《2018 入試対策》

金沢大学

文系数学

1998—2017

過去問
ライブラリー

電送数学舎

ま え が き

本書には，1998 年度以降に出題された金沢大学（前期日程）の文系数学の全問題とその解答例を掲載しています。

過去問の演習をスムーズに進めるために，現行課程入試に対応した内容分類を行っています。なお，複数領域の融合問題の配置箇所は，鍵となっている分野です。

また，利便性の向上のため，対応する問題と解答例のページにリンクを張っています。問題編の 1 , 2 ,…などの問題番号，解答編の 問 題 の文字がリンク元です。

本書の構成について

1　本書は 2 部構成になっています。「分野別問題一覧」と「分野別問題と解答例」です。

2　標準的な活用方法については，以下のように想定しています。

(1)　「分野別問題一覧」から問題を選び，答案をつくる。
(2)　「分野別問題と解答例」で，答案をチェックする。
(3)　1 つの分野で，(1)と(2)を繰り返す。
(4)　完答できなかった問題だけを，再度，繰り返す。
(5)　出題の流れをウェブサイトで入試直前に確認する。

注　「複素数平面」は範囲外ですので除外しました。
「期待値」が主でない確率問題は掲載しています。

目　　次

分 野 別 問 題 一 覧

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

■ 関数

$\boxed{1}$ 座標平面上に 2 点 $\mathrm{P}(\sqrt{3},\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ を θ で表せ。

(2) $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ を用いて，$\sin\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ における $|\overrightarrow{\mathrm{PQ}}|^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，最大値，最小値を与える θ の値を求めよ。 [2013]

$\boxed{2}$ $\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の問いに答えよ。

(1) $\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(2) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\geqq\dfrac{1}{10}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす最大の自然数 $m,\ n$ を求めよ。

(3) 連立不等式 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\geqq\dfrac{1}{10}$，$x\geqq0$，$y\geqq0$ の表す領域を座標平面に図示せよ。

(4) $\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 m と n の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。 [2012]

$\boxed{3}$ 次の問いに答えよ。

(1) $x>0$，$x\neq1$ とする。方程式 $\log_2 x+2\log_x 2=3$ を解け。

(2) $x>0$，$x\neq2$，$y>0$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\log_{\frac{x}{2}} y=2,\quad xy=16$$

(3) $x>0$，$x\neq2$，$y>0$ とする。次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{x}{2}} y<2,\quad xy<16$$

[2010]

4　実数 t と $0 \leqq \theta < 2\pi$ に対して, 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t^2$$

$$g(x) = x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \frac{1}{16}$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　$\frac{1}{2}$, $2\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ の大小を比べよ。また, この 3 つの値が等しくなる θ をすべて求めよ。

(2)　θ は(1)で求めた値とは異なる定数とする。

(i)　2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ とするとき, 2 次方程式 $D(t) = 0$ の解 α, β $(\alpha < \beta)$ を求め, $\int_\alpha^\beta D(t)\,dt = -\frac{\cos^6 2\theta}{6}$ となることを示せ。

(ii)　2 つの 2 次方程式 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち, 他方が虚数解をもつための t の範囲を求めよ。　[2009]

5　$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で定義された関数　$f(\theta) = a\sin\theta\cos\theta + b(\sin\theta - \cos\theta) - 1$ を考える。ただし, a, b は正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1)　$t = \sin\theta - \cos\theta$ として, $f(\theta)$ を a, b, t を用いて表せ。また, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　等式 $f(\theta) = 0$ を満たす θ が存在するような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を座標平面上に図示せよ。　[2008]

6　実数 α, β について, x, y は 2 つの等式

$$x + y = \alpha\beta + \alpha + \beta - 1,\quad 2x + 3y = 3\alpha\beta + 2\alpha + 2\beta - 3$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha + \beta$ と $\alpha\beta$ を x, y で表せ。

(2)　t の 2 次方程式 $t^2 - (\alpha + \beta)t + \alpha\beta = 0$ が実数解をもつ条件を x, y で表せ。

(3)　α, β が条件 $-1 \leqq \alpha \leqq 1$, $-1 \leqq \beta \leqq 1$ を満たすとき, 点 $(x,\ y)$ の存在範囲を座標平面に図示せよ。　[2005]

7　正の定数 $a\,(a \neq 1)$ に対して, 関数 $f(x)$ を

$$f(x) = a^{2x} + a^{-2x} - 2(a + a^{-1})(a^x + a^{-x}) + 2(a + a^{-1})^2$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a^x + a^{-x} = t$ とおくとき, t の最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。また, そのときの x の値を求めよ。　[2000]

■ 微分と積分

1　$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2)　接線 l は，原点 $\mathrm{O}(0,\ 0)$ を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3)　(2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4)　$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。　[2017]

2　平面上の 2 つの曲線 $C_1: x^2+(y-5)^2=16$，$C_2: y=\dfrac{1}{4}x^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 を同一平面上に図示せよ。

(3)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2016]

3　a，b は定数で，$ab>0$ とする。放物線 $C_1: y=ax^2+b$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における接線を l とし，放物線 $C_2: y=ax^2$ と l で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1)　l の方程式を求めよ。

(2)　l と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ。

(3)　点 P が C_1 上を動くとき，S は点 P の位置によらず一定であることを示せ。

[2015]

4　放物線 $C: y=x^2+2x$ 上の 2 点 $(a,\ a^2+2a)$，$(b,\ b^2+2b)$ における接線をそれぞれ l_a，l_b とするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a<b$ とする。

(1)　2 直線 l_a，l_b の方程式を求めよ。また，l_a と l_b の交点の x 座標を求めよ。

(2)　放物線 C と 2 直線 l_a，l_b とで囲まれた図形の面積 S を求めよ。

(3)　2 直線 l_a，l_b が垂直に交わるように a，b が動くとき，a，b が満たす関係式を求めよ。また，そのときの面積 S の最小値とそれを与える a, b の値を求めよ。　[2014]

5　実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=|x^2-6x+5|-x^2+4x+5$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$0\leqq x\leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=a$ で最大値 $f(a)$ を，$x=b$ で最小値 $f(b)$ をとる。a, b および $f(a)$，$f(b)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた a, b について，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)dx$ を求めよ。　[2013]

6　曲線 $C: y=|x^2-2x|$ と傾きが m の直線 $l: y=mx$ について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線 $y=-x^2+2x$ と l が接する m の値を求めよ。

(2)　C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲を求めよ。また，そのときの 2 つの交点の座標を m を用いて表せ。

(3)　m は(2)で求めた範囲にあるとする。$x\geqq 2$，$y\leqq mx$，$y\geqq |x^2-2x|$ で定まる部分の面積 S を m を用いて表せ。　[2012]

7　実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\displaystyle\int_0^2 |t-x|dt$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　関数 $y=f(x)$ を求め，そのグラフをかけ。

(2)　$y=f(x)$ の接線で傾きが 1 のものを l とする。l の方程式を求めよ。

(3)　直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2011]

8　a を正の定数とする。2 つの放物線 $C_1: y=x^2$ と $C_2: y=(x-2)^2+4a$ の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1)　放物線 C_1 上の点 $\mathrm{Q}(t,\ t^2)$ における接線の方程式を求めよ。さらに，その接線のうち C_2 に接するものを l とする。l の方程式を求めよ。

(2)　点 P を通り y 軸に平行な直線を m とする。l と m の交点を R とするとき，線分 PR の長さを求めよ。

(3)　直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

9　実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を，$f(x)=-(a+1)x-1$，$g(x)=2x+\dfrac{a}{3}$ とし，$m(a)=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m(a)>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)h(x)dx=0$ となる a の値を求めよ。　[2008]

10　関数 $f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2007]

11　座標平面上の曲線 $C: y=|x^2-1|$ と傾き a の直線 $l: y=a(x+1)$ が異なる 3 点で交わっているとする。

(1)　a のとりうる値の範囲を求めよ。

(2)　C と l で囲まれた 2 つの図形の面積の和 S を a を用いて表せ。

(3)　S が最小になる a の値を求めよ。　[2004]

12　定積分 $\displaystyle\int_{-1}^1 \frac{1}{2}(ax+b)^2 dx$ を $I(a,\ b)$ とおく。

(1)　$I(a,\ b)$ を a, b の多項式で表せ。

(2)　$b=a+1$ のとき，$I(a,\ b)$ が最小となるような a およびそのときの $I(a,\ b)$ の値を求めよ。

(3)　$I(a,\ b)=1$ かつ $b=ma+n$ となる $(a,\ b)$ がちょうど 1 組のとき，実数 m, n の満たす条件を求めよ。　[2003]

13　x の 3 次関数 $f(x)=x^3-kx^2+4k$ について以下の問いに答えよ。

(1)　$x\geqq 0$ のときつねに $f(x)\geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが k の値によらず通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ を求めよ。さらに $a<x<b$ のときつねに $y=f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。　[2003]

14　関数 $f(x)=-\dfrac{3}{4}x^2+\dfrac{1}{4}x+2|x|-\dfrac{15}{16}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(2)　関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3)　$a>0$ とするとき，$\displaystyle\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。　[2002]

15　2 つの 2 次関数 $y=-x^2+1$ と $y=qx^2+px+2$ が $0<x<1$ の範囲で共有点をもち，かつその点で共通の接線をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　上の条件を満たすような点 $(p,\ q)$ を pq 平面上に図示せよ。

(2)　共有点の x 座標を $\alpha\,(0<\alpha<1)$ とし，

$$f(x)=\begin{cases} qx^2+px+2 & (0\leqq x<\alpha) \\ -x^2+1 & (\alpha\leqq x\leqq 1)\end{cases}$$

とおく。このとき積分 $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,dx$ を p で表せ。　[2001]

16　次の問いに答えよ。

(1)　実数 α，$\beta\ (\alpha<\beta)$ に対して，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$ が成り立つことを示せ。

(2)　a は実数で，$a\geqq 0$ とする。座標平面上で，不等式 $x^2\leqq y\leqq |x-a|$ の表す領域の面積 $S(a)$ を求めよ。　[2000]

17　関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ について，次の問いにそれぞれ答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ が $x=0$ で極小になるとき，定数 $a,\ b$ の満たす条件を求めよ。

(2)　実数 $s,\ t$ が $s\neq 0$，$t<s^3+1$ を満たすならば，関数 $f(x)$ が $x=s$ で極小値 t をとるように定数 $a,\ b$ を，s と t を用いて定めることができることを示せ。　[1999]

18　3 次関数 $f(x)=x^3+k(x^2+x+1)$ について，次の問いに答えよ。

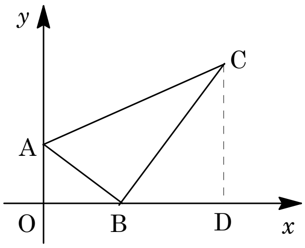
(1)　$f(x)$ が極値をもつための定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極値をとる x の値を α，β　$(\alpha<\beta)$ とする。このとき，4 点 $\mathrm{A}(\alpha,\ f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\alpha,\ f(\beta))$，$\mathrm{C}(\beta,\ f(\beta))$，$\mathrm{D}(\beta,\ f(\alpha))$ を頂点とする長方形 ABCD が正方形となる k の値を求めよ。

(3)　(2)で得られた正方形の 1 辺の長さを求めよ。　[1998]

■ 図形と式

1　O を原点とする座標平面に点 $A(0,\ \sin\theta)$，$B(\cos\theta,\ 0)$ がある。ただし，$0<\theta<\dfrac{\pi}{2}$ とする。また，点 C を $AC=2$，$\angle ABC=\dfrac{\pi}{2}$ を満たす第 1 象限の点とする。さらに，点 C から x 軸に垂線 CD を下ろす。次の問いに答えよ。

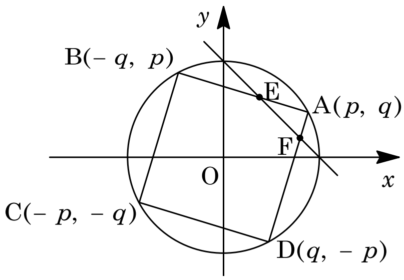


(1)　AB, BC を求めよ。また，$\angle OBA$ と $\angle CBD$ および点 C の座標を θ を用いて表せ。

(2)　台形 AODC の面積を S とするとき，$S\leqq 1+\dfrac{\sqrt{3}}{2}$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。

(3)　$AO+CD\leqq 2$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。　[2012]

2　座標平面上に $A(p,\ q)$，$B(-q,\ p)$，$C(-p,\ -q)$，$D(q,\ -p)$ を頂点とする正方形がある。ただし，$p>0$，$q>0$，$p^2+q^2=1$ とする。また，直線 AB, AD が直線 $x+y=1$ と交わる点をそれぞれ $E(r,\ s)$，$F(t,\ u)$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　直線 AB, AD の方程式を p, q を用いて表せ。

(2)　r, s, t, u を p, q を用いて表せ。

(3)　$k=p+q$ とおくとき, pq を k の式で表せ。また，$k\leqq\sqrt{2}$ を示せ。

(4)　$st-ru$ を k の式で表せ。また，$st-ru$ の最小値を求めよ。　[2011]

3　O を原点とする座標平面上の円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方を P，他方を Q とする。点 P，Q における円 C の接線をそれぞれ l，m とする。次の問いに答えよ。

(1)　P, Q の座標を求めよ。また, l と m の交点 R の座標を求めよ。

(2)　線分 OR と C の交点を S とする。S の座標を求めよ。また，△QRS の面積を求めよ。

(3)　$\angle PQS=\angle RQS$ であることを示せ。　[2010]

4　xy 平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし，$0<r\leqq a$ とする。円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 $\mathrm{E}(a+r,\ 0)$ をとる。さらに，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q, 2 点 E, P を通る直線と y 軸との交点を R, $\angle\mathrm{AEP}$ を θ とする。このとき，3 点 P, Q, R を頂点とする△PQR について，次の問いに答えよ。

(1)　△PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に，これが正三角形となる場合の，θ の値を求めよ。

(2)　△PQR が正三角形となり，さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ。

(3)　△PQR が正三角形となり，さらにその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の, a と r の関係式を求めよ。　[2009]

5　点 O を原点とする xy 平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{R}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ をとる。角 θ は $15^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ の範囲にあるとし，△OPQ と△OPR の面積をそれぞれ S と T とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　$\theta<\alpha<\theta+90^\circ$ を満たす角 α に対して点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ をとる。△OPA の面積と線分 QR の長さの積が $S+T$ に等しくなるとき，α を θ を用いて表せ。

(2)　θ が $15^\circ\leqq\theta\leqq 45^\circ$ を満たしながら変化するとき，$T-S$ のとりうる値の範囲を求め，$T-S$ が最大値をとるときの θ の値を求めよ。

(3)　θ を(2)で求めた値とする。このときの S と T の値を求めよ。また，点 $\mathrm{Q}'(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，$\triangle\mathrm{PQQ}'$ の面積を求めよ。　[2007]

6　放物線 $y=-x^2+2x$ を H_1，また放物線 $y=x^2$ を H_2 で表す。H_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における H_1 の接線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1)　接線 l の方程式を求めよ。また, a の値に関係なく, l は H_2 と異なる 2 点で交わることを示せ。

(2)　接線 l と放物線 H_2 の異なる 2 つの交点を結ぶ線分の中点を Q とする。点 P が H_1 上を動くとき，点 Q の軌跡 C の方程式を求めよ。

(3)　(2)の軌跡 C と放物線 H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2006]

7　不等式 $y \leqq -(x-1)^2$ の表す領域を A_1，不等式 $y \leqq -(x+1)^2$ の表す領域を A_2 とする。A_1 と A_2 の和集合 $A_1 \cup A_2$ を A とする。また，不等式 $y \geqq (x-a)^2+b$ の表す領域を B とする。次の問いに答えよ。

(1)　$a=0$，$b=-1$ とするとき，A と B の共通部分 $A \cap B$ の面積を求めよ。

(2)　A_1 と B の共通部分 $A_1 \cap B$ が空集合でないための条件を $a,\ b$ で表せ。

(3)　A と B の共通部分 $A \cap B$ が空集合でないとき点 $(a,\ b)$ の存在範囲を座標平面に図示せよ。　[2005]

■ 図形と計量

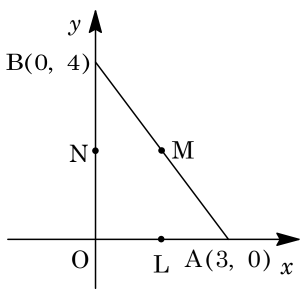
1　△ABC において，∠A は直角で，∠B＜∠C とし，BC＝2 とする。∠B＝θ とおくとき，次の問いに答えよ。

(1)　辺 AB, AC の長さ，および△ABC の面積 S を θ を用いて表せ。

(2)　△ABC の内接円 O の半径 r を θ を用いて表せ。

(3)　辺 BC の垂直二等分線が，内接円 O と接するとき，θ と r の値を求めよ。　[2017]

2　座標平面上に点 A$(3,\ 0)$，B$(0,\ 4)$ をとる。また，原点 O と A の中点を L, A と B の中点を M, B と O の中点を N とする。さらに，△OAB の内接円を C_1，△LMN の外接円を C_2 とする。次の問いに答えよ。



(1)　円 C_1 の半径 r_1 と中心 P_1 の座標を求めよ。

(2)　円 C_2 の半径 r_2 と中心 P_2 の座標を求めよ。

(3)　円 C_1 と円 C_2 が接することを示せ。　[2011]

3　平面上に，同一直線上にない 3 定点 O, A, B があり，線分 OA, OB の長さはそれぞれ 9, 4 である。動点 P, Q は同時に O を出発し, P は線分 OA 上を秒速 3 で, Q は線分 OB 上を秒速 2 でそれぞれ往復運動をくり返しているとする。このとき次の問いに答えよ。

(1)　出発してから初めて P, Q が O で出会うのは何秒後か。

(2)　出発してから 5 秒後の PQ の長さは 4 であった。∠AOB の余弦と正弦の値を求めよ。

(3)　出発してから t 秒後の OP, OQ の長さをそれぞれ $x,\ y$ とする。点 $(x,\ y)$ の軌跡を $0 \leqq t \leqq 6$ の範囲で xy 平面上に図示せよ。　[2001]

4　平地を東西にのびる直線道路 l と，その北側に 3 地点 A, B, C があり，それぞれの地点には目じるしが置かれている。

l 上の地点 P で A, B, C を見ると，直線 AP は l に垂直で，B, C は直線 AP の東側にあり，$\angle\mathrm{APB} = 30^\circ$，$\angle\mathrm{APC} = 60^\circ$ であった。P から東へ $100\sqrt{3}$ 移動した l 上の地点 Q では，Q, B, A が一直線上にあり，$\angle\mathrm{BQP} = 30^\circ$ であった。Q からさらに東へ移動した l 上の地点 R では，R, C, A が一直線上にあり，$\angle\mathrm{CRQ} = 15^\circ$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を示せ。

(2)　2 地点 A, C 間の距離 AC を求めよ。

(3)　2 地点 B, C 間の距離の 2 乗 BC^2 を求めよ。　[1999]

■ ベクトル

1　座標空間内に 3 点 $\mathrm{O}(0,\ 0,\ 0)$，$\mathrm{A}(3,\ 3,\ 0)$，$\mathrm{B}(0,\ 6,\ 0)$ をとり，さらに $1 < a < 3$ を満たす定数 a に対して点 $\mathrm{P}(t,\ ta,\ ta)$ をとる。ただし，t は $t > 0$ の範囲を動くものとする。次の問いに答えよ。

(1)　点 P から xy 平面に垂線 PH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

(2)　点 H が線分 AB 上にあるときの t の値を求め，そのときの点 H の座標を a を用いて表せ。

以下，点 H は線分 AB 上にあるとする。

(3)　点 M を線分 AB の中点とする。AH : HM の比の値 $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HM}}$ を求めよ。

(4)　四面体 OPMH の体積が 2 となるような a の値を求めよ。　[2016]

2　平面上の三角形 ABC で，$|\overrightarrow{\mathrm{AB}}| = 7$，$|\overrightarrow{\mathrm{BC}}| = 5$，$|\overrightarrow{\mathrm{AC}}| = 6$ となるものを考える。また，三角形 ABC の内部の点 P は，$\overrightarrow{\mathrm{PA}} + s\overrightarrow{\mathrm{PB}} + 3\overrightarrow{\mathrm{PC}} = \vec{0}$　$(s > 0)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AP}} = \alpha\overrightarrow{\mathrm{AB}} + \beta\overrightarrow{\mathrm{AC}}$ とするとき，α と β を s を用いて表せ。

(2)　2 直線 AP, BC の交点を D とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{BD}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{DC}}|}$ と $\dfrac{|\overrightarrow{\mathrm{AP}}|}{|\overrightarrow{\mathrm{PD}}|}$ を s を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC の面積を求めよ。

(4)　三角形 APC の面積が $2\sqrt{6}$ となるような s の値を求めよ。　[2015]

3　xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S : x^2+y^2+z^2=1$，および S 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A, P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$t$ は実数）とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3)　球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。　[2008]

4　O を原点とする座標平面上に 2 点 $\mathrm{A}(1,\ 1)$，$\mathrm{B}(3,\ -1)$ がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$ とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル $\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角を θ とするとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(2)　t が $0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 P の動く範囲を図示せよ。

(3)　s，t が $1\leqq s\leqq 3$，$0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$ で定められる点 Q の動く範囲の面積を求めよ。　[2006]

5　座標平面上で，原点 O を基準とする点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\vec{p}$ であるとき，点 P を $\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}(\vec{a})$ を原点 O と異なる点とする。

　(i)　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{a}$ に垂直な直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$ が成り立つことを示せ。

　(ii)　ベクトル方程式 $|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ で表される図形を図示せよ。

(2)　ベクトル $\vec{b}=(1,\ 1)$ に対して，不等式 $|\vec{p}-\vec{b}|\leqq|\vec{p}+3\vec{b}|\leqq 3|\vec{p}-\vec{b}|$ を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体が表す領域を図示せよ。　[2000]

6　O を頂点とする空間に，点 $\mathrm{A}(5,\ 1,\ -1)$ を通り，$\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$ を方向ベクトルとする直線 g と，点 $\mathrm{B}(6,\ -4,\ 0)$ を通り，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -1)$ を方向ベクトルとする直線 h がある。いま，点 P, Q がそれぞれ g, h 上にあり，ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$ は，g と h の両方に垂直となっている。次の問いに答えよ。

(1)　P, Q の座標を求めよ。

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ と $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ のなす角を θ とおくとき，$\cos\theta$ の値を求めよ。

(3)　$\triangle\mathrm{OPQ}$ の面積を求めよ。　[1998]

■ 整数と数列

1 次の問いに答えよ。ただし，${}_m\mathrm{C}_k$ は m 個から k 個取る組合せの総数を表す。

(1) $k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ に対して，${}_7\mathrm{C}_k$ は 7 の倍数であることを示せ。

(2) p は素数とし，k は $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数とする。${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ。

(3) すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。 [2017]

2 数列 $\{a_n\}$ が，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ を満たしている。次の問いに答えよ。

(1) 一般項 a_n を求めよ。

(2) $S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$ とおくとき，$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}\quad(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3) 和 $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$ を求めよ。 [2014]

3 次の問いに答えよ。

(1) $x>0$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2) 数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。

(i) $n\geqq 1$ のとき，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。

(ii) $n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}<\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$ を示せ。

(iii) $n\geqq 1$ のとき，$0<a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ を示せ。 [2009]

4 数列 $\{a_n\}$ が $a_1=-4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot 2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ により定められているとする。

(1) $b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$ とおくとき b_n と b_{n+1} の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$ の一般項を求めよ。

(2) $a_n>a_{n+1}$ となるような n の値をすべて求めよ。

(3) a_n が最小となるような n の値をすべて求めよ。 [2003]

5　以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ とする。$x \geqq 14$ ならば $f(x)>0$ となることを示せ。

(2)　自然数 a に対して，$b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ とおく。b も自然数となるような a と b の組$(a,\ b)$をすべて求めよ。　[2002]

■ 確率

1　A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 個ずつのサイコロを同時に投げ，出た目の大きさの順に $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ とする。$x_1 = x_2 = x_3$ のときは，もう一度 3 人でサイコロ投げを行う。$x_1 \leqq x_2 < x_3$ のときは，x_3 を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。$x_1 < x_2 = x_3$ のときは，x_1 を出した者は去り，残りの 2 人で異なる目が出るまでサイコロ投げを続け，大きい目を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。次の問いに答えよ。

(1)　1 回目のサイコロ投げで A が 3 を出して勝者となる場合の数を求めよ。

(2)　1 回目のサイコロ投げで A が勝者となる場合の数を求めよ。

(3)　1 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。

(4)　2 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。　[2016]

2　座標平面上で，x 座標と y 座標がともに 0 以上の整数である点を，ここでは格子点とよぶ。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へ，両端点がともに格子点であり長さが 1 の線分を用いて，格子点 $(0,\ 0)$ から順に最も少ない本数でつなぐ方法を数える。たとえば，格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(3,\ 1)$ へつなぐ方法の数は 4 である。次の問いに答えよ。

(1)　格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(4,\ 0)$ へつなぐ方法の数と，格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(2,\ 2)$ へつなぐ方法の数を，それぞれ求めよ。

(2)　条件 $k+l=5$ を満たす格子点 $(k,\ l)$ を考える。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を求めよ。

(3)　条件 $k+l=n$ $(n\geqq 1)$ を満たす格子点 $(k,\ l)$ を考える。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。

(4)　条件 $k+l=n$ (k と l はともに偶数で，$n\geqq 2$) を満たす格子点 $(k,\ l)$ を考える。格子点 $(0,\ 0)$ から格子点 $(k,\ l)$ へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。　[2015]

3　1 から 4 までの番号を書いた玉が 2 個ずつ，合計 8 個の玉が入った袋があり，この袋から玉を 1 個取り出すという操作を続けて行う。ただし，取り出した玉は袋に戻さず，また，すでに取り出した玉と同じ番号の玉が出てきた時点で一連の操作を終了するものとする。

玉をちょうど n 個取り出した時点で操作が終わる確率を $P(n)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$P(2)$，$P(3)$ を求めよ。

(2)　6 以上の k に対し，$P(k)=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　一連の操作が終了するまでに取り出された玉の個数の期待値を求めよ。　[2014]

4　座標平面上の点 P は，硬貨を 1 回投げて表が出れば x 軸の正の方向に 2，裏が出れば y 軸の正の方向に 1 だけ進むことにする。最初，P は原点にある。硬貨を 5 回投げた後の P の到達点について，次の問いに答えよ。

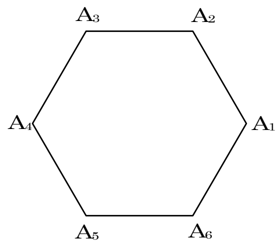
(1)　P の到達点が $(10,\ 0)$ となる確率を求めよ。また，$(6,\ 2)$ となる確率を求めよ。

(2)　2 点 $(10,\ 0)$，$(6,\ 2)$ を通る直線 l の方程式を求めよ。また，P の到達点はすべて直線 l 上にあることを示せ。

(3)　(2)で求めた直線 l と原点との距離を求めよ。

(4)　P の到達点と原点との距離 d が，$2\sqrt{5} < d \leqq 5$ となる確率を求めよ。　[2013]

5　図のように頂点が A_1 から A_6 である 1 辺の長さが 2 の正六角形がある。さいころを投げて出た目 k と頂点 A_k を対応させる。さいころを 3 回投げて出た目がすべて異なるときには，対応する頂点を結んで三角形ができ，それ以外の場合には線分か点ができる。このとき，次の問いに答えよ。



(1)　$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_5$ の面積をそれぞれ求めよ。

(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができない確率を求めよ。

(3)　さいころを 3 回投げたとき，$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形ができる確率を求めよ。

(4)　さいころを 3 回投げたときにできる図形の面積の期待値を求めよ。ただし，線分と点の面積は 0 とする。　[2006]

6　座標平面上で動点 P が，x 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 a で表し，y 軸の正の方向へ 1 進むことを文字 b で表し，停留することを文字 c で表す。a, b, c からなる文字列が与えられたとき，点 P は原点を出発し，その文字列に従って移動する。たとえば，長さ 4 の文字列 acab に対しては，点 P は原点 $(0,\ 0)$ から出発して，$(1,\ 0)$，$(1,\ 0)$，$(2,\ 0)$，$(2,\ 1)$ と移動し，点 $(2,\ 1)$ が到達点となる。

(1)　n を自然数とする。長さ n の文字列のなかで，点 P の到達点の x 座標と y 座標の和が n となる文字列は何個あるか。また，その理由を説明せよ。

(2)　k, n を自然数とし，$1 \leqq k \leqq n$ とする。長さ n の文字列のなかで，点 P の到達点の x 座標と y 座標の和が k となる文字列の個数を $F_n(k)$ とする。$F_n(k)$ を k と n を用いて表せ。

(3)　自然数 n が与えられたとき，$F_n(k)$ が最大になる自然数 k の値を求めよ。

[2004]

7　$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は座標平面上のベクトルで，$\vec{a}=(0,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ とし，各 k についてベクトル $\overrightarrow{p_k}$ はベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のいずれかとする。次の問いに答えよ。

(1)　$n=2$ とする。$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$ がとり得るベクトルのうち，異なるものをすべて成分で表せ。

(2)　$n=4$ とする。内積 $\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})$ がとり得る値のうち，異なるものはいくつあるか。

(3)　$n=5$ とする。順序をつけて並べた列 $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_4}$, $\overrightarrow{p_5}$ で，条件 $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}+\overrightarrow{p_5}=(4,\ 1)$ を満たすものはいくつあるか。　[1999]

分野別問題と解答例

関　数／微分と積分／図形と式

図形と計量／ベクトル

整数と数列／確　率

問　題

座標平面上に 2 点 $P(\sqrt{3},\ 0)$，$Q(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ がある。次の問いに答えよ。

(1) $|\overrightarrow{PQ}|^2$ を θ で表せ。

(2) $\dfrac{7\pi}{12}=\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}$ を用いて，$\sin\dfrac{7\pi}{12}$ の値を求めよ。

(3) $\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ における $|\overrightarrow{PQ}|^2$ の最大値と最小値を求めよ。また，最大値，最小値を与える θ の値を求めよ。　[2013]

解答例

(1) $P(\sqrt{3},\ 0)$，$Q(\cos\theta,\ 1-\sin\theta)$ に対して，$\overrightarrow{PQ}=(\cos\theta-\sqrt{3},\ 1-\sin\theta)$ より，

$$|\overrightarrow{PQ}|^2=(\cos\theta-\sqrt{3})^2+(1-\sin\theta)^2=5-2\sin\theta-2\sqrt{3}\cos\theta$$

(2) $\sin\dfrac{7\pi}{12}=\sin\left(\dfrac{\pi}{3}+\dfrac{\pi}{4}\right)=\sin\dfrac{\pi}{3}\cos\dfrac{\pi}{4}+\cos\dfrac{\pi}{3}\sin\dfrac{\pi}{4}=\dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$

(3) (1)より，$|\overrightarrow{PQ}|^2=5-4\sin\left(\theta+\dfrac{\pi}{3}\right)$ となり，$\dfrac{\pi}{4}\leqq\theta\leqq\pi$ から $\dfrac{7\pi}{12}\leqq\theta+\dfrac{\pi}{3}\leqq\dfrac{4\pi}{3}$

よって，$|\overrightarrow{PQ}|^2$ は，$\theta=\pi$ のとき最大値 $5-4\sin\dfrac{4\pi}{3}=5+2\sqrt{3}$ をとり，$\theta=\dfrac{\pi}{4}$ のとき最小値 $5-4\sin\dfrac{7\pi}{12}=5-\sqrt{6}-\sqrt{2}$ をとる。

コメント

三角関数の計算だけの問題です。

問　題

$\log_{10}2=0.3010$，$\log_{10}3=0.4771$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)$，$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)$ の値を求めよ。

(2)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\geqq\dfrac{1}{10}$，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす最大の自然数 m, n を求めよ。

(3)　連立不等式 $\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\geqq\dfrac{1}{10}$，$x\geqq0$，$y\geqq0$ の表す領域を座標平面に図示せよ。

(4)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 m と n の組 $(m,\ n)$ をすべて求めよ。　[2012]

解答例

(1)　$\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)=\log_{10}2-\log_{10}3=0.3010-0.4771=-0.1761$

$$\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)=-\log_{10}2=-0.3010$$

(2)　まず，$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\geqq\dfrac{1}{10}$ ……①より，$m\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)\geqq-1$ となり, (1)から,

$$m\leqq\dfrac{1}{0.1761}\fallingdotseq5.68$$

よって，①を満たす最大の自然数 m は，$m=5$ である。

また，$\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ ……②より，$n\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq-1$ となり, (1)から,

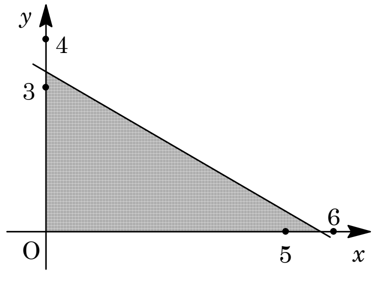
$$m\leqq\dfrac{1}{0.3010}\fallingdotseq3.32$$

よって，②を満たす最大の自然数 n は，$n=3$ である。

(3)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^x\left(\dfrac{1}{2}\right)^y\geqq\dfrac{1}{10}$ から，$x\log_{10}\left(\dfrac{2}{3}\right)+y\log_{10}\left(\dfrac{1}{2}\right)\geqq-1$ となり，

$$-0.1761x-0.3010y\geqq-1$$

$$0.1761x+0.3010y\leqq1 \ \cdots\cdots\cdots ③$$



$x\geqq0$，$y\geqq0$ と合わせると，求める領域は右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。

(4)　$\left(\dfrac{2}{3}\right)^m\left(\dfrac{1}{2}\right)^n\geqq\dfrac{1}{10}$ を満たす自然数 $(m,\ n)$ について，右図より，$n=1,\ 2,\ 3$ の場合を考える。

(i)　$n=3$ のとき

$(x,\ y)=(1,\ 3)$ は③を満たさない。この場合は満たす $(m,\ n)$ はない。

(ii)　$n=2$ のとき

$(x,\ y)=(2,\ 2)$ は③を満たすが，$(x,\ y)=(3,\ 2)$ は満たさない

よって，$(m,\ n)=(1,\ 2),\ (2,\ 2)$

(iii)　$n=1$ のとき

$(x,\ y)=(3,\ 1)$ は③を満たすが，$(x,\ y)=(4,\ 1)$ は満たさない

よって，$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1)$

(i)～(iii)より，$(m,\ n)=(1,\ 1),\ (2,\ 1),\ (3,\ 1),\ (1,\ 2),\ (2,\ 2)$

コメント

対数計算の基本知識を確認する問題です。数値計算は煩雑です。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$, $x\neq 1$ とする。方程式 $\log_2 x+2\log_x 2=3$ を解け。

(2)　$x>0$, $x\neq 2$, $y>0$ とする。次の連立方程式を解け。

$$\log_{\frac{x}{2}} y=2,\ \ xy=16$$

(3)　$x>0$, $x\neq 2$, $y>0$ とする。次の連立不等式の表す領域を図示せよ。

$$\log_{\frac{x}{2}} y<2,\ \ xy<16$$

[2010]

解答例

(1)　$x>0$, $x\neq 1$ のとき, $\log_2 x+2\log_x 2=3$ に対して, $\log_2 x+\dfrac{2}{\log_2 x}=3$ となり,

$$(\log_2 x)^2-3\log_2 x+2=0,\ (\log_2 x-1)(\log_2 x-2)=0$$

よって, $\log_2 x=1,\ 2$ より, $x=2,\ 4$

(2)　$x>0$, $x\neq 2$, $y>0$ のとき, $\log_{\frac{x}{2}} y=2$ ……①, $xy=16$ ……②に対して,

①より, $y=\left(\dfrac{x}{2}\right)^2=\dfrac{1}{4}x^2$ となり, ②に代入すると,

$$\frac{1}{4}x^3=16,\ x^3=64$$

すると, $x=4$ となり, ②から, $y=4$

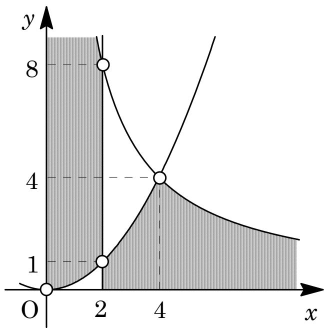
(3)　$x>0$, $x\neq 2$, $y>0$ のとき, $\log_{\frac{x}{2}} y<2$ ……③, $xy<16$ ……④に対して, ③より,

(i)　$\dfrac{x}{2}>1\ (x>2)$ のとき　$y<\dfrac{1}{4}x^2$

(ii)　$0<\dfrac{x}{2}<1\ (0<x<2)$ のとき　$y>\dfrac{1}{4}x^2$

④より, $y<\dfrac{16}{x}$

よって, 連立不等式③④の表す領域は右図の網点部となる。ただし, 境界は領域に含まない。



コメント

対数方程式・不等式の基本問題です。

問　題

実数 t と $0 \leqq \theta < 2\pi$ に対して, 2 次関数 $f(x)$, $g(x)$ を

$$f(x) = x^2 + \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}t^2$$

$$g(x) = x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \frac{1}{16}$$

とする。このとき次の問いに答えよ。

(1) $\frac{1}{2}$, $2\sin^2\theta\cos^2\theta$, $\sin^4\theta + \cos^4\theta$ の大小を比べよ。また, この 3 つの値が等しくなる θ をすべて求めよ。

(2) θ は(1)で求めた値とは異なる定数とする。

(i) 2 次方程式 $g(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ とするとき, 2 次方程式 $D(t) = 0$ の解 α, β $(\alpha < \beta)$ を求め, $\int_\alpha^\beta D(t)\,dt = -\frac{\cos^6 2\theta}{6}$ となることを示せ。

(ii) 2 つの 2 次方程式 $f(x) = 0$, $g(x) = 0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち, 他方が虚数解をもつための t の範囲を求めよ。　[2009]

解答例

(1) まず, $\frac{1}{2} - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 2\theta) \geqq 0$ であり,

$$\sin^4\theta + \cos^4\theta - \frac{1}{2} = (\sin^2\theta + \cos^2\theta)^2 - 2\sin^2\theta\cos^2\theta - \frac{1}{2}$$

$$= \frac{1}{2} - 2\sin^2\theta\cos^2\theta = \frac{1}{2}(1 - \sin^2 2\theta) \geqq 0$$

よって, $\sin^4\theta + \cos^4\theta \geqq \frac{1}{2} \geqq 2\sin^2\theta\cos^2\theta$

等号は $\sin^2 2\theta = 1$, すなわち $\sin 2\theta = \pm 1$ のときであり, $0 \leqq \theta < 2\pi$ から,

$$\theta = \frac{\pi}{4},\ \frac{3}{4}\pi,\ \frac{5}{4}\pi,\ \frac{7}{4}\pi$$

(2) (i) $g(x) = x^2 + \left(t - \frac{1}{2}\right)x - \frac{1}{2}\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) + \frac{1}{16}$ に対し, $g(x) = 0$ の判別式を $D(t)$ は,

$$D(t) = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + 2\sin^2\theta\cos^2\theta(\sin^4\theta + \cos^4\theta) - \frac{1}{4}$$

$$= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\left(1 - \frac{1}{2}\sin^2 2\theta\right) - \frac{1}{4}$$

$$= \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{1}{4}(1 - \sin^2 2\theta)^2 = \left(t - \frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\cos^2 2\theta\right)^2$$

$D(t) = 0$ の解が, $t = \alpha$, β $(\alpha < \beta)$ より,

$$\alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos^2 2\theta),\quad \beta = \frac{1}{2}(1 + \cos^2 2\theta)$$

すると, $\int_\alpha^\beta D(t)\,dt = \int_\alpha^\beta (t - \alpha)(t - \beta)\,dt = -\frac{(\beta - \alpha)^3}{6} = -\frac{\cos^6 2\theta}{6}$

(ii)　$f(x)=x^2+\frac{1}{2}x+\frac{1}{4}t^2$ に対し，$f(x)=0$ の判別式を $D_1(t)$ とおくと，

$$D_1(t)=\frac{1}{4}-t^2=-\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)$$

さて，2 次方程式 $f(x)=0$，$g(x)=0$ の一方が異なる 2 つの実数解をもち，他方が虚数解をもつ条件は，

$$D(t)\cdot D_1(t)=-(t-\alpha)(t-\beta)\left(t+\frac{1}{2}\right)\left(t-\frac{1}{2}\right)<0\cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，θ が $\frac{\pi}{4}$，$\frac{3}{4}\pi$，$\frac{5}{4}\pi$，$\frac{7}{4}\pi$ のいずれとも異なるとき，$0<\cos^2 2\theta\leqq 1$ から，

$$-\frac{1}{2}<\alpha<\frac{1}{2}<\beta$$

よって，(*)の解は，$t<-\frac{1}{2}$，$\alpha<t<\frac{1}{2}$，$\beta<t$ となるので，

$$t<-\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}(1-\cos^2 2\theta)<t<\frac{1}{2},\ \frac{1}{2}(1+\cos^2 2\theta)<t$$

コメント

ボリュームのある問題です。(*)のように 4 次不等式まで出てきます。

問　題

$0 \leqq \theta \leqq \pi$ の範囲で定義された関数 $f(\theta)=a\sin\theta\cos\theta+b(\sin\theta-\cos\theta)-1$ を考える。ただし, a, b は正の実数とする。次の問いに答えよ。

(1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ として, $f(\theta)$ を a, b, t を用いて表せ。また, t のとりうる値の範囲を求めよ。

(2) 等式 $f(\theta)=0$ を満たす θ が存在するような点 $(a,\ b)$ 全体からなる領域を座標平面上に図示せよ。　[2008]

解答例

(1) $t=\sin\theta-\cos\theta$ とおくと, $t^2=1-2\sin\theta\cos\theta$ より, $\sin\theta\cos\theta=\dfrac{1-t^2}{2}$ となり,

$$f(\theta)=\frac{a(1-t^2)}{2}+bt-1=-\frac{a}{2}t^2+bt+\frac{a}{2}-1$$

また, $t=\sqrt{2}\sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right)$ より, $0 \leqq \theta \leqq \pi$ において $-\dfrac{1}{\sqrt{2}} \leqq \sin\left(\theta-\dfrac{\pi}{4}\right) \leqq 1$ となり,

$$-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$$

(2) $g(t)=-\dfrac{a}{2}t^2+bt+\dfrac{a}{2}-1$ とおくとき, $f(\theta)=0$ を満たす θ が存在する条件は, $g(t)=0$ が $-1 \leqq t \leqq \sqrt{2}$ に少なくとも 1 つの実数解をもつ条件に等しい。

ここで, $a>0$, $b>0$ において, $g(t)=-\dfrac{a}{2}\left(t-\dfrac{b}{a}\right)^2+\dfrac{b^2}{2a}+\dfrac{a}{2}-1$ となり,

$$g(\sqrt{2})=-\frac{a}{2}+\sqrt{2}b-1,\ g(-1)=-b-1<0$$

(i) $0<\dfrac{b}{a} \leqq \sqrt{2}$ $(0<b \leqq \sqrt{2}a)$ のとき

$g(-1)<0$ より, 求める条件は, $\dfrac{b^2}{2a}+\dfrac{a}{2}-1 \geqq 0$ となり,

$$a^2+b^2-2a \geqq 0,\ (a-1)^2+b^2 \geqq 1$$

(ii) $\dfrac{b}{a}>\sqrt{2}$ $(b>\sqrt{2}a)$ のとき

$g(-1)<0$ より, 求める条件は, $g(\sqrt{2})=-\dfrac{a}{2}+\sqrt{2}b-1 \geqq 0$ となり,

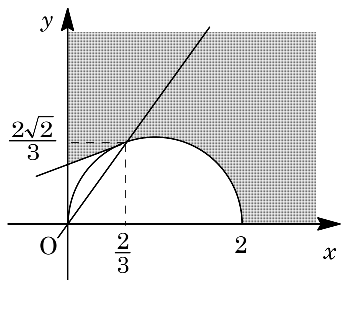
$$\sqrt{2}b \geqq \frac{a}{2}+1,\ b \geqq \frac{\sqrt{2}}{4}a+\frac{\sqrt{2}}{2}$$

(i)(ii)より, 点 $(a,\ b)$ の全体からなる領域は,

$0<y \leqq \sqrt{2}x$ のとき $(x-1)^2+y^2 \geqq 1$

$y>\sqrt{2}x$ のとき $y \geqq \dfrac{\sqrt{2}}{4}x+\dfrac{\sqrt{2}}{2}$

よって, 図示すると, 右図の網点部となる。ただし, x 軸, y 軸以外の境界は領域に含む。



コメント

(2)では, $g(-1)<0$ であることに着目するのがポイントです。

問　題

実数α，βについて, x, yは2つの等式

$$x+y=\alpha\beta+\alpha+\beta-1,\ \ 2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$$

を満たすものとする。次の問いに答えよ。

(1)　$\alpha+\beta$と$\alpha\beta$をx, yで表せ。

(2)　tの2次方程式$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0$が実数解をもつ条件を$x, y$で表せ。

(3)　α，βが条件$-1\leqq\alpha\leqq1$，$-1\leqq\beta\leqq1$を満たすとき，点$(x,\ y)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。　[2005]

解答例

(1)　条件から，$x+y=\alpha\beta+\alpha+\beta-1$，$2x+3y=3\alpha\beta+2\alpha+2\beta-3$なので,

$$\alpha\beta+(\alpha+\beta)=x+y+1\cdots\cdots\text{①},\ \ 3\alpha\beta+2(\alpha+\beta)=2x+3y+3\cdots\cdots\text{②}$$

①②より，$\alpha\beta=2x+3y+3-2(x+y+1)=y+1$

$$\alpha+\beta=x+y+1-(y+1)=x$$

(2)　2次方程式$t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=0\cdots\cdots$③が実数解をもつ条件は,

$$D=(\alpha+\beta)^2-4\alpha\beta\geqq0$$

(1)より，$x^2-4y-4\geqq0$，$y\leqq\dfrac{1}{4}x^2-1\cdots\cdots$④

(3)　③は$(t-\alpha)(t-\beta)=0$と変形でき，その解は$t=\alpha$，βである。

すると，条件$-1\leqq\alpha\leqq1$，$-1\leqq\beta\leqq1$は，③の2つの解がともに$-1\leqq t\leqq1$にあることに等しい。

ここで，$f(t)=t^2-(\alpha+\beta)t+\alpha\beta=t^2-xt+y+1$とおくと，④の条件のもとで,

$$-1\leqq\frac{x}{2}\leqq1,\ \ f(1)=2-x+y\geqq0,\ \ f(-1)=2+x+y\geqq0$$

よって，$-2\leqq x\leqq2$，$y\geqq x-2$，$y\geqq-x-2$

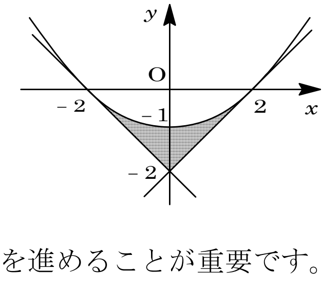
さて，④の境界線$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$と$y=x-2$の共有点は,

$$\frac{1}{4}x^2-1=x-2,\ \ \frac{1}{4}(x-2)^2=0$$

よって，放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$と直線$y=x-2$は，点$(2,\ 0)$で接する。

同様に，放物線$y=\dfrac{1}{4}x^2-1$と直線$y=-x-2$は，点$(-2,\ 0)$で接する。

以上より，求める点$(x,\ y)$の存在範囲は，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



コメント

2次方程式の解の配置の問題です。基本に従って，計算を進めることが重要です。

問　題

正の定数 $a\,(a\neq 1)$ に対して，関数 $f(x)$ を

$$f(x)=a^{2x}+a^{-2x}-2(a+a^{-1})(a^{x}+a^{-x})+2(a+a^{-1})^{2}$$

と定める。次の問いに答えよ。

(1)　$a^{x}+a^{-x}=t$ とおくとき，t の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。

(2)　$f(x)$ の最小値を求めよ。また，そのときの x の値を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　相加平均と相乗平均の関係より，$t=a^{x}+a^{-x}\geqq 2\sqrt{a^{x}\cdot a^{-x}}=2$

等号成立は $a^{x}=a^{-x}$，すなわち $x=0$ のときである。

したがって，$x=0$ のとき t は最小値 2 をとる。

(2)　$a^{2x}+a^{-2x}=(a^{x}+a^{-x})^{2}-2=t^{2}-2$ より，

$$\begin{aligned}f(x)&=(t^{2}-2)-2(a+a^{-1})t+2(a+a^{-1})^{2}\\&=t^{2}-2(a+a^{-1})t+2(a+a^{-1})^{2}-2\\&=\left\{\,t-(a+a^{-1})\,\right\}^{2}+a^{2}+a^{-2}\end{aligned}$$

(1)より $t\geqq 2$ で，$a+a^{-1}>2$ なので，$t=a+a^{-1}$ のとき $f(x)$ は最小値 $a^{2}+a^{-2}$ をとる。このときの x の値は，$a^{x}+a^{-x}=a+a^{-1}$ から，$a^{2x}-(a+a^{-1})a^{x}+1=0$

$$(a^{x}-a)(a^{x}-a^{-1})=0,\ \ x=\pm 1$$

コメント

置き換えると 2 次関数が現れ，それを利用して最小値を求めるというセンターレベルの問題です。

問　題

$a>0$ とし，放物線 $C: y=a(x-1)^2+1$ を考える。C 上の点 P における C の接線 l の方程式を $y=Ax+B$ とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) P の x 座標を s とするとき，A と B を a と s を用いて表せ。

(2) 接線 l は，原点 O(0, 0) を通り，傾きは正であるとする。このとき，l の方程式を求めよ。

(3) (2)で求めた接線 l と放物線 C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ を求めよ。

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ の最小値とそのときの a の値を求めよ。 [2017]

解答例

(1) $C: y=a(x-1)^2+1\ (a>0)$ に対して，$\mathrm{P}(s,\ a(s-1)^2+1)$ における接線 l の方程式は，$y'=2a(x-1)$ から，$y-\{a(s-1)^2+1\}=2a(s-1)(x-s)$ となり，

$$y=2a(s-1)x-as^2+a+1\cdots\cdots\cdots(*)$$

条件より，$(*)$ が $y=Ax+B$ に一致するので，

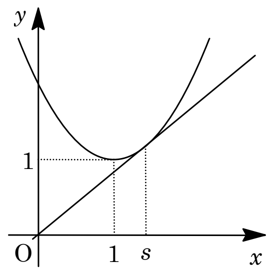
$$A=2a(s-1),\quad B=-as^2+a+1$$

(2) 条件より，$A=2a(s-1)>0$ から $s>1$ となり，また $B=-as^2+a+1=0$ より，

$$s^2=\frac{a+1}{a},\quad s=\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

すると，$A=2a\left(\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}-1\right)=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)$ から，

$$l: y=2\left(\sqrt{a(a+1)}-a\right)x$$



(3) l と C および y 軸で囲まれた図形の面積 $S(a)$ は，

$$S(a)=\int_0^s\{a(x-1)^2+1-2a(s-1)x\}dx$$

$$=\int_0^s(ax^2-2asx+a+1)dx$$

$$=\left[\frac{a}{3}x^3-asx^2+(a+1)x\right]_0^s=\frac{a}{3}s^3-as^3+(a+1)s$$

$$=\left(-\frac{2}{3}a\cdot\frac{a+1}{a}+a+1\right)\sqrt{\frac{a+1}{a}}=\frac{1}{3}(a+1)\sqrt{\frac{a+1}{a}}$$

(4) $\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{a+1}{\sqrt[4]{a}}\sqrt{\dfrac{a+1}{a}}=\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{\dfrac{(a+1)^6}{a^3}}$ となり，

$$\frac{(a+1)^6}{a^3}=\left(\frac{a+1}{\sqrt{a}}\right)^6=\left(\sqrt{a}+\frac{1}{\sqrt{a}}\right)^6\geqq\left(2\sqrt{\sqrt{a}\cdot\frac{1}{\sqrt{a}}}\right)^6=2^6$$

ここで，等号は $\sqrt{a}=\dfrac{1}{\sqrt{a}}$，すなわち $a=1$ のときに成立する。

したがって，$\dfrac{S(a)}{\sqrt[4]{a}}$ は $a=1$ のとき最小値 $\dfrac{1}{3}\sqrt[4]{2^6}=\dfrac{1}{3}\cdot 2^{\frac{3}{2}}=\dfrac{2}{3}\sqrt{2}$ をとる。

コメント

微積分の総合問題です。(3)で被積分関数が $a(x-s)^2$ となることに気付けば，計算が少し簡単になります。また，(4)では求めた式を 4 乗根の中に入れてしまうと，相加平均と相乗平均の出番になります。

問　題

平面上の 2 つの曲線 $C_1: x^2+(y-5)^2=16$，$C_2: y=\dfrac{1}{4}x^2$ を考える。次の問いに答えよ。

(1)　C_1 と C_2 の共有点の座標を求めよ。

(2)　C_1 と C_2 を同一平面上に図示せよ。

(3)　C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2016]

解答例

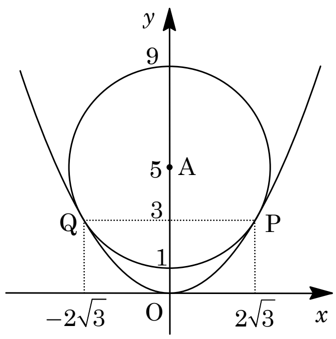
(1)　$C_1: x^2+(y-5)^2=16$ ……①，$C_2: y=\dfrac{1}{4}x^2$ ……②に対し，①②を連立すると，

$$4y+(y-5)^2=16,\ \ y^2-6y+9=0$$

すると，$(y-3)^2=0$ から $y=3$ となり，②より $x=\pm 2\sqrt{3}$

よって，C_1 と C_2 の共有点の座標は，$(2\sqrt{3},\ 3)$，$(-2\sqrt{3},\ 3)$ である。

(2)　C_1 の中心を $\mathrm{A}(0,\ 5)$，C_1 と C_2 の共有点を P，Q とおき C_1，C_2 を図示すると，右図のようになる。



(3)　(2)から，線分 AP の傾きが $-\dfrac{1}{\sqrt{3}}$ となるので，

$$\angle\mathrm{OAP}=\frac{\pi}{3}$$

ここで，C_1 と C_2 で囲まれた図形の面積を S とすると，y 軸に関する対称性より，

$$\frac{S}{2}=\frac{1}{2}(3+5)\cdot 2\sqrt{3}-\int_0^{2\sqrt{3}}\frac{1}{4}x^2dx-\frac{1}{2}\cdot 4^2\cdot\frac{\pi}{3}$$

$$=8\sqrt{3}-\frac{1}{12}\Big[x^3\Big]_0^{2\sqrt{3}}-\frac{8}{3}\pi=8\sqrt{3}-2\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi=6\sqrt{3}-\frac{8}{3}\pi$$

よって，$S=12\sqrt{3}-\dfrac{16}{3}\pi$ である。

コメント

円と放物線の関係を題材とした基本題です。また，(3)の面積は，台形を利用すると，簡単な計算で求まります。

問　題

$a,\ b$ は定数で，$ab>0$ とする。放物線 $C_1: y=ax^2+b$ 上の点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における接線を l とし，放物線 $C_2: y=ax^2$ と l で囲まれた図形の面積を S とする。次の問いに答えよ。

(1) l の方程式を求めよ。

(2) l と C_2 のすべての交点の x 座標を求めよ。

(3) 点 P が C_1 上を動くとき，S は点 P の位置によらず一定であることを示せ。

[2015]

解答例

(1) $C_1: y=ax^2+b\quad(ab>0)$ に対して，$y'=2ax$ となる。

そこで，点 $\mathrm{P}(t,\ at^2+b)$ における接線 l は,

$$y-(at^2+b)=2at(x-t),\quad y=2atx-at^2+b\cdots\cdots\cdots(*)$$

(2) $(*)$と $C_2: y=ax^2$ を連立すると，$ax^2=2atx-at^2+b$ となり，

$$ax^2-2atx+at^2-b=0$$

すると，l と C_2 の交点の x 座標は，$x=\dfrac{at\pm\sqrt{a^2t^2-a(at^2-b)}}{a}=\dfrac{at\pm\sqrt{ab}}{a}$

(3) (2)より，$\alpha=\dfrac{at-\sqrt{ab}}{a}$，$\beta=\dfrac{at+\sqrt{ab}}{a}$ とおくと，$x=\alpha$ と $x=\beta$ の間で，l と C_2 の上下関係は変わらないので，l と C_2 によって囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\left|\int_\alpha^\beta(2atx-at^2+b-ax^2)\,dx\right|=\left|\int_\alpha^\beta -a(x-\alpha)(x-\beta)\,dx\right|$$

$$=\left|\frac{a}{6}(\beta-\alpha)^3\right|=\left|\frac{a}{6}\Big(\frac{2\sqrt{ab}}{a}\Big)^3\right|=\left|\frac{a}{6}\cdot\frac{8ab\sqrt{ab}}{a^3}\right|=\frac{4b}{3a}\sqrt{ab}$$

よって，点 P が C_1 上を動くとき，S は点 P の位置によらず一定である。

コメント

定積分と面積に関する基本問題です。a の符号で場合分けをしても構いませんが，記述量は多くなります。

問　題

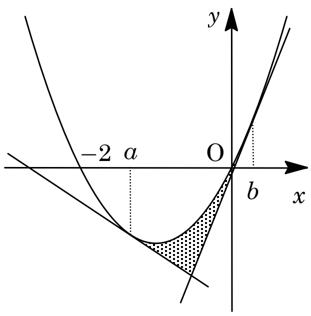
放物線$C: y=x^2+2x$上の 2 点$(a,\ a^2+2a)$，$(b,\ b^2+2b)$における接線をそれぞれl_a，l_bとするとき，次の問いに答えよ。ただし，$a<b$とする。

(1) 2 直線l_a，l_bの方程式を求めよ。また，l_aとl_bの交点のx座標を求めよ。

(2) 放物線Cと 2 直線l_a，l_bとで囲まれた図形の面積Sを求めよ。

(3) 2 直線l_a，l_bが垂直に交わるようにa，bが動くとき，a，bが満たす関係式を求めよ。また，そのときの面積Sの最小値とそれを与えるa, bの値を求めよ。 [2014]

解答例



(1) $C: y=x^2+2x$に対し，$y'=2x+2$

点$(a,\ a^2+2a)$における接線l_aの方程式は,

$$y-(a^2+2a)=(2a+2)(x-a)$$

$$y=(2a+2)x-a^2 \cdots\cdots\text{①}$$

同様に接線l_bの方程式は，$y=(2b+2)x-b^2 \cdots\cdots$②

①②を連立して，$(2a+2)x-a^2=(2b+2)x-b^2$

$$2(a-b)x=a^2-b^2,\ \ x=\frac{a+b}{2}$$

(2) $$S=\int_a^{\frac{a+b}{2}}\{x^2+2x-(2a+2)x+a^2\}dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}\{x^2+2x-(2b+2)x+b^2\}dx$$

$$=\int_a^{\frac{a+b}{2}}(x-a)^2dx+\int_{\frac{a+b}{2}}^{b}(x-b)^2dx=\Big[\frac{(x-a)^3}{3}\Big]_a^{\frac{a+b}{2}}+\Big[\frac{(x-b)^3}{3}\Big]_{\frac{a+b}{2}}^{b}$$

$$=\frac{1}{3}\Big(\frac{b-a}{2}\Big)^3-\frac{1}{3}\Big(\frac{a-b}{2}\Big)^3=\frac{1}{12}(b-a)^3$$

(3) l_aとl_bが垂直に交わることより，$(2a+2)(2b+2)=-1$となり，

$$(a+1)(b+1)=-\frac{1}{4}\cdots\cdots\text{③}$$

さて，$a<b$なので，③より$a+1<0<b+1$となり，相加・相乗平均の関係より，

$$b-a=(b+1)-(a+1)=b+1+\frac{1}{4(b+1)}\geqq 2\sqrt{\frac{1}{4}}=1$$

等号は，$b+1=\dfrac{1}{4(b+1)}$すなわち$b+1=\dfrac{1}{2}$のときに成立する。

以上より，Sの最小値は$\dfrac{1}{12}\cdot 1^3=\dfrac{1}{12}$となり，このとき$b=-\dfrac{1}{2}$，さらに③から$a+1=-\dfrac{1}{4}\cdot 2=-\dfrac{1}{2}$すなわち$a=-\dfrac{3}{2}$である。

コメント

(3)の設問まで含めて，センターレベルの超頻出問題です。

問　題

実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=|x^2-6x+5|-x^2+4x+5$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　$0\leqq x\leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=a$ で最大値 $f(a)$ を，$x=b$ で最小値 $f(b)$ をとる。$a,\ b$ および $f(a)$，$f(b)$ を求めよ。

(3)　(2)で求めた $a,\ b$ について，定積分 $\displaystyle\int_a^b f(x)\,dx$ を求めよ。　[2013]

解答例

(1)　$f(x)=|x^2-6x+5|-x^2+4x+5$ に対して，

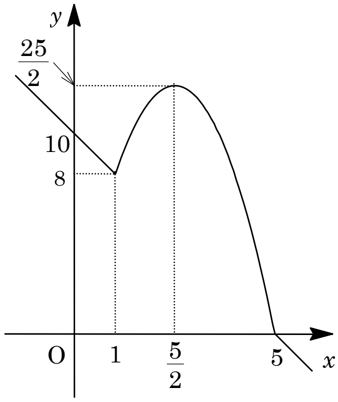
(i)　$x^2-6x+5\geqq 0$ ($x\leqq 1,\ 5\leqq x$) のとき

$$f(x)=x^2-6x+5-x^2+4x+5=-2x+10$$

(ii)　$x^2-6x+5<0$ ($1<x<5$) のとき

$$f(x)=-x^2+6x-5-x^2+4x+5$$
$$=-2x^2+10x=-2\left(x-\frac{5}{2}\right)^2+\frac{25}{2}$$

(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のとおり。



(2)　(1)より，$0\leqq x\leqq 6$ において，$f(x)$ は $x=\dfrac{5}{2}$ で最大値 $f\left(\dfrac{5}{2}\right)=\dfrac{25}{2}$ をとり，$x=6$ で最小値 $f(6)=-2$ をとる。

(3)　$a=\dfrac{5}{2}$，$b=6$ より，面積を対応させると，

$$\int_a^b f(x)\,dx=\int_{\frac{5}{2}}^5(-2x^2+10x)\,dx+\int_5^6(-2x+10)\,dx$$
$$=\frac{1}{2}\int_0^5-2x(x-5)\,dx+\frac{1}{2}\cdot 1\cdot(-2)=\frac{1}{6}\cdot 5^3-1=\frac{119}{6}$$

コメント

絶対値の処理と定積分の計算問題です。ともに基本です。

問　題

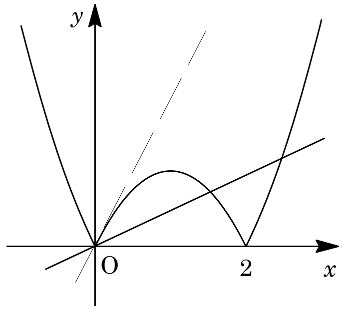
曲線$C: y=|x^2-2x|$と傾きが m の直線$l: y=mx$について，次の問いに答えよ。

(1)　曲線$y=-x^2+2x$と l が接する m の値を求めよ。

(2)　C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲を求めよ。また，そのときの 2 つの交点の座標を m を用いて表せ。

(3)　m は(2)で求めた範囲にあるとする。$x \geqq 2$，$y \leqq mx$，$y \geqq |x^2-2x|$で定まる部分の面積 S を m を用いて表せ。　[2012]

解答例



(1)　曲線$y=-x^2+2x$に対して，$y'=-2x+2$となり，$x=0$のとき$y'=2$である。

よって，曲線$y=-x^2+2x$と直線$l: y=mx$が接するのは，$m=2$のときである。

(2)　C と l が原点以外の相異なる 2 点で交わるような m の範囲は，右図より，$0<m<2$である。

また，$y=-x^2+2x$と$y=mx$を連立して，

$$-x^2+2x=mx,\ x^2-(2-m)x=0$$

$x \neq 0$の解は$x=2-m$から，交点の座標は，$(2-m,\ 2m-m^2)$となる。

さらに，$y=x^2-2x$と$y=mx$を連立して，

$$x^2-2x=mx,\ x^2-(2+m)x=0$$

$x \neq 0$の解は$x=2+m$から，交点の座標は，$(2+m,\ 2m+m^2)$となる。

(3)　$x \geqq 2$，$y \leqq mx$，$y \geqq |x^2-2x|$で定まる部分の面積 S は，

$$S=\int_2^{2+m}(mx-x^2+2x)dx=\int_2^{2+m}\{-x^2+(2+m)x\}dx$$

$$=\Big[-\frac{x^3}{3}+\frac{2+m}{2}x^2\Big]_2^{2+m}=-\frac{1}{3}\{(2+m)^3-8\}+\frac{2+m}{2}\{(2+m)^2-4\}$$

$$=-\frac{1}{3}(12m+6m^2+m^3)+\frac{2+m}{2}(4m+m^2)=\frac{1}{6}m^3+m^2$$

コメント

微分と積分の基本知識を確認する問題です。(2)は(1)を誘導としてみると，図から判断してもよいと解釈しました。

問　題

実数 x に対して，関数 $f(x)$ を，$f(x)=\int_0^2|t-x|dt$ とおく。次の問いに答えよ。

(1) 関数 $y=f(x)$ を求め，そのグラフをかけ。

(2) $y=f(x)$ の接線で傾きが 1 のものを l とする。l の方程式を求めよ。

(3) 直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2011]

解答例

(1) $f(x)=\int_0^2|t-x|dt$ に対して，

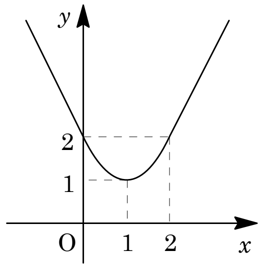
(i) $x<0$ のとき　$f(x)=\int_0^2(t-x)dt=\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_0^2=2-2x$

(ii) $0\leqq x<2$ のとき

$$f(x)=\int_0^x-(t-x)dt+\int_x^2(t-x)dt=\left[-\frac{t^2}{2}+xt\right]_0^x+\left[\frac{t^2}{2}-xt\right]_x^2$$

$$=-\frac{x^2}{2}+x^2+\frac{1}{2}(4-x^2)-x(2-x)=x^2-2x+2=(x-1)^2+1$$

(iii) $x\geqq 2$ のとき　$f(x)=\int_0^2-(t-x)dt=-2+2x$



(i)～(iii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

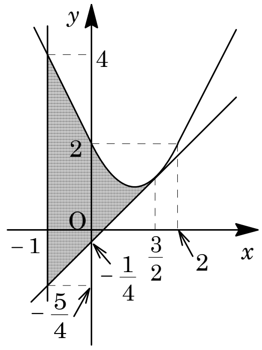
(2) $0\leqq x<2$ において，$f'(x)=1$ とおくと，

$2x-2=1$，$x=\frac{3}{2}$

これより，接点は $\left(\frac{3}{2},\ \frac{5}{4}\right)$ となり，接線 l の方程式は，

$y-\frac{5}{4}=x-\frac{3}{2}$，$y=x-\frac{1}{4}$

(3) 直線 $x=-1$，接線 l，曲線 $y=f(x)$ で囲まれた図形の面積 S は，



$$S=\frac{1}{2}\left(\frac{9}{4}+\frac{21}{4}\right)\cdot 1+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x^2-2x+2-x+\frac{1}{4}\right)dx$$

$$=\frac{15}{4}+\int_0^{\frac{3}{2}}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2dx=\frac{15}{4}+\frac{1}{3}\left[\left(x-\frac{3}{2}\right)^3\right]_0^{\frac{3}{2}}$$

$$=\frac{15}{4}+\frac{1}{3}\cdot\frac{27}{8}=\frac{39}{8}$$

コメント

絶対値のついた関数の定積分です。基本的ですが，出来不出来がはげしい問題です。なお，(3)の設問で，y 軸の左側の部分は台形の面積公式を利用しています。

問　題

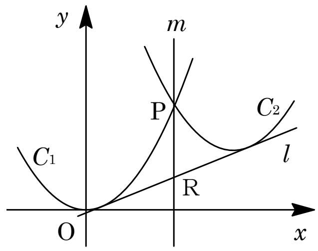
a を正の定数とする。2 つの放物線 $C_1 : y = x^2$ と $C_2 : y = (x-2)^2 + 4a$ の交点を P とする。次の問いに答えよ。

(1) 放物線 C_1 上の点 $Q(t,\ t^2)$ における接線の方程式を求めよ。さらに，その接線のうち C_2 に接するものを l とする。l の方程式を求めよ。

(2) 点 P を通り y 軸に平行な直線を m とする。l と m の交点を R とするとき，線分 PR の長さを求めよ。

(3) 直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2010]

解答例



(1) $C_1 : y = x^2$ ……①，$C_2 : y = (x-2)^2 + 4a$ ……②に対して，①上の点 $Q(t,\ t^2)$ における接線の方程式は，$y' = 2x$ より，

$$y - t^2 = 2t(x-t),\quad y = 2tx - t^2 \cdots\cdots③$$

さて，②と③を連立すると，$2tx - t^2 = (x-2)^2 + 4a$

$$x^2 - 2(t+2)x + t^2 + 4a + 4 = 0 \cdots\cdots④$$

④が重解をもつことより，

$$D/4 = (t+2)^2 - (t^2 + 4a + 4) = 0$$

これより，$t = a$ となり，③から，直線 $l : y = 2ax - a^2$ ………⑤

(2) ①②を連立して，$x^2 = (x-2)^2 + 4a$ より，$x = a+1$

これより，$P(a+1,\ (a+1)^2)$ となり，直線 $m : x = a+1$ ………⑥

⑤⑥の交点は，$y = 2a(a+1) - a^2 = a^2 + 2a$ から，$R(a+1,\ a^2+2a)$ となり，

$$PR = (a+1)^2 - (a^2 + 2a) = 1$$

(3) 直線 l, m と放物線 C_1 で囲まれた図形の面積を S とすると，

$$S = \int_a^{a+1} (x^2 - 2ax + a^2)\,dx = \int_a^{a+1} (x-a)^2\,dx = \frac{1}{3}\Big[(x-a)^3\Big]_a^{a+1} = \frac{1}{3}$$

コメント

センター試験にそのまま出題されても不思議のない内容の微積分の総合問題です。

問　題

実数 a に対して，関数 $f(x)$，$g(x)$ を，$f(x)=-(a+1)x-1$，$g(x)=2x+\dfrac{a}{3}$ とし，$m(a)=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx$ とする。次の問いに答えよ。

(1)　$m(a)>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。

(2)　(1)で求めた a の値の範囲において，関数 $h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ を考える。このとき，$\displaystyle\int_0^1 f(x)h(x)dx=0$ となる a の値を求めよ。　[2008]

解答例

(1)　$m(a)=\displaystyle\int_0^1 f(x)g(x)dx=\int_0^1 -\{(a+1)x+1\}\left(2x+\frac{a}{3}\right)dx$ より，

$$m(a)=-\int_0^1\left\{2(a+1)x^2+\frac{a^2+a+6}{3}x+\frac{a}{3}\right\}dx$$

$$=-\frac{2(a+1)}{3}-\frac{a^2+a+6}{6}-\frac{a}{3}=\frac{-a^2-7a-10}{6}$$

ここで，$m(a)>0$ より，$a^2+7a+10<0$，$(a+2)(a+5)<0$ となり，

$-5<a<-2$

(2)　$h(x)=g(x)-m(a)f(x)$ より，

$$\int_0^1 f(x)h(x)dx=\int_0^1[f(x)g(x)-m(a)\{f(x)\}^2]dx$$

$$=m(a)-m(a)\int_0^1\{f(x)\}^2dx$$

さて，$m(a)>0$ より，$\displaystyle\int_0^1 f(x)h(x)dx=0$ は，$\displaystyle\int_0^1\{f(x)\}^2dx=1$ と同値であり，

$$\int_0^1\{f(x)\}^2dx=\int_0^1\{(a+1)^2x^2+2(a+1)x+1\}dx=\frac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1$$

よって，$\dfrac{(a+1)^2}{3}+(a+1)+1=1$ から，$a+1=-3,\ 0$ となる。

すると，(1)より，$-5<a<-2$ なので，$a=-4$ である。

コメント

(2)は(1)と関連し，クリアーに解ける設問になっています。

問　題

関数 $f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$y=f(x)$ のグラフをかけ。

(2)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有するような a の値の範囲を求めよ。

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ で囲まれた部分の面積を求めよ。　[2007]

解答例

(1)　$f(x)=-x^2+6x+2|x-3|-6$ に対して，

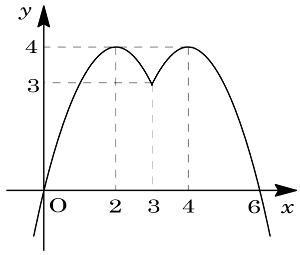
(i)　$x\geqq 3$ のとき　$f(x)=-x^2+6x+2(x-3)-6$

$$=-x^2+8x-12$$

$$=-(x-4)^2+4$$

(ii)　$x<3$ のとき　$f(x)=-x^2+6x-2(x-3)-6$

$$=-x^2+4x=-(x-2)^2+4$$



(i)(ii)より，$y=f(x)$ のグラフは右図のようになる。

(2)　曲線 $y=-x^2+8x-12$ と直線 $y=ax$ が接するとき，

$$-x^2+8x-12=ax\,,\ \ x^2-(a-8)x+12=0$$

この方程式が重解をもつことより，$D=(a-8)^2-48=0$，$a=8\pm4\sqrt{3}$

右図より，曲線 $y=f(x)$ に接するのは，$a=8-4\sqrt{3}$ のときである。

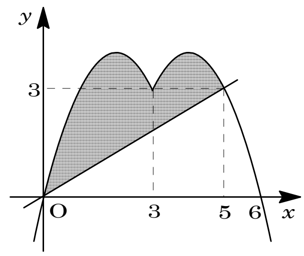
また，直線 $y=ax$ が点 $(3,\ 3)$ を通るとき $a=1$ なので，曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=ax$ が 4 点を共有する a の値の範囲は，右上図から，

$$1<a<8-4\sqrt{3}$$

(3)　曲線 $y=f(x)$ と直線 $y=\dfrac{3}{5}x$ の交点は，

$$-x^2+8x-12=\frac{3}{5}x\,,\ \ 5x^2-37x+60=0$$

$$(5x-12)(x-5)=0$$



$x\geqq 3$ から $x=5$ となり，交点の座標は $(5,\ 3)$ である。

また，曲線 $y=f(x)$ は，直線 $x=3$ に関して対称であることを利用すると，求める部分の面積 S は，

$$S=2\int_0^3(-x^2+4x)\,dx-\frac{1}{2}\cdot5\cdot3-\int_5^6(-x^2+8x-12)\,dx$$

$$=2\Big[-\frac{x^3}{3}+2x^2\Big]_0^3-\frac{15}{2}-\Big[-\frac{x^3}{3}+4x^2-12x\Big]_5^6$$

$$=18-\frac{15}{2}+\frac{91}{3}-44+12=\frac{53}{6}$$

コメント

絶対値つきの関数のグラフを題材にした標準的な問題です。

問　題

座標平面上の曲線$C : y=|x^2-1|$と傾き a の直線$l : y=a(x+1)$が異なる 3 点で交わっているとする。

(1) aのとりうる値の範囲を求めよ。

(2) Cとlで囲まれた2つの図形の面積の和Sをaを用いて表せ。

(3) Sが最小になるaの値を求めよ。 [2004]

解答例

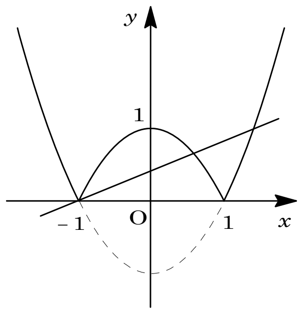
(1) 曲線$C : y=|x^2-1|$に対して,

$$y=x^2-1\ (|x|\geqq 1)\cdots\cdots\cdots①,\ \ y=-x^2+1\ (|x|\leqq 1)\cdots\cdots\cdots②$$

また, $l : y=a(x+1)\cdots\cdots③$は, 点$(-1,\ 0)$を通り, 傾き$a$の直線である。

ここで, ②に対して$y'=-2x$より, $x=-1$のとき$y'=2$である。

すると, Cとlが異なる3点で交わる条件は, 右図より, $0<a<2$である。



(2) ①と③の交点は, $x^2-1=a(x+1)$より,

$$(x+1)(x-1-a)=0,\ \ x=-1,\ 1+a$$

また, ②と③の交点は, $-x^2+1=a(x+1)$より,

$$(x+1)(x-1+a)=0,\ \ x=-1,\ 1-a$$

さて, C と l で囲まれた 2 つの図形のうち, $-1\leqq x\leqq 1-a$の部分の面積をS_1, $1-a\leqq x\leqq 1+a$の部分の面積をS_2とする。

$$S_1=\int_{-1}^{1-a}\{-x^2+1-a(x+1)\}dx=\int_{-1}^{1-a}-(x+1)(x-1+a)dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(1-a+1)^3=\frac{1}{6}(2-a)^3$$

$$S_2=S_1+\int_{-1}^{1+a}\{a(x+1)-(x^2-1)\}dx-2\int_{-1}^{1}(-x^2+1)dx$$

$$=S_1+\int_{-1}^{1+a}-(x+1)(x-1-a)dx-2\int_{-1}^{1}-(x+1)(x-1)dx$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3-\left(-\frac{1}{6}\right)(1+a+1)^3+2\left(-\frac{1}{6}\right)(1+1)^3$$

$$=\frac{1}{6}(2-a)^3+\frac{1}{6}(2+a)^3-\frac{8}{3}$$

よって, $S=S_1+S_2=\dfrac{1}{6}(2-a)^3\times 2+\dfrac{1}{6}(2+a)^3-\dfrac{8}{3}=-\dfrac{1}{6}a^3+3a^2-2a+\dfrac{4}{3}$

(3)　(2)より，$S' = -\dfrac{1}{2}a^2 + 6a - 2 = -\dfrac{1}{2}(a^2 - 12a + 4)$

$S' = 0$ の解は，$a = 6 \pm 4\sqrt{2}$ となる。

右の増減表より，S が最小になるのは，$a = 6 - 4\sqrt{2}$ のときである。

a	0	$\cdots$	$6-4\sqrt{2}$	$\cdots$	2
S'		$-$	0	$+$	
S		$\searrow$		$\nearrow$	

コメント

超有名頻出問題を超有名解法で解いています。

問　題

定積分$\displaystyle\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2dx$を$I(a,\ b)$とおく。

(1)　$I(a,\ b)$をa, bの多項式で表せ。

(2)　$b=a+1$のとき，$I(a,\ b)$が最小となるようなaおよびそのときの$I(a,\ b)$の値を求めよ。

(3)　$I(a,\ b)=1$かつ$b=ma+n$となる$(a,\ b)$がちょうど 1 組のとき，実数 m, n の満たす条件を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$\displaystyle I(a,\ b)=\int_{-1}^{1}\frac{1}{2}(ax+b)^2dx=\frac{1}{2}\int_{-1}^{1}(a^2x^2+2abx+b^2)dx=\int_{0}^{1}(a^2x^2+b^2)dx$

$$=\left[\frac{1}{3}a^2x^3+b^2x\right]_0^1=\frac{1}{3}a^2+b^2$$

(2)　$b=a+1$のとき, (1)より,

$$I(a,\ b)=\frac{1}{3}a^2+(a+1)^2=\frac{4}{3}a^2+2a+1=\frac{4}{3}\left(a+\frac{3}{4}\right)^2+\frac{1}{4}$$

よって，$a=-\dfrac{3}{4}$のとき，最小値$\dfrac{1}{4}$をとる。

(3)　$I(a,\ b)=1$より，$\dfrac{1}{3}a^2+b^2=1$ ………①

条件より，$b=ma+n$ ………②

②を①に代入して，$\dfrac{1}{3}a^2+(ma+n)^2=1$

$$\left(m^2+\frac{1}{3}\right)a^2+2mna+n^2-1=0 \text{ ………③}$$

$(a,\ b)$がちょうど 1 組存在する条件は，③が重解をもつことなので,

$$D/4=m^2n^2-\left(m^2+\frac{1}{3}\right)(n^2-1)=0,\ \ m^2-\frac{1}{3}n^2+\frac{1}{3}=0$$

よって，$3m^2-n^2=-1$

コメント

基本的な計算問題です。

問　題

x の 3 次関数 $f(x)=x^3-kx^2+4k$ について以下の問いに答えよ。

(1)　$x \geqq 0$ のときつねに $f(x) \geqq 0$ となるような定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$y=f(x)$ のグラフが k の値によらず通る 2 つの点 $\mathrm{A}(a,\ f(a))$，$\mathrm{B}(b,\ f(b))$ $(a<b)$ を求めよ。さらに $a<x<b$ のときつねに $y=f(x)$ のグラフが線分 AB よりも上にあるような定数 k の値の範囲を求めよ。　[2003]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-kx^2+4k$ に対して，$f'(x)=3x^2-2kx=x(3x-2k)$

(i)　$k \leqq 0$ のとき

$x \geqq 0$ のとき $f'(x) \geqq 0$ より，$f(x) \geqq f(0)=4k$ である。

これより，$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ である条件は $k \geqq 0$ となり，$k \leqq 0$ と合わせると $k=0$ となる。

(ii)　$k>0$ のとき

右表より，$x \geqq 0$ のとき $f(x) \geqq 0$ となる条件は $f\left(\dfrac{2}{3}k\right) \geqq 0$ なので，

x	0	$\cdots$	$\frac{2}{3}k$	$\cdots$
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$

$$\frac{8}{27}k^3-\frac{4}{9}k^3+4k \geqq 0,\ -\frac{4}{27}k(k^2-27) \geqq 0$$

$k>0$ より，$0<k \leqq 3\sqrt{3}$ となる。

(i)(ii)より，求める k の値の範囲は $0 \leqq k \leqq 3\sqrt{3}$ である。

(2)　$y=f(x)$ すなわち $y=x^3-kx^2+4k$ を k についてまとめて，

$$(x^2-4)k+y-x^3=0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

$(*)$が k の値によらず成立する $(x,\ y)$ の条件は，

$$x^2-4=0,\ y-x^3=0$$

$x=2$ のとき $y=8$，$x=-2$ のとき $y=-8$ より，$\mathrm{A}(-2,\ -8)$，$\mathrm{B}(2,\ 8)$ となり，直線 AB の方程式は，$y-8=4(x-2)$，$y=4x$ である。

すると，$y=f(x)$ のグラフが直線 $y=4x$ の上にある条件は，

$$x^3-kx^2+4k>4x,\ x^3-kx^2-4x+4k>0,\ (x-2)(x+2)(x-k)>0$$

$-2<x<2$ から $(x-2)(x+2)<0$ となるので，$x-k<0$

そこで，$g(x)=x-k$ とおくと，$-2<x<2$ で $g(x)<0$ となる条件から，

$$g(2)=2-k \leqq 0,\ k \geqq 2$$

コメント

微分法を中心とした基本問題です。(3)の結論を，あわてて $k>2$ としない注意力が必要です。

問　題

関数 $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2|x|-\frac{15}{16}$ に対して，次の問いに答えよ。

(1) $f(x)\leqq 0$ を満たす x の値の範囲を求めよ。

(2) 関数 $f(x)$ の最大値を求めよ。

(3) $a>0$ とするとき，$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>0$ を満たす a の値の範囲を求めよ。　[2002]

解答例

(1) $f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2|x|-\frac{15}{16}$ に対して，

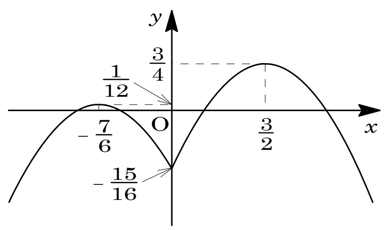
(i) $x\geqq 0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\frac{3}{4}$$

(ii) $x<0$ のとき

$$f(x)=-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x-2x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{16}=-\frac{3}{4}\left(x+\frac{7}{6}\right)^2+\frac{1}{12}$$

これより，$y=f(x)$ のグラフは右図の通り。



$x\geqq 0$ のとき, x 軸との交点は,

$$-\frac{3}{4}x^2+\frac{9}{4}x-\frac{15}{16}=0,\quad 4x^2-12x+5=0$$

$$x=\frac{1}{2},\quad x=\frac{5}{2}$$

$x<0$ のとき, x 軸との交点は,

$$-\frac{3}{4}x^2-\frac{7}{4}x-\frac{15}{16}=0,\quad 12x^2+28x+15=0,\quad x=-\frac{3}{2},\quad x=-\frac{5}{6}$$

よって，$f(x)\leqq 0$ の解は，図より $x\leqq -\frac{3}{2}$，$-\frac{5}{6}\leqq x\leqq\frac{1}{2}$，$\frac{5}{2}\leqq x$ となる。

(2) $f(x)$ の最大値は，図より $f\left(\frac{3}{2}\right)=\frac{3}{4}$ である。

(3) $$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx=\int_{-a}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+\frac{1}{4}x+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx=2\int_{0}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2|x|-\frac{15}{16}\right)dx$$

$$=2\int_{0}^{a}\left(-\frac{3}{4}x^2+2x-\frac{15}{16}\right)dx=2\left[-\frac{1}{4}x^3+x^2-\frac{15}{16}x\right]_0^a$$

$$=-\frac{1}{2}a^3+2a^2-\frac{15}{8}a$$

条件より，$\int_{-a}^{a}f(x)\,dx>0$ なので，$-\frac{1}{2}a^3+2a^2-\frac{15}{8}a>0$

$$4a^3-16a^2+15a<0,\quad a(2a-5)(2a-3)<0$$

$a>0$ より，求める a の値の範囲は $\frac{3}{2}<a<\frac{5}{2}$ である。

コメント

少し時間はかかりますが，グラフを書いた方が明快です。

問　題

2 つの 2 次関数 $y=-x^2+1$ と $y=qx^2+px+2$ が $0<x<1$ の範囲で共有点をもち，かつその点で共通の接線をもつとする。このとき次の問いに答えよ。

(1) 上の条件を満たすような点$(p,\ q)$を pq 平面上に図示せよ。

(2) 共有点の x 座標を $\alpha\,(0<\alpha<1)$ とし，

$$f(x)=\begin{cases} qx^2+px+2 & (0\leqq x<\alpha) \\ -x^2+1 & (\alpha\leqq x\leqq 1) \end{cases}$$

とおく。このとき積分 $\int_0^1 f(x)\,dx$ を p で表せ。　[2001]

解答例

(1) $y=-x^2+1$ ……①，$y=qx^2+px+2$ ……②として，$x=\alpha$ $(0<\alpha<1)$ で①と②が接するとすると，

$$-\alpha^2+1=q\alpha^2+p\alpha+2 \cdots\cdots③$$

①より $y'=-2x$，②より $y'=2qx+p$ なので，$-2\alpha=2q\alpha+p$ ………④

④より $(2q+2)\alpha+p=0$ となり，$q\neq-1$ のとき $\alpha=\dfrac{-p}{2q+2}$ ………⑤

⑤を③に代入して，$(q+1)\left(\dfrac{-p}{2q+2}\right)^2+p\cdot\dfrac{-p}{2q+2}+1=0$

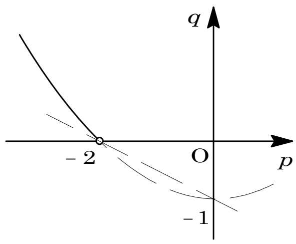
$$-\frac{p^2}{4(q+1)}+1=0,\quad p^2=4q+4,\quad q=\frac{1}{4}p^2-1\ (q\neq-1)\cdots\cdots⑥$$

ここで $0<\alpha<1$ なので，⑤より $0<\dfrac{-p}{2q+2}<1$

$q>-1$ より，$0<-p<2q+2$ となり，$p<0$ かつ $q>-\dfrac{1}{2}p-1$

なお，$q=-1$ のときは，④より $p=0$ となるが，③は $-\alpha^2+1=-\alpha^2+2$ となり，成立しない。

よって，条件を満たす点$(p,\ q)$を図示すると，右図の放物線の実線部分となる。



(2) ⑤⑥より，$\alpha=\dfrac{-p}{2(q+1)}=\dfrac{-p}{2\cdot\frac{1}{4}p^2}=-\dfrac{2}{p}$ なので，

$$\begin{aligned}\int_0^1 f(x)\,dx&=\int_0^\alpha (qx^2+px+2)\,dx+\int_\alpha^1(-x^2+1)\,dx\\&=\left[\frac{q}{3}x^3+\frac{p}{2}x^2+2x\right]_0^\alpha+\left[-\frac{1}{3}x^3+x\right]_\alpha^1\\&=\frac{q}{3}\alpha^3+\frac{p}{2}\alpha^2+2\alpha-\frac{1}{3}(1-\alpha^3)+(1-\alpha)\\&=\frac{1}{12}p^2\alpha^3+\frac{1}{2}p\alpha^2+\alpha+\frac{2}{3}\end{aligned}$$

そこで，α を消去すると，

$$\int_0^1 f(x)dx = \frac{1}{12}p^2\left(-\frac{2}{p}\right)^3 + \frac{1}{2}p\left(-\frac{2}{p}\right)^2 - \frac{2}{p} + \frac{2}{3}$$

$$= -\frac{2}{3p} + \frac{2}{3} = \frac{2p-2}{3p}$$

コメント

共通接線をもつ条件である③と④をていねいに式変形していけば，正解に到達できます。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　実数α，$\beta\ (\alpha<\beta)$に対して，$\displaystyle\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$が成り立つことを示せ。

(2)　aは実数で，$a\geqq 0$とする。座標平面上で，不等式$x^2\leqq y\leqq |x-a|$の表す領域の面積$S(a)$を求めよ。　[2000]

解答例

(1)　$(x-\alpha)(x-\beta)=(x-\alpha)(x-\alpha+\alpha-\beta)=(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)$より，

$$\int_\alpha^\beta (x-\alpha)(x-\beta)\,dx=\int_\alpha^\beta \left\{(x-\alpha)^2-(\beta-\alpha)(x-\alpha)\right\}dx$$

$$=\left[\frac{1}{3}(x-\alpha)^3-\frac{\beta-\alpha}{2}(x-\alpha)^2\right]_\alpha^\beta=\frac{1}{3}(\beta-\alpha)^3-\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3=-\frac{1}{6}(\beta-\alpha)^3$$

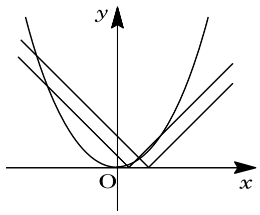
(2)　$y=x^2$と$y=-x+a\ (a\geqq 0)$の共有点は，$x^2+x-a=0$から，$x=\dfrac{-1\pm\sqrt{1+4a}}{2}$

そこで，この値を$x=\alpha$，$\beta\ (\alpha<\beta)$とおく。

また，$y=x^2$と$y=x-a\ (a\geqq 0)$の共有点は，$x^2-x+a=0$から，

(i)　$1-4a\geqq 0\ \left(0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}\right)$のとき，$x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-4a}}{2}$となり，この値$x=\gamma$，$\delta\ (\gamma<\delta)$とおく。

(ii)　$1-4a<0\ \left(a>\dfrac{1}{4}\right)$のとき，共有点はない。



さて，不等式$x^2\leqq y\leqq |x-a|$の表す領域の面積$S(a)$は，(1)の等式を利用して，

(i)　$0\leqq a\leqq\dfrac{1}{4}$のとき

$$S(a)=\int_\alpha^\beta(-x+a-x^2)\,dx+\int_\gamma^\delta(x-a-x^2)\,dx$$

$$=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3-\left(-\frac{1}{6}\right)(\delta-\gamma)^3=\frac{1}{6}\left\{\left(\sqrt{1+4a}\right)^3+\left(\sqrt{1-4a}\right)^3\right\}$$

(ii)　$a>\dfrac{1}{4}$のとき

$$S(a)=\int_\alpha^\beta(-x+a-x^2)\,dx=-\left(-\frac{1}{6}\right)(\beta-\alpha)^3=\frac{1}{6}\left(\sqrt{1+4a}\right)^3$$

コメント

(1)は有名公式の証明です。もし，この設問がなかったとしても，(2)ではこの公式を用います。

問　題

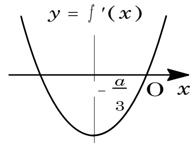
関数 $f(x)=x^3+ax^2+bx+1$ について，次の問いにそれぞれ答えよ。

(1)　関数 $f(x)$ が $x=0$ で極小になるとき，定数 $a,\ b$ の満たす条件を求めよ。

(2)　実数 $s,\ t$ が $s\neq 0$，$t<s^3+1$ を満たすならば，関数 $f(x)$ が $x=s$ で極小値 t をとるように定数 $a,\ b$ を，s と t を用いて定めることができることを示せ。　[1999]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+ax^2+bx+1$，$f'(x)=3x^2+2ax+b$



$x=0$ で極小になる条件は，$x=0$ の前後で $f'(x)$ の符号が負から正へと変化することなので，$f'(0)=0$ かつ $-\dfrac{a}{3}<0$ である。

よって，$a>0$ かつ $b=0$

(2)　$x=s$ で極小となる条件は，(1)と同様にすると，$f'(s)=0$ かつ $-\dfrac{a}{3}<s$

$$3s^2+2as+b=0\cdots\cdots①,\quad s+\frac{a}{3}>0\cdots\cdots②$$

また，極小値が t なので $f(s)=t$ より，

$$s^3+as^2+bs+1=t\cdots\cdots\cdots③$$

以下，実数 $s,\ t$ が $s\neq 0$，$t<s^3+1$ を満たすとき，①②③を満たす定数 $a,\ b$ が存在することを示す。

①より，$b=-3s^2-2as\cdots\cdots\cdots①'$

③に代入して，$s^3+as^2-(3s^2+2as)s+1=t$

$$as^2=-2s^3-t+1$$

$s\neq 0$ より，$a=\dfrac{-2s^3-t+1}{s^2}\cdots\cdots\cdots④$

①′より，$b=-3s^2-2s\cdot\dfrac{-2s^3-t+1}{s^2}=\dfrac{s^3+2t-2}{s}\cdots\cdots\cdots⑤$

ここで，④を用いると，

$$s+\frac{a}{3}=s+\frac{-2s^3-t+1}{3s^2}=\frac{s^3-t+1}{3s^2}>0\quad(t<s^3+1\text{より})$$

すなわち，④で定めた a によって②は満たされている。

したがって，$s\neq 0$，$t<s^3+1$ のとき，関数 $f(x)$ が $x=s$ で極小値 t をとるように，定数 a を④，b を⑤として定めることができる。

コメント

(2)は存在証明という解の書きにくい問題です。そこで，①～③を導いた後，交通整理をしてみました。

問　題

3 次関数 $f(x)=x^3+k(x^2+x+1)$ について，次の問いに答えよ。

(1)　$f(x)$ が極値をもつための定数 k の値の範囲を求めよ。

(2)　$f(x)$ が極値をとる x の値を α，β $(\alpha<\beta)$ とする。このとき，4 点 $\mathrm{A}(\alpha, f(\alpha))$，$\mathrm{B}(\alpha, f(\beta))$，$\mathrm{C}(\beta, f(\beta))$，$\mathrm{D}(\beta, f(\alpha))$ を頂点とする長方形 ABCD が正方形となる k の値を求めよ。

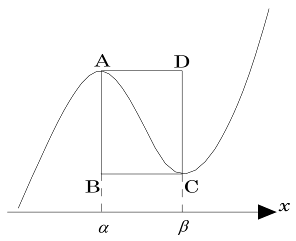
(3)　(2)で得られた正方形の 1 辺の長さを求めよ。　[1998]

解答例

(1)　$f(x)=x^3+kx^2+kx+k$，$f'(x)=3x^2+2kx+k$

$f(x)$ が極値をもつ条件は，$f'(x)=0$ が異なる 2 実数解をもつことである。

$D/4=k^2-3k>0$ より，$k<0$，$3<k$



(2)　$\alpha<\beta$ より，$f(\alpha)$ が極大値，$f(\beta)$ が極小値。

長方形 ABCD が正方形である条件は，BC = BA

$$\beta-\alpha=f(\alpha)-f(\beta)\cdots\cdots\cdots①$$

ここで，$f(\alpha)-f(\beta)=\int_\beta^\alpha f'(x)\,dx=\int_\beta^\alpha 3(x-\alpha)(x-\beta)\,dx$

$$=3\cdot\left(-\frac{1}{6}\right)(\alpha-\beta)^3=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$$

①から，$\beta-\alpha=\frac{1}{2}(\beta-\alpha)^3$

$\alpha\neq\beta$ より，$(\beta-\alpha)^2=2\cdots\cdots\cdots②$

$$(\beta+\alpha)^2-4\alpha\beta=2$$

α，β は $f'(x)=0$ の解より，$\left(-\frac{2k}{3}\right)^2-4\cdot\frac{k}{3}=2$

$2k^2-6k-9=0$，$k=\frac{3\pm3\sqrt{3}}{2}$　（これはともに $k<0$，$3<k$ をみたす）

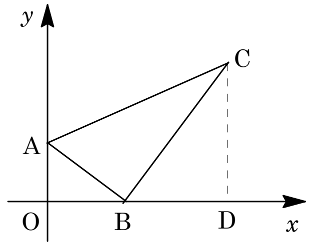
(3)　②より，$\beta-\alpha=\sqrt{2}$ なので，正方形の一辺の長さは $\sqrt{2}$ となる。

コメント

(2)は，特別な解法を使っています。利用できる状況は限定されますが，いったん知ってしまうと，つい使いたくなる便利な方法です。

問　題

O を原点とする座標平面に点 $A(0,\ \sin\theta)$，$B(\cos\theta,\ 0)$ がある。ただし，$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ とする。また，点 C を $AC=2$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ を満たす第 1 象限の点とする。さらに，点 C から x 軸に垂線 CD を下ろす。次の問いに答えよ。



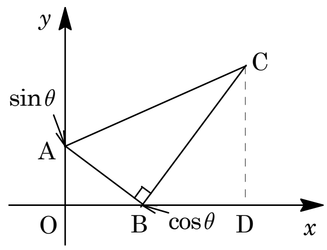
(1)　AB, BC を求めよ。また，$\angle OBA$ と $\angle CBD$ および点 C の座標を θ を用いて表せ。

(2)　台形 AODC の面積を S とするとき，$S\leqq 1+\frac{\sqrt{3}}{2}$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。

(3)　$AO+CD\leqq 2$ を示せ。また，等号が成り立つとき，θ の値を求めよ。　　[2012]

解答例

(1)　$A(0,\ \sin\theta)$，$B(\cos\theta,\ 0)$，$\angle ABC=\frac{\pi}{2}$ より，



$$AB=\sqrt{\cos^2\theta+\sin^2\theta}=1$$

$$BC=\sqrt{AC^2-AB^2}=\sqrt{2^2-1^2}=\sqrt{3}$$

また，$\tan\angle OBA=\frac{OA}{OB}=\frac{\sin\theta}{\cos\theta}=\tan\theta$ より，

$$\angle OBA=\theta,\ \angle CBD=\frac{\pi}{2}-\theta$$

また，$C(x,\ y)$ とおくと，$x=\cos\theta+\sqrt{3}\cos\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\cos\theta+\sqrt{3}\sin\theta$

$$y=\sqrt{3}\sin\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\sqrt{3}\cos\theta$$

よって，$C(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta,\ \sqrt{3}\cos\theta)$ となる。

(2)　台形 AODC の面積 S は，

$$S=\frac{1}{2}(\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta)(\sqrt{3}\sin\theta+\cos\theta)=\frac{1}{2}(\sqrt{3}+4\sin\theta\cos\theta)$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}+\sin 2\theta\leqq\frac{\sqrt{3}}{2}+1$$

なお，等号が成り立つのは $2\theta=\frac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\frac{\pi}{4}$ のときである。

(3)　$AO+CD=\sin\theta+\sqrt{3}\cos\theta=2\sin\left(\theta+\frac{\pi}{3}\right)\leqq 2$

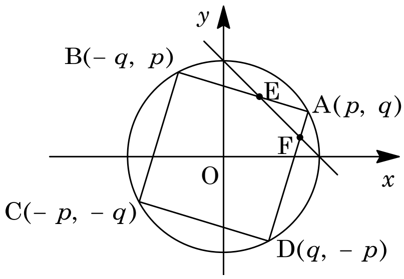
なお，等号が成り立つのは $\theta+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2}$，すなわち $\theta=\frac{\pi}{6}$ のときである。

コメント

三角比や三角関数と図形についての基本知識を確認する問題です。

問　題

座標平面上に $\mathrm{A}(p,\ q)$，$\mathrm{B}(-q,\ p)$，$\mathrm{C}(-p,\ -q)$，$\mathrm{D}(q,\ -p)$ を頂点とする正方形がある。ただし，$p>0$，$q>0$，$p^2+q^2=1$ とする。また, 直線 AB, AD が直線 $x+y=1$ と交わる点をそれぞれ $\mathrm{E}(r,\ s)$，$\mathrm{F}(t,\ u)$ とする。次の問いに答えよ。



(1)　直線 AB, AD の方程式を p, q を用いて表せ。

(2)　r, s, t, u を p, q を用いて表せ。

(3)　$k=p+q$ とおくとき, pq を k の式で表せ。また，$k\leqq\sqrt{2}$ を示せ。

(4)　$st-ru$ を k の式で表せ。また，$st-ru$ の最小値を求めよ。　[2011]

解答例

(1)　$\mathrm{A}(p,\ q)$，$\mathrm{B}(-q,\ p)$，$\mathrm{C}(-p,\ -q)$，$\mathrm{D}(q,\ -p)$ を頂点とする正方形に対し，$\overrightarrow{\mathrm{AD}}=(q-p,\ -p-q)$ から，直線 AB の方程式は，$p^2+q^2=1$ を用いて,

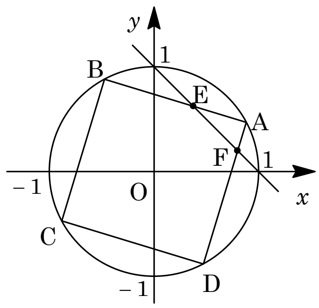
$$(q-p)(x-p)+(-p-q)(y-q)=0$$

$$-(p-q)x-(p+q)y+1=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(-q-p,\ p-q)$ から，直線 AD の方程式は,

$$(-q-p)(x-p)+(p-q)(y-q)=0$$

$$-(p+q)x+(p-q)y+1=0\ \cdots\cdots\cdots②$$



(2)　直線 $x+y=1$ ……③に対して，①③より，$2qx=p+q-1$ となり,

$$x=\frac{p+q-1}{2q},\quad y=1-\frac{p+q-1}{2q}=\frac{-p+q+1}{2q}$$

点 $\mathrm{E}(r,\ s)$ の座標は，$r=\dfrac{p+q-1}{2q}$，$s=\dfrac{-p+q+1}{2q}$

また，②③より，$2py=p+q-1$ となり,

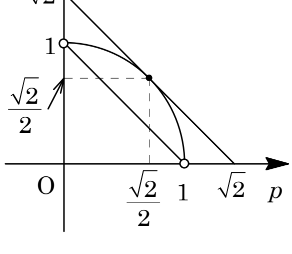
$$y=\frac{p+q-1}{2p},\quad x=1-\frac{p+q-1}{2p}=\frac{p-q+1}{2p}$$

点 $\mathrm{F}(t,\ u)$ の座標は，$t=\dfrac{p-q+1}{2p}$，$u=\dfrac{p+q-1}{2p}$

(3)　まず，$2pq=(p+q)^2-(p^2+q^2)=k^2-1$ より,

$$pq=\frac{1}{2}(k^2-1)$$

また，$p>0$，$q>0$，$p^2+q^2=1$ を図示すると，右図のようになる。



これより，$k=p+q$ のとりうる値の範囲は,

$$1<k\leqq\sqrt{2}$$

(4)　(2)から，$st-ru=\dfrac{(-p+q+1)(p-q+1)}{4pq}-\dfrac{(p+q-1)(p+q-1)}{4pq}$

$$=\frac{1-(p-q)^2-(p+q-1)^2}{4pq}=\frac{-2(p^2+q^2)+2(p+q)}{4pq}$$

$$=\frac{-2+2k}{2(k^2-1)}=\frac{2(k-1)}{2(k-1)(k+1)}=\frac{1}{k+1}$$

(3)より，$1<k\leqq\sqrt{2}$ なので，$\dfrac{1}{2}>\dfrac{1}{k+1}\geqq\dfrac{1}{\sqrt{2}+1}=\sqrt{2}-1$

よって，$st-ru$ は，$p=q=\dfrac{\sqrt{2}}{2}$ のとき最小値 $\sqrt{2}-1$ をとる。

コメント

特に工夫もせずに解きましたが，文系としては計算が多めです。

問　題

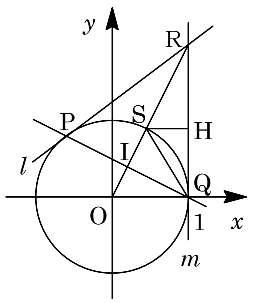
O を原点とする座標平面上の円 $C: x^2+y^2=1$ と直線 $x+2y=1$ の交点のうち，x 座標の小さい方を P，他方を Q とする。点 P, Q における円 C の接線をそれぞれ l, m とする。次の問いに答えよ。

(1) P, Q の座標を求めよ。また，l と m の交点 R の座標を求めよ。

(2) 線分 OR と C の交点を S とする。S の座標を求めよ。また，△QRS の面積を求めよ。

(3) $\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$ であることを示せ。　[2010]

解答例



(1) $C: x^2+y^2=1$ ……①，直線 $x+2y=1$ ……②を連立して，

$$(1-2y)^2+y^2=1,\ 5y^2-4y=0$$

よって，$y=0,\ \dfrac{4}{5}$ となり，$\mathrm{P}\left(-\dfrac{3}{5},\ \dfrac{4}{5}\right)$，$\mathrm{Q}(1,\ 0)$

点 P における円 C の接線 l は，$-\dfrac{3}{5}x+\dfrac{4}{5}y=1$

$$-3x+4y=5\ \cdots\cdots\cdots③$$

点 Q における円 C の接線 m は，$x=1$ ………④

③④の交点 R の座標は，$\mathrm{R}(1,\ 2)$ となる。

(2) $\mathrm{OS}=1$ から，$\overrightarrow{\mathrm{OS}}=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OR}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OR}}|}=\dfrac{1}{\sqrt{1^2+2^2}}(1,\ 2)=\dfrac{1}{\sqrt{5}}(1,\ 2)$ となり，$\mathrm{S}\left(\dfrac{1}{\sqrt{5}},\ \dfrac{2}{\sqrt{5}}\right)$

また，S から $m: x=1$ に下ろした垂線 SH の長さは，$\mathrm{SH}=1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ から，

$$\triangle\mathrm{QRS}=\frac{1}{2}\cdot 2\left(1-\frac{1}{\sqrt{5}}\right)=1-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(3) S から $\mathrm{PQ}: x+2y-1=0$ に下ろした垂線 SI の長さは，

$$\mathrm{SI}=\frac{\left|\dfrac{1}{\sqrt{5}}+2\cdot\dfrac{2}{\sqrt{5}}-1\right|}{\sqrt{1^2+2^2}}=\frac{5-\sqrt{5}}{5}=1-\frac{1}{\sqrt{5}}$$

よって，$\mathrm{SI}=\mathrm{SH}$ から，$\angle\mathrm{PQS}=\angle\mathrm{RQS}$ である。

コメント

(3)は(2)との繋がりで考えると，上のような解法になるでしょう。

問　題

xy 平面において，点 $\mathrm{A}(a,\ 0)$ を中心とする半径 r の円を C とする。ただし，$0<r\leqq a$ とする。円 C の周上に，y 座標が正である点 P と，点 $\mathrm{E}(a+r,\ 0)$ をとる。さらに，点 P における円 C の接線と y 軸との交点を Q, 2 点 E, P を通る直線と y 軸との交点を R，$\angle\mathrm{AEP}$ を θ とする。このとき，3 点 P，Q，R を頂点とする△PQR について，次の問いに答えよ。

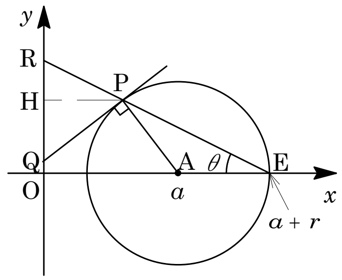
(1)　△PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形であることを示せ。次に，これが正三角形となる場合の，θ の値を求めよ。

(2)　△PQR が正三角形となり，さらに頂点の 1 つが原点と一致する場合の，a と r の関係式を求めよ。

(3)　△PQR が正三角形となり，さらにその外接円の半径が円 C の半径 r と等しくなる場合の，a と r の関係式を求めよ。　[2009]

解答例

(1)　まず，$\angle\mathrm{AEP}=\theta$ より $\angle\mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{2}-\theta$



また，$\angle\mathrm{APE}=\theta$，$\angle\mathrm{APQ}=\dfrac{\pi}{2}$ より，

$$\angle\mathrm{QPR}=\pi-\theta-\frac{\pi}{2}=\frac{\pi}{2}-\theta$$

よって，$\angle\mathrm{QRP}=\angle\mathrm{QPR}$ から，△PQR は辺 PR を底辺とする二等辺三角形である。

さらに，二等辺三角形 PQR が正三角形になるのは，$\angle\mathrm{QRP}=\dfrac{\pi}{3}$ の場合より，

$$\frac{\pi}{2}-\theta=\frac{\pi}{3},\quad \theta=\frac{\pi}{6}$$

(2)　まず，△PQR の頂点の 1 つが原点であるのは，点 Q が原点の場合である。

さて，(1)から $\theta=\dfrac{\pi}{6}$ のとき，$\angle\mathrm{EAP}=\dfrac{2}{3}\pi$ となり，$\mathrm{P}(x,\ y)$ とおくと，

$$x=a+r\cos\frac{2}{3}\pi=a-\frac{1}{2}r,\quad y=r\sin\frac{2}{3}\pi=\frac{\sqrt{3}}{2}r$$

すると，点 P における円 $C:(x-a)^2+y^2=r^2$ の接線の方程式は，

$$\left(a-\frac{1}{2}r-a\right)(x-a)+\frac{\sqrt{3}}{2}ry=r^2,\quad -x+\sqrt{3}y=-a+2r$$

この接線の y 軸との交点 Q が原点に一致することより $-a+2r=0$，すなわち求める関係式は $a=2r$ である。

(3)　条件より，正三角形 PQR の外接円の半径は r なので，正弦定理を用いると，

$$\frac{\mathrm{PR}}{\sin\frac{\pi}{3}} = 2r,\ \ \mathrm{PR} = 2r\cdot\frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}r \cdots\cdots\cdots①$$

さて, (1)から $\theta = \frac{\pi}{6}$ のとき, P から y 軸に下ろした垂線の足を H とおくと,

$$\mathrm{PH} = \mathrm{PR}\cos\frac{\pi}{6},\ \ a - \frac{1}{2}r = \frac{\sqrt{3}}{2}\mathrm{PR} \cdots\cdots\cdots②$$

①②より，$a - \frac{1}{2}r = \frac{3}{2}r$，すなわち求める関係式は $a = 2r$ である。

コメント

円と接線，および三角形の位置関係についての標準的な問題です。いろいろな解法が考えられますが，角に着目したのが上の解です。

問　題

点 O を原点とする xy 平面上に 3 点 $\mathrm{P}(1,\ 0)$，$\mathrm{Q}(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\mathrm{R}(\sin\theta,\ -\cos\theta)$ をとる。角 θ は $15° \leqq \theta \leqq 45°$ の範囲にあるとし，△OPQ と△OPR の面積をそれぞれ S と T とする。このとき，次の問いに答えよ。

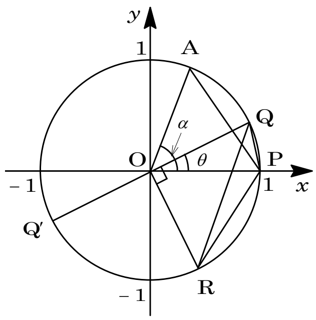
(1) $\theta < \alpha < \theta + 90°$ を満たす角 α に対して点 $\mathrm{A}(\cos\alpha,\ \sin\alpha)$ をとる。△OPA の面積と線分 QR の長さの積が $S+T$ に等しくなるとき，α を θ を用いて表せ。

(2) θ が $15° \leqq \theta \leqq 45°$ を満たしながら変化するとき，$T-S$ のとりうる値の範囲を求め，$T-S$ が最大値をとるときの θ の値を求めよ。

(3) θ を(2)で求めた値とする。このときの S と T の値を求めよ。また，点 $\mathrm{Q}'(-\cos\theta,\ -\sin\theta)$ に対して，△PQQ′ の面積を求めよ。　[2007]

解答例

(1) $\cos(\theta - 90°) = \sin\theta$，$\sin(\theta - 90°) = \cos\theta$ から，



$$S = \triangle\mathrm{OPQ} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\theta = \frac{1}{2}\sin\theta$$

$$T = \triangle\mathrm{OPR} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\left|-\cos\theta\right| = \frac{1}{2}\cos\theta$$

また，$\triangle\mathrm{OPA} = \frac{1}{2}\cdot 1\cdot\sin\alpha = \frac{1}{2}\sin\alpha$，$\mathrm{QR} = \sqrt{2}$ なので，条件より，$\frac{1}{2}\sin\theta + \frac{1}{2}\cos\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin\alpha$

$$\sqrt{2}\sin(\theta + 45°) = \sqrt{2}\sin\alpha$$

$$\sin\alpha - \sin(\theta + 45°) = 0$$

$$2\cos\frac{\alpha + \theta + 45°}{2}\sin\frac{\alpha - \theta - 45°}{2} = 0 \cdots\cdots\cdots(*)$$

ここで，$\theta < \alpha < \theta + 90°$ より，

$$\theta + \frac{45°}{2} < \frac{\alpha + \theta + 45°}{2} < \theta + \frac{135°}{2},\quad -\frac{45°}{2} < \frac{\alpha - \theta - 45°}{2} < \frac{45°}{2}$$

さらに，$15° \leqq \theta \leqq 45°$ から $\theta + \frac{45°}{2} < 90°$ は満たされているので, (*)の解は,

(i) $90° < \theta + \frac{135°}{2}$ $\left(\frac{45°}{2} < \theta \leqq 45°\right)$ のとき

$\frac{\alpha + \theta + 45°}{2} = 90°$，$\frac{\alpha - \theta - 45°}{2} = 0°$ より，$\alpha = -\theta + 135°$，$\alpha = \theta + 45°$

(ii) $\theta + \frac{135°}{2} \leqq 90°$ $\left(15° \leqq \theta \leqq \frac{45°}{2}\right)$ のとき

$\frac{\alpha - \theta - 45°}{2} = 0°$ より，$\alpha = \theta + 45°$

(2) $T - S = \frac{1}{2}\cos\theta - \frac{1}{2}\sin\theta = \frac{\sqrt{2}}{2}\sin(\theta + 135°)$

$150° \leqq \theta + 135° \leqq 180°$ より，$0 \leqq T - S \leqq \frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2} = \frac{\sqrt{2}}{4}$

なお，最大値をとるのは，$\theta+135°=150°$ $(\theta=15°)$ のときである。

(3)　$\theta=15°$ のとき，

$$S=\frac{1}{2}\sin 15°=\frac{1}{2}\sin(45°-30°)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{8}$$

$$T=\frac{1}{2}\cos 15°=\frac{1}{2}\cos(45°-30°)=\frac{1}{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)=\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{8}$$

このとき，$\triangle\mathrm{OPQ}=\triangle\mathrm{OPQ'}$ より，$\triangle\mathrm{PQQ'}=2S=\dfrac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$

コメント

増築を重ねた家屋という構図の問題です。なお，(3)は(1)と(2)を用いずに，直接的に計算をしています。

問　題

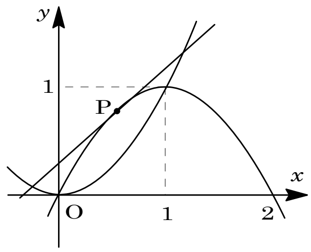
放物線 $y=-x^2+2x$ を H_1，また放物線 $y=x^2$ を H_2 で表す。H_1 上の点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における H_1 の接線を l とする。このとき，次の問いに答えよ。

(1) 接線 l の方程式を求めよ。また, a の値に関係なく, l は H_2 と異なる 2 点で交わることを示せ。

(2) 接線 l と放物線 H_2 の異なる 2 つの交点を結ぶ線分の中点を Q とする。点 P が H_1 上を動くとき，点 Q の軌跡 C の方程式を求めよ。

(3) (2)の軌跡 C と放物線 H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積を求めよ。　[2006]

解答例



(1) $H_1: y=-x^2+2x$ より，$y'=-2x+2$

点 $\mathrm{P}(a,\ -a^2+2a)$ における接線 l の方程式は,

$$y-(-a^2+2a)=(-2a+2)(x-a)$$

$$y=(-2a+2)x+a^2$$

ここで, l と $H_2: y=x^2$ との共有点は,

$$x^2=(-2a+2)x+a^2$$

$$x^2+2(a-1)x-a^2=0\cdots\cdots\cdots①$$

①の判別式 D は，$D/4=(a-1)^2+a^2>0$

よって, a の値と関係なく, l は H_2 と異なる 2 点で交わる。

(2) ①の 2 つの解を $x=\alpha,\ \beta$ とおくと, 2 交点は $(\alpha,\ \alpha^2)$，$(\beta,\ \beta^2)$ と表せ,

$$\alpha+\beta=-2(a-1),\ \alpha\beta=-a^2$$

このとき, 2 交点の中点を $\mathrm{Q}(x,\ y)$ とおくと，$x=\dfrac{\alpha+\beta}{2}$，$y=\dfrac{\alpha^2+\beta^2}{2}$

すると，$x=-(a-1)\cdots\cdots②$

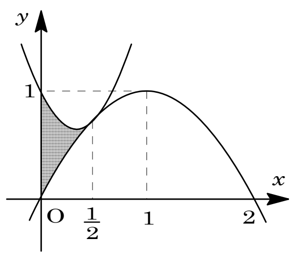
$$y=\frac{(\alpha+\beta)^2-2\alpha\beta}{2}=\frac{4(a-1)^2+2a^2}{2}=3a^2-4a+2\cdots\cdots\cdots③$$

②より $a=-x+1$ となり，③に代入すると，点 Q の軌跡 C の方程式は,

$$y=3(-x+1)^2-4(-x+1)+2,\ y=3x^2-2x+1$$

(3) C と H_1 の共有点は，$3x^2-2x+1=-x^2+2x$

$$4x^2-4x+1=0,\ (2x-1)^2=0,\ x=\frac{1}{2}$$



C と H_1 および y 軸で囲まれた図形の面積 S は,

$$S=\int_0^{\frac{1}{2}}\{(3x^2-2x+1)-(-x^2+2x)\}dx$$

$$=\int_0^{\frac{1}{2}}(2x-1)^2dx=\frac{1}{6}\Big[(2x-1)^3\Big]_0^{\frac{1}{2}}=\frac{1}{6}$$

コメント

H_1, H_2, C という 3 種類の放物線，しかも H_1 の接線 l が関連しているため，混乱しがちです。題意を取り違えないことが重要です。

問　題

不等式$y \leqq -(x-1)^2$の表す領域をA_1，不等式$y \leqq -(x+1)^2$の表す領域をA_2とする。A_1とA_2の和集合$A_1 \cup A_2$を A とする。また，不等式$y \geqq (x-a)^2+b$の表す領域をBとする。次の問いに答えよ。

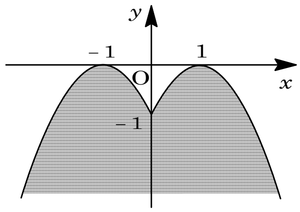
(1)　$a=0$，$b=-1$とするとき, AとBの共通部分$A \cap B$の面積を求めよ。

(2)　A_1とBの共通部分$A_1 \cap B$が空集合でないための条件をa, bで表せ。

(3)　A と B の共通部分$A \cap B$が空集合でないとき点$(a,\ b)$の存在範囲を座標平面に図示せよ。　[2005]

解答例

(1)　$A_1 : y \leqq -(x-1)^2$，$A_2 : y \leqq -(x+1)^2$に対し，集合$A = A_1 \cup A_2$の表す領域は，右図の網点部となる。



さて，$B : y \geqq (x-a)^2+b$に対し，$a=0$，$b=-1$のときは，$B : y \geqq x^2-1$である。

よって，$A \cap B$の表す領域は，y 軸に関して対称となり，その面積Sは,

$$S = 2\int_0^1 \{ -(x-1)^2 - (x^2-1) \}dx = 2\int_0^1 (-2x^2+2x)\,dx = \frac{2}{3}$$

(2)　$A_1 \cap B \neq \phi$であるとき，放物線$y=-(x-1)^2$と$y=(x-a)^2+b$は共有点をもち，

$$-(x-1)^2 = (x-a)^2+b,\quad 2x^2-(2a+2)x+a^2+b+1=0$$

よって，$D/4 = (a+1)^2 - 2(a^2+b+1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2+2a-1,\quad b \leqq -\frac{1}{2}(a-1)^2 \cdots\cdots\cdots ①$$

(3)　$A \cap B = (A_1 \cup A_2) \cap B = (A_1 \cap B) \cup (A_2 \cap B)$ より，$A \cap B \neq \phi$であることは，$A_1 \cap B \neq \phi$または$A_2 \cap B \neq \phi$であることと同値である。

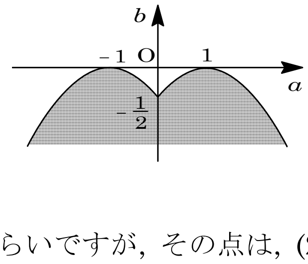
ここで，$A_2 \cap B \neq \phi$という条件は, (2)と同様にして，

$$-(x+1)^2 = (x-a)^2+b,\quad 2x^2-(2a-2)x+a^2+b+1=0$$

よって，$D/4 = (a-1)^2 - 2(a^2+b+1) \geqq 0$

$$2b \leqq -a^2-2a-1,\quad b \leqq -\frac{1}{2}(a+1)^2 \cdots\cdots\cdots ②$$

以上より，$A \cap B \neq \phi$であるとき①または②が成立し，これを図示すると，右図の網点部となる。なお，境界は領域に含む。



コメント

集合と領域の融合問題です。(3)の題意は，少し把握しづらいですが，その点は，(2)の誘導によって少し緩和されています。

問　題

$\triangle ABC$ において，$\angle A$ は直角で，$\angle B < \angle C$ とし，$BC = 2$ とする。$\angle B = \theta$ とおくとき，次の問いに答えよ。

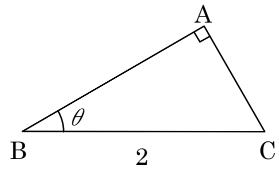
(1)　辺 AB, AC の長さ，および $\triangle ABC$ の面積 S を θ を用いて表せ。

(2)　$\triangle ABC$ の内接円 O の半径 r を θ を用いて表せ。

(3)　辺 BC の垂直二等分線が，内接円 O と接するとき，θ と r の値を求めよ。　[2017]

解答例

(1)　$\triangle ABC$ は，$\angle A = \frac{\pi}{2}$，$BC = 2$，$\angle B = \theta$，$\angle B < \angle C$ より，

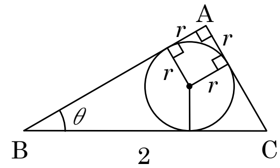


$0 < \theta < \frac{\pi}{4}$ となり，

$$AB = 2\cos\theta,\quad AC = 2\sin\theta$$

$\triangle ABC$ の面積 S は，$S = \frac{1}{2}\cdot 2\cos\theta\cdot 2\sin\theta = \sin 2\theta$

(2)　$\triangle ABC$ の内接円 O の半径を r とすると，

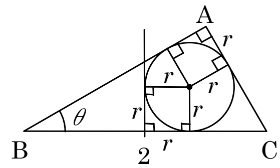


$$(AB - r) + (AC - r) = BC$$

$$(2\cos\theta - r) + (2\sin\theta - r) = 2$$

よって，$r = \cos\theta + \sin\theta - 1$ となる。

(3)　条件より，$\frac{1}{2}BC - r = AC - r$ から $AC = \frac{1}{2}BC$ となり，



$$2\sin\theta = 1,\quad \theta = \frac{\pi}{6}$$

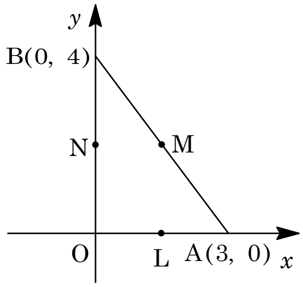
(2)より，$r = \cos\frac{\pi}{6} + \sin\frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$

コメント

三角比の基本問題です。(2)は図形的に処理していますが，(1)で求めた面積を利用しても構いません。

問　題

座標平面上に点 $A(3,\ 0)$，$B(0,\ 4)$ をとる。また，原点 O と A の中点を L, A と B の中点を M, B と O の中点を N とする。さらに，△OAB の内接円を C_1，△LMN の外接円を C_2 とする。次の問いに答えよ。



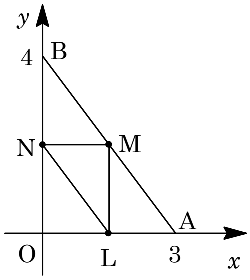
(1) 円 C_1 の半径 r_1 と中心 P_1 の座標を求めよ。

(2) 円 C_2 の半径 r_2 と中心 P_2 の座標を求めよ。

(3) 円 C_1 と円 C_2 が接することを示せ。　　　　　[2011]

解答例

(1) 直角三角形 OAB の内接円 C_1 の半径を r_1 とすると，中心 $P_1(r_1,\ r_1)$ となる。



ここで，$OA=3$，$OB=4$，$AB=5$ から，

$$(3-r_1)+(4-r_1)=5,\ r_1=1$$

すると，$P_1(1,\ 1)$ である。

(2) 点 L, M, N は，それぞれ線分 OA, AB, OB の中点より，$L\left(\frac{3}{2},\ 0\right)$，$M\left(\frac{3}{2},\ 2\right)$，$N(0,\ 2)$ である。

これより，△LMN は直角三角形となり，外接円 C_2 の中心は斜辺 LN の中点であるので，$P_2\left(\frac{3}{4},\ 1\right)$ となる。また，直径が LN から，半径 r_2 は，

$$r_2=\frac{LN}{2}=\frac{AB}{4}=\frac{5}{4}$$

(3) 円 C_1 と円 C_2 の中心間距離は，$P_1P_2=1-\frac{3}{4}=\frac{1}{4}$

また，$r_2-r_1=\frac{5}{4}-1=\frac{1}{4}$ となり，$P_1P_2=r_2-r_1$ である。

よって，円 C_1 は円 C_2 に内接している。

コメント

2 つの三角形が，ともに直角三角形であることに注目すると，計算はほとんど必要ありません。

問　題

平面上に，同一直線上にない 3 定点 O，A，B があり，線分 OA，OB の長さはそれぞれ 9, 4 である。動点 P, Q は同時に O を出発し, P は線分 OA 上を秒速 3 で, Q は線分 OB 上を秒速 2 でそれぞれ往復運動をくり返しているとする。このとき次の問いに答えよ。

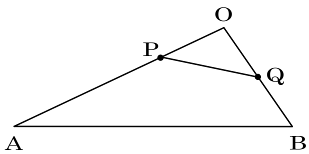
(1) 出発してから初めて P, Q が O で出会うのは何秒後か。

(2) 出発してから 5 秒後の PQ の長さは 4 であった。$\angle\mathrm{AOB}$の余弦と正弦の値を求めよ。

(3) 出発してから t 秒後の OP，OQ の長さをそれぞれ x，y とする。点$(x,\ y)$の軌跡を $0\leqq t\leqq 6$ の範囲で xy 平面上に図示せよ。 [2001]

解答例

(1) P が OA を往復する時間は$\dfrac{9\times 2}{3}=6$秒，Q が OB を往復する時間は$\dfrac{4\times 2}{2}=4$秒である。



すると，6 と 4 の最小公倍数は 12 なので，出発してから初めて P, Q が O で出会うのは 12 秒後となる。

(2) (2) 5 秒後に P は$3\times 5=15$移動しているので，$\mathrm{OP}=18-15=3$

また, Q は$2\times 5=10$移動しているので，$\mathrm{OQ}=10-8=2$

このとき$\mathrm{PQ}=4$なので$\angle\mathrm{AOB}=\theta$とおくと，余弦定理より，

$$\cos\theta=\frac{9+4-16}{2\cdot 3\cdot 2}=-\frac{1}{4}$$

また，$\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}=\sqrt{1-\dfrac{1}{16}}=\dfrac{\sqrt{15}}{4}$

(3) まず，点 P は 3 秒後に A に到達するので，$0\leqq t\leqq 3$ のとき $x=3t$，$3\leqq t\leqq 6$ のとき $x=-3(t-3)+9=-3t+18$ となる。

また，点 Q は 2 秒後に B，4 秒後に O に到達するので，$0\leqq t\leqq 2$ のとき $y=2t$，$2\leqq t\leqq 4$ のとき $y=-2(t-2)+4=-2t+8$，$4\leqq t\leqq 6$ のとき $y=2(t-4)=2t-8$ となる。

したがって, $0\leqq t\leqq 2$ のとき，$(x,\ y)=(3t,\ 2t)$より，

$$y=\frac{2}{3}x\quad(0\leqq x\leqq 6)$$

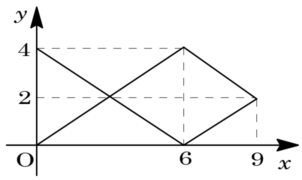
$2\leqq t\leqq 3$ のとき，$(x,\ y)=(3t,\ -2t+8)$より，$y=-\dfrac{2}{3}x+8\quad(6\leqq x\leqq 9)$

$3\leqq t\leqq 4$ のとき，$(x,\ y)=(-3t+18,\ -2t+8)$より，$y=\dfrac{2}{3}x-4\quad(6\leqq x\leqq 9)$

$4 \leqq t \leqq 6$ のとき，$(x,\ y)=(-3t+18,\ 2t-8)$ より，

$$y=-\frac{2}{3}x+4 \quad (0 \leqq x \leqq 6)$$

このとき，点$(x,\ y)$の軌跡を xy 平面上に図示すると，右図のようになる。



コメント

ていねいに解いていくことがポイントとなります。

問　題

平地を東西にのびる直線道路 l と，その北側に 3 地点 A, B, C があり，それぞれの地点には目じるしが置かれている。

l 上の地点 P で A, B, C を見ると，直線 AP は l に垂直で, B, C は直線 AP の東側にあり，$\angle APB = 30^\circ$，$\angle APC = 60^\circ$ であった。P から東へ $100\sqrt{3}$ 移動した l 上の地点 Q では, Q, B, A が一直線上にあり，$\angle BQP = 30^\circ$ であった。Q からさらに東へ移動した l 上の地点 R では, R, C, A が一直線上にあり，$\angle CRQ = 15^\circ$ であった。次の問いに答えよ。

(1)　$\cos 15^\circ = \dfrac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$ を示せ。

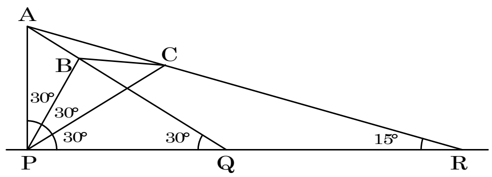
(2)　2 地点 A, C 間の距離 AC を求めよ。

(3)　2 地点 B, C 間の距離の 2 乗 BC^2 を求めよ。　[1999]

解答例

(1)　$\cos 15^\circ = \cos(60^\circ - 45^\circ)$

$$= \cos 60^\circ \cos 45^\circ + \sin 60^\circ \sin 45^\circ = \frac{1}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$$



(2)　$AP = 100\sqrt{3}\tan 30^\circ = 100$

また，$\angle ACP = \angle CPR + \angle CRP = 30^\circ + 15^\circ = 45^\circ$

$\triangle APC$ に正弦定理を適用して，$\dfrac{AC}{\sin 60^\circ} = \dfrac{100}{\sin 45^\circ}$

$$AC = 100\cdot\frac{\sin 60^\circ}{\sin 45^\circ} = 50\sqrt{6}$$

(3)　$\angle ABP = 90^\circ$ より，$AB = 100\sin 30^\circ = 50$

また，$\angle RAQ = \angle AQP - \angle ARQ = 30^\circ - 15^\circ = 15^\circ$

(1), (2)の結果を利用して，$\triangle ACB$ に余弦定理を適用すると，

$$BC^2 = (50\sqrt{6})^2 + 50^2 - 2\cdot 50\sqrt{6}\cdot 50\cos 15^\circ$$
$$= 50^2\left(6 + 1 - 2\sqrt{6}\cdot\frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}\right) = 2500(4-\sqrt{3})$$

コメント

問題文が長いのですが，題意をいったん図示できれば，よく見かける構図の問題であることがわかります。(2)は正弦定理, (3)は余弦定理を利用するだけです。

問　題

座標空間内に 3 点 $O(0,\ 0,\ 0)$，$A(3,\ 3,\ 0)$，$B(0,\ 6,\ 0)$ をとり，さらに $1<a<3$ を満たす定数 a に対して点 $P(t,\ ta,\ ta)$ をとる。ただし，t は $t>0$ の範囲を動くものとする。次の問いに答えよ。

(1) 点 P から xy 平面に垂線 PH を下ろす。点 H の座標を求めよ。

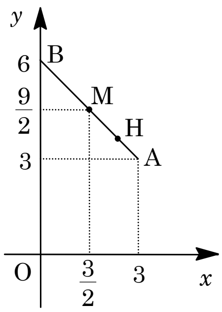
(2) 点 H が線分 AB 上にあるときの t の値を求め，そのときの点 H の座標を a を用いて表せ。

以下，点 H は線分 AB 上にあるとする。

(3) 点 M を線分 AB の中点とする。AH : HM の比の値 $\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HM}}$ を求めよ。

(4) 四面体 OPMH の体積が 2 となるような a の値を求めよ。　[2016]

解答例



(1) 点 $P(t,\ ta,\ ta)$ から xy 平面に垂線 PH を下ろしたとき，点 H の座標は $H(t,\ ta,\ 0)$ となる。

(2) $A(3,\ 3,\ 0)$，$B(0,\ 6,\ 0)$ に対し，線分 AB は，

$$x+y=6\ (0\leqq x\leqq 3),\ z=0\ \cdots\cdots\cdots①$$

点 H が線分 AB 上にあるので，①より，

$$t+ta=6\quad(0\leqq t\leqq 3)\cdots\cdots\cdots②$$

すると，②より $t=\dfrac{6}{a+1}$ となり，$1<a<3$ から $\dfrac{3}{2}<\dfrac{6}{a+1}<3$ であるので，線分 AB 上にあることがわかる。

よって，$t=\dfrac{6}{a+1}$，$H\left(\dfrac{6}{a+1},\ \dfrac{6a}{a+1},\ 0\right)$ である。

(3) 線分 AB の中点 M は，$M\left(\dfrac{3}{2},\ \dfrac{9}{2},\ 0\right)$ となり，

$$\mathrm{AH}:\mathrm{HM}=\left(3-\frac{6}{a+1}\right):\left(\frac{6}{a+1}-\frac{3}{2}\right)=\frac{3(a-1)}{a+1}:\frac{3(3-a)}{2(a+1)}$$

よって，$\dfrac{\mathrm{AH}}{\mathrm{HM}}=\dfrac{2(a-1)}{3-a}$ である。

(4) (3)から，$\mathrm{HM}:\mathrm{AB}=\dfrac{3(3-a)}{2(a+1)}:3=\dfrac{3-a}{2(a+1)}:1$ なので，

$$\triangle\mathrm{OHM}=\frac{3-a}{2(a+1)}\triangle\mathrm{OAB}=\frac{3-a}{2(a+1)}\cdot\frac{1}{2}\cdot 6\cdot 3=\frac{9(3-a)}{2(a+1)}$$

さて，四面体 OPMH の体積は 2 なので，$\mathrm{PH}=\dfrac{6a}{a+1}$ から，

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{9(3-a)}{2(a+1)}\cdot\frac{6a}{a+1}=2,\ 9a(3-a)=2(a+1)^2,\ 11a^2-23a+2=0$$

すると，$(11a-1)(a-2)=0$ となり，$1<a<3$ から $a=2$ である。

コメント

空間座標に関する基本的な問題です。

問　題

平面上の三角形 ABC で，$|\overrightarrow{AB}|=7$，$|\overrightarrow{BC}|=5$，$|\overrightarrow{AC}|=6$ となるものを考える。また，三角形 ABC の内部の点 P は，$\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$　$(s>0)$ を満たすとする。次の問いに答えよ。

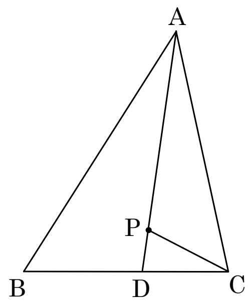
(1)　$\overrightarrow{AP}=\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$ とするとき，α と β を s を用いて表せ。

(2)　2 直線 AP, BC の交点を D とするとき，$\dfrac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|}$ と $\dfrac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}$ を s を用いて表せ。

(3)　三角形 ABC の面積を求めよ。

(4)　三角形 APC の面積が $2\sqrt{6}$ となるような s の値を求めよ。　[2015]

解答例



(1)　$\overrightarrow{PA}+s\overrightarrow{PB}+3\overrightarrow{PC}=\vec{0}$ より，

$$-\overrightarrow{AP}+s(\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{AP})+3(\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{AP})=\vec{0}$$

すると，$(s+4)\overrightarrow{AP}=s\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}$ より，

$$\overrightarrow{AP}=\frac{s}{s+4}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{s+4}\overrightarrow{AC}$$

よって，$\alpha=\dfrac{s}{s+4}$，$\beta=\dfrac{3}{s+4}$

(2)　$\overrightarrow{AD}=k\overrightarrow{AP}$　$(k>1)$ とおくと，$\overrightarrow{AD}=\dfrac{sk}{s+4}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3k}{s+4}\overrightarrow{AC}$

点 D は BC 上にあるので，$\dfrac{sk}{s+4}+\dfrac{3k}{s+4}=1$ より，

$$\frac{s+3}{s+4}k=1,\quad k=\frac{s+4}{s+3}$$

すると，$\mathrm{BD}:\mathrm{DC}=3:s$，$\mathrm{AP}:\mathrm{PD}=1:(k-1)=1:\dfrac{1}{s+3}=(s+3):1$ となり，

$$\frac{|\overrightarrow{BD}|}{|\overrightarrow{DC}|}=\frac{3}{s},\quad \frac{|\overrightarrow{AP}|}{|\overrightarrow{PD}|}=s+3$$

(3)　$\triangle$ABC に余弦定理を適用すると，$\cos\angle\mathrm{BAC}=\dfrac{7^2+6^2-5^2}{2\cdot7\cdot6}=\dfrac{5}{7}$ より，

$$\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{2}\cdot7\cdot6\cdot\sqrt{1-\left(\frac{5}{7}\right)^2}=21\cdot\frac{2\sqrt{6}}{7}=6\sqrt{6}$$

(4)　$\triangle\mathrm{APC}=\dfrac{1}{k}\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{s+3}{s+4}\triangle\mathrm{ADC}=\dfrac{s+3}{s+4}\cdot\dfrac{s}{s+3}\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{6\sqrt{6}s}{s+4}$

条件より，$\dfrac{6\sqrt{6}s}{s+4}=2\sqrt{6}$ なので $3s=s+4$ となり，$s=2$ である。

コメント

平面ベクトルの三角形への応用問題です。基本的なので，ミスが致命傷となります。

問　題

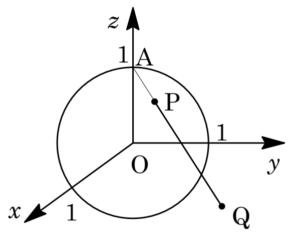
xyz 空間において，原点 O を中心とする半径 1 の球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$，および S 上の点 $\mathrm{A}(0,\ 0,\ 1)$ を考える。S 上の A と異なる点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ に対して，2 点 A, P を通る直線と xy 平面の交点を Q とする。次の問いに答えよ。

(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$（$t$ は実数）とおくとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ を t, $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$, $\overrightarrow{\mathrm{OA}}$ を用いて表せ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$ の成分表示を x_0，y_0，z_0 を用いて表せ。

(3) 球面 S と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分が表す図形を C とする。点 P が C 上を動くとき，xy 平面上における点 Q の軌跡を求めよ。　[2008]

解答例



(1) $\overrightarrow{\mathrm{AQ}}=t\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ のとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}}=t(\overrightarrow{\mathrm{OP}}-\overrightarrow{\mathrm{OA}})$

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\overrightarrow{\mathrm{OP}}$$

(2) (1)より，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(1-t)(0,\ 0,\ 1)+t(x_0,\ y_0,\ z_0)$

$$=(tx_0,\ ty_0,\ 1-t+tz_0)$$

ここで，点 Q は xy 平面上の点なので，$1-t+tz_0=0$

すると，$z_0\neq 1$ から，$t=\dfrac{1}{1-z_0}$ となり，

$$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\left(\frac{x_0}{1-z_0},\ \frac{y_0}{1-z_0},\ 0\right)$$

(3) $\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(x,\ y,\ 0)$ とおくと, (2)より，$x=\dfrac{x_0}{1-z_0}$ ………①，$y=\dfrac{y_0}{1-z_0}$ ………②

条件より，点 $\mathrm{P}(x_0,\ y_0,\ z_0)$ は，球面 $S: x^2+y^2+z^2=1$ と平面 $y=\dfrac{1}{2}$ の共通部分である C 上を動くことより，

$$x_0^2+y_0^2+z_0^2=1 \text{ ………③},\quad y_0=\frac{1}{2} \text{ ………④}$$

③④より，$x_0^2+z_0^2=\dfrac{3}{4}$ ………⑤

また，②④より，$y=\dfrac{1}{2(1-z_0)}$ となり，$y\neq 0$ から，$1-z_0=\dfrac{1}{2y}$，

$$z_0=1-\frac{1}{2y} \text{ ………⑥}$$

①⑥より，$x_0=\dfrac{x}{2y}$ ………⑦

⑥⑦を⑤に代入すると，$\left(\dfrac{x}{2y}\right)^2+\left(1-\dfrac{1}{2y}\right)^2=\dfrac{3}{4}$

$$x^2+(2y-1)^2=3y^2,\quad x^2+y^2-4y+1=0 \text{ ………⑧}$$

⑧は $y\neq 0$ を満たすことより，点 Q は xy 平面上で円 $x^2+y^2-4y+1=0$ を描く。

コメント

有名な構図の問題です。誘導がたいへん丁寧です。

問　題

O を原点とする座標平面上に 2 点A$(1,\ 1)$，B$(3,\ -1)$がある。$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}$とするとき，次の問いに答えよ。

(1)　ベクトル$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角をθとするとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

(2)　t が $0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}$で定められる点 P の動く範囲を図示せよ。

(3)　s，t が $1\leqq s\leqq 3$，$0\leqq t\leqq 2$ を満たしながら変化するとき，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$で定められる点 Q の動く範囲の面積を求めよ。　[2006]

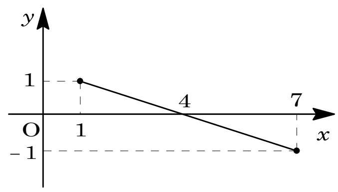
解答例

(1)　$\overrightarrow{\mathrm{OA}}=\vec{a}=(1,\ 1)$，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}=\vec{b}=(3,\ -1)$より，$\vec{a}$と$\vec{b}$のなす角$\theta$に対し，

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{3-1}{\sqrt{2}\times\sqrt{10}}=\frac{1}{\sqrt{5}}$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+t\vec{b}\ (0\leqq t\leqq 2)$より，点 P は点 A を通り，$\overrightarrow{\mathrm{OB}}$と平行な線分上を動く。

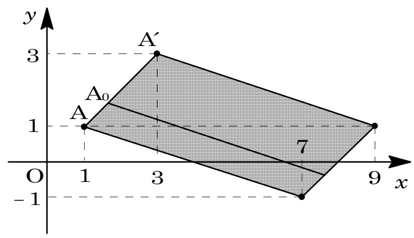
ここで，$t=0$のとき$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}=(1,\ 1)$，$t=2$のとき$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\vec{a}+2\vec{b}=(7,\ -1)$より，点 P の動く範囲は右図の線分となる。



(3)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=s\vec{a}+t\vec{b}$において，$s$，$t$ の値は独立に変化させることができるので，s の値をいったん固定し，$s=s_0\ (1\leqq s_0\leqq 3)$とする。また，$\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}=s_0\vec{a}$とおく。

すると，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OA_0}}+t\vec{b}\ (0\leqq t\leqq 2)$から，点 A が点$\mathrm{A_0}$に一致するように(2)の線分を平行移動した線分上を点 Q は動く。

ここで，$s=s_0$の値を $1\leqq s\leqq 3$ で動かすとき，$\overrightarrow{\mathrm{OA'}}=3\vec{a}=(3,\ 3)$とおくと，点$\mathrm{A_0}$は線分AA′上を動く。それに伴い，上記の線分は平行移動し，点 Q は右図の平行四辺形の内部または辺上を動く。



この平行四辺形の面積Sは，

$$S=2|\vec{a}|\cdot 2|\vec{b}|\sin\theta=2\sqrt{2}\times 2\sqrt{10}\times\sqrt{1-\frac{1}{5}}=16$$

コメント

(2)，(3)とも，成分を用いて処理することができますが，出題者の意図は上記のような解法でしょう。

問　題

座標平面上で，原点 O を基準とする点 P の位置ベクトル $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$ が $\vec{p}$ であるとき，点 P を $\mathrm{P}(\vec{p})$ で表す。次の問いに答えよ。

(1)　$\mathrm{A}(\vec{a})$ を原点 O と異なる点とする。

(i)　点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を通り，ベクトル $\vec{a}$ に垂直な直線上の任意の点を $\mathrm{P}(\vec{p})$ とするとき，$\vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$ が成り立つことを示せ。

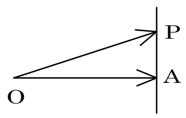
(ii)　ベクトル方程式 $|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ で表される図形を図示せよ。

(2)　ベクトル $\vec{b}=(1,\ 1)$ に対して，不等式 $|\vec{p}-\vec{b}|\leqq|\vec{p}+3\vec{b}|\leqq 3|\vec{p}-\vec{b}|$ を満たす点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ 全体が表す領域を図示せよ。　[2000]

解答例

(1)　条件から $\overrightarrow{\mathrm{OA}}\perp\overrightarrow{\mathrm{AP}}$ なので，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=0$

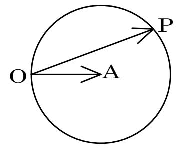
$$\vec{a}\cdot(\vec{p}-\vec{a})=0,\ \vec{a}\cdot\vec{p}=|\vec{a}|^2$$



また，$|\vec{p}|^2-2\vec{a}\cdot\vec{p}=0$ より，$|\vec{p}-\vec{a}|^2-|\vec{a}|^2=0$

$$|\vec{p}-\vec{a}|=|\vec{a}|$$

よって，点 $\mathrm{P}(\vec{p})$ は点 $\mathrm{A}(\vec{a})$ を中心とする半径 OA の円を描き，これを図示すると右図のようになる。



(2)　$|\vec{p}-\vec{b}|\leqq|\vec{p}+3\vec{b}|\leqq 3|\vec{p}-\vec{b}|$ より，

$$|\vec{p}-\vec{b}|^2\leqq|\vec{p}+3\vec{b}|^2\leqq 9|\vec{p}-\vec{b}|^2$$

$\vec{p}=(x,\ y)$ とおくと，$\vec{p}-\vec{b}=(x-1,\ y-1)$，$\vec{p}+3\vec{b}=(x+3,\ y+3)$ より，

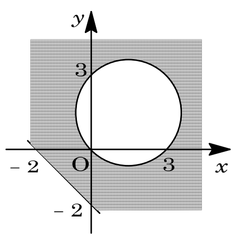
$$(x-1)^2+(y-1)^2\leqq(x+3)^2+(y+3)^2\leqq 9\{(x-1)^2+(y-1)^2\}\cdots\cdots\cdots①$$

①の左側の不等式を変形すると，$x+y+2\geqq 0$，$y\geqq -x-2\cdots\cdots\cdots②$

①の右側の不等式を変形すると，$x^2+y^2-3x-3y\geqq 0$

$$\left(x-\frac{3}{2}\right)^2+\left(y-\frac{3}{2}\right)^2\geqq\frac{9}{2}\cdots\cdots\cdots③$$

以上より，②と③を満たす領域を図示すると，右図の網点部となる。ただし，境界は領域に含む。



コメント

(2)の設問は，(1)の利用を考えると，かえって繁雑です。もっとも最初は，(1)を誘導として使おうとしましたが。

問　題

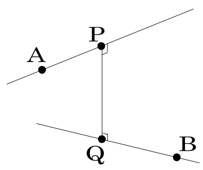
O を頂点とする空間に，点A$(5,\ 1,\ -1)$を通り，$\vec{a}=(1,\ 2,\ 1)$を方向ベクトルとする直線gと，点B$(6,\ -4,\ 0)$を通り，$\vec{b}=(1,\ -1,\ -1)$を方向ベクトルとする直線hがある。いま，点P, Qがそれぞれg，h上にあり，ベクトル$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}$は，$g$と$h$の両方に垂直となっている。次の問いに答えよ。

(1) P, Qの座標を求めよ。

(2) $\overrightarrow{\mathrm{OP}}$と$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}$のなす角を$\theta$とおくとき，$\cos\theta$の値を求めよ。

(3) △OPQの面積を求めよ。 [1998]

解答例



(1) Pはg上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{OA}}+t\vec{a}$

また, Qはh上にあるので，$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OB}}+s\vec{b}$

$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=\overrightarrow{\mathrm{OQ}}-\overrightarrow{\mathrm{OP}}=\overrightarrow{\mathrm{AB}}+s\vec{a}-t\vec{b}$

条件より，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{a}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{a}+s\vec{a}\cdot\vec{b}-t|\vec{a}|^2=0$

$-8-2s-6t=0$，$4+s+3t=0$………①

また，$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}\cdot\vec{b}=0$，$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\vec{b}+s|\vec{b}|^2-t\vec{a}\cdot\vec{b}=0$

$5+3s+2t=0$………②

①②より，$t=s=-1$

よって，$\overrightarrow{\mathrm{OP}}=(5,\ 1,\ -1)-(1,\ 2,\ 1)=(4,\ -1,\ -2)$より，P$(4,\ -1,\ -2)$

$\overrightarrow{\mathrm{OQ}}=(6,\ -4,\ 0)-(1,\ -1,\ -1)=(5,\ -3,\ 1)$より，Q$(5,\ -3,\ 1)$

(2) $\cos\theta=\dfrac{\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}}}{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|}=\dfrac{21}{\sqrt{21}\sqrt{35}}=\dfrac{\sqrt{15}}{5}$

(3) (2)より，$\sin\theta=\sqrt{1-\dfrac{15}{25}}=\dfrac{\sqrt{10}}{5}$なので,

$$\triangle\mathrm{OPQ}=\frac{1}{2}|\overrightarrow{\mathrm{OP}}||\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|\sin\theta=\frac{1}{2}\cdot\sqrt{21}\cdot\sqrt{35}\cdot\frac{\sqrt{10}}{5}=\frac{7}{2}\sqrt{6}$$

コメント

ねじれの位置にある 2 直線の共通垂線が題材となっている超頻出問題です。なお, (3)は公式$S=\dfrac{1}{2}\sqrt{|\overrightarrow{\mathrm{OP}}|^2|\overrightarrow{\mathrm{OQ}}|^2-(\overrightarrow{\mathrm{OP}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OQ}})^2}$を用いてもよいのですが，そうすると, (2)の設問を誘導として考えた出題者の機嫌を損ねることになります。

問　題

次の問いに答えよ。ただし，${}_m\mathrm{C}_k$ は m 個から k 個取る組合せの総数を表す。

(1)　$k=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ に対して，${}_7\mathrm{C}_k$ は 7 の倍数であることを示せ。

(2)　p は素数とし，k は $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数とする。${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数であることを示せ。

(3)　すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを数学的帰納法を用いて示せ。　[2017]

解答例

(1)　${}_7\mathrm{C}_1={}_7\mathrm{C}_6=7$，${}_7\mathrm{C}_2={}_7\mathrm{C}_5=21$，${}_7\mathrm{C}_3={}_7\mathrm{C}_4=35$ より，すべて 7 の倍数である。

(2)　p を素数，k を $1\leqq k\leqq p-1$ を満たす自然数とするとき，${}_p\mathrm{C}_k=\dfrac{p!}{k!\,(p-k)!}$ から，

$$k!\,(p-k)!\,{}_p\mathrm{C}_k=p!\cdots\cdots\cdots(*)$$

すると，$(*)$の右辺は p の倍数であるが，左辺の $k!$ および $(p-k)!$ は p の倍数ではない。よって，${}_p\mathrm{C}_k$ は p の倍数である。

(3)　すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数であることを示す。

(i)　$n=1$ のとき　$n^7-n=0$ より 7 の倍数である。

(ii)　$n=k$ のとき　k^7-k が 7 の倍数と仮定すると，

$$(k+1)^7-(k+1)=k^7+\sum_{l=1}^{6}{}_7\mathrm{C}_l\,k^l+1-k-1=k^7-k+\sum_{l=1}^{6}{}_7\mathrm{C}_l\,k^l$$

すると，$l=1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6$ のとき ${}_7\mathrm{C}_l$ は 7 の倍数より，$\displaystyle\sum_{l=1}^{6}{}_7\mathrm{C}_l\,k^l$ は 7 の倍数となり，k^7-k が 7 の倍数と合わせると，$(k+1)^7-(k+1)$ は 7 の倍数となる。

(i)(ii)より，すべての自然数 n に対して，n^7-n は 7 の倍数である。

コメント

二項定理についての基本題です。(1)は(2)との関連を考えると，解答例のように具体的に求めるということでしょう。

問　題

数列$\{a_n\}$が，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$を満たしている。次の問いに答えよ。

(1)　一般項a_nを求めよ。

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}$とおくとき，$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$となることを数学的帰納法を用いて証明せよ。

(3)　和　$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}$を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　条件より，$a_1+2a_2+3a_3+\cdots+na_n=2^n-1$……①なので，$n\geqq 2$において，

$$na_n=(2^n-1)-(2^{n-1}-1)=2^{n-1},\ \ a_n=\frac{2^{n-1}}{n}\cdots\cdots\cdots②$$

①に$n=1$をあてはめて得られる$a_1=1$は，②に$n=1$を代入した値と一致する。

よって，$a_n=\dfrac{2^{n-1}}{n}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(2)　$S_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{2^{k-1}}$のとき$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$……③となることを，数学的帰納法を用いて証明する。

(i)　$n=1$のとき　$S_1=\dfrac{1}{2^0}=1$であるが，③に$n=1$を代入すると成立する。

(ii)　$n=l$のとき　$S_l=4-\dfrac{l+2}{2^{l-1}}$と仮定する。

$$S_{l+1}=S_l+\frac{l+1}{2^l}=4-\frac{l+2}{2^{l-1}}+\frac{l+1}{2^l}=4-\frac{2l+4-l-1}{2^l}=4-\frac{l+3}{2^l}$$

よって，$n=l+1$のときも成立する。

(i)(ii)より，$S_n=4-\dfrac{n+2}{2^{n-1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$

(3)　まず，$T_n=\displaystyle\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{a_k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}$とおくと，

$$T_n-\frac{1}{2}T_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}-\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^k}=\sum_{k=1}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}-\sum_{k=2}^{n+1}\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}$$

$$=\frac{1^2}{2^0}+\sum_{k=2}^{n}\frac{k^2}{2^{k-1}}-\sum_{k=2}^{n}\frac{(k-1)^2}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}$$

$$=1+\sum_{k=2}^{n}\frac{2k-1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}$$

(2)より，$\dfrac{1}{2}T_n=1+2(S_n-S_1)-\displaystyle\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{2^{k-1}}-\frac{n^2}{2^n}$

$$=1+2\left(4-\frac{n+2}{2^{n-1}}-1\right)-\frac{\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{2^{n-1}}\right)}{1-\dfrac{1}{2}}-\frac{n^2}{2^n}$$

$$=6+\frac{-4(n+2)+2-n^2}{2^n}=6-\frac{n^2+4n+6}{2^n}$$

よって，$T_n=12-\dfrac{n^2+4n+6}{2^{n-1}}$　$(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$である。

コメント

頻出の(等差)×(等比)タイプの和を求める問題です。(3)では，シグマ記号を使って解答例を書きましたが，普通に項を並べて記しても構いません。

問　題

次の問いに答えよ。

(1)　$x>0$ のとき，不等式 $\dfrac{2}{3}\left(x+\dfrac{1}{x^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。また，等号が成り立つのはどのようなときか。

(2)　数列 $\{a_n\}$ を，$a_1=2$，$a_{n+1}=\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{{a_n}^2}\right)$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$ によって定める。

(i)　$n\geqq 1$ のとき，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ を示せ。

(ii)　$n\geqq 2$ のとき，$a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}<\dfrac{2}{3}\left(a_n-\dfrac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$ を示せ。

(iii)　$n\geqq 1$ のとき，$0<a_{n+1}-\dfrac{2}{{a_n}^2}\leqq\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ を示せ。　[2009]

解答例

(1)　$x>0$ から，相加平均と相乗平均の関係を用いて，

$$\frac{2}{3}\left(x+\frac{1}{x^2}\right)=\frac{2}{3}\left(\frac{1}{2}x+\frac{1}{2}x+\frac{1}{x^2}\right)\geqq 2\times\sqrt[3]{\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{2}x\cdot\frac{1}{x^2}}=2\sqrt[3]{2^{-2}}=2^{\frac{1}{3}}$$

等号は $\dfrac{1}{2}x=\dfrac{1}{x^2}$，すなわち $x=\sqrt[3]{2}$ のときに成立する。

(2)　(i)　まず，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ を数学的帰納法で証明する。

(a)　$n=1$ のとき　$a_1=2$ より成立する。

(b)　$n=k$ のとき　$a_k>2^{\frac{1}{3}}$ の成立を仮定すると，(1)より，

$$a_{k+1}=\frac{2}{3}\left(a_k+\frac{1}{{a_k}^2}\right)\geqq 2^{\frac{1}{3}}$$

等号成立は $a_k=\sqrt[3]{2}$ のときなので仮定に反し，よって $a_{k+1}>2^{\frac{1}{3}}$ となる。

(a)(b)より，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ である。

また，$a_n-a_{n+1}=a_n-\dfrac{2}{3}\left(a_n+\dfrac{1}{{a_n}^2}\right)=\dfrac{1}{3}\cdot\dfrac{{a_n}^3-2}{{a_n}^2}$ となり，$a_n>2^{\frac{1}{3}}$ から，

$$a_n-a_{n+1}>0,\ a_n>a_{n+1}$$

以上より，$a_n>a_{n+1}>2^{\frac{1}{3}}$ が成り立つ。

(ii)

$$\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)-\left(a_{n+1}-\frac{2}{{a_n}^2}\right)=\frac{2}{3}\left(a_n-\frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)-\frac{2}{3}\left(a_n+\frac{1}{{a_n}^2}\right)+\frac{2}{{a_n}^2}$$

$$=-\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{{a_{n-1}}^2}+\frac{4}{3}\cdot\frac{1}{{a_n}^2}=\frac{4}{3}\cdot\frac{{a_{n-1}}^2-{a_n}^2}{{a_{n-1}}^2{a_n}^2}$$

$n\geqq 2$ のとき, (i)より $a_{n-1} > a_n > 2^{\frac{1}{3}}$ から，$\dfrac{4}{3}\cdot\dfrac{{a_{n-1}}^2 - {a_n}^2}{{a_{n-1}}^2{a_n}^2} > 0$ となり，

$$a_{n+1} - \frac{2}{{a_n}^2} < \frac{2}{3}\left(a_n - \frac{2}{{a_{n-1}}^2}\right)$$

(iii) (i)より，$a_n > a_{n+1} > 2^{\frac{1}{3}}$ なので，$a_{n+1} - \dfrac{2}{{a_n}^2} = \dfrac{a_{n+1}{a_n}^2 - 2}{{a_n}^2} > 0$

$n\geqq 1$ のとき, (ii)より，$a_{n+1} - \dfrac{2}{{a_n}^2} \leqq \left(a_2 - \dfrac{2}{{a_1}^2}\right)\left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ （等号は $n=1$ のとき）

さて，$a_2 - \dfrac{2}{{a_1}^2} = \dfrac{2}{3}\left(2 + \dfrac{1}{4}\right) - \dfrac{2}{4} = 1$ となるので，$a_{n+1} - \dfrac{2}{{a_n}^2} \leqq \left(\dfrac{2}{3}\right)^{n-1}$ から，

$$0 < a_{n+1} - \frac{2}{{a_n}^2} \leqq \left(\frac{2}{3}\right)^{n-1}$$

コメント

量的にかなりのもので，この1題の中に5つの証明題が詰められています。

問　題

数列$\{a_n\}$が$a_1=-4$，$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot 2^{n+1}$ $(n=1,\ 2,\ 3,\ \cdots)$により定められているとする。

(1)　$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$とおくときb_nとb_{n+1}の満たす関係式を導き，$\{a_n\}$の一般項を求めよ。

(2)　$a_n>a_{n+1}$となるようなnの値をすべて求めよ。

(3)　a_nが最小となるようなnの値をすべて求めよ。　[2003]

解答例

(1)　条件式$a_{n+1}=2a_n+2^{n+3}n-13\cdot 2^{n+1}$の両辺を$2^{n+1}$で割ると，$b_n=\dfrac{a_n}{2^n}$より，

$$\frac{a_{n+1}}{2^{n+1}}=\frac{a_n}{2^n}+4n-13,\quad b_{n+1}=b_n+4n-13$$

ただし，$b_1=\dfrac{a_1}{2^1}=\dfrac{-4}{2}=-2$である。

よって，$n\geqq 2$で，$b_n=-2+\displaystyle\sum_{k=1}^{n-1}(4k-13)=-2+4\cdot\frac{1}{2}(n-1)n-13(n-1)$

$$=2n^2-15n+11$$

$n=1$をあてはめると，$b_1=-2$となり成立する。

したがって，$a_n=b_n2^n=(2n^2-15n+11)2^n$

(2)　(1)より，$a_{n+1}=\{2(n+1)^2-15(n+1)+11\}2^{n+1}=2(2n^2-11n-2)2^n$

$$a_{n+1}-a_n=2(2n^2-11n-2)2^n-(2n^2-15n+11)2^n$$
$$=(2n^2-7n-15)2^n=(2n+3)(n-5)2^n$$

$a_n>a_{n+1}$となるのは，$n>0$より$n<5$，すなわち$n=1,\ 2,\ 3,\ 4$のときである。

(3)　(2)より，$1\leqq n\leqq 4$のとき$a_n>a_{n+1}$であり，また$n=5$のとき$a_n=a_{n+1}$，$n\geqq 6$のとき$a_n<a_{n+1}$となるので，

$$a_1>a_2>a_3>a_4>a_5=a_6<a_7<a_8<\cdots\cdots$$

よって，$n=5,\ 6$のとき，a_nは最小となる。

コメント

誘導つきの漸化式の解法と，数列の最大値という有名問題で構成されています。

問　題

以下の問いに答えよ。

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ とする。$x\geqq 14$ ならば $f(x)>0$ となることを示せ。

(2)　自然数 a に対して，$b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ とおく。b も自然数となるような a と b の組 $(a,\ b)$ をすべて求めよ。　[2002]

解答例

(1)　$f(x)=x^3-6x^2-96x-80$ に対して，

$$f'(x)=3x^2-12x-96=3(x+4)(x-8)$$

$x\geqq 14$ のとき $f'(x)>0$ なので，$f(x)>f(14)=144>0$

(2)　$b=\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}$ ……①に対して, a, b は自然数より，$\dfrac{9a^2+98a+80}{a^3+3a^2+2a}\geqq 1$

$$9a^2+98a+80\geqq a^3+3a^2+2a,\quad a^3-6a^2-96a-80\leqq 0$$

(1)より, $a\geqq 14$ のときは不成立なので, $1\leqq a\leqq 13$………②

また，①より，$b(a^3+3a^2+2a)=9a^2+98a+80$ ………③

$$a(ba^2+3ba+2b-9a-98)=80$$

$ba^2+3ba+2b-9a-98$ は整数なので, a は 80 の約数となる。

よって，②より $a=1,\ 2,\ 4,\ 5,\ 8,\ 10$ ………④

さらに，③から，$ba(a+1)(a+2)=6(a^2+16a+13)+3a^2+2a+2$

$$ba(a+1)(a+2)-6(a^2+16a+13)=3a^2+2a+2$$

$a(a+1)(a+2)$，$6(a^2+16a+13)$ は 6 の倍数より，$3a^2+2a+2$ も 6 の倍数となる。これを満たす a は，④から $a=2,\ 8$ のみである。

$a=2$ のとき①より $b=13$，$a=8$ のとき①より $b=2$ となる。

以上より，$(a,\ b)=(2,\ 13),\ (8,\ 2)$

コメント

(1)の誘導を使えば，②まではすぐに導けるのですが, a の値を 13 個代入して b の値を計算する気にはなれません。また④に絞り込んでも，これだけではまだ腕力がかなり必要です。

問　題

A, B, C の 3 人がそれぞれ 1 個ずつのサイコロを同時に投げ，出た目の大きさの順に $x_1 \leqq x_2 \leqq x_3$ とする。$x_1 = x_2 = x_3$ のときは，もう一度 3 人でサイコロ投げを行う。$x_1 \leqq x_2 < x_3$ のときは，x_3 を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。$x_1 < x_2 = x_3$ のときは，x_1 を出した者は去り，残りの 2 人で異なる目が出るまでサイコロ投げを続け，大きい目を出した者が勝者となり，サイコロ投げを終了する。次の問いに答えよ。

(1)　1 回目のサイコロ投げで A が 3 を出して勝者となる場合の数を求めよ。

(2)　1 回目のサイコロ投げで A が勝者となる場合の数を求めよ。

(3)　1 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。

(4)　2 回目のサイコロ投げで勝者が決まる場合の数を求めよ。　[2016]

解答例

(1)　A, B, C がサイコロを同時に投げるとき，出た目をそれぞれ a, b, c とする。

さて，1 回目のサイコロ投げで A が 3 を出して勝者となるのは，$a=3$，$b \leqq 2$，$c \leqq 2$ のときで，その場合の数は，$1\times 2^2 = 4$ である。

(2) 1 回目のサイコロ投げで A が勝者となるのは，$a = k$ $(2 \leqq k \leqq 6)$ の場合，$b \leqq k-1$，$c \leqq k-1$ のときで，その場合の数は，

$$1\times 1^2 + 1\times 2^2 + 1\times 3^2 + 1\times 4^2 + 1\times 5^2 = 55$$

(3)　1 回目のサイコロ投げで, B, C が勝者となる場合も同様なので, 1 回目で勝者が決まる場合の数は, (2)より，$55\times 3 = 165$ である。

(4)　2 回目のサイコロ投げで勝者が決まるのは, 次の場合がある。

(i)　1 回目のサイコロ投げで $a=b=c$ のとき

1 回目は 6 通り，そして 2 回目で勝者が決まるのは, (3)から 165 通りずつであり, この場合の数は，$6\times 165 = 990$ である。

(ii)　1 回目のサイコロ投げで $a=b>c$ のとき

1 回目は $a=b=k$ $(2 \leqq k \leqq 6)$，$c \leqq k-1$ のときで，その場合の数は,

$$1^2\times 1 + 1^2\times 2 + 1^2\times 3 + 1^2\times 4 + 1^2\times 5 = 15$$

2 回目は A と B でサイコロを投げ，どちらかが勝者となるのは，異なる目が出たときなので，その場合の数は $6^2 - 6 = 30$ である。

よって，このとき 2 回目で勝者が決まる場合の数は，$15\times 30 = 450$ である。

(iii) 1 回目のサイコロ投げで $a=c>b$ のとき　(ii)と同じく 450 通りある。

(iv) 1 回目のサイコロ投げで $b=c>a$ のとき　(ii)と同じく 450 通りある。

(i)～(iv)より，2 回目で勝者が決まる場合の数は，$990 + 450\times 3 = 2340$ である。

コメント

場合の数に関する基本問題です。誘導も丁寧すぎるほどです。

問　題

座標平面上で，x 座標と y 座標がともに 0 以上の整数である点を，ここでは格子点とよぶ。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へ，両端点がともに格子点であり長さが 1 の線分を用いて，格子点$(0,\ 0)$から順に最も少ない本数でつなぐ方法を数える。たとえば，格子点$(0,\ 0)$から格子点$(3,\ 1)$へつなぐ方法の数は 4 である。次の問いに答えよ。

(1)　格子点$(0,\ 0)$から格子点$(4,\ 0)$へつなぐ方法の数と，格子点$(0,\ 0)$から格子点$(2,\ 2)$へつなぐ方法の数を，それぞれ求めよ。

(2)　条件$k+l=5$を満たす格子点$(k,\ l)$を考える。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を求めよ。

(3)　条件$k+l=n$ $(n\geqq 1)$を満たす格子点$(k,\ l)$を考える。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。

(4)　条件$k+l=n$ (kとlはともに偶数で，$n\geqq 2$)を満たす格子点$(k,\ l)$を考える。格子点$(0,\ 0)$から格子点$(k,\ l)$へつなぐ方法の数を，この条件を満たすすべての格子点について足し合わせた数を n を用いて表せ。　[2015]

解答例

(1)　まず，長さ 1 の線分を用いて，格子点を x 軸に平行につなぐことを→，y 軸に平行につなぐことを↑と表す。

さて，$(0,\ 0)$から$(4,\ 0)$へつなぐには，4 個の→を 1 列に並べることより，その方法は 1 通りである。

また，$(0,\ 0)$から$(2,\ 2)$へつなぐには，2 個の→，2 個の↑を 1 列に並べることより，その方法は$\dfrac{4!}{2!2!}=6$通りである。

(2)　$k+l=5$のとき，$(0,\ 0)$から$(k,\ l)=(k,\ 5-k)$へつなぐには，k 個の→，$5-k$ 個の↑を 1 列に並べることより，その方法は$\dfrac{5!}{k!(5-k)!}={}_5\mathrm{C}_k$通りである。

このとき，すべての格子点$(k,\ l)$について足し合わせた総数は，

$$ {}_5\mathrm{C}_0+{}_5\mathrm{C}_1+{}_5\mathrm{C}_2+{}_5\mathrm{C}_3+{}_5\mathrm{C}_4+{}_5\mathrm{C}_5=(1+1)^5=32 $$

(3)　$k+l=n$のとき，$(0,\ 0)$から$(k,\ l)=(k,\ n-k)$へつなぐには，k 個の→，$n-k$ 個の↑を 1 列に並べることより，その方法は$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}={}_n\mathrm{C}_k$通りである。

このとき，すべての格子点$(k,\ l)$について足し合わせた総数は，

$$ {}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1+1)^n=2^n\cdots\cdots\cdots(*) $$

(4)　k, l がともに偶数で $k+l=n$ のとき，$(0,\ 0)$ から $(k,\ l)=(k,\ n-k)$ へつなぐ方法について，すべての格子点 $(k,\ l)$ について足し合わせた総数 N は,

$$N={}_n\mathrm{C}_0+{}_n\mathrm{C}_2+{}_n\mathrm{C}_4+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n$$

ここで，${}_n\mathrm{C}_0-{}_n\mathrm{C}_1+{}_n\mathrm{C}_2-{}_n\mathrm{C}_3+\cdots+{}_n\mathrm{C}_n=(1-1)^n=0$ から，(＊)と合わせると，

$$N=\frac{1}{2}\{(1+1)^n+(1-1)^n\}=2^{n-1}$$

コメント

格子点が題材として設定されていますが，内容は有名な経路問題です。合わせて二項定理も絡んでいます。なお，設問(2)(3)(4)の問題文の日本語は少しヘンです。意味は通りますが。

問　題

1 から 4 までの番号を書いた玉が 2 個ずつ，合計 8 個の玉が入った袋があり，この袋から玉を 1 個取り出すという操作を続けて行う。ただし，取り出した玉は袋に戻さず，また，すでに取り出した玉と同じ番号の玉が出てきた時点で一連の操作を終了するものとする。

玉をちょうど n 個取り出した時点で操作が終わる確率を $P(n)$ とおく。次の問いに答えよ。

(1)　$P(2)$，$P(3)$ を求めよ。

(2)　6 以上の k に対し，$P(k)=0$ が成り立つことを示せ。

(3)　一連の操作が終了するまでに取り出された玉の個数の期待値を求めよ。　[2014]

解答例

(1)　2 個の玉を取り出した時点で操作が終わるのは，1 個目と 2 個目の番号が等しいときより，その確率は，

$$P(2)=\frac{8\times1}{{}_8\mathrm{P}_2}=\frac{1}{7}$$

また，3 個の玉を取り出した時点で操作が終わるのは，1 個目と 2 個目の番号が異なり，3 個目の番号が 1 個目または 2 個目の番号と等しいときより，その確率は，

$$P(3)=\frac{8\times6\times2}{{}_8\mathrm{P}_3}=\frac{2}{7}$$

(2)　玉の番号は 4 種類なので，5 個取り出した時点で操作は必ず終わる。
これより，6 以上の k に対し，$P(k)=0$ となる。

(3)　(1)と同様に考えると，

$$P(4)=\frac{8\times6\times4\times3}{{}_8\mathrm{P}_4}=\frac{12}{35},\quad P(5)=\frac{8\times6\times4\times2\times4}{{}_8\mathrm{P}_5}=\frac{8}{35}$$

よって，一連の操作が終了するまでに取り出された玉の個数の期待値 E は，

$$E=2\times\frac{1}{7}+3\times\frac{2}{7}+4\times\frac{12}{35}+5\times\frac{8}{35}=\frac{128}{35}$$

コメント

確率の基本問題です。(2)は，鳩の巣原理を適用したように記せばよいのでしょう。

問　題

座標平面上の点 P は，硬貨を 1 回投げて表が出れば x 軸の正の方向に 2，裏が出れば y 軸の正の方向に 1 だけ進むことにする。最初，P は原点にある。硬貨を 5 回投げた後の P の到達点について，次の問いに答えよ。

(1) P の到達点が $(10,\ 0)$ となる確率を求めよ。また，$(6,\ 2)$ となる確率を求めよ。

(2) 2 点 $(10,\ 0)$，$(6,\ 2)$ を通る直線 l の方程式を求めよ。また，P の到達点はすべて直線 l 上にあることを示せ。

(3) (2)で求めた直線 l と原点との距離を求めよ。

(4) P の到達点と原点との距離 d が，$2\sqrt{5}<d\leqq 5$ となる確率を求めよ。　[2013]

解答例

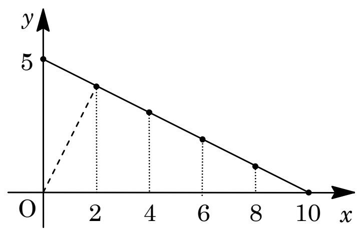
(1) 硬貨を 5 回投げた後，P の到達点が $(10,\ 0)$ となるのは表が 5 回出た場合より，その確率は，$\left(\frac{1}{2}\right)^5=\frac{1}{32}$ である。

また，到達点が $(6,\ 2)$ となるのは，表 3 回，裏 2 回出た場合より，その確率は，

$${}_5C_3\left(\frac{1}{2}\right)^3\left(\frac{1}{2}\right)^2=\frac{5}{16}$$

(2) 2 点 $(10,\ 0)$，$(6,\ 2)$ を通る直線 l の方程式は，

$$y=\frac{-2}{10-6}(x-10),\quad y=-\frac{1}{2}x+5$$



また，n を 0 以上 5 以下の整数として，表 n 回，裏 $5-n$ 回出た場合，点 P の到達点 $(x,\ y)$ は，

$$x=2n,\quad y=5-n$$

これより，$y=-\frac{1}{2}x+5$ となり，P の到達点はすべて直線 l 上にある。

(3) 直線 $l:x+2y-10=0$ と原点との距離は，$\dfrac{|-10|}{\sqrt{1^2+2^2}}=2\sqrt{5}$ である。

(4) P の到達点と原点との距離 d が，$2\sqrt{5}<d\leqq 5$ となるのは，到達点が $(0,\ 5)$ および $(4,\ 3)$ の場合だけより，その確率は，

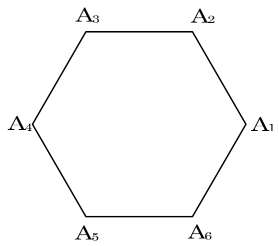
$$\left(\frac{1}{2}\right)^5+{}_5C_2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)^3=\frac{11}{32}$$

コメント

センター試験風の確率の問題ですが，難易はセンター試験より易です。

問　題

図のように頂点が A_1 から A_6 である 1 辺の長さが 2 の正六角形がある。さいころを投げて出た目 k と頂点 A_k を対応させる。さいころを 3 回投げて出た目がすべて異なるときには，対応する頂点を結んで三角形ができ，それ以外の場合には線分か点ができる。このとき，次の問いに答えよ。



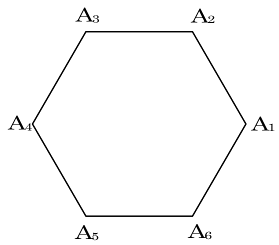
(1)　$\triangle A_1A_2A_3$，$\triangle A_1A_3A_4$，$\triangle A_1A_3A_5$ の面積をそれぞれ求めよ。

(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができない確率を求めよ。

(3)　さいころを 3 回投げたとき，$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形ができる確率を求めよ。

(4)　さいころを 3 回投げたときにできる図形の面積の期待値を求めよ。ただし，線分と点の面積は 0 とする。　[2006]

解答例



(1)　まず，$\angle A_1A_2A_3=120°$ より，

$$\triangle A_1A_2A_3=\frac{1}{2}\cdot 2\cdot 2\sin 120°=\sqrt{3}$$

$A_1A_3=2\times 2\cos 30°=2\sqrt{3}$，$\angle A_1A_3A_4=90°$ から，

$$\triangle A_1A_3A_4=\frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{3}\cdot 2=2\sqrt{3}$$

また，$\triangle A_1A_3A_5$ は正三角形なので，

$$\triangle A_1A_3A_5=\frac{1}{2}\cdot(2\sqrt{3})^2\sin 60°=3\sqrt{3}$$

(2)　さいころを 3 回投げたとき，三角形ができるのは，出た目がすべて異なる場合である。すると，この確率は，

$$\frac{{}_6P_3}{6^3}=\frac{5}{9}$$

これより，三角形ができない確率は，$1-\frac{5}{9}=\frac{4}{9}$ である。

(3)　$\triangle A_1A_2A_3$ と合同な三角形は 6 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\frac{6\times 3!}{6^3}=\frac{1}{6}$ である。

(4)　(3)と同様すると，$\triangle A_1A_3A_4$ と合同な直角三角形は $4\times 3=12$ 個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{12\times 3!}{6^3}=\dfrac{1}{3}$ である。

また，$\triangle A_1A_3A_5$ と合同な正三角形は2個存在し，それぞれの三角形について，目の出る順序が $3!$ 通りずつある。

よって，この確率は，$\dfrac{2\times 3!}{6^3}=\dfrac{1}{18}$ である。

さいころを 3 回投げたとき，この 3 種類の三角形以外は図形の面積が 0 なので，図形の面積の期待値は，

$$\sqrt{3}\times\frac{1}{6}+2\sqrt{3}\times\frac{1}{3}+3\sqrt{3}\times\frac{1}{18}=\sqrt{3}$$

コメント

有名な問題です。期待値の計算への誘導も丁寧です。

問　題

座標平面上で動点Pが, x軸の正の方向へ1進むことを文字aで表し, y軸の正の方向へ1進むことを文字bで表し, 停留することを文字cで表す。a, b, cからなる文字列が与えられたとき, 点Pは原点を出発し, その文字列に従って移動する。たとえば, 長さ4の文字列acabに対しては, 点Pは原点$(0,\ 0)$から出発して, $(1,\ 0)$, $(1,\ 0)$, $(2,\ 0)$, $(2,\ 1)$と移動し, 点$(2,\ 1)$が到達点となる。

(1) nを自然数とする。長さnの文字列のなかで, 点Pの到達点のx座標とy座標の和がnとなる文字列は何個あるか。また, その理由を説明せよ。

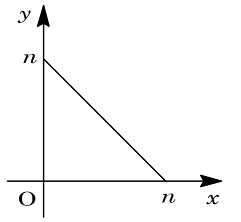
(2) k, nを自然数とし, $1 \leqq k \leqq n$とする。長さnの文字列のなかで, 点Pの到達点のx座標とy座標の和がkとなる文字列の個数を$F_n(k)$とする。$F_n(k)$をkとnを用いて表せ。

(3) 自然数nが与えられたとき, $F_n(k)$が最大になる自然数kの値を求めよ。

[2004]

解答例

(1) 動点Pが原点からn回進み, 直線$x+y=n$上に到達するのは, iを$0 \leqq i \leqq n$として, 右にi回, 上に$n-i$回だけ移動する場合である。すなわち, aがi個, bが$n-i$個, cが0個の文字列が対応し, その総数は,



$$\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!}=\sum_{i=0}^{n}{}_n\mathrm{C}_i=(1+1)^n=2^n$$

(2) (1)と同様にして, 直線$x+y=k$ $(1 \leqq k \leqq n)$上に到達するのは, jを$0 \leqq j \leqq k$として, 右にj回, 上に$k-j$回だけ移動し, 停留が$n-k$回の場合である。すなわち, aがj個, bが$k-j$個, cが$n-k$個の文字列が対応し, その総数$F_n(k)$は,

$$F_n(k)=\sum_{j=0}^{k}\frac{n!}{j!(k-j)!(n-k)!}=\sum_{j=0}^{k}\frac{k!}{j!(k-j)!}\cdot\frac{n!}{k!(n-k)!}=\sum_{j=0}^{k}{}_n\mathrm{C}_k\,{}_k\mathrm{C}_j$$
$$={}_n\mathrm{C}_k\sum_{j=0}^{k}{}_k\mathrm{C}_j={}_n\mathrm{C}_k(1+1)^k={}_n\mathrm{C}_k\cdot 2^k$$

(3) まず, $\dfrac{F_n(k+1)}{F_n(k)}=\dfrac{{}_n\mathrm{C}_{k+1}\cdot 2^{k+1}}{{}_n\mathrm{C}_k\cdot 2^k}=\dfrac{\dfrac{n!}{(k+1)!(n-k-1)!}\cdot 2^{k+1}}{\dfrac{n!}{k!(n-k)!}\cdot 2^k}=\dfrac{2(n-k)}{k+1}$となる。

そこで, $\dfrac{F_n(k+1)}{F_n(k)}>1$とすると, $2(n-k)>k+1$より$k<\dfrac{2n-1}{3}$となるので,

$$F_n(k+1)>F_n(k)\ \Leftrightarrow\ k<\frac{2n-1}{3}$$

すると，$F_n(k+1)=F_n(k) \iff k=\dfrac{2n-1}{3}$，$F_n(k+1)<F_n(k) \iff k>\dfrac{2n-1}{3}$

さて，l を自然数として，n を $n=3l$，$n=3l-1$，$n=3l-2$ の 3 つの場合に分け，$F_n(k)$が最大になるときを考える。

(i)　$n=3l$ のとき

$\dfrac{2n-1}{3}=\dfrac{6l-1}{3}=2l-\dfrac{1}{3}$ より，$k \leqq 2l-1$ のとき $F_n(k+1)>F_n(k)$，$k \geqq 2l$ のとき $F_n(k+1)<F_n(k)$ となる。

よって，$F_n(k)$ は $k=2l=2\cdot\dfrac{n}{3}=\dfrac{2}{3}n$ のときに最大になる。

(ii)　$n=3l-1$ のとき

$\dfrac{2n-1}{3}=\dfrac{6l-3}{3}=2l-1$ より，$k \leqq 2l-2$ のとき $F_n(k+1)>F_n(k)$，$k=2l-1$ のとき $F_n(k+1)=F_n(k)$，$k \geqq 2l$ のとき $F_n(k+1)<F_n(k)$ となる。

よって，$F_n(k)$ は $k=2l-1=2\cdot\dfrac{n+1}{3}-1=\dfrac{2}{3}n-\dfrac{1}{3}$ または $k=2l=\dfrac{2}{3}n+\dfrac{2}{3}$ のときに最大になる。

(iii)　$n=3l-2$ のとき

$\dfrac{2n-1}{3}=\dfrac{6l-4}{3}=2l-\dfrac{4}{3}$ より，$k \leqq 2l-2$ のとき $F_n(k+1)>F_n(k)$，$k \geqq 2l-1$ のとき $F_n(k+1)<F_n(k)$ となる。

よって，$F_n(k)$ は $k=2l-1=2\cdot\dfrac{n+2}{3}-1=\dfrac{2}{3}n+\dfrac{1}{3}$ のときに最大になる。

コメント

場合の数の最大を求める頻出問題です。ただ，n を場合分けしなくてはいけない点が，やや繁雑です。

問　題

$\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ は座標平面上のベクトルで, $\vec{a}=(0,\ 1)$, $\vec{b}=(1,\ 1)$, $\vec{c}=(1,\ -1)$ とする。$k=1,\ 2,\ 3,\ \cdots,\ n$ とし, 各 k についてベクトル $\overrightarrow{p_k}$ はベクトル $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のいずれかとする。次の問いに答えよ。

(1) $n=2$ とする。$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$ がとり得るベクトルのうち, 異なるものをすべて成分で表せ。

(2) $n=4$ とする。内積 $\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})$ がとり得る値のうち, 異なるものはいくつあるか。

(3) $n=5$ とする。順序をつけて並べた列 $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$, $\overrightarrow{p_3}$, $\overrightarrow{p_4}$, $\overrightarrow{p_5}$ で, 条件 $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}+\overrightarrow{p_5}=(4,\ 1)$ を満たすものはいくつあるか。 [1999]

解答例

(1) $\overrightarrow{p_1}$, $\overrightarrow{p_2}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のいずれかなので, $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ を 2 つ組み合わせて和を計算すると, $2\vec{a}=(0,\ 2)$, $2\vec{b}=(2,\ 2)$, $2\vec{c}=(2,\ -2)$, $\vec{a}+\vec{b}=(1,\ 2)$, $\vec{b}+\vec{c}=(2,\ 0)$, $\vec{c}+\vec{a}=(1,\ 0)$ となるので,

$$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(0,\ 2),\ (2,\ 2),\ (2,\ -2),\ (1,\ 2),\ (2,\ 0),\ (1,\ 0)$$

(2) $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(k,\ l)$ とおくと, $\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})=l$

(1)より, $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}$ の y 成分は -2 または 0 または 2 であり, また $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}$ の y 成分も -2 または 0 または 2 である。

よって, $\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}$ の y 成分, すなわち l は $l=-4,\ -2,\ 0,\ 2,\ 4$ となり, $\vec{a}\cdot(\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}+\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4})$ は異なる値を 5 つもつ。

(3) $\overrightarrow{p_5}$ は $\vec{a}$, $\vec{b}$, $\vec{c}$ のいずれかなので, これをもとに場合分けをする。

(i) $\overrightarrow{p_5}=\vec{a}$ のとき　条件より $(k,\ l)+(0,\ 1)=(4,\ 1)$ なので, $(k,\ l)=(4,\ 0)$

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ -2)$, $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 2)$ のとき, (1)より $1\times 1=1$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 0)$, $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 0)$ のとき, (1)より $2\times 2=4$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 2)$, $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ -2)$ のとき, (1)より $1\times 1=1$ 通り

したがって, $1+4+1=6$ 通り

(ii) $\overrightarrow{p_5}=\vec{b}$ のとき　条件より $(k,\ l)+(1,\ 1)=(4,\ 1)$ なので, $(k,\ l)=(3,\ 0)$

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ -2)$, $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 2)$ のとき, (1)より $1\times 2=2$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 0)$, $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 0)$ のとき, (1)より $2\times 2=4$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 0)$, $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 0)$ のとき, (1)より $2\times 2=4$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 2)$, $\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ -2)$ のとき, (1)より $2\times 1=2$ 通り

したがって，$2+4+4+2=12$ 通り

(iii) $\overrightarrow{p_5}=\vec{c}$ のとき　条件より $(k,\ l)+(1,\ -1)=(4,\ 1)$ なので，$(k,\ l)=(3,\ 2)$

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 0)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 2)$ のとき，(1)より $2\times1=2$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 0)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 2)$ のとき，(1)より $2\times2=4$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(1,\ 2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(2,\ 0)$ のとき，(1)より $2\times2=4$ 通り

$\overrightarrow{p_1}+\overrightarrow{p_2}=(2,\ 2)$，$\overrightarrow{p_3}+\overrightarrow{p_4}=(1,\ 0)$ のとき，(1)より $1\times2=2$ 通り

したがって，$2+4+4+2=12$ 通り

(i)(ii)(iii)より，$\overrightarrow{p_1}$，$\overrightarrow{p_2}$，$\overrightarrow{p_3}$，$\overrightarrow{p_4}$，$\overrightarrow{p_5}$ の順列は $6+12+12=30$ 通りある。

コメント

(1)は(2)の誘導，(2)は(3)の誘導という最初に考えた解を書きました。

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆

◆◆◆ Memorandum ◆◆◆