Interpolacja: Mamy n+1 wezłow x_0.. x_n i wartości funkcji w tych wezłach. Szukamy wielomianu najwyżej stopnia n który spełnia warunki interpolacji

- Problem Interpolacji jest jednoznacznie rozwiązywalny

-Wzor Lagrangea $Ln(xn) = \sum_{i=0}^{n} f(xi) \prod_{j=0,j!=i}^{n} \frac{x-xj}{xi-xj}$ ten ostatni iloczyn to symbol croneckera

- Newtona $\boldsymbol{Ln(x)} = \sum_{i=0}^{n} aiwi(x), \quad Ln(x) = L_{n-1}(x) = anwn(x)$

Wi=$\prod_{j=0,i}^{i-1} x - xj$ an=$\sum_{i=0}^{n} f(xi) \prod_{j=0,j!=i}^{n} \frac{1}{xi-xj} = f[x0..xn]$

an to iloraz różnicowy nie zalezy od permutacji węzłów

Rekurencja : $f\left[x_i \dots x_{i+j}\right] = \frac{f[x_{i+1} \dots x_{i+j}] - f[x_i \dots x_{i+j-1}]}{x_{i+j} - x_i}$; F[xi]=f(xi)!!!

Przykład: $f[x_i x_{i+1} x_{i+2}] = \frac{f[x_{i+1} x_{i+2}] - f[x_i x_{i+1}]}{x_{i+j} - x_i}$

Algorytm Aitkena obliczanie wartości wielomianu Lagrangea w punkcie. $P_{i,\dots i+1}(x)$oznacza wartość wielomianu w punkcie x zbudowanego z węzłów xi…x(i+1).

Wz: $P_{i,\dots i+1}(x) = \frac{(x-xi)Pi+1-(x-xi+1)Pi}{x_{i+1}-x_i}$;

Przykład: $P_{i,i+1,i+2}(x) = \frac{(x-xi)Pi+2-(x-xi+2)Pi}{x_{i+2}-x_i}$

Bład interpolacji: $|Ln(x) - f(x)| = \frac{|f^{n+1}(x)||W_{n+1}(x)|}{(x+1)!}$

Wielomian Czybyszewa: T0(x)=2,T1(x)=x,T2(x)=$x^2 - 1/2$

$T_{n+1} = xTn(x) - \frac{1}{n} T_{n-1}(x)$ Własności:

-an=1 przy najwyższej potędze

-rekurencja(ten wzor wyzej)

-parzystość funkcji wielomianu jest taka sama jak n

-wielomian Tn(x) posiada <-1,1> n extremów, w których wartości bezwzględne są sobie równe

-Tn(x) w przedziale <-1,1> najmniej się odchyla od zera ze wszystkich wielomianów w których współczynnik przy najwyższej potedze wynosi 1;

Funckja Sklejania:

Mamy a=x0<..<xn=b dzielimy <a,b> na przedziały i mamy wiele wielomianów niskiego stopnia zamiast jednego wysokiego

Sm(x) funkcja sklejania stopnia m

-Sm w każdym podprzedziale najwyżej stopnia m

-Sm jest klasy C^n-1

-funkcja naturalna S2m-1(x) stopnia nieparzystego to f która poza <a,b> jest stopnia m-1

Sm(x)=f(xi)

$S^{(i)}(x0+) = S^{(i)}(xn-)$

Warunek Holdera: |f(x')-f(x'')|<=L|x-x'|^2

Błąd R(x)=maxS(x) – f(x)<=2L(1+4max(ni/nj)^2)max hj

INTERPOLACJA TRYGONOMETRYCZNA: to przybliżenie funkcji okresowych wielomianem trygonometrycznym

f(x)=f(x+T); T=2pi

Tw1 $Tn(x) = \sum_{j=0}^{n} cje^{ijx}$; $i = sqrt(-1)$

tn(xn)=f(xn);

Tw2 jednoznacznie rozwiązywalny:

Aby znaleźć cj rozwiązujemy n+1 równań liniowych o n+1 niewiadomych o postaci$\sum_{j=0}^{n} cje^{ijx} = f(xn)$

Tw3 wezły równoodległe xn=2kpi/(n+1)

Cj=1/(n+1) $\sum_{k=0}^{n} f(xn) \exp(-ijxk)$

Wielomian trygonometryczny interpolujący funkcję zbudowany na węzłach równoodległych

$$t_n(x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{j=1}^{m}\{a_j \cos(jx) + b_j \sin(jx)\} + \frac{\delta}{2} a_{m+1} \cos((m+1)x)$$

Alg Goertzela

$$\beta_j = j\frac{2\pi}{n+1} \qquad \begin{cases} a_j = \frac{2}{n+1}(f(x_0) + u_1 \cos(\beta_j) - u_2) \\ b_j = \frac{2}{n+1} u_1 \sin(\beta_j) \end{cases}$$

$$u_k = f(x_k) + 2u_{k+1}\cos(\beta_j) - u_{k+2} \quad u_{n+2} = u_{n+1} = 0 \quad k = n,(n-1),\dots,1$$

Alg Reinscha

$$\beta_j = j\frac{2\pi}{n+1}$$

a) $\cos(\beta_j) \geq 0$ $\quad w = -4\sin^2(\frac{\beta_j}{2}) \begin{cases} u_{k+1} = \delta u_{k+1} + u_{k+2} \\ \delta u_k = wu_{k+1} + \delta u_{k+1} + f(x_k) \end{cases}$

$u_{n+2} = \delta u_{n+1} = 0$

b) $\cos(\beta_j) < 0$ $w = 4\cos^2(\frac{\beta_j}{2})$

$$\begin{cases} u_{k+1} = \delta u_{k+1} - u_{k+2} \\ \delta u_k = wu_{k+1} - \delta u_{k+1} + f(x_k) \end{cases} \quad u_{n+2} = \delta u_{n+1} = 0$$

Dla wszystkch

$$\begin{cases} a_j = \frac{2}{n+1}(\delta u_0 - w\frac{u_1}{2}) \\ b_j = \frac{2}{n+1} u_1 \sin(\beta_j). \end{cases}$$

APROKSYMACJA:

f(x) – f. aproksymowana

F(x) – f. aproksymująca

Aproksymacja to przybliżanie funkcji f(x) funkcja aproksymująca F(x) w celu np. uproszczenia obliczeń, wartości funkcji są stablicowane .

-**Dobór funkcji aproksymującej**

- aproksymacja wielomianowa $Q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j q_j(x)$

-aproksymacja wymierna Q(x)=$\frac{\sum_{i=0}^{l} aix^i}{\sum_{i=0}^{m} bix^i}$

-Dokładność:

-aproksymacja średniokwadratowa punktowa

X0…Xn F(x0)=f0…f(xn)=fn minS=$\sum_{i=0}^{n}(Q(xi) - f(xi))$^2

-aproksymacja średniokwadratowa całkowa

Min S = $\int_a^b (f(x) - Q(x))$^2

-aproksymacja jednostajna min S=max|f(x)-Q(x)| w przedziale <ab>. Dalej 3 rysunki

Aproksymacja średniokwadratowa punktowa wielomianowa

Danych jest n+1 węzłów aproks. X0,x1…xn oraz n+1 wartości funkcji aproksymujacej w tych wesłach. Zadaniem aproks jest znaleźć wielomian $Q_m(x) = \sum_{j=0}^{m} a_j x^j$ m-tego stopnia aby bład śreniokwadratowy był mniejszy $\min_{a_0,a_1,\dots,a_m} S = \sum_{i=0}^{n}(f_i - \sum_{j=0}^{m} a_j x_i^j)^2$

Zadanie aproksymacji średniokwadratowej punktowej sprowadza się do rozwiązania m+1 równań o m+1 niewiadomych.

$$\sum_{j=0}^{m} g_{kj} a_j = r_k \quad g_{kj} = \sum_{i=0}^{n} x_i^{k+j} \quad r_k = \sum_{i=0}^{n} f_i x_i^k$$

Funkcje ortogonalne

Wielomiany są ortogonalne na zbiorze punktów x0,x1…xn jeśli spełniają warunek: $\sum_{i=0}^{n} f(xi)g(xi) = 0$

$$\sum_{i=0}^{n} P_j(x_i)P_k(x_i) = \begin{cases} 0 & j \neq k \\ const & j = k \end{cases}$$

. $Qm(x) = \sum_{j=0}^{m} ajPj(x)$. $qjk = \sum_{i=0}^{n} qj(xi)qk(xi) = 0$

.$ak = \frac{rk}{qkk} = \frac{\sum_{i=0}^{n} f(xi)Pk(xi)}{\sum_{i=0}^{n} P_k^2(xi)}$

Wielomiany ortogonalne Gamma j-tego stopnia

Węzły równoległe!!

$$x_i = x_0 + h \cdot i \quad h = \frac{x_n - x_0}{n}; \quad S = \frac{x - x_0}{h} - l;$$

$$\sum_{s=-l}^{s=l} P_j(s,2l) \cdot P_k(s,2l) = 0 \text{ dla } j \neq k$$

$$P_j(s,2l) = \sum_{k=0}^{j} (-1)^{k+j} \frac{(j+k)^{[2k]}(l+s)^{[k]}}{(k!)^2 (2l)^{[k]}}$$

$$j^{[k]} = \underbrace{j(j-1)(j-2)\dots(j-k+1)}_{k}$$

Aproksymacja Jednostajna:

Min S= $\min_{a<x<b}(\max(|Q_m(x) - f(x)|))$

Tw1 f(x) jest klasy c^0 -> Ve>0 Em(e)|f(x)-Qm(x)|<e

Tw2

$f(x) \in C^{m+1}$ dla $x \in \langle x - \delta, x + \delta \rangle$ ->

$\exists \xi \in \langle x_0, x \rangle$ lub $\langle x, x_0 \rangle$ takie, ze

$$f(x) = f(x_0) + \frac{f'(x_0)}{1!}(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2!}(x - x_0)^2 +$$

$$+ \dots + \frac{f^m(x_0)}{m!}(x - x_0)^m + \frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}$$

$$Q_m(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{f^k(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

$$R_m(x) = |f(x) - Q_m(x)| = \left|\frac{f^{m+1}(\xi)}{(m+1)!}(x - x_0)^{m+1}\right|$$

$$R_m(x) \leq \frac{M_{m+1}}{(m+1)!} \delta^{m+1}$$

$$M_{m+1} = \max_{x-\delta \leq \xi \leq x+\delta} \left|f^{m+1}(\xi)\right|$$