**1er examen parcial de**

**Introducción a los Sistemas Dinámicos**

Rosa Peralta

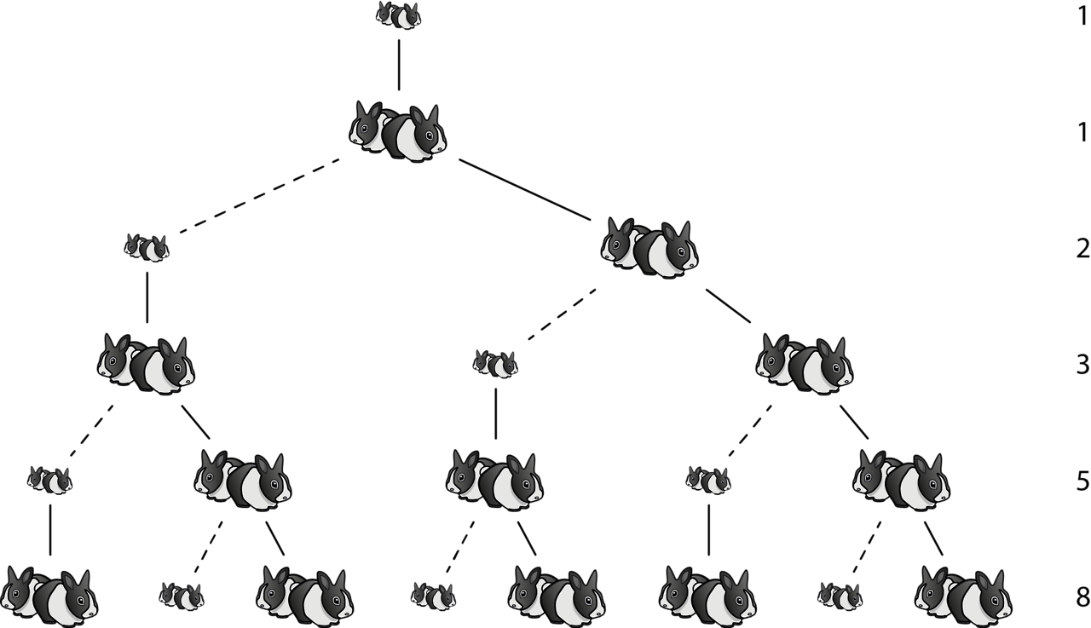
Gerardo Martínez

(1) Explique brevemente con qué problema de crecimiento poblacional se relaciona la sucesión de Fibbonacci

La Sucesión de Fibonacci puede explicarse con el problema de crecimiento poblacional de los conejos, ya que se reproducen al ritmo que indica la sucesión.

El proceso de reproducción y la sucesión se cuenta con el total de parejas durante cada periodo de tiempo y se da por los siguientes pasos:

1. En un primer periodo, se tiene una pareja de conejos de corta edad, los cuales aún no pueden reproducirse. El total de parejas es 1
2. En un segundo periodo, la pareja llega a edad fértil. El total de parejas es 1
3. En un tercer periodo la pareja procrea a otra pareja de conejos, los cuales por su corta edad son fértiles. El total de parejas es 2
4. En un cuarto periodo la pareja inicial procrea una pareja de conejos infértiles, mientras que la segunda pareja ha llegado a la edad fértil. El total de parejas es 3
5. En un quinto periodo las dos parejas fértiles procrean una pareja de conejos cada una, mientras que la tercera llega a la edad fértil. El total de parejas es 5
6. El proceso se repite, las tres parejas fértiles procrean una pareja cada una, mientras que las dos parejas restantes llegan a la edad fértil. El total de parejas es 8



En la Figura X se observa el ritmo de crecimiento de la población de los conejos. En este ámbito se distinguen los tres elementos de la ecuación de recurrencia (I)

(I)

K : El tiempo o iteración del proceso de reproducción

: Número de parejas fértiles en cada tiempo

: Número de nuevas parejas

: Total de parejas de conejos en cada tiempo

1. **Pruebe que el polinomio característico de A es y que, por consiguiente, los valores propios son y**

|  |  |
| --- | --- |
| Tal como lo menciona el Teorema 1, tomamos en cuenta que:  **A** es una matriz cuadrada que representa la constante de crecimiento en la sucesión de Fibonacci, que es  es un valor propio que integra la matriz  La comprobación inicia con la evaluación de como valor propio de la matriz A. Entonces si Si es un valor propio de la matriz A, deberá satisfacer det |I – A | = 0 | |
| Para calcular el determinante es necesario seguir el siguiente procedimiento: | |
| * Se obtiene el producto de I | I = \*  I = |
| * Se resta I-A | I – A =  I – A = |
| * Se obtiene el determinante de I-A | det |I-A| = det = 0  det |I-A| = () () – (-1) (-1) = 0  det |I-A| = = 0 |
| Con base en lo anterior se comprueba que el polinomio característico de A es = 0.  El siguiente paso consiste en obtener los valores propios. Para ello se recurre al siguiente procedimiento: | |
| * Las soluciones del polinomio se obtienen al aplicar la fórmula general   F.G. = | |  |  |  |  |  |  |  | | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | |  | - |  | - | 1 | = | 0 | |  |  |  |  |  |  |  | | a |  | b |  | c |  |  | | 1 |  | -1 |  | -1 |  |  |   =  =  = |
| * Según lo que se obtuvo de la fórmula general se tienen dos soluciones del polinomio | =  = |
| Con base en esto se demuestra la veracidad de polinomio característico y sus soluciones | |

**(2) Muestre ahora que los vectores propios correspondientes a y son respectivamente: y**

|  |  |
| --- | --- |
| Para encontrar algún vector propio correspondiente a debe igualarse Av con | |
|  | |
| * Segun las matrices dispuestas se igualan para demostrar que   Sea = la igualdad para demostrar que y   * Se calcula el vector característico igualando las matrices descritas   Representación del vector característico y | = y =  =  x + y =  x =  = y |
| * Se comprueban que son iguales | =  =  =  + 1 =  = |

**(3) Con y forme la matriz de transición P y muestre que =**

|  |  |
| --- | --- |
| * Se forma la matriz P con los vectores característicos del inciso anterior | P =  = |
| * Se obtiene por el método de Gauss – Jordan   -se calcula el primer término de la matriz P11  =  =  =  = | =  =  =  =  =  =  =  = |
|  |  |

**(4) Compruebe que A P = = D**

|  |  |
| --- | --- |
|  | A P = = D  = |
| * P expresada en base canónica * A es la transformación | P = (  β = ,  P = ; P = |
| * Aplicando A:   Pero  Análogamente | AP = A =  AP = A =  = =  AP = A =  AP = A = |
| * Sabiendo que: | =  = =  = = |
| * Entonces   Porque: | =  = = 0  = , … |
|  |  |

**(5) Explique por qué : = D =**

|  |  |
| --- | --- |
| * Suponiendo   Entonces: | =  = |
| Partiendo de esto, mostremos que  = | = =  = =  = =  = |
|  | =  y  =  = |

**(6) Ahora sustituya la igualdad (8) en la ecuación (4) para mostrar que**

= =

|  |  |
| --- | --- |
| Si (4) es =  = ; A =  y  A  =  = | = =  =  = = =  =  =  = |

**(7) En el sistema de cómputo algebraico que prefiera,**

a) Haga un programa que genere los números de la sucesión de Fibonacci aplicando la ecuación de recurrencia (1) que los define y calcule, con él, los valores de Fk para k = 0, 1, ... 25:

b) Modifique, si fuere necesario, el programa del inciso anterior para generar la sucesión de números de Lucas que son de la forma Lk+2 = Lk+1 + Lk pero cuyas condiciones iniciales son L0 = 1; L1 = 2 y calcule los valores de Lk para k = 0, 1, ... , 25:

c) Defina, como función de k, el valor de Fk según la fórmula cerrada (2) y conforme que le da los mismos valores de Fk para k = 0, 1, ... , 25:

d) Compare las dificultades algorítmicas que puede haber en los procedimientos de los incisos 7a) y 7c).

**Programa:**

|  |
| --- |
| import math |
|  | sucesion = int(input("Elegir una sucesion: (1)Fibonacci y (2)Lucas: ")) |
|  |  |
|  | if sucesion == 1: |
|  | Fk = 0 |
|  | Fk1 = 1 |
|  | fibonacci = [Fk, Fk1] |
|  | fibonacci2 = 0 |
|  | fin = int(input("Hasta que iteracion se calcula: ")) |
|  | else: |
|  | Fk = 2 |
|  | Fk1 = 1 |
|  | fibonacci = [Fk,Fk1] |
|  | fin = int(input("Hasta que iteracion se calcula: ")) |
|  |  |
|  | #Formula 1 |
|  | for fib in range(0,fin-1): |
|  | Fk=fibonacci[fib] |
|  | Fk1=fibonacci[fib+1] |
|  | Fkn= Fk + Fk1 |
|  | fibonacci.append(Fkn) |
|  |  |
|  | #Formula 2 |
|  | raiz5 = math.sqrt(5) |
|  | prim = 1 / raiz5 |
|  | lambda1 = ((1 + raiz5) / 2) \*\* fin |
|  | lambda2 = ((1 - raiz5) / 2) \*\* fin |
|  | restalambdas = lambda1 - lambda2 |
|  | fibonacci2 = prim \* restalambdas |
|  |  |
|  | print fibonacci[fin] |
|  | print fibonacci2 |

La diferencia principal se concentra en la forma que se obtienen los números, ya que en la primera se debe de hacer alusión a un bucle ya que se aplica la fórmula para la obtención de cada elemento, mientras que en la segunda solo debe introducirse la iteración del número que se quiera para obtener el numero Fibonacci.