



UNIVERSITÀ DEGLI STUDI ROMA TRE

Facoltà di Ingegneria
Corso di Laurea in Ingegneria Informatica

Tesi Di Laurea

Algoritmo di apprendimento iterativo per braccio robotico

Laureando

Simone Rossetti

Matricola 499830

Relatore

Prof. Chiara Foglietta

Anno Accademico 2018/2019

Questa è la dedica

Ringraziamenti

Grazie a tutti

Indice

Indice	iv
Elenco delle figure	vi
1 Introduzione	1
1.1 Abstract	1
1.2 Strategia ILC	1
2 Robotica Industriale	2
2.1 Generalità	2
2.2 Storia	3
2.3 Robot Manipolatore	6
3 Cinematica	12
3.1 Generalità	12
3.2 Cinematica Diretta	13
3.2.1 Cinematica diretta del manipolatore	15
3.3 Cinematica Inversa	16
3.3.1 Cinematica inversa del manipolatore	17
4 Dinamica	19
4.1 Generalità	19
4.2 Formulazione di Lagrange	19
4.3 Dinamica del manipolatore	20
4.3.1 Determinazione della velocità	21

4.3.2	Determinazione dell'energia cinetica	22
4.3.3	Determinazione dell'energia potenziale	24
4.3.4	Determinazione del moto	24
4.4	Modello dinamico nello spazio dei giunti	25
4.5	Sistema dinamico	26
4.5.1	Linearizzazione del sistema dinamico	27
4.5.2	Spazio di stato	30
5	Algoritmo di apprendimento iterativo	32
5.1	Generalità	32
5.2	Descrizione dell'algoritmo	33
5.3	Applicazioni	36
6	Controllo	39
7	Appendice	40
	Conclusioni e sviluppi futuri	41
	Bibliografia	42

Elenco delle figure

2.1	Catena di montaggio di un'industria automobilistica.	2
2.2	Disegno di G. P. Taylor pubblicato su Meccano Magazine (1947).	3
2.3	Unimate, primo robot industriale (1961).	4
2.4	Braccio Stanford, Victor Scheinman (1969).	5
2.5	Braccio PUMA, Victor Scheinman, Unimate (1975).	5
2.6	IRB 6, ABB (1972).	6
2.7	Parti costituenti di un ABB.	7
2.8	Geometrie cartesiane, orizzontale (a) e verticale (b).	8
2.9	Geometria cilindrica (a) e sferica (b).	9
2.10	Geometria SCARA (a) e antropomorfa (b).	10
2.11	Polso sferico.	10
2.12	Catena di produzione e assemblaggio automobili.	11
3.1	Orientamento e posizione di un organo terminale.	14
3.2	Manipolatore planare a due bracci (schema cinematico).	16
4.1	Manipolatore planare a due bracci (schema dinamico).	21
4.2	Velocità angolare di un braccio (asta).	23
5.1	Modello di una configurazione ILC.	33
5.2	Logica ILC.	35
5.3	Logica Feedback.	35
5.4	Modello di una configurazione Feedback.	35

Capitolo 1

Introduzione

1.1 Abstract

Questo studio si pone l'obiettivo di approfondire il comportamento di un braccio manipolatore controllato da un algoritmo di apprendimento iterativo, partendo dalla sua elementare costruzione alla più dettagliata simulazione.

1.2 Strategia ILC

Capitolo 2

Robotica Industriale

2.1 Generalità

La Robotica ha delle radici culturali molto profonde. Può essere considerata come il risultato della ricerca, costante nei secoli, dell'essere umano di delegare compiti e realizzare fisicamente funzioni di vario genere, dispendiose, ripetitive, veloci o di precisione. In effetti la robotica si applica in moltissimi contesti, basti pensare al fatto che attualmente esistono svariate branche dell'ingegneria, della chirurgia, della chimica, dell'elettronica e tanti altri settori nati proprio grazie all'evoluzione dell'automazione programmabile.



Figura 2.1: Catena di montaggio di un'industria automobilistica.

Elemento trainante della tecnologia robotica è sicuramente il campo industriale, è qui che i robot hanno trovato maggiore diffusione. Il loro impiego nelle catene di montaggio è ormai un sinonimo di sicurezza e qualità, oltre che un valido modo per abbattere costi e tempi di produzione.

Tale scienza può essere pensata come lo studio dei metodi e la realizzazione dei mezzi per estendere e, a volte sostituire, le capacità dell'essere umano di adempiere a determinate mansioni. In particolar modo la robotica è comunemente definita come *la scienza che studia la relazione intelligente tra la percezione e l'azione*. Proprio per questo, un sistema automatico è un sistema complesso, rappresentato e suddiviso in sottosistemi a loro volta non banali.

Il più generico apparato robotico che trova ampia applicazione nell'automazione industriale è il braccio robotico o braccio manipolatore (*Figura 2.1*), di fatto un'astrazione del braccio umano e la concretizzazione espansa delle sue molteplici funzionalità. La caratteristica chiave è la sua struttura meccanica.

2.2 Storia

La norma ISO TR/8373-2.3 definisce il robot industriale come: *Un manipolatore con più gradi di libertà, governato automaticamente, riprogrammabile, multiscopo, che può essere fisso sul posto o mobile per utilizzo in applicazioni di automazioni industriali.*

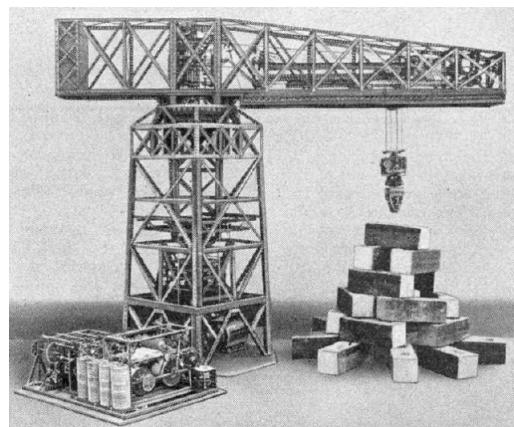


Figura 2.2: Disegno di G. P. Taylor pubblicato su Meccano Magazine (1947).

Il primo robot della storia riconosciuto e conforme alla norma ISO risale al 1937, progettato e realizzato da G. P. Taylor (pubblicato su Meccano Magazine) ottenuto dall’assemblaggio di parti rigide di un macchinario molto simile ad una gru e da parti elettriche, un unico motore in grado di sollevare e spostare oggetti pesanti mediante l’uso di leve (*Figura 2.2*).



Figura 2.3: Unimate, primo robot industriale (1961).

I primi brevetti di robotica furono richiesti da George Devol (New York) nel 1954, il quale nel 1956 fondò la Unimation con Joseph Engelberger, un’azienda specializzata nella realizzazione di robot di trasferimento, lo *Unimate* (*Figura 2.3*), costituito da attuatori idraulici che operavano grazie una programmazione che permetteva di memorizzare la corrispondenza tra posizioni e angoli dei giunti. Qualche anno dopo questo robot venne adottato dalla General Motors nella sua catena di montaggio e fu il primo robot industriale della storia ad entrare in funzione. Successivamente, la Unimation concesse in licenza la propria tecnologia alla Kawasaki Heavy Industries e alla GKN, in Giappone e Inghilterra, rispettivamente. La principale concorrenza per un certo periodo fu la Cincinnati Milacron Inc. in Ohio. All’inizio degli anni ’80, diverse grandi aziende dal Giappone cominciarono con la produzione di robot industriali.

Il vero precursore dei robot manipolatori di oggi fu il *braccio Stanford* (*Figura 2.4*), inventato da Victor Scheinman, nel 1969. Un robot completamente elettrico a sei motori

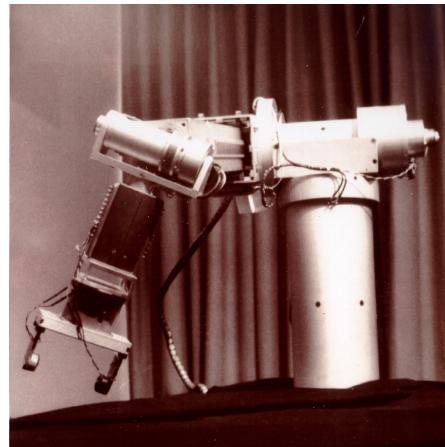


Figura 2.4: Braccio Stanford, Victor Scheinman (1969).

la cui implementazione di controllo rispecchia effettivamente il calcolo dei parametri necessari per raggiungere posizioni e eseguire movimenti desiderati, non si trattava più di un approccio puramente meccanico, anzi le sue procedure matematiche per il calcolo di angoli e posizioni gli permise di seguire con precisione traiettorie nello spazio. Scheinman collaborò a molti progetti e realizzò un secondo braccio nel 1972 per l'MIT, il *MIT Arm Scheinman*, e nel 1975 progettò e realizzò *PUMA* (*Programmable Univeral Manipulation Arm*) (Figura 2.5) per la Unimation supportata dalla General Motors. Il PUMA fu ampiamente utilizzato e migliorato negli anni successivi.



Figura 2.5: Braccio PUMA, Victor Scheinman, Unimate (1975).

Poco dopo la robotica industriale decollò anche in Europa, con ABB Robotics e

KUKA Robotics, la quale introdusse sul mercato, nel 1973, lo *IRB 6* (*Figura 2.6*), che fu uno dei primi manipolatori ad essere completamente controllato da microprocessore. Con l'avvento delle industrie giapponesi, pochi superstiti europei sono sopravvissuti a questo mercato, l'azienda tedesca KUKA Robotics, la società svedese ABB Asea Brown Boveri e l'azienda italiana Comau.



Figura 2.6: IRB 6, ABB (1972).

2.3 Robot Manipolatore

Il robot industriale è una tipologia di robot utilizzata nel campo della produzione industriale che necessita di tempi rapidi e metodi efficienti per la realizzazione di prodotti di qualità. Secondo la definizione universalmente accettata del Robot Institute of America, *un robot è una struttura meccanica multifunzionale e riprogrammabile progettato per spostare materiali, parti, utensili, o dispositivi specializzati secondo movimenti variabili programmati per l'esecuzione di una varietà di compiti diversi* (1980).

Nello specifico il robot manipolatore possiede una conformazione meccanica consistente in una sequenza di corpi rigidi chiamati *bracci* o *link* connessi mediante delle articolazioni *giunti* o *joints*. Genericamente un manipolatore è caratterizzato da una *struttura portante* che ne assicura mobilità, da un *polso*, che conferisce destrezza, e da un *organo terminale* o *end-effector* che esegue il compito richiesto.

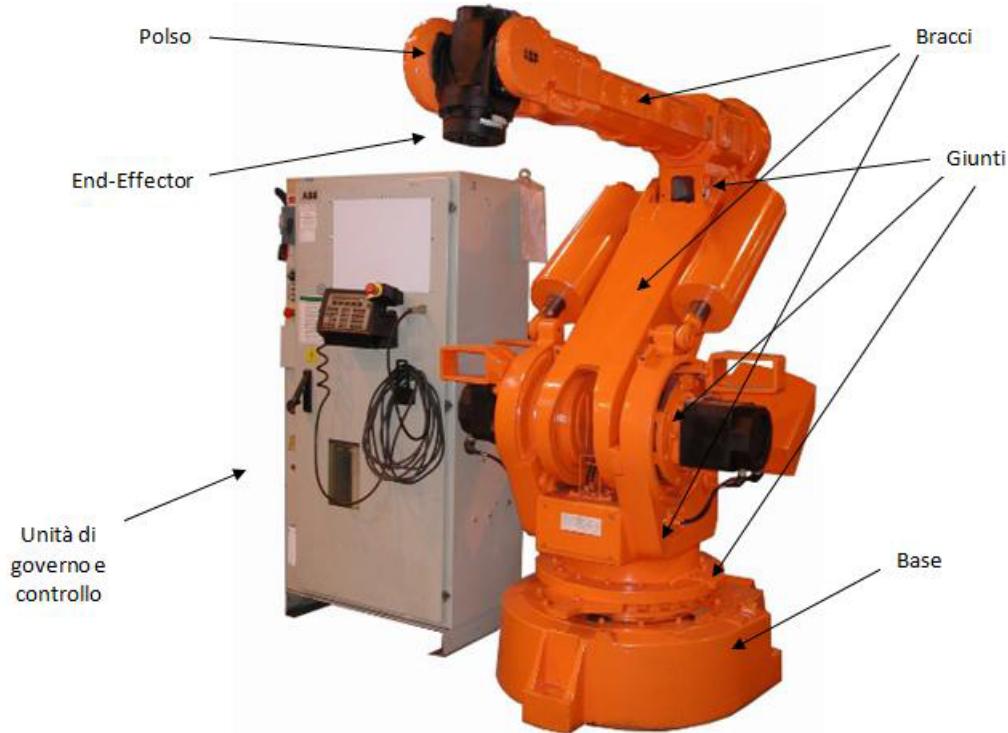


Figura 2.7: Parti costituenti di un ABB.

La parte logica, cioè quella che permette l’interazione tra robot e ambiente, è costituita da un *calcolatore*, che interpreta le informazioni ricevute da dei *sensori*, i quali misurano sia lo stato del manipolatore, sia lo stato del processo, e controlla e corregge l’azione con degli *attuatori*, che imprimono il movimento ai giunti mediante la regolazione di potenza di motori, che trasformano l’energia elettrica o idraulica in energia meccanica. La caratteristica essenziale di un manipolatore, che lo rende indispensabile nell’industria manifatturiera, è la sua versatilità e la sua misura. La struttura fondamentale dei manipolatori è a *catena cinematica aperta* (quando due o più bracci sono collegati in un’unica catena senza formare un anello). L’articolazione dei bracci è resa possibile dall’esistenza dei giunti, *prismatici* (di traslazione) o *rotoidali* (di rotazione), che conferiscono ciascuno un singolo *grado di libertà* al robot. Ovviamente il giunto rotoidale è spesso preferito per la sua affidabilità e compattezza. Comunemente i manipolatori industriali sono costituiti da tre o gradi di libertà, automatici e riprogrammabili

sia nel compito che nella struttura. Nel caso più generale di un compito, cioè nell'orientare e posizionare un oggetto nello spazio, i gradi di libertà richiesti sono sei, tre per il posizionamento nell'ambiente e tre per l'orientamento rispetto ad una terna di coordinate di riferimento.

Lo *spazio di lavoro* rappresenta la porzione dell'ambiente circostante in cui il braccio e il suo organo terminale riesce ad operare considerando tutte le sue limitazioni parametriche e strutturali. Il tipo e la successione dei gradi di mobilità della struttura portante di un braccio manipolatore permettono di catalogarne gli archetipi: *cartesiano*, *cilindrico*, *sferico*, *SCARA* e *antropomorfo*.

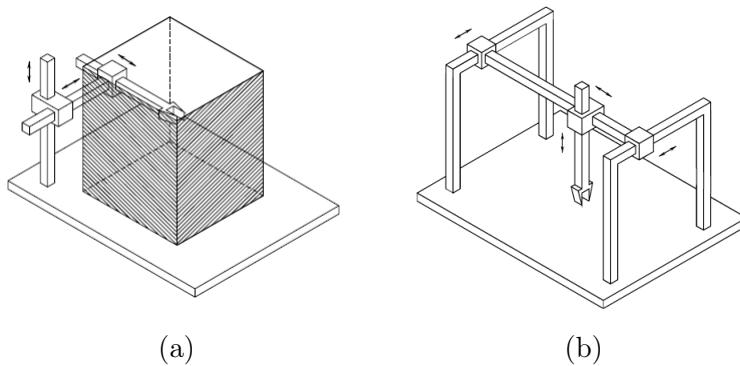


Figura 2.8: Geometrie cartesiane, orizzontale (a) e verticale (b).

La geometria *cartesiana* (*Figura 2.8.a e 2.8.b*) è realizzata con tre giunti prismatici con assi ortogonali tra loro. Per la sua struttura offre immediata mobilità nei percorsi rettilinei e alta rigidezza meccanica. La precisione di posizionamento del polso è costante in tutta il volume di lavoro che si riduce essenzialmente ad un parallelepipedo. Ovviamente tale rigidità comporta poca destrezza ma tali strutture permettono di lavorare in volumi di grandi dimensioni e pesi elevati. Proprio per tali caratteristiche sono generalmente utilizzati per il trasporto e l'assemblaggio.

La geometria *cilindrica* (*Figura 2.9.a*) si differenzia dalla cartesiana per la sostituzione del giunto prismatico alla base con un giunto rotoidale. La posizione viene descritta in coordinate cilindriche e la precisione di posizionamento si riduce effettivamente all'aumento della distanza del lavoro dal braccio, il volume di lavoro è un cilindro

cavo. Offre buona rigidità e generalmente la sua struttura orizzontale permette di operare in cavità per il trasporto e l'assemblaggio di parti pesanti, in tal caso l'uso è da preferire per mezzo di motori idraulici e non più elettrici.

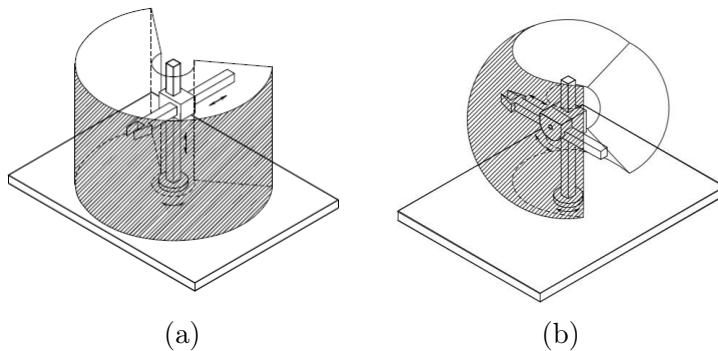


Figura 2.9: Geometria cilindrica (a) e sferica (b).

La geometria *sferica* (*Figura 2.9.b*) si differenzia dalla cilindrica per la sostituzione di un ulteriore giunto prismatico con uno rotoidale. Il posizionamento viene descritto in coordinate sferiche, la sua precisione si riduce al crescere dello sbraccio radiale, il volume di lavoro è una sfera cava. Offre meno rigidità rispetto alle due strutture precedenti e la sua costruzione meccanica è più complessa. Permette però la lavorazione circostanti la sua base.

La geometria *SCARA* (*Selective Compliance Assembly Robot Arm*) (*Figura 2.10.a*) si differenzia dalle precedenti per la sua struttura particolare, due giunti rotoidali e uno prismatico, in modo tale da ottenere assi di moto tutti paralleli tra di loro. Presenta elevata rigidezza nell'operare in verticale e scorrevolezza nel lavoro orizzontale. Si presta molto all'assemblaggio di carichi verticali. Il volume di lavoro si traduce in una concatenazione di cilindri traslati attorno alla sua base. L'approccio SCARA è impiegato per manipolazione di piccoli oggetti.

Infine, la geometria *antropomorfa* (*Figura 2.10.b*), la più importante in ambito industriale, data la sua vasta applicazione, e forse la più destra grazie alla presenza di tutti giunti rotoidali. Chiamata così per la sua somiglianza con il braccio umano. Matematicamente molto più complesso rispetto a tutte le precedenti geometrie, la sua precisione varia in tutto lo spazio di lavoro, che si traduce in un volume di una porzione di sfera

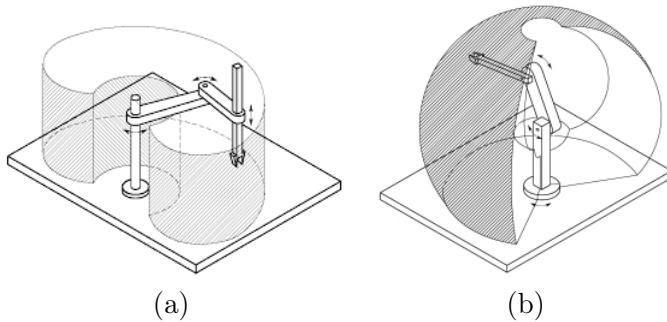


Figura 2.10: Geometria SCARA (a) e antropomorfa (b).

con una base piuttosto ampia.

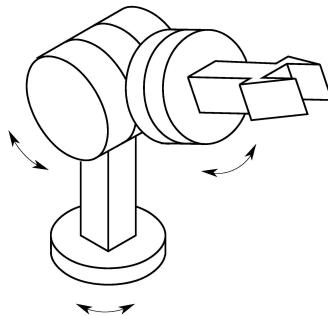


Figura 2.11: Polso sferico.

La principale struttura di manipolazione che spesso viene citata ma che non tratteremo in questo studio è il polso sferico (*Figura 2.11*), ad esso è imputata la destrezza del manipolatore e spesso la sua compattezza rende complicata la sua progettazione meccanica. La sua peculiarità sta nel concentrare tre gradi di rotazione in un unico punto. L'organo terminale varia a seconda delle applicazioni del robot, generalmente una pinza per afferrare e trasportare materiali, o una torcia da saldatura, una pistola a spruzzo, una fresa, un trapano. L'esecuzione di determinati compiti è un elemento strettamente vincolante nella scelta del tipo di manipolatore da applicare. Non si deve pensare che la versatilità e l'interoperabilità di tali strutture le rendano tra loro equivalenti.

Un esempio di impiego massiccio di manipolatori è il settore dell'industria automobilistica (*Figura 2.12*). La molitudine di applicazioni fa sì che determinate celle



Figura 2.12: Catena di produzione e assemblaggio automobili.

di lavorazione siano completamente automatizzate e indipendenti, se non in casi estremamente eccezionali in cui la manualità umana sia strettamente necessaria. La quasi recente diffusione di bracci manipolatori antropomorfi ha permesso negli anni di migliorare di molto gli aspetti di precisione, velocità e capacità di carico, inoltre l'applicazione di sensori e sistemi di visione e laser, hanno portato il loro impiego in lavorazioni più accurate.

Fonti Bibliografiche: [eBS00, Wika, Wikb, Mun10, Bau16, AI18].

Capitolo 3

Cinematica

3.1 Generalità

In questo capitolo verrà dapprima effettuata una presentazione generale dei due metodi di studio per la cinematica, dopodiché verrà condotta l'analisi meccanica del manipolatore planare a due bracci. Questo capitolo è fondamentale per lo studio del nostro robot, senza il quale non potremmo comprenderne il comportamento né tanto meno simularne il movimento.

Un manipolatore può essere considerato come una catena cinematica costituita da corpi rigidi collegati da delle giunture rotoidali o prismatiche. Un estremo della catena è vincolato alla base, l'altro, connesso ad un organo terminale, è libero di muoversi. Il moto totale della struttura è realizzato mediante piccoli movimenti elementari di ogni corpo rispetto all'altro. Per poter manipolare un oggetto nello spazio, è richiesta la conoscenza della sua posizione e il suo orientamento rispetto ad una *terna di riferimento*.

Lo studio della *cinematica diretta* avviene con un approccio sistematico, fondato sull'algebra matriciale, che permette di esprimere la posizione e l'orientamento dell'organo terminale in funzione delle variabili di giunto (angoli).

Lo studio della *cinematica inversa* invece consiste nella determinazione delle variabili di giunto corrispondenti ad un configurazione assegnata dell'organo terminale.

Lo studio della cinematica concerne anche l'analisi del *sistema operativo*, lo spazio entro il quale il manipolatore è libero di muoversi.

Si farà inoltre riferimento alla *convenzione di Denavit-Hartenberg* per lo studio dell'equazione cinematica diretta del manipolatore a catena aperta.

3.2 Cinematica Diretta

Riportiamo ora agli occhi del lettore alcune notazioni generali prima di affrontare lo studio della cinematica diretta per il braccio manipolatore a due gradini libertà. Innanzitutto, sia ben noto che un *corpo rigido* è descritto perfettamente nello spazio in termini della sua *posizione* e *orientazione* rispetto ad una terna di riferimento O_{-xyz} . La sua posizione infatti è descritta da un vettore generico $\mathbf{p} = [p_x \ p_y \ p_z]^T$. Per caratterizzarne invece la sua orientazione è necessario introdurre una terna ortonormale solidale al corpo ed esprimere i suoi versori rispetto alla terna di riferimento, cioè tre espressioni che identificano la posizione e l'orientazione degli assi del corpo rispetto alla terna di riferimento. Utilizzando una notazione più compatta però, i tre versori che esprimono l'orientamento, possono essere combinati nella *matrice di rotazione*. Ovviamente con i vettori della matrice tutti indipendenti tra di loro, tutti ortogonali.

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} & & \\ \mathbf{x}' & \mathbf{y}' & \mathbf{z}' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x'_x & y'_x & z'_x \\ x'_y & y'_y & z'_y \\ x'_z & y'_z & z'_z \end{bmatrix} \quad (3.1)$$

dove i perdici esprimono la relazione di rotazione.

Le matrici di rotazione in genere forniscono una descrizione ridondante dell'orientamento di una terna, utilizzando un vettore di angoli $\phi = [\varphi \ \theta \ \psi]$ ogni matrice può essere ricavata per composizione di tre rotazioni elementari secondo opportune sequenze in modo da garantire la corrispondenza tra gli assi. A questo proposito si fa riferimento all'importanza delle rotazioni ZYZ e ZYX (o RPY) molto utili per lo studio della cinematica inversa.

Senza dilungarci troppo, per la rappresentazione di una terna nello spazio in forma compatta si fa uso della *trasformazione compatta*, in pratica una matrice in cui oltre alla rotazione della terna rispetto a quella di riferimento si affianca il vettore che incide nella posizione della terna; la *rappresentazione omogenea* per la trasformazione di coordinate

tra la terna 0 e la terna 1 si definisce:

$$\mathbf{A}_1^0 = \begin{bmatrix} \mathbf{R}_1^0 & p_1^0 \\ 0^T & 1 \end{bmatrix} \quad (3.2)$$

dove il vettore di zeri e l'uno vengono aggiunti per rendere la matrice compatta (quadrata). Non più ortogonale.

Dunque la conoscenza della rappresentazione omogenea ci permette di pensare alla catena dei corpi rigidi che compongono il manipolatore come ad una sequenza di terne, dunque alla posizione dell'organo terminale corrisponde un vettore, dato dal prodotto matriciale delle terne che identificano i giunti: dove la matrice di rappresentazione

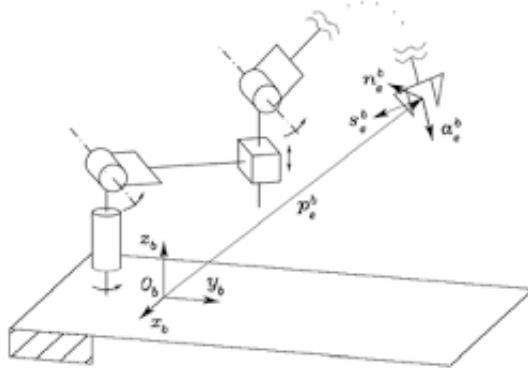


Figura 3.1: Orientamento e posizione di un organo terminale.

omogenea, dalla terna $O_b - x_b y_b z_b$ alla terna dell'organo terminale $O_e - x_e y_e z_e$ è:

$$\mathbf{T}_e^b(\mathbf{q}) = \begin{bmatrix} \mathbf{n}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{s}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{a}_e^b(\mathbf{q}) & \mathbf{p}_e^b(\mathbf{q}) \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.3)$$

dove il vettore $\mathbf{a}_e^b(\mathbf{q})$ è il vettore di *approccio* cioè riferendosi ad una pinza è il vettore in direzione dell'oggetto da afferrare, $\mathbf{s}_e^b(\mathbf{q})$ è il vettore di *scivolamento*, perpendicolare al piano della pinza e $\mathbf{n}_e^b(\mathbf{q})$ la *norma*, vettore normale agli altri due. $\mathbf{p}_e^b(\mathbf{q})$ è il vettore che congiunge le due terne.

Dunque si può pensare alla catena aperta come ad una combinazione di matrici di rotazione:

$$\mathbf{T}_n^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(q_1) \mathbf{A}_2^1(q_2) \dots \mathbf{A}_n^{n-1}(q_n) \quad (3.4)$$

Inoltre per ottenere in maniera sistematica la costruzione di un braccio manipolatore, esiste una notazione chiamata *Denavit-Hartenberg* che ci permette di costruire qualsiasi catena aperta con l'identificazione di soli tre parametri per giunto, cioè:

a_i la distanza di O_i da O_{i+1} (tra i due frame)

d_i coordinata su z_{i-1} di O_{i+1}

α_i angolo rispetto l'asse x_i tra z_{i-1} e z_i , positivo in senso antiorario

θ_i angolo rispetto l'asse z_{i-1} tra x_{i-1} e x_i , positivo in senso antiorario

questi parametri ci permettono di costruire mediante un'opportuna matrice di trasformazione (in genere una matrice degli angoli di Eulero), la matrice omogenea del manipolatore e viceversa.

In appendice è possibile consultare lo studio della cinematica diretta ed inversa di un braccio manipolatore antropomorfo a sei gradi di libertà ottenuto mediante l'applicazione del metodo Denavit-Hartenberg.

3.2.1 Cinematica diretta del manipolatore

Studiamo ora la struttura del manipolatore a due link in *Figura 3.2*, le cui equazioni risultano abbastanza semplici ma che in questo capitolo cercheremo di analizzarle con le conoscenze sopra riportate:

riportiamo dunque la matrice omogenea per ciascun giunto (per brevità $\sin \theta_i = s_i$ e $\cos \theta_i = c_i$):

$$\mathbf{A}_1^0(\theta_1) = \begin{bmatrix} c_1 & -s_1 & 0 & a_1 c_1 \\ s_1 & c_1 & 0 & a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \mathbf{A}_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_2 & -s_2 & 0 & a_2 c_2 \\ s_2 & c_2 & 0 & a_2 s_2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (3.5)$$

dunque la matrice omogenea totale (per brevità $\sin(\theta_i + \theta_y) = s_{iy}$ e $\cos(\theta_i + \theta_y) = c_{iy}$):

$$\mathbf{T}_2^0(\mathbf{q}) = \mathbf{A}_1^0(\theta_1)\mathbf{A}_2^1(\theta_2) = \begin{bmatrix} c_{12} & -s_{12} & 0 & a_2 c_{12} + a_1 c_1 \\ s_{12} & c_{12} & 0 & a_2 s_{12} + a_1 s_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{dove} \quad \mathbf{q} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \end{bmatrix} \quad (3.6)$$

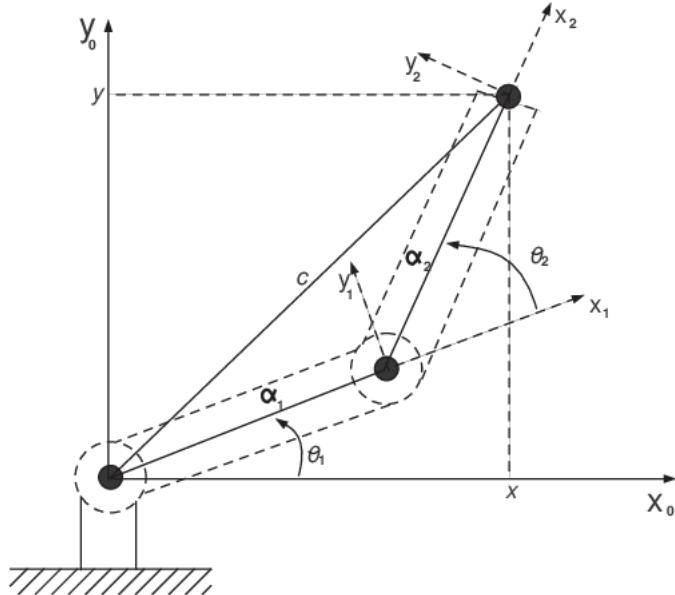


Figura 3.2: Manipolatore planare a due bracci (schema cinematico).

da cui si evince chiaramente, con riferimento alla matrice di rappresentazione omogenea in *Formula 3.3* messa in confronto con la matrice di rotazione in *Formula 3.1*, che il vettore *norma* è la colonna nulla z , in virtù del fatto che operiamo le rotazioni in assi tutti paralleli a z , e che il vettore di *approccio* coincide con la colonna y mentre quello di *scivolamento* con x .

Abbiamo ottenuto dunque la rotazione del frame dell'end-effector e la sua distanza rispetto alla terna base di origine degli assi.

Ovviamente per qualsiasi altro tipo di manipolatore a catena aperta il procedimento è lo stesso.

3.3 Cinematica Inversa

Il problema cinematico inverso riguarda la determinazione delle variabili di giunto, una volta assegnate posizione e orientamento dell'organo terminale. Tale metodo è di fondamentale importanza per tradurre le specifiche di moto dell'organo terminale assegnate

allo spazio operativo, nei moti corrispondenti allo spazio dei giunti.

Il problema cinematico inverso risulta piuttosto complesso in quanto le equazioni sono in genere e non sempre è possibile trovare una forma chiusa per la soluzione, infatti spesso si ottengono soluzioni *multiple* (un punto nello spazio può essere raggiunto da diverse combinazioni di angoli) o *infinite* (manipolatore ridondante) o addirittura *non ammissibili* (fuori dalla portata del manipolatore).

3.3.1 Cinematica inversa del manipolatore

La schematizzazione del manipolatore è identica all'esempio precedente in *Figura 3.2*, ora però si procede in maniera opposta facendo riferimento alla conoscenza di una posizione iniziale (x,y) nel piano. Applicando il teorema di Carnot al triangolo che ha per lati a_1 , a_2 e c , si ha:

$$c^2 = x^2 + y^2 = a_1^2 + a_2^2 - 2a_1a_2 \cos(\pi - \theta_2) \quad (3.7)$$

da cui si ottiene direttamente l'angolo:

$$\theta_2 = \pm \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 - a_1^2 - a_2^2}{2a_1a_2}\right) \quad (3.8)$$

nella quale il segno dell'angolo dipende dalla configurazione del manipolatore. Per la configurazione a *gomito basso*, cioè il giunto dei due link sotto al segmento c , l'angolo avrà segno positivo, viceversa per la configurazione a *gomito alto*.

Per l'angolo del primo giunto invece, θ_1 , conviene affrontare il calcolo passando per la determinazione intermedia degli angoli α e β che soddisfano la relazione $\alpha = \theta_1 + \beta$. Per prima cosa scriviamo:

$$\alpha = \arctan 2(x, y) \quad (3.9)$$

mentre per determinare β si sfrutta la proprietà della proiezione di un segmento, c sulla semiretta passante per il primo braccio:

$$a_1 + a_2 \cos \theta_2 = \sqrt{x^2 + y^2} \cos \beta \quad (3.10)$$

da cui si ottiene, utilizzando l'espressione in *Formula 3.8*, ricordando che $\cos(\pi - \theta_2) = -\cos \theta_2$:

$$\beta = \arccos\left(\frac{a_1 + a_2 \cos \theta_2}{\sqrt{x^2 + y^2}}\right) = \arccos\left(\frac{x^2 + y^2 + a_1^2 - a_2^2}{2a_1\sqrt{x^2 + y^2}}\right) \quad (3.11)$$

infine si trova l'angolo del primo braccio semplicemente ponendo:

$$\theta_1 = \alpha \mp \beta \quad (3.12)$$

dove ancora una volta il segno dipende dalla configurazione a gomito alto o basso ma stavolta in maniera opposta a θ_2 .

Fonti bibliografiche: [eBS00, Roc]

Capitolo 4

Dinamica

4.1 Generalità

In questo capitolo viene presentata l'analisi dinamica del manipolatore a due gradi di libertà, cioè lo studio delle relazioni esistenti tra *posizione*, *velocità*, *accelerazione* di ogni giunto e le *forze generalizzate* ad esso applicate.

La deduzione del modello dinamico di un manipolatore robotico funge da elemento cardine per la risoluzione del problema di simulazione del moto, e quindi per la determinazione di algoritmi di controllo.

La simulazione del moto di un manipolatore può essere d'aiuto nella progettazione di prototipi, infatti permette di provare algoritmi di controllo e di trovare tecniche per la pianificazione di traiettorie senza la loro realizzazione fisica.

Dunque tratteremo della formulazione di Lagrange, metodo che consente la derivazione delle equazioni del moto di un manipolatore, concettualmente sistematica che conduce alla derivazione del modello dinamico in forma chiusa e, successivamente, con l'approccio della *dinamica inversa* otterremo le equazioni del moto del nostro manipolatore.

4.2 Formulazione di Lagrange

Il modello dinamico di un manipolatore descrive le relazioni esistenti tra le coppie di attuazione dei giunti e il moto della struttura.

La formulazione di Lagrange, fa sì che le equazioni del moto possano essere descritte indipendentemente dal sistema di coordinate di riferimento.

Scelte delle variabili $\lambda_i, i = 1, \dots, n$ chiamate *coordinate generalizzate* che descrivono la posizione degli elementi meccanici (n gradi di mobilità), si definisce *lagrangiana* del sistema l'equazione:

$$\mathcal{L} = \mathcal{T} - \mathcal{U} \quad (4.1)$$

dove \mathcal{T} e \mathcal{U} sono rispettivamente l'energia cinetica e potenziale totali del sistema.

Le equazioni di Lagrange sono espresse da:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\lambda}_i} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_i} = \xi_i \quad i = 1, \dots, n \quad (4.2)$$

dove ξ_i è la *forza generalizzata* associata alla coordinata generalizzata λ_i . Tale equazione definisce la relazione esistente tra forze generalizzate applicate al manipolatore, posizione, velocità e accelerazione, a partire dalla determinazione dell'energia cinetica e potenziale del sistema meccanico.

Per un manipolatore a catena cinematica aperta, si associano naturalmente le coordinate generalizzate alle *variabili di giunto*:

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{bmatrix} = \mathbf{q} \quad (4.3)$$

Alle forze generalizzate daranno contributo le forze non conservative, le forze di attrito ai giunti, nonché le forze esterne di contatto indotte ai giunti.

4.3 Dinamica del manipolatore

Si consideri il manipolatore planare di cui abbiamo discusso del capitolo precedente, agente su un piano descritto da x e y (*Figura 4.1*). Per il quale il vettore delle variabili generalizzate risulta $\mathbf{q} = [\theta_1 \ \theta_2]^T$. Siano l_1, l_2 le distanze dei baricentri dei due bracci dai rispettivi assi dei giunti. Siano inoltre m_{l_1}, m_{l_2} le masse dei bracci, I_{l_1} e I_{l_2} i momenti di inerzia baricentrali delle due aste, la quali, per semplificare ulteriormente i calcoli, verranno considerate essere sottili e di densità costante.

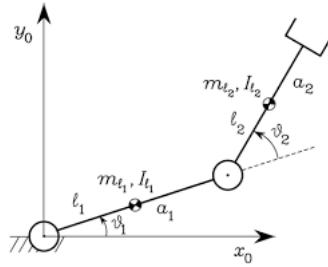


Figura 4.1: Manipolatore planare a due bracci (schema dinamico).

4.3.1 Determinazione della velocità

Consideriamo ora il centro di massa delle due aste $b_1 = \frac{l_1}{2}$ e $b_2 = \frac{l_2}{2}$ calcoliamo la posizione del centro di massa rispetto alla variazione temporale dell'angolo (nota: tutte le equazioni proposte sono in funzione del tempo):

$$\mathbf{x}_{1_{CM}} = b_1 \cos \theta_1 \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{y}_{1_{CM}} = b_1 \sin \theta_1 \mathbf{u}_\theta \quad (4.4)$$

$$\mathbf{x}_{2_{CM}} = l_1 \cos \theta_1 \mathbf{u}_\theta + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \mathbf{u}_\theta \quad \mathbf{y}_{2_{CM}} = l_1 \sin \theta_1 \mathbf{u}_\theta + b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) \mathbf{u}_\theta \quad (4.5)$$

Troviamo ora la velocità dei due baricentri, semplicemente derivando le due funzioni:

$$\begin{cases} v_{x_{1_{CM}}} = \dot{\mathbf{x}}_{1_{CM}} = -b_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{u}_\theta \\ v_{y_{1_{CM}}} = \dot{\mathbf{y}}_{1_{CM}} = -b_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{u}_\theta \end{cases} \quad (4.6)$$

$$\begin{cases} v_{x_{2_{CM}}} = \dot{\mathbf{x}}_{2_{CM}} = -l_1 \sin \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{u}_\theta - b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \mathbf{u}_\theta \\ v_{y_{2_{CM}}} = \dot{\mathbf{y}}_{2_{CM}} = l_1 \cos \theta_1 \dot{\theta}_1 \mathbf{u}_\theta + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \mathbf{u}_\theta \end{cases} \quad (4.7)$$

Quindi il modulo della velocità dei due giunti:

$$\begin{cases} v_{1_{CM}}^2 = v_{x_{1_{CM}}}^2 + v_{y_{1_{CM}}}^2 = b_1^2 \dot{\theta}_1^2 \\ v_{2_{CM}}^2 = v_{x_{2_{CM}}}^2 + v_{y_{2_{CM}}}^2 = l_1^2 \dot{\theta}_1^2 + b_2^2 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + 2l_1 b_2 \dot{\theta}_1 (\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2) \cos \theta_2 \end{cases} \quad (4.8)$$

La sua funzione Lagrangiana sarà:

$$\mathcal{L}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) = \mathcal{T}(\theta_1, \theta_2, \dot{\theta}_1, \dot{\theta}_2) - \mathcal{U}(\theta_1, \theta_2) \quad (4.9)$$

Le equazioni del moto dei due giunti:

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} = \xi_1 \\ \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = \xi_2 \end{cases} \quad (4.10)$$

Per cui, non ci resta che calcolare energia cinetica e potenziale dei giunti, così da poter trovare l'equazione esplicita del moto di un manipolatore a due bracci.

4.3.2 Determinazione dell'energia cinetica

Per il calcolo dell'energia cinetica, si fa riferimento al secondo *Teorema di König* per il corpo rigido:

$$\mathcal{T} = \mathcal{T}' + \mathcal{T}_{CM} = \frac{1}{2} M v_{CM}^2 + \frac{1}{2} I_{CM} \boldsymbol{\omega}^2 \quad (4.11)$$

dove M è la massa totale del corpo, v_{CM} la velocità del centro di massa, I_{CM} il tensore di inerzia del centro di massa e ω è la velocità angolare del corpo (*Figura 4.2*), infatti in un sistema di riferimento inerziale, l'energia cinetica di un corpo rigido è dovuta al contributo del moto del suo centro di massa rispetto all'ambiente e rispetto al suo asse di rotazione.

Dunque tornando al nostro manipolatore:

$$\mathcal{T}_1 = \frac{1}{2} m_1 v_{1_{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{1_{CM}} \boldsymbol{\omega_1}^2 \quad \mathcal{T}_2 = \frac{1}{2} m_2 v_{2_{CM}}^2 + \frac{1}{2} I_{2_{CM}} \boldsymbol{\omega_2}^2 \quad (4.12)$$

sostituiamo ora i risultati ottenuti precedentemente per la velocità (*Formula (4.8)*) e ricordiamo che $\omega = \dot{\theta}$; dunque andando a sommare e sviluppare si ottiene l'energia

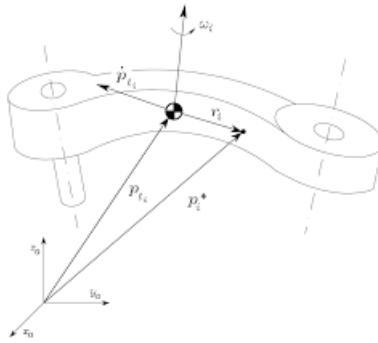


Figura 4.2: Velocità angolare di un braccio (asta).

cinetica totale del sistema:

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T} = \mathcal{T}_1 + \mathcal{T}_2 &= \frac{1}{2}m_1v_{1_{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{1_{CM}}\omega_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{2_{CM}}\omega_2^2 = \\
 &= \frac{1}{2}m_1v_{1_{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{1_{CM}}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2v_{2_{CM}}^2 + \frac{1}{2}I_{2_{CM}}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 = \\
 &= \frac{1}{2}m_1b_1^2\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}I_{1_{CM}}\dot{\theta}_1^2 + \frac{1}{2}m_2(l_1^2\dot{\theta}_1^2 + b_2^2(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 + \\
 &\quad + 2l_1b_2\dot{\theta}_1(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)\cos\theta_2) + \frac{1}{2}I_{2_{CM}}(\dot{\theta}_1 + \dot{\theta}_2)^2 = \\
 &= \dot{\theta}_1^2\left(\frac{1}{2}m_1b_1^2 + \frac{1}{2}I_{1_{CM}} + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + \frac{1}{2}m_2b_2^2 + m_2l_1b_2\cos\theta_2 + \frac{1}{2}I_{2_{CM}}\right) + \\
 &\quad + \dot{\theta}_2\left(\frac{1}{2}m_2b_2^2 + \frac{1}{2}I_{2_{CM}}\right) + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_2b_2^2 + m_2l_1b_2\cos\theta_2 + I_{2_{CM}})
 \end{aligned} \tag{4.13}$$

abbiamo ottenuto l'equazione dell'energia cinetica totale, bisogna tener conto però del fatto che i due tensori di inerzia fino ad ora calcolati rispetto ai singoli corpi rigidi $I_{1_{CM}} = \frac{1}{12}m_1l_1^2$ e $I_{2_{CM}} = \frac{1}{12}m_2l_2^2$, vanno riconsiderati rispetto all'origine degli assi.

Dal *Teorema di Huygens-Steiner* per il piano:

$$I_1^O = I_{1_{CM}} + m_1b_1^2 \quad I_2^A = I_{2_{CM}} + m_2b_2^2 \tag{4.14}$$

semplifichiamo i calcoli:

$$I_1 = \frac{1}{2}I_1^O = \frac{1}{2}I_{1_{CM}} + \frac{1}{2}m_1b_1^2 \quad I_2 = \frac{1}{2}I_2^A = \frac{1}{2}I_{2_{CM}} + \frac{1}{2}m_2b_2^2 \tag{4.15}$$

e sostituiamo nella risultato precedentemente ottenuto (*Formula (4.13)*):

$$\begin{aligned}
 \mathcal{T}_{tot} &= \dot{\theta}_1^2(I_1 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + m_2l_1b_2\cos\theta_2 + I_2) + \dot{\theta}_2(I_2) + \dot{\theta}_1\dot{\theta}_2(m_2l_1b_2\cos\theta_2 + 2I_2) \\
 &
 \end{aligned} \tag{4.16}$$

l'energia cinetica totale del sistema.

4.3.3 Determinazione dell'energia potenziale

Per quanto riguarda il potenziale, assumeremo che agisca solo la forza gravitazionale, inoltre, a parte questa, sul sistema non agiscono altre forze, né dissipative (attrito tra i giunti) né conservative (potenziale elastico) all'infuori di quelle citate. Considerando come livello zero del potenziale l'asse delle ascisse x l'espressione per l'energia potenziale totale del manipolatore a due bracci è:

$$\mathcal{U}_{tot} = \mathcal{U}_1 + \mathcal{U}_2 = g(m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2(l_1 \sin \theta_1 + b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))) \quad (4.17)$$

4.3.4 Determinazione del moto

Dunque abbiamo tutti gli elementi per riscrivere la funzione Lagrangiana (*Formula (4.1)*), l'energia cinetica (*Formula (4.13)*) e l'energia potenziale (*Formula (4.17)*):

$$\begin{aligned} \mathcal{L} = \mathcal{T}_{tot} - \mathcal{U}_{tot} &= \dot{\theta}_1^2(I_1 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + I_2) + \dot{\theta}_2(I_2) + \\ &+ \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2(m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) - g(m_1 l_1 \sin \theta_1 + m_2(l_1 \sin \theta_1 + b_2 \sin(\theta_1 + \theta_2))) \end{aligned} \quad (4.18)$$

calcoliamo ora i termini derivate parziali delle equazioni di Lagrange del moto, ricordando le *Formule (4.10)*, prima per il primo giunto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = 2\dot{\theta}_1(I_1 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + I_2) + \dot{\theta}_2(m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) \quad (4.19)$$

derivo rispetto al tempo:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} &= 2\ddot{\theta}_1(I_1 + \frac{1}{2}m_2 l_1^2 + m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + I_2) - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 + \\ &+ \ddot{\theta}_2(m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) + \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (4.20)$$

e ora il secondo termine:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} = -g(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2(l_1 \cos \theta_1 + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))) \quad (4.21)$$

calcoliamo ora anche per il secondo giunto:

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \dot{\theta}_1(2I_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2(m_2 l_1 b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) \quad (4.22)$$

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} = \ddot{\theta}_2(2I_2) + \ddot{\theta}_1(m_2l_1b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \quad (4.23)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} = -g m_2 b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 - \dot{\theta}_1^2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \quad (4.24)$$

otteniamo quindi le equazioni del moto per i due bracci, la prima:

$$\begin{aligned} \xi_1 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_1} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_1} &= 2\ddot{\theta}_1(I_1 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + m_2l_1b_2 \cos \theta_2 + I_2) - 2\dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 + \\ &\quad + \ddot{\theta}_2(m_2l_1b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) + \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 + \\ &\quad + g(m_1l_1 \cos \theta_1 + m_2(l_1 \cos \theta_1 + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))) \end{aligned} \quad (4.25)$$

e la seconda:

$$\begin{aligned} \xi_2 = \frac{d}{dt} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \dot{\theta}_2} - \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \theta_2} &= \ddot{\theta}_2(2I_2) + \ddot{\theta}_1(m_2l_1b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) - \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 + \\ &\quad + g m_2 b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \dot{\theta}_1 \dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 + \dot{\theta}_1^2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 = \\ &= \ddot{\theta}_2(2I_2) + \ddot{\theta}_1(m_2l_1b_2 \cos \theta_2 + 2I_2) + g m_2 b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) + \\ &\quad + \dot{\theta}_1^2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \end{aligned} \quad (4.26)$$

4.4 Modello dinamico nello spazio dei giunti

In definitiva, le equazioni del moto, possono essere riscritte nella forma matriciale compatta che rappresenta il *modello dinamico* nello *spazio dei giunti*. La disponibilità di tale modello è indispensabile per il progetto meccanico della struttura, per il dimensionamento degli attuatori, per lo studio dell'algoritmo di controllo e inoltre per la pianificazione delle traiettorie:

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{F}_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}}) + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} - \mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h} \quad (4.27)$$

La prima matrice $\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}}$, detta *matrice d'inerzia* esprime i vari contributi relativi all'energia cinetica dei singoli bracci e rotori, la seconda $\mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}}$ rappresenta il contributo delle *forze centrifughe* che delle *forze di Coriolis* (di deviazione di traiettoria). $\mathbf{F}_v \dot{\mathbf{q}}$ è il termine delle forze di *attrito viscoso*, omesse in questo testo, $\mathbf{F}_s \text{sgn}(\dot{\mathbf{q}})$ sono invece

le coppie di *attrito coulombiano* (omesse). Infine $\mathbf{g}(\mathbf{q})$ il contributo della *gravità*. $\boldsymbol{\tau}$ è invece il vettore delle *coppie di attuazione* agenti sul sistema. $\mathbf{J}^T(\mathbf{q})\mathbf{h}$ è invece il termine delle *coppie di contatto*, che agiscono sull'organo terminale (omesse).

Dunque nella nostra trattazione approssimeremo il modello dinamico piuttosto con questa (*Formula (4.28)*):

$$\mathbf{B}(\mathbf{q})\ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{C}(\mathbf{q}, \dot{\mathbf{q}})\dot{\mathbf{q}} + \mathbf{g}(\mathbf{q}) = \boldsymbol{\tau} \quad (4.28)$$

scrivereemo quindi:

$$\begin{aligned} & \left[\begin{array}{cc} 2(I_1 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + m_2l_1b_2 \cos \theta_2 + I_2) & 2I_2 + m_2l_1b_2 \cos \theta_2 \\ 2I_2 + m_2l_1b_2 \cos \theta_2 & 2I_2 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \ddot{\theta}_1 \\ \ddot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \\ & + \left[\begin{array}{cc} -2\dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 & -\dot{\theta}_2 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 \\ \dot{\theta}_1 m_2 l_1 b_2 \sin \theta_2 & 0 \end{array} \right] \begin{bmatrix} \dot{\theta}_1 \\ \dot{\theta}_2 \end{bmatrix} + \quad (4.29) \\ & + \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 \cos \theta_1 + m_2(l_1 \cos \theta_1 + b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2))) \\ g m_2 b_2 \cos(\theta_1 + \theta_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

Dunque dal punto di vista della teoria dei sistemi, il manipolatore costituisce un sistema dinamico di ordine $2n$, dove n è il numero dei gradi di libertà del sistema. Dunque, dalla *Formula (4.28)*, considerando le variabili di stato, $x_1 = q \in R^n$ (vettore degli angoli θ_1 e θ_2), $x_2 = \dot{q} \in R^n$ (vettore delle velocità angolari $\dot{\theta}_1$ e $\dot{\theta}_2$), $u = \tau \in R^n$ (vettore delle coppie applicate agli attuatori), potremo riscrivere la formula così:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = x_2 \\ \dot{x}_2 = -B(x_1)^{-1}(C(x_1, x_2)x_2 + g(x_1)) + B(x_1)^{-1}u \end{cases} \quad (4.30)$$

da \dot{x}_1 e \dot{x}_2 si ricavano le accelerazioni angolari $\ddot{\theta}_1$ e $\ddot{\theta}_2$.

4.5 Sistema dinamico

Una rappresentazione in spazio di stato è una descrizione di un sistema dinamico in cui si fa particolare riferimento alle variabili di stato del sistema, che formano uno spazio vettoriale (spazio delle fasi) in cui esso viene rappresentato. Le variabili di stato sono un sottoinsieme delle variabili del sistema, e ne rappresentano la situazione ad ogni dato istante di tempo.

Nel nostro esempio, ci ritroviamo a dover rappresentare l'I/S/U (ingresso, stato, uscita) di un sistema MIMO (multi input - multi output) con n stati $\mathbf{x} = [x_1, \dots, x_n]^T$, m ingressi $\mathbf{u} = [u_1, \dots, u_m]^T$ e p uscite $\mathbf{y} = [y_1, \dots, y_p]^T$, descritto come segue (rispetto al tempo):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{Ax} + \mathbf{Bu} \\ \mathbf{y} = \mathbf{Cx} + \mathbf{Du} \end{cases} \quad (4.31)$$

dove la matrice $\mathbf{A} \in R^{n \times n}$ è la matrice dinamica del sistema, $\mathbf{B} \in R^{n \times m}$ la matrice di ingresso, $\mathbf{C} \in R^{p \times n}$ la matrice di uscita e $\mathbf{D} \in R^{p \times m}$ la matrice di legame diretto ingresso - uscita che nei sistemi dinamici reali è nulla.

In genere i sistemi di equazioni ottenute dalla *meccanica Lagrangiana* non sono mai perfettamente lineari, anzi, in generale i sistemi dinamici reali non lo sono mai; cioè non è possibile esprimere almeno una delle equazioni presenti come combinazione lineare di incognite e costanti. Sappiamo bene però che alcuni tipi di movimento risultano essere lineari per piccoli valori di movimento, pensiamo per esempio al pendolo fisico, dunque studieremo il modello dinamico per mezzo di un adeguato modello linearizzato, che rispecchi perfettamente il comportamento di quello non lineare nell'intorno di un preciso movimento nominale.

4.5.1 Linearizzazione del sistema dinamico

Si consideri un sistema dinamico, a dimensione finita, MIMO, a tempo continuo, non lineare, stazionario (comportamento costante nel tempo):

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad (4.32)$$

e si prendano due stati, in due diversi momenti, un *movimento nominale* $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ e un *movimento perturbato* $\mathbf{x}(t)$.

Il movimento nominale $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ è ottenuto applicando un ingresso nominale $\tilde{\mathbf{u}}(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale nominale $\tilde{\mathbf{x}}_0$, a cui corrisponde un'uscita nominale $\tilde{\mathbf{y}}(t)$. Soddisfano le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = f(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \\ \tilde{\mathbf{y}}(t) = g(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \end{cases} \quad \text{con} \quad \tilde{\mathbf{x}}(t=0) = \tilde{\mathbf{x}}_0 \quad (4.33)$$

Il movimento perturbato $\mathbf{x}(t)$ è ottenuto applicando un ingresso differente, di perturbazione, $\mathbf{u}(t)$ al sistema posto in uno stato iniziale differente, perturbato, \mathbf{x}_0 , a cui corrisponde un'uscita perturbata $\mathbf{y}(t)$. Soddisfano le seguenti equazioni:

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad \text{con} \quad \mathbf{x}(t=0) = \mathbf{x}_0 \quad (4.34)$$

le differenze tra le due evoluzioni temporali restituiscono la perturbazione del sistema dinamico, su ingresso e uscita:

$$\delta_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t) = \text{perturbazione del movimento} \Rightarrow \mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta_{\mathbf{x}}(t) \quad (4.35)$$

$$\delta_{\mathbf{u}}(t) = \mathbf{u}(t) - \tilde{\mathbf{u}}(t) = \text{perturbazione dell'entrata} \Rightarrow \mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \delta_{\mathbf{u}}(t) \quad (4.36)$$

$$\delta_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t) = \text{perturbazione dell'uscita} \Rightarrow \mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \delta_{\mathbf{y}}(t) \quad (4.37)$$

e l'evoluzione temporale della perturbazione sullo stato $\delta_{\mathbf{x}}(t)$ è soluzione dell'equazione differenziale:

$$\dot{\delta}_{\mathbf{x}}(t) = \frac{d(\delta_{\mathbf{x}}(t))}{dt} = \frac{d(\mathbf{x}(t) - \tilde{\mathbf{x}}(t))}{dt} = \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - f(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \quad (4.38)$$

dove $f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t))$ può essere sviluppata in *serie di Taylor* in un intorno di $\tilde{\mathbf{x}}(t)$ e $\tilde{\mathbf{u}}(t)$:

$$\begin{aligned} f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) &= f(\tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta_{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t) + \delta_{\mathbf{u}}(t)) = f(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) + \\ &+ \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \tilde{\delta}_x + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \Big|_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \tilde{\delta}_u + \dots \end{aligned} \quad (4.39)$$

lo sviluppo in serie può essere arrestato mediante il troncamento al termine lineare, trascurando gli ordini superiori al primo:

$$f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \cong f(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \tilde{\delta}_x + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \Big|_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \tilde{\delta}_u \quad (4.40)$$

quindi $\delta_x(t)$ è la soluzione dell'equazione differenziale:

$$\begin{aligned} \dot{\delta}_{\mathbf{x}}(t) &= \dot{\mathbf{x}}(t) - \dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - f(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \cong \\ &\cong \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \tilde{\delta}_x + \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \Big|_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \tilde{\delta}_u = \\ &= \mathbf{A}(t)\delta_x(t) + \mathbf{B}(t)\delta_u(t) \end{aligned} \quad (4.41)$$

dove $\mathbf{A}(t)$ e $\mathbf{B}(t)$ sono le prime due *matrici Jacobiane* dello spazio di stato:

$$\mathbf{A}(t) = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \\ (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \atop (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \in R^{n \times n} \quad (4.42)$$

$$\mathbf{B}(t) = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \\ (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \atop (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \in R^{n \times p} \quad (4.43)$$

e procedendo allo stesso modo per la perturbazione dello stato di uscita

$$\begin{aligned} \delta_y(t) &= \mathbf{y}(t) - \tilde{\mathbf{y}}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) - g(\tilde{\mathbf{x}}(t), \tilde{\mathbf{u}}(t)) \cong \\ &\cong \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \\ (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})}} \tilde{\delta}_x + \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \\ (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})}} \tilde{\delta}_u = \\ &= \mathbf{C}(t)\delta_x(t) + \mathbf{D}(t)\delta_u(t) \end{aligned} \quad (4.44)$$

$$\mathbf{C}(t) = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \\ (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \atop (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \in R^{q \times n} \quad (4.45)$$

$$\mathbf{D}(t) = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \\ (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_1}{\partial x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial g_n}{\partial x_1} & \cdots & \frac{\partial g_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}_{(\mathbf{x}=\tilde{\mathbf{x}}) \atop (\mathbf{u}=\tilde{\mathbf{u}})} \in R^{q \times p} \quad (4.46)$$

quindi l'evoluzione temporale del sistema dinamico

$$\begin{cases} \dot{\mathbf{x}}(t) = f(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \\ \mathbf{y}(t) = g(\mathbf{x}(t), \mathbf{u}(t)) \end{cases} \quad (4.47)$$

nell'intorno del movimento nominale $\tilde{\mathbf{x}}(t)$, $\tilde{\mathbf{u}}(t)$, $\tilde{\mathbf{y}}(t)$ può essere espressa in forma approssimata come $\mathbf{x}(t) = \tilde{\mathbf{x}}(t) + \delta_{\mathbf{x}}(t)$, $\mathbf{u}(t) = \tilde{\mathbf{u}}(t) + \delta_{\mathbf{u}}(t)$, $\mathbf{y}(t) = \tilde{\mathbf{y}}(t) + \delta_{\mathbf{y}}(t)$ in funzione delle perturbazioni $\delta_{\mathbf{x}}(t)$ e $\delta_{\mathbf{y}}(t)$ che sono le soluzioni del sistema linearizzato:

$$\begin{cases} \dot{\delta}_{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{A}(t)\delta_x(t) + \mathbf{B}(t)\delta_u(t) \\ \delta_{\mathbf{y}}(t) = \mathbf{C}(t)\delta_x(t) + \mathbf{D}(t)\delta_u(t) \end{cases} \quad (4.48)$$

che in generale può risultare variabile nel tempo anche se il sistema dinamico non lineare da approssimare è stazionario; se il movimento nominale considerato è un punto di equilibrio allora le matrici $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}, \mathbf{D}$ del sistema dinamico linearizzato sono costanti e il sistema che si ottiene è LTI (lineare tempo invariante):

$$\begin{cases} \dot{\delta_x}(t) = \mathbf{A}\delta_x(t) + \mathbf{B}\delta_u(t) \\ \dot{\delta_y}(t) = \mathbf{C}\delta_x(t) + \mathbf{D}\delta_u(t) \end{cases} \quad (4.49)$$

l'approssimazione del sistema dinamico sarà tanto maggiori quanto minori saranno le perturbazioni di movimento.

4.5.2 Spazio di stato

Applichiamo dunque quanto esposto finora al nostro caso, le nostre variabili di stato saranno $x_1 = \theta_1$, $x_2 = \theta_2$, $x_3 = \dot{\theta}_1$, $x_4 = \dot{\theta}_2$, con ingressi $u_1 = \tau_1$ e $u_2 = \tau_2$. Individuiamo ora un punto di equilibrio statico per il sistema come movimento nominale, poniamo, $\dot{x}_1 = \dot{\theta}_1 = 0$, $\dot{x}_2 = \dot{\theta}_2 = 0$, $\ddot{x}_1 = \ddot{\theta}_1 = 0$, $\ddot{x}_2 = \ddot{\theta}_2 = 0$, $u_1 = 0$ e $u_2 = 0$ nelle equazioni del nostro sistema dinamico:

$$\begin{aligned} & \begin{bmatrix} 2(I_1 + \frac{1}{2}m_2l_1^2 + m_2l_1b_2 \cos x_2 + I_2) & 2I_2 + m_2l_1b_2 \cos x_2 \\ 2I_2 + m_2l_1b_2 \cos x_2 & 2I_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \\ & + \begin{bmatrix} -2\dot{x}_2 m_2 l_1 b_2 \sin x_2 & -\dot{x}_2 m_2 l_1 b_2 \sin x_2 \\ x_1 m_2 l_1 b_2 \sin x_2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x}_1 \\ \dot{x}_2 \end{bmatrix} + \quad (4.50) \\ & + \begin{bmatrix} g(m_1 l_1 \cos x_1 + m_2(l_1 \cos x_1 + b_2 \cos(x_1 + x_2))) \\ g m_2 b_2 \cos(x_1 + x_2) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

ovvero:

$$\begin{cases} m_1 g l_1 \cos x_1^{eq} + m_2 g (l_1 \cos x_1^{eq} + b_2 \cos(x_1^{eq} + x_2^{eq})) = 0 \\ m_2 g b_2 \cos(x_1^{eq} + x_2^{eq}) = 0 \end{cases} \quad (4.51)$$

il passaggio successivo e i risultati:

$$\begin{cases} \cos x_1^{eq} = 0 \\ \cos(x_1^{eq} + x_2^{eq}) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1^{eq} = \pm \frac{\pi}{2} \\ x_2^{eq} = \pm \frac{\pi}{2} - x_1^{eq} \end{cases} \quad (4.52)$$

Le matrici dello spazio di stato vengono solo riportate in formula, per la soluzione si utilizza il calcolatore, le funzioni delle quattro variabili di stato:

$$\begin{cases} \dot{x}_1 = f_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ \dot{x}_2 = f_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ \dot{x}_3 = f_3(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ \dot{x}_4 = f_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \end{cases} \quad \begin{cases} y_1 = g_1(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ y_2 = g_2(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ y_3 = g_3(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \\ y_4 = g_4(x_1, x_2, x_3, x_4, u_1, u_2) \end{cases} \quad (4.53)$$

e le matrici dello stazio di stato:

$$\mathbf{A} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \frac{\partial f_1}{\partial x_3} & \frac{\partial f_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x_1} & \frac{\partial f_2}{\partial x_2} & \frac{\partial f_2}{\partial x_3} & \frac{\partial f_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_3}{\partial x_1} & \frac{\partial f_3}{\partial x_2} & \frac{\partial f_3}{\partial x_3} & \frac{\partial f_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial f_4}{\partial x_1} & \frac{\partial f_4}{\partial x_2} & \frac{\partial f_4}{\partial x_3} & \frac{\partial f_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} \quad (4.54)$$

$$\mathbf{B} = \frac{\partial f(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u_1} & \frac{\partial f_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u_1} & \frac{\partial f_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u_1} & \frac{\partial f_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial f_4}{\partial u_1} & \frac{\partial f_4}{\partial u_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} \quad (4.55)$$

$$\mathbf{C} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial x} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x_1} & \frac{\partial g_1}{\partial x_2} & \frac{\partial g_1}{\partial x_3} & \frac{\partial g_1}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x_1} & \frac{\partial g_2}{\partial x_2} & \frac{\partial g_2}{\partial x_3} & \frac{\partial g_2}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g_3}{\partial x_1} & \frac{\partial g_3}{\partial x_2} & \frac{\partial g_3}{\partial x_3} & \frac{\partial g_3}{\partial x_4} \\ \frac{\partial g_4}{\partial x_1} & \frac{\partial g_4}{\partial x_2} & \frac{\partial g_4}{\partial x_3} & \frac{\partial g_4}{\partial x_4} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} \quad (4.56)$$

$$\mathbf{D} = \frac{\partial g(\mathbf{x}, \mathbf{u})}{\partial u} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} = \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial u_1} & \frac{\partial g_1}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_2}{\partial u_1} & \frac{\partial g_2}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_3}{\partial u_1} & \frac{\partial g_3}{\partial u_2} \\ \frac{\partial g_4}{\partial u_1} & \frac{\partial g_4}{\partial u_2} \end{bmatrix} \Big|_{\substack{(\mathbf{x}=\mathbf{x}_{\text{eq}}) \\ (\mathbf{u}=0)}} \quad (4.57)$$

In appendice è stato implementato un algoritmo per la risoluzione delle matrici, in questo modo è stata ottenuta la rappresentazione dello spazio di stato del sistema dinamico, modello del sistema reale di un manipolatore a due bracci e due gradi di libertà.

Fonti Bibliografiche:[Tar18, Gas18, Ori18, eBS00, Pan14, Sha, AMM, Roc]

Capitolo 5

Algoritmo di apprendimento iterativo

5.1 Generalità

In questo capitolo si espone il concetto base dell'algoritmo di controllo ad apprendimento iterativo. Le due difficoltà principali nella messa appunto del controllo di un sistema sono la *stabilizzazione* e le *prestazioni*. In questa seconda categoria un problema tipico è forzare l'uscita di un sistema dinamico a riprodurre fedelmente una traiettoria desiderata, quella ottimale. Esistono varie tecniche nella teoria del controllo, ma a seconda dei sistemi dinamici da analizzare, non sempre è possibile soddisfare le specifiche necessarie per trovare la soluzione a queste due incognite. *Iterative learning control* o semplicemente *ILC* è un nuovo arrivato tra gli strumenti dell'ingegneria del controllo, molto utile nella risoluzione di problemi associati alla performance dei sistemi. Il *controllo ad apprendimento iterativo* è una tecnica per migliorare la risposta transitoria e l'esecuzione della traiettoria per operazioni e processi che si ripetono più volte. Infatti, se pensiamo al manipolatore industriale, questo aspetta in posizione iniziale finché il programma non ordina di eseguire una determinata *task*, dunque il braccio esegue un movimento secondo una certa traiettoria e torna in posizione iniziale. Il processo viene ripetuto più e più volte. Generalmente i controllori ricevono in input un segnale e riproducono una determinata uscita contenente un errore che cercano di correggere; se il

controllore però non tiene memoria di determinati errori, esso continuerà a riprodurli e la risposta sarà sempre la stessa.

Da questo punto di vista, il controllo ad apprendimento iterativo può essere utilizzato per migliorare la risposta del sistema, infatti l'ILC registra i dati di ogni iterazione del sistema e computa determinate modifiche affinché l'iterazione successiva non presenti più quell'errore. L'algoritmo si ripete ad ogni prova finché la risposta non presenta il livello di performance ricercato.

La peculiarità di questo algoritmo è la correzione della risposta al segnale di ingresso ad ogni ricorsione, sulla base delle analisi delle precedenti iterazioni.

5.2 Descrizione dell'algoritmo

L'impostazione generale è questa: il sistema riceve inizialmente un segnale in input, dopo un transitorio iniziale, per inseguire correttamente la traiettoria, questo, registra ad ogni iterazione l'uscita e cerca un nuovo segnale da passare in entrata per riprodurre quello originale. Tale ricerca deve ovviamente arrivare ad una convergenza assoluta per ottenere un risultato accettabile. La *velocità di convergenza* e la *stabilità asintotica* sono sempre più dei punti cardine per la tecnica ILC, che si concentra sulla progettazione di schemi di controllo che diano risposte sempre più adeguate nel transitorio. La *Figura*

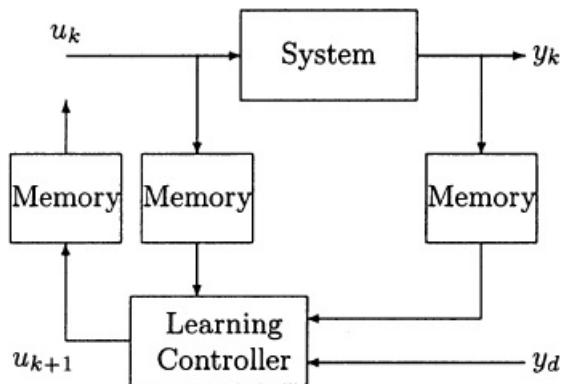


Figura 5.1: Modello di una configurazione ILC.

5.1 illustra l'idea base di un algoritmo di controllo ad apprendimento iterativo. Per spiegarne il funzionamento, assumiamo che tutti i segnali mostrati siano definiti in un intervallo $t \in [0, t_f]$. Il pedice k sta ad indicare il numero di prova o di ripetizione. Analizzando lo schema, in un primo momento di settaggio, durante la k -esima prova un'entrata $u_k(t)$ applicata al sistema produce un uscita $y_k(t)$. Entrambi i segnali vengono registrati su una memoria finché la prova non è conclusa, dopodiché l'algoritmo ILC è in grado di processare questi segnali con lo scopo di produrre il segnale successivo $u_{k+1}(t)$ il quale viene memorizzato a sua volta per essere applicato come ingresso alla $(k + 1)$ -esima iterazione. Parlando in termini di errore $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, il nuovo segnale in input $u_{k+1}(t)$ sarà tale da ridurre ad ogni iterazione l'errore rispetto agli input precedenti $u_k(t)$. Possiamo descrivere è più precisamente questo algoritmo, introducendo qualche elemento in più. Ad esempio, sia $f : U \Rightarrow Y$ un operatore non lineare funzione tra lo spazio dei vettori U e V , e scrivendo $y = f(u)$ indichiamo la suddetta relazione con $y \in Y$ e $u \in U$. Nel caso generale di un sistema S che realizza la corrispondenza indicata sopra in maniera non lineare, $y(t) = f_S(u(t), t)$, si cerca di ottenere una risposta il più possibile fedele a quella desiderata $y_d(t)$. Ciò equivale a trovare un'entrata ottima $u^*(t)$ che soddisfi:

$$\min_{u(t)} \|y_d(t) - f_S(u(t), t)\| = \|y_d(t) - f_S(u^*(t), t)\| \quad (5.1)$$

In questo contesto l'ILC è una tecnica iterativa per trovare l'entrata ottima $u^*(t)$, nel caso in cui tutti i segnali siano finiti nell'intervallo di tempo $[0, t_f]$. L'approccio di tale tecnica è di generare una sequenza di input $u_k(t)$ in modo tale da far convergere la sequenza a u^* . Si cerca una sequenza:

$$u_{k+1}(t) = f_L(u_k(t'), y_k(t'), y_d(t'), t) = f_L(u_k(t'), f_S(u_k(t')), y_d(t'), t) \quad (5.2)$$

con $t' \in [0, t_f]$

tale che:

$$\lim_{x \rightarrow \infty} u_k(t) = u^*(t) \quad \forall t \in [0, t_f] \quad (5.3)$$

come si può evincere dalla tabella, l'algoritmo iterativo procede verso la convergenza tra uscita reale e desiderata attraverso un'opportuna modifica dell'entrata, valutando l'errore nell'iterazione precedente: si osservi attentamente il ruolo fondamentale della

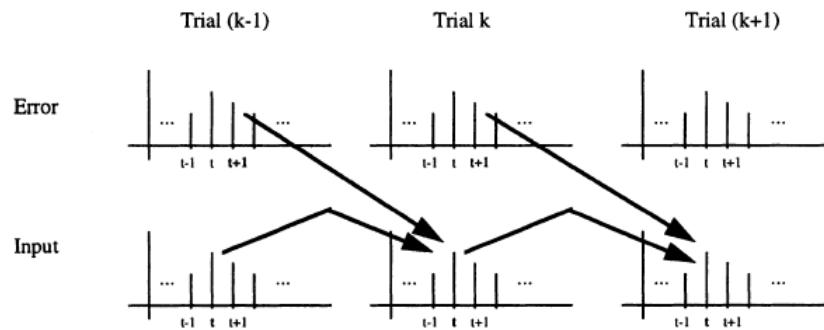


Figura 5.2: Logica ILC.

memoria, che ad ogni iterazione preserva le informazioni di quelle precedenti e computa le correzioni necessarie per le prossime, a differenza di un qualunque altro generico algoritmo di controllo feedback: le cui iterazioni restano fisse nel tempo: in cui è chiaro

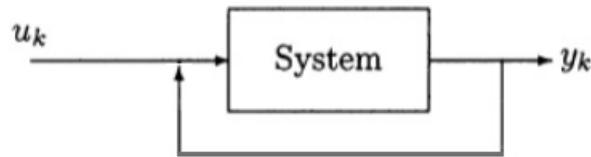


Figura 5.3: Logica Feedback.

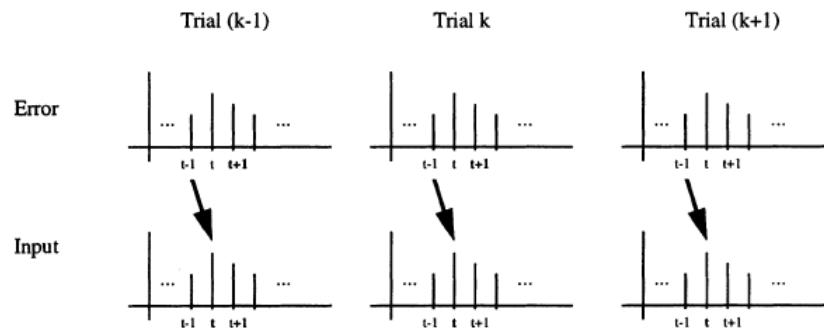


Figura 5.4: Modello di una configurazione Feedback.

come l'errore rimanga costante nel tempo. Ovviamente, l'algoritmo ILC è del tutto

indipendente dal tipo di responso desiderato $y_d(t)$, deve poter riprodurre qualunque tipo di nuova traiettoria. Inoltre va detto, ma è implicito, che per ottenere la convergenza e la stabilità della risposta, il sistema deve essere stabile. In ogni caso, l'obiettivo primario dell'ILC è di ottimizzare la risposta, non di renderla stabile.

5.3 Applicazioni

In questa parte della trattazione, si analizzeranno alcuni dei principali metodi di controllo ad apprendimento per sistemi lineari tempo invarianti. I primi studi su questa tipologia di algoritmo risalgono alla metà degli anni ottanta, in Giappone, da parte del professor Suguru Arimoto. Inizialmente vennero considerati robot modellabili con equazioni lineari e successivamente non lineari, di volta in volta linearizzate in un punto di lavoro per dare origine a sistemi lineari stazionari, oppure intorno alla traiettoria desiderata per produrre sistemi lineari tempo varianti. Considereremo dunque i sistemi lineari tempo invarianti perché il nostro manipolatore è stato ottenuto grazie ad una linearizzazione nell'intorno del punto di lavoro di equilibrio, e considereremo lo spazio di lavoro ottenuto di conseguenza. Abbiamo considerato questo caso poiché i sistemi lineari tempo invarianti sono stati i primi ad essere studiati, perché più intuitivi rispetto all'algoritmo di apprendimento iterativo e hanno portato risultati maggiori. Per questi sistemi, l'algoritmo si riduce alla correzione del segnale in entrata in base all'errore delle iterazioni precedenti, il segnale di controllo si semplifica notevolmente.

Lo schema di ILC proposto da Arimoto, insieme ad un gruppo di collaboratori, in un primo approccio a questa nuova idea, aveva questa forma:

$$u_{k+1} = u_k + \Gamma \dot{e}_k \quad (5.4)$$

da cui si evince che l'aggiornamento del segnale, si basa sulla derivata dell'errore definito come lo scostamento tra l'andamento desiderato $y_d(t)$ e quello ottenuto, cioè $e_k(t) = y_d(t) - y_k(t)$, applicando il controllo $u_k(t)$, proprio come mostrato nei grafici in *Figura 5.2*, l'algoritmo memorizza l'entrata e l'errore e computa nel modo sopra visto, sommando i segnali e generando la correzione all'iterazione successiva. Γ è una matrice costante. Inoltre dimostrarono nel caso di un sistema lineare tempo invariante, con dei segnali definiti nell'intervallo $[0, t_f]$ e con uno spazio di stato definito (come nel nostro

caso di studio, A, B, C, D), che se $CB > 0$ (cioè ha rango pieno) e se l'operatore della norma indotta $\|I - C B \Gamma\|_i$ soddisfa:

$$\|I - C B \Gamma\|_i < 1 \quad (5.5)$$

e insieme all'ipotesi che si possano ripristinare ad ogni iterazione le condizioni iniziali allora:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} y_k(t) \rightarrow y_d(t) \quad (5.6)$$

dove i indica la i -norma definita come:

$$\|x(t)\|_\lambda = \sup_{0 \leq t \leq t_f} \{e^{\lambda t} \max_{1 \leq i \leq r} |x_i|\} \quad \text{dove} \quad x(t) \in R^r \quad (5.7)$$

cioè si tratta di una norma sugli operatori indotta dalla norma vettoriale prescelta, che assicura la convergenza nell'intervallo $[0, t_f]$.

Il problema principale di questo schema è che nel caso di sistemi meccanici descritti da equazioni differenziali di secondo ordine, se per uscita si prende lo stato del sistema, la derivata dell'errore comprende anche l'accelerazione e spesso il segnale si presenta disturbato e poco accurato. In tal caso lo schema della correzione:

$$u_{k+1} = u_k + \Phi e_k \quad (5.8)$$

e si dimostra che converge secondo la l -norma:

$$\|e(t)\|_l = \left(\int_0^\infty e^T(t) e(t) dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad (5.9)$$

se applicato a sistemi LTI strettamente positivi, si avrà la risposta impulsiva $f(t)$, nel caso di una terna (A, B, C) :

$$f(t) = C e^{A(t-\tau)} B \quad (5.10)$$

per sistemi in cui vale la condizione di passività:

$$\int_0^T \int_0^t u^T(\tau) f(t-\tau) u(\tau) d\tau dt \geq \alpha \int_0^T u^T u(t) dt \quad \text{con} \quad \alpha > 0, \quad \text{cost.} \quad (5.11)$$

Successivamente Arimoto e i suoi collaboratori proposero altri algoritmi per sistemi tempo varianti e per modelli non lineari già ben noti nella robotica. Il più generale algoritmo proposto fu questo, dove l'entrata viene corretta in questa maniera:

$$u_{k+1} = u_k + \Phi e_k + \Gamma \dot{e}_k + \Psi \int e_k dt \quad (5.12)$$

dove essenzialmente l'algoritmo forma un PID con la differenza che viene processato anche l'errore del ciclo precedente e, a seconda di quali termini sono presenti, vengono dimostrate proprietà di convergenza per particolari sistemi lineari o meno, tempo invarianti o non.

Fonti bibliografiche:[Moo99, Moo]

Capitolo 6

Controllo

Capitolo 7

Appendice

Conclusioni e sviluppi futuri

La tesi è finita

Bibliografia

- [AI18] AI. La robotica industriale. <https://www.automazionenews.it/>, 2018.
- [AMM] A AL-SAIF Aalim M. Mustafa. Modeling, simulation and control of 2-r robot. https://globaljournals.org/GJRE_Volume14/5-Modeling-Simulation-and-Control.pdf.
- [Bau16] Patricia Bauer. Victor scheinman. <https://www.britannica.com/>, 2016.
- [eBS00] L. Sciavicco e B. Siciliano. *Robotica Industriale*. McGraw-Hill, 2000.
- [Gas18] A. Gasparri. Sistemi non lineari e linearizzazione. http://www.dia.uniroma3.it/~gasparri/Stuff/complementi_teoria_dei_sistemi.pdf, 2018.
- [Moo] Kvin L. Moore. An introduction to iterative learning control theory. http://inside.mines.edu/~kmoore/504_ILC_Seminar-Save.pdf.
- [Moo99] Kvin L. Moore. *Iterative Learning Control: An Expository Overview - Capitolo 9*. 1999.
- [Mun10] George E. Munson. The rise and fall of unimation, inc. – story of robotics innovation triumph that changed the world! <http://www.botmag.com/>, 2010.
- [Ori18] Prof. G. Oriolo. Controllo dei robot manipolatori. <https://www.dis.uniroma1.it/~oriolo/rm3/cca/matdid/slides/ContrRobot.pdf>, 2018.
- [Pan14] Prof. S. Panzieri. *Appunti dalle lezioni sulla analisi delle rappresentazioni nello spazio di stato di sistemi dinamici e sulla sintesi di semplici sistemi di controllo*. Rev. 7.3, 2014.

- [Roc] Prof. Paolo Rocco. Controllo dei robot. <http://home.deib.polimi.it/rocco/controlrobot/cinematica.pdf>.
- [Sha] Mohammad Shahab. 2dof robotic manipulator control design simulation. https://bcourses.berkeley.edu/files/70469441/download?download_frd=1.
- [Tar18] Prof. Taragna. Linearizzazione dei sistemi dinamici. <http://www.ladispe.polito.it/corsi/ContrAutoInf270/material/Linearizzazione.pdf>, 2018.
- [Wika] Wikipedia. <https://en.wikipedia.org/wiki/Unimation>.
- [Wikb] Wikipedia. https://it.wikipedia.org/wiki/Robot_PUMA.