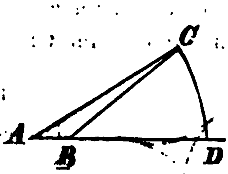
anwenden, wenn Sie das Geschäft zuerst auf den einfachsten Fall anwendeten und den Satz aufstellten:

1) In jedem Dreieck, dessen eine Seite endlich, die zweite und folglich auch die dritte hingegen unendlich ist, ist die Summe der beiden Winkel an jener = 180°.

Beweis nach Ihrer Manier




Der Kreisbogen CD ist eben so gut das Maass des Winkels CAD als CBD, weil bei einem Kreise von unendlichem Halbmesser eine endliche Verrückung des Mittelpunkts für 0 zu achten ist. Also CAD = CBD

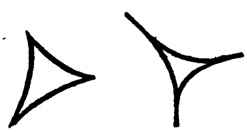
$$CAD + CBA = CBD + CBA = 180$$

Das Uebrige ergibt sich leicht von selbst. Es ist nemlich nach diesem Lehrsatze:

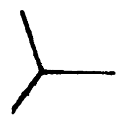
$$\left.\begin{aligned} \alpha + \beta + \delta &= 180 \\ 180 &= \varepsilon + \delta \\ \gamma + \varepsilon &= 180 \end{aligned}\right\} \text{ Also addendo } \alpha + \beta + \gamma = 180$$

Was nun aber Ihren Beweis für 1) betrifft, so protestire ich zuvörderst gegen den Gebrauch einer unendlichen Grösse als einer Vollendeten, welcher in der Mathematik niemals erlaubt ist. Das Unendliche ist nur eine Façon de parler, indem man eigentlich von Grenzen spricht, denen gewisse Verhältnisse so nahe kommen als man will, während anderen ohne Einschränkung zu wachsen verstattet ist. In diesem Sinne enthält die Nicht-Euclidische Geometrie durchaus nichts Widersprechendes, wenn gleich diejenigen viele Ergebnisse derselben anfangs für paradox halten müssen, was aber für widersprechend zu halten nur eine Selbsttäuschung sein würde, hervorgebracht von der frühern Gewöhnung die Euklidische Geometrie für streng wahr zu halten.

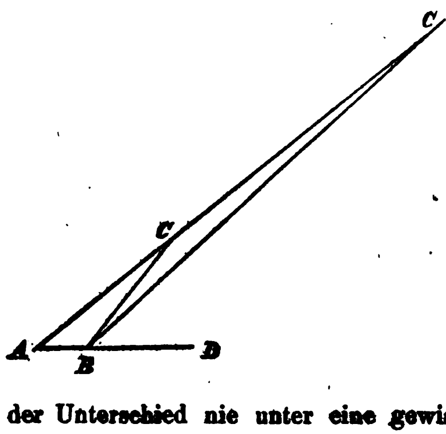
In der Nicht-Euclidischen Geometrie gibt es gar keine ähnliche Figuren ohne Gleichheit, z. B. die Winkel eines gleichseitigen Dreiecks sind nicht bloss von $\frac{2}{3}$R, sondern auch nach Maassgabe der Grösse der Seiten unter sich verschieden und können, wenn die Seite über alle Grenzen wächst, so klein werden, wie man will. Es ist daher schon an sich widersprechend, ein solches Dreieck durch ein kleineres **zeichnen** zu wollen, man kann es im Grunde nur **bezeichnen**.



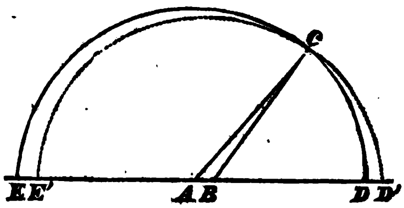
Die Bezeichnung des unendlichen Dreiecks in diesem Sinn wäre am Ende



In der Euklidischen Geometrie gibt es nichts absolut grosses, wohl aber in der Nicht-Euklidischen, dies ist gerade ihr wesentlicher Karakter, und diejenigen, die dies nicht zugeben, setzen eo ipso schon die ganze Euklidische Geometrie, aber wie gesagt, nach meiner Ueberzeugung ist dies blosse Selbsttäuschung. Für den fraglichen Fall ist nun durchaus nichts widersprechendes darin, dass wenn die Punkte A, B und die Richtung AC gegeben sind, während C ohne Beschränkung wachsen kann, dass dann obgleich so DBC dem DAC immer näher kommt, doch der Unterschied nie unter eine gewisse endliche Differenz heruntergebracht werden könne.




Ihr Hineinziehen des **Bogens** CD macht allerdings den Schluss um viel captiöser, allein wenn man, was Sie nur angedeutet haben klar entwickeln will so müsste es so lauten:




Es ist: $CAB : CBD = \frac{CD}{ECD} : \frac{CD'}{E'CD'}$

und indem AC in's unendliche wächst, kommen CD und CD' einerseits und ECD, E'CD' andererseits der Wahrheit immer näher.

Beides ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie nicht wahr, wenn man darunter versteht, dass ihre geometrischen Verhältnisse der Gleichheit so nahe kommen, wie man will. In der That ist in der Nicht-Euklidischen Geometrie der halbe Umfang eines Kreises, dessen Halbmesser $= r$:

$$= \tfrac{1}{2}\pi k \left(e^{\frac{r}{k}} - e^{-\frac{r}{k}}\right)$$

wo k eine Constante ist, von der wir durch Erfahrung wissen, dass sie gegen alles durch uns messbare ungeheuer gross sein muss. In Euklid's Geometrie wird sie unendlich.

In der Bildersprache des Unendlichen würde man also sagen müssen, dass die Peripherien zweier unendlichen Kreise, deren Halbmesser um eine endliche Grösse verschieden sind, selbst um eine Grösse verschieden sind, die zu ihnen ein endliches Verhältniss hat.

Hierin ist aber nichts Widersprechendes, wenn der endliche Mensch sich nicht vermisst etwas Unendliches als etwas Gegebenes und von ihm mit seiner gewohnten Anschauung zu Umspannendes betrachten zu wollen.

Sie sehen, dass hier in der That der Fragepunkt unmittelbar an die Metaphysik streift.

Doch nunmehro genug. Stets mit innigster Freundschaft

der Ihrige

C. F. Gauss.

Göttingen, den 12. Julius 1831.