Chapitre 1

Séries de Fourier

Les signaux électriques peuvent être représentés de deux manières différentes : soit par leur variations temporelles en amplitude et en phase, soit par leur spectre en fréquence.

Pourquoi utiliser la représentation spectrale alors que la représentation temporelle est naturelle ?

Il y a un argument technique (au sens technique mathématique) à cela : pour *modéliser* un signal se propageant le long d'une chaîne électronique, l'approche temporelle nécessite d'effectuer des *produits de convolution* (cours de la semaine 3) alors que l'approche fréquentielle permet de se limiter à des *multiplications ordinaires* de fonctions de transfert en profitant de des relations entre Transformée de Fourier et Convolution, ce qui est beaucoup plus simple. Ainsi en Electronique, la fonction de transfert d'un filtre qui traduit la manière dont un signal est modifié par le passage au travers du filtre, sont exprimées en fréquence (le plus souvent sous forme de diagramme de Bode) donc au travers de la modélisation spectrale.

Cette représentation en fréquence peut prendre deux formes différentes en fonction de la nature des signaux. Si nous considérons un signal périodique, nous utiliserons la décomposition en Série de Fourier et nous obtiendrons un *spectre discret*, composé d'une famille dénombrable de fréquences. Par contre, dans le cas de signaux quelconques non périodiques, tels les signaux fournis par des capteurs, il est nécessaire, d'utiliser la Transformée de Fourier, généralisation de la décomposition en Série de Fourier. Dans ce cas nous obtenons un *spectre continu*.

La Transformée de Fourier sera l'objet de la troisième semaine de travail (après avoir effectué quelques rappels sur l'intégration lors de la deuxième semaine) tandis que la décomposition en série de Fourier est traitée dans ce chapitre.

1.1 Polynômes trigonométriques

Définition 1 *Une fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ est dite* ***de période*** *a $(a > 0)$ ssi*

$$f(t+a) = f(a) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

L'exemple de base d'une fonction périodique de période a est la fonction $e_n(t) = e^{2i\pi n \frac{t}{a}}$ avec n

entier, ou les fonctions $\sin 2\pi n\frac{t}{a}$ et $\cos 2\pi n\frac{t}{a}$. De façon générale, une fonction périodique de période a est définie sur un intervalle d'une période, par exemple $[0, a[$ ou $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right[$ puis est étendue sur $\mathbb{R}$ par translation.

Définition 2 *On appelle* ***polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à*** N*, toute fonction qui s'écrit*

$$p(t) = \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\, e^{2i\pi n\frac{t}{a}} \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

où les c_n sont des nombres complexes.

On notera $\mathcal{F}_N$ l'ensemble de ces polynômes (a étant fixé). On peut également écrire $p(t)$ à l'aide de sinus et de cosinus.

$$p(t) = a_0 + \sum_{n=1}^{N} \left(a_n \cos 2\pi n\frac{t}{a} + b_n \sin 2\pi n\frac{t}{a} \right) \quad \forall t \in \mathbb{R}$$

Le lien entre les c_n et les a_n et b_n est donné dans les tableaux suivants.

a_n	$=$	$c_n + c_{-n}$	pour $n \geq 1$
b_n	$=$	$i(c_n - c_{-n})$	pour $n \geq 1$
a_0	$=$	c_0	

c_n	$=$	$\frac{(a_n - ib_n)}{2}$	pour $n \geq 1$
c_{-n}	$=$	$\frac{(a_n + ib_n)}{2}$	pour $n \geq 1$
c_0	$=$	a_0	

Exercice 1 *Faire ce calcul. Pour cela écrire $e^{2i\pi n\frac{t}{a}} = \cos 2\pi n\frac{t}{a} + i \sin 2\pi n\frac{t}{a}$ et regrouper les termes associés à n et à $-n$.*

Remarque : Il faut bien noter que les coefficients a_n et b_n sont comme les c_n à **valeurs complexes.**

Les notions qui suivent renvoient au module précédent d'Algèbre Linéaire. En profiter pour les revoir !

L'ensemble $\mathcal{F}_N$ est un *espace vectoriel* sur $\mathbb{C}$ de dimension $2N+1$ admettant comme base naturelle les fonctions $\left\{ e_n(t) = e^{2i\pi n\frac{t}{a}} \right\}_{n\in[-N,N]}$. Cet espace vectoriel est muni du *produit scalaire*

$$(p, q) = \int_0^a p(t)\, \overline{q(t)}\, dt \quad \forall p, q \in \mathcal{F}_N$$

et donc de la norme associée

$$\|p\|_2 = (p,p)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^a |p(t)|^2\, dt \right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall p \in \mathcal{F}_N$$

Avec ce produit scalaire, les fonctions $e_n(t)$ sont orthogonales et

$$\begin{cases} (e_n, e_m) & = & 0 \quad \text{si } n \neq m \\ (e_n, e_n) & = & a \end{cases}$$

Exercice 2 *Calculer ces produits scalaires* (e_n, e_m) *avec* $n \neq m$ *et calculer aussi* (e_n, e_n)*.*

On souhaite avoir l'expression des coefficients c_n en fonction de p. Les propriétés d'orthogonalité de la famille e_n fournissent un calcul simple. On a

$$c_n(p) = c_n = \frac{1}{a} \int_0^a p(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} dt \quad \forall n \in [-N, N]$$

et donc grâce aux formules précédentes

$$\begin{cases} a_n(p) = a_n & = & \frac{2}{a} \int_0^a p(t)\, \cos(\, 2\pi n \frac{t}{a})\, dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ b_n(p) = b_n & = & \frac{2}{a} \int_0^a p(t)\, \sin(\, 2\pi n \frac{t}{a})\, dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ a_0(p) = a_0 & = & \frac{1}{a} \int_0^a p(t)\, dt \end{cases}$$

Exercice 3 *Montrer que l'expression intégrale de* c_n *s'obtient dans le cas général en développant le produit scalaire* $\left(p(t)\,, e^{2i\pi n \frac{t}{a}}\right)$.

Solution 1 *On écrit pour* ***n fixé***

$$\left(p(t)\,, e^{2i\pi n \frac{t}{a}}\right) = \left(\sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, e^{2i\pi m \frac{t}{a}}, e^{2i\pi n \frac{t}{a}}\right) = \sum_{m=-N}^{m=N} c_m \left(e^{2i\pi m \frac{t}{a}}, e^{2i\pi n \frac{t}{a}}\right)$$

Remarquer que l'on a changé le nom de l'indice dans la sommation, ce que l'on ***peut faire*** *sans problème, c'est une sorte d'indice muet, et ce que l'on* ***doit faire*** *pour y voir clair, car les deux indices ne jouent pas le même rôle dans cette écriture ! L'indice* n *est fixé (par exemple* $n = 5$*) et l'indice* m *est un indice de la sommation.*

Grâce à l'orthogonalité des fonctions e_n *tous les produits scalaires sont nuls sauf celui correspondant à* $m = n$ *et celui ci vaut* a*. Ce qui donne l'expression de* c_n*.*

Par exemple, dans le cas assez fréquent dans la pratique où la fonction est 2π-périodique ($a = 2\pi$), on a les formules suivantes.

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t)\, e^{-int} dt \quad \forall n \in [-N, N]$$

et

$$\begin{cases} a_n & = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(t)\, \cos(\, nt)\, dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ b_n & = & \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} p(t)\, \sin(\, nt)\, dt \quad \text{pour } n \geq 1 \\ a_0 & = & \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(t)\, dt \end{cases}$$

Ces coefficients c_n (resp. a_n et b_n) sont les **coefficients de Fourier** de p. Pour les c_n on parle parfois de coefficients de Fourier **complexes** en faisant référence à la décomposition en exponentielles complexes, et pour les a_n et b_n de coefficients de Fourier en sinus et cosinus. Mais, répétons le, les coefficients a_n et b_n sont, comme les c_n à **valeurs complexes.**

Comme p est périodique de période a , on peut calculer les intégrales précédentes sur n'importe quel intervalle de longueur a. En particulier pour utiliser les propriétés de parité ou d'imparité de la fonction f il est utile d'intégrer sur l'intervalle $\left[-\frac{a}{2}, \frac{a}{2}\right]$. Les propriétés suivantes s'en déduisent facilement.

p fonction réelle	$\Longleftrightarrow$	$c_{-n} = \overline{c_n}$	$\Longleftrightarrow$	a_n, b_n réels
p fonction paire	$\Longleftrightarrow$	$c_{-n} = c_n \quad \forall n$	$\Longleftrightarrow$	$b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$
p fonction impaire	$\Longleftrightarrow$	$c_{-n} = -c_n \quad \forall n$	$\Longleftrightarrow$	$a_n = 0 \quad \forall n \geq 0$

Exercice 4 *Traiter par exemple la caractérisation de la parité.*

Solution 2 *Si p est paire i.e. $p(t) = p(-t) \quad \forall t$, en faisant le changement de variable $u = -t$ on a*

$$c_n = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}}\, dt = \int_{\frac{a}{2}}^{-\frac{a}{2}} p(-u)\, e^{2i\pi n \frac{u}{a}}\, (-du) = \int_{-\frac{a}{2}}^{\frac{a}{2}} p(u)\, e^{2i\pi n \frac{u}{a}}\, du = c_{-n}$$

Donc p paire $\Longrightarrow c_{-n} = c_n$.

Inversement, supposons que $c_{-n} = c_n \quad \forall n$. En faisant cette fois le changement d'indice $m = -n$ on peut écrire

$$\begin{aligned} p(-t) &= \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}} = \sum_{m=N}^{m=-N} c_{-m}\, e^{2i\pi m \frac{t}{a}} \\ & \quad \text{et en réordonnant les termes de la somme} \\ &= \sum_{m=-N}^{m=N} c_{-m}\, e^{2i\pi m \frac{t}{a}} \end{aligned}$$

Comme $c_{-n} = c_n \quad \forall n$, on a $p(-t) = \sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, e^{2i\pi m \frac{t}{a}} = p(t)$. Ce qui démontre l'implication de la droite vers la gauche et donc l'équivalence des deux propositions.

Exercice 5 *Soit la fonction f périodique de période $a = 4$ et définie par*

$$\begin{cases} f(t) = 0 & si\ t \in [-2, -1[\\ f(t) = 1 + t & si\ t \in [-1, 0[\\ f(t) = 1 - t & si\ t \in [0, 1[\\ f(t) = 0 & si\ t \in [1, 2[\end{cases}$$

Faire le dessin de cette fonction sur plusieurs périodes. Elle est clairement paire. Il est alors préférable de calculer les coefficients a_n et b_n. Grâce à la parité $b_n = 0 \quad \forall n \geq 1$. pour calculer a_n on calcule l'intégrale sur $[-2, 2]$

$$a_n = \frac{2}{4} \int_{-2}^{2} f(t)\, \cos n\frac{\pi}{2} dt = \int_{0}^{2} (1 - t) \cos n\frac{\pi}{2} dt \quad pour\ n \geq 1$$

On montre, après calculs (à faire, c'est un bon exercice technique) que

$$\begin{cases} a_{4k} = 0 \quad \textit{pour } k \neq 0 \\ a_{4k+2} = \frac{2}{(2k+1)^2\pi^2} \quad \textit{pour } k \in \mathbb{N} \\ a_{2p+1} = \frac{4}{(2k+1)^2\pi^2} \quad \textit{pour } p \in \mathbb{N} \\ a_0 = \frac{1}{4} \end{cases}$$

Proposition 1 *L'égalité de Parseval dans $\mathcal{F}_N$ s'écrit*

$$\frac{1}{a}\int_0^a |p(t)|^2\, dt = \sum_{n=-N}^{n=N} |c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\left(\sum_{n=1}^{N}\left(|a_n|^2 + |b_n|^2\right)\right)$$

Exercice 6 *Démontrer cette formule.*

Solution 3 *C'est typiquement une égalité portant sur la norme associée au produit scalaire. On a*

$$\int_0^a |p(t)|^2\, dt = (p,p) = \left(\sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\, e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right)$$

Là encore il est utile de ne pas prendre le même indice dans les deux sommes ! Lorsque l'on développe, toujours en utilisant l'orthogonalité des fonction e_n seuls les termes correspondant aux couples (n,m) tels que $n = m$ ne sont pas nuls et l'on a

$$\begin{aligned} \int_0^a |p(t)|^2\, dt &= \sum_{m=-N}^{m=N}\left(c_m\, e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, c_m\, e^{2i\pi m\frac{t}{a}}\right) = \sum_{m=-N}^{m=N} c_m\, \overline{c_m}\left(e^{2i\pi m\frac{t}{a}}, e^{2i\pi m\frac{t}{a}}\right) \\ &= \sum_{m=-N}^{m=N} |c_m|^2\, a \end{aligned}$$

La deuxième partie de l'égalité s'obtient facilement grâce aux liens entre les c_n et a_n , b_n.

L'interprétation de cette formule est la suivante : l'énergie du signal (membre de gauche) est la somme des énergies des coefficients de Fourier (membre de droite).

1.2 Etude d'un signal périodique

L'idée de l'Analyse de Fourier est la suivante : soit f une fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ de période a, peut-on décomposer f sous la forme

$$f = \sum c_n\, e_n \quad ?$$

La réponse à cette question dépend beaucoup de l'espace des fonctions que l'on considère et du mode de convergence retenue pour la série. Cela peut paraître déroutant, mais il faut se familiariser avec ce fait : souvent pour résoudre un problème de physique (rappelons que la décomposition d'une fonction en séries de Fourier correspond à la décomposition d'un *signal* en ces *harmoniques*) il faut choisir l'espace de fonctions dans lequel on travaille. Plusieurs choix sont possibles, plusieurs types de solution peuvent alors être trouvés.

Ici, pour la décomposition d'une fonction en série de Fourier, on travaille tout à tour dans

- l'espace des fonctions périodiques à *énergie finie i.e.* telles que $\int_0^a |f(t)|^2 dt < \infty$ avec la convergence en *moyenne quadratique.* Cet espace très général, fournit facilement des informations intéressantes notamment sur la somme $\sum_n |c_n|^2$ des carrés des modules des coefficients de Fourier. Par contre, ce type de résultat ne permet pas d'approcher numériquement $f(t)$.
- l'espace des *fonctions régulières* $\mathcal{C}^1$ par morceaux. On impose des propriétés **plus fortes** sur les fonctions (continuité, dérivabilité). En contrepartie on obtient des résultats **plus précis** de convergence ponctuelle c'est à dire une décomposition de $f(t)$.

1.2.1 Convergence en moyenne quadratique

On se place dans l'espace $L^2_P(0,a)$ des fonctions de période a et *d'énergie finie* défini par

$$L^2_P(0,a) = \left\{ f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C} \text{ de période } a \text{ et t.q. } \int_0^a |f(t)|^2 dt < \infty \right\}$$

Par exemple, la fonction de période a définie par

$$\begin{cases} f(t) = e^t & \text{si } t \in \left[0, \frac{a}{2}\right] \\ f(t) = -t + \frac{a}{2} & \text{si } t \in \left]\frac{a}{2}, a\right[\end{cases}$$

(faire un dessin) est dans $L^2_P(0,a)$. Remarquer que cette fonction a une discontinuité en $\frac{a}{2}$.

De même la fonction de période a définie par

$$\begin{cases} g(t) = \frac{1}{t^{\frac{1}{4}}} & \text{si } t \in \left[0, \frac{a}{3}\right] \\ g(t) = \pi & \text{si } t \in \left]\frac{a}{3}, a\right[\end{cases}$$

est dans $L^2_P(0,a)$ (car $|g(t)|^2 = \frac{1}{\sqrt{t}}$ au voisinage de 0 et donne une intégrale convergente au voisinage de 0). Cette fonction est donc discontinue en $\frac{a}{3}$ et a une branche infinie.

Dans cet espace de fonctions on exige seulement que la carré du module donne une intégrale finie !

Comme l'ensemble $\mathcal{F}_N$ des polynômes trigonométriques, cet espace est muni du produit scalaire

$$(f,g) = \int_0^a f(t)\,\overline{g(t)}\,dt \quad \forall f,g \in L^2_P(0,a)$$

avec la norme associée

$$\|f\|_2 = (f,f)^{\frac{1}{2}} = \left(\int_0^a |f(t)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} \quad \forall f \in L^2_P(0,a)$$

(On reverra les propriétés de l'espace des fonctions de carré intégrable lors des rappels d'intégration). On a $\mathcal{F}_N \subset L^2_P(0,a)$ mais $L^2_P(0,a)$ est un espace beaucoup plus gros !

Définition 3 *Soit* $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ *une suite de fonctions de* $L^2_P(0,a)$ *et* f *une fonction de* $L^2_P(0,a)$, *on dit que la suite* $\{f_n\}$ ***converge en moyenne quadratique*** *vers* f *si* $\|f_n - f\|_2 \to 0$ *quand* $n \to \infty$ *ce qui s'écrit encore*

$$\left(\int_0^a |f_n(t) - f(t)|^2 dt\right) \to 0 \quad \textit{quand} \quad n \to \infty$$

Il s'agit donc d'une convergence qui s'exprime en termes d'intégrale.

Avant d'essayer d'écrire une fonction f de $L^2_P(0,a)$ comme somme d'une **série** des e_n , on cherche la **meilleure approximation** de f par un polynôme trigonométrique de degré inférieur ou égal à N , avec N **fixé**. La solution est donnée par un **résultat géométrique** de **projection orthogonale**, qu'autorise la structure de l'espace $L^2_P(0,a)$.

Proposition 2 *Soit f une fonction de $L^2_P(0,a)$. On pose, pour N fixé*

$$f_N = \sum_{n=-N}^{+N} c_n\, e_n$$

avec c_n coefficients de Fourier de f c'est à dire

$$c_n = \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n \frac{t}{a}}\, dt = \frac{1}{a}(f, e_n)$$

Alors :

*1) $(f - f_N, g) = 0 \quad \forall g \in \mathcal{F}_N$ ce qui traduit que f_N est la **projection orthogonale** de f sur $\mathcal{F}_N$.*

2) f_N est alors la meilleure approximation de f par un élément de $\mathcal{F}_N$ au sens où

$$\|f - f_N\|_2 = \min\left\{\|f-p\|_2 \quad \textit{pour } p \in \mathcal{F}_N\right\}$$

3) On a l'inégalité de Bessel

$$\sum_{n=-N}^{+N} |c_n|^2 \leq \frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|^2\, dt = \frac{1}{a}\,\|f\|_2^2 \quad \forall N \in \mathbb{N}$$

En particulier, pour $f \in L^2_P(0,a)$ on a i) $\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 < \infty$ et ii) $\lim_{n\to\pm\infty} c_n = 0$ ce qui s'écrit

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\, e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\, dt = 0.$$

Preuve. 1) Faire un dessin pour bien visualiser cette idée de projection orthogonale. Pour démontrer cette affirmation, il suffit de montrer que pour chaque e_n on a $(f - f_N, e_n) = 0$. En effet g dans $\mathcal{F}_N$ est une combinaison linéaire de ces e_n et le résultat s'en déduira. Or on a $(f, e_n) = a\, c_n$ par définition de c_n et $(f_N, e_n) = c_n(e_n, e_n) = a\, c_n$ (pour $-N \leq n \leq N$) grâce à l'orthogonalité des e_n.

2) Prenons un autre élément p dans $\mathcal{F}_N$ et calculons $\|f-p\|_2$. En écrivant

$$f - p = (f - f_N) + (f_N - p)$$

et en utilisant les propriétés du produit scalaire (cf. module d'Algèbre linéaire) on a

$$\|f-p\|_2^2 = \|f - f_N\|_2^2 + \|f_N - p\|_2^2 + 2\,\mathcal{R}e\,(f - f_N, f_N - p)$$

Mais comme $f_N - p \in \mathcal{F}_N$ grâce à la propriété 1) d'orthogonalité $(f - f_N, f_N - p) = 0$. Noter que l'on est en train de redémontrer le théorème de Pythagore ! Finalement

$$\|f-p\|_2^2 = \|f - f_N\|_2^2 + \|f_N - p\|_2^2$$

et

$$\|f-p\|_2^2 \geq \|f-f_N\|_2^2 \text{ pour tout } p \in \mathcal{F}_N$$

3) Toujours grâce à l'orthogonalité et au théorème de Pythagore, on a

$$\|f\|_2^2 = \|f-f_N\|_2^2 + \|f_N\|_2^2 \geq \|f_N\|_2^2$$

Il est facile de montrer (à écrire) que $\|f_N\|_2^2 = a\sum_{n=-N}^{+N}|c_n|^2$. Comme $\|f\|_2^2 = \int_0^a |f(t)|^2\,dt$ le résultat s'en déduit. ■

On obtient donc des résultats intéressants sur les c_n, uniquement grâce aux propriétés du produit scalaire dans l'espace $L_P^2(0,a)$. Noter par exemple que la limite :

$$\lim_{n\to\pm\infty} \frac{1}{a}\int_0^a f(t)\,e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\,dt = 0$$

ne s'obtient pas aisément, et en tout cas pas en essayant de faire passer la limite à l'intérieur ($\left|e^{-2i\pi n\frac{t}{a}}\right| = 1\ \forall n$ et ne tend pas vers 0).

Si l'on fait tendre N vers l'infini, on peut s'attendre à ce que l'approximation s'améliore ! Plus précisément on a un résultat limite - qui est la partie difficile - et que l'on admettra.

Théorème 1 *Soit f une fonction de $L_P^2(0,a)$ alors*

$$\lim_{N\to\infty} \|f-f_N\|_2 = 0.$$

On peut donc écrire

$$f = \lim_{N\to\infty}\sum_{n=-N}^{+N} c_n\,e_n = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e_n \text{ dans } L_P^2(0,a)$$

Il faut bien voir ce que signifie cette écriture et surtout ... ce qu'elle ne signifie pas ! Elle se traduit exactement par

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^a \left|f(t) - \sum_{n=-N}^{n=N} c_n\,e^{2i\pi n\frac{t}{a}}\right|^2 dt = 0$$

mais elle ne traduit pas que $f(t)$ est la somme de la série numérique $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{2i\pi n\frac{t}{a}}$. Ainsi, on ne peut pas passer, dans ce cadre là, de l'écriture

$$f = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e_n \quad \text{dans} \quad L_P^2(0,a)$$

à l'égalité

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\,e^{2i\pi n\frac{t}{a}} \quad \text{pour un } t \text{ donné!}$$

Corollaire 1 *Egalité de Parseval. Soit f une fonction de $L_P^2(0,a)$ alors*

$$\frac{1}{a}\int_0^a |f(t)|^2\,dt = \sum_{n=-\infty}^{\infty}|c_n|^2 = |a_0|^2 + \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\left[|a_n|^2 + |b_n|^2\right]$$

i.e. l'énergie du signal est égale à la somme des énergies de ces harmoniques.

C'est donc un résultat qui précise l'inégalité de Bessel qui n'était qu'une majoration. C'est une conséquence facile du théorème précédent. On avait montré que

$$\|f_N\|_2^2 = \|f_N - f\|_2^2 + \|f\|_2^2$$

Comme $\lim_{N\to\infty} \|f - f_N\|_2 = 0$ on a $\lim_{N\to\infty} \|f_N\|_2^2 = \|f\|_2^2$ ce qui est exactement la première égalité. La deuxième s'obtient facilement à partir des formules liant les a_n, b_n et les c_n.

1.2.2 Convergence ponctuelle des séries de Fourier

Pour avoir convergence ponctuelle de la série de Fourier vers la fonction f de départ, il faut des conditions de *régularité* (continuité, dérivabilité etc ...) sur la fonction f. Parmi les très nombreux résultats qui existent, nous en citerons deux utiles. Rappelons tout d'abord les notions de fonctions continues pas morceaux et de fonctions $\mathcal{C}^1$ par morceaux.

Définition 4 *1) Une fonction f définie sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ est dite* ***continue par morceaux*** *sur I si f est continue en tout point de I* ***sauf sur un ensemble fini de points*** *pour lesquels f admet une limite à droite et une limite à gauche finies (discontinuités de première espèce). Si I n'est pas borné, on demande alors que f soit continue par morceaux sur tout sous intervalle borné de I.*

2) Une fonction f définie sur un intervalle borné I de $\mathbb{R}$ est dite $\mathcal{C}^1$ ***par morceaux*** *sur I si f est continue par morceaux, dérivable sur I sauf sur un ensemble fini de points et à dérivée elle même continue par morceaux. Même extension que précédemment au cas I non borné.*

Par exemple, la fonction f du paragraphe précédent est $\mathcal{C}^1$ par morceaux, mais g n'est pas continue par morceaux (limite à droite en 0 infinie !).

Proposition 3 *Soit f une fonction de période a et* ***continue*** *sur $\mathbb{R}$ telle que les coefficients de Fourier vérifient*

$$\sum_{n\geq 1} (|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|) < \infty$$

alors la série de Fourier ***converge (uniformément)*** [1] *vers f $\forall t \in \mathbb{R}$.*

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n(f)\, e^{2i\pi n \frac{t}{a}} \qquad (\text{uniformément}) \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

La vérification de la condition $\sum_{n\geq 1} (|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|) < \infty$ n'est pas forcément aisée. Voici un cas important d'application de ce résultat, qui permet, à partir d'une propriété de dérivabilité de f d'être sûr que cette condition est vérifiée, sans avoir à calculer tous les $c_n(f)$.

Exemple 1 *Soit f une fonction de période a,* ***continue*** *sur $\mathbb{R}$* ***dérivable*** *sur $[0, a]$ sauf en un nombre fini de points et telle que f' soit continue par morceaux, alors on a*

$$\sum_{n\geq 1} (|c_n(f)| + |c_{-n}(f)|) < \infty$$

[1] Pour ceux qui ne sont pas familiers avec cette notion de convergence uniforme, ne pas s'y attarder.

et donc

$$f(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (f) \, e^{2i\pi n \frac{t}{a}} \qquad \textit{(uniformément)} \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Une des questions importantes pour la décomposition d'une fonction en série de Fourier est la suivante : que se passe-t-il en les points où la fonction est discontinue ? Le théorème suivant répond à cette question et couvre la plupart des cas qui nous intéresserons.

Théorème 2 ***Conditions de Dirichlet.*** *Soit f une fonction de période a et $\mathcal{C}^1$par morceaux sur $[0, a]$ alors*

$$f_N(t_0) \to \frac{1}{2} \left[f(t_{0+}) + f(t_{0-}) \right] \qquad \forall t_0 \in \mathbb{R}$$

où $f(t_{0+})$ et $f(t_{0-})$ sont les limites à droite et à gauche de f en t_0. En particulier, si f est continue en t_0

$$f(t_0) = \lim_{N \to \infty} f_N(t_0) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \, (f) \; e^{2i\pi n \frac{t_0}{a}}$$

et $f(t_0)$ est bien la somme de sa série de Fourier calculée en t_0.

Exemple 2 *Considérons la fonction $f\,(t)$ de période 1 qui est définie par $f\,(t) = e^{-t}$ pour $t \in [0, 1[$. Faire un dessin avec plusieurs périodes. Le calcul (à faire) des coefficients complexes (la fonction étant elle même sous forme complexe, ce calcul est plus simple) donne*

$$c_n = \frac{1}{1 + 2in\pi} \left(1 - \frac{1}{e}\right) \quad \forall n \in \mathbb{Z}$$

La fonction est clairement $\mathcal{C}^1$par morceaux sur $[0, 1]$ et continue à l'intérieur des intervalles. Par exemple, on aura pour $t \in \,]0, 1[$ grâce au théorème de Dirichlet

$$f\,(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{1 + 2in\pi} \left(1 - \frac{1}{e}\right) e^{2i\pi n t}$$

On en déduit facilement le développement en cos *et* sin *pour $t \in \,]0, 1[$*

$$f\,(t) = \left(1 - \frac{1}{e}\right) \left[1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1 + 4n^2\pi^2} \left(\cos\left(2\pi n t\right) + i \sin\left(2\pi n t\right)\right)\right]$$

Par contre $t = 0$ est une discontinuité de la fonction (voir le dessin) avec $f\,(0^+) = 1$ et $f\,(0^-) = \frac{1}{e}$. Pour $t = 0$ la série précédente converge vers la demi somme de ces valeurs, ce qui donne

$$\frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{e}\right) = \left(1 - \frac{1}{e}\right)\left(1 + \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{1 + 4n^2\pi^2}\right)$$