

6

[千葉大・文]

座標平面上に 3 点 $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ がある。線分 OB 上に 2 点 P, Q を $\angle PAQ = 90^\circ$ となるようにとる。ただし、点 Q の x 座標は点 P の x 座標より大きいものとする。 $\angle APQ = \theta$ とし、 $\triangle APQ$ の面積を S とする。

- (1) S を θ を用いて表せ。
- (2) S の最小値, およびそのときの点 P と点 Q の x 座標を求めよ。
- (3) S が $\triangle AOB$ の面積の $\frac{2}{3}$ 倍となるとき, 点 P と点 Q の x 座標を求めよ。

7

[京都大・理]

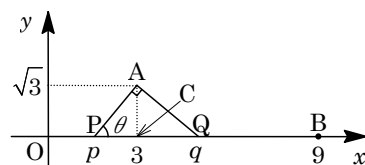
$\triangle ABC$ は鋭角三角形であり、 $\angle A = \frac{\pi}{3}$ であるとする。また $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 であるとする。

- (1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき、 $\angle BPC$ を求めよ。
- (2) $\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値の範囲を求めよ。

6

[千葉大・文]

- (1) $O(0, 0)$, $A(3, \sqrt{3})$, $B(9, 0)$ に対し, 線分 OB 上に点 $P(p, 0)$, $Q(q, 0)$ があり, $\angle PAQ = 90^\circ$ を満たしている。ただし, $0 \leq p < 3 < q \leq 9$ である。



$$\angle APQ = \theta \text{ とすると, } AP \sin \theta = \sqrt{3} \dots\dots\dots ①$$

$$AQ \sin(90^\circ - \theta) = \sqrt{3}, \quad AQ \cos \theta = \sqrt{3} \dots\dots\dots ②$$

ここで, $\triangle APQ$ の面積を S とすると, ①②から,

$$S = \frac{1}{2} AP \cdot AQ = \frac{1}{2} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\sin \theta} \cdot \frac{\sqrt{3}}{\cos \theta} = \frac{3}{\sin 2\theta}$$

- (2) まず, (1)から $S = \frac{3}{\sin 2\theta} \geq 3$ である。ここで, 等号が成立するのは $\sin 2\theta = 1$, すなわち θ は鋭角から $\theta = 45^\circ$ のときである。

このとき, $\triangle APQ$ は直角二等辺三角形となり, $C(3, 0)$ とおくと $PC = QC = \sqrt{3}$ から, P, Q はともに線分 OB 上にある。

よって, S の最小値は 3 であり, このとき P の x 座標は $3 - \sqrt{3}$, Q の x 座標は $3 + \sqrt{3}$ となる。

- (3) まず, $\triangle AOB = \frac{1}{2} \cdot 9 \cdot \sqrt{3} = \frac{9}{2} \sqrt{3}$ となり, 条件より $S = \frac{2}{3} \triangle AOB$ から,

$$\frac{3}{\sin 2\theta} = \frac{2}{3} \cdot \frac{9}{2} \sqrt{3}, \quad \sin 2\theta = \frac{1}{\sqrt{3}}, \quad \sin \theta \cos \theta = \frac{1}{2\sqrt{3}} \dots\dots\dots ③$$

ここで, $\sin^2 \theta + \cos^2 \theta = 1$ なので, ③と合わせると,

$$\frac{\sin^2 \theta + \cos^2 \theta}{\sin \theta \cos \theta} = 2\sqrt{3}, \quad \tan \theta + \frac{1}{\tan \theta} = 2\sqrt{3}, \quad \tan^2 \theta - 2\sqrt{3} \tan \theta + 1 = 0$$

よって, $\tan \theta = \sqrt{3} \pm \sqrt{2} \dots\dots\dots ④$ となる。

さて, $PC = \sqrt{3} \tan(90^\circ - \theta) = \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta}$, $QC = \sqrt{3} \tan \theta$ で, 条件から, $0 < PC \leq 3$,

$0 < QC \leq 6$ であるので,

$$0 < \frac{\sqrt{3}}{\tan \theta} \leq 3 \dots\dots\dots ⑤, \quad 0 < \sqrt{3} \tan \theta \leq 6 \dots\dots\dots ⑥$$

$$\text{⑤より } \tan \theta \geq \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad \text{⑥より } 0 < \tan \theta \leq 2\sqrt{3} \text{ となり } \frac{\sqrt{3}}{3} \leq \tan \theta \leq 2\sqrt{3}$$

すると, ④から $\tan \theta = \sqrt{3} + \sqrt{2}$ となり, このとき,

$$PC = \frac{\sqrt{3}}{\sqrt{3} + \sqrt{2}} = 3 - \sqrt{6}, \quad QC = \sqrt{3}(\sqrt{3} + \sqrt{2}) = 3 + \sqrt{6}$$

よって, P の x 座標 $3 - (3 - \sqrt{6}) = \sqrt{6}$, Q の x 座標 $3 + (3 + \sqrt{6}) = 6 + \sqrt{6}$ である。

[解 説]

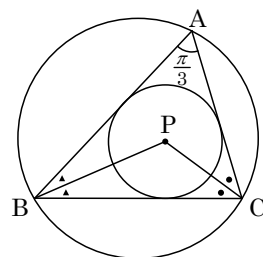
三角関数の図形への応用問題で, いろいろな解法が考えられます。

7

[京大・理]

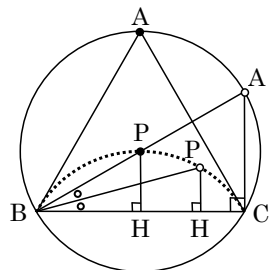
(1) $\triangle ABC$ の内心を P とするとき、

$$\begin{aligned}\angle BPC &= \pi - (\angle PBC + \angle PCB) \\ &= \pi - \frac{1}{2}(\angle ABC + \angle ACB) = \pi - \frac{1}{2}(\pi - \angle A) \\ &= \pi - \frac{1}{2}\left(\pi - \frac{\pi}{3}\right) = \frac{2}{3}\pi\end{aligned}$$

(2) $\triangle ABC$ の外接円の半径は 1 から、正弦定理より、

$$BC = 2 \sin \frac{\pi}{3} = \sqrt{3}$$

さて、 $\triangle ABC$ は $\angle A = \frac{\pi}{3}$ である鋭角三角形である。ここで、 $\triangle A_1BC$ を正三角形、 $\triangle A_2BC$ を $\angle C = \frac{\pi}{2}$ の直角三角形としたとき、対称性から一般性を失うことなく、点 A は右図の弧 A_1A_2 上を動くとしてもよい。ただし、点 A_1 は含み、点 A_2 は含まない。



また、点 P は $\angle BPC = \frac{2}{3}\pi$ から BC を弦とする点線の円弧上を動く。そして、 $A = A_1$ のとき $P = P_1$ 、 $A = A_2$ のとき $P = P_2$ とする。さらに、 P_1 から BC に垂線 P_1H_1 、 P_2 から BC に垂線 P_2H_2 を引く。

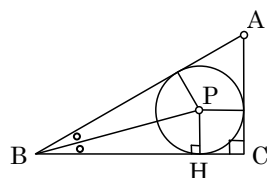
すると、 $\triangle ABC$ の内接円の半径 r のとりうる値は、 $P_2H_2 < r \leq P_1H_1$ である。

そこで、 $\angle P_1BH_1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{\pi}{3} = \frac{\pi}{6}$ から、 $P_1H_1 = \frac{1}{2}BC \cdot \tan \frac{\pi}{6} = \frac{\sqrt{3}}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{2}$

また、 $\triangle A_2BC$ は、 $AB = 2$ 、 $AC = 1$ 、 $BC = \sqrt{3}$ なので、右図から、

$$(\sqrt{3} - P_2H_2) + (1 - P_2H_2) = 2, \quad P_2H_2 = \frac{\sqrt{3} - 1}{2}$$

以上より、 $\frac{\sqrt{3} - 1}{2} < r \leq \frac{1}{2}$ である。



[解 説]

平面図形の計量についての基本的な問題です。(1)の誘導により、内心の軌跡が導けます。