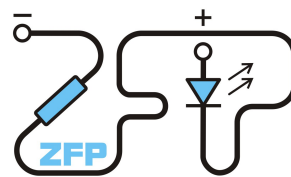


Kabinet výuky obecné fyziky, UK MFF

## Fyzikální praktikum IV



Úloha č. A7

Název úlohy: Pozitronová emisní tomografie

Jméno: Kateřina Rosická

Datum měření: 5. října 2021

Připomínky opravujícího:

	Možný počet bodů	Udělený počet bodů
Teoretická část	0–2	
Výsledky a zpracování měření	0–9	
Diskuse výsledků	0–4	
Závěr	0–1	
Použitá literatura	0–1	
<b>Celkem</b>	max. 17	

Posuzoval:

dne:

# Pracovní úkol

## *Měření s jedním zářičem*

1. Poté, co vyučující umístí silnější zářič  $^{22}\text{Na}$  do stojánku, změřte úhlové rozdělení koincidencí v oblasti úhlů potřebné pro nalezení polohy zářiče, doba měření 20 s. Vysvětlete tvar naměřeného úhlového rozdělení, získané poznatky využijte při domácím zpracování.
2. Změřte četnost koincidencí pro úhly  $\Phi = 60^\circ, 90^\circ, 120^\circ$  bez plechu a  $120^\circ$  s Pb plechem mezi detektory, doba měření 100 s. Vysvětlete pozorované četnosti.

## *Měření se dvěma zářiči*

3. Poté, co vyučující přidá do krabičky druhý zářič, změřte úhlové rozdělení koincidencí s krokem  $5^\circ$ .
4. Zvolte aspoň 2 další vhodné úhly otočení krabičky  $\Psi$  a opakujte měření 3).
5. Narýsujte přímky spojující detektory do obrázku připraveného u úlohy a odečtěte polohu průsečíku - polohu zářiče vůči krabičce. Pozn.: Při volbě otočení krabičky  $\Psi$  se můžete řídit polohou už zakreslených průsečíků.
6. Vzdálenost detektoru od zářiče zakresleného na obrázku porovnejte s měřením skutečné vzdálenosti.

## *Při domácím zpracování dat*

7. Polohy zářičů vůči krabičce určujte pomocí vztahů a metod popsanych v návodu. Podle výsledků zpracování nakreslete obrázky analogické k obrázkům narýsovaným během praktika. Chyby polohy zářičů určete graficky.

## Teorie

### Anihilace pozitronu

Pozitronová emisní tomografie je zobrazovací technika využívající se v lékařství. Je založena na zavedení radiofarmaka - beta plus zářiče - do tkáně, kde emituje pozitron, který ve tkáni uletí několik desetin milimetru, než anihiluje s elektronem. Ze zákona zachování energie pak mají vznikající kvanta gamma záření energii rovnou součtu klidových energií elektronu a pozitronu a ze zákona zachování hybnosti pak mají opačně orientované hybnosti a shodnou energii 511 MeV.

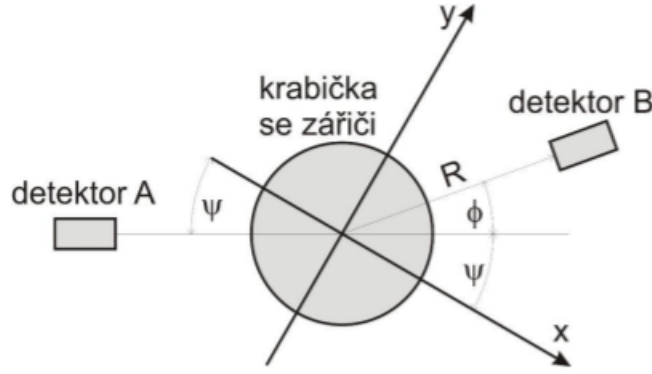
### Koincidenční měření

Měření jsme prováděli takzvaným koincidenčním měřením, které detekuje impuls pouze tehdy, když na obou detektorech jsou detekovány impulzy s časovým rozdílem menším než nastavený interval, který pro naše měření byl přibližně  $\tau = 0,8 \mu\text{s}$ . Anihilační měření zde využíváme právě proto, abychom na detektoru rozlišili fotony pocházející ze stejného rozpadu, využijeme právě koincidenční měření. To však může kromě skutečného signálu detekovat i náhodné koincidence, a to s četností  $N_a = 2N_1N_2\tau$ , kde  $N_1$  a  $N_2$  jsou četnosti signálů na jednotlivých detektorech.

### Experimentální uspořádání

V experimentu používáme lebku se zářiči obklopenou dvěma detektory A a B, s tím, že detektor A je pevně umístěn na podložku, krabička otáčíme o úhel  $\Psi$  a detektor B otáčíme o úhel  $\Phi$ . Uspořádání můžeme vidět na obrázku 1. Pro polohy detektorů pak v soustavě souřadnic spojených s lebkou platí:

$$\begin{aligned}x_A &= -R \cos \Psi & x_B &= R \cos (\Psi + \Phi) \\y_A &= -R \sin \Psi & y_B &= R \sin (\Psi + \Phi)\end{aligned}$$



Obrázek 1: Experimentální uspořádání, převzato z [1]

Nejistoty těchto poloh určíme metodou přenosu chyb pomocí nejistoty měření vzdálenosti  $\sigma(R)$  a nejistot úhlů  $\sigma(\Psi)$  a  $\sigma(\Phi)$ :

$$\begin{aligned}\sigma(X) &= \sqrt{\left(\frac{\partial X}{\partial R}\sigma(R)\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \Psi}\sigma(\Psi)\right)^2 + \left(\frac{\partial X}{\partial \Phi}\sigma(\Phi)\right)^2} \\ \sigma(x_A) &= \sqrt{(-\cos \Psi \sigma(R))^2 + (R \sin \Psi \sigma(\Psi))^2} \\ \sigma(x_B) &= \sqrt{(-\cos \Psi \sigma(R))^2 + (R \sin \Psi + \Phi \sigma(\Psi))^2 + (R \sin \Psi + \Phi \sigma(\Phi))^2} \\ \sigma(y_A) &= \sqrt{(-\sin \Psi \sigma(R))^2 + ((-R \cos \Psi \sigma(\Psi)))^2} \\ \sigma(y_B) &= \sqrt{(-\sin \Psi \sigma(R))^2 + ((-R \cos \Psi + \Phi \sigma(\Psi)))^2 + ((-R \cos \Psi + \Phi \sigma(\Phi)))^2}\end{aligned}$$

Rovnice přímky spojující oba detektory pak má tvar [1]

$$(y_B - y_A)x - (x_B - x_A)y = (y_B - y_A)x_A - (x_B - x_A)y_A \quad (1)$$

## Určení polohy zářičů

Protože předpokládáme, že maximum nastává v okamžiku, kdy je zářič přesně mezi detektory, můžeme určit polohu zářičů pomocí průsečíků přímek, na kterých se zářiče nacházejí. Toto je pro jeden zářič jednoznačné již pro dvě přímky, pro více zářičů máme víc průsečíků a musíme tedy o poloze zářičů rozhodovat z více přímek, případně z tvaru signálů. Pro dvě přímky s předpisy

$$\begin{aligned}a_{11}x + a_{12}y &= b_1 \\ a_{21}x + a_{22}y &= b_2\end{aligned} \quad (2)$$

$$(3)$$

určíme souřadnice jejich průsečíku pomocí Cramerova pravidla jako [1]

$$\begin{aligned}x &= \frac{b_1 a_{22} - b_2 a_{12}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}} \\ y &= \frac{b_2 a_{11} - b_1 a_{21}}{a_{11} a_{22} - a_{21} a_{12}}\end{aligned} \quad (4)$$

$$(5)$$

Pro odchylky koeficientů a poloh průsečíků pak platí (polohy detektorů dvou přímek rozlišujeme dolními idexy):

$$\begin{aligned}
\sigma(a_{11}) &= \sqrt{(y_{B1})^2 + (y_{A1})^2} \\
\sigma(a_{12}) &= \sqrt{(x_{B1})^2 + (x_{A1})^2} \\
\sigma(a_{21}) &= \sqrt{(y_{B2})^2 + (y_{A2})^2} \\
\sigma(a_{22}) &= \sqrt{(x_{B2})^2 + (x_{A2})^2} \\
\sigma(b_1) &= \sqrt{(a_{11}\sigma(x_{A1}))^2 + (x_{A1}\sigma(a_{11}))^2 + (a_{12}\sigma(y_{A1}))^2 + (y_{A1}\sigma(a_{12}))^2} \\
\sigma(b_2) &= \sqrt{(a_{21}\sigma(x_{A2}))^2 + (x_{A2}\sigma(a_{21}))^2 + (a_{22}\sigma(y_{A2}))^2 + (y_{A2}\sigma(a_{22}))^2} \\
\sigma(D = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) &= \sqrt{(a_{11}\sigma(a_{22}))^2 + (a_{22}\sigma(a_{11}))^2 + (a_{12}\sigma(a_{21}))^2 + (a_{21}\sigma(a_{12}))^2} \\
\sigma(x) &= \frac{1}{|D|} \sqrt{(a_{22}\sigma(b_1))^2 + (b_1\sigma(a_{22}))^2 + (a_{12}\sigma(b_2))^2 + (b_2\sigma(a_{12}))^2 + (x\sigma(D))^2} \\
\sigma(y) &= \frac{1}{|D|} \sqrt{(a_{11}\sigma(b_2))^2 + (b_2\sigma(a_{11}))^2 + (a_{21}\sigma(b_1))^2 + (b_1\sigma(a_{21}))^2 + (y\sigma(D))^2}
\end{aligned}$$

## Výsledky měření

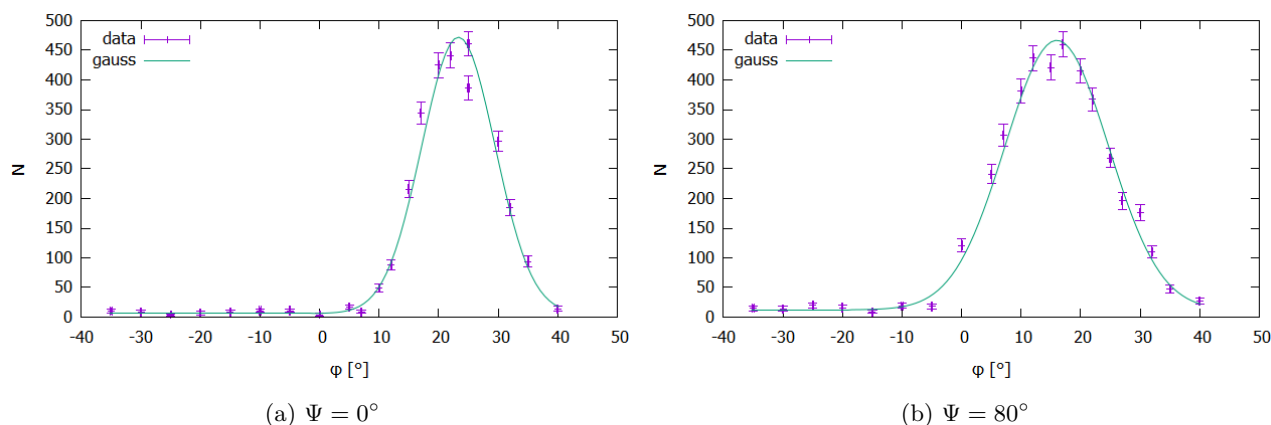
### Měření s jedním zářičem

Měření jsme nejprve prováděli pouze s jedním zářičem v maketě lebky, a to nejprve pro úhel  $\Psi = 0^\circ$  a poté pro úhel  $\Phi = 80^\circ$  pro oba pro rozmezí úhlů  $\Phi$  od  $-35^\circ$  do  $40^\circ$ , protože v té oblasti se mezi detektory ještě nacházela lebka a to se skokem  $5^\circ$  v plném rozsahu a pro poloviční dílek v oblasti nárůstu měřených hodnot. Naměřené hodnoty jsou zapsány v tabulce 1 a zakresleny v grafech na obrázcích 2a a 2b.

Tabulka 1: Naměřené hodnoty koincidencí pro měření s jedním zářičem

$\Psi = 0^\circ$			$\Psi = 80^\circ$		
$\frac{\Phi}{^\circ}$	n	$\sigma(n)$	$\frac{\Phi}{^\circ}$	n	$\sigma(n)$
-35	10	3	-35	15	4
-30	9	3	-30	14	4
-25	3	2	-25	20	4
-20	7	3	-20	16	4
-15	9	3	-15	9	3
-10	11	3	-10	19	4
-5	11	3	-5	18	4
0	4	2	0	121	11
5	17	4	5	241	16
7,5	9	3	7,5	307	18
10	49	7	10	381	20
12,5	88	9	12,5	437	21
15	216	15	15	421	21
17,5	344	19	17,5	460	21
20	425	21	20	415	20
22,5	441	21	22,5	367	19
25	461	21	25	268	16
25,5	386	20	27,5	196	14
30	296	17	30	176	13
32,5	185	14	32,5	110	10
35	94	10	35	47	7
40	14	4	40	27	5

Jelikož počet detekcí v časovém intervalu  $t$  je náhodný jev řídicí se Poissonovým rozdělením, určíme nejistotu každého bodu jako odmocninu z naměřené hodnoty. Úhly byly měněny otáčením ramenem s úhlovou stupnicí, ze které bylo možné odečítat úhel na desítky minut, nejistota měření úhlu tedy byla  $5' \doteq 0,1^\circ$ . Závislost by teoreticky měla mít podobu funkce vyjadřující plochu překryvu dvou kruhových detektorů v závislosti na



Obrázek 2: Úhlové rozdělení koincidencí pro měření s jedním zářičem

úhlu. Protože jsou však plochy detektorů dostatečně velké, můžeme tuto funkci aproximovat Gaussovou funkcí. Prokládáme tedy naměřenou závislost funkcí

$$N(\Phi) = A \cdot e^{-\frac{(\Phi-B)^2}{C}} + D.$$

Fitování jsme prováděli pomocí programu GNUPLOT se zahrnutím jednotlivých nejistot a získané hodnoty uvedli do tabulky 2. Parametr A zde má význam maximální incidence, parametr B maxima rozložení, parametr

Tabulka 2: Získané fitovací konstanty pro měření s jedním zářičem

	$\Psi = 0^\circ$	$\Psi = 80^\circ$
A	$466 \pm 19$	$454 \pm 17$
B	$23,3 \pm 0,2$	$16,0 \pm 0,3$
C	$76 \pm 5$	$156 \pm 10$
D	$6 \pm 2$	$12 \pm 3$

C je dvojnásobek rozptylu  $C = 2\sigma^2$  a parametr D je přirozené pozadí náhodných koincidencí. Rozptyl je pro druhé měření na  $\Psi = 80^\circ$  větší, což může být způsobeno větší blízkostí zdroje k jednomu z detektorů, díky které mají detektory zdroj „mezi sebou“ pro větší prostorový úhel.

Maximum rozložení se tedy pro úhel  $\Psi_1 = (0 \pm 0,1)^\circ$  bylo  $\Phi_1 = (23,3 \pm 0,2)^\circ$  a pro úhel  $\Psi_2 = (80,0 \pm 0,1)^\circ$  bylo  $\Phi_1 = (16,0 \pm 0,3)^\circ$ . Z těch můžeme pomocí vzorců (1), (2), (3), (4) a (5). vypočítat polohu zářiče, pro vzdálenost  $R = (15,0 \pm 0,3)$  cm které byla  $x = (2,5 \pm 0,2)$  cm a  $y = (3,60 \pm 0,09)$  cm.

## Jeden zářič velké úhly

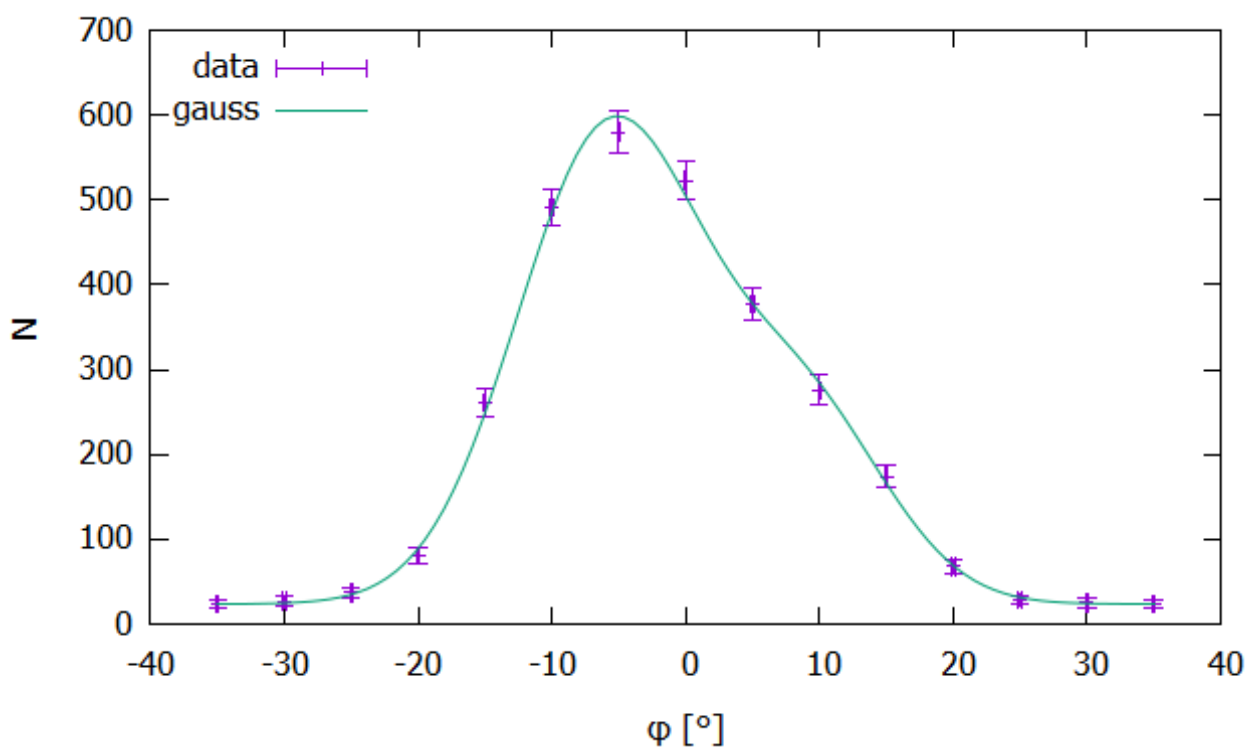
Při měření koincidencí pro velké úhly (při kterých není lebka mezi detektory, tudíž nemůže docházet k pravým koincidencím) jsme pro měření po dobu 100 s dostali hodnotu  $90 \pm 9$  záchytů pro úhel  $\Phi = 90^\circ$  avšak pro úhel  $\Phi = 150^\circ$  jsme dostali  $277 \pm 17$  záchytů. Při zachování úhlu  $\Phi = 150^\circ$  a položení plechu mezi detektory byla naměřena hodnota  $129 \pm 11$ . U všech měření byla nejistota určena jako odmocnina z naměřené hodnoty, protože počet záchytů má Poissonovské rozdělení. Nejistota měření úhlu je opět  $0,1^\circ$ .

## Dva zářiče

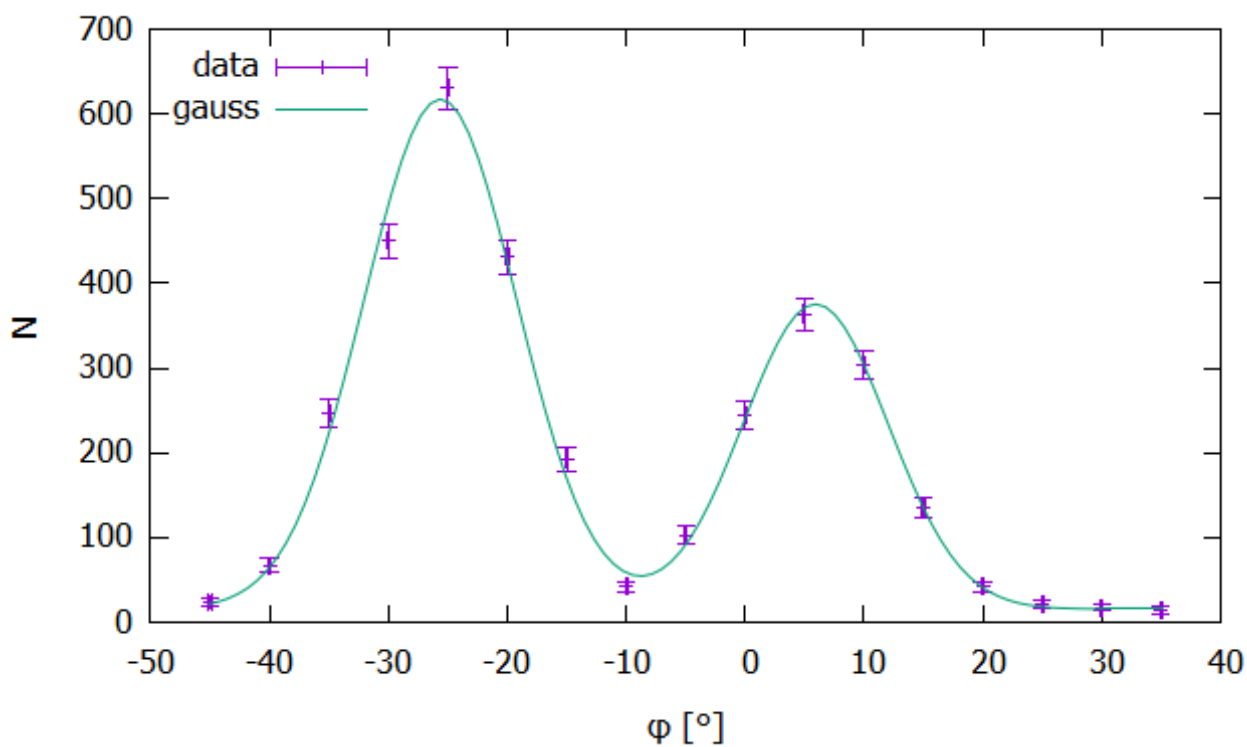
Pro měření se dvěma zářiči byla opět použita doba měření 20 s a byly měřeny rozsahy úhlů  $\Phi$  od  $-35^\circ$  po  $35^\circ$  pro  $\Psi = 0^\circ$ , od  $-45^\circ$  po  $35^\circ$  pro  $\Psi = -90^\circ$  a pro poslední měření pro  $\Psi = 60^\circ$  již byly měřeny pouze okolí předpokládaných peaků. Všechna měření byla prováděna s krokem  $5^\circ$  a nejistota jednotlivých měření byla určena jako odmocnina z naměřené hodnoty koincidencí. Naměřené hodnoty jsou uvedeny v tabulce 3 jednotlivé závislosti zakresleny v grafech na obrázcích 3, 4 a 5. Tvar maxim byl opět v přiblížení považován za Gaussovo rozdělení, tudíž byly naměřené hodnoty v programu GNUPLOT fitovány součtem dvou normálních rozdělení ve tvaru

$$N(\Phi) = A \cdot e^{-\frac{(\Phi-B)^2}{C}} + D \cdot e^{-\frac{(\Phi-E)^2}{F}} + G.$$

Získané hodnoty parametrů pro jednotlivé grafy jsou uvedeny v tabulce 4. Z parametrů B a E jsme tedy získali polohy maxim, kdy po spárování aktivního zářiče s většími peaky a méně aktivního zářiče s menšími peaky dostaneme s využitím vztahů (1), (2), (3), (4) a (5). polohy obou zářičů X a Y. Ty vypočítáme vždy jako



Obrázek 3: Úhlové rozdělení koincidencí pro měření se dvěma zářiči pro  $\Psi = 0^\circ$



Obrázek 4: Úhlové rozdělení koincidencí pro měření se dvěma zářiči pro  $\Psi = -90^\circ$

Tabulka 3: Naměřené hodnoty koincidencí pro měření se dvěma zářiči

	$\Psi = 0^\circ$		$\Psi = -90^\circ$		$\Psi = 60^\circ$	
$\frac{\Phi}{^\circ}$	$n$	$\sigma(n)$	$n$	$\sigma(n)$	$n$	$\sigma(n)$
-45	-	-	23	5	-	-
-40	-	-	67	8	-	-
-35	23	5	247	16	-	-
-30	27	5	450	21	-	-
-25	37	6	631	25	-	-
-20	80	9	431	21	121	11
-15	261	16	193	14	255	16
-10	491	22	42	6	353	19
-5	580	24	103	10	333	18
0	523	23	245	16	197	14
5	378	19	364	19	-	-
10	276	17	304	17	-	-
15	174	13	135	12	232	15
20	68	8	42	6	422	21
25	29	5	21	5	590	24
30	25	5	17	4	506	22
35	24	5	14	4	249	16

Tabulka 4: Získané hodnoty fitovacích parametrů pro měření se dvěma zářiči

koeficient	$\Psi = 0^\circ$	$\Psi = -90^\circ$	$\Psi = 60^\circ$
A	$558 \pm 23$	$602 \pm 24$	$330 \pm 66$
B	$-5,7 \pm 0,6$	$-25,6 \pm 0,2$	$-8,4 \pm 0,3$
C	$96 \pm 9$	$82 \pm 5$	$100 \pm 41$
D	$222 \pm 29$	$360 \pm 20$	$553 \pm 69$
E	$8,9 \pm 1,2$	$5,9 \pm 0,3$	$25,6 \pm 0,2$
F	$78 \pm 14$	$75 \pm 7$	$100 \pm 23$
G	$24 \pm 2$	$16 \pm 3$	$36 \pm 72$

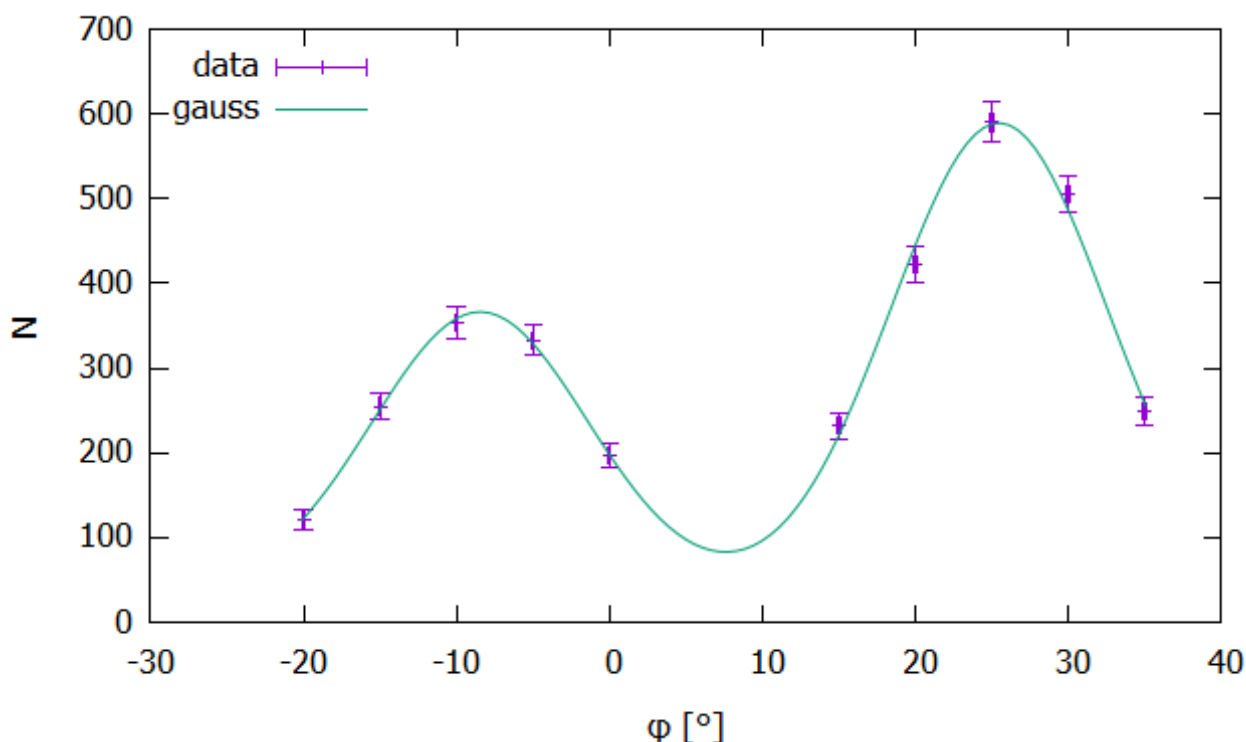
průsečíky každé dvojice přímk, tedy pro každý zářič máme tři polohy. Ty byly v rámci chyby stejné, tudíž můžeme za výsledek považovat jejich aritmetický průměr, tedy:

$$\begin{aligned}
 X_1 &= [-3, 2 \pm 0, 1; 0, 9 \pm 0, 2] \text{ cm} \\
 X_2 &= [-3, 2 \pm 0, 6; 0, 9 \pm 2, 1] \text{ cm} \\
 X_3 &= [-3, 2 \pm 0, 2; 0, 9 \pm 0, 2] \text{ cm} \\
 X &= [-3, 2 \pm 0, 3; 0, 9 \pm 0, 2] \text{ cm} \\
 Y_1 &= [0, 81 \pm 0, 03; -0, 8 \pm 0, 1] \text{ cm} \\
 Y_2 &= [0, 8 \pm 0, 1; -0, 8 \pm 0, 3] \text{ cm} \\
 Y_3 &= [0, 8 \pm 0, 2; -0, 8 \pm 0, 1] \text{ cm} \\
 Y &= [0, 8 \pm 0, 1; -0, 8 \pm 0, 2] \text{ cm}
 \end{aligned}$$

## Diskuse

Úhlové rozdělení počtu koincidencí pro měření s jedním zářičem sice není přímo Gaussova funkce, ale vzorkování je tak málo husté a měření nepřesná, takže s ní můžeme bez problémů rozdělení aproximovat. Zároveň vidíme, že šířka peaku závisí na vzdálenosti zářiče od detektoru A, čím je zářič blíže, tím má peak širší. Měření bychom mohli zpřesnit opakováním měření, hustším vzorkováním nebo delším časem měření.

Pro měření v úhlech, které nemohou odpovídat pravé koincidenci z beta rozpadu se naměřená hodnota zvyšovala. To může být způsobené takzvaným „cross talk“, tedy komunikací detektorů mezi sebou, kdy fotony comptonovsky rozptýlené na jednom detektoru jsou zachyceny druhým detektorem, což se děje častěji právě kvůli tomu, že se detektory navzájem vidí pod větším prostorovým úhlem. To jsme ověřili tím, že jsme mezi



Obrázek 5: Úhlové rozdělení koincidencí pro měření se dvěma zářiči pro  $\Psi = 60^\circ$

detektory umístili olověný plech, který zachytil rozptýlené fotony a tedy zabránil vzájemné komunikaci detektorů a koincidence se snížila.

Pro měření se dvěma zářiči byly pro první měření zářiče téměř v přímce, tedy jsou oba peaky špatně rozeznatelné a jejich parametry spíše odhadujeme dosazením výchozích parametrů fitu. Všechny tři přímky identifikované ke stejnému zářiči se protínají v rámci chyby v jednom bodě, tedy můžeme polohu zářiče jednoznačně identifikovat, avšak s velkou relativní chybou. Vypočtené polohy zářičů odpovídají polohám získaných graficky pomocí zakreslení do obrázku v rámci praktika i odtajněnému rozložení zářičů v lebce.

## Závěr

Měření úhlového rozdělení pro jeden zářič vykazovalo jedno maximum ve tvaru aproximovatelném Gaussovou křivkou, kterou jsme také prokládali. Pro měření s jedním zářičem jsme zjistili jeho polohu jako  $[2, 5 \pm 0, 2; 3, 60 \pm 0, 09]$  cm. Při měření pro větší úhly  $\Phi$  byl pozorován Comptonův rozptyl, což bylo potvrzeno odstíněním jeho efektu vložením olověného plechu mezi detektory. Pro měření se dvěma zářiči byly naměřena tři úhlová rozložení pro různé úhly  $\Psi$  a identifikovány polohy zářičů jako  $[-3, 2 \pm 0, 3; 0, 9 \pm 0, 2]$  cm a  $[0, 8 \pm 0, 1; -0, 8 \pm 0, 2]$  cm, což odpovídalo polohám zjištěným graficky.

## Literatura

- [1] Studijní text fyzikální praktikum, úloha A7 - Pozitronová emisní tomografie, dostupné z: [https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/\\_media/zadani/texty/txt\\_407.pdf](https://physics.mff.cuni.cz/vyuka/zfp/_media/zadani/texty/txt_407.pdf), citováno 17. října 2021