《2018 入試対策》

京都大学

文系数学

1998—2017

過去問

ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された京都大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の $\boxed{1}$，$\boxed{2}$，…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

なお，2010 年度以降に出題された過去問について，その解答例の映像解説を，YouTube を利用して配信中です。PC またはタブレットで，下記のアドレスにアクセスしてください。

PC サイト トップページ ≫ 京大数学 映像ライブラリー

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。

(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。

(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。

(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。

(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

■ 関数

1　実数を係数とする3次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ)　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも1つもつ。

この2つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす3次式をすべて求めよ。　[2016]

2　$0°\leqq\theta<90°$ とする。x についての4次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも1つもつことを示せ。　[2014]

3　a を2以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。　[2013]

4　実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。　[2012]

5　次の条件(＊)を満たす正の実数の組 $(a,\ b)$ の範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となる θ がちょうど1つある。　[2012]

6　x, y は $x\neq1$，$y\neq1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき x, y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

[2009]

7　定数 a は実数であるとする。方程式 $(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ を満たす実数 x はいくつあるか。a の値によって分類せよ。　[2008]

8　$0\leqq x<2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3x+\cos^3x)+3\sin x\cos x=0$ を満たす x の個数を求めよ。　[2008]

9　放物線 $C : y = x^2$ と 2 直線 $l_1 : y = px - 1$，$l_2 : y = -x - p + 4$ は 1 点で交わるという。このとき，実数 p の値を求めよ。 [2006]

10　xy 平面上の原点と点 $(1,\ 2)$ を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y = x^2 + ax + b$ が L と共有点をもつような実数の組 $(a,\ b)$ の集合を ab 平面上に図示せよ。 [2005]

11　$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である。 [2005]

12　$f(\theta) = \cos 4\theta - 4\sin^2\theta$ とする。$0° \leqq \theta \leqq 90°$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2004]

13　$0 \leqq \theta < 360$ とし，a は定数とする。$\cos 3\theta° - \cos 2\theta° + 3\cos\theta° - 1 = a$ を満たす θ の値はいくつあるか。a の値によって分類せよ。 [2002]

14　$a,\ b$ は実数で $a \neq b$，$ab \neq 0$ とする。このとき不等式

$$\frac{x-b}{x+a} - \frac{x-a}{x+b} > \frac{x+a}{x-b} - \frac{x+b}{x-a}$$

を満たす実数 x の範囲を求めよ。 [1998]

■ 微分と積分 |||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||||

1　曲線 $y = x^3 - 4x + 1$ を C とする。直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする。また，l の傾きは負であるとする。このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 [2017]

2　xy 平面内の領域 $x^2 + y^2 \leqq 2$，$|x| \leqq 1$ で，曲線 $C : y = x^3 + x^2 - x$ の上側にある部分の面積を求めよ。 [2016]

3 t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点P$(1,\ t)$ から接線を引く。

(1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，P$(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2014]

4 α，β を実数とする。xy 平面内で，点$(0,\ 3)$を中心とする円 C と放物線

$$y=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

が点P$(\sqrt{3},\ 0)$を共有し，さらに P における接線が一致している。このとき以下の問いに答えよ。

(1) α，β の値を求めよ。

(2) 円 C, 放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2013]

5 2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2012]

6 実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか。a の値によって分類せよ。　[2011]

7 xy 平面上で，連立不等式 $|x|\leqq 2$，$y\geqq x$，$y\leqq\left|\dfrac{3}{4}x^2-3\right|-2$ を満たす領域の面積を求めよ。　[2011]

8 座標平面上で，点$(1,\ 2)$を通り傾き a の直線と放物線 $y=x^2$ によって囲まれる部分の面積を $S(a)$ とする。a が $0\leqq a\leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$ を最小にするような a の値を求めよ。　[2010]

9 座標空間内で，O$(0,\ 0,\ 0)$，A$(1,\ 0,\ 0)$，B$(1,\ 1,\ 0)$，C$(0,\ 1,\ 0)$，D$(0,\ 0,\ 1)$，E$(1,\ 0,\ 1)$，F$(1,\ 1,\ 1)$，G$(0,\ 1,\ 1)$ を頂点にもつ立方体を考える。

(1) 頂点 A から対角線 OF に下ろした垂線の長さを求めよ。

(2) この立方体を対角線 OF を軸にして回転して得られる回転体の体積を求めよ。

[2010]

10　整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。 [2009]

11　実数 $a,\ b,\ c$ に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。このとき

$$\int_{-1}^1 (1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^1 \{f(x)\}^2dx$$

であることを示せ。 [2008]

12　3 次関数 $y=x^3-2x^2-x+2$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線を l とする。この 3 次関数のグラフと接線 l で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。 [2007]

13　関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x\leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

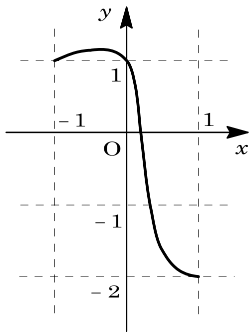
14　区間 $-1\leqq x\leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が,

$$f(-1)=f(0)=1,\ \ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^1 f(x)\,dx\geqq -1$ を示せ。

[2004]



15　xy 平面上で，放物線 $C: y=x^2+x$ と，直線 $l: y=kx+k-1$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。

(2)　放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P，Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。k が(1)で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。 [2003]

16　a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2-ax=2\int_0^1|t^2-at|dt$ は $0\leqq x\leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。　[2000]

17　xy 平面上で放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$（$a<b$）をとり，線分 AB と放物線で囲まれた図形の面積を s とする。点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を放物線上にとり，三角形 ABP の面積を $S(\mathrm{P})$ とする。t が $a<t<b$ の範囲を動くときの $S(\mathrm{P})$ の最大値を S とするとき，s と S の比を求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2015]

2　座標平面上の点 $\mathrm{P}(x,\ y)$ が $4x+y\leqq 9$，$x+2y\geqq 4$，$2x-3y\geqq -6$ の範囲を動くとき，$2x+y$，x^2+y^2 のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。　[2010]

3　xy 平面内の $-1\leqq y\leqq 1$ で定められる領域 D と，中心が P で原点 O を通る円 C を考える。C が D に含まれるという条件のもとで，P が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2001]

4　放物線 $y=x^2$ の上を動く 2 点 P，Q があって，この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき，PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。　[1999]

■ 図形と計量

1　次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

(a)　少なくとも 2 つの内角は 90° である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。　[2015]

2　辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える。$\angle$A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。　[2011]

3　$\triangle$ABC において $\mathrm{AB}=2$，$\mathrm{AC}=1$ とする。$\angle\mathrm{BAC}$ の二等分線と辺 BC の交点を D とする。$\mathrm{AD}=\mathrm{BD}$ となるとき，$\triangle$ABC の面積を求めよ。　[2010]

4　点 O を中心とする正十角形において, A, B を隣接する 2 つの頂点とする。線分 OB 上に $\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$ を満たす点 P をとるとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{AB}$ が成立することを示せ。

[2010]

5　平面上で, 鋭角三角形$\triangle$OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を$\triangle$OBC，$\triangle$OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を$\triangle$OCD，$\triangle$OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を$\triangle$ODE とする。$\triangle$OAB と$\triangle$OBE の面積比が $2:3$ のとき，$\sin\angle\mathrm{AOB}$ の値を求めよ。　[2009]

6　$\mathrm{AB}=\mathrm{AC}$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし, 辺 AB を延長した直線上に点 N を，$\mathrm{AN}:\mathrm{NB}=2:1$ となるようにとる。このとき $\angle\mathrm{BCM}=\angle\mathrm{BCN}$ となることを示せ。ただし, 点 N は辺 AB 上にはないものとする。

[2008]

7　三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ a, b, c とする。この三角形 ABC は次の条件(イ), (ロ), (ハ)を満たすとする。

(イ)　ともに 2 以上である自然数 p と q が存在して，$a=p+q$，$b=pq+p$，$c=pq+1$ となる。

(ロ)　自然数 n が存在して a, b, c のいずれかは 2^n である。

(ハ)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C のいずれかは 60° である。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C を大きさの順に並べよ。

(2)　a, b, c を求めよ。　[2000]

8　鋭角三角形$\triangle$ABC において, 辺 BC の中点を M, A から BC にひいた垂線を AH とする。点 P を線分 MH 上にとるとき,

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

となることを示せ。　[1999]

9　直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2)　r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ。 [1998]

10　一辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とする。

(1)　三角形 OAP の面積を x で表せ。

(2)　P が辺 BC 上を動くとき三角形 OAP の面積の最小値を求めよ。 [1998]

■ ベクトル

1　座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P, Q と，m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P, Q, R の座標を求めよ。 [2017]

2　四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A, B, C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016]

3　xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 P$(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。 [2015]

4 座標空間における次の 3 つの直線 l, m, n を考える：

l は点 A$(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 B$(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 C$(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から $m,\ n$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

[2014]

5 平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}$ を求めよ。 [2013]

6 正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P，Q，R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。$\triangle$PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。[2012]

7 四面体 OABC において，点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ。 [2011]

8 xyz 空間上の 2 点 A$(-3,\ -1,\ 1)$，B$(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 l に点 C$(2,\ 3,\ 3)$ から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。 [2009]

9 座標空間で点 $(3,\ 4,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l，点 $(2,\ -1,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ に平行な直線を m とする。点 P は直線 l 上を，点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき，線分 PQ の長さの最小値を求めよ。 [2007]

10 座標空間上に 4 点 A$(2,\ 1,\ 0)$，B$(1,\ 0,\ 1)$，C$(0,\ 1,\ 2)$，D$(1,\ 3,\ 7)$ がある。3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき，点 E の座標を求めよ。 [2006]

11 △OAB において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$ とする。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\dfrac{3}{5}$ とする。このとき，∠AOB の二等分線と，B を中心とする半径 $\sqrt{10}$ の円との交点の, O を原点とする位置ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$ を用いて表せ。 [2004]

12 四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AB}}$

(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。 [2003]

13 四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{\mathrm{OA}}+\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+\overrightarrow{\mathrm{OD}}$ を満たしており, 0 と異なる 4 つの実数 p, q, r, s に対して 4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=p\overrightarrow{\mathrm{OA}},\ \overrightarrow{\mathrm{OQ}}=q\overrightarrow{\mathrm{OB}},\ \overrightarrow{\mathrm{OR}}=r\overrightarrow{\mathrm{OC}},\ \overrightarrow{\mathrm{OS}}=s\overrightarrow{\mathrm{OD}}$$

によって定める。このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{s}$ が成立することを示せ。 [2002]

14 xy 平面内の相異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k\neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}\neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m}\cdot\vec{v}<0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。 [2001]

15 円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。 [2000]

16 $\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(\cos 60^\circ,\ \sin 60^\circ,\ 0)$ とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル $\vec{c}$ に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$ とおく。このとき次の不等式(＊)が成り立つことを示せ。

$$(*)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　不等式(＊)を満たす $(\alpha,\ \beta)$ $(0^\circ\leqq\alpha\leqq 180^\circ,\ 0^\circ\leqq\beta\leqq 180^\circ)$ の範囲を図示せよ。

[2000]

■ 整数と数列

1　次の問いに答えよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

(1)　100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2)　100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。 [2017]

2　p，q を自然数，α，β を，$\tan\alpha = \dfrac{1}{p}$，$\tan\beta = \dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　次の条件　(A) $\tan(\alpha + 2\beta) = 2$ を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ のうち，$q \leqq 3$ であるものをすべて求めよ。

(2)　条件(A)を満たす p，q の組 $(p,\ q)$ で，$q > 3$ であるものは存在しないことを示せ。

[2017]

3　n を 4 以上の自然数とする。数 2，12，1331 がすべて n 進法で表記されているとして，$2^{12} = 1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。十進法で答えよ。

[2016]

4　次の式　$a_1 = 2$，$a_{n+1} = 2a_n - 1$　$(n = 1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ で定められる数列 $\{a_n\}$ を考える。

(1)　数列 $\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2)　次の不等式　${a_n}^2 - 2a_n > 10^{15}$　を満たす最小の自然数　n　を求めよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。 [2014]

5　n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax + b$ とする。

(1)　a と b は整数であることを示せ。

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。 [2013]

6　0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ。ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする。また n は正の整数とする。

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を T_n とする。T_n を n を用いて表せ。

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を S_n とする。S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか。必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$ および $0.477<\log_{10}3<0.478$ を用いてもよい。　[2011]

7　p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。　[2009]

8　p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a\geqq b\geqq c\geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。　[2007]

9　$a^3-b^3=65$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2005]

10　n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式

$$(*)\quad a^2+b^2=2^n$$

を考える。

(1)　$n\geqq 2$ とする。a, b が方程式(∗)を満たすならば, a, b はともに偶数であることを証明せよ。（ただし, 0 は偶数に含める。）

(2)　0 以上の整数 n に対して，方程式(∗)を満たす 0 以上の整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2004]

11　$\dfrac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す。すなわち小数第 k 位の数を a_k とする。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ を求めよ。　[2003]

12　p は 3 以上の素数であり, x, y は $0\leqq x\leqq p$, $0\leqq y\leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x=y$ であることを示せ。　[2003]

13　数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n$ $(n\geqq 1)$を満たすとき，一般項a_nを求めよ。　[2002]

14　$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式$f(x)=0$の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。　[2002]

15　4 個の整数 1，a，b，c は$1<a<b<c$を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$から$b+c$までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。　[2002]

16　任意の整数nに対し，n^9-n^3は 9 で割り切れることを示せ。　[2001]

17　n を 2 以上の整数とする。実数a_1，a_2，…，a_nに対し，$S=a_1+a_2+\cdots+a_n$とおく。$k=1$，2，…，nについて，不等式$-1<S-a_k<1$が成り立っているとする。

$a_1\leqq a_2\leqq\cdots\leqq a_n$のとき，すべての$k$について$|a_k|<2$が成り立つことを示せ。

[2001]

18　実数x_1，…，x_n $(n\geqq 3)$が条件$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ $(2\leqq k\leqq n-1)$を満たすとし，x_1，…，x_nの最小値を m とする。このとき，$x_l=m$となる $l(1\leqq l\leqq n)$の個数は 1 または 2 であることを示せ。　[2000]

19　0 以上の整数 x に対して，$C(x)$で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば，$C(12578)=78$，$C(6)=6$である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

(1)　x, y が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ならば，$C(x)=C(y)$であることを示せ。

(2)　$C(nx)=1$となる 0 以上の整数xが存在することを示せ。　[1999]

■ 確率

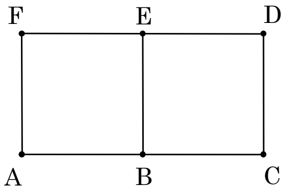
1　n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。　[2017]

2　ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある。「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする。この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である。1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，この装置のボタンを最低何回押せばよいか。必要なら $0.3010<\log_{10}2<0.3011$ を用いてよい。　[2016]

3　6 個の点 A, B, C, D, E, F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする。各線分をそれぞれ独立に確率 $\dfrac{1}{2}$ で赤または黒で塗る。赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする。そのような経路がない場合は X を 0 とする。このとき，$n=0,\ 2,\ 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ。　[2015]



4　投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1)　石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2)　石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ。　[2013]

5　n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする。$X_1<X_2<X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする。　[2012]

6 箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を Y とする。$X=Y$ である確率を求めよ。

[2011]

7 1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる。どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする。このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ。ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく一度ずつ用いるものとする。 [2010]

8 白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える。取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする。最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ。ただし $n \geqq 2$ とする。 [2009]

9 正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする。F 上の点 P に対して，始点と終点がともに P であるような，図形 F の一筆がきの経路の数を $N(\mathrm{P})$ で表す。正 n 角形の頂点をひとつとって A とし，$a=N(\mathrm{A})$ とおく。また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし，$b=N(\mathrm{B})$ とおく。このとき a と b を求めよ。

注：一筆がきとは，図形を，かき始めから終わりまで，筆を紙からはなさず，また同じ線上を通らずにかくことである。 [2008]

10 四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり，1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに，等しい確率で移動する。

このとき，n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。 [2007]

11　1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。　[2005]

12　4 チームがリーグ戦を行う。すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて $\frac{1}{2}$ で，各回の勝敗は独立に決まるものとする。勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする。1 位のチーム数の期待値を求めよ。　[2003]

13　n, k は自然数で，$n \geqq 3$, $k \geqq 2$ を満たすものとする。いま，n 角柱の $n+2$ 個の面に 1 から $n+2$ までの番号が書いてあるものとする。この $n+2$ 個の面に 1 面ずつ，異なる k 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく。このとき，どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方の数を P_k で表す。

(1)　P_2 と P_3 を求めよ。

(2)　$n=7$ のとき，P_4 を求めよ。　[1999]

14　袋の中に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている。各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1，2，3 の番号がついている。これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す。取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　得点が n となるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき，$A(0)$，$A(1)$，$A(2)$，$A(3)$ を求めよ。

(2)　得点の期待値を求めよ。　[1998]

■ 論証

1　a, b, c, d, e を正の有理数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。　[2015]

2　次の命題(p), (q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが$60°$である三角形を作ることができるならば, n は3の倍数である。

(q)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と$\triangle\mathrm{A'B'C'}$において，$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ならば，これら$2$つの三角形は合同である。　[2012]

3　n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題p：あるnに対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題q：すべてのnに対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。　[2007]

4　$Q(x)$を 2 次式とする。整式$P(x)$は$Q(x)$では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$は$Q(x)$で割り切れるという。このとき 2 次方程式$Q(x)=0$は重解をもつことを示せ。

[2006]

5　n, kは自然数で, $k\leqq n$とする。穴のあいた$2k$個の白玉と$2n-2k$個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分け，どちらの組も白玉k個，黒玉$n-k$個からなるようにできることを示せ。　[2006]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率／論　証

問　題

実数を係数とする 3 次式 $f(x)=x^3+ax^2+bx+c$ に対し，次の条件を考える。

(イ)　方程式 $f(x)=0$ の解であるすべての複素数 α に対し，α^3 もまた $f(x)=0$ の解である。

(ロ)　方程式 $f(x)=0$ は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

この 2 つの条件(イ), (ロ)を同時に満たす 3 次式をすべて求めよ。 [2016]

解答例

実数係数の 3 次方程式 $f(x)=0$ の虚数解を γ とすると，その共役複素数 $\overline{\gamma}$ も解となる。そして，もう 1 つの解を β とおくと，解と係数の関係より，

$$\beta+\gamma+\overline{\gamma}=-a,\ \beta=-a-(\gamma+\overline{\gamma})$$

よって，β は実数となり，$f(x)=0$ は実数解 β，虚数解 γ，$\overline{\gamma}$ をもつ。

さて，条件から，β^3，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ も $f(x)=0$ の解であり，$\beta^3\neq\beta$ とすると，$\beta^3\neq\gamma$，$\beta^3\neq\overline{\gamma}$ から，$f(x)=0$ の解が少なくとも 4 個存在することになり不適である。

よって，$\beta^3=\beta$ $(\beta=0,\ \pm1)$ である。また，γ は虚数より $\gamma^3\neq\gamma$ である。

(i)　$\beta=0$ のとき　$f(x)=0$ の解は $0,\ \gamma,\ \overline{\gamma},\ \gamma^3,\ (\overline{\gamma})^3$ となり，

(i-i)　$\gamma^3=0$ のとき　$\gamma=0$ となり不適である。

(i-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=\gamma$ となる。

そこで，p, q を実数として $\gamma=p+qi$ $(q\neq0)$ とおくと，

$$(p+qi)^3=p-qi,\ (p^3-3pq^2)+(3p^2q-q^3)i=p-qi$$

これより，$p^3-3pq^2=p$ ……①，$3p^2q-q^3=-q$ ……②

①より $p=0$ または $p^2-3q^2=1$，②より $3p^2-q^2=-1$ ……②$'$ となる。

(a)　$p=0$ のとき　②$'$ から $q^2=1$ となり $q=\pm1$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=0,\ \pm i$ であり，

$$f(x)=x(x+i)(x-i)=x(x^2+1)=x^3+x$$

(b)　$p^2-3q^2=1$ のとき　②$'$ から $3(3q^2+1)-q^2=-1$，$8q^2+4=0$ で不適。

(ii)　$\beta=1$ のとき　$f(x)=0$ の解は $1,\ \gamma,\ \overline{\gamma},\ \gamma^3,\ (\overline{\gamma})^3$ となり，

(ii-i)　$\gamma^3=1$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=1$ となる。

すると，$(\gamma-1)(\gamma^2+\gamma+1)=0$ となり，$\gamma\neq1$ から $\gamma=\dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=1,\ \dfrac{-1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，

$$f(x)=(x-1)\Big(x-\frac{-1+\sqrt{3}i}{2}\Big)\Big(x-\frac{-1-\sqrt{3}i}{2}\Big)=(x-1)(x^2+x+1)=x^3-1$$

(ii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$ の解は $x=1$, $\pm i$ であり，

$$f(x)=(x-1)(x+i)(x-i)=(x-1)(x^2+1)=x^3-x^2+x-1$$

(iii)　$\beta=-1$ のとき　$f(x)=0$ の解は -1，γ，$\overline{\gamma}$，γ^3，$(\overline{\gamma})^3$ となり，

(iii-i)　$\gamma^3=-1$ のとき　両辺に共役複素数をとると $(\overline{\gamma})^3=-1$ となる。

すると，$(\gamma+1)(\gamma^2-\gamma+1)=0$ となり，$\gamma\neq-1$ から $\gamma=\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$

このとき，$f(x)=0$ の解は $x=-1$, $\dfrac{1\pm\sqrt{3}i}{2}$ であり，

$$f(x)=(x+1)\Big(x-\frac{1+\sqrt{3}i}{2}\Big)\Big(x-\frac{1-\sqrt{3}i}{2}\Big)=(x+1)(x^2-x+1)=x^3+1$$

(iii-ii)　$\gamma^3=\overline{\gamma}$ のとき　(i-ii)と同様にすると，$f(x)=0$ の解は $x=-1$, $\pm i$ であり，

$$f(x)=(x+1)(x+i)(x-i)=(x+1)(x^2+1)=x^3+x^2+x+1$$

(i)〜(iii)より，求める 3 次式は,

$$x^3+x,\ x^3-1,\ x^3+1,\ x^3-x^2+x-1,\ x^3+x^2+x+1$$

コメント

3 次方程式の異なる複素数解は高々3 個ということを利用した解答例です。まず, β^3 に注目し，次に γ^3 に注目して場合分けを行っています。ただ, その論理を丁寧に記述するには, 時間がかなり必要でした。

問　題

$0° \leqq \theta < 90°$ とする。x についての 4 次方程式

$$\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0$$

は虚数解を少なくとも 1 つもつことを示せ。 [2014]

解答例

4 次方程式 $\{x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1\}\{x^2+2(\tan\theta)x+3\}=0\cdots\cdots(*)$に対して，

$$x^2-2(\cos\theta)x-\cos\theta+1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ x^2+2(\tan\theta)x+3=0\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，①，②の判別式をそれぞれ D_1，D_2 とすると，

$$D_1/4=\cos^2\theta+\cos\theta-1,\ \ D_2/4=\tan^2\theta-3$$

さて，①が虚数解をもたない条件は，$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$ であり，

$$\cos^2\theta+\cos\theta-1 \geqq 0\cdots\cdots\cdots③,\ \ \tan^2\theta-3 \geqq 0\cdots\cdots\cdots④$$

条件より $0° \leqq \theta < 90°$ なので，④から $\tan\theta \geqq \sqrt{3}$，すなわち $60° \leqq \theta < 90°$ となり，

$$0 < \cos\theta \leqq \frac{1}{2}\cdots\cdots\cdots⑤$$

また，③より，$\cos\theta > 0$ から，$\cos\theta \geqq \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}\cdots\cdots\cdots⑥$

すると，$\dfrac{1}{2} < \dfrac{-1+\sqrt{5}}{2}$ から，⑤⑥をともに満たす θ は存在せず，$D_1 \geqq 0$ かつ $D_2 \geqq 0$ は成立しない。すなわち，4 次方程式$(*)$は虚数解を少なくとも 1 つもつ。

コメント

解答例は背理法風に記しました。意外なことに，④から θ の範囲が決まります。

問　題

a を 2 以上の実数とし，$f(x)=(x+a)(x+2)$ とする。このとき $f(f(x))>0$ がすべての実数 x に対して成り立つような a の範囲を求めよ。 [2013]

解答例

$a\geqq 2$ において，$f(x)=(x+a)(x+2)$ に対し，$f(f(x))>0$ より，

$$\{f(x)+a\}\{f(x)+2\}>0$$

$-a\leqq -2$ から，$f(x)<-a$ または $-2<f(x)\cdots\cdots(*)$

さて，$(*)$がすべての実数 x に対して成り立つ条件は，$-2<f(x)$ がすべての実数 x に対して成り立つことに等しく，$f(x)$ を変形すると，

$$f(x)=x^2+(a+2)x+2a=\left(x+\frac{a+2}{2}\right)^2-\frac{(a-2)^2}{4}$$

よって，求める条件は，$-\dfrac{(a-2)^2}{4}>-2$ となり，$(a-2)^2<8$ から，

$$2-2\sqrt{2}<a<2+2\sqrt{2}$$

すると，$a\geqq 2$ より，$2\leqq a<2+2\sqrt{2}$

コメント

記載は省きましたが，2 次関数のグラフをもとに考えています。なお，4 次不等式として処理することも可能です。

問　題

実数 x, y が条件 $x^2+xy+y^2=6$ を満たしながら動くとき

$$x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$$

がとりうる値の範囲を求めよ。 [2012]

解答例

条件より，$x^2+xy+y^2=6$ から，$(x+y)^2-xy=6$ ………①

ここで，$u=x+y$，$v=xy$ とおくと，x, y は t の 2 次方程式 $t^2-ut+v=0$ の 2 つの実数解なので,

$$D=u^2-4v\geqq 0 \text{ ………②}$$

さて，①より，$u^2-v=6$，$v=u^2-6$ ………③

②③から，$u^2-4(u^2-6)\geqq 0$，$u^2-8\leqq 0$，$-2\sqrt{2}\leqq u\leqq 2\sqrt{2}$ ………④

ここで，$z=x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y$ とおくと，③から，

$$z=xy(x+y)-(x+y)^2+(x+y)=uv-u^2+u=u(u^2-6)-u^2+u$$
$$=u^3-u^2-5u$$
$$z'=3u^2-2u-5=(3u-5)(u+1)$$

u	$-2\sqrt{2}$	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$	$2\sqrt{2}$
z'		$+$	0	$-$	0	$+$	
z		$\nearrow$	3	$\searrow$	$-\frac{175}{27}$	$\nearrow$	

さらに，$u=\pm\sqrt{2}$ のとき，$z=-8\pm 6\sqrt{2}$（複号同順）となるので，上表から，④における z のとりうる値の範囲は,

$$-8-6\sqrt{2}\leqq x^2y+xy^2-x^2-2xy-y^2+x+y\leqq 3$$

コメント

対称式であることに気付けば，$u=x+y$，$v=xy$ という置き換えにつながります。なお，実数条件を忘れないことがポイントです。

問　題

次の条件(＊)を満たす正の実数の組$(a,\ b)$の範囲を求め，座標平面上に図示せよ。

(＊)　$\cos a\theta=\cos b\theta$ かつ $0<\theta\leqq\pi$ となるθがちょうど１つある。　[2012]

解答例

条件より，$\cos a\theta=\cos b\theta$（$a>0,\ b>0$）に対し，

$$\cos a\theta-\cos b\theta=0\,,\ -2\sin\frac{a+b}{2}\theta\sin\frac{a-b}{2}\theta=0\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f(\theta)=\sin\dfrac{a+b}{2}\theta$，$g(\theta)=\sin\dfrac{a-b}{2}\theta$ とおくと，①から，

$$f(\theta)g(\theta)=0\cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(\theta)$は周期$\dfrac{4\pi}{a+b}$の周期関数である。

また，$g(\theta)$は，$a>b>0$ のとき周期$\dfrac{4\pi}{a-b}$，$b>a>0$ のとき周期$\dfrac{4\pi}{b-a}$の周期関数となり，$a=b>0$ のとき $g(\theta)=0$ である。

これより，②を満たす $0<\theta\leqq\pi$ となるθがちょうど１つある条件は，$a\neq b$ で，

(i)　$a>b>0$ のとき

$\dfrac{4\pi}{a+b}<\dfrac{4\pi}{a-b}$ から，$\pi<\dfrac{4\pi}{a+b}\leqq 2\pi$ かつ $\dfrac{4\pi}{a-b}>2\pi$ となり，

$$a+b<4\,,\ a+b\geqq 2\,,\ a-b<2$$

(ii)　$b>a>0$ のとき

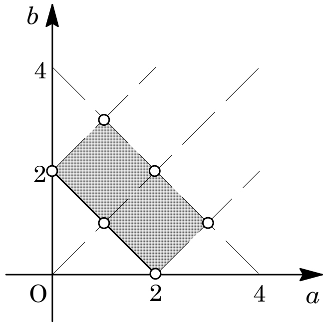
$\dfrac{4\pi}{a+b}<\dfrac{4\pi}{b-a}$ から，$\pi<\dfrac{4\pi}{a+b}\leqq 2\pi$ かつ $\dfrac{4\pi}{b-a}>2\pi$

となり，

$$a+b<4\,,\ a+b\geqq 2\,,\ b-a<2$$

(i)(ii)より，点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面上に図示すると，右図の網点部となる。

ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。また，白丸も含まない。



コメント

上の解には明示していませんが，サインカーブを描きながら考えています。そのため，周期に注目しているわけです。おもしろい問題です。

問　題

x,y は $x\neq 1$，$y\neq 1$ を満たす正の数で，不等式

$$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$$

を満たすとする。このとき x,y の組 $(x,\ y)$ の範囲を座標平面上に図示せよ。

[2009]

解答例

$\log_x y+\log_y x>2+(\log_x 2)(\log_y 2)$　$(x>0,\ x\neq 1,\ y>0,\ y\neq 1)$ より，

$$\log_x y+\frac{1}{\log_x y}>2+(\log_x 2)\cdot\frac{\log_x 2}{\log_x y}$$

(i)　$\log_x y>0$ $(x>1,\ y>1$ または $0<x<1,\ 0<y<1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1>2\log_x y+(\log_x 2)^2$，$(\log_x y-1)^2-(\log_x 2)^2>0$ より，

$$(\log_x y-1-\log_x 2)(\log_x y-1+\log_x 2)>0,\ \log_x\frac{y}{2x}\cdot\log_x\frac{2y}{x}>0$$

(i-i)　$\log_x\dfrac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}>0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

(i-ii)　$\log_x\dfrac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$0<y<2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$y>2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

(ii)　$\log_x y<0$ $(x>1,\ 0<y<1$ または $0<x<1,\ y>1)$ のとき

$(\log_x y)^2+1<2\log_x y+(\log_x 2)^2$ より，$\log_x\dfrac{y}{2x}\cdot\log_x\dfrac{2y}{x}<0$

(ii-i)　$\log_x\dfrac{y}{2x}>0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}<0$ のとき

$x>1$ では，$\dfrac{y}{2x}>1$ かつ $0<\dfrac{2y}{x}<1$ より，$y>2x$，$0<y<\dfrac{1}{2}x$

$0<x<1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

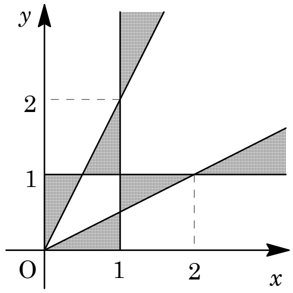
(ii-ii)　$\log_x\dfrac{y}{2x}<0$ かつ $\log_x\dfrac{2y}{x}>0$ のとき

$x>1$ では，$0<\dfrac{y}{2x}<1$ かつ $\dfrac{2y}{x}>1$ より，$0<y<2x$，$y>\dfrac{1}{2}x$

$0 < x < 1$ では，$\dfrac{y}{2x} > 1$ かつ $0 < \dfrac{2y}{x} < 1$ より，

$$y > 2x,\ \ 0 < y < \frac{1}{2}x$$

以上より，$(x,\ y)$ の満たす範囲は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含まない。



コメント

頻出タイプの問題です。丁寧に場合分けをして記述しました。

問　題

定数 a は実数であるとする。方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$を満たす実数 x はいくつあるか。a の値によって分類せよ。　[2008]

解答例

方程式$(x^2+ax+1)(3x^2+ax-3)=0$ ……①に対して,

$$x^2+ax+1=0\ \cdots\cdots\cdots②,\ \ 3x^2+ax-3=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

②より $ax=-x^2-1$, ③より $ax=-3x^2+3$

すると, ①の異なる実数解の個数は, $y=-x^2-1$ ……④, $y=-3x^2+3$ ……⑤の 2 つのグラフと $y=ax$ ……⑥のグラフの共有点の個数に一致する。

さて, ④と⑤の交点は,

$$-x^2-1=-3x^2+3,\ \ x=\pm\sqrt{2}$$

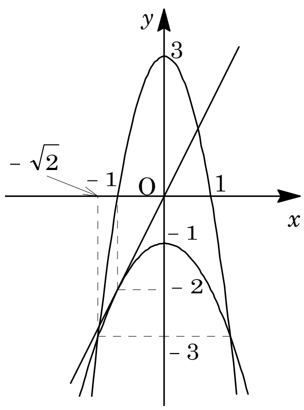
よって, $(-\sqrt{2},\ -3)$, $(\sqrt{2},\ -3)$である。

また, ④と⑥が接するのは, ②が重解をもつときより,

$$D=a^2-4=0,\ \ a=\pm 2$$

このとき, 重解は $x=-\dfrac{a}{2}=\mp 1$ であり, 接点は$(-1,\ -2)$, $(1,\ -2)$となる。

以上より, 方程式①の異なる実数解の個数は, 対称性に注意すると, 右図より, $|a|<2$ のとき 2 個, $|a|=2$ または $|a|=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 3 個, $2<|a|<\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ または $|a|>\dfrac{3}{\sqrt{2}}$ のとき 4 個である。



コメント

②と③の方程式の異なる実数解の個数を, 図を用いて視覚的にとらえています。なお, ③がつねに異なる 2 実数解をもつために, 場合分けだけで攻めても, さほど複雑にはなりません。

問　題

$0 \leqq x < 2\pi$ のとき，方程式 $2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x\cos x = 0$ を満たす x の個数を求めよ。　[2008]

解答例

$2\sqrt{2}(\sin^3 x + \cos^3 x) + 3\sin x\cos x = 0$ ……①に対して，$t = \sin x + \cos x$ とおくと，

$$t^2 = 1 + 2\sin x\cos x\,,\quad \sin x\cos x = \frac{t^2 - 1}{2}$$

$$\sin^3 x + \cos^3 x = (\sin x + \cos x)(1 - \sin x\cos x) = t\left(1 - \frac{t^2 - 1}{2}\right) = -\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t$$

①に代入して，$2\sqrt{2}\left(-\frac{1}{2}t^3 + \frac{3}{2}t\right) + \frac{3}{2}(t^2 - 1) = 0$

$$2\sqrt{2}t^3 - 6\sqrt{2}t - 3t^2 + 3 = 0\,,\quad 4t^3 - 3\sqrt{2}t^2 - 12t + 3\sqrt{2} = 0 \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$0 \leqq x < 2\pi$，$t = \sqrt{2}\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$ より，方程式②を満たす 1 つの解に対して，方程式①を満たす解の個数は，$-\sqrt{2} < t < \sqrt{2}$ のとき 2 個，$t = \pm\sqrt{2}$ のとき 1 個となり，$t < -\sqrt{2}$，$\sqrt{2} < t$ のときはない。

さて，$f(t) = 4t^3 - 3\sqrt{2}t^2 - 12t + 3\sqrt{2}$ とおくと，

$$f'(t) = 12t^2 - 6\sqrt{2}t - 12 = 6(2t + \sqrt{2})(t - \sqrt{2})$$

t	$-\sqrt{2}$	$\cdots$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\cdots$	$\sqrt{2}$
$f'(t)$		＋	0	－	0
$f(t)$	$\sqrt{2}$	↗		↘	$-7\sqrt{2}$

すると，$-\sqrt{2} \leqq t \leqq \sqrt{2}$ における $f(t)$ の増減は右表のようになり，$f(t) = 0$ すなわち方程式②は $-\frac{\sqrt{2}}{2} < t < \sqrt{2}$ に解を 1 つだけもつ。

よって，方程式①を満たす x は 2 個存在する。

コメント

有名な三角方程式の解の個数についての問題です。t と x の個数の対応に注意が必要です。

問　題

放物線$C: y=x^2$と 2 直線$l_1: y=px-1$，$l_2: y=-x-p+4$は 1 点で交わるという。このとき，実数pの値を求めよ。 [2006]

解答例

$C: y=x^2$……①，$l_1: y=px-1$……②，$l_2: y=-x-p+4$……③に対して，②と③の交点は，

$$px-1=-x-p+4,\ (p+1)x=-p+5$$

$p=-1$では成立しないので，$p\neq-1$より，$x=\dfrac{-p+5}{p+1}$

$$y=p\cdot\frac{-p+5}{p+1}-1=\frac{-p^2+4p-1}{p+1}$$

②と③の交点が①上にあることより，

$$\frac{-p^2+4p-1}{p+1}=\left(\frac{-p+5}{p+1}\right)^2,\ (p+1)(-p^2+4p-1)=(-p+5)^2$$

まとめると，$p^3-2p^2-13p+26=0$，$(p-2)(p^2-13)=0$

よって，$p=2,\ \pm\sqrt{13}$

コメント

何か裏があるのではないか，たとえば「交わる」というのは「接する」場合を含まないという意味なのだろうか，などと勘ぐりたくなるほどの問題です。

問　題

xy 平面上の原点と点$(1,\ 2)$を結ぶ線分（両端を含む）を L とする。曲線 $y=x^2+ax+b$ が L と共有点をもつような実数の組$(a,\ b)$の集合を ab 平面上に図示せよ。 [2005]

解答例

原点と点$(1,\ 2)$を結ぶ線分 L は，$y=2x\ (0\leqq x\leqq 1)$………①

①と曲線 $y=x^2+ax+b$ ……②の共有点は,

$$x^2+ax+b=2x\,,\ \ x^2+(a-2)x+b=0\ \cdots\cdots\cdots③$$

すると，①②が共有点をもつ条件は，③が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの実数解をもつことであり，さらに $f(x)=x^2+(a-2)x+b$ ……④とおくと，この条件は，放物線 $y=f(x)$ と x 軸が $0\leqq x\leqq 1$ に少なくとも 1 つの共有点をもつことと言い換えることができる。

④より，$f(x)=\left(x+\dfrac{a-2}{2}\right)^2-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b$ となり，放物線の軸の位置で場合分けをして，$(a,\ b)$の条件を求めると,

(i)　$-\dfrac{a-2}{2}<0\ (a>2)$ のとき

$f(0)=b\leqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\geqq 0$ より，$-a+1\leqq b\leqq 0$

(ii)　$0\leqq -\dfrac{a-2}{2}\leqq 1\ (0\leqq a\leqq 2)$ のとき

$-\dfrac{1}{4}(a-2)^2+b\leqq 0$　かつ（$f(0)=b\geqq 0$ または $f(1)=a+b-1\geqq 0$）

よって，$b\leqq\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ かつ（$b\geqq 0$ または $b\geqq -a+1$）

(iii)　$-\dfrac{a-2}{2}>1\ (a<0)$ のとき

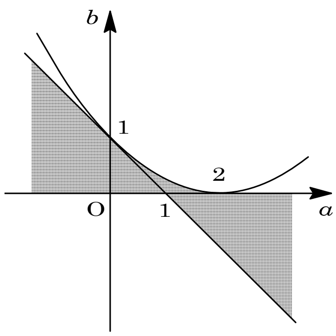
$f(0)=b\geqq 0$ かつ $f(1)=a+b-1\leqq 0$ より,

$$0\leqq b\leqq -a+1$$

さて，$b=\dfrac{1}{4}(a-2)^2$ と $b=-a+1$ の共有点は,

$$\frac{1}{4}(a-2)^2=-a+1\,,\ \ a=0$$

以上より，$(a,\ b)$の存在領域は，右図の網点部である。ただし，境界は領域に含む。



コメント

頻出問題なので，方針はすぐに決まります。ミスをしないように，ていねいに計算を進めていきます。

問　題

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ を満たす自然数 n は何個あるか。ただし $0.301 < \log_{10} 2 < 0.3011$ である。　[2005]

解答例

$2^{10} < \left(\dfrac{5}{4}\right)^n < 2^{20}$ より，$10\log_{10} 2 < n(\log_{10} 5 - \log_{10} 4) < 20\log_{10} 2$

$$10\log_{10} 2 < n(1 - 3\log_{10} 2) < 20\log_{10} 2$$

$1 - 3\log_{10} 2 > 0$ より，

$$\frac{10\log_{10} 2}{1 - 3\log_{10} 2} < n < \frac{20\log_{10} 2}{1 - 3\log_{10} 2} \cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f(x) = \dfrac{x}{1 - 3x}$，$a = \log_{10} 2$ とおくと，①より，

$$10f(a) < n < 20f(a) \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$f(x) = -\dfrac{1}{3} + \dfrac{1}{3(1 - 3x)}$ と変形し，条件から $0.301 < a < 0.3011$ なので，

$$-\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1 - 0.903)} < f(a) < -\frac{1}{3} + \frac{1}{3(1 - 0.9033)}$$

これより，$3.103 < f(a) < 3.114$ となり，

$$31.03 < 10f(a) < 31.14,\ \ 62.06 < 20f(a) < 62.28$$

②より, n は自然数なので, $32 \leqq n \leqq 62$ となり, n の個数は 31 である。

コメント

数値計算が面倒そうなので，後回しにしたくなる問題です。しかし，その予想は，はずれてしまいました。

問　題

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta$ とする。$0°\leqq\theta\leqq 90°$ における $f(\theta)$ の最大値および最小値を求めよ。 [2004]

解答例

$f(\theta)=\cos 4\theta-4\sin^2\theta=2\cos^2 2\theta-1-4\cdot\dfrac{1-\cos 2\theta}{2}=2\cos^2 2\theta+2\cos 2\theta-3$ より，

$$f(\theta)=2\Big(\cos 2\theta+\frac{1}{2}\Big)^2-\frac{7}{2}$$

$0°\leqq\theta\leqq 90°$ から，$-1\leqq\cos 2\theta\leqq 1$ となる。

よって，$f(\theta)$ は $\cos 2\theta=-\dfrac{1}{2}$ $(\theta=60°)$ のとき最小値 $-\dfrac{7}{2}$ をとる。また $\cos 2\theta=1$ $(\theta=0°)$ のとき最大値 1 をとる。

コメント

理系の類題では微分法を利用しましたが，文系では平方完成を用いる解法になります。

問　題

$0 \leqq \theta < 360$ とし，a は定数とする。$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos\theta^\circ - 1 = a$ を満たす θ の値はいくつあるか。a の値によって分類せよ。　[2002]

解答例

$\cos 3\theta^\circ - \cos 2\theta^\circ + 3\cos\theta^\circ - 1 = a$ ……①に対して，$t = \cos\theta^\circ$ ……②とおくと，$\cos 3\theta^\circ = 4\cos^3\theta^\circ - 3\cos\theta^\circ = 4t^3 - 3t$，$\cos 2\theta^\circ = 2\cos^2\theta^\circ - 1 = 2t^2 - 1$ より，

$$4t^3 - 3t - (2t^2 - 1) + 3t - 1 = a,\quad 4t^3 - 2t^2 = a \cdots\cdots③$$

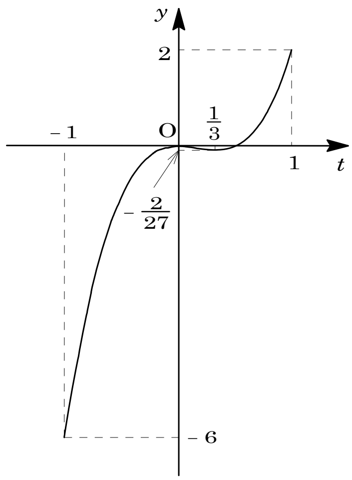
ここで，$f(t) = 4t^3 - 2t^2$ とすると，

$$f'(t) = 12t^2 - 4t = 4t(3t-1)$$

t	-1	$\cdots$	0	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$	1
$f'(t)$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(t)$	-6	$\nearrow$	0	$\searrow$	$-\frac{2}{27}$	$\nearrow$	2

すると，③は $f(t) = a$ となり，この解は $y = f(t)$ のグラフと $y = a$ の共有点の t 座標となる。

さて，$0 \leqq \theta < 360$ なので，②より，③の解が $t = 1$ または $t = -1$ のとき，t の値 1 個に対して①の解 θ は 1 個対応する。また，③の解が $-1 < t < 1$ のとき，t の値 1 個に対して①の解 θ は 2 個対応する。



したがって，右図より，

$a < -6$，$2 < a$ のとき θ の値は 0 個

$a = -6$，$a = 2$ のとき θ の値は 1 個

$-6 < a < -\frac{2}{27}$，$0 < a < 2$ のとき θ の値は 2 個

$a = -\frac{2}{27}$，$a = 0$ のとき θ の値は 4 個

$-\frac{2}{27} < a < 0$ のとき θ の値は 6 個

コメント

三角方程式の解の個数を求める頻出問題です。

問　題

$a,\ b$ は実数で $a \neq b$，$ab \neq 0$ とする。このとき不等式

$$\frac{x-b}{x+a}-\frac{x-a}{x+b}>\frac{x+a}{x-b}-\frac{x+b}{x-a}$$

を満たす実数 x の範囲を求めよ。 [1998]

解答例

条件より，$\dfrac{x-b}{x+a}+\dfrac{x+b}{x-a}>\dfrac{x-a}{x+b}+\dfrac{x+a}{x-b}$

$$1-\frac{a+b}{x+a}+1+\frac{a+b}{x-a}>1-\frac{a+b}{x+b}+1+\frac{a+b}{x-b}$$

$$-\frac{a+b}{x+a}+\frac{a+b}{x-a}>-\frac{a+b}{x+b}+\frac{a+b}{x-b}\cdots\cdots\cdots\cdots ①$$

(i)　$a+b>0$ のとき

$-\dfrac{1}{x+a}+\dfrac{1}{x-a}>-\dfrac{1}{x+b}+\dfrac{1}{x-b}$ より，$\dfrac{a}{(x+a)(x-a)}>\dfrac{b}{(x+b)(x-b)}$

両辺 $\times(x+a)^2(x-a)^2(x+b)^2(x-b)^2$

$$a(x+a)(x-a)(x+b)^2(x-b)^2>b(x+a)^2(x-a)^2(x+b)(x-b)$$

$$(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)\left\{a(x^2-b^2)-b(x^2-a^2)\right\}>0$$

$$(a-b)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x^2+ab)>0\cdots\cdots\cdots\cdots ②$$

(i-i)　$0<b<a$ のとき

$-a<-b<0<b<a$ となり，$x^2+ab>0$ より，②の解は，

$x<-a$，$-b<x<b$，$a<x$

(i-ii)　$b<0<a$ のとき

$-a<b<0<-b<a$ となり，$-b<a$ から $(-b)^2<a\cdot(-b)<a^2$

よって，$-b<\sqrt{-ab}<a$，また $-a<-\sqrt{-ab}<b$ なので，

$-a<-\sqrt{-ab}<b<0<-b<\sqrt{-ab}<a$ となり，②の解は，

$x<-a$，$-\sqrt{-ab}<x<b$，$-b<x<\sqrt{-ab}$，$a<x$

(i-iii)　$0<a<b$ のとき

(i-i)と同様にして，$-b<-a<0<a<b$ となり，②の解は，

$-b<x<-a$，$a<x<b$

(i-iv)　$a<0<b$ のとき

(i-ii)と同様にして，$-b<-\sqrt{-ab}<a<0<-a<\sqrt{-ab}<b$ となり，②の解は，

$-b<x<-\sqrt{-ab}$，$a<x<-a$，$\sqrt{-ab}<x<b$

(ii)　$a+b=0$ のとき

①の両辺がともに 0 より，解なし。

(iii)　$a+b<0$ のとき

(i)と同様にして,

$$(a-b)(x+a)(x-a)(x+b)(x-b)(x^2+ab)<0 \cdots\cdots\cdots\cdots ③$$

(iii-i)　$b<a<0$ のとき

$b<a<0<-a<-b$ となり, ③の解は,

$b<x<a$, $-a<x<-b$

(iii-ii)　$b<0<a$ のとき

$b<-\sqrt{-ab}<-a<0<a<\sqrt{-ab}<-b$ となり, ③の解は,

$b<x<-\sqrt{-ab}$, $-a<x<a$, $\sqrt{-ab}<x<-b$

(iii-iii) $a<b<0$ のとき

$a<b<0<-b<-a$ となり, ③の解は,

$x<a$, $b<x<-b$, $-a<x$

(iii-iv) $a<0<b$ のとき

$a<-\sqrt{-ab}<-b<0<b<\sqrt{-ab}<-a$ となり, ③の解は,

$x<a$, $-\sqrt{-ab}<x<-b$, $b<x<\sqrt{-ab}$, $-a<x$

以上まとめると,

(i-i)と(iii-iii)から, $ab>0$, $|a|>|b|$ のとき

$x<-|a|$, $-|b|<x<|b|$, $|a|<x$

(i-ii)と(iii-iv)から, $ab<0$, $|a|>|b|$ のとき

$x<-|a|$, $-\sqrt{-ab}<x<-|b|$, $|b|<x<\sqrt{-ab}$, $|a|<x$

(i-iii)と(iii-i)から, $ab>0$, $|a|<|b|$ のとき

$-|b|<x<-|a|$, $|a|<x<|b|$

(i-iv)と(iii-ii)から, $ab<0$, $|a|<|b|$ のとき

$-|b|<x<-\sqrt{-ab}$, $-|a|<x<|a|$, $\sqrt{-ab}<x<|b|$

(ii)から, $a=-b$ のとき

解なし

コメント

どのようにみても, 数学Ⅲの範囲の問題です。現行課程の標準的カリキュラムの拡充を意図した出題かも知れません。このように指定された入試科目の範囲外と考えられる問題が, 昨年度も確率などで少々出ましたが, 本年度は非常によく目につくようになりました。受験生の立場からすると, ありがたくない規制緩和ですが。

問　題

曲線 $y=x^3-4x+1$ を C とする。直線 l は C の接線であり，点 $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通るものとする。また，l の傾きは負であるとする。このとき，C と l で囲まれた部分の面積 S を求めよ。 [2017]

解答例

曲線 $C: y=x^3-4x+1$ ……①に対して $y'=3x^2-4$ となるので，点 $(t,\ t^3-4t+1)$ における接線 l の方程式は,

$$y-(t^3-4t+1)=(3t^2-4)(x-t),\quad y=(3t^2-4)x-2t^3+1 \cdots\cdots\cdots ②$$

②が $\mathrm{P}(3,\ 0)$ を通ることより，$0=3(3t^2-4)-2t^3+1$

$$2t^3-9t^2+11=0,\quad (t+1)(2t^2-11t+11)=0$$

これより，$t=-1,\ \dfrac{11\pm\sqrt{33}}{4}$ となる。

さて，l の傾きは負なので，$3t^2-4<0$ すなわち $-\dfrac{2}{3}\sqrt{3}<t<\dfrac{2}{3}\sqrt{3}$ ……③となり，

$$-\frac{2}{3}\sqrt{3}<-1,\quad \frac{11+\sqrt{33}}{4}>\frac{11-\sqrt{33}}{4}>\frac{11-6}{4}=1.25>1.2=\frac{2}{3}\times1.8>\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

よって，③を満たす t は，$t=-1$ だけであり，このとき②から,

$$l: y=-x+3 \cdots\cdots\cdots ④$$

そこで，①④を連立すると，$x^3-4x+1=-x+3$ となり,

$$x^3-3x-2=0,\quad (x+1)^2(x-2)=0$$

すると，$x=-1,\ 2$ となり，$-1\leqq x\leqq 2$ において C と l の上下関係は変わらないので，C と l で囲まれた部分の面積 S は,

$$\begin{aligned}S&=\left|\int_{-1}^{2}\{(x^3-4x+1)-(-x+3)\}dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x-2)dx\right|\\&=\left|\int_{-1}^{2}(x+1)^2(x+1-3)dx\right|=\left|\int_{-1}^{2}\{(x+1)^3-3(x+1)^2\}dx\right|\\&=\left|\Big[\frac{1}{4}(x+1)^4-(x+1)^3\Big]_{-1}^{2}\right|=\left|\frac{1}{4}\cdot3^4-3^3\right|=\frac{27}{4}\end{aligned}$$

コメント

3 次曲線と接線に囲まれた部分の面積を求める超頻出問題です。計算が面倒なのは，t の値を絞り込む箇所ぐらいです。

問　題

xy 平面内の領域 $x^2+y^2\leqq 2$, $|x|\leqq 1$ で, 曲線 $C: y=x^3+x^2-x$ の上側にある部分の面積を求めよ。 [2016]

解答例

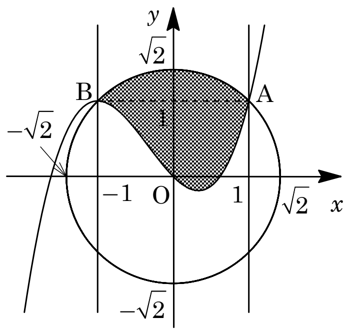
曲線 $C: y=x^3+x^2-x$ に対して,

$$y'=3x^2+2x-1=(3x-1)(x+1)$$

これより, 増減は右表のようになる。

x	$\cdots$	-1	$\cdots$	$\frac{1}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	1	$\searrow$	$-\frac{5}{27}$	$\nearrow$

さて, 領域 $x^2+y^2\leqq 2$, $|x|\leqq 1$ で, 曲線 C の上側にある部分は, 右図の網点部となる。



ここで, $\mathrm{A}(1,\ 1)$, $\mathrm{B}(-1,\ 1)$ とおき, 網点部の領域について, 線分 AB より上側の面積を S_1, 下側の面積を S_2 とおくと, $\angle\mathrm{AOB}=90^\circ$ から,

$$S_1=\frac{1}{4}\pi(\sqrt{2})^2-\frac{1}{2}(\sqrt{2})^2=\frac{\pi}{2}-1$$

$$S_2=\int_{-1}^{1}\{1-(x^3+x^2-x)\}dx$$

$$=2\int_0^1(-x^2+1)dx=2\left(-\frac{1}{3}+1\right)=\frac{4}{3}$$

よって, 網点部の領域の面積 S は,

$$S=S_1+S_2=\frac{\pi}{2}-1+\frac{4}{3}=\frac{\pi}{2}+\frac{1}{3}$$

コメント

微積分の基本問題です。計算も簡単です。

問　題

t を実数とする。$y=x^3-x$ のグラフ C へ点 $\mathrm{P}(1,\ t)$ から接線を引く。

(1) 接線がちょうど 1 本だけ引けるような t の範囲を求めよ。

(2) t が(1)で求めた範囲を動くとき，$\mathrm{P}(1,\ t)$ から C へ引いた接線と C で囲まれた部分の面積を $S(t)$ とする。$S(t)$ のとりうる値の範囲を求めよ。　[2014]

解答例

(1) $C : y=x^3-x$ ……①に対して $y'=3x^2-1$ となり，点 $(s,\ s^3-s)$ における接線は，

$$y-(s^3-s)=(3s^2-1)(x-s),\quad y=(3s^2-1)x-2s^3 \text{ ………②}$$

接線②が $\mathrm{P}(1,\ t)$ を通ることより，$t=3s^2-1-2s^3$ ………③

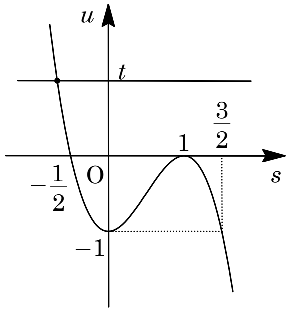
ここで，$f(s)=3s^2-1-2s^3$ とおくと，

$$f'(s)=6s-6s^2=-6s(s-1)$$

これより $f(s)$ の増減は右表のようになる。

s	$\cdots$	0	$\cdots$	1	$\cdots$
$f'(s)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$f(s)$	↘	-1	↗	0	↘

さて，接線がちょうど 1 本だけ引ける条件は，③を満たす実数解 s が 1 つだけ存在する条件に対応する。言い換えると，$u=f(s)$ と $u=t$ のグラフが共有点を 1 つだけもつことより，右図から，



$$t<-1,\ 0<t \text{ ………④}$$

(2) ①②を連立すると，$x^3-x=(3s^2-1)x-2s^3$ から，

$$x^3-3s^2x+2s^3=0,\ (x-s)^2(x+2s)=0$$

これより，$x=s,\ -2s$ となる。この共有点間で，曲線①と接線②について上下の位置関係は変わらないので，囲まれた部分の面積 $S(t)$ は，

$$S(t)=\left|\int_s^{-2s}-(x-s)^2(x+2s)\,dx\right|=\left|\int_s^{-2s}(x-s)^2(x-s+3s)\,dx\right|$$

$$=\left|\int_s^{-2s}\{(x-s)^3+3s(x-s)^2\}\,dx\right|=\left|\Big[\frac{1}{4}(x-s)^4+s(x-s)^3\Big]_s^{-2s}\right|$$

$$=\left|\frac{81}{4}s^4-27s^4\right|=\frac{27}{4}s^4$$

ここで，④のとき，右上のグラフより，$s<-\dfrac{1}{2}$ または $s>\dfrac{3}{2}$ となるので，

$$S(t)>\frac{27}{4}\cdot\left|-\frac{1}{2}\right|^4=\frac{27}{64}$$

コメント

募集要項に記された微積分の拡張領域からの出題です。2015 年度からは，数学Ⅱの頻出タイプとなるでしょう。

問　題

α，β を実数とする。xy 平面内で，点 $(0,\ 3)$ を中心とする円 C と放物線

$$y=-\frac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$$

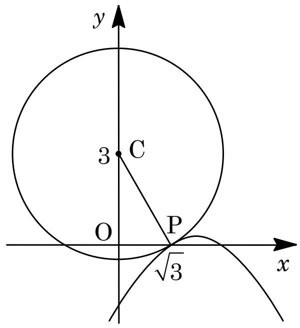
が点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を共有し，さらに P における接線が一致している。このとき以下の問いに答えよ。

(1)　α，β の値を求めよ。

(2)　円 C，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ および y 軸で囲まれた部分の面積を求めよ。

[2013]

解答例



(1)　円 C の中心 $\mathrm{C}(0,\ 3)$ と $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$ を結ぶ線分の傾きは，$\dfrac{-3}{\sqrt{3}}=-\sqrt{3}$ より，点 P における円 C の接線の傾きは $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ である。

ここで，放物線 $y=-\dfrac{x^2}{3}+\alpha x-\beta$ ……①に対して，

$$y'=-\frac{2}{3}x+\alpha$$

条件より，放物線①は点 P を通り，P における接線の傾きが $\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ であるので，

$$0=-1+\sqrt{3}\alpha-\beta\ \cdots\cdots\text{②},\quad \frac{1}{\sqrt{3}}=-\frac{2}{3}\sqrt{3}+\alpha\ \cdots\cdots\text{③}$$

③より，$\alpha=\sqrt{3}$ となり，②に代入すると，$\beta=2$ である。

(2)　(1)より，放物線①は $y=-\dfrac{x^2}{3}+\sqrt{3}x-2$，直線 CP は $y=-\sqrt{3}x+3$ である。

また，$\angle\mathrm{OCP}=\dfrac{\pi}{6}$ より，円 C，放物線①および y 軸で囲まれた部分の面積 S は，

$$S=\int_0^{\sqrt{3}}\left(-\sqrt{3}x+3+\frac{x^2}{3}-\sqrt{3}x+2\right)dx-\frac{1}{2}(2\sqrt{3})^2\cdot\frac{\pi}{6}$$

$$=\int_0^{\sqrt{3}}\left(\frac{x^2}{3}-2\sqrt{3}x+5\right)dx-\pi=\left[\frac{x^3}{9}-\sqrt{3}x^2+5x\right]_0^{\sqrt{3}}-\pi=\frac{7}{3}\sqrt{3}-\pi$$

コメント

円と放物線についての基本的な計算問題です。積分計算もややこしくありません。

問　題

2 つの曲線 $y=x^4$ と $y=x^2+2$ とによって囲まれる図形の面積を求めよ。

[2012]

解答例

曲線 $y=x^4\cdots\cdots①$，$y=x^2+2\cdots\cdots②$の交点は，

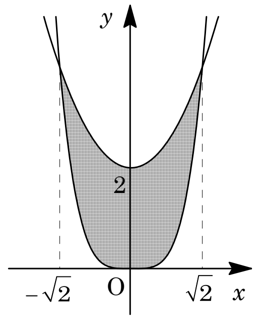
$$x^4-x^2-2=0,\ (x^2-2)(x^2+1)=0$$

よって，$x=\pm\sqrt{2}$ となる。

曲線①と②によって囲まれる図形は，y 軸対称なので，その面積を S とすると，

$$S=2\int_0^{\sqrt{2}}(x^2+2-x^4)\,dx=2\Big[\frac{x^3}{3}+2x-\frac{x^5}{5}\Big]_0^{\sqrt{2}}$$

$$=2\Big(\frac{2}{3}\sqrt{2}+2\sqrt{2}-\frac{4}{5}\sqrt{2}\Big)=\frac{56}{15}\sqrt{2}$$



コメント

基本的な積分計算です。

問　題

実数 a が変化するとき，3 次関数 $y=x^3-4x^2+6x$ と直線 $y=x+a$ のグラフの交点の個数はどのように変化するか。a の値によって分類せよ。 [2011]

解答例

曲線 $y=x^3-4x^2+6x$ ……①と直線 $y=x+a$ ……②の式を連立して，

$$x^3-4x^2+6x=x+a,\ x^3-4x^2+5x=a \cdots\cdots\cdots③$$

すると，①②の共有点の個数は，③の異なる実数解の個数に一致する。

さらに，③を，$y=x^3-4x^2+5x$ ……④と $y=a$ ……⑤を連立した式とみると，③の異なる実数解の個数は，曲線④と直線⑤の共有点の個数に一致する。

④より，$y'=3x^2-8x+5=(3x-5)(x-1)$

これより，曲線④の増減は右表のようになり，曲線④と x 軸に平行な直線⑤の共有点の個数，すなわち曲線①と直線②の共有点の個数は以下のようになる。

x	$\cdots$	1	$\cdots$	$\frac{5}{3}$	$\cdots$
y'	$+$	0	$-$	0	$+$
y	$\nearrow$	2	$\searrow$	$\frac{50}{27}$	$\nearrow$

(i)　$a<\dfrac{50}{27}$，$2<a$ のとき　共有点は 1 個

(ii)　$a=\dfrac{50}{27}$，$a=2$ のとき　共有点は 2 個

(iii)　$\dfrac{50}{27}<a<2$ のとき　共有点は 3 個

コメント

問題文が「交点」の個数ですが，接点も交点として数えています。

問　題

xy 平面上で，連立不等式 $|x|\leqq 2$，$y\geqq x$，$y\leqq\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2$ を満たす領域の面積を求めよ。 [2011]

解答例

与えられた不等式 $|x|\leqq 2$ ……①，$y\geqq x$ ……②，$y\leqq\left|\frac{3}{4}x^2-3\right|-2$ ……③に対して，

①より，$-2\leqq x\leqq 2$

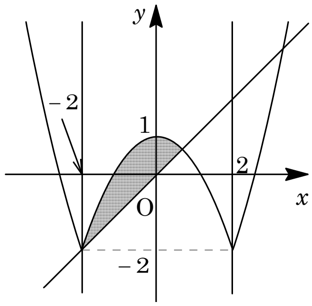
③は，$y\leqq\frac{3}{4}|x^2-4|-2$ となり，その領域の境界線 $y=\frac{3}{4}|x^2-4|-2$ は，

(i)　$x\leqq -2$，$2\leqq x$ のとき

$$y=\frac{3}{4}(x^2-4)-2=\frac{3}{4}x^2-5$$

(ii)　$-2\leqq x\leqq 2$ のとき

$$y=-\frac{3}{4}(x^2-4)-2=-\frac{3}{4}x^2+1$$



以上より，連立不等式①②③を満たす領域は右図の網点部となる。

さて，$-2\leqq x\leqq 2$ において，②の領域の境界線 $y=x$ と③の境界線 $y=-\frac{3}{4}x^2+1$ を連立すると，

$$x=-\frac{3}{4}x^2+1,\ 3x^2+4x-4=0,\ (x+2)(3x-2)=0$$

よって，$x=-2,\ \frac{2}{3}$ となり，網点部の面積 S は，

$$S=\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(-\frac{3}{4}x^2+1-x\right)dx=-\frac{3}{4}\int_{-2}^{\frac{2}{3}}\left(x-\frac{2}{3}\right)(x+2)\,dx$$

$$=-\frac{3}{4}\left(-\frac{1}{6}\right)\left(\frac{2}{3}+2\right)^3=\frac{64}{27}$$

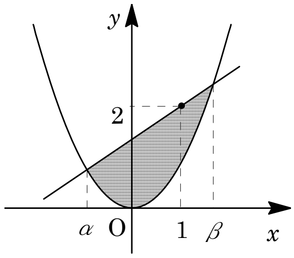
コメント

一見，難しそうな連立不等式ですが，見掛け倒しでした。

問　題

座標平面上で，点$(1,\ 2)$を通り傾きaの直線と放物線$y=x^2$によって囲まれる部分の面積を$S(a)$とする。a が $0\leqq a\leqq 6$ の範囲を変化するとき，$S(a)$を最小にするようなaの値を求めよ。　　[2010]

解答例



点$(1,\ 2)$を通る傾き a の直線は，$y-2=a(x-1)$と表せ，放物線$y=x^2$の方程式と連立すると，

$$x^2-2=a(x-1)\ ,\ \ x^2-ax+a-2=0$$

これより，交点の x 座標は$x=\dfrac{a\pm\sqrt{a^2-4a+8}}{2}$となり，この値を$x=\alpha,\ \beta\ (\alpha<\beta)$とおく。

すると，放物線と直線によって囲まれる部分の面積$S(a)$は，

$$S(a)=\int_\alpha^\beta(ax-a+2-x^2)\,dx=-\int_\alpha^\beta(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$$

$$=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{a^2-4a+8}\right)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{(a-2)^2+4}\right)^3$$

よって，aが$0\leqq a\leqq 6$の範囲を変化するとき，$S(a)$は$a=2$のとき最小となる。

コメント

参考書の例題に載っているような定型的な頻出題です。

問　題

座標空間内で，$O(0,\ 0,\ 0)$，$A(1,\ 0,\ 0)$，$B(1,\ 1,\ 0)$，$C(0,\ 1,\ 0)$，$D(0,\ 0,\ 1)$，$E(1,\ 0,\ 1)$，$F(1,\ 1,\ 1)$，$G(0,\ 1,\ 1)$を頂点にもつ立方体を考える。

(1)　頂点Aから対角線OFに下ろした垂線の長さを求めよ。

(2)　この立方体を対角線OFを軸にして回転して得られる回転体の体積を求めよ。

[2010]

解答例

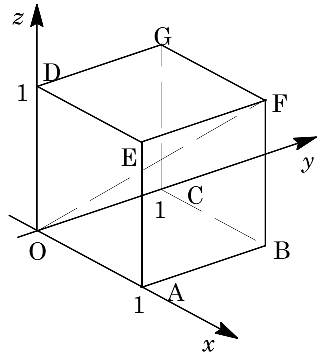
(1)　$\overrightarrow{OF}=(1,\ 1,\ 1)$より，直線OFの方程式は，

$$x=y=z\ \cdots\cdots\cdots ①$$

また，点$A(1,\ 0,\ 0)$を含み，OFに垂直な平面の方程式は，

$$(x-1)+y+z=0\,,\ \ x+y+z=1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②を連立すると，$x=y=z=\dfrac{1}{3}$



よって，点Aから OF に下ろした垂線の足をH_1とすると，$H_1\left(\dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3},\ \dfrac{1}{3}\right)$となり，垂線の長さ$AH_1$は，

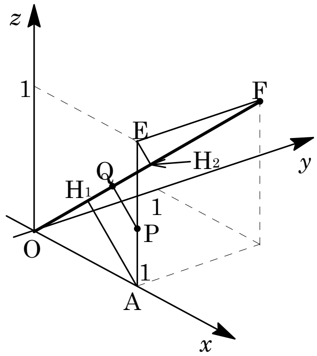
$$AH_1=\sqrt{\left(\frac{1}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}$$

(2)　立方体 OABC-DEFG を対角線 OF を軸にして回転してできる立体は，折れ線 OA, AE, EF を OF を軸にして回転してできる立体に等しい。

(i)　辺OAをOFを軸にして回転したとき

回転体は，AH_1を半径とする円を底面とし，高さOH_1の円錐となり，(1)から，

$$OH_1=\sqrt{\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2+\left(\frac{1}{3}\right)^2}=\frac{\sqrt{3}}{3}$$



よって，この円錐の体積をV_1とおくと，

$$V_1=\frac{1}{3}\pi\left(\frac{\sqrt{6}}{3}\right)^2\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi$$

(ii)　辺AEをOFを軸にして回転したとき

$0\leqq u\leqq 1$として，辺AE上の点を$P(1,\ 0,\ u)$とおくと，点Pを含み，OFに垂直な平面の方程式は，

$$(x-1)+y+(z-u)=0\,,\ \ x+y+z=1+u\ \cdots\cdots\cdots ③$$

①③を連立すると，$x=y=z=\dfrac{1+u}{3}$

よって，点 P から OF に下ろした垂線の足 Q は，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{1+u}{3},\ \dfrac{1+u}{3},\ \dfrac{1+u}{3}\right)$となり，

$$\mathrm{PQ}=\sqrt{\left(\frac{1+u}{3}-1\right)^2+\left(\frac{1+u}{3}\right)^2+\left(\frac{1+u}{3}-u\right)^2}=\frac{\sqrt{6}}{3}\sqrt{u^2-u+1}$$

また，点 E から OF に下ろした垂線の足 $\mathrm{H_2}$ は，$u=1$ から $\mathrm{H_2}\left(\dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3},\ \dfrac{2}{3}\right)$となり，

$$\mathrm{OH_2}=\sqrt{\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2+\left(\frac{2}{3}\right)^2}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$$

さて，$\mathrm{OQ}=t$，辺 AE を OF を軸にして回転した立体の体積を V_2 とおくと，

$$V_2=\pi\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}\mathrm{PQ}^2dt=\frac{2}{3}\pi\int_{\frac{1}{3}\sqrt{3}}^{\frac{2}{3}\sqrt{3}}(u^2-u+1)\,dt$$

ここで，$t=\sqrt{\left(\dfrac{1+u}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1+u}{3}\right)^2+\left(\dfrac{1+u}{3}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{3}}{3}(1+u)$ から，

$$V_2=\frac{2}{3}\pi\int_0^1(u^2-u+1)\cdot\frac{\sqrt{3}}{3}du=\frac{2}{9}\sqrt{3}\pi\left[\frac{u^3}{3}-\frac{u^2}{2}+u\right]_0^1=\frac{5}{27}\sqrt{3}\pi$$

(iii) 辺 EF を OF を軸にして回転したとき

回転体は，$\mathrm{EH_2}$ を半径とする円を底面とし，高さ $\mathrm{FH_2}$ の円錐となり，この円錐の体積を V_3 とおくと，対称性より，(i)と同じく $V_3=\dfrac{2}{27}\sqrt{3}\pi$ である。

(i)(ii)(iii)より，立方体を対角線 OF を軸にして回転してできる立体の体積 V は，

$$V=V_1+V_2+V_3=\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi+\frac{5}{27}\sqrt{3}\pi+\frac{2}{27}\sqrt{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{3}\pi$$

コメント

水平な台の上に，対角線が鉛直になるように立てたサイコロを，対角線を軸として回転したときにできる立体の体積を求めるという有名問題です。京大独自の拡張した範囲からの出題ですが，普通に解いた上の解では，置換積分も利用していることから，文系には厳しい内容になっています。

問　題

整式 $f(x)$ と実数 C が

$$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

を満たすとき，この $f(x)$ と C を求めよ。　[2009]

解答例

まず，$\int_0^x f(y)\,dy+\int_0^1 (x+y)^2 f(y)\,dy=x^2+C$ を変形して，

$$\int_0^x f(y)\,dy+x^2\int_0^1 f(y)\,dy+2x\int_0^1 yf(y)\,dy+\int_0^1 y^2 f(y)\,dy=x^2+C$$

$p=\int_0^1 f(y)\,dy$ ……①，$q=\int_0^1 yf(y)\,dy$ ……②，$r=\int_0^1 y^2 f(y)\,dy$ ……③とおくと，

$$\int_0^x f(y)\,dy+px^2+2qx+r=x^2+C \quad\cdots\cdots\cdots④$$

④の両辺を x で微分すると，$f(x)+2px+2q=2x$

$$f(x)=-2(p-1)x-2q \quad\cdots\cdots\cdots⑤$$

④に $x=0$ を代入すると，$r=C$ ………⑥

①⑤より，$p=\int_0^1\{-2(p-1)y-2q\}dy=-p+1-2q$，$2p+2q=1$ ………⑦

②⑤より，$q=\int_0^1\{-2(p-1)y^2-2qy\}dy=-\frac{2}{3}(p-1)-q$，$p+3q=1$ ………⑧

⑦⑧より，$p=q=\frac{1}{4}$ となり，

$$f(x)=\frac{3}{2}x-\frac{1}{2}$$

③⑥より，$C=\int_0^1\left(\frac{3}{2}y^3-\frac{1}{2}y^2\right)dy=\frac{3}{8}-\frac{1}{6}=\frac{5}{24}$

コメント

定型的な積分方程式の問題です。$f(x)$ を 1 次以下の整式として設定し，与えられた式に代入する方法もあります。

問　題

実数 a, b, c に対して $f(x)=ax^2+bx+c$ とする。このとき

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$$

であることを示せ。 [2008]

解答例

$f(x)=ax^2+bx+c$ に対して，$f'(x)=2ax+b$ となる。

さて，$I_1=\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx$，$I_2=6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$ とおくと，

$$I_1=\int_{-1}^{1}(1-x^2)(4a^2x^2+4abx+b^2)dx=2\int_{0}^{1}(4a^2x^2+b^2-4a^2x^4-b^2x^2)dx$$

$$=2\left(\frac{4}{3}a^2+b^2-\frac{4}{5}a^2-\frac{1}{3}b^2\right)=\frac{16}{15}a^2+\frac{4}{3}b^2$$

$$I_2=6\int_{-1}^{1}(ax^2+bx+c)^2dx=12\int_{0}^{1}(a^2x^4+b^2x^2+c^2+2acx^2)dx$$

$$=12\left(\frac{1}{5}a^2+\frac{1}{3}b^2+c^2+\frac{2}{3}ac\right)=\frac{12}{5}a^2+4b^2+12c^2+8ac$$

すると，$I_2-I_1=\left(\frac{12}{5}a^2+4b^2+12c^2+8ac\right)-\left(\frac{16}{15}a^2+\frac{4}{3}b^2\right)$

$$=\frac{4}{3}a^2+\frac{8}{3}b^2+12c^2+8ac=\frac{4}{3}(a+3c)^2+\frac{8}{3}b^2\geqq 0$$

よって，$I_1\leqq I_2$ となり，

$$\int_{-1}^{1}(1-x^2)\{f'(x)\}^2dx \leqq 6\int_{-1}^{1}\{f(x)\}^2dx$$

コメント

定積分の計算問題ですが，積分区間に注目をして，偶関数と奇関数に分ける工夫が必要です。

問　題

3 次関数 $y=x^3-2x^2-x+2$ のグラフ上の点 $(1,\ 0)$ における接線を l とする。この 3 次関数のグラフと接線 l で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転して立体を作る。その立体の体積を求めよ。 [2007]

解答例

$y=x^3-2x^2-x+2$ を変形すると，$y=(x-2)(x-1)(x+1)$ ……①となり，

$$y'=3x^2-4x-1$$

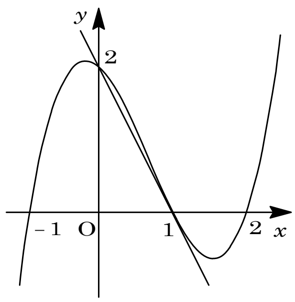
$x=1$ のとき $y'=-2$ より，接線 l の方程式は，

$$y=-2(x-1)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②の共有点は，

$$(x-2)(x-1)(x+1)=-2(x-1),\ \ x(x-1)^2=0$$

よって，$x=0,\ 1$ となる。



これより，①と②で囲まれた部分を x 軸のまわりに回転してできる立体の体積を V とすると，

$$V=\pi\int_0^1(x-2)^2(x-1)^2(x+1)^2dx-\frac{1}{3}\pi\cdot 2^2\cdot 1$$

$$=\pi\int_0^1(x^6-4x^5+2x^4+8x^3-7x^2-4x+4)\,dx-\frac{4}{3}\pi$$

$$=\pi\left(\frac{1}{7}-\frac{2}{3}+\frac{2}{5}+2-\frac{7}{3}-2+4\right)-\frac{4}{3}\pi=\frac{54}{35}\pi-\frac{4}{3}\pi=\frac{22}{105}\pi$$

コメント

募集要項に記載の数Ⅱの範囲外からの出題です。体積計算について，基本的な知識があれば，単なる計算練習にすぎません。

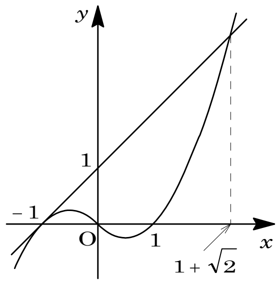
問　題

関数 $y=f(x)$ のグラフは，座標平面で原点に関して点対称である。さらにこのグラフの $x\leqq 0$ の部分は，軸が y 軸に平行で，点 $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ を頂点とし，原点を通る放物線と一致している。このとき $x=-1$ におけるこの関数のグラフの接線とこの関数のグラフによって囲まれる図形の面積を求めよ。 [2006]

解答例

関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\leqq 0$ の部分は，頂点が $\left(-\dfrac{1}{2},\ \dfrac{1}{4}\right)$ の放物線より，a を 0 でない定数として，

$$y=a\left(x+\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}$$



原点を通るので，$0=\dfrac{1}{4}a+\dfrac{1}{4}$，$a=-1$

よって，$y=-\left(x+\dfrac{1}{2}\right)^2+\dfrac{1}{4}$，$y=-x^2-x$ ………①

また，関数 $y=f(x)$ のグラフの $x\geqq 0$ の部分は，$x\leqq 0$ の部分を原点対称したものなので，

$$-y=-(-x)^2-(-x),\quad y=x^2-x \text{ ………②}$$

さて，①より $y'=-2x-1$ なので，$x=-1$ のとき $y'=1$ となり，点 $(-1,\ 0)$ における接線の方程式は，

$$y=x+1 \text{ ………③}$$

②と③の交点は，$x^2-x=x+1$，$x^2-2x-1=0$ より，$x=1+\sqrt{2}$

以上より，求める図形の面積を S とすると，

$$\begin{aligned}S&=\int_{-1}^{0}(x+1+x^2+x)\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(x+1-x^2+x)\,dx\\&=\int_{-1}^{0}(x+1)^2\,dx+\int_{0}^{1+\sqrt{2}}(-x^2+2x+1)\,dx\\&=\left[\frac{1}{3}(x+1)^3\right]_{-1}^{0}+\left[-\frac{x^3}{3}+x^2+x\right]_{0}^{1+\sqrt{2}}\\&=\frac{1}{3}-\frac{1}{3}(1+\sqrt{2})^3+(1+\sqrt{2})^2+(1+\sqrt{2})=2+\frac{4}{3}\sqrt{2}\end{aligned}$$

コメント

微積分のセンターレベルの基本題です。なお，定積分の計算は，工夫なしで実行しています。

問　題

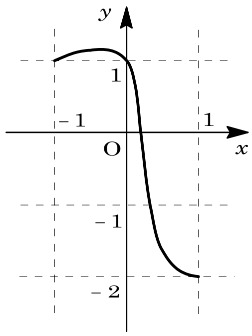
区間 $-1 \leqq x \leqq 1$ で定義された関数 $f(x)$ が，

$$f(-1)=f(0)=1,\ f(1)=-2$$

を満たし，またそのグラフが右図のようになっているという。

このとき，$\displaystyle\int_{-1}^{1} f(x)\,dx \geqq -1$ を示せ。

[2004]

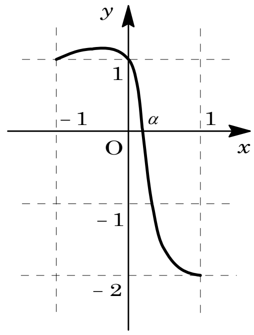


解答例

$y=f(x)$ のグラフは $-1 \leqq x \leqq 1$ で連続であり，x 軸との交点を $x=\alpha$ とすると，$0<\alpha<1$ となる。

右図より，$-1<x<\alpha$ で $f(x)>0$，$-1<x<0$ で $f(x)>1$ となっているので，

$$\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} f(x)\,dx > \int_{-1}^{0} dx = 1 \cdots\cdots\cdots ①$$



また，$\alpha<x<1$ で $f(x)>-2$ より，

$$\int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > \int_{\alpha}^{1} (-2)\,dx = -2(1-\alpha) \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，

$$\int_{-1}^{1} f(x)\,dx = \int_{-1}^{\alpha} f(x)\,dx + \int_{\alpha}^{1} f(x)\,dx > 1-2(1-\alpha) = -1+2\alpha > -1$$

コメント

定性的な問題で，昨年の名大・理系の選択題を思い出しました。符号付きの面積を考えると，結論が見えてきます。

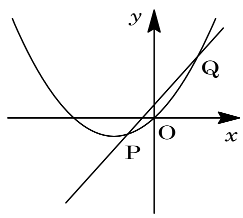
問　題

xy 平面上で，放物線 $C: y=x^2+x$ と，直線 $l: y=kx+k-1$ を考える。このとき次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C と直線 l が相異なる 2 点で交わるような k の範囲を求めよ。

(2) 放物線 C と直線 l の 2 つの交点を P，Q とし，線分 PQ の長さを L，線分 PQ と放物線とで囲まれる部分の面積を S とする。k が(1)で定まる範囲を動くとき，$\dfrac{S}{L^3}$ の値のとりうる範囲を求めよ。　[2003]

解答例



(1) $C: y=x^2+x$ ……①，$l: y=kx+k-1$ ……②が相異なる 2 点で交わるのは，$x^2+x=kx+k-1$ として，

$$x^2-(k-1)x-(k-1)=0 \cdots\cdots\cdots ③$$

③が異なる 2 実数解をもつことより，

$$D=(k-1)^2+4(k-1)>0$$

$(k-1)(k+3)>0$ より，$k<-3$，$1<k$

(2) ③の解を $x=\alpha$，β $(\alpha<\beta)$ とすると，2 交点を $(\alpha,\ k\alpha+k-1)$，$(\beta,\ k\beta+k-1)$ とおくことができるので，

$$L=\sqrt{(\beta-\alpha)^2+(k\beta+k-1-k\alpha-k+1)^2}=\sqrt{1+k^2}(\beta-\alpha)$$

$$S=\int_\alpha^\beta (kx+k-1-x^2-x)\,dx=-\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

よって，$\dfrac{S}{L^3}=\dfrac{(\beta-\alpha)^3}{6(\sqrt{1+k^2})^3(\beta-\alpha)^3}=\dfrac{1}{6(\sqrt{1+k^2})^3}$

ここで(1)より，$k<-3$，$1<k$ なので，$1+k^2>2$ となり，

$$0<\frac{S}{L^3}<\frac{1}{6(\sqrt{2})^3}=\frac{\sqrt{2}}{24}$$

コメント

本年度 5 題中，最も基本的な問題です。落とすことはできません。

問　題

a を実数とする。x の 2 次方程式 $x^2 - ax = 2\int_0^1 |t^2 - at|dt$ は $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲にいくつの解をもつか。 [2000]

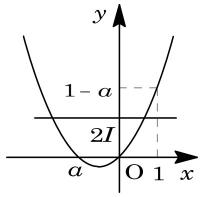
解答例

$I = \int_0^1 |t^2 - at|dt$ とおくと, $x^2 - ax = 2I$ の解の個数は, $y = x^2 - ax$ と $y = 2I$ のグラフの共有点の個数と一致する。

(i)　$a < 0$ のとき

$$I = \int_0^1 (t^2 - at)dt = \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2\right]_0^1 = \frac{1}{3} - \frac{a}{2}$$

$$2I - (1-a) = \frac{2}{3} - a - 1 + a = -\frac{1}{3} < 0$$



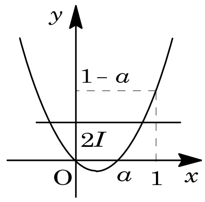
よって, $0 < 2I < 1 - a$ となるので, 右図より, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii)　$0 \leqq a \leqq 1$ のとき

$$I = \int_0^a -(t^2 - at)dt + \int_a^1 (t^2 - at)dt = -\left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2\right]_0^a + \left[\frac{1}{3}t^3 - \frac{a}{2}t^2\right]_a^1$$

$$= \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{2}a + \frac{1}{3}$$

$$2I - (1-a) = \frac{2}{3}a^3 - a + \frac{2}{3} - 1 + a = \frac{1}{3}(2a^3 - 1)$$



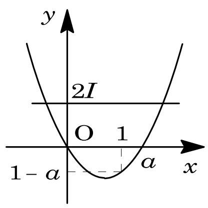
(ii-i)　$2I \leqq 1 - a \left(0 \leqq a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}\right)$ のとき

$0 < 2I \leqq 1 - a$ となるので, 右図より, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解は 1 個である。

(ii-ii)　$2I > 1 - a \left(\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a \leqq 1\right)$ のとき

$0 < 1 - a < 2I$ となるので, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解はない。

(iii)　$1 < a$ のとき



$0 < 2I$ となるので, 右図より, $0 \leqq x \leqq 1$ の範囲に解はない。

(i)(ii)(iii)より, 求める解の個数は, $a \leqq \frac{1}{\sqrt[3]{2}}$ のとき 1 個, $\frac{1}{\sqrt[3]{2}} < a$ のとき 0 個である。

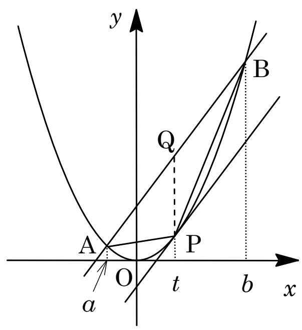
コメント

$I > 0$ が場合分けを少なくし, 議論をスッキリさせるポイントです。

問　題

xy 平面上で放物線 $y=x^2$ 上に 2 点 $\mathrm{A}(a,\ a^2)$，$\mathrm{B}(b,\ b^2)$（$a<b$）をとり，線分 AB と放物線で囲まれた図形の面積を s とする。点 $\mathrm{P}(t,\ t^2)$ を放物線上にとり，三角形 ABP の面積を $S(\mathrm{P})$ とする。t が $a<t<b$ の範囲を動くときの $S(\mathrm{P})$ の最大値を S とするとき，s と S の比を求めよ。 [1998]

解答例



$y=x^2$ より $y'=2x$ なので，P における接線の傾きは $2t$ となる。

線分 AB の傾きは，$\dfrac{b^2-a^2}{b-a}=a+b$ である。

ここで，$S(\mathrm{P})$ が最大となるのは，P における接線の傾きと線分 AB の傾きとが等しいときより，

$$2t=a+b,\quad t=\frac{a+b}{2}$$

このとき，$\mathrm{P}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \left(\dfrac{a+b}{2}\right)^2\right)$ となる。

さて，P を通り y 軸に平行な直線と線分 AB との交点を Q とすると，点 Q は線分 AB の中点となるので，$\mathrm{Q}\left(\dfrac{a+b}{2},\ \dfrac{a^2+b^2}{2}\right)$ と表される。

以上より，

$$S=\frac{1}{2}\left\{\frac{a^2+b^2}{2}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2\right\}(b-a)=\frac{1}{2}\cdot\frac{a^2+b^2-2ab}{4}(b-a)=\frac{1}{8}(b-a)^3$$

また，線分 AB と放物線で囲まれた面積は，

$$s=\int_a^b -(x-a)(x-b)\,dx=\frac{1}{6}(b-a)^3$$

よって，$s:S=\dfrac{1}{6}:\dfrac{1}{8}=4:3$

コメント

頻出有名問題です。上のように接線の傾きに着目する解法がベストですが，普通に $S(\mathrm{P})$ を立式して最大値を求めても，時間が不足するということはないでしょう。完答しなくてはいけない問題です。

問　題

直線 $y=px+q$ が，$y=x^2-x$ のグラフとは交わるが，$y=|x|+|x-1|+1$ のグラフとは交わらないような $(p,\ q)$ の範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2015]

解答例

まず，$y=px+q$ ……①，$y=x^2-x$ ……②に対して，①と②が共有点をもつ条件は，①②を連立して，$x^2-x=px+q$，$x^2-(p+1)x-q=0$ から，

$$D=(p+1)^2+4q\geqq 0,\ q\geqq -\frac{1}{4}(p+1)^2\ \cdots\cdots\cdots③$$

次に，$y=|x|+|x-1|+1$ ……④に対して，①と④が共有点をもたない条件は，

(i)　$x\leqq 0$ のとき　④は，$y=-x-(x-1)+1=-2x+2$ となり，①と連立して，

$$px+q=-2x+2,\ (p+2)x+q-2=0$$

すると，$(p+2\leqq 0$ かつ $q-2>0)$ または $(p+2\geqq 0$ かつ $q-2<0)$

(ii)　$0\leqq x\leqq 1$ のとき　④は，$y=x-(x-1)+1=2$ となり，①と連立して，

$$px+q=2,\ px+q-2=0$$

すると，$(q-2>0$ かつ $p+q-2>0)$ または $(q-2<0$ かつ $p+q-2<0)$

(iii)　$x\geqq 1$ のとき　④は，$y=x+(x-1)+1=2x$ となり，①と連立して，

$$px+q=2x,\ (p-2)x+q=0$$

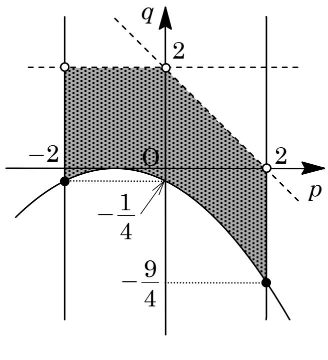
すると，$(p-2\geqq 0$ かつ $p+q-2>0)$ または $(p-2\leqq 0$ かつ $p+q-2<0)$

(ii)(iii)をまとめると，$(p\geqq 2$ かつ $q>2)$ または $(p\leqq 2$ かつ $q<2$ かつ $p+q<2)$

(i)を合わせて，①と④が共有点をもたない条件は，

$$-2\leqq p\leqq 2 \text{ かつ } q<2 \text{ かつ } p+q<2\ \cdots\cdots\cdots⑤$$

したがって，求める $(p,\ q)$ の条件は，③かつ⑤となり，それを図示すると右図の網点部となる。ただし，実線の境界は含み，破線の境界は含まない。



また，この範囲の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(2+4)\cdot 2-\int_{-2}^{2}-\frac{1}{4}(p+1)^2dp$$

$$=6+\frac{1}{12}\Big[(p+1)^3\Big]_{-2}^{2}=6+\frac{1}{12}(27+1)=\frac{25}{3}$$

コメント

直球で勝負という感じの解法です。かなり時間がかかりました。共有点をもたない条件は図形的に解いた方がよかったようです。

問　題

座標平面上の点P$(x,\ y)$が$4x+y \leqq 9$，$x+2y \geqq 4$，$2x-3y \geqq -6$の範囲を動くとき，$2x+y$，x^2+y^2のそれぞれの最大値と最小値を求めよ。 [2010]

解答例

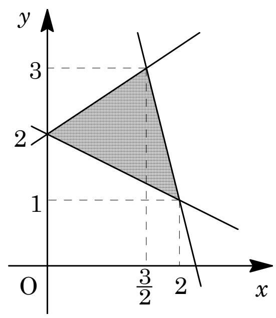
3直線$4x+y=9$……①，$x+2y=4$……②，$2x-3y=-6$……③に対して，

①②の交点は，$4x+y=9$，$x+2y=4$から，$(x,\ y)=(2,\ 1)$

②③の交点は，$x+2y=4$，$2x-3y=-6$から，$(x,\ y)=(0,\ 2)$

③①の交点は，$2x-3y=-6$，$4x+y=9$から，$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$

これより，領域$4x+y \leqq 9$，$x+2y \geqq 4$，$2x-3y \geqq -6$を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界線は領域に含む。



ここで，$2x+y=k$とおくと，$y=-2x+k$となり，kは傾き-2の直線群のy切片を表す。

この直線が，領域を共有点をもつ範囲を求めると，kは，$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$のとき，最大値$k=2\times\frac{3}{2}+3=6$をとり，$(x,\ y)=(0,\ 2)$のとき，最小値$k=2\times 0+2=2$をとる。

また，$x^2+y^2=r$とおくと，rは原点を中心とする円の半径の2乗を表す。

この円が領域と共有点をもつ範囲を求めると，rは，$(x,\ y)=\left(\frac{3}{2},\ 3\right)$のとき，最大値$r=\left(\frac{3}{2}\right)^2+3^2=\frac{45}{4}$をとる。

さて，原点と直線②の距離は，$\frac{|-4|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{4}{\sqrt{5}}$であり，また直線②の法線ベクトルの成分を$(1,\ 2)$とおくことができるので，垂線方向の単位ベクトルは$\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)$となる。これから，原点から直線②に下ろした垂線の足の座標は，

$$\frac{4}{\sqrt{5}}\times\frac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$$

これより，rは，$(x,\ y)=\left(\frac{4}{5},\ \frac{8}{5}\right)$のとき，最小値$r=\left(\frac{4}{\sqrt{5}}\right)^2=\frac{16}{5}$をとる。

コメント

定型的で，方針に迷いの生じない問題です。

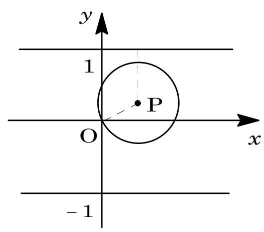
問　題

xy 平面内の $-1\leqq y\leqq 1$ で定められる領域 D と，中心が P で原点 O を通る円 C を考える。C が D に含まれるという条件のもとで，P が動きうる範囲を図示し，その面積を求めよ。　[2001]

解答例

$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおき，x 軸に関する対称性から $y\geqq 0$ とすると，条件より，

$$\sqrt{x^2+y^2}\leqq|y-1|,\ \ x^2+y^2\leqq(y-1)^2$$



まとめて，$y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$

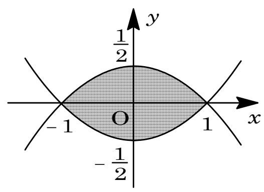
よって，$y\geqq 0$ では $0\leqq y\leqq -\dfrac{1}{2}x^2+\dfrac{1}{2}$ となる。

また，$y\leqq 0$ では対称性より，$\dfrac{1}{2}x^2-\dfrac{1}{2}\leqq y\leqq 0$ となる。

以上より，P が動きうる領域は，

$$\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}\leqq y\leqq -\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}$$

図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



この領域の面積を S とおくと，

$$S=2\int_{-1}^{1}\left(-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}\right)dx=2\int_{0}^{1}(-x^2+1)\,dx=\frac{4}{3}$$

コメント

条件を数式化していけば，求める領域は自然に導き出されます。

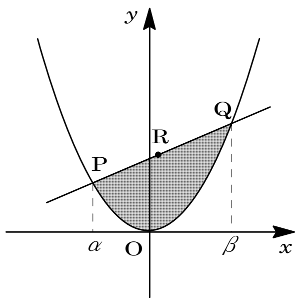
問　題

放物線 $y = x^2$ の上を動く 2 点 P, Q があって, この放物線と線分 PQ が囲む部分の面積が常に 1 であるとき, PQ の中点 R が描く図形の方程式を求めよ。　[1999]

解答例

$\mathrm{P}(\alpha,\ \alpha^2)$, $\mathrm{Q}(\beta,\ \beta^2)$ $(\alpha<\beta)$ とするとき,

放物線 $y = x^2$ と線分 PQ が囲む部分の面積 S は,



$$S = \int_\alpha^\beta -(x-\alpha)(x-\beta)\,dx = \frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

条件より, $\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3 = 1$, $(\beta-\alpha)^3 = 6$

$$\left\{(\alpha+\beta)^2 - 4\alpha\beta\right\}^{\frac{3}{2}} = 6 \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで, $\mathrm{R}(x,\ y)$ とすると,

$$x = \frac{\alpha+\beta}{2} \cdots\cdots\cdots ②,\quad y = \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} = \frac{(\alpha+\beta)^2 - 2\alpha\beta}{2} \cdots\cdots\cdots ③$$

②より, $\alpha+\beta = 2x$ ………④

③④より, $\alpha\beta = -y + \frac{(\alpha+\beta)^2}{2} = -y + 2x^2$ ………⑤

④⑤を①に代入して,

$$(4y - 4x^2)^{\frac{3}{2}} = 6,\quad y = x^2 + \frac{\sqrt[3]{36}}{4}$$

コメント

典型問題です。途中の式変形も難しいところはありませんでした。なお, ①より α, β が実数という条件は満たされています。

問　題

次の 2 つの条件を同時に満たす四角形のうち面積が最小のものの面積を求めよ。

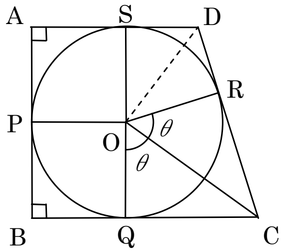
(a)　少なくとも 2 つの内角は $90°$ である。

(b)　半径 1 の円が内接する。ただし，円が四角形に内接するとは，円が四角形の 4 つの辺すべてに接することをいう。 [2015]

解答例

四角形 ABCD について，その内接円の中心を O，また内接円との接点を P, Q, R, S とおく。条件(a)より，$90°$ の内角が隣り合う場合と向かい合う場合に分けて考える。

(i)　$90°$ の内角が隣り合う ($\angle A=\angle B=90°$) のとき

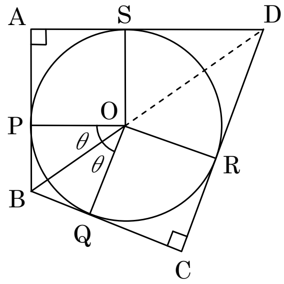


右図のように $\angle COQ=\angle COR=\theta$ $(0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}\geqq 2+2\sqrt{\tan\theta\cdot\frac{1}{\tan\theta}}=4$$

等号成立は $\tan\theta=\dfrac{1}{\tan\theta}$ $(\theta=45°)$ のときであり，このとき四角形 ABCD は正方形となる。

(ii)　$90°$ の内角が向かい合う ($\angle A=\angle C=90°$) のとき



右図のように $\angle BOP=\angle BOQ=\theta$ $(0°<\theta<90°)$ とおくと，$\angle DOR=\angle DOS=90°-\theta$ となる。これより，四角形 ABCD の面積 S は，

$$S=1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan\theta+1^2+2\cdot\frac{1}{2}\tan(90°-\theta)$$
$$=2+\tan\theta+\frac{1}{\tan\theta}$$

(i)と同様に，四角形 ABCD が正方形のとき S は最小値 4 をとる。

(i)(ii)より，四角形 ABCD の面積の最小値は 4 である。

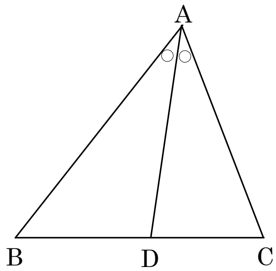
コメント

いったん 2 つの場合に分けましたが，計算を進めていくと，同じものとなります。そして，結論は予想通りとなりました。

問　題

辺 AB, 辺 BC, 辺 CA の長さがそれぞれ 12, 11, 10 の三角形 ABC を考える。∠A の二等分線と辺 BC の交点を D とするとき，線分 AD の長さを求めよ。　[2011]

解答例



△ABC に余弦定理を適用すると，

$$\cos B = \frac{12^2+11^2-10^2}{2\cdot 12\cdot 11} = \frac{5}{8}$$

また，AD は∠BAC の二等分線より，

$$\mathrm{BD}:\mathrm{DC} = \mathrm{AB}:\mathrm{AC} = 6:5$$

すると，$\mathrm{BD} = \dfrac{6}{6+5}\times 11 = 6$ となり，△ABD に余弦定理を適用すると，

$$\mathrm{AD}^2 = 12^2 + 6^2 - 2\cdot 12\cdot 6\cos B = 144 + 36 - 90 = 90$$

よって，$\mathrm{AD} = \sqrt{90} = 3\sqrt{10}$

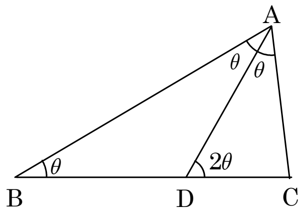
コメント

参考書に例題として載っている典型問題です。

問　題

$\triangle$ABC において $AB=2$，$AC=1$ とする。$\angle$BAC の二等分線と辺 BC の交点を D とする。$AD=BD$ となるとき，$\triangle$ABC の面積を求めよ。 [2010]

解答例



$AB=2$，$AC=1$ の$\triangle$ABC で，$\angle BAD=\angle DAC$ より，

$$BD:DC=AB:AC=2:1$$

よって，$DC=\dfrac{1}{3}BC$ ………①

また，$\angle BAD=\angle DAC=\theta$ とおくと，$AD=BD$ から，

$$\angle B=\theta,\ \angle ADC=\angle B+\angle BAD=2\theta$$

これより，$\triangle ABC \backsim \triangle DAC$ となり，

$$BC:AC=AC:DC,\ BC\cdot DC=AC^2=1 \ \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$\dfrac{1}{3}BC^2=1$，$BC=\sqrt{3}$

これより，$\triangle$ABC は $\angle C=90^\circ$ の直角三角形となり，

$$\triangle ABC=\frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{3}=\frac{\sqrt{3}}{2}$$

コメント

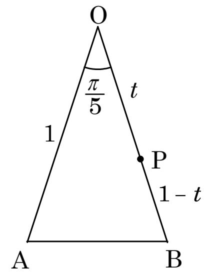
簡単そうな設定ですが，いろいろな解法が考えられ，かえって時間がかかります。

問　題

点 O を中心とする正十角形において，A, B を隣接する 2 つの頂点とする。線分 OB 上に$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$を満たす点 P をとるとき，$\mathrm{OP}=\mathrm{AB}$が成立することを示せ。

[2010]

解答例



点 O を中心とする正十角形において，A, B が隣接する 2 頂点であることより，△OAB は，$\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{5}$，$\angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{OBA}=\dfrac{2\pi}{5}$である二等辺三角形である。

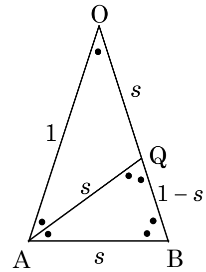
さて，$\mathrm{OA}=\mathrm{OB}=1$，$\mathrm{OP}=t$とおくと，条件$\mathrm{OP}^2=\mathrm{OB}\cdot\mathrm{PB}$より，

$$t^2=1\times(1-t),\ t^2+t-1=0,\ t=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

一方，$\angle\mathrm{OAB}$の二等分線と辺 OB の交点を Q とおくと，

$$\angle\mathrm{AOB}=\angle\mathrm{BAQ}=\frac{\pi}{5},\ \angle\mathrm{OAB}=\angle\mathrm{ABQ}=\frac{2\pi}{5}$$

これより，$\triangle\mathrm{OAB}\backsim\triangle\mathrm{ABQ}$となる。



ここで，$\mathrm{OQ}=s$とおくと，$\mathrm{AQ}=\mathrm{AB}=s$となり，,

$$1:s=s:1-s,\ s^2+s-1=0,\ s=\frac{-1+\sqrt{5}}{2}$$

よって，$t=s$から点 P と点 Q は一致し，$\mathrm{OP}=\mathrm{AB}$が成立する。

コメント

$\cos\dfrac{\pi}{5}$や$\sin\dfrac{\pi}{5}$の値を求めるときに，誘導として現れる二等辺三角形が題材となっています。この知識をもとに，力ずくで抑え込んだ解答例です。

問　題

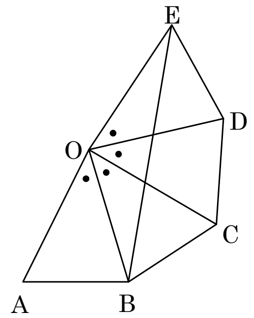
平面上で，鋭角三角形△OAB を辺 OB に関して折り返して得られる三角形を△OBC，△OBC を辺 OC に関して折り返して得られる三角形を△OCD，△OCD を辺 OD に関して折り返して得られる三角形を△ODE とする。△OAB と△OBE の面積比が 2 : 3 のとき，$\sin\angle\mathrm{AOB}$ の値を求めよ。 [2009]

解答例

$\angle\mathrm{AOB}=\theta\left(0<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$とおくと，$\triangle\mathrm{OAB}=\dfrac{1}{2}\mathrm{OA}\cdot\mathrm{OB}\sin\theta$

また，題意より，$\mathrm{OA}=\mathrm{OC}=\mathrm{OE}$，$\mathrm{OB}=\mathrm{OD}$

(i)　$0<3\theta\leqq\pi\left(0<\theta\leqq\dfrac{\pi}{3}\right)$のとき



$$\triangle\mathrm{OBE}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}\sin3\theta=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}\sin3\theta$$

ここで，$\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OBE}=2:3$ より，

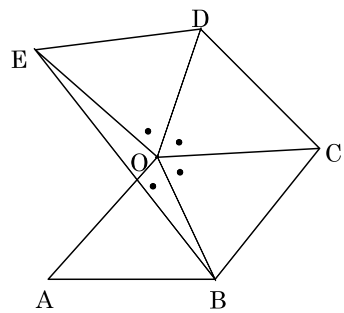
$$\sin\theta:\sin3\theta=2:3,\ \ 2\sin3\theta-3\sin\theta=0$$

$$2(3\sin\theta-4\sin^3\theta)-3\sin\theta=0$$

$$8\sin^3\theta-3\sin\theta=0$$

$0<\sin\theta\leqq\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ より，$\sin\theta=\sqrt{\dfrac{3}{8}}=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

(ii)　$\pi<3\theta\left(\dfrac{\pi}{3}<\theta<\dfrac{\pi}{2}\right)$のとき



$$\triangle\mathrm{OBE}=\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OE}\sin(2\pi-3\theta)$$

$$=-\frac{1}{2}\mathrm{OB}\cdot\mathrm{OA}\sin3\theta$$

ここで，$\triangle\mathrm{OAB}:\triangle\mathrm{OBE}=2:3$ より，

$$\sin\theta:(-\sin3\theta)=2:3$$

$$2\sin3\theta+3\sin\theta=0,\ \ 8\sin^3\theta-9\sin\theta=0$$

すると，$\dfrac{\sqrt{3}}{2}<\sin\theta<1$ より，適する $\sin\theta$ の値は存在しない。

(i)(ii)より，$\sin\angle\mathrm{AOB}=\sin\theta=\dfrac{\sqrt{6}}{4}$

コメント

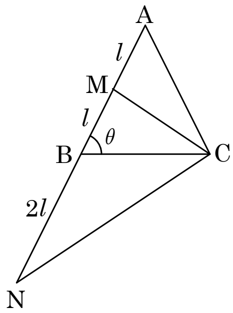
図を描いて場合分けをしましたが，絶対値を用いると，場合分けが回避できます。

問　題

$AB = AC$ である二等辺三角形 ABC を考える。辺 AB の中点を M とし，辺 AB を延長した直線上に点 N を，$AN : NB = 2 : 1$ となるようにとる。このとき $\angle BCM = \angle BCN$ となることを示せ。ただし，点 N は辺 AB 上にはないものとする。

[2008]

解答例



まず，$AB = AC = 2l$，$\angle ABC = \theta$ とおくと，

$$BC = 2\times 2l\cos\theta = 4l\cos\theta$$

$\triangle BCM$ に余弦定理を適用すると，

$$CM^2 = l^2 + (4l\cos\theta)^2 - 2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos\theta$$
$$= l^2 + 8l^2\cos^2\theta = l^2(1+8\cos^2\theta)$$

次に，$\triangle BCN$ に余弦定理を適用すると，

$$CN^2 = (2l)^2 + (4l\cos\theta)^2 - 2\cdot 2l\cdot 4l\cos\theta\cdot\cos(\pi-\theta)$$
$$= 4l^2 + 32l^2\cos^2\theta = 4l^2(1+8\cos^2\theta)$$

すると，$CM^2 : CN^2 = 1 : 4$ となり，

$$CM : CN = 1 : 2 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，条件より，$MB : BN = 1 : 2 \cdots\cdots\cdots ②$

①②から，$MB : BN = CM : CN$ となることより，$\angle BCM = \angle BCN$ である。

コメント

内角の二等分線の定理を利用するという方針を立て，その方向に沿って解きました。他にもいろいろな解法が考えられます。

問　題

三角形 ABC において辺 BC, CA, AB の長さをそれぞれ $a,\ b,\ c$ とする。この三角形 ABC は次の条件(イ), (ロ), (ハ)を満たすとする。

(イ)　ともに 2 以上である自然数 p と q が存在して，$a = p+q$，$b = pq+p$，$c = pq+1$ となる。

(ロ)　自然数 n が存在して $a,\ b,\ c$ のいずれかは 2^n である。

(ハ)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C のいずれかは $60°$ である。

このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\angle$A，$\angle$B，$\angle$C を大きさの順に並べよ。

(2)　$a,\ b,\ c$ を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　条件(イ)より，$b-c = pq+p-(pq+1) = p-1>0$

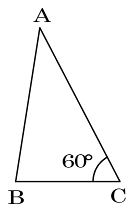
$$c-a = pq+1-(p+q) = (p-1)(q-1)>0$$

これから, $a<c<b$ となるので，$\angle A<\angle C<\angle B$

(2)　$\angle A = 60°$ とすると, (1)より $\angle A+\angle B+\angle C>60°+60°+60° = 180°$

$\angle B = 60°$ とすると, (1)より $\angle A+\angle B+\angle C<60°+60°+60° = 180°$

いずれも不適なので，条件(ハ)より，$\angle C = 60°$



$\triangle$ABC に余弦定理を適用して，

$$(pq+1)^2 = (pq+p)^2+(p+q)^2-2(pq+p)(p+q)\cos 60°$$

変形して，$pq+1 = p^2q+p^2+q^2-pq^2$

$$(q+1)p^2-q(q+1)p+(q+1)(q-1) = 0,\ (q+1)(p-1)(p-q+1) = 0$$

$p>1,\ q>1$ より，$q = p+1$

よって，$a = 2p+1$，$b = p(p+2)$，$c = p(p+1)+1$

すると, $a,\ c$ は p の偶奇にかかわらずともに奇数なるので，条件(ロ)より，

$$p(p+2) = 2^n$$

よって，p は 2 以上の自然数なので，$k,\ l$ を $k<l$ を満たす自然数として，$p = 2^k$，$p+2 = 2^l$ と表すことができる。

$$2^l-2^k = 2,\ 2^k(2^{l-k}-1) = 2,\ 2^{k-1}(2^{l-k}-1) = 1$$

$k-1\geqq 0$，$l-k\geqq 1$ なので，$k-1 = 0$ かつ $l-k = 1$ となる。

すなわち，$k = 1$，$l = 2$ から，$p = 2$ である。

以上より，$a = 5$，$b = 8$，$c = 7$

コメント

三角形の辺と角の大小関係については，明らかとしてよいのでしょう。数学 A の教科書には，その証明が載っていたり載っていなかったりと，まちまちですが，ちょっと気になりました。

問　題

鋭角三角形△ABC において，辺 BC の中点を M，A から BC にひいた垂線を AH とする。点 P を線分 MH 上にとるとき，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$$

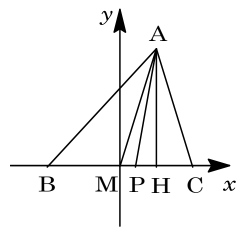
となることを示せ。 [1999]

解答例

M を原点とし，$\mathrm{A}(a,\ b)$，$\mathrm{B}(-c,\ 0)$，$\mathrm{C}(c,\ 0)$ をおく。

このとき，$a>0$, $b>0$, $c>0$ としても一般性は失われない。

また，△ABC が鋭角三角形より $0<a<c$ となる。



すると $\mathrm{H}(a,\ 0)$ となることから，$\mathrm{P}(p,\ 0)$ とおくと，条件より $0\leqq p\leqq a$ となる。

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2=(a+c)^2+b^2+(a-c)^2+b^2$$
$$=2a^2+2b^2+2c^2$$
$$2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2=2\left\{(a-p)^2+b^2\right\}+(p+c)^2+(c-p)^2$$
$$=2a^2+2b^2+4p^2+2c^2-4ap$$

ここで，$0\leqq p\leqq a$ より，

$$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2-(2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2)=-4p^2+4ap=4p(a-p)\geqq 0$$

よって，$\mathrm{AB}^2+\mathrm{AC}^2\geqq 2\mathrm{AP}^2+\mathrm{BP}^2+\mathrm{CP}^2$

コメント

ベクトルを利用しようか，座標を用いようかと迷いましたが，後者で解を作りました。中線定理の証明と同じように座標系を設定すると，簡単に示せました。

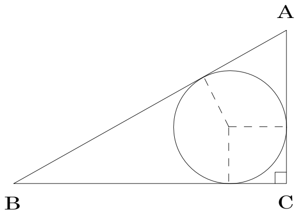
問　題

直角三角形に半径 r の円が内接していて，三角形の 3 辺の長さの和と円の直径との和が 2 となっている。このとき以下の問いに答えよ。

(1) この三角形の斜辺の長さを r で表せ。

(2) r の値が問題の条件を満たしながら変化するとき，この三角形の面積の最大値を求めよ。 [1998]

解答例



(1) $\angle C = 90^\circ$ とし，$BC = a$，$CA = b$，$AB = c$ とおくと，

$(a-r)+(b-r)=c$ から，$a+b-c-2r=0$ ………①

条件より，$a+b+c+2r=2$ …………②

②－①より，$2c+4r=2$

よって，$c=1-2r$ …………③

(2) ③を②に代入すると，$a+b=1$ …………④

$\triangle ABC$ の面積を S とし，④と相加平均と相乗平均の関係から，

$$S=\frac{1}{2}ab \leqq \frac{1}{2}\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{1}{8}$$

等号は $a=b$，すなわち④より $a=b=\dfrac{1}{2}$ のとき成立する。

このとき，$c=\sqrt{a^2+b^2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$，③より，$r=\dfrac{2-\sqrt{2}}{4}$ となり，与えられた条件をみたす。これより, S の最大値は $\dfrac{1}{8}$ である。

コメント

これまで多くの大学でたびたび出題されてきた直角三角形の内接円に関する問題です。なお(2)は，④から $b=1-a$ として S を a だけの 2 次関数として表し，その最大値を求めるという方法でも構いません。

問　題

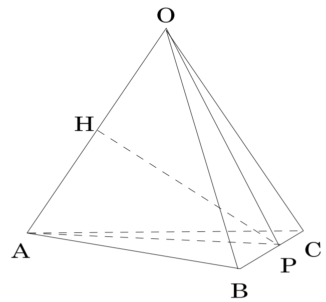
一辺の長さが 1 の正四面体 OABC の辺 BC 上に点 P をとり，線分 BP の長さを x とする。

(1)　三角形 OAP の面積を x で表せ。

(2)　P が辺 BC 上を動くとき三角形 OAP の面積の最小値を求めよ。　[1998]

解答例

(1)　OP = AP より△OAP は二等辺三角形なので，
P から OA に下ろした垂線の足を H とすると，
H は OA の中点となる。



ここで，△OBP に余弦定理を適用して，

$$\mathrm{OP}^2 = 1^2 + x^2 - 2\cdot 1\cdot x\cdot\cos 60° = x^2 - x + 1$$

また, P から OA に下ろした垂線の足を H とすると, H は OA の中点より,

$$\mathrm{PH} = \sqrt{x^2 - x + 1 - \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}}$$

△OAP の面積を $S(x)$ とすると，

$$S(x) = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sqrt{x^2 - x + \frac{3}{4}} = \frac{1}{4}\sqrt{4x^2 - 4x + 3}$$

(2)　(1)より，$S(x) = \dfrac{1}{2}\sqrt{\left(x - \dfrac{1}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}}$

$0 < x < 1$ から，$x = \dfrac{1}{2}$ のとき最小値 $S\left(\dfrac{1}{2}\right) = \dfrac{1}{2\sqrt{2}} = \dfrac{\sqrt{2}}{4}$ をとる。

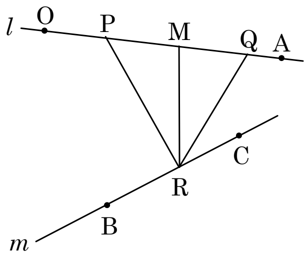
コメント

本年度は，かなり易しめのセットとなっていますが，そのうちでも本問は最も基本的です。10 分以内で完答しなくてはいけない問題です。

問　題

座標空間において原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線を l とし，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線を m とする。l 上の 2 点 P, Q と，m 上の点 R を△PQR が正三角形となるようにとる。このとき，△PQR の面積が最小となるような P, Q, R の座標を求めよ。　[2017]

解答例



原点 O と点 A$(0,\ -1,\ 1)$ を通る直線 l 上に 2 点 P, Q，点 B$(0,\ 2,\ 1)$ と点 C$(-2,\ 2,\ -3)$ を通る直線 m 上に点 R がある。ここで，線分 PQ の中点を M とするとき，△PQR が正三角形より，その面積は，

$$\triangle\mathrm{PQR}=\frac{1}{2}\mathrm{MR}\cdot\frac{2}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}=\frac{1}{\sqrt{3}}\mathrm{MR}^2$$

すると，△PQR の面積が最小となるのは，MR が最小の場合である。すなわち，$\mathrm{MR}\perp l$ かつ $\mathrm{MR}\perp m$ である。

そこで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=(0,\ -1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{BC}}=(-2,\ 0,\ -4)=-2(1,\ 0,\ 2)$ なので，t, s を実数とすると，直線 l, m は，

$$l:(x,\ y,\ z)=t(0,\ -1,\ 1),\ m:(x,\ y,\ z)=(0,\ 2,\ 1)+s(1,\ 0,\ 2)$$

これより，M$(0,\ -t,\ t)$，R$(s,\ 2,\ 1+2s)$ とおけ，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=(s,\ 2+t,\ 1+2s-t)$

さて，$\mathrm{MR}\perp l$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OA}}=0$ となり，

$$-2-t+1+2s-t=0,\ -2t+2s=1 \cdots\cdots\cdots ①$$

また，$\mathrm{MR}\perp m$ から $\overrightarrow{\mathrm{MR}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BC}}=0$ となり，

$$s+2(1+2s-t)=0,\ -2t+5s=-2 \cdots\cdots\cdots ②$$

①②より，$s=-1$，$t=-\frac{3}{2}$ となり，M$\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)$，R$(-1,\ 2,\ -1)$ である。

これより，$\overrightarrow{\mathrm{MR}}=\left(-1,\ \frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$ から，$|\overrightarrow{\mathrm{MR}}|=\sqrt{1+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}=\frac{\sqrt{6}}{2}$

すると，$\mathrm{PQ}=\frac{2}{\sqrt{3}}\cdot\frac{\sqrt{6}}{2}=\sqrt{2}$ となり，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=\sqrt{1+1}=\sqrt{2}$ から，点 P, Q の座標は，

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}\pm\frac{1}{2}\mathrm{PQ}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{2}}(0,\ -1,\ 1)$$
$$=\left(0,\ \frac{3}{2},\ -\frac{3}{2}\right)\pm\left(0,\ -\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}\right)$$

よって，P$(0,\ 1,\ -1)$，Q$(0,\ 2,\ -2)$，または P$(0,\ 2,\ -2)$，Q$(0,\ 1,\ -1)$ である。

コメント

高校数学に「代数・幾何」という科目があったころの頻出題の 1 つです。ポイントは，正三角形の中線がねじれの位置にある l と m の共通垂線ということです。なお，最後の点 P, Q の座標を求める計算は，単位ベクトルを利用しています。

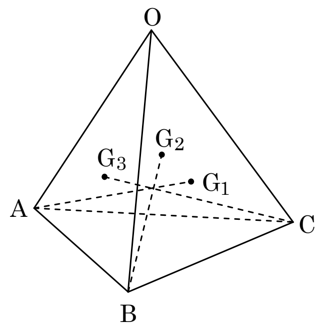
問　題

四面体 OABC が次の条件を満たすならば，それは正四面体であることを示せ。

条件：頂点 A，B，C からそれぞれの対面を含む平面へ下ろした垂線は対面の重心を通る。

ただし，四面体のある頂点の対面とは，その頂点を除く他の 3 つの頂点がなす三角形のことをいう。 [2016]

解答例



まず，四面体 OABC の面 OBC，面 OCA，面 OAB の重心を，それぞれ G_1，G_2，G_3 とおく。

また，$\overrightarrow{OA}=\vec{a}$，$\overrightarrow{OB}=\vec{b}$，$\overrightarrow{OC}=\vec{c}$ とすると，

$$\overrightarrow{OG_1}=\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c},$$

すると，$\overrightarrow{AG_1}=-\vec{a}+\frac{1}{3}\vec{b}+\frac{1}{3}\vec{c}=\frac{1}{3}(-3\vec{a}+\vec{b}+\vec{c})$

ここで，条件より，A から面 OBC に下ろした垂線の足が G_1 なので，$\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OB}$ かつ $\overrightarrow{AG_1}\perp\overrightarrow{OC}$ となり，

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2+\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{AG_1}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ -3\vec{a}\cdot\vec{c}+\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\cdots\cdots\cdots②$$

同様に，$\overrightarrow{BG_2}=\frac{1}{3}(\vec{a}-3\vec{b}+\vec{c})$ から，$\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{BG_2}\perp\overrightarrow{OC}$ なので，

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2-3\vec{a}\cdot\vec{b}+\vec{a}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots③$$

$$\overrightarrow{BG_2}\cdot\overrightarrow{OC}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{c}-3\vec{b}\cdot\vec{c}+|\vec{c}|^2=0\cdots\cdots\cdots④$$

さらに，$\overrightarrow{CG_3}=\frac{1}{3}(\vec{a}+\vec{b}-3\vec{c})$ から，$\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OA}$ かつ $\overrightarrow{CG_3}\perp\overrightarrow{OB}$ なので，

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OA}=0,\ |\vec{a}|^2+\vec{a}\cdot\vec{b}-3\vec{a}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

$$\overrightarrow{CG_3}\cdot\overrightarrow{OB}=0,\ \vec{a}\cdot\vec{b}+|\vec{b}|^2-3\vec{b}\cdot\vec{c}=0\cdots\cdots\cdots⑥$$

すると，①⑥より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，②④より $\vec{a}\cdot\vec{c}=\vec{b}\cdot\vec{c}$，③⑤より $\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{a}\cdot\vec{c}$ となり，k を定数として，

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=\vec{b}\cdot\vec{c}=\vec{a}\cdot\vec{c}=k\cdots\cdots\cdots⑦$$

これより，①⑥は $|\vec{b}|^2=2k$，②④は $|\vec{c}|^2=2k$，③⑤は $|\vec{a}|^2=2k$ となり，

$$|\vec{a}|=|\vec{b}|=|\vec{c}|=\sqrt{2k}\cdots\cdots\cdots⑧$$

ここで，$\vec{b}\cdot\vec{c}=|\vec{b}||\vec{c}|\cos\angle BOC$ から，⑦⑧を代入すると，$k=(\sqrt{2k})^2\cos\angle BOC$

$$\cos\angle BOC=\frac{1}{2},\ \angle BOC=\frac{\pi}{3}$$

同様にすると，$\angle\mathrm{COA}=\angle\mathrm{AOB}=\dfrac{\pi}{3}$ となり，四面体 OABC の面はすべて合同な正三角形である。すなわち，四面体 OABC は正四面体である。

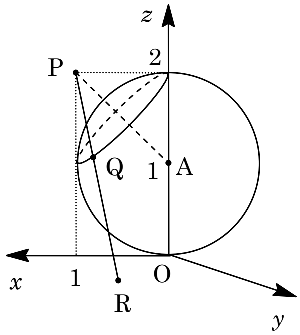
コメント

空間ベクトルの四面体への応用問題です。連立方程式をまとめていくのがポイントです。

問　題

xyz 空間の中で，$(0,\ 0,\ 1)$ を中心とする半径 1 の球面 S を考える。点 Q が $(0,\ 0,\ 2)$ 以外の S 上の点を動くとき，点 Q と点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ の 2 点を通る直線 l と平面 $z=0$ との交点を R とおく。R の動く範囲を求め，図示せよ。 [2015]

解答例



中心を $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ とする半径 1 の球面 S 上にあり，点 $(0,\ 0,\ 2)$ 以外を動く点 Q に対し，点 $\mathrm{P}(1,\ 0,\ 2)$ と点 Q を結ぶ直線 l が平面 $z=0$ と交わる点を $\mathrm{R}(x,\ y,\ 0)$ とおく。

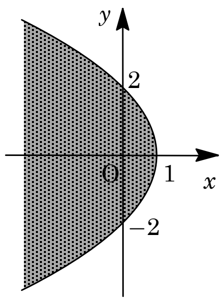
そして，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{PR}}$ のなす角を θ とし，直線 l が球面 S に接するとき，$\theta=45^\circ$ であることに注目すると，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cos\theta=\frac{1}{\sqrt{2}}|\overrightarrow{\mathrm{PA}}||\overrightarrow{\mathrm{PR}}|\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{PA}}=(-1,\ 0,\ -1)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(x-1,\ y,\ -2)$ から，

$$\overrightarrow{\mathrm{PA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{PR}}=-(x-1)+2=-x+3,\ |\overrightarrow{\mathrm{PA}}|=\sqrt{(-1)^2+0+(-1)^2}=\sqrt{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{PR}}|=\sqrt{(x-1)^2+y^2+(-2)^2}=\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$$



①に代入すると，$-x+3=\dfrac{1}{\sqrt{2}}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{x^2+y^2-2x+5}$ となり，$x\leqq 3$ のもとで，

$$(-x+3)^2=x^2+y^2-2x+5,\ x=-\frac{1}{4}y^2+1\cdots\cdots\cdots②$$

②は $x\leqq 3$ を満たし，点 Q が球面 S 上を動くとき，点 R の動く範囲は，②を境界線とし原点を含む側である。

図示すると右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

コメント

20 年以上も前になりますが，そのころ頻出していた点光源の問題です。内積を用いて円錐側面の式を立て，境界線を導いています。この方法の詳細は「ピンポイントレクチャー」を参照してください。

問　題

座標空間における次の 3 つの直線 $l,\ m,\ n$ を考える：

l は点 $\mathrm{A}(1,\ 0,\ -2)$ を通り，ベクトル $\vec{u}=(2,\ 1,\ -1)$ に平行な直線である。

m は点 $\mathrm{B}(1,\ 2,\ -3)$ を通り，ベクトル $\vec{v}=(1,\ -1,\ 1)$ に平行な直線である。

n は点 $\mathrm{C}(1,\ -1,\ 0)$ を通り，ベクトル $\vec{w}=(1,\ 2,\ 1)$ に平行な直線である。

P を l 上の点として，P から $m,\ n$ へ下ろした垂線の足をそれぞれ Q, R とする。このとき，$\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を最小にするような P と，そのときの $\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ を求めよ。

[2014]

解答例

まず，直線 $l,\ m,\ n$ 上の点 P, Q, R は，$p,\ q,\ r$ を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+p\vec{u}=(1,\ 0,\ -2)+p(2,\ 1,\ -1)=(1+2p,\ p,\ -2-p)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+q\vec{v}=(1,\ 2,\ -3)+q(1,\ -1,\ 1)=(1+q,\ 2-q,\ -3+q)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=\overrightarrow{\mathrm{OC}}+r\vec{w}=(1,\ -1,\ 0)+r(1,\ 2,\ 1)=(1+r,\ -1+2r,\ r)$$

すると，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(q-2p,\ 2-q-p,\ -1+q+p)$ となり，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{v}=0$ から，

$$(q-2p)-(2-q-p)+(-1+q+p)=0,\ q-1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

また，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}=(r-2p,\ -1+2r-p,\ 2+r+p)$，$\overrightarrow{\mathrm{PR}}\cdot\vec{w}=0$ より，

$$(r-2p)+2(-1+2r-p)+(2+r+p)=0,\ -p+2r=0\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$q=1$，$r=\dfrac{1}{2}p$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(1-2p,\ 1-p,\ p),\ \overrightarrow{\mathrm{PR}}=\left(-\frac{3}{2}p,\ -1,\ \frac{3}{2}p+2\right)$$

これより，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ とおくと，

$$F(p)=(1-2p)^2+(1-p)^2+p^2+\left(-\frac{3}{2}p\right)^2+1+\left(\frac{3}{2}p+2\right)^2=\frac{21}{2}p^2+7$$

よって，$p=0$ すなわち $\mathrm{P}(1,\ 0,\ -2)$ のとき，$F(p)=\mathrm{PQ}^2+\mathrm{PR}^2$ は最小となり，最小値は 7 である。

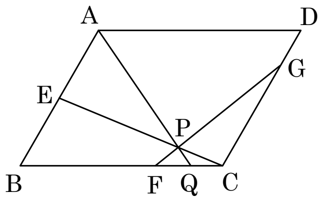
コメント

空間における直線を題材にした基本題です。なお，計算結果は予測を超えて簡単になります。

問　題

平行四辺形 ABCD において，辺 AB を $1:1$ に内分する点を E，辺 BC を $2:1$ に内分する点を F，辺 CD を $3:1$ に内分する点を G とする。線分 CE と線分 FG の交点を P とし，線分 AP を延長した直線と辺 BC との交点を Q とするとき，比 $\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}$ を求めよ。 [2013]

解答例



$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\vec{d}$ とおき，s，t を実数とすると，点 P が線分 FG と線分 CE の交点より，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=s\overrightarrow{\mathrm{AF}}+(1-s)\overrightarrow{\mathrm{AG}}$$
$$=s\left(\vec{b}+\frac{2}{3}\vec{d}\right)+(1-s)\left(\frac{1}{4}\vec{b}+\vec{d}\right)$$
$$=\left(\frac{1}{4}+\frac{3}{4}s\right)\vec{b}+\left(1-\frac{1}{3}s\right)\vec{d}\cdots\cdots\cdots①$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=t\overrightarrow{\mathrm{AC}}+(1-t)\overrightarrow{\mathrm{AE}}=t(\vec{b}+\vec{d})+\frac{1}{2}(1-t)\vec{b}=\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t\right)\vec{b}+t\vec{d}\cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので，①②より，$\frac{1}{4}+\frac{3}{4}s=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}t$，$1-\frac{1}{3}s=t$

まとめると，$t=\frac{8}{11}$ となり，②に代入して，

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}\vec{b}+\frac{8}{11}\vec{d}$$

さらに，点 Q は直線 AP と辺 BC の交点より，k, l を実数として，

$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=k\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{19}{22}k\vec{b}+\frac{8}{11}k\vec{d}\cdots\cdots\cdots③$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+l\overrightarrow{\mathrm{BC}}=\vec{b}+l\vec{d}\cdots\cdots\cdots④$$

$\vec{b}$ と $\vec{d}$ は 1 次独立なので，③④より，$\frac{19}{22}k=1$，$\frac{8}{11}k=l$

すると，$k=\frac{22}{19}$ となり，$\mathrm{AP}:\mathrm{PQ}=1:(k-1)=1:\frac{3}{19}=19:3$ である。

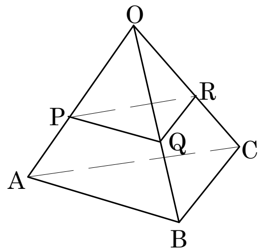
コメント

題材が平行四辺形なので，補助線を引いて，相似を利用する手も考えられます。ただ，実戦的には，上のような解でしょう。

問　題

正四面体 OABC において，点 P, Q, R をそれぞれ辺 OA, OB, OC 上にとる。ただし，P, Q, R は四面体 OABC の頂点とは異なるとする。△PQR が正三角形ならば，3 辺 PQ, QR, RP はそれぞれ 3 辺 AB, BC, CA に平行であることを証明せよ。　　[2012]

解答例



正四面体 OABC において $|\overrightarrow{OA}|=|\overrightarrow{OB}|=|\overrightarrow{OC}|=1$ ……①

としても一般性を失わない。

また，$\angle AOB=\angle BOC=\angle COA=60^\circ$ から，

$$\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}=\overrightarrow{OB}\cdot\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OC}\cdot\overrightarrow{OA}=\frac{1}{2}\ \cdots\cdots\cdots②$$

さて，$0<p<1$，$0<q<1$，$0<r<1$ として，$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA}$，$\overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB}$，$\overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC}$ とおくと，△PQR が正三角形より，

$$|p\overrightarrow{OA}-q\overrightarrow{OB}|=|q\overrightarrow{OB}-r\overrightarrow{OC}|=|r\overrightarrow{OC}-p\overrightarrow{OA}|$$

①②より，$p^2-pq+q^2=q^2-qr+r^2=r^2-rp+p^2$ ………③

③から，$p^2-pq=-qr+r^2$，$p^2-r^2-q(p-r)=0$ となり，

$$(p-r)(p+r-q)=0\ \cdots\cdots\cdots④$$

また，③から，同様にすると，$(p-q)(p+q-r)=0$ ………⑤

そこで，④⑤から，場合分けをすると，

(i)　$p-r=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$p=q=r$

(ii)　$p-r=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$q=0$ となり不適

(iii)　$p+r-q=0$ かつ $p-q=0$ のとき　$r=0$ となり不適

(iv)　$p+r-q=0$ かつ $p+q-r=0$ のとき　$p=0$ となり不適

(i)～(iv)より，$p=q=r$ となり，

$$\overrightarrow{PQ}=p\overrightarrow{AB},\ \overrightarrow{QR}=p\overrightarrow{BC},\ \overrightarrow{RP}=p\overrightarrow{CA}$$

よって，PQ // AB, QR // BC, RP // CA

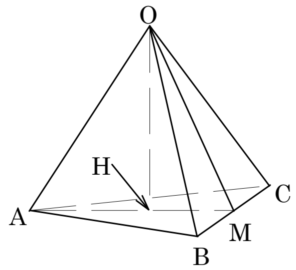
コメント

ベクトルを利用して普通に設定をし，式変形を行っていくと，直感的に正しいと思える結論に到達できます。

問　題

四面体 OABC において，点 O から 3 点 A, B, C を含む平面に下ろした垂線とその平面の交点を H とする。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}$ のとき，$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|$ を求めよ。 [2011]

解答例



条件より，$|\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=2$，$|\overrightarrow{\mathrm{OB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OC}}|=3$………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{BC}}$ より，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot(\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}})=0$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OC}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OB}}$$

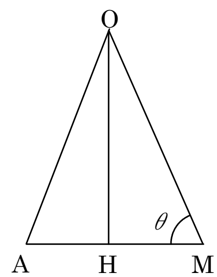
よって，①から，$|\overrightarrow{\mathrm{OC}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|=|\overrightarrow{\mathrm{OB}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}|$ となり

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=\sqrt{7}\ \cdots\cdots\cdots ②$$

さらに，①と $\overrightarrow{\mathrm{OB}}\perp\overrightarrow{\mathrm{OC}}$ より，△OBC は直角二等辺三角形なので，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=3\sqrt{2}$ ………③

さて，辺 BC の中点を M とすると，①より $\mathrm{OM}\perp\mathrm{BC}$，②より $\mathrm{AM}\perp\mathrm{BC}$ であり，点 O から AM に下ろした垂線の足を H′ とすると，OH′ は 3 点 A, B, C を含む平面に垂直となる。すなわち，点 H′ は点 H に一致する。

そこで，①③より，$\mathrm{OM}=3\cos 45^\circ=\dfrac{3}{\sqrt{2}}$



②③より，$\mathrm{AM}=\sqrt{\mathrm{AB}^2-\mathrm{BM}^2}=\sqrt{(\sqrt{7})^2-\left(\dfrac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2}=\dfrac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}$

すると，$\angle\mathrm{OMA}=\theta$ とおくと，余弦定理から，

$$4=\frac{9}{2}+\frac{5}{2}-2\cdot\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{2}}\cos\theta,\quad 3\sqrt{5}\cos\theta=3$$

よって，$\cos\theta=\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ から，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{1}{5}}=\dfrac{2}{\sqrt{5}}$ となり，

$$|\overrightarrow{\mathrm{OH}}|=\mathrm{OM}\sin\theta=\frac{3}{\sqrt{2}}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{3\sqrt{10}}{5}$$

コメント

空間ベクトルで表現された問題ですが，途中から，三角比の知識をもとに解きました。それは，四面体の対称性に着目したためです。

問　題

xyz 空間上の 2 点 $\mathrm{A}(-3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ を通る直線 l に点 $\mathrm{C}(2,\ 3,\ 3)$ から下ろした垂線の足 H の座標を求めよ。 [2009]

解答例

$\mathrm{A}(-3,\ -1,\ 1)$，$\mathrm{B}(-1,\ 0,\ 0)$ に対し，$\overrightarrow{\mathrm{BA}}=(-2,\ -1,\ 1)$ より，直線 l のパラメータ表示は,

$$(x,\ y,\ z)=(-1,\ 0,\ 0)+t(-2,\ -1,\ 1)=(-1-2t,\ -t,\ t)$$

すると, l 上の点 H は，$\mathrm{H}(-1-2t,\ -t,\ t)$ と表せ，点 $\mathrm{C}(2,\ 3,\ 3)$ に対し,

$$\overrightarrow{\mathrm{CH}}=(-3-2t\quad -3-t,\ -3+t)$$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{CH}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{BA}}=0$ なので,

$$-2(-3-2t)-(-3-t)+(-3+t)=0,\ 6t+6=0$$

これより $t=-1$ となり，$\mathrm{H}(1,\ 1,\ -1)$ である。

コメント

有名問題です。ピンポイントレクチャーの「空間図形の方程式」で，同じ内容の問題を扱っています。

問　題

座標空間で点 $(3,\ 4,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{a}=(1,\ 1,\ 1)$ に平行な直線を l, 点 $(2,\ -1,\ 0)$ を通りベクトル $\vec{b}=(1,\ -2,\ 0)$ に平行な直線を m とする。点 P は直線 l 上を, 点 Q は直線 m 上をそれぞれ勝手に動くとき, 線分 PQ の長さの最小値を求めよ。 [2007]

解答例

t, s を実数とすると, 条件より, 直線 l, m のパラメータ表示は,

$$l:(x,\ y,\ z)=(3,\ 4,\ 0)+t(1,\ 1,\ 1)=(3+t,\ 4+t,\ t)$$

$$m:(x,\ y,\ z)=(2,\ -1,\ 0)+s(1,\ -2,\ 0)=(2+s,\ -1-2s,\ 0)$$

これより, $\mathrm{P}(3+t,\ 4+t,\ t)$, $\mathrm{Q}(2+s,\ -1-2s,\ 0)$ とおくことができ,

$$\begin{aligned}\mathrm{PQ}^2 &= (3+t-2-s)^2+(4+t+1+2s)^2+t^2\\ &= 3t^2+5s^2+2st+12t+18s+26=3t^2+2(s+6)t+5s^2+18s+26\\ &= 3\left(t+\frac{s+6}{3}\right)^2-\frac{(s+6)^2}{3}+5s^2+18s+26\\ &= 3\left(t+\frac{s+6}{3}\right)^2+\frac{14}{3}s^2+14s+14=3\left(t+\frac{s+6}{3}\right)^2+\frac{14}{3}\left(s+\frac{3}{2}\right)^2+\frac{7}{2}\end{aligned}$$

よって, $t+\dfrac{s+6}{3}=0$, $s+\dfrac{3}{2}=0$, すなわち $t=s=-\dfrac{3}{2}$ のとき, PQ^2 は最小となり, このとき PQ は最小値 $\sqrt{\dfrac{7}{2}}=\dfrac{\sqrt{14}}{2}$ をとる。

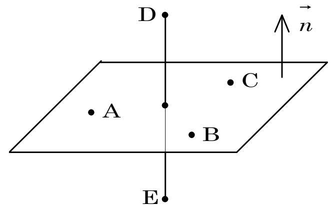
コメント

ねじれの位置にある 2 直線上の点の最短距離を求める問題です。図形的には, 2 直線の共通垂線の長さに対応します。この視点から, $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=0$ かつ $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b}=0$ を解いて, PQ が最小になる s, t の値を求めるという別解も考えられます。

問　題

座標空間上に 4 点 $A(2,\ 1,\ 0)$，$B(1,\ 0,\ 1)$，$C(0,\ 1,\ 2)$，$D(1,\ 3,\ 7)$ がある。3 点 A, B, C を通る平面に関して点 D と対称な点を E とするとき，点 E の座標を求めよ。 [2006]

解答例



まず，$\overrightarrow{BA}=(1,\ 1,\ -1)$，$\overrightarrow{BC}=(-1,\ 1,\ 1)$ となり，平面 ABC の法線ベクトルを $\vec{n}=(a,\ b,\ c)$ とおくと，

$$\overrightarrow{BA}\cdot\vec{n}=a+b-c=0$$
$$\overrightarrow{BC}\cdot\vec{n}=-a+b+c=0$$

よって，$a=c$，$b=0$ となり，$\vec{n}=a(1,\ 0,\ 1)$

すると，平面 ABC の方程式は，

$$(x-2)+z=0,\ x+z=2\cdots\cdots\cdots①$$

さて，$E(p,\ q,\ r)$ とおくと，$\overrightarrow{DE}=(p-1,\ q-3,\ r-7)$

$\overrightarrow{DE}\,/\!/\,\vec{n}$ より，t を実数として $\overrightarrow{DE}=t\vec{n}$ となり，

$$(p-1,\ q-3,\ r-7)=t(1,\ 0,\ 1)$$

よって，$p=t+1$，$q=3$，$r=t+7\cdots\cdots\cdots②$

また，DE の中点 $\left(\dfrac{p+1}{2},\ \dfrac{q+3}{2},\ \dfrac{r+7}{2}\right)$ は，平面 ABC 上にあるので，①より，

$$\frac{p+1}{2}+\frac{r+7}{2}=2,\ p+r+4=0\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$2t+12=0$，$t=-6$

②から，$p=-5$，$q=3$，$r=1$ となり，$E(-5,\ 3,\ 1)$ である。

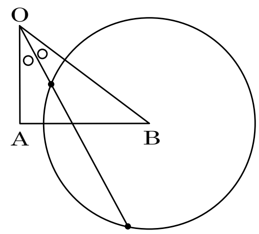
コメント

本年度より，出題範囲に含まれた「代数・幾何」時代の頻出題です。平面の方程式の基本事項は「ピンポイント レクチャー」を参照してください。

問　題

$\triangle$OAB において，$\vec{a}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}$，$\vec{b}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}$とする。$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$，$\cos(\angle\mathrm{AOB})=\dfrac{3}{5}$とする。このとき，$\angle$AOBの二等分線と，B を中心とする半径$\sqrt{10}$の円との交点の，O を原点とする位置ベクトルを，$\vec{a}$，$\vec{b}$を用いて表せ。 [2004]

解答例



$\angle$AOBの二等分線と, Bを中心とする半径$\sqrt{10}$の円との交点をPとおくと，$|\vec{a}|=3$，$|\vec{b}|=5$より, kを実数として,

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=k\left(\frac{\vec{a}}{3}+\frac{\vec{b}}{5}\right)=l(5\vec{a}+3\vec{b})\quad\left(l=\frac{k}{15}\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{BP}}=\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OB}}=5l\vec{a}+(3l-1)\vec{b}$$

$|\overrightarrow{\mathrm{BP}}|=\sqrt{10}$より，$|5l\vec{a}+(3l-1)\vec{b}|^2=10$

$$25l^2|\vec{a}|^2+10l(3l-1)\vec{a}\cdot\vec{b}+(3l-1)^2|\vec{b}|^2=10$$

ここで，$\vec{a}\cdot\vec{b}=3\cdot5\cdot\dfrac{3}{5}=9$より，

$$225l^2+90l(3l-1)+25(3l-1)^2=10,\quad 48l^2-16l+1=0$$

$(12l-1)(4l-1)=0$より，$l=\dfrac{1}{12}$，$\dfrac{1}{4}$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{12}(5\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{5}{12}\vec{a}+\dfrac{1}{4}\vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\dfrac{1}{4}(5\vec{a}+3\vec{b})=\dfrac{5}{4}\vec{a}+\dfrac{3}{4}\vec{b}$

コメント

ひし形の対角線が内角を二等分するという有名な見方で立式しています。なお，$\triangle$OABは直角三角形ですが，この特質は利用していません。

問　題

四面体 OABC は次の 2 つの条件

(i)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}} \perp \overrightarrow{\mathrm{BC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AC}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} \perp \overrightarrow{\mathrm{AB}}$

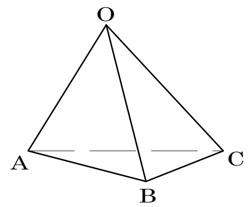
(ii)　4 つの面の面積がすべて等しい

を満たしている。このとき，この四面体は正四面体であることを示せ。　[2003]

解答例

$\overrightarrow{\mathrm{OA}} = \vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}} = \vec{b}$，$\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \vec{c}$ とおくと，条件(i)より，

$$\vec{a}\cdot(\vec{c}-\vec{b}) = 0,\ \vec{a}\cdot\vec{c} = \vec{a}\cdot\vec{b}$$
$$\vec{b}\cdot(\vec{c}-\vec{a}) = 0,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{b}\cdot\vec{a}$$
$$\vec{c}\cdot(\vec{b}-\vec{a}) = 0,\ \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a}$$



まとめて，$\vec{a}\cdot\vec{b} = \vec{b}\cdot\vec{c} = \vec{c}\cdot\vec{a} = k$ ……①とおく。

また，条件(ii)より，$\triangle\mathrm{OAB} = \triangle\mathrm{OBC} = \triangle\mathrm{OCA}$ から，

$$\frac{1}{2}\sqrt{|\vec{a}|^2|\vec{b}|^2 - (\vec{a}\cdot\vec{b})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{b}|^2|\vec{c}|^2 - (\vec{b}\cdot\vec{c})^2} = \frac{1}{2}\sqrt{|\vec{c}|^2|\vec{a}|^2 - (\vec{c}\cdot\vec{a})^2}$$

①より，$|\vec{a}||\vec{b}| = |\vec{b}||\vec{c}| = |\vec{c}||\vec{a}|$

まとめて，$|\vec{a}| = |\vec{b}| = |\vec{c}| = l$ ……②とおく。

ここで，①②より，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2 = |\vec{b}-\vec{a}|^2 = l^2 - 2k + l^2 = 2(l^2 - k)$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 = |\vec{c}-\vec{a}|^2 = l^2 - 2k + l^2 = 2(l^2 - k)$$
$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}} = (\vec{b}-\vec{a})(\vec{c}-\vec{a}) = k - k - k + l^2 = l^2 - k$$

すると，$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2 - (\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}})^2}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC} = \frac{1}{2}\sqrt{4(l^2-k)^2 - (l^2-k)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2}$$

さらに，$\triangle\mathrm{ABC} = \triangle\mathrm{OAB}$ より，$\frac{1}{2}\sqrt{3(l^2-k)^2} = \frac{1}{2}\sqrt{l^4 - k^2}$

$$3(l^2-k)^2 = (l^2-k)(l^2+k),\ 3(l^2-k) = l^2+k,\ l^2 = 2k \text{ ………③}$$

③より，$\cos\angle\mathrm{AOB} = \dfrac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|} = \dfrac{k}{l^2} = \dfrac{1}{2}$ から，$\angle\mathrm{AOB} = 60^\circ$ となる。

同様にして，$\angle\mathrm{BOC} = \angle\mathrm{COA} = 60^\circ$ なので，$\triangle\mathrm{OAB}$，$\triangle\mathrm{OBC}$，$\triangle\mathrm{OCA}$ は正三角形となり，四面体 OABC は正四面体である。

コメント

頂角が 60° の二等辺三角形は正三角形という方針で解をつくりました。

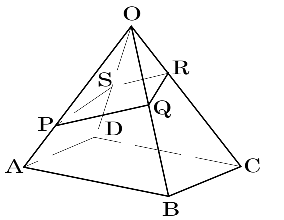
問　題

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD は $\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ を満たしており，0 と異なる 4 つの実数 $p,\ q,\ r,\ s$ に対して 4 点 P, Q, R, S を

$$\overrightarrow{OP}=p\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OQ}=q\overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OR}=r\overrightarrow{OC},\ \overrightarrow{OS}=s\overrightarrow{OD}$$

によって定める。このとき P, Q, R, S が同一平面上にあれば，$\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{r}=\dfrac{1}{q}+\dfrac{1}{s}$ が成立することを示せ。　[2002]

解答例



4 点 P, Q, R, S が同一平面上にあるので，$a,\ b$ を実数として，

$$\overrightarrow{OS}=a\overrightarrow{OP}+b\overrightarrow{OQ}+(1-a-b)\overrightarrow{OR}$$

条件より，$s\overrightarrow{OD}=ap\overrightarrow{OA}+bq\overrightarrow{OB}+(1-a-b)r\overrightarrow{OC}$

ここで，$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OD}$ なので，

$$\overrightarrow{OD}=\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB}$$

よって，$s(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})=ap\overrightarrow{OA}+bq\overrightarrow{OB}+(1-a-b)r\overrightarrow{OC}$

$$(s-ap)\overrightarrow{OA}+(-s-bq)\overrightarrow{OB}+(s-r+ar+br)\overrightarrow{OC}=\vec{0}$$

$\overrightarrow{OA},\ \overrightarrow{OB},\ \overrightarrow{OC}$ は 1 次独立なので，

$$s-ap=0\ \cdots\cdots\text{①},\ -s-bq=0\ \cdots\cdots\text{②},\ s-r+ar+br=0\ \cdots\cdots\text{③}$$

①より $a=\dfrac{s}{p}$，②より $b=-\dfrac{s}{q}$

③に代入して，$s-r+\dfrac{sr}{p}-\dfrac{sr}{q}=0$，$\dfrac{sr}{p}+s=\dfrac{sr}{q}+r$ となり，

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{r}=\frac{1}{q}+\frac{1}{s}$$

コメント

4 点が同一平面上にある条件についての基本問題です。

問　題

xy 平面内の相異なる 4 点 P_1，P_2，P_3，P_4 とベクトル $\vec{v}$ に対し，$k \neq m$ のとき $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} \neq 0$ が成り立っているとする。このとき，k と異なるすべての m に対し，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在することを示せ。　[2001]

解答例

$\mathrm{P}_1(x_1,\ y_1)$，$\mathrm{P}_2(x_2,\ y_2)$，$\mathrm{P}_3(x_3,\ y_3)$，$\mathrm{P}_4(x_4,\ y_4)$ とし，$\vec{v} = (1,\ 0)$ とおいても一般性は失われない。

すると，条件より，任意の k，m に対して $\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} = x_m - x_k \neq 0$ なので，x_1，x_2，x_3，x_4 の間に大小関係が生じ，その中で最大なものを x_k とおくと，k と異なるすべての m に対して，$x_m - x_k < 0$ となる。

すなわち，k と異なるすべての m に対して，$\overrightarrow{\mathrm{P}_k\mathrm{P}_m} \cdot \vec{v} < 0$ が成り立つような点 P_k が存在する。

コメント

成分を用いた解を考えました。書き方がやや雑な感じもしますが……。

問　題

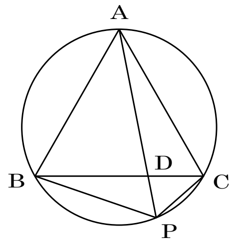
円に内接する四角形 ABPC は次の条件(イ), (ロ)を満たすとする。

(イ)　三角形 ABC は正三角形である。

(ロ)　AP と BC の交点は線分 BC を $p:1-p$ $(0<p<1)$ の比に内分する。

このときベクトル $\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ を $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$，$\overrightarrow{\mathrm{AC}}$, p を用いて表せ。 [2000]

解答例



対角線 AP と BC の交点を D とすると，条件(ロ)より，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=p:(1-p)$ なので,

$$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(1-p)\overrightarrow{\mathrm{AB}}+p\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

ここで，正三角形 ABC の 1 辺の長さを 1 としても，一般性は失われないので,

$$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|=|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|=|\overrightarrow{\mathrm{BC}}|=1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}=1\cdot1\cdot\cos60^\circ=\frac{1}{2}$$

$$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|^2=(1-p)^2|\overrightarrow{\mathrm{AB}}|^2+2(1-p)p\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AC}}+p^2|\overrightarrow{\mathrm{AC}}|^2$$

$$=(1-p)^2+(1-p)p+p^2=1-p+p^2$$

よって，$|\overrightarrow{\mathrm{AD}}|=\sqrt{1-p+p^2}$

ここで，方べきの定理より，$\mathrm{AD}\cdot\mathrm{DP}=\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}$

$$\mathrm{DP}=\frac{\mathrm{BD}\cdot\mathrm{DC}}{\mathrm{AD}}=\frac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}$$

すると，$\mathrm{AD}:\mathrm{AP}=\sqrt{1-p+p^2}:\left(\sqrt{1-p+p^2}+\dfrac{p(1-p)}{\sqrt{1-p+p^2}}\right)$

$$=(1-p+p^2):(1-p+p^2+p-p^2)$$

$$=(1-p+p^2):1$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=\frac{1}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AD}}=\frac{1-p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}+\frac{p}{1-p+p^2}\overrightarrow{\mathrm{AC}}$$

コメント

方べきの定理が活躍する構図の設問です。まず，1 問完答ではずみをつける問題です。

問　題

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=(\cos 60°,\ \sin 60°,\ 0)$とする。

(1)　長さ 1 の空間ベクトル$\vec{c}$に対し，$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}$，$\cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}$とおく。このとき次の不等式(∗)が成り立つことを示せ。

$$(*)\quad \cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　不等式(∗)を満たす$(\alpha,\ \beta)$ $(0°\leqq\alpha\leqq 180°,\ 0°\leqq\beta\leqq 180°)$の範囲を図示せよ。

[2000]

解答例

(1)　$\vec{c}=(p,\ q,\ r)$とおくと，$|\vec{c}|=1$より，$p^2+q^2+r^2=1$

$\vec{a}=(1,\ 0,\ 0)$，$\vec{b}=\left(\frac{1}{2},\ \frac{\sqrt{3}}{2},\ 0\right)$から，

$$\cos\alpha=\vec{a}\cdot\vec{c}=p,\quad \cos\beta=\vec{b}\cdot\vec{c}=\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q$$

ここで，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta=p^2-p\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)+\left(\frac{1}{2}p+\frac{\sqrt{3}}{2}q\right)^2$

$$=\frac{3}{4}p^2+\frac{3}{4}q^2=\frac{3}{4}(1-r^2)\leqq\frac{3}{4}$$

(2)　(1)より，$\cos^2\alpha-\cos\alpha\cos\beta+\cos^2\beta-\frac{3}{4}\leqq 0$

$$\frac{1+\cos 2\alpha}{2}-\frac{1}{2}\{\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)\}+\frac{1+\cos 2\beta}{2}-\frac{3}{4}\leqq 0$$

$$\cos 2\alpha+\cos 2\beta-\cos(\alpha+\beta)-\cos(\alpha-\beta)+\frac{1}{2}\leqq 0$$

$$4\cos(\alpha+\beta)\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha+\beta)-2\cos(\alpha-\beta)+1\leqq 0$$

$$\{2\cos(\alpha+\beta)-1\}\{2\cos(\alpha-\beta)-1\}\leqq 0$$

ここで，$0°\leqq\alpha+\beta\leqq 360°$，$-180°\leqq\alpha-\beta\leqq 180°$に注意して，

(i)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\geqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\leqq 0$のとき

$\cos(\alpha+\beta)\geqq\frac{1}{2}$……①，$\cos(\alpha-\beta)\leqq\frac{1}{2}$……②

①より，$0°\leqq\alpha+\beta\leqq 60°$または$300°\leqq\alpha+\beta\leqq 360°$

$-\alpha\leqq\beta\leqq-\alpha+60°$または$-\alpha+300°\leqq\beta\leqq-\alpha+360°$

②より，$-180°\leqq\alpha-\beta\leqq-60°$または$60°\leqq\alpha-\beta\leqq 180°$

$\alpha+60°\leqq\beta\leqq\alpha+180°$または$\alpha-180°\leqq\beta\leqq\alpha-60°$

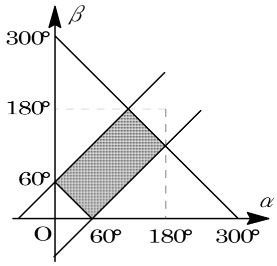
(ii)　$2\cos(\alpha+\beta)-1\leqq 0$かつ$2\cos(\alpha-\beta)-1\geqq 0$のとき

$\cos(\alpha+\beta)\leqq\frac{1}{2}$……③，$\cos(\alpha-\beta)\geqq\frac{1}{2}$……④

③より $60° \leqq \alpha+\beta \leqq 300°$，$-\alpha+60° \leqq \beta \leqq -\alpha+300°$

④より $-60° \leqq \alpha-\beta \leqq 60°$，$\alpha-60° \leqq \beta \leqq \alpha+60°$

(i)(ii)より，点$(\alpha,\ \beta)$ $(0° \leqq \alpha \leqq 180°,\ 0° \leqq \beta \leqq 180°)$の範囲は右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



コメント

(2)は，もとの設定を無視して不等式を変形していくと，結論が見えてきます。

問　題

次の問いに答えよ。ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ であることは用いてよい。

(1) 100 桁以下の自然数で，2 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。

(2) 100 桁の自然数で，2 と 5 以外の素因数をもたないものの個数を求めよ。 [2017]

解答例

(1) 2 以外の素因数をもたない自然数は，m を整数として，2^0，2^1，2^2，…，2^m と表される。そのうち，100 桁以下のものは，$2^m < 10^{100}$ から，

$$m\log_{10} 2 < 100,\ m < \frac{100}{\log_{10} 2}$$

ここで，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$ から $332.1 < \dfrac{100}{\log_{10} 2} < 332.3$ となり，$m \leqq 332$ より，100 桁以下で 2 以外の素因数をもたない自然数の個数は 333 である。

(2) 2 と 5 以外の素因数をもたない 100 桁の自然数は，m, n を 0 以上の整数として，

$$10^{99} \leqq 2^m 5^n < 10^{100} \cdots\cdots\cdots①$$

(i) $m \geqq n$ のとき

$m = 99 + k$，$n = 99 - l$ ($k \geqq 0$, $0 \leqq l \leqq 99$) とおくと，①より，

$$10^{99} \leqq 2^{99+k} 5^{99-l} < 10^{100},\ 1 \leqq 2^k 5^{-l} < 10,\ 5^l \leqq 2^k < 2\cdot 5^{l+1} \cdots\cdots\cdots②$$

ここで，$l = 0, 1, 2, \cdots, 99$ とすると，②から，

$$1 \leqq 2^k < 2\cdot 5^1,\ 5^1 \leqq 2^k < 2\cdot 5^2,\ 5^2 \leqq 2^k < 2\cdot 5^3,\ \cdots,\ 5^{99} \leqq 2^k < 2\cdot 5^{100}$$

さらに，これらの不等式を，$10^l \leqq 2^{k+l} < 10^{l+1}$ と変形をすると，

$$1 \leqq 2^k < 10,\ 10 \leqq 2^{k+1} < 10^2,\ 10^2 \leqq 2^{k+2} < 10^3,\ \cdots,\ 10^{99} \leqq 2^{k+99} < 10^{100}$$

すると，これらの不等式を満たす k の個数の総数は，$2^m < 10^{100}$ となる m の個数に一致する。すなわち，(1)より，その個数は 333 である。

よって，②を満たす$(k,\ l)$は，$m = n$ のとき 1 個，$m > n$ のとき 332 個ある。

(ii) $m \leqq n$ のとき

$m = 99 - i$，$n = 99 + j$ ($0 \leqq i \leqq 99$, $j \geqq 0$) とおくと，①より，

$$10^{99} \leqq 2^{99-i} 5^{99+j} < 10^{100},\ 1 \leqq 2^{-i} 5^j < 10,\ 2^i \leqq 5^j < 5\cdot 2^{i+1} \cdots\cdots\cdots③$$

ここで，$i = 0, 1, 2, \cdots, 99$ とすると，③から，

$$1 \leqq 5^j < 5\cdot 2^1,\ 2^1 \leqq 5^j < 5\cdot 2^2,\ 2^2 \leqq 5^j < 5\cdot 2^3,\ \cdots,\ 2^{99} \leqq 5^j < 5\cdot 2^{100}$$

さらに，これらの不等式を，$10^i \leqq 5^{j+i} < 10^{i+1}$ と変形をすると，

$$1 \leqq 5^j < 10,\ 10 \leqq 5^{j+1} < 10^2,\ 10^2 \leqq 5^{j+2} < 10^3,\ \cdots,\ 10^{99} \leqq 5^{j+99} < 10^{100}$$

すると，これらの不等式を満たす j の個数の総数は，$5^n < 10^{100}$ となる n の個数に一致する。

ここで，(1)と同様にすると，$n<\dfrac{100}{\log_{10}5}=\dfrac{100}{1-\log_{10}2}$

そして，$143.0<\dfrac{100}{1-\log_{10}2}<143.1$ から $n\leqq 143$ より，n の個数は 144 である。

よって，③を満たす$(i,\ j)$は，$m=n$ のとき 1 個，$m<n$ のとき 143 個ある。

(i)(ii)より，①を満たす$(m,\ n)$の個数は，$1+332+143=476$ である。

コメント

(2)は①を満たす$(m,\ n)$の個数を求めるために，まず各辺に対数をとって格子点の個数と考えたものの，無理そうなので方針を転換しました。次に，すぐわかることですが，$(m,\ n)=(99,\ 99)$ は②を満たし，その 99 から m，n の値をともに増やした$(m,\ n)$，ともに減らした$(m,\ n)$は②を満たしません。このことから，(i)として m を増やし n を減らす，(ii)として m を減らし n を増やすと場合分けをしています。そして，解答例のように，不等式②を$10^l\leqq 2^{k+l}<10^{l+1}$ と変形すると，(1)の結論がストレートに利用でき，意外な展開でした。

問　題

p，q を自然数，α，β を，$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ を満たす実数とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　次の条件 (A) $\tan(\alpha+2\beta)=2$ を満たす p，q の組$(p,\ q)$のうち，$q\leqq 3$ であるものをすべて求めよ。

(2)　条件(A)を満たす p，q の組$(p,\ q)$で，$q>3$ であるものは存在しないことを示せ。

[2017]

解答例

(1)　$\tan\alpha=\dfrac{1}{p}$ ……①，$\tan\beta=\dfrac{1}{q}$ ……②，$\tan(\alpha+2\beta)=2$ ……③に対して，p は自然数，また q は 3 以下の自然数から $q=1,\ 2,\ 3$ である。

(i)　$q=1$ のとき

②より，$\tan\beta=1$ から，n を整数として，$\beta=n\pi+\dfrac{\pi}{4}$ となり，①より，

$$\tan(\alpha+2\beta)=\tan\left(\alpha+2n\pi+\frac{\pi}{2}\right)=-\frac{1}{\tan\alpha}=-p$$

すると，③より $p=-2$ となり，不適である。

(ii)　$q=2$ のとき

②より，$\tan\beta=\dfrac{1}{2}$ となり，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\frac{1}{2}}{1-\frac{1}{4}}=\dfrac{4}{3}$ である。すると，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{4}{3}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{4}{3}\right),\ \ \frac{11}{3p}=\frac{2}{3}$$

よって，$p=\dfrac{11}{2}$ となり，不適である。

(iii)　$q=3$ のとき

②より，$\tan\beta=\dfrac{1}{3}$ となり，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{9}}=\dfrac{3}{4}$ である。すると，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{3}{4}=2\left(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{3}{4}\right),\ \ \frac{5}{2p}=\frac{5}{4}$$

よって，$p=2$ となり，適する。

(i)～(iii)より，$(p,\ q)=(2,\ 3)$ である。

(2)　q が $q>3$ の自然数のとき，②から，$\tan 2\beta=\dfrac{2\cdot\dfrac{1}{q}}{1-\dfrac{1}{q^2}}=\dfrac{2q}{q^2-1}$ となり，①③より，

$$\frac{1}{p}+\frac{2q}{q^2-1}=2\Big(1-\frac{1}{p}\cdot\frac{2q}{q^2-1}\Big),\ \ 2(q^2-q-1)p=q^2+4q-1$$

$q>3$ のとき $q^2-q-1=q(q-1)-1>0$ から，$p=\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}$ ………④

ここで，p は自然数より，④から $\dfrac{q^2+4q-1}{2(q^2-q-1)}\geqq 1$ となり，

$$q^2+4q-1\geqq 2(q^2-q-1),\ \ q^2-6q-1\leqq 0$$

これより，$3-\sqrt{10}\leqq q\leqq 3+\sqrt{10}$ となり，$3<\sqrt{10}<4$ から $q\geqq 7$ のときは p は自然数ではなく不適である。そこで，以下，$q=4$，5，6 の場合について調べる。

(iv)　$q=4$ のとき　④より，$p=\dfrac{16+16-1}{2(16-4-1)}=\dfrac{31}{22}$ となり不適である。

(v)　$q=5$ のとき　④より，$p=\dfrac{25+20-1}{2(25-5-1)}=\dfrac{22}{19}$ となり不適である。

(vi)　$q=6$ のとき　④より，$p=\dfrac{36+24-1}{2(36-6-1)}=\dfrac{59}{58}$ となり不適である。

(iv)～(vi)より，条件(A)を満たす$(p,\ q)$で，$q>3$ であるものは存在しない。

コメント

誘導にしたがって解答例を作りましたので，やや冗長な感じがします。まず，(2)で一般的な関係式を導いた後，(1)の数値をあてはめても構いません。

問　題

n を 4 以上の自然数とする。数 2, 12, 1331 がすべて n 進法で表記されているとして，$2^{12}=1331$ が成り立っている。このとき n はいくつか。十進法で答えよ。

[2016]

解答例

$n\geqq 4$ のとき, n 進法を十進法に直すと,

$$2_{(n)}=2\,,\ 12_{(n)}=n+2\,,\ 1331_{(n)}=n^3+3n^2+3n+1$$

すると, 条件より, n 進法で $2^{12}=1331$ から, 十進法では,

$$2^{n+2}=n^3+3n^2+3n+1\,,\ 2^{n+2}=(n+1)^3$$

ここで, $l=n+1$ とおくと, l は 5 以上の自然数となり, $2^{l+1}=l^3$ ………(＊)

(＊)を満たす l は 5 以上の 2 の累乗数になり, 最小の $l=2^3=8$ のときは,

$$2^{l+1}=2^{8+1}=2^9\,,\ l^3=(2^3)^3=2^9$$

よって, (＊)は成立している。

そこで次に, $l\geqq 9$ のときは, $2^{l+1}>l^3$ であることを数学的帰納法で証明する。

(i)　$l=9$ のとき　$2^{l+1}=2^{10}=1024\,,\ l^3=9^3=729$ より成立。

(ii)　$l=k$ のとき　$2^{k+1}>k^3$ と仮定すると, $2^{k+2}>2k^3$ ………①

ここで, $2k^3-(k+1)^3=k^3-3k^2-3k-1$ より, x を 9 以上の実数として,

$$f(x)=x^3-3x^2-3x-1$$

$$f'(x)=3x^2-6x-3=3(x^2-2x-1)=3\{(x-1)^2-2\}$$

これより, $x\geqq 9$ で $f'(x)>0$ となり, $f(x)\geqq f(9)=2\cdot 9^3-10^3>0$ である。

よって, $k^3-3k^2-3k-1>0$, すなわち $2k^3>(k+1)^3$ ………②

①②より, $2^{k+2}>(k+1)^3$ となり, $l=k+1$ のときも成立する。

(i)(ii)より, $l\geqq 9$ のとき, $2^{l+1}>l^3$ である。

以上より, (＊)を満たす l は $l=8$ だけとなり, このとき n の値は $n=7$ である。

コメント

記数法を題材とした整数問題です。詰めの部分は, 指数関数と 3 次関数のグラフを対応させて明らかとするとアバウトすぎると思い, 数学的帰納法で, しかも関数まで設定して無理やり押さえ込んでいます。

問　題

次の式 $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$で定められる数列$\{a_n\}$を考える。

(1) 数列$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2) 次の不等式 $a_n^2-2a_n>10^{15}$ を満たす最小の自然数 n を求めよ。ただし，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$であることは用いてよい。 [2014]

解答例

(1) $a_1=2$，$a_{n+1}=2a_n-1$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$に対して，

$$a_{n+1}-1=2(a_n-1)$$

これより，$a_n-1=(a_1-1)\cdot 2^{n-1}=2^{n-1}$となり，$a_n=2^{n-1}+1$

(2) nを自然数として，不等式 $a_n^2-2a_n>10^{15}$……①に対して，(1)より，

$$a_n^2-2a_n=(a_n-1)^2-1=(2^{n-1})^2-1=2^{2(n-1)}-1$$

①に代入すると，$2^{2(n-1)}-1>10^{15}$………②

ここで，n が 2 以上の自然数のとき$2^{2(n-1)}-1$は奇数，また10^{15}は偶数なので，$2^{2(n-1)}-1=10^{15}$を満たす自然数nは存在しない。

よって，②を満たす自然数nは，$2^{2(n-1)}>10^{15}$……③を満たすnと等しい。

さて，③の両辺に対数をとると，$\log_{10}2^{2(n-1)}>\log_{10}10^{15}$から，

$$2(n-1)\log_{10}2>15,\quad n-1>\frac{15}{2\log_{10}2}\ \cdots\cdots\cdots④$$

そこで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$から，$\dfrac{15}{0.6022}<\dfrac{15}{2\log_{10}2}<\dfrac{15}{0.6020}$であり，

$$24.90<\frac{15}{2\log_{10}2}<24.92$$

よって，④を満たす自然数 n は，$n-1\geqq 25$から$n\geqq 26$となり，不等式①を満たす最小の自然数nは26である。

コメント

細かい詰めや数値計算はやや面倒ですが，設問の流れは明快です。

問　題

n と k を自然数とし，整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った余りを $ax+b$ とする。

(1)　a と b は整数であることを示せ。

(2)　a と b をともに割り切る素数は存在しないことを示せ。　　[2013]

解答例

(1)　整式 x^n を整式 $(x-k)(x-k-1)$ で割った商を $q(x)$，余りを $ax+b$ とするとき，

$$x^n=(x-k)(x-k-1)q(x)+ax+b\cdots\cdots\cdots①$$

①に $x=k$，$k+1$ をそれぞれ代入すると，

$$k^n=ak+b\cdots\cdots\cdots②,\ (k+1)^n=ak+a+b\cdots\cdots\cdots③$$

②③より，$a=(k+1)^n-k^n$ となり，n と k は自然数なので，a は整数である。

すると，②は，$b=k^n-ak$ なので，b も整数である。

(2)　a と b がともに素数 p で割り切れるとすると，a_0，b_0 を整数として，

$$a=a_0p,\ b=b_0p$$

②③に代入すると，

$$k^n=a_0pk+b_0p\cdots\cdots\cdots④,\ (k+1)^n=a_0pk+a_0p+b_0p\cdots\cdots\cdots⑤$$

④より，k^n は p を約数にもつ，すなわち k は p を約数にもつ。

⑤より，$(k+1)^n$ は p を約数にもつ，すなわち $k+1$ は p を約数にもつ。

すると，k と $k+1$ はともに素数 p を約数にもつことになるが，これは k と $k+1$ が互いに素であることと矛盾する。

よって，a と b をともに割り切る素数は存在しない。

コメント

$(k+1)-k=1$ から，k と $k+1$ は互いに素です。昨年，東大・理系でも，この点に着目する問題が出されています。

問　題

0 以上の整数を 10 進法で表すとき，次の問いに答えよ。ただし，0 は 0 桁の数と考えることにする。また n は正の整数とする。

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数を考える。それらすべての整数の総和を T_n とする。T_n を n を用いて表せ。

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数を考える。それらすべての整数の総和を S_n とする。S_n が T_n の 15 倍以上になるのは，n がいくつ以上のときか。必要があれば，$0.301<\log_{10}2<0.302$ および $0.477<\log_{10}3<0.478$ を用いてもよい。　[2011]

解答例

(1)　各桁の数が 1 または 2 である n 桁の整数は，全部で 2^n 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 1 が 2^{n-1} 個，2 が 2^{n-1} 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 T_n は，

$$T_n=(1+2)\times2^{n-1}\times10^{n-1}+(1+2)\times2^{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times2^{n-1}$$
$$=3\cdot2^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)=3\cdot2^{n-1}\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=\frac{1}{3}\cdot2^{n-1}(10^n-1)$$

(2)　各桁の数が 0，1，2 のいずれかである n 桁以下の整数は，全部で 3^n 個あり，これらの整数全体について，どの位にも 0 が 3^{n-1} 個，1 が 3^{n-1} 個，2 が 3^{n-1} 個だけ現れる。これより，すべての整数の和 S_n は，

$$S_n=(1+2)\times3^{n-1}\times10^{n-1}+(1+2)\times3^{n-1}\times10^{n-2}+\cdots+(1+2)\times3^{n-1}$$
$$=3\cdot3^{n-1}(10^{n-1}+10^{n-2}+\cdots+1)=3^n\cdot\frac{10^n-1}{10-1}=3^{n-2}(10^n-1)$$

さて，条件より，$S_n\geqq15T_n$ なので，$3^{n-2}(10^n-1)\geqq5\cdot2^{n-1}(10^n-1)$ となり，

$$3^{n-2}\geqq10\cdot2^{n-2},\ \left(\frac{3}{2}\right)^{n-2}\geqq10$$

両辺の対数をとって，$(n-2)(\log_{10}3-\log_{10}2)\geqq1$，$n-2\geqq\dfrac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}$

ここで，$0.175=0.477-0.302<\log_{10}3-\log_{10}2<0.478-0.301=0.177$ から，

$$5.6<\frac{1}{\log_{10}3-\log_{10}2}<5.8$$

よって，n は整数から，$n\geqq8$ である。

コメント

経験がなくても，具体的に考えていけば，T_n や S_n は求めることができます。後半の対数計算も基本的です。

問　題

p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は p で何回割り切れるか。 [2009]

解答例

p を素数, n を正の整数とするとき，$(p^n)!$ は,

$$(p^n)! = 1\times 2\times\cdots\times p\times\cdots\times p^2\times\cdots\times p^3\times\cdots\cdots\times p^n$$

さて，1 から p^n までの整数で，$p^k\ (1\leqq k\leqq n)$ の倍数は $\dfrac{p^n}{p^k} = p^{n-k}$ 個ある。すなわち, p の倍数は p^{n-1} 個，p^2 の倍数は p^{n-2} 個，…，p^{n-1} の倍数は p 個，p^n の倍数は 1 個となる。

すると，$(p^n)!$ を素因数分解したとき, p の個数は,

$$p^{n-1} + p^{n-2} + \cdots + p + 1 = \frac{p^n - 1}{p-1}$$

したがって，$(p^n)!$ は p で $\dfrac{p^n-1}{p-1}$ 回割り切れる。

コメント

$p=3$，$n=4$ の場合を具体的に考え，実験をしました。その結果を一般化したのが，上の解です。

問　題

p を 3 以上の素数とする。4 個の整数 a, b, c, d が次の 3 条件

$$a+b+c+d=0,\ ad-bc+p=0,\ a \geqq b \geqq c \geqq d$$

を満たすとき, a, b, c, d を p を用いて表せ。 [2007]

解答例

まず, $a+b+c+d=0$ ……①, $ad-bc+p=0$ ……②より,

$$a(-a-b-c)-bc+p=0,\ a^2+ab+ac+bc=p$$

変形して, $(a+b)(a+c)=p$ ………③

ここで, $a \geqq b \geqq c \geqq d$ ……④より, $a+b \geqq a+c$

①④より, $0=a+b+c+d \leqq a+b+a+b=2(a+b)$ から, $a+b \geqq 0$

よって, p は素数なので, ③から,

$$a+b=p\ \cdots\cdots\cdots⑤,\ a+c=1\ \cdots\cdots\cdots⑥$$

⑤より $b=p-a$ …… ⑤′, ⑥より $c=1-a$ …… ⑥′

①から, $d=-a-(p-a)-(1-a)=-p-1+a$ ………⑦

⑤′ ⑥′ ⑦を④に代入すると, $a \geqq p-a \geqq 1-a \geqq -p-1+a$ となり,

$$a \geqq p-a\ \cdots\cdots\cdots⑧,\ p-a \geqq 1-a\ \cdots\cdots\cdots⑨,\ 1-a \geqq -p-1+a\ \cdots\cdots\cdots⑩$$

⑧より $a \geqq \dfrac{p}{2}$, ⑩より $a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ となり, $\dfrac{p}{2} \leqq a \leqq \dfrac{p}{2}+1$ ………⑪

また, ⑨は $p \geqq 1$ となり成立する。

そこで, p は 3 以上の素数, すなわち奇数であることを用いると, ⑪から,

$$a=\frac{p+1}{2}$$

すると, ⑤′ ⑥′ ⑦から,

$$b=p-\frac{p+1}{2}=\frac{p-1}{2},\ c=1-\frac{p+1}{2}=\frac{-p+1}{2},\ d=-p-1+\frac{p+1}{2}=\frac{-p-1}{2}$$

コメント

味わい深い整数問題です。不等式によって値が定まりますが, そのポイントは, 2 以外の素数は奇数という事実です。

問　題

$a^3-b^3=65$ を満たす整数の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。 [2005]

解答例

$a^3-b^3=65$ より，$(a-b)(a^2+ab+b^2)=65$

ここで, a, b は整数なので，$a-b$，a^2+ab+b^2 はともに整数である。

さらに，$a^2+ab+b^2=\left(a+\frac{b}{2}\right)^2+\frac{3}{4}b^2\geqq 0$ より，$a-b$，a^2+ab+b^2 は $65=5\times13$ の正の約数となる。

(i)　$a-b=1$，$a^2+ab+b^2=65$ のとき

$a=b+1$ より，$(b+1)^2+(b+1)b+b^2=65$ から,

$$3b^2+3b=64$$

左辺は 3 の倍数, 右辺は 3 の倍数でないことより，成立しない。

(ii)　$a-b=5$，$a^2+ab+b^2=13$ のとき

$a=b+5$ より，$(b+5)^2+(b+5)b+b^2=13$ から,

$$b^2+5b+4=0$$

これより，$b=-1,\ -4$ となり，$(a,\ b)=(4,\ -1),\ (1,\ -4)$

(iii)　$a-b=13$，$a^2+ab+b^2=5$ のとき

$a=b+13$ より，$(b+13)^2+(b+13)b+b^2=5$ から,

$$3b^2+39b=-164$$

左辺は 3 の倍数, 右辺は 3 の倍数でないことより，成立しない。

(iv)　$a-b=65$，$a^2+ab+b^2=1$ のとき

$a=b+65$ より，$(b+65)^2+(b+65)b+b^2=1$ から,

$$b^2+65b+1408=0$$

すると，$D=65^2-4\times1408=-1407<0$ から, b は虚数となり不適。

(i)～(iv)より，$(a,\ b)=(4,\ -1),\ (1,\ -4)$

コメント

毎年出題の整数問題です。今年はややパンチに欠けており，正確な計算だけで結論まで導けます。

問　題

n, a, b を 0 以上の整数とする。a, b を未知数とする方程式

$$(*) \quad a^2+b^2=2^n$$

を考える。

(1) $n \geqq 2$ とする。a, b が方程式$(*)$を満たすならば，a, b はともに偶数であることを証明せよ。（ただし，0 は偶数に含める。）

(2) 0 以上の整数 n に対して，方程式$(*)$を満たす 0 以上の整数の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。 [2004]

解答例

(1) $a^2+b^2=2^n$ ……①に対して，$n \geqq 2$ のとき 2^n は 4 以上の偶数なので，a^2，b^2 はともに偶数か，またはともに奇数である。

よって，a, b はともに偶数であるか，またはともに奇数である。

ここで，a，b がともに奇数であると仮定する。すなわち，k，l を自然数として，$a=2k-1$，$b=2l-1$ とおくと，

$$a^2+b^2=(2k-1)^2+(2l-1)^2=2\{2k(k-1)+2l(l-1)+1\}$$

①より，$2k(k-1)+2l(l-1)+1=2^{n-1}$ ………②

②は左辺が奇数，また $n \geqq 2$ より右辺が偶数となり，成立しない。よって，a, b がともに奇数という場合はない。

以上より，$n \geqq 2$ で①が成立するとき，a, b はともに偶数である。

(2) (i) $n=0$ のとき　①より $a^2+b^2=1$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

(ii) $n=1$ のとき　①より $a^2+b^2=2$ なので，$(a,\ b)=(1,\ 1)$

(iii) $n \geqq 2$ のとき　(1)より a, b はともに偶数である。

そこで，a_1，b_1 を 0 以上の整数として，$a=2a_1$，$b=2b_1$ とおくと，①より，

$$4{a_1}^2+4{b_1}^2=2^n,\quad {a_1}^2+{b_1}^2=2^{n-2}$$

$n-2 \geqq 2$ のときは，a_2，b_2 を 0 以上の整数として，$a_1=2a_2$，$b_1=2b_2$ とおき，

$$4{a_2}^2+4{b_2}^2=2^{n-2},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{n-4}$$

この操作をくり返すと考え，n が偶数のときと奇数のときに場合分けをする。

(iii-i) $n=2m\ (m \geqq 1)$ のとき　①より $a^2+b^2=2^{2m}$ なので，

$${a_1}^2+{b_1}^2=2^{2(m-1)},\quad {a_2}^2+{b_2}^2=2^{2(m-2)},\ \cdots\cdots,\ {a_m}^2+{b_m}^2=2^{2(m-m)}=1$$

(i)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 0)$，$(0,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 0)$，$(0,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right)$，$\left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$

(iii-ii) $n=2m+1\ (m \geqq 1)$ のとき　①より $a^2+b^2=2^{2m+1}$ なので，

$$a_1{}^2+b_1{}^2=2^{2(m-1)+1},\ a_2{}^2+b_2{}^2=2^{2(m-2)+1},\ \cdots\cdots,\ a_m{}^2+b_m{}^2=2^{2(m-m)+1}=2$$

(ii)より，$(a_m,\ b_m)=(1,\ 1)$

よって，$(a,\ b)=(2^m,\ 2^m)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$

以上まとめると，n が偶数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n}{2}},\ 0\right)$, $\left(0,\ 2^{\frac{n}{2}}\right)$，$n$ が奇数のとき $(a,\ b)=\left(2^{\frac{n-1}{2}},\ 2^{\frac{n-1}{2}}\right)$である。

コメント

整数問題です。(2)で, (1)の誘導が役に立ちます。

問　題

$\dfrac{23}{111}$ を $0.a_1a_2a_3a_4\cdots$ のように小数で表す。すなわち小数第 k 位の数を a_k とする。このとき $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}$ を求めよ。 [2003]

解答例

$\dfrac{23}{111}=0.\dot{2}0\dot{7}$ より, $l\geqq 1$ として, $a_{3l-2}=2$, $a_{3l-1}=0$, $a_{3l}=7$ である。

(i) $n=3l\left(l=\dfrac{n}{3}\right)$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{a_{3k-2}}{3^{3k-2}}+\frac{a_{3k-1}}{3^{3k-1}}+\frac{a_{3k}}{3^{3k}}\right)=\sum_{k=1}^{l}2\left(\frac{1}{3}\right)^{3k-2}+\sum_{k=1}^{l}7\left(\frac{1}{3}\right)^{3k}$$
$$=\sum_{k=1}^{l}18\left(\frac{1}{27}\right)^{k}+\sum_{k=1}^{l}7\left(\frac{1}{27}\right)^{k}=25\sum_{k=1}^{l}\left(\frac{1}{27}\right)^{k}$$
$$=25\cdot\frac{\frac{1}{27}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}}{1-\frac{1}{27}}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n}\right\}$$

(ii) $n=3l-1\left(l=\dfrac{n+1}{3}\right)$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}-\frac{a_{3l}}{3^{3l}}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}\right\}-\frac{7}{3^{n+1}}$$
$$=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+1}=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1}$$

(iii) $n=3l-2\left(l=\dfrac{n+2}{3}\right)$ のとき

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{a_k}{3^k}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{27}\right)^{l}\right\}-\frac{a_{3l}}{3^{3l}}-\frac{a_{3l-1}}{3^{3l-1}}=\frac{25}{26}\left\{1-\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}\right\}-\frac{7}{3^{n+2}}$$
$$=\frac{25}{26}-\frac{207}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n+2}=\frac{25}{26}-\frac{23}{26}\left(\frac{1}{3}\right)^{n}$$

コメント

数列 $\{a_n\}$ の周期が 3 であるため, n を 3 で割った余りで場合分けをしています。どの場合も, いったん l で計算したのち n に置きかえるという方法で解いています。

問　題

p は 3 以上の素数であり，x，y は $0 \leqq x \leqq p$，$0 \leqq y \leqq p$ を満たす整数であるとする。このとき x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しければ，$x = y$ であることを示せ。 [2003]

解答例

x^2 を $2p$ で割った余りと，y^2 を $2p$ で割った余りが等しいので, k を整数として，

$$x^2 - y^2 = 2pk\,,\ \ (x+y)(x-y) = 2pk \cdots\cdots\cdots(*)$$

よって, p が素数より，$x+y$ または $x-y$ は p の倍数となる。

また, $0 \leqq x \leqq p$, $0 \leqq y \leqq p$ より，$0 \leqq x+y \leqq 2p$，$-p \leqq x-y \leqq p$ である。

(i)　$x+y$ が p の倍数であるとき

$x+y=0$ のとき，$x=y=0$ である。

$x+y=p$ のとき，$(*)$より $x-y=2k$ である。ここで，p は 3 以上の素数なので $x+y$ は奇数であり，また $x-y$ は偶数である。ところが，一般的に $x+y$ と $x-y$ の偶奇は一致するので，この場合は不適である。

$x+y=2p$ のとき，$x=y=p$ である。

(ii)　$x-y$ が p の倍数であるとき

$x-y=-p$ のとき，$(*)$より $x+y=-2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

$x-y=0$ のとき，$x=y$ である。

$x-y=p$ のとき，$(*)$より $x+y=2k$ である。すると，$x-y$ は奇数，$x+y$ は偶数となり，不適である。

(i)(ii)より，いずれの場合も $x=y$ である。

コメント

京大に特徴的な整数問題，今年もまた出ました。

問　題

数列$\{a_n\}$の初項a_1から第 n 項a_nまでの和をS_nと表す。この数列が$a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n\ (n\geqq 1)$を満たすとき，一般項$a_n$を求めよ。　[2002]

解答例

条件より，$a_1=0$，$a_2=1$，$(n-1)^2a_n=S_n\ (n\geqq 1)$………①

$$(n-2)^2a_{n-1}=S_{n-1}\ (n\geqq 2)\ \cdots\cdots\cdots②$$

①－②から，$(n-1)^2a_n-(n-2)^2a_{n-1}=a_n$，$n(n-2)a_n=(n-2)^2a_{n-1}$

よって, $n\geqq 3$ で，$na_n=(n-2)a_{n-1}$

$$n(n-1)a_n=(n-1)(n-2)a_{n-1}$$

したがって，$n(n-1)a_n=(3-1)(3-2)a_2=2$より，$a_n=\dfrac{2}{n(n-1)}\ (n\geqq 3)$

$n=2$をあてはめると，$a_2=\dfrac{2}{2\times 1}=1$となり適する。

以上より，$a_1=0$，$a_n=\dfrac{2}{n(n-1)}\ (n\geqq 2)$

コメント

S_nとa_nの関係より漸化式を導きます。$n\geqq 3$という条件に注意が必要です。

問　題

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ は整数を係数とする x の 4 次式とする。4 次方程式 $f(x)=0$ の重複も込めた 4 つの解のうち，2 つは整数で残りの 2 つは虚数であるという。このとき a, b, c の値を求めよ。 [2002]

解答例

$f(x)=x^4+ax^3+bx^2+cx+1$ のとき，$f'(x)=4x^3+3ax^2+2bx+c$

まず，$f(x)=0$ の整数解は，定数項 1 の約数 ±1 だけである。

すると，条件より，$f(x)=0$ の整数解は，$x=1$ を重解にもつとき，$x=-1$ を重解にもつとき，$x=\pm1$ を解にもつときのいずれかである。

(i)　$x=1$ を重解にもつとき　$f(1)=f'(1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots①,\ \ 4+3a+2b+c=0\cdots\cdots\cdots②$$

②より $c=-3a-2b-4\cdots\cdots③$，①に代入して，$-2a-b-2=0$，$b=-2a-2$

③より，$c=-3a-2(-2a-2)-4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-(2a+2)x^2+ax+1=(x-1)^2\{x^2+(a+2)x+1\}$ となり，条件より，$x^2+(a+2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a+2)^2-4<0,\ (a+2-2)(a+2+2)<0,\ -4<a<0$$

a は整数なので，$a=-3,\ -2,\ -1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(-3,\ 4,\ -3),\ (-2,\ 2,\ -2),\ (-1,\ 0,\ -1)$

(ii)　$x=-1$ を重解にもつとき　$f(-1)=f'(-1)=0$ より，

$$1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots④,\ \ -4+3a-2b+c=0\cdots\cdots\cdots⑤$$

⑤より $c=-3a+2b+4\cdots\cdots⑥$，④に代入して，$2a-b-2=0$，$b=2a-2$

⑥より，$c=-3a+2(2a-2)+4=a$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3+(2a-2)x^2+ax+1=(x+1)^2\{x^2+(a-2)x+1\}$ となり，条件より，$x^2+(a-2)x+1=0$ が虚数解をもつことより，

$$D=(a-2)^2-4<0,\ (a-2-2)(a-2+2)<0,\ 0<a<4$$

a は整数なので，$a=3,\ 2,\ 1$

以上より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 3),\ (2,\ 2,\ 2),\ (1,\ 0,\ 1)$

(iii)　$x=\pm1$ を解にもつとき　$f(1)=f(-1)=0$ より，

$$1+a+b+c+1=0\cdots\cdots\cdots⑦,\ \ 1-a+b-c+1=0\cdots\cdots\cdots⑧$$

⑦⑧より $a+c=0$，$c=-a\cdots\cdots⑨$，⑦⑨より $b=-2$

このとき，$f(x)=x^4+ax^3-2x^2-ax+1=(x+1)(x-1)(x^2-ax-1)$

ところが，$x^2-ax-1=0$ の判別式 $D=a^2+4>0$ となり，$f(x)=0$ は虚数解をもたない。よって，条件に適さない。

(i)(ii)(iii)より，複号同順として，

$$(a,\ b,\ c)=(\pm 3,\ 4,\ \pm 3),\ (\pm 2,\ 2,\ \pm 2),\ (\pm 1,\ 0,\ \pm 1)$$

コメント

整数解の候補が± 1と 2 つしかないので，ホッとします。

問　題

4 個の整数 1, a, b, c は $1<a<b<c$ を満たしている。これらの中から相異なる 2 個を取り出して和を作ると，$1+a$ から $b+c$ までのすべての整数の値が得られるという。a, b, c の値を求めよ。 [2002]

解答例

$1<a<b<c$ より，$1+a<1+b<1+c<a+c<b+c$ となる。しかも，$1+b<a+b$，$a+b<a+c$ である。すると，$1+a$ から $b+c$ までの整数の大小関係には，次の 3 つの場合がある。

(i)　$1+c<a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c<a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$……①，$1+c=1+a+2$……②，$a+b=1+a+3$……③

$a+c=1+a+4$……④，$b+c=1+a+5$……⑤

③より $b=4$，④より $c=5$ となり，①に代入して $a=3$

この値は②，⑤を満たす。

(ii)　$1+c=a+b$ のとき

この場合，$1+a<1+b<1+c=a+b<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$……⑥，$1+c=1+a+2$……⑦，$a+b=1+a+2$……⑧

$a+c=1+a+3$……⑨，$b+c=1+a+4$……⑩

⑧より $b=3$，⑨より $c=4$ となり，⑥に代入して $a=2$

この値は⑦，⑩を満たす。

(iii)　$a+b<1+c$ のとき

この場合，$1+a<1+b<a+b<1+c<a+c<b+c$ となる。

条件より，$1+b=1+a+1$……⑪，$a+b=1+a+2$……⑫，$1+c=1+a+3$……⑬

$a+c=1+a+4$……⑭，$b+c=1+a+5$……⑮

⑫より $b=3$，⑭より $c=5$ となり，⑪に代入して $a=2$

この値は⑬，⑮を満たす。

(i)(ii)(iii)より，$(a,\ b,\ c)=(3,\ 4,\ 5),\ (2,\ 3,\ 4),\ (2,\ 3,\ 5)$

コメント

1，a，b，c の中から 2 個とりだして作った 6 個の整数のうち，$a+b$ の大小関係だけが決定しません。この点に気付くのがポイントです。

問　題

任意の整数 n に対し，n^9-n^3 は 9 で割り切れることを示せ。　[2001]

解答例

$N=n^9-n^3=n^3(n^3-1)(n^3+1)$ より，k を整数として，

(i)　$n=3k$ のとき

$$N=27k^3(27k^3-1)(27k^3+1)=9\cdot 3k^3(27k^3-1)(27k^3+1)$$

(ii)　$n=3k+1$ のとき

$$\begin{aligned}N&=(3k+1)^3\{(3k+1)^3-1\}\{(3k+1)^3+1\}\\&=(3k+1)^3(27k^3+27k^2+9k)\{(3k+1)^3+1\}\\&=9(3k+1)^3(3k^3+3k^2+k)\{(3k+1)^3+1\}\end{aligned}$$

(iii)　$n=3k-1$ のとき

$$\begin{aligned}N&=(3k-1)^3\{(3k-1)^3-1\}\{(3k-1)^3+1\}\\&=(3k-1)^3\{(3k-1)^3-1\}(27k^3-27k^2+9k)\\&=9(3k-1)^3\{(3k-1)^3-1\}(3k^3-3k^2+k)\end{aligned}$$

以上より，任意の整数 n に対し，$N=n^9-n^3$ は 9 で割り切れる。

コメント

整数を余りによって分類をするという手法で，うまく示せました。

問　題

n を 2 以上の整数とする。実数 a_1，a_2，…，a_n に対し，$S = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ とおく。$k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n$ について，不等式 $-1 < S - a_k < 1$ が成り立っているとする。

$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ のとき，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つことを示せ。

[2001]

解答例

条件より，$a_1 \leqq a_2 \leqq \cdots \leqq a_n$ ……①，$-1 < S - a_k < 1$ $(k = 1,\ 2,\ \cdots,\ n)$ ……②

まず，$a_n \geqq 2$ と仮定する。

②において $k = 1$ のとき，$-1 < S - a_1 < 1$ なので，$-1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n < 1$

$$a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1 - a_n \leqq -1 \ \cdots\cdots\cdots ③$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，③から $a_2 < 0$ となり，①から $a_1 \leqq a_2 < 0$

すると，③より $a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < -1$ なので，

$$S - a_n < -1$$

これは②において $k = n$ のときに反するので，$a_n < 2$ となる。

次に $a_1 \leqq -2$ と仮定する。

②において $k = n$ のとき，$-1 < S - a_n < 1$ なので，$-1 < a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} < 1$

$$1 \leqq -1 - a_1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} \ \cdots\cdots\cdots ④$$

①より $a_2 \leqq a_3 \leqq \cdots \leqq a_{n-1}$ なので，④から $a_{n-1} > 0$ となり，①から $0 < a_{n-1} \leqq a_n$

すると，④より $1 < a_2 + a_3 + \cdots + a_{n-1} + a_n$ なので，

$$S - a_1 > 1$$

これは②において $k = 1$ のときに反するので，$a_1 > -2$ となる。

以上より，①から，すべての k について $|a_k| < 2$ が成り立つ。

コメント

京大らしい証明問題です。$n = 2$ の場合は明らかですが，$n = 3$ や $n = 4$ の場合を考えていくと，論証の道筋が見えてきます。

問　題

実数 x_1，…，x_n $(n\geqq 3)$ が条件 $x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ $(2\leqq k\leqq n-1)$ を満たすとし，x_1，…，x_n の最小値を m とする。このとき，$x_l=m$ となる $l(1\leqq l\leqq n)$ の個数は 1 または 2 であることを示せ。 [2000]

解答例

$x_{k-1}-2x_k+x_{k+1}>0$ より，$x_k-x_{k-1}<x_{k+1}-x_k$

ここで，$y_k=x_{k+1}-x_k$ とおくと，$y_{k-1}<y_k$ となり，$2\leqq k\leqq n-1$ から，

$$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$$

(i)　$y_1>0$ のとき

$0<y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ より，$x_1<x_2<x_3<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_1 である。

(ii)　$y_{n-1}\leqq 0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}\leqq 0$ より，$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_{n-2}>x_{n-1}\geqq x_n$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_n，または x_n と x_{n-1} である。

(iii)　$y_1\leqq 0$ かつ $y_{n-1}>0$ のとき

$y_1<y_2<\cdots\cdots<y_i\leqq 0<y_{i+1}<\cdots\cdots<y_{n-2}<y_{n-1}$ となる i $(1\leqq i\leqq n-2)$ が存在する。

$$x_1>x_2>x_3>\cdots\cdots>x_i\geqq x_{i+1}<x_{i+2}<\cdots\cdots<x_{n-2}<x_{n-1}<x_n$$

x_1，…，x_n の最小値 m は x_{i+1}，または x_{i+1} と x_i である。

(i)(ii)(iii)より，$x_l=m$ となる l の個数は 1 または 2 である。

コメント

与えられた不等式の意味は，階差数列が単調増加する漸化式というものです。この階差数列 $\{y_n\}$ の符号で，もとの数列 $\{x_n\}$ の増減の様子が把握できます。

問　題

0 以上の整数 x に対して，$C(x)$ で x の下 2 桁を表すことにする。たとえば，$C(12578)=78$，$C(6)=6$ である。n を 2 でも 5 でも割り切れない正の整数とする。

(1)　x, y が 0 以上の整数のとき，$C(nx)=C(ny)$ ならば，$C(x)=C(y)$ であることを示せ。

(2)　$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在することを示せ。　[1999]

解答例

(1)　$C(x)$ は x を 100 で割った余りなので，$C(nx)=C(ny)$ より，$nx-ny$ は 100 の倍数となる。すると, k を整数として,

$$n(x-y)=100k$$

n は 2 でも 5 でも割り切れない正の整数なので，n と $100=2^2\cdot5^2$ は互いに素である。

よって，$x-y$ が 100 の倍数となり，$C(x)=C(y)$ が成立する。

(2)　(1)の命題の対偶をとると,

$$C(x)\neq C(y) \text{ ならば，} C(nx)\neq C(ny) \cdots\cdots\cdots ①$$

ここで，$C(x)=r_x$，$C(y)=r_y$ とおくと, p, q を 0 以上の整数として,

$$x=100p+r_x,\quad y=100q+r_y$$

$$nx=100np+nr_x,\quad ny=100nq+nr_y$$

命題①は整数 r_x，r_y （$0\leqq r_x\leqq 99$，$0\leqq r_y\leqq 99$）に対し,

$$r_x\neq r_y \text{ ならば，} C(nr_x)\neq C(nr_y) \cdots\cdots\cdots ②$$

すると，命題②より $C(0)$，$C(n)$，$C(2n)$，$C(3n)$, ……，$C(99n)$ はすべて異なり，しかも題意から 0, 1, 2, 3, ……, 99 のいずれかである。

よって，$C(nx)=1$ となる 0 以上の整数 x が存在する。

コメント

整数 a, b が互いに素であるとき，$ax+by=1$ を満たす整数 x, y が存在するという定理がありますが，(2)はこの定理の具体的な場合の証明となっています。しかし，上の解の論法は，たとえ(1)の誘導がついたとしても，参考書などで類題を経験しておかないと無理でしょう。

問　題

n を 2 以上の自然数とする。さいころを n 回振り，出た目の最大値 M と最小値 L の差 $M-L$ を X とする。

(1)　$X=1$ である確率を求めよ。

(2)　$X=5$ である確率を求めよ。 [2017]

解答例

(1)　さいころを n 回振り，出た目の最大値を M, 最小値を L としたとき，$M-L=1$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 2)$，$(2,\ 3)$，$(3,\ 4)$，$(4,\ 5)$，$(5,\ 6)$ の場合である。

まず，$(L,\ M)=(1,\ 2)$ のときは，出た目がすべて 1 または 2 のいずれかという事象から，1 だけおよび 2 だけという事象を除いたものより，その確率は，

$$\left(\frac{2}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n-\left(\frac{1}{6}\right)^n=\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

また，他の場合も同様なので，$M-L=1$ である確率は，

$$5\left\{\left(\frac{1}{3}\right)^n-2\left(\frac{1}{6}\right)^n\right\}=5\left(\frac{1}{3}\right)^n-10\left(\frac{1}{6}\right)^n$$

(2)　$M-L=5$ となるのは，$(L,\ M)=(1,\ 6)$ の場合だけである。

そこで，出た目がすべて 1 以上 5 以下の事象を A, 2 以上 6 以下の事象を B とすると，$M-L=5$ である確率は，

$$1-P(A\cup B)=1-P(A)-P(B)+P(A\cap B)$$

$$=1-\left(\frac{5}{6}\right)^n-\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{4}{6}\right)^n=1-2\left(\frac{5}{6}\right)^n+\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

コメント

余事象の考え方がポイントである確率の有名問題です。頭を整理するには，図を書くと効果的です。

問　題

ボタンを押すと「あたり」か「はずれ」のいずれかが表示される装置がある。「あたり」の表示される確率は毎回同じであるとする。この装置のボタンを 20 回押したとき，1 回以上「あたり」の出る確率は 36%である。1 回以上「あたり」の出る確率が 90%以上となるためには，この装置のボタンを最低何回押せばよいか。必要なら $0.3010<\log_{10}2<0.3011$ を用いてよい。　[2016]

解答例

ボタンを 1 回押したとき，はずれの確率を p $(0\leqq p\leqq 1)$ とおくと，あたりの確率は $1-p$ となる。ここで，条件から，ボタンを 20 回押したとき，1 回以上あたりの出る確率は 36%であるので，$1-p^{20}=0.36$ となり，

$$p^{20}=0.64,\ \ p^{10}=0.8=\frac{4}{5},\ \ p=\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{1}{10}}\cdots\cdots\cdots(*)$$

さて，ボタンを n 回押したとき，1 回以上あたりの出る確率が 90%以上となるのは，

$$1-p^n\geqq 0.9,\ \ p^n\leqq 0.1$$

$(*)$を代入すると，$\left(\frac{4}{5}\right)^{\frac{n}{10}}\leqq\frac{1}{10}$ となり，両辺に対数をとり $\frac{n}{10}\log_{10}\frac{4}{5}\leqq\log_{10}\frac{1}{10}$ から，

$$n(2\log_{10}2-1+\log_{10}2)\leqq -10,\ \ n(1-3\log_{10}2)\geqq 10$$

よって，$n\geqq\dfrac{10}{1-3\log_{10}2}$ である。

ここで，$0.3010<\log_{10}2<0.3011$ から，$0.0967<1-3\log_{10}2<0.0970$ となり，

$$103.0<\frac{10}{1-3\log_{10}2}<103.5$$

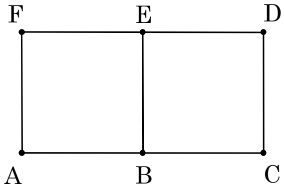
したがって，$n\geqq 104$ となり，ボタンを最低 104 回押せばよい。

コメント

よく見かけるタイプの確率と対数計算の融合です。なお，初めは，あたりの確率を p としていましたが……。

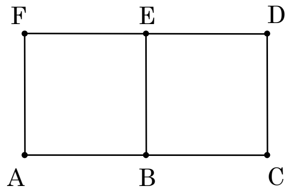
問　題

6 個の点 A, B, C, D, E, F が右図のように長さ 1 の線分で結ばれているとする。各線分をそれぞれ独立に確率 $\frac{1}{2}$ で赤または黒で塗る。赤く塗られた線分だけを通って点 A から点 E に至る経路がある場合はそのうちで最短のものの長さを X とする。そのような経路がない場合は X を 0 とする。このとき，$n=0,\ 2,\ 4$ について，$X=n$ となる確率を求めよ。　[2015]



解答例

点 A から点 E に至る経路の最短のものの長さ X について，



(i)　$X=4$ のとき

A−B, B−C, C−D, D−E はすべて赤，B−E は黒，また，A−F と F−E は少なくとも一方が黒より，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^4\times\frac{1}{2}\times\left\{1-\left(\frac{1}{2}\right)^2\right\}=\frac{3}{128}$$

(ii)　$X=2$ のとき

(a)　A−B と B−E がともに赤で，他の線分は任意のとき

この場合の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ となる。

(b)　A−F と F−E がともに赤で，他の線分は任意のとき

この場合の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{4}$ となる。

(c)　A−B, B−E, A−F, F−E がすべて赤で，他の線分は任意のとき

この場合の確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^4=\frac{1}{16}$ となる。

(a)〜(c)より，$X=2$ のときの確率は，$\frac{1}{4}+\frac{1}{4}-\frac{1}{16}=\frac{7}{16}$

(iii)　$X=0$ のとき

X の値は 0, 2, 4 だけなので，$X=0$ のときの確率は，余事象を考えて，

$$1-\frac{3}{128}-\frac{7}{16}=\frac{69}{128}$$

コメント

X の値としては，問題文で示されている 3 つの場合しかなく，あっけなく解けてしまいます。

問　題

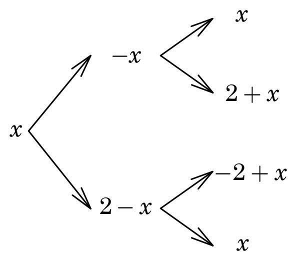
投げたとき表が出る確率と裏が出る確率が等しい硬貨を用意する。数直線上に石を置き，この硬貨を投げて表が出れば数直線上で原点に関して対称な点に石を移動し，裏が出れば数直線上で座標 1 の点に関して対称な点に石を移動する。

(1)　石が座標 x の点にあるとする。2 回硬貨を投げたとき，石が座標 x の点にある確率を求めよ。

(2)　石が原点にあるとする。n を自然数とし，$2n$ 回硬貨を投げたとき，石が座標 $2n$ の点にある確率を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　座標 x の点に石があるとき，硬貨を投げて表が出れば点 $-x$ に，裏が出れば点 $2-x$ に移動する。



すると，2 回投げたとき，石の座標は右図のように移動するので，求める確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\right)^2+\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{1}{2}$$

(2)　$2n$ 回硬貨を投げたとき，原点にある石が座標 $2n$ の点に移動するのは，(1)より，2 回投げたとき 2 だけ移動する $(x\to 2+x)$ のを，n 回繰り返す場合だけである。よって，その確率は，

$$\left(\frac{1}{2}\times\frac{1}{2}\right)^n=\left(\frac{1}{4}\right)^n$$

コメント

漸化式を立てる問題かとも思いましたが，予想ははずれました。(2)の設問は不気味なくらいです。

問　題

n を 3 以上の整数とする。1 から n までの番号をつけた n 枚の札の組が 2 つある。これら $2n$ 枚の札をよく混ぜ合わせて，札を 1 枚ずつ 3 回取り出し，取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とする。$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率を求めよ。ただし一度取り出した札は元に戻さないものとする。 [2012]

解答例

$2n$ 枚の札から 1 枚ずつ 3 回取り出して並べる ${}_{2n}\mathrm{P}_3 = 2n(2n-1)(2n-2)$ 通りの場合が，同様に確からしいとする。

さて，3 回取り出した順にその番号を X_1，X_2，X_3 とし，$X_1 < X_2 < X_3$ となるのは，$X_2 = k$ $(2 \leqq k \leqq n-1)$ のとき，X_2 は 2 通りの選び方，X_1 は $2(k-1)$ 通りの選び方，X_3 は $2(n-k)$ 通りの選び方があるので，その総数は，

$$\sum_{k=2}^{n-1} 2\cdot 2(k-1)\cdot 2(n-k) = 8\sum_{k=1}^{n-2} k(n-k-1) = 8\sum_{k=1}^{n-2}\{(n-1)k - k^2\}$$
$$= 4(n-1)^2(n-2) - \frac{4}{3}(n-1)(n-2)(2n-3)$$
$$= \frac{4}{3}(n-1)(n-2)\{3(n-1)-(2n-3)\} = \frac{4}{3}n(n-1)(n-2)$$

よって，$X_1 < X_2 < X_3$ となる確率は，

$$\frac{4n(n-1)(n-2)}{3\cdot {}_{2n}\mathrm{P}_3} = \frac{4n(n-1)(n-2)}{12n(2n-1)(n-1)} = \frac{n-2}{3(2n-1)}$$

コメント

真正面から取り組んだ解ですが，普通に組合せを利用した方が明快でした。

問　題

箱の中に，1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードが入っている。ただし，異なるカードには異なる番号が書かれているものとする。この箱から 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を X とする。これらのカードを箱に戻して，再び 2 枚のカードを同時に選び，小さい方の数を Y とする。$X=Y$ である確率を求めよ。

[2011]

解答例

1 から 9 までの番号を 1 つずつ書いた 9 枚のカードから，2 枚のカードを同時に選ぶとき，小さい方の数が k であるのは，大きい方の数が $k+1$ 以上のときなので，$9-k$ 通りの場合がある。

これより，$1\leqq k\leqq 8$ のとき，$X=Y=k$ である確率 $P(k)$ は，

$$P(k)=\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}\times\frac{9-k}{{}_9\mathrm{C}_2}=\frac{(9-k)^2}{36^2}$$

よって，$X=Y$ である確率は，

$$\sum_{k=1}^{8}P(k)=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}(9-k)^2=\frac{1}{36^2}\sum_{k=1}^{8}k^2=\frac{1}{36^2}\cdot\frac{1}{6}\cdot 8\cdot 9\cdot 17=\frac{17}{108}$$

コメント

参考書に例題として載っている典型問題です。

問　題

1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる。どの並べかたも同様の確からしさで起こるものとする。このとき 1 番目と 2 番目と 3 番目の数の和と，3 番目と 4 番目と 5 番目の数の和が等しくなる確率を求めよ。ただし，各並べかたにおいて，それぞれの数字は重複なく一度ずつ用いるものとする。　[2010]

解答例

1 から 5 までの自然数を 1 列に並べる $5!$ 通りの場合が同様に確からしいとする。

さて，この数の列の 1 番目，2 番目，3 番目，4 番目，5 番目の数を，それぞれ a, b, c, d, e とすると，条件より，

$$a+b+c=c+d+e,\ a+b=d+e\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$a<b$, $d<e$ のとき，$(*)$を満たす$(a,\ b,\ d,\ e)$の組は，

$$(1,\ 4,\ 2,\ 3),\ (2,\ 3,\ 1,\ 4),\ (1,\ 5,\ 2,\ 4),\ (2,\ 4,\ 1,\ 5)$$

$$(2,\ 5,\ 3,\ 4),\ (3,\ 4,\ 2,\ 5)$$

また，各々の場合，c の値はただ 1 つ決まる。

すると，$(*)$を満たす$(a,\ b,\ c,\ d,\ e)$の組は，$2!\times2!\times6$ 通りとなり，求める確率は，

$$\frac{2!\times2!\times6}{5!}=\frac{1}{5}$$

コメント

センター試験に出題されるような問題です。対象が 5 までの自然数という設定なので，条件に適する場合を羅列しています。

問　題

白球と赤球の入った袋から 2 個の球を同時に取り出すゲームを考える。取り出した 2 球がともに白球ならば「成功」でゲームを終了し，そうでないときは「失敗」とし，取り出した 2 球に赤球を 1 個加えた 3 個の球を袋にもどしてゲームを続けるものとする。最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていたとき，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を求めよ。ただし $n \geqq 2$ とする。 [2009]

解答例

最初に白球が 2 個，赤球が 1 個袋に入っていて，失敗すると赤球が 1 個ずつ増えていくので，$n-1$ 回まで失敗し n 回目に成功する確率を P_n とすると，

$$P_n = \left(1-\frac{1}{{}_3\mathrm{C}_2}\right)\left(1-\frac{1}{{}_4\mathrm{C}_2}\right)\left(1-\frac{1}{{}_5\mathrm{C}_2}\right)\cdots\left(1-\frac{1}{{}_{n+1}\mathrm{C}_2}\right)\cdot\frac{1}{{}_{n+2}\mathrm{C}_2}\ \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで, k を 3 以上の整数として,

$$1-\frac{1}{{}_k\mathrm{C}_2} = 1-\frac{2}{k(k-1)} = \frac{k^2-k-2}{k(k-1)} = \frac{(k-2)(k+1)}{(k-1)k}$$

よって, $(*)$より,

$$P_n = \frac{1\cdot4}{2\cdot3}\cdot\frac{2\cdot5}{3\cdot4}\cdot\frac{3\cdot6}{4\cdot5}\cdot\frac{4\cdot7}{5\cdot6}\cdot\cdots\cdot\frac{(n-2)(n+1)}{(n-1)n}\cdot\frac{(n-1)(n+2)}{n(n+1)}\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)}$$

$$= \frac{1}{3}\cdot\frac{n+2}{n}\cdot\frac{2}{(n+2)(n+1)} = \frac{2}{3n(n+1)}$$

コメント

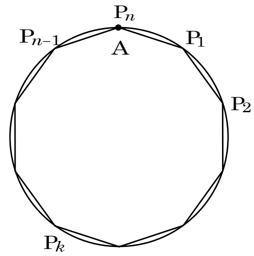
成功するのは，つねに 1 通りしかありません。丁寧な計算が要求される問題です。

問　題

正 n 角形とその外接円を合わせた図形を F とする。F 上の点 P に対して，始点と終点がともに P であるような，図形 F の一筆がきの経路の数を $N(\mathrm{P})$ で表す。正 n 角形の頂点をひとつとって A とし，$a=N(\mathrm{A})$ とおく。また正 n 角形の辺をひとつとってその中点を B とし，$b=N(\mathrm{B})$ とおく。このとき a と b を求めよ。

注：一筆がきとは，図形を，かき始めから終わりまで，筆を紙からはなさず，また同じ線上を通らずにかくことである。　[2008]

解答例



正 n 角形に頂点を P_1，P_2，…，P_n とし，点 A は P_n とする。このとき，A から A までの一筆がきを，時計まわりにかき始めた場合を考える。

(i)　折り返し地点が $\mathrm{P}_k\ (1\leqq k\leqq n-1)$ のとき

最初，A から時計まわりにかき始め P_k で折り返し A に戻るかき方は $2^k\times 1$ 通り，続いて残りの経路を A から反時計まわりにかき始め P_k で折り返し A に戻るかき方は $2^{n-k}\times 1$ 通りある。これより，各 P_k に対して，$2^k\times 2^{n-k}=2^n$ 通りずつのかき方がある。

(ii)　折り返し地点が P_n のとき

最初，A から時計まわりにかき始め 1 回転して A に戻るかき方は 2^n 通り，続いて残りの経路を反時計まわりに 1 回転するかき方は 1 通り。これより，$2^n\times 1=2^n$ 通りのかき方がある。

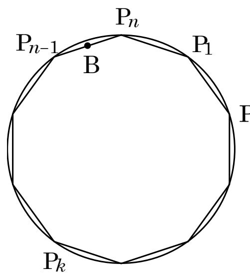
(iii) 折り返し地点がないとき

最初，A から時計まわりにかき始め 1 回転して A に戻るかき方は 2^n 通り，さらに残りの経路を時計まわりに 1 回転するかき方は 1 通り。これより，$2^n\times 1=2^n$ 通りのかき方がある。

(i)～(iii)より，$(n-1)\times 2^n+2^n+2^n=(n+1)2^n$ 通りとなる。

また，反時計まわりにかき始めた場合も同様に $(n+1)2^n$ 通りなので，

$$a=(n+1)2^n\times 2=(n+1)2^{n+1}$$



次に，点 B を辺 $\mathrm{P}_{n-1}\mathrm{P}_n$ の中点とする。このとき，B から B までの一筆がきを，$\mathrm{B}\to\mathrm{P}_n$ とかき始め，$\mathrm{P}_{n-1}\to\mathrm{B}$ で終わる場合を考える。

(iv) 折り返し地点が $\mathrm{P}_k\ (1\leqq k\leqq n-2)$ のとき

B から P_n，さらに時計まわりに進み P_k で折り返し P_n に戻る $\mathrm{B}\to\mathrm{P}_n\to\mathrm{P}_k\to\mathrm{P}_n$ のかき方は $1\times 2^k\times 1$ 通り，反時計まわり

に$\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1}$のかき方は 1 通り，さらに残りの経路を$\mathrm{P}_{n-1}$から反時計まわりに進み$\mathrm{P}_k$で折り返し B に戻る$\mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_k \to \mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{B}$ のかき方は$2^{n-k-1} \times 1 \times 1$通りである。これより，各$\mathrm{P}_k$に対して，$2^k \times 2^{n-k-1} = 2^{n-1}$通りずつのかき方がある。

(v)　折り返し地点がP_{n-1}のとき

B からP_n，さらにP_nから時計まわりに進みP_{n-1}で折り返しP_nに戻る $\mathrm{B} \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_n$のかき方は$1 \times 2^{n-1} \times 1$通り，反時計まわりに$\mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1}$のかき方は 1 通り，さらに$\mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{B}$のかき方は 1 通りである。これより，$2^{n-1}$通りのかき方がある。

(vi) 折り返し地点がP_nのとき

B からP_n，さらにP_nから反時計まわりP_{n-1}に至る $\mathrm{B} \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1}$のかき方は$1 \times 1$通り，$\mathrm{P}_{n-1}$から反時計まわりに進み$\mathrm{P}_n$で折り返し$\mathrm{P}_{n-1}$に戻る$\mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1}$のかき方は$2^{n-1} \times 1$通り，さらに$\mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{B}$ のかき方は 1 通りである。これより，2^{n-1}通りのかき方がある。

(vii) 折り返し地点がないとき

B からP_n，さらにP_nから時計まわりに進みP_{n-1}に至る $\mathrm{B} \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1}$のかき方は$1 \times 2^{n-1}$通り，さらに残りの経路を時計まわりに進み B に戻る$\mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{P}_n \to \mathrm{P}_{n-1} \to \mathrm{B}$のかき方は$1 \times 1 \times 1$通りである。これより，$2^{n-1}$通りのかき方がある。

(iv)～(vii)より，$(n-2) \times 2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-1} + 2^{n-1} = (n+1)2^{n-1}$通りとなる。

また, $\mathrm{B} \to \mathrm{P}_{n-1}$とかき始め，$\mathrm{P}_n \to \mathrm{B}$ で終わる場合も同様に$(n+1)2^{n-1}$通りなので,

$$b = (n+1)2^{n-1} \times 2 = (n+1)2^n$$

コメント

大学入試ではあまり見かけない一筆がきを題材にした問題です。折り返し地点をどこにするかで場合分けをしています。

問　題

四角形 ABCD を底面とする四角錐 OABCD を考える。点 P は時刻 0 では頂点 O にあり, 1 秒ごとに次の規則に従ってこの四角錐の 5 つの頂点のいずれかに移動する。

規則：点 P のあった頂点と 1 つの辺によって結ばれる頂点の 1 つに, 等しい確率で移動する。

このとき, n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を求めよ。　[2007]

解答例

n 秒後に点 P が頂点 O にある確率を p_n とする。

さて, n 秒後に点 P が頂点 O にある条件は, $n-1$ 秒後に点 P が O 以外の点にあり, 1 秒後に O に移ることである。このとき, O 以外の A, B, C, D いずれの点にあるときも, O に移る確率は $\frac{1}{3}$ なので,

$$p_n = \frac{1}{3}(1 - p_{n-1})$$

変形すると，$p_n - \frac{1}{4} = -\frac{1}{3}\left(p_{n-1} - \frac{1}{4}\right)$ となり，$p_0 = 1$ から，

$$p_n - \frac{1}{4} = \left(p_0 - \frac{1}{4}\right)\left(-\frac{1}{3}\right)^n = \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$$

よって，$p_n = \frac{1}{4} + \frac{3}{4}\left(-\frac{1}{3}\right)^n$

コメント

確率と漸化式の融合問題という, 参考書の例題に載っている有名題です。

問　題

1 から n までの番号のついた n 枚の札が袋に入っている。ただし，$n \geqq 3$ とし，同じ番号の札はないとする。この袋から 3 枚の札を取り出して，札の番号を大きさの順に並べるとき，等差数列になっている確率を求めよ。 [2005]

解答例

n 枚の札から 3 枚を取り出す場合の数は，

$${}_n\mathrm{C}_3 = \frac{1}{6}n(n-1)(n-2)$$

ここで，取り出した札の番号を，小さい方から a, b, c とすると，

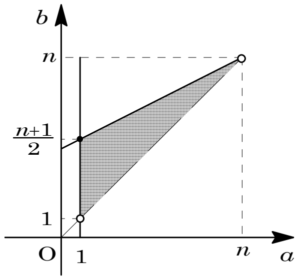
$$1 \leqq a < b < c \leqq n \cdots\cdots\cdots ①$$

条件より，a, b, c が等差数列をなすので，$2b = a + c \cdots\cdots\cdots ②$

①②より，$1 \leqq a < b < 2b - a \leqq n \cdots\cdots\cdots ③$

③より，$1 \leqq a < b$ かつ $2b - n \leqq a$

ab 平面上で，$a = 1$ と $a = 2b - n$ の交点は，$\left(1,\ \dfrac{n+1}{2}\right)$ となり，③の表す領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，実線の境界は領域に含み，破線の境界は含まない。



これから，a，b，c が等差数列となる場合の数は，この網点部の格子点の個数として数えることができる。

さて，$b = k\ (1 \leqq k \leqq n)$ と固定し，$\dfrac{n+1}{2}$ が整数がどうか，すなわち n を偶奇に分けて，その線分上の格子点の個数を数える。

(i)　n が奇数のとき

$\dfrac{n+1}{2}$ は整数となるので，$b = k$ 上の格子点は，$1 \leqq k \leqq \dfrac{n+1}{2}$ のとき $k-1$ 個，$\dfrac{n+3}{2} \leqq k \leqq n$ のとき $k-(2k-n) = n-k$ 個ある。これより，格子点の総数は，

$$\sum_{k=1}^{\frac{n+1}{2}}(k-1) + \sum_{k=\frac{n+3}{2}}^{n}(n-k) = \frac{1}{2}\left(0 + \frac{n-1}{2}\right)\frac{n+1}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{n-3}{2} + 0\right)\left(n - \frac{n+3}{2} + 1\right)$$

$$= \frac{1}{8}(n^2-1) + \frac{1}{8}(n^2-4n+3) = \frac{1}{4}(n-1)^2$$

したがって，札の番号が等差数列となる確率は，

$$\frac{\frac{1}{4}(n-1)^2}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)} = \frac{3(n-1)}{2n(n-2)}$$

(ii)　n が偶数のとき

$\dfrac{n+1}{2}$ は整数でないので，$b=k$ 上の格子点は，$1\leqq k\leqq\dfrac{n}{2}$ のとき $k-1$ 個，$\dfrac{n+2}{2}\leqq k\leqq n$ のとき $k-(2k-n)=n-k$ 個ある。これより，格子点の総数は，

$$\sum_{k=1}^{\frac{n}{2}}(k-1)+\sum_{k=\frac{n+2}{2}}^{n}(n-k)=\frac{1}{2}\left(0+\frac{n-2}{2}\right)\frac{n}{2}+\frac{1}{2}\left(\frac{n-2}{2}+0\right)\left(n-\frac{n+2}{2}+1\right)$$

$$=\frac{1}{8}(n^2-2n)+\frac{1}{8}(n^2-2n)=\frac{1}{4}n(n-2)$$

したがって，札の番号が等差数列となる確率は，

$$\frac{\frac{1}{4}n(n-2)}{\frac{1}{6}n(n-1)(n-2)}=\frac{3}{2(n-1)}$$

コメント

いろいろな考え方ができますが，1 文字を固定し，格子点の個数を対応させて場合の数を数えるという最初に考えた解法で記述しました。なお，後半のシグマ計算は，等差数列の和として公式を適用しています。

問　題

4 チームがリーグ戦を行う。すなわち，各チームは他のすべてのチームとそれぞれ 1 回ずつ対戦する。引き分けはないものとし，勝つ確率はすべて$\frac{1}{2}$で，各回の勝敗は独立に決まるものとする。勝ち数の多い順に順位をつけ，勝ち数が同じであればそれらは同順位とする。1 位のチーム数の期待値を求めよ。 [2003]

解答例

試合数は全部で${}_4C_2=6$なので，あるチームが 3 勝 0 敗の場合は，他のチームはすべて 2 勝以下となる。

次に，あるチームが 2 勝 1 敗の場合は，他のチームがすべて 1 勝以下ということはありえないので, 2 勝 1 敗のチーム数は 2 または 3 となる。

まず，2 勝 1 敗のチーム数が 2 のとき，残り 2 チームはともに 1 勝 2 敗となる。また, 2 勝 1 敗のチーム数が 3 のとき，残りのチームは 0 勝 3 敗である。

さらに, 4 チームとも同じ勝ち数という場合はないので, 1 位のチーム数は 1, 2, 3 のいずれかである。以下，チーム名を A, B, C, D とする。

(i)　1 位のチーム数が 1 のとき

まず, 1 位のチームの選び方は${}_4C_1=4$通りある。

ここで，1 位のチームが A のとき，A は B，C，D に対して全勝となり，また B，C，D どうしの対戦での勝敗は任意なので，その確率は，$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{1}{2}$である。

(ii)　1 位のチーム数が 3 のとき

まず, 1 位のチームの選び方は${}_4C_3=4$通りある。

ここで, 1 位のチームが A, B, C のとき, D は A, B, C に対して全敗となり, A, B, C どうしの対戦での勝敗は, A, B, C すべて 1 勝 1 敗なので，勝ちを○，負けを×で表すと，次の 2 つの場合がある。

$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(○,\ \times)$，$(\mathrm{B},\ \mathrm{C})=(○,\ \times)$，$(\mathrm{C},\ \mathrm{A})=(○,\ \times)$

$(\mathrm{A},\ \mathrm{B})=(\times,\ ○)$，$(\mathrm{B},\ \mathrm{C})=(\times,\ ○)$，$(\mathrm{C},\ \mathrm{A})=(\times,\ ○)$

よって，その確率は，$4\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times\left(\frac{1}{2}\right)^3\times 2=\frac{1}{8}$である。

(iii)　1 位のチーム数が 2 のとき

(i)(ii)より，その確率は，$1-\frac{1}{2}-\frac{1}{8}=\frac{3}{8}$である。

以上より, 1 位のチーム数の期待値は，$1\times\frac{1}{2}+2\times\frac{3}{8}+3\times\frac{1}{8}=\frac{13}{8}$である。

コメント

1 位のチーム数が 2 のときがいちばん複雑そうでしたので，余事象で考えました。

問　題

n, k は自然数で, $n \geqq 3$, $k \geqq 2$ を満たすものとする。いま, n 角柱の $n+2$ 個の面に 1 から $n+2$ までの番号が書いてあるものとする。この $n+2$ 個の面に 1 面ずつ, 異なる k 色の中から 1 色ずつ選んでは塗っていく。このとき, どの隣り合う面の組も同一色では塗られない塗り方の数を P_k で表す。

(1)　P_2 と P_3 を求めよ。

(2)　$n=7$ のとき, P_4 を求めよ。　　　[1999]

解答例

(1)　側面を 1 番から n 番とし, 底面を $n+1$ 番, $n+2$ 番とする。このとき, $n+1$ 番の面と 1 番の面, 2 番の面は異なる色である。

2 色のときは塗り分けることができないので, $P_2=0$ となる。

3 色のとき, $n+1$ 番の面と 1 番の面, 2 番の面は異なる色に塗ることより, 底面の $n+2$ 番と $n+1$ 番の面は同じ色となる。また側面の奇数番の面は 1 番の面と同じ色, 偶数番の面は 2 番の面と同じ色となる。

さらに, n 番の面と 1 番の面は異なる色でなくてはならないので, n が奇数のときは $P_3=0$, n が偶数のときは $P_3=3\times2\times1=6$ となる。

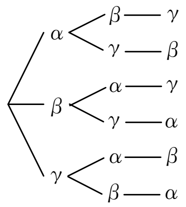
(2)　(i)　底面の 8 番, 9 番の面を異なる色で塗るとき

1 番から 7 番までの側面は残りの 2 色で塗り分けなくてはならないが, $n=7$ は奇数なので, (1)より塗り分ける方法はない。

(ii)　底面の 8 番, 9 番の面を同じ色で塗るとき

1 番から 7 番までの側面は残りの 3 色で塗り分けることになる。

ここで一般的に, 3 色以下の色で 1 番の面から塗り分けていき, n 番と 1 番の面が異なる色の塗り方を a_n 通り, n 番と 1 番の面が同じ色の塗り方を b_n 通りとする。なお, 色を α, β, γ とすると, 右の樹形図より $a_3=6$ となる。



1 番から n 番までの面の塗り分け方は $3\times2^{n-1}$ 通りより,

$$a_n+b_n=3\cdot2^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots①$$

また, n 番と 1 番の面に異なる色を塗るには, $n-1$ 番と 1 番の面が異なる色のときは n 番にこの 2 色以外の 1 色を塗り, $n-1$ 番と 1 番の面が同じ色のときは n 番にこの色以外の 2 色のいずれか一方を塗ればよいので,

$$a_n=a_{n-1}+2b_{n-1}\ \cdots\cdots\cdots②$$

①②より, $a_n=a_{n-1}+2(-a_{n-1}+3\cdot2^{n-2})=-a_{n-1}+3\cdot2^{n-1}\ \cdots\cdots\cdots③$

③より $a_4=-a_3+3\cdot2^3=18$, 同様にして $a_5=30$, $a_6=66$, $a_7=126$

このとき，(i)より側面を 2 色で塗り分けることは不可能なので，側面を 3 色で塗り分ける方法は 126 通りとなる。

底面の塗り方は 4 通りより，$P_4 = 4\times126 = 504$ となる。

コメント

(2)は，$n = 7$ なので樹形図だけで解決ということもできますが，ちょっと気乗りがしませんでした。そのため，漸化式を利用して一般的に解いてみました。

問　題

袋の中に青色，赤色，白色の形の同じ玉がそれぞれ 3 個ずつ入っている。各色の 3 個の玉にはそれぞれ 1，2，3 の番号がついている。これら 9 個の玉をよくかきまぜて袋から同時に 3 個の玉を取り出す。取り出した 3 個のうちに同色のものが他になく，同番号のものも他にない玉の個数を得点とする。たとえば，青 1 番，赤 1 番，白 3 番を取り出したときの得点は 1 で，青 2 番，赤 2 番，赤 3 番を取り出したときの得点は 0 である。このとき以下の問いに答えよ。

(1) 得点が n となるような取り出し方の数を $A(n)$ とするとき，$A(0)$，$A(1)$，$A(2)$，$A(3)$ を求めよ。

(2) 得点の期待値を求めよ。　[1998]

解答例

(1) 取り出した 3 個の玉について，異なる色の種類数と異なる番号の個数，および得点との関係をまとめると，右表のようになる。

色の数	1	2	2	3	3	3
番号の数	3	2	3	1	2	3
得　点	0	0	1	0	1	3

(i)得点が 3 点となるとき

3 色すべてを取り出し，しかも 3 つの番号をすべて取り出す場合より，

$$A(3)=3!=6$$

(ii) 得点が 2 点となるとき

この場合は存在しないので，$A(2)=0$

(iii) 得点が 1 点となるとき

3 色で番号 2 種類のときは，番号の組合せが 3 通りで，それぞれの場合に対して色の対応が 2×3＝6 通りずつある。よって, 3×6＝18 通りとなる。

2 色で番号 3 種類のときも，同様にして 18 通りとなる。

合わせて，$A(1)=18\times 2=36$

(iv) 得点が 0 点となるとき

3 個の玉を取り出すすべての場合の数は，${}_9\mathrm{C}_3=84$ 通りなので, (i)(ii)(iii)より，

$$A(0)=84-(6+0+36)=42$$

(2) 得点の期待値は, (1)より

$$3\times\frac{6}{84}+2\times 0+1\times\frac{36}{84}+0\times\frac{42}{84}=\frac{9}{14}$$

コメント

確率の問題では，考えていることを整理するために，表が役に立ちます。表を書くとミスが少なくなってきます。なお，(1)の$A(0)$の値は，次のようにすれば直接的に導くことができます。色数 1，番号数 3 の場合は 3 通り。色数 3，番号数 1 の場合も 3 通り。また色数 2，番号数 2 の場合は，色の選び方が 3 通り，番号の選び方が 3 通り，それぞれの場合に対して色と番号の対応が 2×2＝4 通りずつとなり，よって 3×3×4＝36 通り。以上より，$A(0)=3+3+36=42$となります。

問　題

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の有理数として整式 $f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ を考える。すべての正の整数 n に対して $\dfrac{f(n)}{g(n)}$ は整数であるとする。このとき，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れることを示せ。 [2015]

解答例

$a,\ b,\ c,\ d,\ e$ を正の有理数とするとき，$f(x)=ax^2+bx+c$，$g(x)=dx+e$ に対して，$f(x)$ を $g(x)$ で割った商を $px+q$，余りを r とおくと，p, q, r は有理数となり，

$$f(x)=g(x)(px+q)+r \cdots\cdots\text{①}$$

さて，$h(x)=\dfrac{f(x)}{g(x)}$ とおくと，①から $h(x)=px+q+\dfrac{r}{g(x)}=px+q+\dfrac{r}{dx+e}$

ここで，n を 2 以上の整数とすると，条件より，$h(n-1)$，$h(n)$，$h(n+1)$ はすべて整数なので，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ の値も整数となり，

$$\begin{aligned}&h(n-1)+h(n+1)-2h(n)\\&=pn-p+q+\frac{r}{dn-d+e}+pn+p+q+\frac{r}{dn+d+e}-2\left(pn+q+\frac{r}{dn+e}\right)\\&=\frac{r}{dn-d+e}+\frac{r}{dn+d+e}-\frac{2r}{dn+e}\\&=\frac{2d^2r}{(dn-d+e)(dn+d+e)(dn+e)}\cdots\cdots\text{②}\end{aligned}$$

すると，十分に大きい n に対しても②が整数となることより，$r=0$ である。

よって，①から，$f(x)=g(x)(px+q)$ となり，$f(x)$ は $g(x)$ で割り切れる。

コメント

結論の $r=0$ を示すために，$h(n)$ の等差数列部分である $pn+q$ を消すことを考え，$h(n-1)+h(n+1)-2h(n)$ を計算しています。そして，得られた式が②というわけです。理系っぽい問題です。

問　題

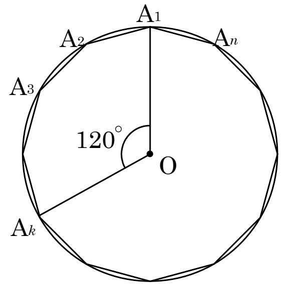
次の命題(p)，(q)のそれぞれについて，正しいかどうか答えよ。正しければ証明し，正しくなければ反例を挙げて正しくないことを説明せよ。

(p)　正 n 角形の頂点から 3 点を選んで内角の 1 つが $60°$ である三角形を作ることができるならば，n は 3 の倍数である。

(q)　$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ において，$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ ならば，これら 2 つの三角形は合同である。　[2012]

解答例

(p)　正しい。



正 n 角形の外接円上に，頂点 A_1，A_2，…，A_k，…，A_n があるとする。

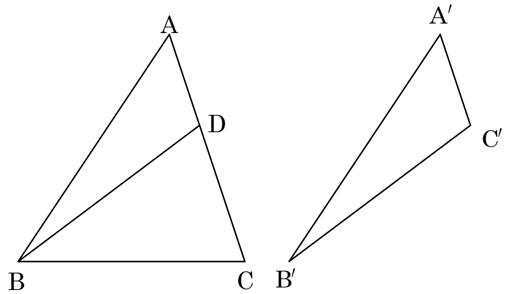
さて，中心を O とすると，条件より，$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{OA}_k=120°$ となる $k\,(2\leqq k\leqq n-1)$ が存在する。

ここで，$\angle\mathrm{A}_1\mathrm{OA}_k=\dfrac{360°}{n}\times(k-1)$ より，

$$\frac{360°}{n}\times(k-1)=120°,\quad 360°\times(k-1)=120°\times n$$

よって，$n=3(k-1)$ となり，n は 3 の倍数である。

(q)　正しくない。



右の$\triangle\mathrm{ABC}$ において，辺 AC 上に点 D を $\mathrm{BD}=\mathrm{BC}$ となるようにとり，$\triangle\mathrm{A'B'C'}$ を $\triangle\mathrm{A'B'C'}\equiv\triangle\mathrm{ABD}$ であるように決める。

$\mathrm{AB}=\mathrm{A'B'}$，$\mathrm{BC}=\mathrm{B'C'}$，$\angle\mathrm{A}=\angle\mathrm{A'}$ を満たすが，$\triangle\mathrm{ABC}$ と $\triangle\mathrm{A'B'C'}$ は合同ではない。

コメント

どちらも図形がらみの証明問題ですが，内容は基本的です。

問　題

n を 1 以上の整数とするとき，次の 2 つの命題はそれぞれ正しいか。正しいときは証明し，正しくないときはその理由を述べよ。

命題 p：ある n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ はともに有理数である。

命題 q：すべての n に対して，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。　[2007]

解答例

[1]　命題 p について

自然数 n に対し，$\sqrt{n}$ が有理数のとき, p, q を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n}=\frac{q}{p},\quad n=\frac{q^2}{p^2}$$

p^2，q^2 も互いに素であるので，$p^2=1$，すなわち $p=1$ である。

よって，$\sqrt{n}$ が有理数のとき，$\sqrt{n}$ は自然数である。

さて，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに有理数, すなわち整数と仮定すると,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}<1$$

これは，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ がともに整数であることに反すし，命題 p は正しくない。

[2]　命題 q について

[1]から，すべての n に対して，$\sqrt{n}$ と $\sqrt{n+1}$ の少なくとも一方は無理数である。

(i)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ の一方が有理数，もう一方が無理数のとき

このとき，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数となる。

(ii)　$\sqrt{n}$，$\sqrt{n+1}$ のともに無理数のとき

$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ が有理数と仮定すると, r, s を互いに素である自然数として,

$$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}=\frac{s}{r},\quad \sqrt{n+1}=\sqrt{n}+\frac{s}{r}$$

両辺を 2 乗して,

$$n+1=n+\frac{2s}{r}\sqrt{n}+\frac{s^2}{r^2},\quad \sqrt{n}=\frac{s}{2r}-\frac{r}{2s}$$

すると，左辺は無理数，右辺は有理数となり成立しない。

よって，$\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ は無理数である。

(i)(ii)より，命題 q は正しい。

コメント

どこかで出合ったことがあると感じる問題です。結論の予測が正しければ，背理法を利用するだけで，その根拠が説明できます。

問　題

$Q(x)$ を 2 次式とする。整式 $P(x)$ は $Q(x)$ では割り切れないが，$\{P(x)\}^2$ は $Q(x)$ で割り切れるという。このとき 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつことを示せ。

[2006]

解答例

$Q(x)$ を複素数範囲で因数分解して，

$$Q(x)=a(x-\alpha)(x-\beta)\quad(a\neq 0)$$

さて，$P(x)$ を $Q(x)$ で割った商を $A(x)$，余りを $px+q$ とおくと，

$$P(x)=Q(x)A(x)+(px+q)\quad(p^2+q^2\neq 0)$$

すると，$P(\alpha)=p\alpha+q$ ……①，$P(\beta)=p\beta+q$ ……②

次に，$\{P(x)\}^2$ を $Q(x)$ で割った商を $B(x)$ とおくと，

$$\{P(x)\}^2=Q(x)B(x)$$

すると，$\{P(\alpha)\}^2=\{P(\beta)\}^2=0$ より，$P(\alpha)=P(\beta)=0$ ………③

①②③より，$p\alpha+q=0$，$p\beta+q=0$ となり，

$$p(\alpha-\beta)=0$$

ここで，$\alpha\neq\beta$ とすると $p=q=0$ となり，$p^2+q^2\neq 0$ に反する。

よって，$\alpha=\beta$ となるので, 2 次方程式 $Q(x)=0$ は重解をもつ。

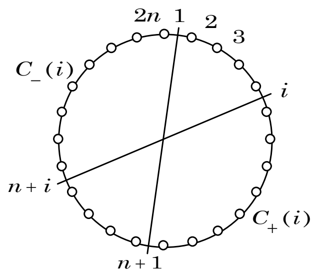
コメント

$Q(x)$ の因数分解を設定して，剰余の定理を用いる解法を採用しました。

問　題

n, k は自然数で，$k \leqq n$ とする。穴のあいた $2k$ 個の白玉と $2n-2k$ 個の黒玉にひもを通して輪を作る。このとき適当な 2 箇所でひもを切って n 個ずつの 2 組に分け，どちらの組も白玉 k 個，黒玉 $n-k$ 個からなるようにできることを示せ。　[2006]

解答例



右図のように，玉と玉の間のひもに，番号を 1 から $2n$ までつける。

$1 \leqq i \leqq 2n$ として，番号 i と $i+n$ のひもを切って，玉を n 個ずつの 2 組 $C_+(i)$ と $C_-(i)$ に分ける。ただし，j を正の整数として，番号 $2n+j$ は j と等しいとする。

ここで，$C_+(i)$ の白玉の個数を $N_+(i)$，$C_-(i)$ の白玉の個数を $N_-(i)$ とおく。

(i)　$N_+(1)=k$ のとき

切断する位置を $(1,\ n+1)$ として 2 組に分けると，題意に適する。

(ii)　$N_+(1) \geqq k+1$ のとき

$N_+(1)+N_-(1)=2k$ より，$N_-(1) \leqq k-1$ である。

さて，切断する位置を $(1,\ n+1)$，$(2,\ n+2)$，…，$(n,\ 2n)$，$(n+1,\ 2n+1)$ と変化させて，数列 $N_+(1)$，$N_+(2)$，…，$N_+(n)$，$N_+(n+1)$ を考えると，隣接する 2 項の関係は，次の 3 つの場合のいずれかとなる。

$$N_+(i+1)=N_+(i)+1,\ N_+(i+1)=N_+(i),\ N_+(i+1)=N_+(i)-1$$

さらに，$N_+(1) \geqq k+1$ であり，しかも $N_+(n+1)=N_-(1) \leqq k-1$ であるので，$N_+(i)=k$ となる i が，$2 \leqq i \leqq n$ に少なくとも 1 つ存在する。

このとき，切断する位置を $(i,\ i+n)$ として 2 組に分けると，題意に適する。

(iii)　$N_+(1) \leqq k-1$ のとき

(ii)と同様に考えると，$N_+(n+1)=N_-(1) \geqq k+1$ となることより，$N_+(i)=k$ となる i が，$2 \leqq i \leqq n$ に少なくとも 1 つ存在し，切断する位置を $(i,\ i+n)$ として 2 組に分けると，題意に適する。

コメント

京大らしい記述力の要する問題です。