Exercice 3 (ML)

MLE pour θ

$$L(\theta) = \prod_{i=1}^{10} P_r(X_i) = \left[\frac{1-\theta}{3}\right]^2 \cdot \left[\frac{2\theta}{3}\right]^2 \cdot \left[\frac{2(1-\theta)}{3}\right]^3 \left[\frac{\theta}{3}\right]^3$$

$$\ell(\theta) = \ln L(\theta) = 2\ln\left(\frac{1-\theta}{3}\right) + 2\ln\left(\frac{2\theta}{3}\right) + 3\ln\left(\frac{2(1-\theta)}{3}\right) + 3\ln\left(\frac{\theta}{3}\right)$$

$$\max_\theta \ell(\theta) \Rightarrow \left.\frac{\partial \ell(\theta)}{\partial\theta}\right|_{\theta=\hat\theta} = 0$$

$$\Leftrightarrow 2\left(\frac{-1}{1-\hat\theta}\right) + 2\left(\frac{2}{2\hat\theta}\right) + 3\left(\frac{-2}{2(1-\hat\theta)}\right) + 3\cdot\left(\frac{1}{\hat\theta}\right) = 0.$$

$$\Leftrightarrow -2\hat\theta + 2 - 2\hat\theta - 3\hat\theta + 3 - 3\hat\theta = 0$$

$$\Leftrightarrow -10\hat\theta + 5 = 0 \Rightarrow \boxed{\hat\theta = \frac{1}{2}}$$

Exercice 4

a) $Y = 0$ ou 1. Donc $E(Y) = P_r(Y=1) = \beta_0 + \beta_1 X$ ou $E(Y|X)$

Alors : $u_i = Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i$ et $E(u_i|X_i) = E(Y_i|X_i) - (\beta_0 + \beta_1 X_i) = 0.$

b) $V(u_i|X_i) = V(Y_i|X_i) = [1-(\beta_0+\beta_1 X_i)]^2 \cdot (\beta_0+\beta_1 X_i) + [(\beta_0+\beta_1 X_i)]^2 (1-(\beta_0+\beta_1 X_i))$

Notons $X_i\beta = \beta_0 + \beta_1 X_i$:

$$\begin{aligned} V(u_i|X_i) &= (1-X_i\beta)^2 \cdot X\beta + (X\beta)^2(1-X_i\beta) \\ &= (1+(X\beta)^2 - 2X\beta)X_i\beta + (X_i\beta)^2 - (X_i\beta)^3 \\ &= X_i\beta - 2(X_i\beta)^2 + (X_i\beta)^2 = X_i\beta(1-X_i\beta) \end{aligned}$$

Ou encore : $V(u_i|X_i) = (\beta_0+\beta_1 X_i)(1-(\beta_0+\beta_1 X_i))$

On a $V(u_i|X_i) \neq$ constante $\Rightarrow$ hétéroscédasticité.

Autre méthode pour a) et b) $\to$ partir avec le tableau suivant et calculer $E(u_i|X_i)$, $V(u_i|X_i)$.

Y_i	u_i	Proba
1	$1-(\beta_0+\beta_1 X_i)$	$\beta_0+\beta_1 X_i$
0	$-(\beta_0+\beta_1 X_i)$	$1-(\beta_0+\beta_1 X_i)$

c) likelihood function :

$$L(\beta) = \prod_{i=1}^{n} \Pr(Y_i = 1 | X_i)^{Y_i} \cdot \underbrace{\Pr(Y_i = 0 | X_i)}_{1 - \Pr(Y_i = 1 | X_i)}^{(1-Y_i)}$$

avec $\Pr(Y_i = 1 | X_i) = \beta_0 + \beta_1 X_i$