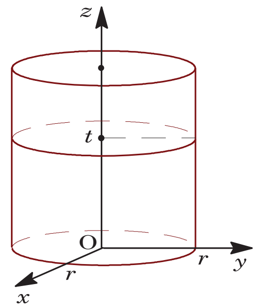
第 4 講　円柱面と円錐面の方程式



座標軸を中心軸とする直円柱面の方程式を考えます。このとき，中心軸に垂直な切り口は，底面と同じ半径の円になります。

ここで，z 軸を中心軸とし，底面の円の半径が r の円柱について，その円柱面の方程式を立てます。

平面 $z=t$ でこの円柱を切断したとき，その切り口の円は，この平面と点 $(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 r の球面の交線として表されます。

$$x^2+y^2+(z-t)^2=r^2,\quad z=t$$

パラメータ t を消去すると，この円柱面の方程式は，

$$x^2+y^2=r^2$$

円柱面の方程式

原点を中心とする半径 r の円を底面とし，z 軸を中心軸とする円柱面の方程式

$$x^2+y^2=r^2$$

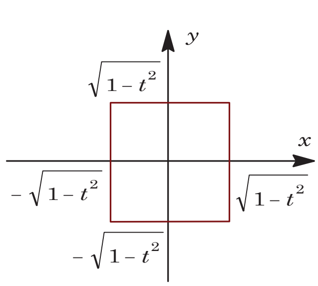
《注》「z は任意」という記述は省略されています。

例題 7　断面が半径 1 の円である直円柱が 2 つある。1 つは中心軸が x 軸，もう 1 つは中心軸が y 軸になるように配置されている。この 2 つの円柱の共通部分を z 軸に垂直な平面で切断すると，その切り口は正方形であることを示せ。

解　中心軸が x 軸，y 軸の直円柱は，それぞれ，

$$y^2+z^2=1\ \cdots\cdots\cdots ①,\quad x^2+z^2=1\ \cdots\cdots\cdots ②$$

円柱の共通部分は，連立方程式①かつ②で表される。



この部分を，z 軸に垂直な平面 $z=t$ ……③で切断する。ただし，$-1<t<1$ とする。

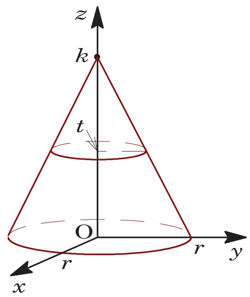
③を①②に代入すると，$y^2+t^2=1$，$x^2+t^2=1$

$$x=\pm\sqrt{1-t^2},\quad y=\pm\sqrt{1-t^2}$$

よって，平面 $z=t$ 上での切り口は，1 辺の長さが $2\sqrt{1-t^2}$ の正方形である。

　次に，座標軸を中心軸とする直円錐面の方程式を考えます。このとき，円錐の軸に垂直な切り口は円になります。

　ここで，z 軸を中心軸とし，頂点$(0,\ 0,\ k)$，底面の円の半径が r の円錐について，その円錐面の方程式を立てます。



　平面 $z=t$ で切断したとき，その切り口の円は，この平面と点$(0,\ 0,\ t)$を中心とする球面との交線として表されます。

$k>0$ のとき，この球面の半径を r' とおくと，

$$r' : r = (k-t) : k\ ,\quad r' = \frac{(k-t)r}{k}$$

　すると，切り口の円の方程式は，$x^2+y^2+(z-t)^2 = \dfrac{(k-t)^2 r^2}{k^2}$，$z=t$

　パラメータ t を消去すると，この円錐面の方程式は，

$$x^2+y^2 = \frac{(k-z)^2 r^2}{k^2},\quad k^2(x^2+y^2) = r^2(z-k)^2$$

円錐面の方程式

原点を中心とする半径 r の円を底面とし，頂点$(0,\ 0,\ k)$の円錐面の方程式

$$k^2(x^2+y^2) = r^2(z-k)^2$$

《注》円錐の頂点を $\mathrm{K}(0,\ 0,\ k)$，円錐面上の任意の点を$\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$とし，母線と中心軸のなす角を θ とおくと，

$$\overrightarrow{\mathrm{KO}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{KP}} = |\overrightarrow{\mathrm{KO}}||\overrightarrow{\mathrm{KP}}|\cos\theta$$

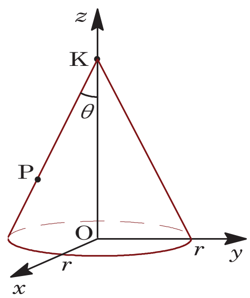
　ここで，母線の長さが $\sqrt{k^2+r^2}$ より，

$$\cos\theta = \frac{k}{\sqrt{k^2+r^2}}$$

　また，$\overrightarrow{\mathrm{KO}} = (0,\ 0,\ -k)$，$\overrightarrow{\mathrm{KP}} = (x,\ y,\ z-k)$より，

$$-k(z-k) = k\sqrt{x^2+y^2+(z-k)^2}\cdot\frac{k}{\sqrt{k^2+r^2}}$$

$$-(z-k)\sqrt{k^2+r^2} = k\sqrt{x^2+y^2+(z-k)^2}$$



　$z \leqq k$ より，両辺を 2 乗してまとめると，

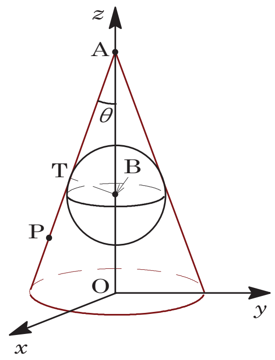
$$(z-k)^2(k^2+r^2) = k^2\{x^2+y^2+(z-k)^2\}$$

$$k^2(x^2+y^2) = r^2(z-k)^2$$

　このように，内積の定義を用いて，円錐面の方程式を立式することもできます。

例題 8　点 $A(0,\ 0,\ 5)$ を通り，球面 $S : x^2+y^2+(z-2)^2=1$ に接する直線全体によってできる円錐面の方程式を求めよ。

解　球面 S の中心を $B(0,\ 0,\ 2)$，S と直線の接点を T，母線と中心軸のなす角を θ とおくと，



$$\cos\theta=\frac{\mathrm{AT}}{\mathrm{AB}}=\frac{\sqrt{3^2-1^2}}{3}=\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

ここで，円錐面上の任意の点を $P(x,\ y,\ z)$ とすると，

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AP}}=|\overrightarrow{\mathrm{AB}}||\overrightarrow{\mathrm{AP}}|\cos\theta$$

$\overrightarrow{\mathrm{AB}}=(0,\ 0,\ -3)$，$\overrightarrow{\mathrm{AP}}=(x,\ y,\ z-5)$ より，

$$-3(z-5)=3\sqrt{x^2+y^2+(z-5)^2}\cdot\frac{2\sqrt{2}}{3}$$

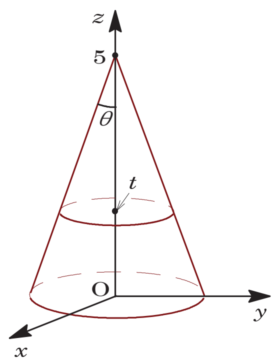
$z\leqq 5$ より，両辺を 2 乗してまとめると，

$$9(z-5)^2=8\{x^2+y^2+(z-5)^2\}$$

$$8x^2+8y^2=(z-5)^2$$

《注》z 軸に垂直な断面が円であることに注目すると，次のようになります。

まず，母線と中心軸のなす角を θ とおくと，



$$\tan\theta=\frac{\mathrm{BT}}{\mathrm{AT}}=\frac{1}{2\sqrt{2}}$$

円錐面を平面 $z=t$ で切断すると，その切り口の円の半径は，

$$(5-t)\tan\theta=\frac{5-t}{2\sqrt{2}}$$

すると，この円は，点 $(0,\ 0,\ t)$ を中心とする半径 $\dfrac{5-t}{2\sqrt{2}}$ の球面と，平面 $z=t$ との交線として表され，

$$x^2+y^2+(z-t)^2=\left(\frac{5-t}{2\sqrt{2}}\right)^2,\quad z=t$$

パラメータ t を消去すると，この円錐面の方程式は，

$$x^2+y^2=\frac{(5-z)^2}{8},\quad 8x^2+8y^2=(z-5)^2$$

問題 7

球面$S : x^2 + y^2 + (z-2)^2 = 4$を平面$\alpha : y + z = 1$で切断したとき，切り口にできる円を$xy$平面に正射影する。このとき, xy平面上の曲線の方程式を求めよ。

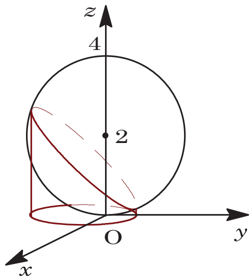
問題 8

底面の円の半径が 2，高さが 4 の直円錐が，頂点を原点 O とし，中心軸が半直線$x = 0$， $y = z\ (z \geqq 0)$になるように配置されている。この直円錐を平面$z = 1$で切断すると，その切り口は楕円になることを示せ。

Back

第4講　円柱面と円錐面の方程式

問題7



球面 S と平面 α の交わりの円は，S と α の連立方程式で表される。

$$x^2+y^2+(z-2)^2=4\cdots\cdots①,\quad y+z=1\cdots\cdots②$$

②を $z=1-y$ として，①に代入すると，

$$x^2+y^2+(1-y-2)^2=4$$

$$x^2+2y^2+2y=3\cdots\cdots③$$

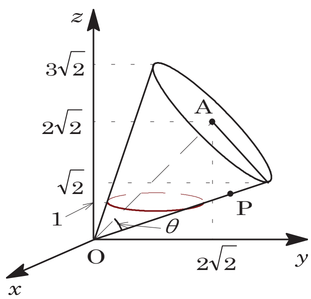
連立方程式①かつ②と，連立方程式②かつ③は同値なので，

③は S と α の交わりの円を含み，z 軸に平行な立体（楕円柱面）を表す。

すると，切り口にできる円を xy 平面に正射影したときに得られる曲線は，この楕円柱面と xy 平面との交線として表されるので，その方程式は，

$$x^2+2y^2+2y=3,\quad z=0$$

問題8



底面の円の中心 A は半直線 $x=0$，$y=z\ (z\geqq 0)$ 上にあり，$\mathrm{OA}=4$ より，$\mathrm{A}(0,\ 2\sqrt{2},\ 2\sqrt{2})$ となる。

また，円錐面上の任意の点を $\mathrm{P}(x,\ y,\ z)$ とし，$\angle\mathrm{AOP}=\theta$ とおくと，

$$\tan\theta=\frac{2}{4}=\frac{1}{2},\quad \cos\theta=\frac{2}{\sqrt{5}}$$

ここで，$\overrightarrow{\mathrm{OA}}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OP}}=|\overrightarrow{\mathrm{OA}}||\overrightarrow{\mathrm{OP}}|\cos\theta$ より，

$$2\sqrt{2}y+2\sqrt{2}z=4\sqrt{x^2+y^2+z^2}\cdot\frac{2}{\sqrt{5}}$$

$$\sqrt{10}(y+z)=4\sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

$y+z\geqq 0$ より，両辺を2乗してまとめると，円錐面の方程式は，

$$5(y+z)^2=8(x^2+y^2+z^2)\cdots\cdots\cdots①$$

さて，平面 $z=1\cdots\cdots②$ との交わりの曲線は，連立方程式①かつ②で表される。

②を①に代入すると，$5(y+1)^2=8(x^2+y^2+1)$

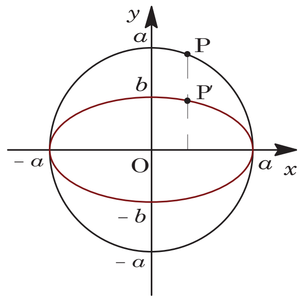
$$8x^2+3y^2-10y+3=0,\quad \frac{3}{2}x^2+\frac{9}{16}\left(y-\frac{5}{3}\right)^2=1\cdots\cdots\cdots③$$

連立方程式①かつ②と，連立方程式②かつ③は同値より，平面 $z=1$ 上での切り口は，短軸の長さ $2\times\sqrt{\dfrac{2}{3}}=\dfrac{2\sqrt{6}}{3}$，長軸の長さ $2\times\sqrt{\dfrac{16}{9}}=\dfrac{8}{3}$ の楕円となる。

《注》楕円の方程式

中心が原点，半径が a の円の方程式は，

$$x^2+y^2=a^2 \cdots\cdots\cdots ①$$



この円を y 軸方向に $\dfrac{b}{a}$ 倍して，①上の任意の点 P$(x,\ y)$が点P′$(x',\ y')$に移ったとすると，

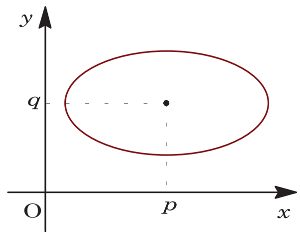
$$x'=x,\quad y'=\frac{b}{a}y \cdots\cdots\cdots ②$$

②より，$x=x'$，$y=\dfrac{a}{b}y'$ となり，①に代入すると，

$$x'^2+\left(\frac{a}{b}y'\right)^2=a^2,\quad \frac{x'^2}{a^2}+\frac{y'^2}{b^2}=1$$

よって，中心が原点，長軸の長さが $2a$，短軸の長さが $2b$ の楕円の方程式は，

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}=1 \cdots\cdots\cdots ③$$



また，③を x 軸方向に p，y 軸方向に q だけ平行移動すると，中心が$(p,\ q)$，長軸の長さが $2a$，短軸の長さが $2b$ の楕円となり，その方程式は，

$$\frac{(x-p)^2}{a^2}+\frac{(y-q)^2}{b^2}=1$$

楕円は数学 C の範囲ですが，問題 7 と問題 8 では上記の知識も用いています。