

UNIVERSIDADE DE SÃO PAULO
ESCOLA DE ENGENHARIA DE SÃO CARLOS
MESTRADO EM ENGENHARIA DE ESTRUTURAS

MAYCON DOS REIS ROSÁRIO

RELATÓRIO 2
PLASTICIDADE

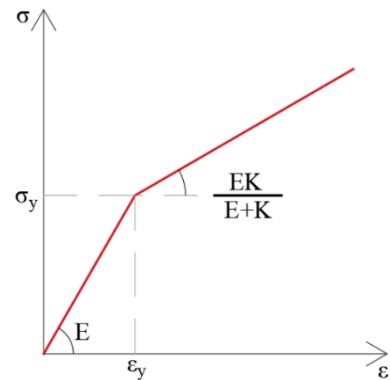
PROF^o.: SÉRGIO PERSIVAL BARONCINI PROENÇA
DISCIPLINA: ANÁLISE NÃO-LINEAR

SÃO CARLOS
SETEMBRO DE 2019

1 – PROBLEMA PROPOSTO

Determinar a resposta das estruturas a seguir considerando comportamento elasto-plástico com encruamento isótropo linear. Para isso utilizar os seguintes dados e a lei constitutiva para ambas atividades:

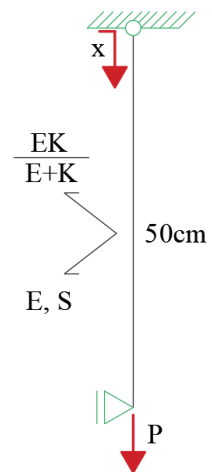
$E = 2000 \text{ kN/cm}^2$, $S = 1 \text{ cm}^2$, $K = 200$, $\sigma_y = 5 \text{ kN/cm}^2$,



Atividade 1

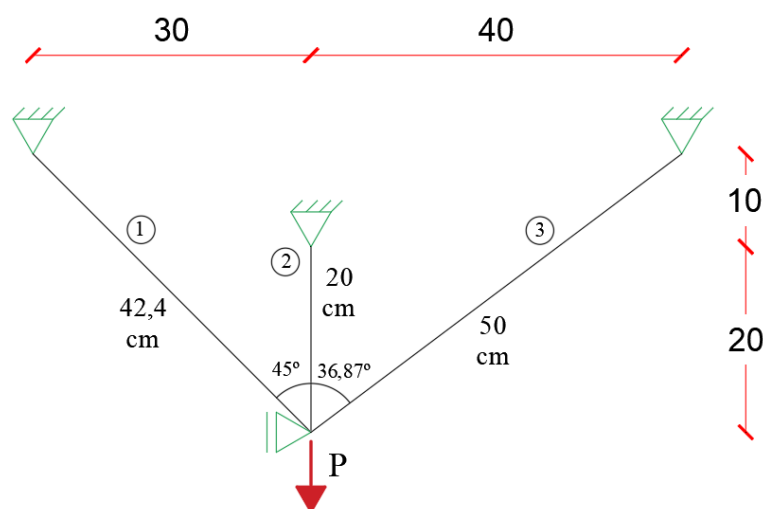
I – Adotar passos de carga com identificação do limite de escoamento, adotando imposição de força;

II – Adotar passos de carga sem identificação do limite de escoamento, adotando imposição de força.



Atividade 2

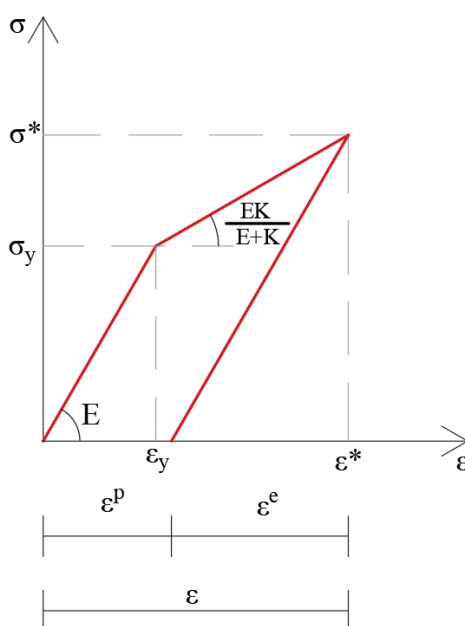
I – Determinar o comportamento estrutural da treliça com ANSYS, determinando a tensão e a ordem de plastificação das barras



2 – FORMULAÇÃO

Define-se comportamento elasto-plástico de um material, Figura 1, quando o mesmo está sujeito a tensões superiores a tensão de escoamento (σ_y), quando o material passa do regime elástico para o regime plástico, sendo caracterizado pelo aparecimento de deformações plásticas, ou seja, deformações permanentes após o descarregamento.

Figura 1 – Comportamento elasto-plástico.



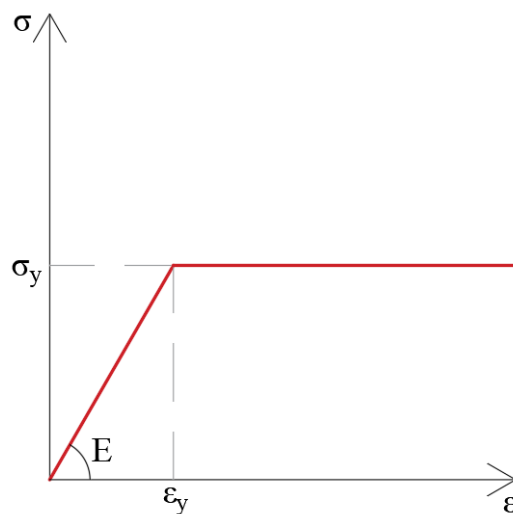
Fonte: o Autor.

Outro fenômeno importante é o encruamento, definido pela alteração do regime elástico do material quando o mesmo está submetido a uma tensão superior a tensão de escoamento, ou seja, caracterizado pelo aumento de resistência ao passo em que cresce a deformação do material.

Dentre os modelos elasto-plásticos existentes, podemos citar: modelo elasto-plástico perfeito, modelo elasto-plástico com encruamento isótropo linear e modelo elasto-plástico não linear. O modelo definido como elasto-plástico perfeito, Figura 2, é caracterizado pela ausência de encruamento, ou seja, o material atinge a tensão de escoamento e se deforma indefinidamente. Esse modelo apresenta o regime plástico horizontal com tensão limite igual a tensão de escoamento. O modelo com encruamento isótropo linear, Figura 3, apresenta variação do limite elástico inicial a cada incremento de tensão realizado,

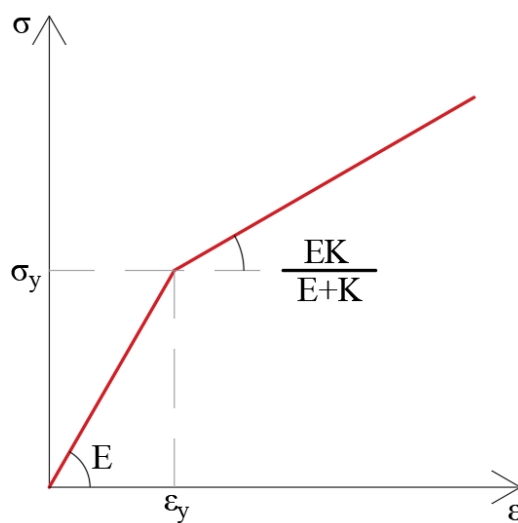
permitindo que tensões superiores sejam aplicadas antes que ocorra o escoamento do material. Entretanto, o aumento do limite elástico traz consigo uma diminuição da ductilidade do material e tornando-o mais frágil. Por último o modelo elasto-plástico não linear diferencia-se do anterior por não haver proporcionalidade entre tensão e deformação. Em todos os casos, o processo de descarregamento se dá de maneira linear com inclinação da reposta elástica, apresentando deformações elásticas (recuperável) e plásticas (permanente).

Figura 2 – Comportamento elasto-plástico perfeito.



Fonte: o Autor.

Figura 3 – Comportamento elasto-plástico perfeito.



Fonte: o Autor.

Para a resolução das atividades do presente relatório será adotado material com comportamento elasto-plástico com encruamento isótropo linear com estratégia de resolução em passo finito. Esta formulação se baseia no processo de **previsão** e **correção**, podendo ser realizado por imposição de deslocamento ou força.

Neste modelo, são válidas as seguintes relações diferenciais de deformação e tensão:

$$d\varepsilon = d\varepsilon^e + d\varepsilon^p$$

$$d\sigma = E \cdot d\varepsilon^e = E(d\varepsilon - d\varepsilon^p)$$

Como dito anteriormente, a presença de uma tensão superior a tensão de escoamento causa uma expansão no trecho elástico do material, definido pelo produto do módulo plástico de encruamento isótropo (K) pelo parâmetro α que registra a história de deformação plástica de determinado ciclo de carregamento, sendo este produto o acréscimo de tensão em relação a tensão de escoamento. Desta forma, o critério de plastificação do material é definido pela seguinte relação, a qual deixa claro a expansão do trecho elástico.

$$f(\sigma, \alpha) = |\sigma| - (\sigma_y + K \cdot \alpha) \leq 0$$

Através de diversas manipulações algébricas, é possível relacionar a tensão e a deformação através do módulo constitutivo elasto-plástico tangente, que por sua vez representa a inclinação do trecho plástico do material.

$$d\sigma = \frac{E \cdot K}{(E + K)} d\varepsilon$$

A aplicação do processo iterativo de previsão e correção consiste em, por exemplo, aplicar um incremento de força admitindo comportamento elástico e verificar se tal incremento gerou tensão superior ao limite de escoamento do material, através do critério de plastificação definido anteriormente. Se o critério de plastificação for atendido, então o incremento de força gerou tensão inferior a tensão de escoamento e, por isso, a previsão está correta. Caso contrário e o critério não seja atendido, faz-se necessário aplicar a correção através do cálculo do acréscimo finito de deformação plástica e posterior atualização do valor de tensão total e do parâmetro de encruamento α .

A seguir, é apresentado o roteiro para a aplicação do modelo elasto-plástico com encruamento isótropo linear.

1. Admitindo que não haja deformação inicial do material, realiza-se a etapa de previsão, admitindo resposta elástica do material, através da imposição de força ou deslocamento, considerando nulo o acréscimo de deformação plástica e a medida acumulada de encruamento α :

$$\Delta F_n \rightarrow \Delta u_n = \frac{\Delta F_n \cdot L}{ES} \rightarrow \Delta \varepsilon_n = \frac{\Delta u_n}{L}$$

$$\Delta \varepsilon_n^p = 0 \quad \Delta \alpha_n = 0$$

2. Em seguida, calcula-se o incremento de tensão gerado e verifica-se o critério de plastificação:

$$\Delta \sigma_n = E \cdot \Delta \varepsilon_n$$

$$f_n^{pr} = |\sigma_n^{pr}| - (\sigma_y - K \cdot \alpha) \leq 0$$

3. Caso a previsão se confirme, o materialmente ainda se comporta de maneira elástica e pode-se dar sequência ao processo incremental. Caso contrário, o passo iterativo implica em acréscimo de deformação plástica e encruamento do material.

$$\Delta \varepsilon_n^p = \Delta \lambda_n = \frac{\Delta f_n^{pr}}{E + K} \cdot \text{sign}(\sigma_2^{pr}) \rightarrow \Delta \alpha_n = |\Delta \varepsilon_n^p|$$

4. Por último, realiza-se o cálculo do real acréscimo de tensão, devido a ocorrência de deformação plástica.

$$\Delta \sigma_n = E(\varepsilon_n - \varepsilon_n^p)$$

Ao final, é dada continuidade ao processo incremental de passo finito de modo que se possa conhecer o comportamento da estrutura frente a determinada solicitação.

Em relação ao passo finito de carga, faz-se necessário lembrar que incremento pequenos de força/deslocamento permite uma melhor discretização do comportamento real da estrutura analisada. Desta forma, é importante adotar uma quantidade de passos de carga de modo que consiga fornecer uma boa representação da resposta estrutural sem que haja aumento no esforço computacional para tal representação.

3 – RESOLUÇÃO DOS EXERCÍCIOS

3.1 – ATIVIDADE 1

A atividade 1 foi realizada através da imposição de forças.

3.1.1 – PASSOS DE CARGA COM IDENTIFICAÇÃO DO LIMITE DE ESCOAMENTO

- 1º incremento de força

$$\Delta F_1 = 5 \text{ kN}$$

$$\Delta u_1 = \frac{\Delta F_1 \cdot L}{ES} = \frac{5 \times 50}{2000 \times 1} = 0,125 \text{ cm}$$

Como dito anteriormente a previsão é feita considerando comportamento elástico, portanto temos:

$$\Delta \epsilon_1^p = 0 \quad \Delta \alpha_1 = 0$$

$$\Delta \epsilon_1 = \frac{\Delta u_1}{L} = \frac{0,125}{50} = 0,0025$$

Com a deformação elástica calcula-se o acréscimo de tensão e, também, a tensão total:

$$\Delta \sigma_1 = E \cdot \Delta \epsilon_1 = 2000 \times 0,0025 = 5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_1^{pr} = 5 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_1 = \sigma_1 \cdot S = 5,00 \text{ kN}$$

Em seguida verifica-se o critério de plastificação:

$$\Delta f_1^{pr} = |\sigma_1^{pr}| - (\sigma_y - K \cdot \alpha) = 5 - (5 + 0) = 0 \leq 0$$

Desta forma a previsão é confirmada e a tensão prevista encontra-se ainda no trecho elástico. Parte-se então para o próximo de carga.

- 2º incremento de força

A primeira etapa se repete até a verificação do critério de plastificação.

$$\Delta F_2 = 5 \text{ kN}$$

$$\Delta u_2 = 0,125 \text{ cm}$$

$$\Delta \epsilon_2^p = 0 \quad \Delta \alpha_2 = 0$$

$$\Delta \epsilon_2 = 0,0025$$

$$\Delta \sigma_2 = 5 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2^{pr} = 10 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta f_2^{pr} = 10 - (5 + 0) = 5 > 0$$

Sendo assim, a previsão de comportamento elástico está incorreta e passa a ser necessário corrigir o acréscimo de tensão visto que o material está no trecho plástico. A correção é feita calculando o acréscimo de deformação plástica, encruamento e, posteriormente, o real incremento de tensão, conforme a Figura 4 abaixo.

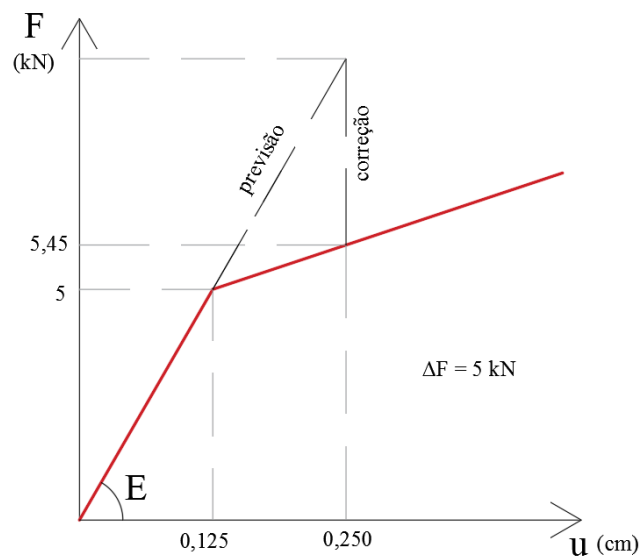
$$\Delta \epsilon_2^p = \frac{\Delta f_1^{pr}}{E + K} \cdot \sin(\sigma_2^{pr}) = \frac{5}{2200} = 0,002300 \quad \Delta \alpha_2 = |\Delta \epsilon_2^p| = 0,002300$$

$$\Delta \sigma_2 = E(\epsilon - \epsilon^p) = 2000 \times (0,0025 - 0,0023) = 0,45 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_2 = 5 + 0,45 = 5,45 \text{ kN/cm}^2$$

$$F_2 = 5,45 \text{ kN}$$

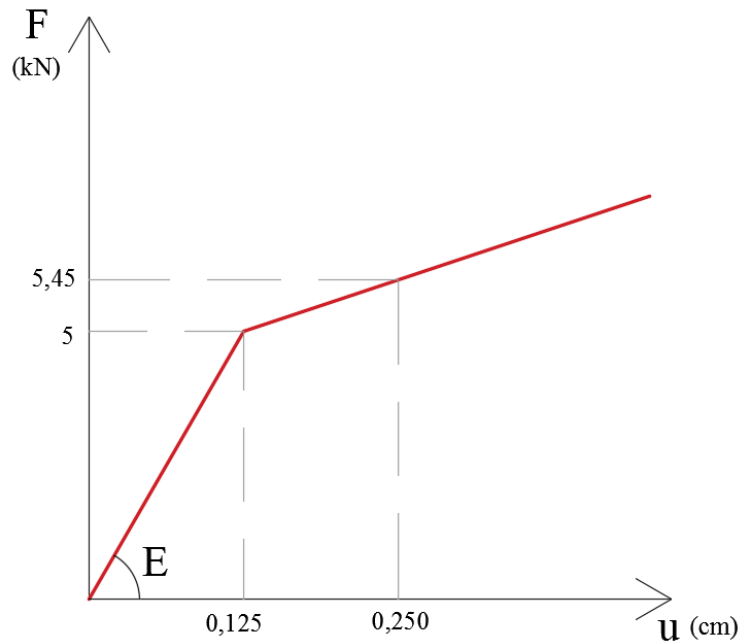
Figura 4 – Processo de previsão e correção.



Fonte: o Autor.

Aqui o processo é interrompido por já representar o comportamento da estrutura de maneira correta e a Figura 5 apresenta o comportamento final da estrutura obtido através dos passos de carga.

Figura 5 – Comportamento da estrutura (F x u).



Fonte: o Autor.

3.1.2 – PASSOS DE CARGA SEM IDENTIFICAÇÃO DO LIMITE DE ESCOAMENTO

- 1º incremento de força

$$\Delta F_1 = 3 \text{ kN}$$

$$\Delta u_1 = 0,075 \text{ cm}$$

$$\Delta \epsilon_1^p = 0 \quad \Delta \alpha_1 = 0$$

$$\Delta \epsilon_1 = 0,0015$$

$$\Delta \sigma_1 = 3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\sigma_1^{pr} = 3 \text{ kN/cm}^2$$

$$\Delta f_1^{pr} = 3 - (5 + 0) = -2 \leq 0$$

$$F_1 = 3kN$$

Portanto, a previsão é confirmada e é dada continuidade no processo incremental afim de determinar o comportamento estrutural.

- 2º incremento de força

$$\Delta F_2 = 3 kN$$

$$\Delta u_2 = 0,075cm$$

$$\Delta \epsilon_2^p = 0 \quad \Delta \alpha_2 = 0$$

$$\Delta \epsilon_2 = 0,0015$$

$$\Delta \sigma_2 = 3kN/cm^2$$

$$\sigma_2^{pr} = 6kN/cm^2$$

$$\Delta f_1^{pr} = 6 - (5 + 0) = 1 > 0$$

Desta forma, realiza-se a correção do acréscimo de tensão considerando o comportamento plástico.

$$\Delta \epsilon_2^p = \frac{1}{2200} = 0,000454 \quad \Delta \alpha_2 = |\Delta \epsilon_2^p| = 0,000454$$

$$\Delta \sigma_2 = 2000x(0,0015 - 0,000454) = 2,09kN/cm^2$$

$$\sigma_2 = 3 + 2,09 = 5,09kN/cm^2$$

$$F_2 = 5,09kN$$

- 3º incremento de força

$$\Delta F_3 = 3 kN$$

$$\Delta u_3 = 0,075cm$$

$$\Delta \epsilon_3^p = 0 \quad \Delta \alpha_3 = 0$$

$$\Delta \epsilon_3 = 0,0015$$

$$\Delta \sigma_3 = 3kN/cm^2$$

$$\sigma_2^{pr} = 9kN/cm^2$$

$$\Delta f_3^{pr} = 8,09 - (5 + 200 * 0,000454) = 3 > 0$$

Desta forma, realiza-se a correção do acréscimo de tensão considerando o comportamento plástico.

$$\Delta \varepsilon_3^p = \frac{3}{2200} = 0,001363 \quad \Delta \alpha_2 = |\Delta \varepsilon_2^p| = 0,001363$$

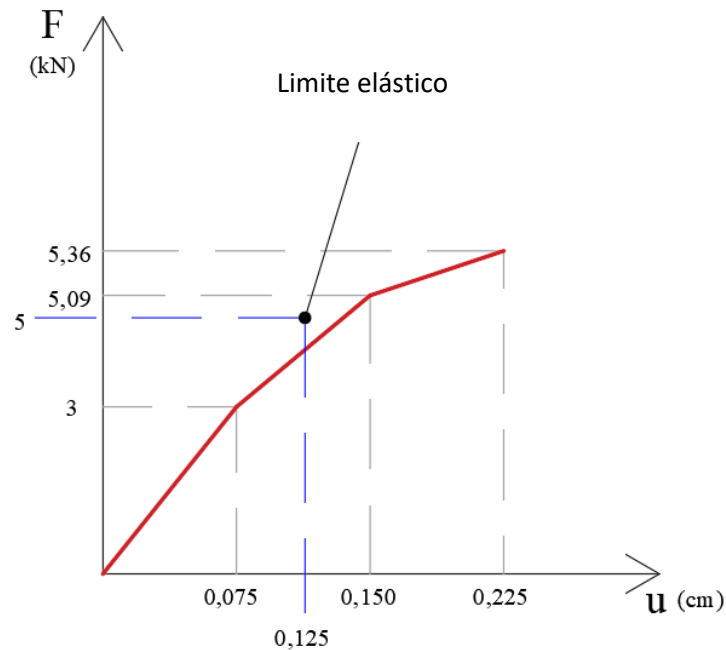
$$\Delta \sigma_3 = 2000x(0,0015 - 0,001363) = 0,27kN/cm^2$$

$$\sigma_3 = 5,09 + 0,27 = 5,36kN/cm^2$$

$$F_2 = 5,36kN$$

A Figura 6 abaixo mostra o comportamento estrutural obtido através dos passos de carga adotados. Como é possível perceber, essa quantidade de passos não representa bem o comportamento da estrutura, pois o gráfico não apresenta o limite de escoamento da barra, que está na região da segunda reta. Desta forma, confirma-se o que foi dito anteriormente onde uma maior quantidade de passos de carga permite representar de maneira mais exata o comportamento da estrutura analisada.

Figura 6 – Comportamento da estrutura (F x u).

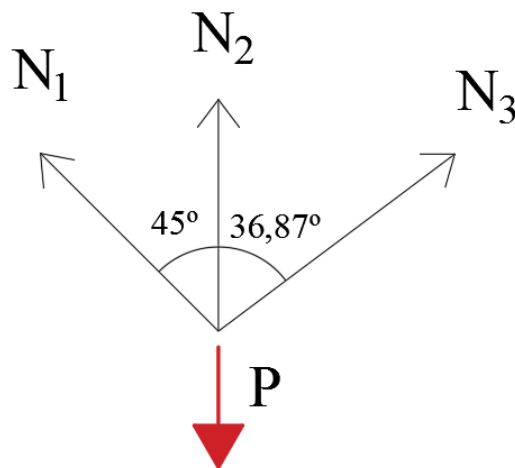


Fonte: o Autor.

3.2 – ATIVIDADE 2

A atividade 2 foi desenvolvida no programa ANSYS® através da imposição de deslocamentos. Primeiramente, foi realizado o equilíbrio da estrutura e a determinada a expressão que define a deformação de cada barra.

Figura 7 – Equilíbrio de forças.



Fonte: o Autor.

$$F = N_1 \sin 45 + N_2 + 0,6 \cdot N_3$$

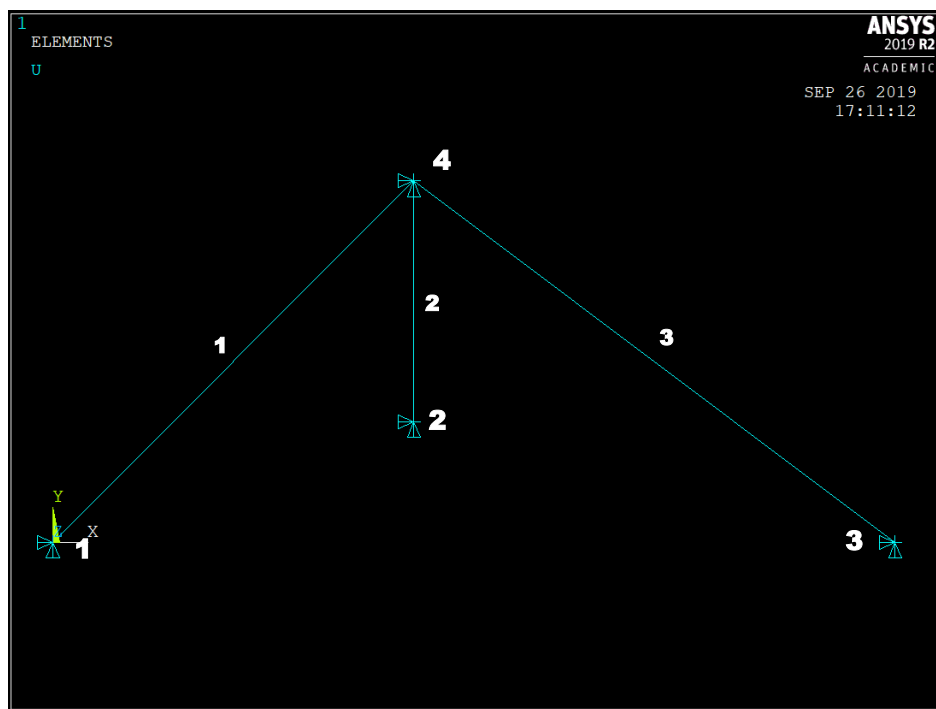
$$\varepsilon_1 = \frac{u}{60}$$

$$\varepsilon_2 = \frac{u}{20}$$

$$\varepsilon_3 = \frac{u}{83,333}$$

A geometria da estrutura analisada no ANSYS está apresentada na Figura 8. O apoio vertical no nó 4 foi adicionado no intuito de impor o deslocamento desejado para a análise do problema. O deslocamento imposto na estrutura foi de 0,25 cm, valor suficiente para que ocorresse a plastificação de todas as barras.

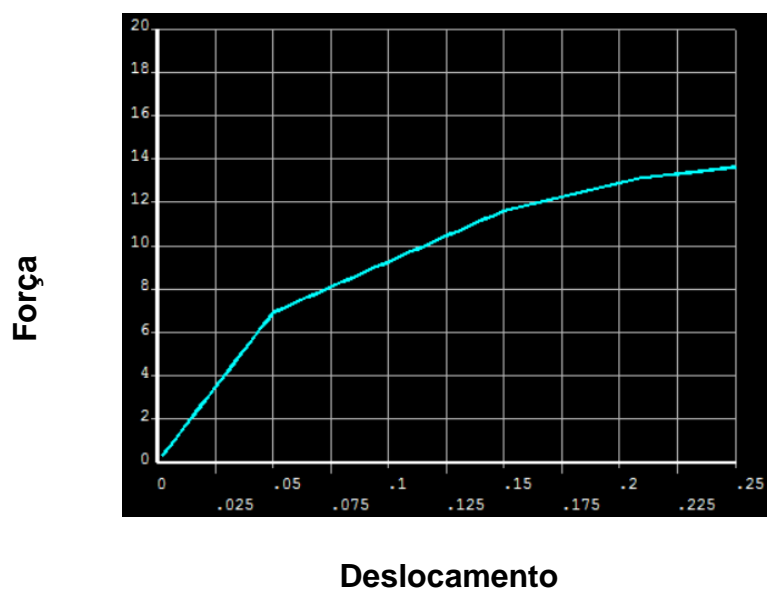
Figura 8 – Geometria inserida no ANSYS.



Fonte: ANSYS.

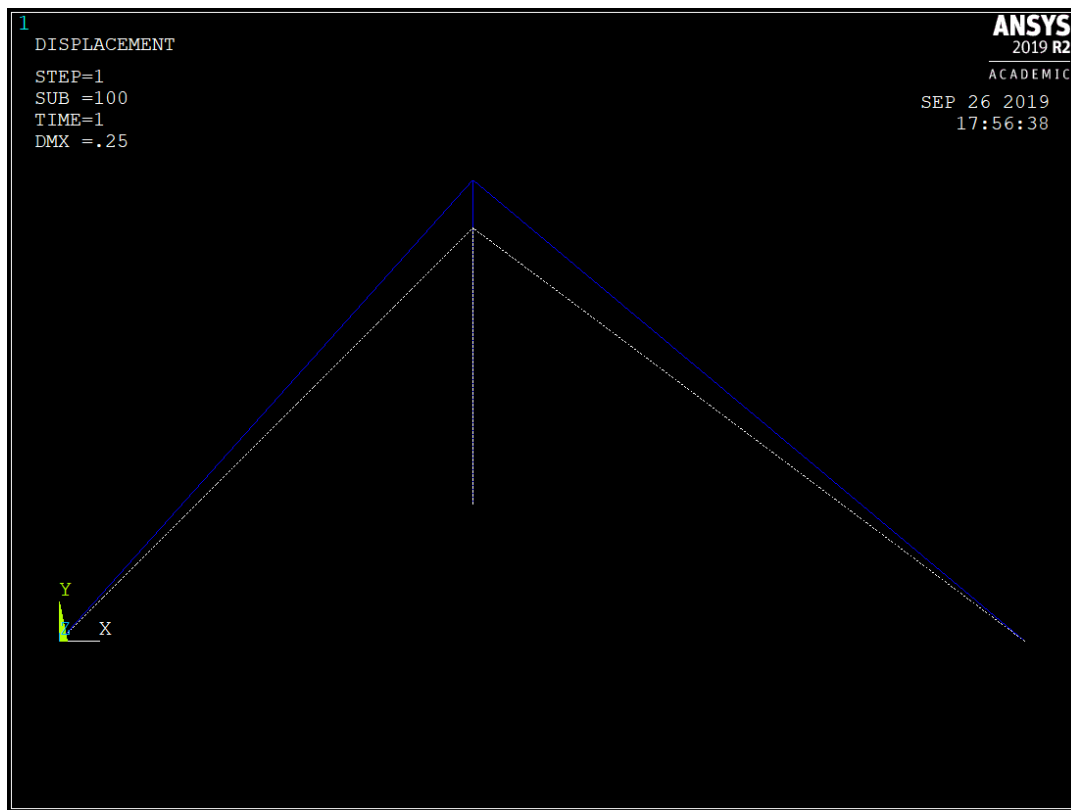
A resposta da estrutura obtida é apresentada na Figura 9 abaixo, mostrando uma força total de 13,622 kN para o deslocamento total de 0,25 cm, enquanto que a Figura 10 apresenta a deformada da estrutura.

Figura 9 – Comportamento da estrutura.



Fonte: Adaptado de ANSYS.

Figura 10 – Configuração deformada.



Fonte: ANSYS.

No intuito de verificar a ordem de plastificação das barras, determinou-se o deslocamento necessário para que cada barra começasse a plastificar. Em seguida determinou-se o valor de deslocamento necessário para cada uma delas utilizando as definidas no início deste tópico apresentadas anteriormente.

$$\Delta \epsilon_n = \frac{\sigma_y}{E} = \frac{5}{2000} = 0,0025$$

$$u_1^p = 0,150cm$$

$$u_2^p = 0,050cm$$

$$u_1^p = 0,208cm$$

Desta forma, é possível perceber que a sequência de plastificação fica: **2,1 e 3**. A seguir são apresentados os processos de previsão e correção realizados, apresentando também as tensões e deformações plásticas nas barras bem como a força resultante aplicada na estrutura de acordo com a equação de equilíbrio.

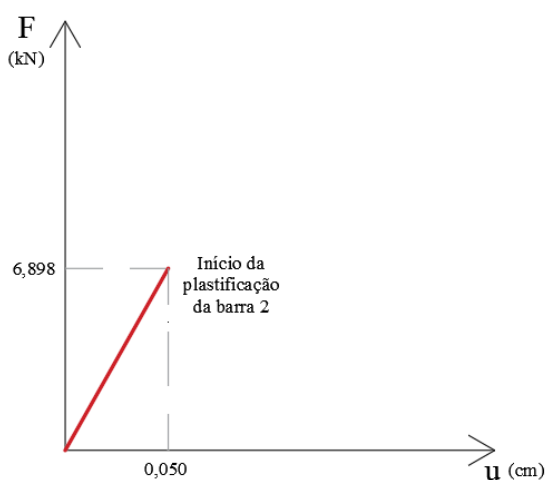
- 1ª análise: $\Delta u = 0,050\text{cm}$ ($u_T = 0,050\text{cm}$)

Tabela 1 – Parâmetros obtidos da 1ª análise.

Parâmetro	Barras		
	1	2	3
Deformação Plástica	0	0	0
Deformação Plástica Acumulada	0	0	0
Tensão (kN/cm²)	1,667	5,000	1,200
Força total aplicada	6.989 kN		

Fonte: Adaptado de ANSYS.

Figura 11 – Início da plastificação da barra 2



Fonte: Adaptado de ANSYS.

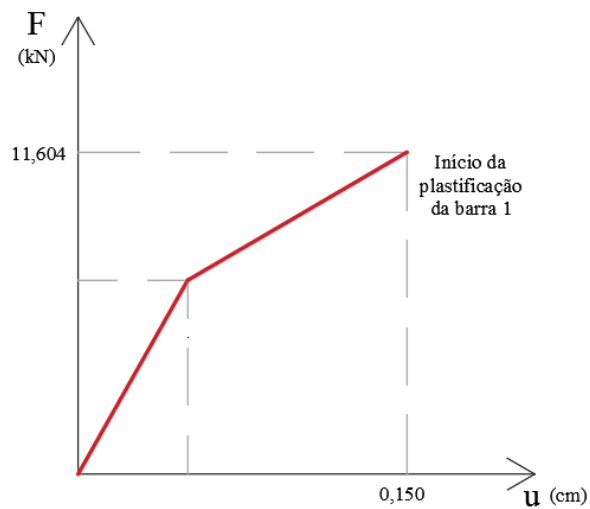
- 2ª análise: $\Delta u = 0,100\text{cm}$ ($u_T = 0,150\text{cm}$)

Tabela 2 – Parâmetros obtidos da 2ª análise.

Parâmetro	Barras		
	1	2	3
Deformação Plástica	0	0,004545	0
Deformação Plástica Acumulada	0	0,004545	0
Tensão (kN/cm²)	5,000	5,909	3,600
Força total aplicada	11.604 kN		

Fonte: Adaptado de ANSYS.

Figura 12 – Início da plastificação da barra 1



Fonte: Adaptado de ANSYS.

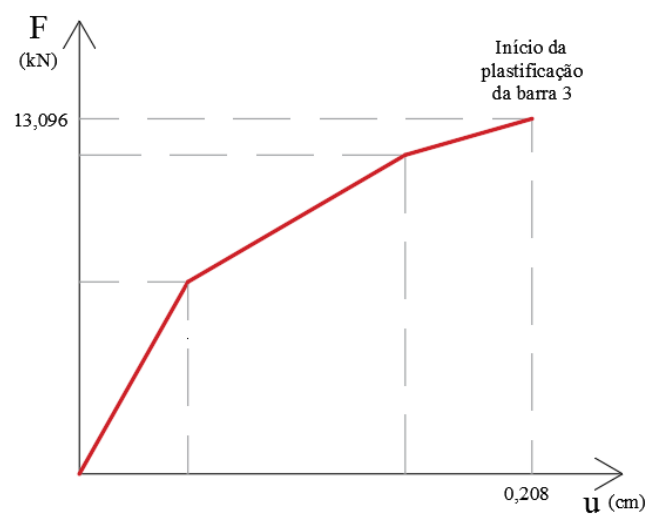
- 3ª análise: $\Delta u = 0,058$ cm ($u_T = 0,208$ cm)

Tabela 3 – Parâmetros obtidos da 3ª análise.

Parâmetro	Barras		
	1	2	3
Deformação Plástica	0,000879	0,002636	0
Deformação Plástica Acumulada	0,000879	0,007181	0
Tensão (kN/cm ²)	5,176	6,436	5,000
Força total aplicada	13.096 kN		

Fonte: Adaptado de ANSYS.

Figura 13 – Início da plastificação da barra 3



Fonte: Adaptado de ANSYS.

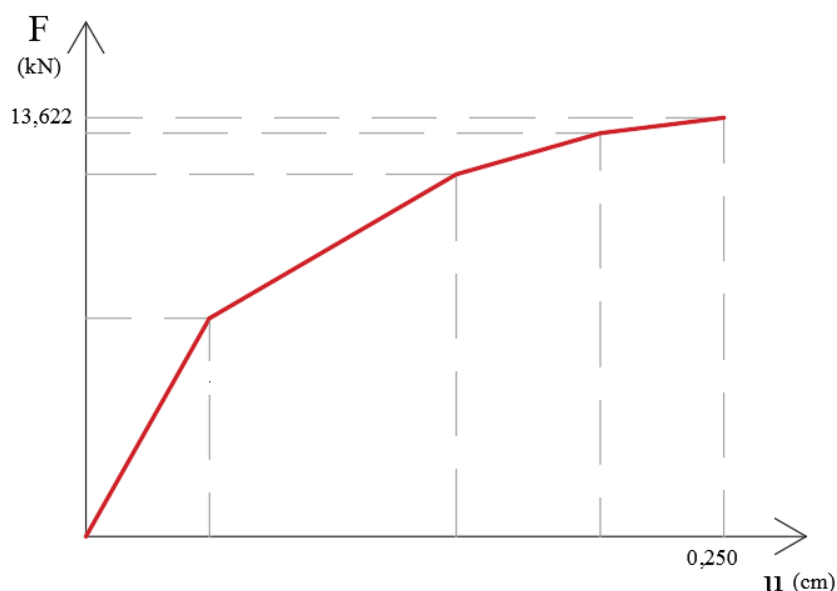
- 4ª análise: $\Delta u = 0,042\text{cm}$ ($uT = 0,250\text{cm}$)

Tabela 4 – Parâmetros obtidos da 4ª análise.

Parâmetro	Barras		
	1	2	3
Deformação Plástica	0,000637	0,001909	0,000458
Deformação Plástica Acumulada	0,001516	0,009090	0,000458
Tensão (kN/cm ²)	5,303	6,818	5,092
Força total aplicada	13.622 kN		

Fonte: Adaptado de ANSYS.

Figura 14 – Análise final com deslocamento de 0,25cm.



Fonte: Adaptado de ANSYS.

4 – ANÁLISE E DISCUSSÃO DOS RESULTADOS

O primeiro ponto importante a ser discutido é referente a influência da plastificação do material na resposta da estrutura. Como pode ser visto no exemplo da treliça com três barras, quando todas as barras possuíam comportamento elástico era possível perceber uma proporcionalidade na distribuição de tensões nas mesmas. Entretanto, à medida em que as barras começavam a plastificar, ou seja, ultrapassavam o limite de escoamento, essa distribuição de tensão se alterava, devido a diminuição da rigidez da barra em comportamento plástico. Esta situação se repetiu ao passo em que a tensão nas demais barras ultrapassavam a tensão de escoamento.

Tomando como exemplo a segunda análise da atividade 2, onde foi aplicado um deslocamento de 0,150 cm, percebe-se que a tensão na barra 2 é de 5,909 kN/cm², visto que neste deslocamento já ocorreu a plastificação desta barra. No entanto, admitindo que a barra 2 não tivesse plastificado neste nível de carregamento, ou seja, ainda continuasse com comportamento plástico, a tensão que estaria solicitando a barra seria de 15 kN/cm², sendo muito maior que a situação da barra plastificada. Este fato confirma mais uma vez a perda da rigidez da barra plastificada, onde o aumento de deslocamento de 0,050 para 0,150 cm fez com que a barra 2 deformasse sem que fosse capaz de absorver toda a tensão calculada para a situação elástica, ou seja, sofrendo um acréscimo de tensão de 0,909 kN/cm² ao invés de 10 kN/cm².

Outro ponto importante refere-se à quantidade de passos necessários para uma representação satisfatória do comportamento da estrutura analisada. Tomando como base a atividade 1, é possível perceber que a diferença da consideração dos passos de carga adotados. Na primeira situação, foi adotado passo de carga de modo que pudesse ser representado o exato momento em que a barra começa a plastificar. Já na segunda situação, os passos de carga adotados foram capazes de representar tanto o estágio elástico quanto o estágio plástico. Entretanto, a aplicação do segundo passo de carga fez com que o comportamento mudasse de elástico para plástico sem que houvesse a definição do momento exato em que esta situação acontecesse.

Desta forma, é possível perceber que quanto mais discretizado for o passo de carga, melhor será a representação do comportamento da estrutura analisada. Tomando como exemplo a atividade 2, percebe-se que para representar o início de plastificação de todas as barras seria necessário adotar um passo finito de carga muito pequeno, ou seja, para representar as deformações de 0,050, 0,015 e 0,208. No entanto, um aumento na discretização do passo de carga acarreta um maior volume de cálculos e aumento no custo computacional, sendo necessário analisar até que ponto a discretização do passo de carga apresenta-se viável.