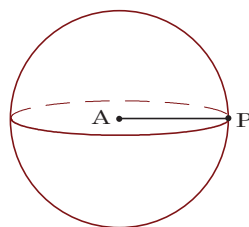


第3講 球面と円の方程式

球面は、定点からの距離が一定の図形です。定点(中心)を A 、一定の距離(半径)を r とし、球面上の任意の点を P とおくと、 $|\overrightarrow{AP}| = r$ となります。



点 P の始点を原点 O に変更すると、

$$|\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}| = r, \quad |\overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OA}|^2 = r^2$$

さて、 $P(x, y, z)$, $A(x_0, y_0, z_0)$ とおくと、

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

展開してまとめると、一般的に、 $x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0$ と表せます。

球面の方程式

点 $A(x_0, y_0, z_0)$ を中心とし、半径 r の球面の方程式

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 + (z - z_0)^2 = r^2$$

例題5 点 $A(2, -1, -4)$ を中心とし、平面 $\alpha: 3x + 2y - z - 1 = 0$ に接する球面の方程式を求めよ。

【解】 点 A を通り、平面 $\alpha: 3x + 2y - z - 1 = 0$ ……①に下ろした垂線は、その方向ベクトルを α の法線ベクトル \vec{n} から流用して、

$$\frac{x-2}{3} = \frac{y+1}{2} = -(z+4) \dots\dots\dots ②$$

②より、 $x = 3t + 2$, $y = 2t - 1$, $z = -t - 4$

①から、 $3(3t + 2) + 2(2t - 1) - (-t - 4) - 1 = 0$

$$14t + 7 = 0, \quad t = -\frac{1}{2}$$

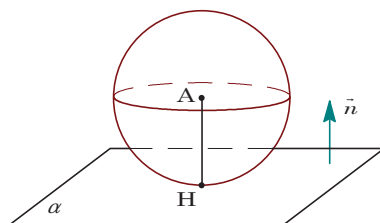
よって、 $x = \frac{1}{2}$, $y = -2$, $z = -\frac{7}{2}$ から、接点 H は $H(\frac{1}{2}, -2, -\frac{7}{2})$ となる。

$$AH = \sqrt{\left(\frac{1}{2} - 2\right)^2 + (-2 + 1)^2 + \left(-\frac{7}{2} + 4\right)^2} = \sqrt{\frac{7}{2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$

求める球面の方程式は、 $(x - 2)^2 + (y + 1)^2 + (z + 4)^2 = \frac{7}{2}$

《注》球面の半径を、点 A と平面 α の距離として、公式を用いると、

$$h = \frac{|3 \times 2 + 2 \times (-1) - (-4) - 1|}{\sqrt{3^2 + 2^2 + (-1)^2}} = \frac{\sqrt{14}}{2}$$



空間内の円は、一般的に、球面と平面の交線として表します。

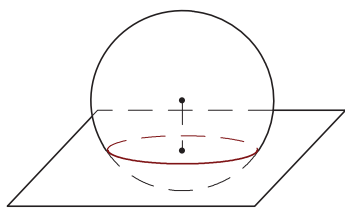
すなわち、球面の方程式を

$$x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \cdots \cdots \textcircled{1}$$

また、平面の方程式を

$$px + qy + rz + s = 0 \cdots \cdots \textcircled{2}$$

このとき、連立方程式①かつ②として、円を表現するわけです。



円の方程式

球面と平面の交線としての円の方程式

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 + ax + by + cz + d = 0 \\ px + qy + rz + s = 0 \end{cases}$$

《注》空間内の円は「球面と平面の交線」として表す以外にも、多様な表現形式があります。たとえば「球面と球面の交線」という扱い方もあります。

例題 6 球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z = 22$ と平面 $\alpha : x - 2y - 4z = 4$ が交わってできる円の中心と半径を求めよ。

解 $S : x^2 + y^2 + z^2 + 2x - 4y - 6z = 22$ より、

$$(x+1)^2 + (y-2)^2 + (z-3)^2 = 36$$

これから、 S は中心 $A(-1, 2, 3)$ 、半径 6 の球面である。

また、中心 A から平面 $\alpha : x - 2y - 4z = 4 \cdots \cdots \textcircled{1}$ へ下ろした垂線は、

$$x+1 = \frac{y-2}{-2} = \frac{z-3}{-4} \cdots \cdots \textcircled{2}$$

②より、 $x = t-1$ 、 $y = -2t+2$ 、 $z = -4t+3$

①に代入すると、

$$t-1-2(-2t+2)-4(-4t+3)=4$$

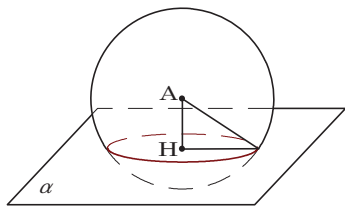
よって、 $t=1$ より、 $x=0$ 、 $y=0$ 、 $z=-1$

垂線の足が、交わりの円の中心 $H(0, 0, -1)$ となり、

$$AH = \sqrt{(-1-0)^2 + (2-0)^2 + (3+1)^2} = \sqrt{21}$$

また、円の半径 r は、球面 S の半径が 6 より、

$$r = \sqrt{6^2 - AH^2} = \sqrt{36 - 21} = \sqrt{15}$$

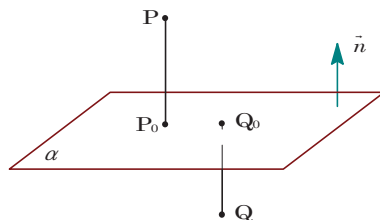


《注》平面は空間を 2 つの領域に分けます。ここで、空間内の点と平面との位置関係について調べます。

まず、平面 α の法線ベクトルを $\vec{n} = (a, b, c)$ とし、その方程式を

$$f(x, y, z) = ax + by + cz + d = 0$$

ここで、右図のように、平面 α に関して、点 $P(p, q, r)$ が \vec{n} の向きと同じ側にあり、点 $Q(p', q', r')$ が反対側にあるとします。このとき、点 P, Q から平面 α に下ろした垂線の足を、それぞれ $P_0(p_0, q_0, r_0)$, $Q_0(p'_0, q'_0, r'_0)$ とおくと、



$$\overrightarrow{P_0P} = k\vec{n} \quad (k > 0) \cdots \cdots \textcircled{1}, \quad \overrightarrow{Q_0Q} = l\vec{n} \quad (l < 0) \cdots \cdots \textcircled{2}$$

さて、①より、 $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{OP_0} + k\vec{n}$ なので、 $(p, q, r) = (p_0, q_0, r_0) + k(a, b, c)$

このとき、 $ap_0 + bq_0 + cr_0 + d = 0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} f(p, q, r) &= ap + bq + cr + d = a(p_0 + ka) + b(q_0 + kb) + c(r_0 + kc) + d \\ &= k(a^2 + b^2 + c^2) > 0 \quad (k > 0) \end{aligned}$$

②より、 $\overrightarrow{OQ} = \overrightarrow{OQ_0} + l\vec{n}$ なので、 $(p', q', r') = (p'_0, q'_0, r'_0) + l(a, b, c)$

このとき、 $ap'_0 + bq'_0 + cr'_0 + d = 0$ であることに注意して、

$$\begin{aligned} f(p', q', r') &= ap' + bq' + cr' + d = a(p'_0 + la) + b(q'_0 + lb) + c(r'_0 + lc) + d \\ &= l(a^2 + b^2 + c^2) < 0 \quad (l < 0) \end{aligned}$$

このように、 $f(x, y, z)$ の符号によって、点と平面の位置関係が把握できます。

さて、この点に注目すると、例題 6 の解は次のようになります。

球面 S は、中心 $A(-1, 2, 3)$ 、半径 6 の球面であり、点 A と平面 α の距離は、

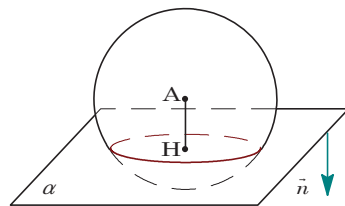
$$h = \frac{|-1 - 2 \times 2 - 4 \times 3 - 4|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + (-4)^2}} = \sqrt{21}$$

三平方の定理を用いると、円の半径 r は $r = \sqrt{6^2 - h^2} = \sqrt{15}$ である。

ここで、 $f(x, y, z) = x - 2y - 4z - 4$ とおくと、

$$f(-1, 2, 3) = -1 - 2 \times 2 - 4 \times 3 - 4 = -21 < 0$$

これより、右図のように、 \overrightarrow{HA} と \vec{n} は逆向き、すなわち \overrightarrow{AH} と \vec{n} は同じ向きになる。 \vec{n} と同じ向きの単位ベクトルは、 $|\vec{n}| = \sqrt{21}$ から $\frac{1}{\sqrt{21}}\vec{n}$ となり、



$$\overrightarrow{AH} = h \cdot \frac{1}{\sqrt{21}}\vec{n} = \vec{n}$$

よって、 $\overrightarrow{OH} = \overrightarrow{OA} + \vec{n} = (-1, 2, 3) + (1, -2, -4) = (0, 0, -1)$

問題 5

球面 $S : x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ 上の点 $A(x_0, y_0, z_0)$ における接平面の方程式は,
 $x_0x + y_0y + z_0z = r^2$ であることを示せ。

問題 6

球面 $S_1 : x^2 + y^2 + z^2 = 1$ と球面 $S_2 : x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 1 = 0$ は, 交わることを示せ。また, 交わりの円の面積を求めよ。

第3講 球面と円の方程式

問題5

球面 $S: x^2 + y^2 + z^2 = r^2 \cdots \cdots ①$ の中心は原点 O より、接平面の法線ベクトルを $\overrightarrow{OA} = (x_0, y_0, z_0)$ とすることができる。

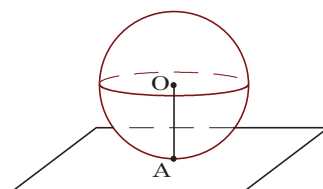
すると、点 $A(x_0, y_0, z_0)$ における接平面の方程式は、

$$\begin{aligned} x_0(x - x_0) + y_0(y - y_0) + z_0(z - z_0) &= 0 \\ x_0x + y_0y + z_0z &= x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 \cdots \cdots ② \end{aligned}$$

ここで、点 A は球面 S 上にあるので、

$$x_0^2 + y_0^2 + z_0^2 = r^2 \cdots \cdots ③$$

よって、②③より、 $x_0x + y_0y + z_0z = r^2$



問題6

$S_1: x^2 + y^2 + z^2 = 1 \cdots \cdots ①$ は、中心が原点 O 、半径 1 の球面である。

また、 $S_2: x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 4y - 4z + 1 = 0 \cdots \cdots ②$ から、

$$(x-1)^2 + (y+2)^2 + (z-2)^2 = 8$$

すると、 S_2 は、中心が $(1, -2, 2)$ 、半径 $2\sqrt{2}$ の球面である。

ここで、2つの球面 S_1, S_2 の中心間距離を d とすると、

$$d = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2} = 3$$

よって、 $2\sqrt{2} - 1 < d < 2\sqrt{2} + 1$ より、 S_1 と S_2 は交わる。

さて、 S_1 と S_2 の交わりの円は、連立方程式①かつ②で表される。

ここで、①と②の両辺の差をとって、

$$-2x + 4y - 4z + 2 = 0, \quad x - 2y + 2z - 1 = 0 \cdots \cdots ③$$

連立方程式①かつ②と、連立方程式①かつ③は同値なので、

③は S_1 と S_2 の交わりの円を含む平面を表している。

ここで、 S_1 の中心 O と平面③の距離を h とすると、

$$h = \frac{|-1|}{\sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} = \frac{1}{3}$$

交線の円の半径を r とすると、 $r = \sqrt{1^2 - h^2} = \frac{2\sqrt{2}}{3}$ となる。

よって、この円の面積は、 $\pi r^2 = \frac{8}{9}\pi$ である。

