{9}(e^{-6\alpha} - e^{-3\alpha}) - \frac{\alpha^3}{8}\cdot\frac{1}{2\alpha}$$

数値を代入すると,

$$S = -\frac{1}{16}\alpha^2 + \frac{1}{32}\alpha - \frac{1}{9}\left(\frac{1}{64} - \frac{1}{8}\right) = -\frac{1}{16}(\log 2)^2 + \frac{1}{32}\log 2 + \frac{7}{576}$$

コメント

微積分の融合問題ですが，ていねいな誘導がついています。最後の定積分の計算は，先を読みながら行わないと面倒なことになります。

問　題

曲線 $y=e^x$ 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 1)$ における接線を l とし，点 $\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通り直線 l に平行な直線を m とする。直線 m と曲線 $y=e^x$ の 2 つの交点 P，Q の x 座標をそれぞれ α，β（ただし $\alpha<\beta$）とする。直線 $x=\alpha$ と直線 l の交点を P'，直線 $x=\beta$ と直線 l の交点を Q' とする。次の問いに答えよ。

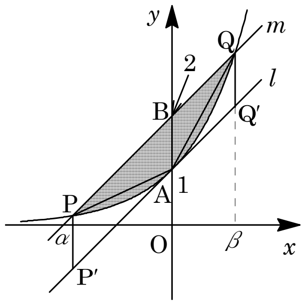
(1) 平行四辺形 $\mathrm{PP'Q'Q}$ の面積 S を α，β で表せ。

(2) 直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T を α，β の多項式で表せ。

(3) 線分 PQ の中点 R は第 2 象限にあることを示せ。

(4) $\alpha+\beta>-1$ であることを示せ。 [2009]

解答例



(1) 平行四辺形 $\mathrm{PP'Q'Q}$ の面積 S は,

$$S=1\times(\beta-\alpha)=\beta-\alpha$$

(2) $y=e^x$ ……①より，$y'=e^x$ となり，$\mathrm{A}(0,\ 1)$ における接線 l の方程式は，$y=x+1$ となる。

また，$\mathrm{B}(0,\ 2)$ を通り l に平行な直線 m は,

$$y=x+2\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立して，$e^x=x+2$

この方程式の 2 つの解が $x=\alpha$，β より,

$$e^\alpha=\alpha+2\ \cdots\cdots\cdots ③,\quad e^\beta=\beta+2\ \cdots\cdots\cdots ④$$

さて，直線 m と曲線 $y=e^x$ によって囲まれる図形の面積 T は,

$$T=\int_\alpha^\beta (x+2-e^x)\,dx=\left[\frac{x^2}{2}+2x-e^x\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(e^\beta-e^\alpha)$$

③④より，$e^\beta-e^\alpha=(\beta+2)-(\alpha+2)=\beta-\alpha$ となり,

$$T=\frac{1}{2}(\beta^2-\alpha^2)+2(\beta-\alpha)-(\beta-\alpha)=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)$$

(3) $T<S$ より，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)<\beta-\alpha$ となり，$\beta-\alpha>0$ から,

$$\alpha+\beta+2<2,\quad \frac{\alpha+\beta}{2}<0$$

これより，線分 PQ の中点 $\mathrm{R}\left(\dfrac{\alpha+\beta}{2},\ \dfrac{e^\alpha+e^\beta}{2}\right)$ は，第 2 象限にある。

(4) $y=e^x$ に対し，$y''=e^x>0$ から，曲線は下に凸になるので,

$$T>\triangle\mathrm{APQ}=\frac{1}{2}S$$

よって，$\frac{1}{2}(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2)>\frac{1}{2}(\beta-\alpha)$ から,

$$\alpha+\beta+2>1,\quad \alpha+\beta>-1$$

コメント

面積を比較して不等式を証明する問題です。ぜひ演習しておいてほしい一題です。

問　題

Aを正の定数，θは$0 \leqq \theta \leqq \pi$を満たす実数とし, 2 つの曲線

$$y = A\cos x\,,\ \ y = \sin(x-\theta)\quad (0 \leqq x \leqq 2\pi)$$

によって囲まれた図形の面積をSとする。また，この 2 つの曲線の交点のx座標をa, $b\,(a<b)$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\cos b\sin(a-\theta) = \cos a\sin(b-\theta)$が成り立っているとき，$\cos\theta\sin(b-a) = 0$を示せ。

(2)　$b-a=\pi$を示せ。

(3)　SをA，a，θを用いて表せ。

(4)　S^2をA，θを用いて表せ。

(5)　Sを最大にするθの値およびそのときのSの値を求めよ。　[2004]

解答例

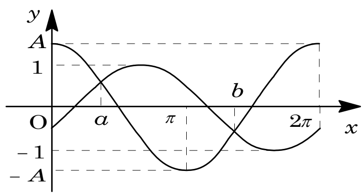
(1)　$\cos b\sin(a-\theta) = \cos a\sin(b-\theta)$ ……①が成り立っているとき，

$$\frac{1}{2}\{\sin(b+a-\theta)-\sin(b-a+\theta)\} = \frac{1}{2}\{\sin(a+b-\theta)-\sin(a-b+\theta)\}$$

$$\sin(b-a+\theta)-\sin(a-b+\theta)=0\,,\ \ 2\cos\frac{2\theta}{2}\sin\frac{2b-2a}{2}=0$$

よって，$\cos\theta\sin(b-a)=0$ ………②

(2)　$y = A\cos x$ ……③と$y=\sin(x-\theta)$ ……④の交点が$x=a$，bより，



$$A\cos a = \sin(a-\theta)\,,\ \ A\cos b = \sin(b-\theta)$$

すると，①が成立しているので，②より，

(i)　$\cos\theta = 0$のとき　$0 \leqq \theta \leqq \pi$より$\theta = \dfrac{\pi}{2}$となり，④は$y = \sin\left(x-\dfrac{\pi}{2}\right) = -\cos x$

③との交点は，$A\cos x = -\cos x$，$(A+1)\cos x = 0$

$A>0$，$0 \leqq x \leqq 2\pi$より，$x = \dfrac{\pi}{2}$，$\dfrac{3}{2}\pi$となり，$b-a = \dfrac{3}{2}\pi - \dfrac{\pi}{2} = \pi$

(ii)　$\cos\theta \neq 0$のとき　②より，$\sin(b-a)=0$

$A>0$より，$0<a<b<2\pi$から，$0<b-a<2\pi$となり，$b-a=\pi$

(3)　$S = \displaystyle\int_a^b \{\sin(x-\theta) - A\cos x\}dx = \Big[-\cos(x-\theta) - A\sin x\Big]_a^b$

$= -\cos(b-\theta)+\cos(a-\theta)-A\sin b + A\sin a$

(2)より，$b = \pi + a$なので，

$$S = -\cos(\pi+a-\theta)+\cos(a-\theta)-A\sin(\pi+a)+A\sin a$$

$$= \cos(a-\theta)+\cos(a-\theta)+A\sin a + A\sin a$$

$$= 2\cos(a-\theta)+2A\sin a$$

(4)　(3)より，$S=2(\cos\alpha\cos\theta+\sin\alpha\sin\theta)+2A\sin\alpha$ となり，

$$2\cos\theta\cos\alpha+2(\sin\theta+A)\sin\alpha=S\ \cdots\cdots\cdots ⑤$$

ここで, (2)より $A\cos\alpha=\sin(\alpha-\theta)$ なので,

$$A\cos\alpha=\sin\alpha\cos\theta-\cos\alpha\sin\theta,\ (\sin\theta+A)\cos\alpha-\cos\theta\sin\alpha=0\ \cdots\cdots\cdots ⑥$$

⑤⑥より，$\begin{pmatrix}2\cos\theta & 2(\sin\theta+A)\\ \sin\theta+A & -\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S\\ 0\end{pmatrix}$

$\varDelta=-2\cos^2\theta-2(\sin\theta+A)^2$ とおくと，$0\leqq\theta\leqq\pi,\ A>0$ より，$\varDelta<0$ となり，

$$\begin{pmatrix}\cos\alpha\\ \sin\alpha\end{pmatrix}=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix}-\cos\theta & -2(\sin\theta+A)\\ -(\sin\theta+A) & 2\cos\theta\end{pmatrix}\begin{pmatrix}S\\ 0\end{pmatrix}=\frac{1}{\varDelta}\begin{pmatrix}-S\cos\theta\\ -S(\sin\theta+A)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{S}{2\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}}\begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta+A\end{pmatrix}$$

そこで，$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ より，

$$\frac{S^2\cos^2\theta}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}^2}+\frac{S^2(\sin\theta+A)^2}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}^2}=1$$

まとめると，$\dfrac{S^2}{4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}}=1$ となり，

$$S^2=4\{\cos^2\theta+(\sin\theta+A)^2\}=4(1+2A\sin\theta+A^2)$$

(5)　$0\leqq\theta\leqq\pi$ なので, (4)より，S^2 は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき最大になり，このとき，

$$S^2=4(1+2A+A^2)=4(1+A)^2$$

よって, S は $\theta=\dfrac{\pi}{2}$ のとき，最大値 $\sqrt{4(1+A)^2}=2(1+A)$ をとる。

コメント

(4)は α を消去する問題ですが，ちょうど「もぐらたたき」のように，$\sin\alpha$ を消去すると $\cos\alpha$ が現れ，$\cos\alpha$ を消去すると $\sin\alpha$ が現れるという状況になりました。そこで，迂遠な方法ですが，$\cos^2\alpha+\sin^2\alpha=1$ に代入して消すという基本で解いてみました。時間は, かなりかかりました。

問　題

a を $2<a<3$ を満たす定数とし，$f(x)=\dfrac{1}{2}\left(e^x-1+\dfrac{a-e^x}{a-2}-\left|e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}\right|\right)$ とおく。ただし, e は自然対数の底である。

(1)　$y=f(x)$ のグラフの概形をかけ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフの $y\geqq 0$ の部分と x 軸とで囲まれる図形を直線 $x=\log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体の体積 V を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}=\dfrac{(a-1)e^x-2a+2}{a-2}=\dfrac{(a-1)(e^x-2)}{a-2}$

$2<a<3$ より，$e^x\geqq 2$ $(x\geqq\log 2)$ のとき $e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}\geqq 0$，$e^x<2$ $(x<\log 2)$ のとき $e^x-1-\dfrac{a-e^x}{a-2}<0$ である。

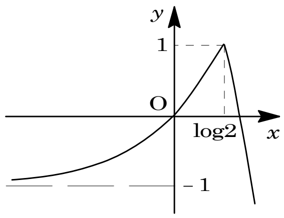
(i)　$x\geqq\log 2$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}-e^x+1+\frac{a-e^x}{a-2}\right)=\frac{a-e^x}{a-2}$$

(ii)　$x<\log 2$ のとき

$$f(x)=\frac{1}{2}\left(e^x-1+\frac{a-e^x}{a-2}+e^x-1-\frac{a-e^x}{a-2}\right)=e^x-1$$

したがって，$y=f(x)$ のグラフの概形は，右図のようになる。



(2)　$y=f(x)$ の $x\geqq\log 2$ の部分を，直線 $x=\log 2$ に関して対称移動したグラフを $y=g(x)$ とすると，

$$g(x)=\frac{a-e^{2\log 2-x}}{a-2}=\frac{a-4e^{-x}}{a-2}$$

$0\leqq x\leqq\log 2$ のとき，$h(x)=f(x)-g(x)=e^x-1-\dfrac{a-4e^{-x}}{a-2}$ とおくと，

$$h'(x)=e^x-\frac{4e^{-x}}{a-2},\quad h''(x)=e^x+\frac{4e^{-x}}{a-2}>0$$

$0\leqq x\leqq\log 2$ のとき，$h'(x)\leqq h'(\log 2)=2-\dfrac{2}{a-2}=\dfrac{2(a-3)}{a-2}<0$

よって，$h(x)\geqq h(\log 2)=2-1-\dfrac{a-2}{a-2}=0$ から，$f(x)\geqq g(x)$ となる。

すると，求める立体は，$y=f(x)$ の $0\leqq x\leqq\log 2$ の部分を，直線 $x=\log 2$ のまわりに 1 回転してできる立体に等しいことより，

$$\begin{aligned}V &= \int_0^{\log 2} 2\pi(\log 2 - x)(e^x - 1)\,dx \\ &= 2\pi\left\{\Big[(\log 2 - x)(e^x - x)\Big]_0^{\log 2} - \int_0^{\log 2} -(e^x - x)\,dx\right\} \\ &= 2\pi\left\{-\log 2 + \Big[e^x - \frac{x^2}{2}\Big]_0^{\log 2}\right\} = 2\pi\left\{-\log 2 + 1 - \frac{1}{2}(\log 2)^2\right\} \\ &= \pi\left\{-(\log 2)^2 - 2\log 2 + 2\right\}\end{aligned}$$

コメント

回転軸の両側に図形があるので，その位置関係の考察が面倒です。なお，体積はいわゆる円筒分割で計算しています。

問　題

$a>0$ とし，極方程式 $r=2a\sin\theta\left(0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}\right)$ で表される曲線を C とする。

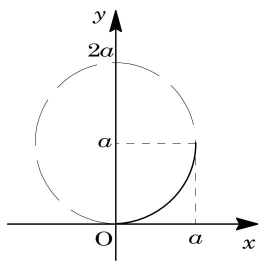
(1) 曲線 C は円の一部であることを示し，その円の中心と半径を求めよ。さらに，曲線 C を図示せよ。

(2) 曲線 C と x 軸および直線 $x=a$ で囲まれた図形を，x 軸のまわりに 1 回転してできる立体の体積を求めよ。 [2001]

解答例

(1) $r=2a\sin\theta=2a\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\theta\right)$ なので，曲線 C は，中心 $\left(a,\ \dfrac{\pi}{2}\right)$，半径 a の円を表す。

また $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{4}$ より $\dfrac{\pi}{4}\leqq\dfrac{\pi}{2}-\theta\leqq\dfrac{\pi}{2}$ となり，曲線 C は右図の実線部となる。



(2) 条件より，$x=r\cos\theta=2a\sin\theta\cos\theta=a\sin2\theta$

$y=r\sin\theta=2a\sin^2\theta=a(1-\cos2\theta)$

求める立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^a y^2dx=\pi\int_0^{\frac{\pi}{4}}a^2(1-\cos2\theta)^2\cdot2a\cos2\theta\,d\theta$$

$$=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{4}}(1-2\cos2\theta+\cos^22\theta)\cos2\theta\,d\theta$$

ここで，$2\theta=\varphi$ とおくと，

$$V=2\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-2\cos\varphi+\cos^2\varphi)\cos\varphi\cdot\frac{1}{2}d\varphi$$

$$=\pi a^3\int_0^{\frac{\pi}{2}}(\cos\varphi-2\cos^2\varphi+\cos^3\varphi)\,d\varphi$$

さて，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\varphi\,d\varphi=1$，$\displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^2\varphi\,d\varphi=\frac{1}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1+\cos2\varphi)\,d\varphi=\frac{\pi}{4}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos^3\varphi\,d\varphi=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\sin^2\varphi)\cos\varphi\,d\varphi=\left[\sin\varphi-\frac{1}{3}\sin^3\varphi\right]_0^{\frac{\pi}{2}}=\frac{2}{3}$$

以上より，$V=\pi a^3\left(1-\dfrac{\pi}{2}+\dfrac{2}{3}\right)=\pi\left(\dfrac{5}{3}-\dfrac{\pi}{2}\right)a^3$

コメント

与えられた極方程式はよく知られている原点を通る円を表すものです。なお，(2)は $x,\,y$ の関係で表し，積分した方が簡単でしたが……。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　不定積分 $\displaystyle\int \frac{1}{\cos\theta}d\theta$ を求めよ。

(2)　媒介変数 θ を用いて,

$$x(\theta)=\int_0^{\theta}(1+\tan u)du\,,\quad y(\theta)=\int_0^{\theta}(1-\tan u)du\quad \left(0\leqq\theta\leqq\frac{\pi}{3}\right)$$

で表される曲線の長さを求めよ。 [2000]

解答例

(1)
$$\int\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{\cos^2\theta}d\theta=\int\frac{\cos\theta}{1-\sin^2\theta}d\theta=\frac{1}{2}\int\left(\frac{1}{1+\sin\theta}+\frac{1}{1-\sin\theta}\right)\cos\theta d\theta$$
$$=\frac{1}{2}\left\{\log(1+\sin\theta)-\log(1-\sin\theta)\right\}+C=\frac{1}{2}\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}+C$$

(2)　$x(\theta)=\displaystyle\int_0^{\theta}(1+\tan u)du$, $y(\theta)=\displaystyle\int_0^{\theta}(1-\tan u)du$ より,

$$\left\{x'(\theta)\right\}^2+\left\{y'(\theta)\right\}^2=(1+\tan\theta)^2+(1-\tan\theta)^2=2(1+\tan^2\theta)=\frac{2}{\cos^2\theta}$$

すると, $0\leqq\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}$ における曲線の長さを l とすると, (1)より,

$$l=\int_0^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{\frac{2}{\cos^2\theta}}d\theta=\sqrt{2}\int_0^{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{\cos\theta}d\theta=\frac{\sqrt{2}}{2}\left[\log\frac{1+\sin\theta}{1-\sin\theta}\right]_0^{\frac{\pi}{3}}$$
$$=\frac{\sqrt{2}}{2}\log\frac{2+\sqrt{3}}{2-\sqrt{3}}=\frac{\sqrt{2}}{2}\log(2+\sqrt{3})^2=\sqrt{2}\log(2+\sqrt{3})$$

コメント

積分の計算力だけの問題です。(1)の誘導は, 必要がないくらいです。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆