ABC023 解説

問題A – 加算王

問題概要

- 2 桁の正整数が与えられる。
- 各位の和を計算せよ。

- $10 \leqq$ 正整数 $X \leqq 99$

解法

- 整数を読み込んで、十の位と一の位を求めて、合計値を計算します。
- 今回 X は 2 桁なので、以下の性質が成り立ちます。

- 十の位は X を 10 で割った商です。
- 一の位は X を 10 で割った余りです。

問題B – 手芸王

問題概要

- 文字列 S について、b→abc→cabca→bcabcab→…と変化させる手順の何番目 (最初の b は 0 番目とおく) に出てくるか (あるいは出てこないか) を計算せよ。
- $1 \leqq N(=|S|) \leqq 100$

解法

- アクセサリーの名前となりうる文字列は abcabcabc… と a,b,c が順繰りに出てくる文字列でなければなりません。
- さらに、長さは奇数長で、中央の文字が b とならなければなりません。

- これらの条件を満たした場合、(N-1)/2 番目の手順の直後に文字列 S が名前としてでてきます。

注意事項

- 入力には $N = 1, S =$ “b” というケースが存在します。このケースの答えは 0 となります。

- 実行時間には余裕があるので、実際に問題文の手順にしたがってアクセサリーの名前を探索するプログラムを作成する方針でも正解することができます (こちらの方が勘違いによるミスが少なくなるかも?)。

問題C – 收集王

問題概要

- R 行 C 列のマス目があり、そのうち N マスには飴が 1 個ずつあります。
- 高橋君はあるマスを起点として、同一の行にあるすべての飴と、同一の列にあるすべての飴を獲得します。
- ちょうど K 個の飴を獲得するような起点マスの総数を求めよ。

- $1 \leqq R \leqq 100{,}000$
- $1 \leqq C \leqq 100{,}000$
- $1 \leqq K \leqq N \leqq 100{,}000$

部分点解法 (30点)

- すべてのマスについて、そのマスに高橋君が移動した場合に何個の飴を獲得するのかを計算します。

- 全体の計算量はO($RC(R + C) + N$) になります。

満点解法 (30+70点)

- 最初に、元の問題と似た別の問題について考えます。
- 問題:基本設定は一緒。違うのは、高橋君がいるマスに飴があった場合は、1 個分 (C 問題元の設定) ではなく 2 個分としてカウントします。
- この問題の場合、高橋君がマス (x,y) に移動したなら、高橋君が獲得する飴の個数が (第 x 行にある飴の総数) + (第 y 列にある飴の総数) と等しくなります。

満点解法 (30+70点)

- 変形した問題を解くために、最初に各行、各列について飴が何個あるのかを計算します。

行＼列	1	2	0	0	2
1		O			
2	O				O
2		O			O

満点解法 (30+70点)

- 変形した問題を解くために、最初に各行、各列について飴が何個あるのかを計算します。
- 次に、飴が X 個ある行(列)が Y 個ある、という情報を行ごと、列ごとにまとめます。

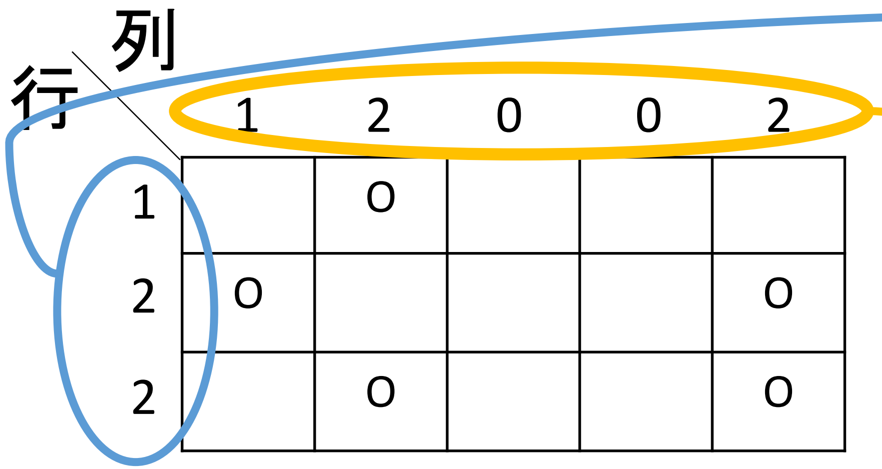
行＼列	1	2	0	0	2
1		O			
2	O				O
2		O			O

飴の個数	0	1	2	3
行の個数	0	1	2	0

飴の個数	0	1	2	3
列の個数	2	1	2	0

満点解法 (30+70点)

- すると、(行から i 個の飴) × (列から K-i 個の飴) という組み合わせを i=0,1,…,K について計算して合計することで変形した問題を解くことができます。



飴の個数	0	1	2	3
行の個数	0	1	2	0

飴の個数	0	1	2	3
列の個数	2	1	2	0

満点解法 (30+70点)

- 最後に元の問題を、先ほど計算した値 (変形した問題の解) から増減させることで答えを求めていきます。

- 起点となるマスに飴がない場合は両方の問題において K 個か否かは変化しません。
- 一方で起点となるマスに飴がある場合はカウントがずれます。

・そのようなマスで (行の飴の個数) + (列の飴の個数) = K なら、余計にカウントしていることになります。

・一方で和が K+1 ならカウントから除外していたことになります。

満点解法 (30+70点)

- まとめると、以下の手順になります。
  - ▪変形した問題で、和が K 個となるマス数を求める。
  - ▪起点に飴があり、和が K 個となるマス数だけ引く。
  - ▪起点に飴があり、和が K+1 個となるマス数だけ足す。
- 計算量は O($R + C + N$) となります。

問題D – 射擊王

問題概要

- 風船が N 個ある。
- 風船 i は最初に高度 H_i にあり、秒速 S_i で上昇する。
- 1 秒おきに風船を割っていくとき、一番上がった風船の高さ (ペナルティ) として考えられる最小値はいくらか。

- $1 \leqq N \leqq 100{,}000$
- $1 \leqq H_i \leqq 1{,}000{,}000{,}000$
- $1 \leqq S_i \leqq 1{,}000{,}000{,}000$

考察

- 単に高さ順に割る、速度順に割る、ではうまくいきません。
- 風船を割る順番をうまく決定するアルゴリズムが欲しいです。

- 実は、この問題は最小化問題としてそのまま考えるのは大変で、最小化問題の代わりに、ある高さｘ以下を保ちながら風船を割ることができるか、という判定問題に変形することで効率的にとくことができるようになります。

部分点解法 (30点)

- 越えてはならない高さ X が定まっているとします。
- このとき、風船 i は $(X - H_i)/S_i$ 秒以内に割らなければならないということが分かります (もしも $X < H_i$ なら、この X では不可能であることが分かります)。

部分点解法 (30点)

- 各風船をいつまでに割らなければならないかが分かったならば、実際に割る方法があるかを判定する際、貪欲法を用いることにより判定することができます。
- 具体的には、いつまでに割るかの制限時間が短い風船を優先して割るという貪欲法です。
- 部分点解法では風船の個数が少なく、X の候補は およそ 200,000 通りしか無いので、部分点を得ることができます。

満点解法(30+70点)

- この問題のすべてのテストケースについて考えた場合、風船の高さとして考えられるものがとても多く、すべての X を仮定することができません。
- 実は、ある値 Opt を基準として、
  - Opt > X ならば、どうやっても達成できない。
  - Opt ≦ X ならば、先ほどの貪欲法アルゴリズムで達成できる。

という性質が成り立ちます。

- この Opt の値が、求める答えとなります。

満点解法(30+70点)

- この性質をみたすような場合に Opt を求める際、二分探索を用いることができます。
- 例えば、区間 [left,right] (left≦right) の内部に Opt がある

(left≦Opt≦right) とわかっている場合に、left≦half≦right となる half を考え、

X=half が条件を満たす→ Opt は区間 [half,right] 内にある。

X=half が条件を満たさない→ Opt は区間 [left,half) 内にある。

として区間を狭めていくという方針です。

- half は (left+right)/2 辺りの整数を取ることが多いです。

満点解法(30+70点)

- X を定めたときに、制限時間でソートして判定するので、全体で O($N\log N * \log(H + NS)$) (ただし H, S はそれぞれ、開始時高度の最大値、速度の最大値) となります。
- この解法ならば満点を得ることができます。

備考

- 制限時間でソートする際、後の判定で制限時間が N 秒以上である風船は一律制限時間が N 秒であるとしても良い (なぜなら、どの風船も $N-1$ 秒以内に割られるようにできるため) ので、0 以上 N 以下の整数値をソートする問題となります。
- これはビンソートを用いることにより O(N) で実現することができます。
- 計算量は O($N\log(H+NS)$) になります。