Die Vollständige Induktion – ein Beweisverfahren

Aufbau:

1.Schritt: Induktionsanfang:

- Zeigen, dass die Aussage für einen spezifischen Startwert (meist n=1) gilt.

2.Schritt: Induktionsschritt:

- Induktionsannahme/Induktionsvoraussetzung:
  Man nimmt an, dass die Aussage für ein beliebiges n gilt.
- Induktionsbehauptung: Die Aussage muss also auch für n+1 gelten.
  (≙ $S(n) \Longrightarrow S(n+1)$)
- Induktionsschluss: Mit Hilfe der Induktionsvoraussetzung zeigen, dass die Aussage tatsächlich für n+1 gilt.

Beispiel aus der analytischen Geometrie:

Es sollen n zueinander nicht parallele Geraden so gezeichnet werde, dass sich möglichst viele Schnittpunkte S ergeben.

Zu beweisende Aussage S:

$$\boxed{S(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n-1)}$$

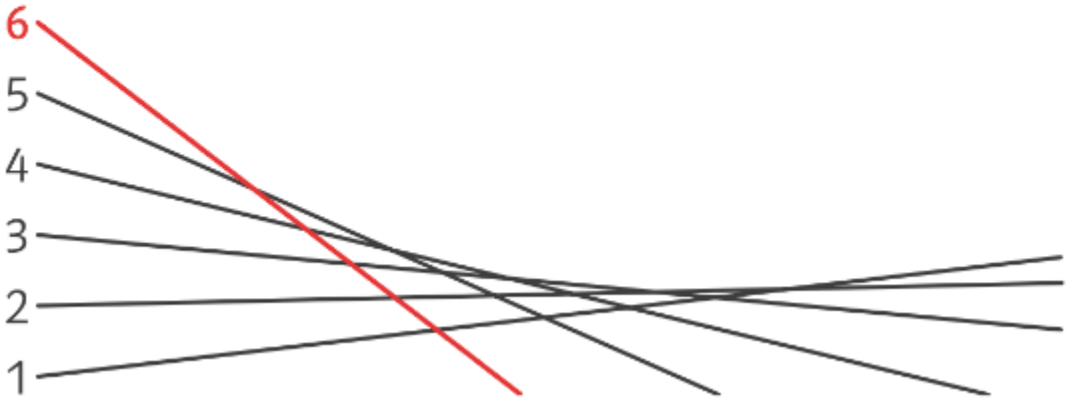
Induktionsanfang:

Bei n=1 Geraden sollten sich 0 Schnittpunkte ergeben.
-> Beweisen, dass S(1) = 0:

$0 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot (1-1)$

$0 = 0$ Q.E.D

Induktionsschritt:



Bei jeder nächsten Geraden, als der $n+1$-ten kommen maximal n Schnittpunkte hinzu.

Zu zeigen:

$$S(n+1) = S(n) + n$$

$$\frac{1}{2}\cdot(n+1)\cdot n = \frac{1}{2}\cdot n\cdot(n-1)+n$$

$$\frac{1}{2}\cdot(n^2+n) = \frac{1}{2}\cdot n^2-n+n$$

$$\frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n^2-n}{2}+\frac{2n}{2}$$

$$\frac{1}{2}(n^2+n) = \frac{n^2+n}{2} \qquad \text{Q.E.D}$$

➔ Die Aussage gilt für die erste natürliche Zahl (Induktionsanfang) und für alle ihre Nachfolger (Induktionsschritt). Damit gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen.