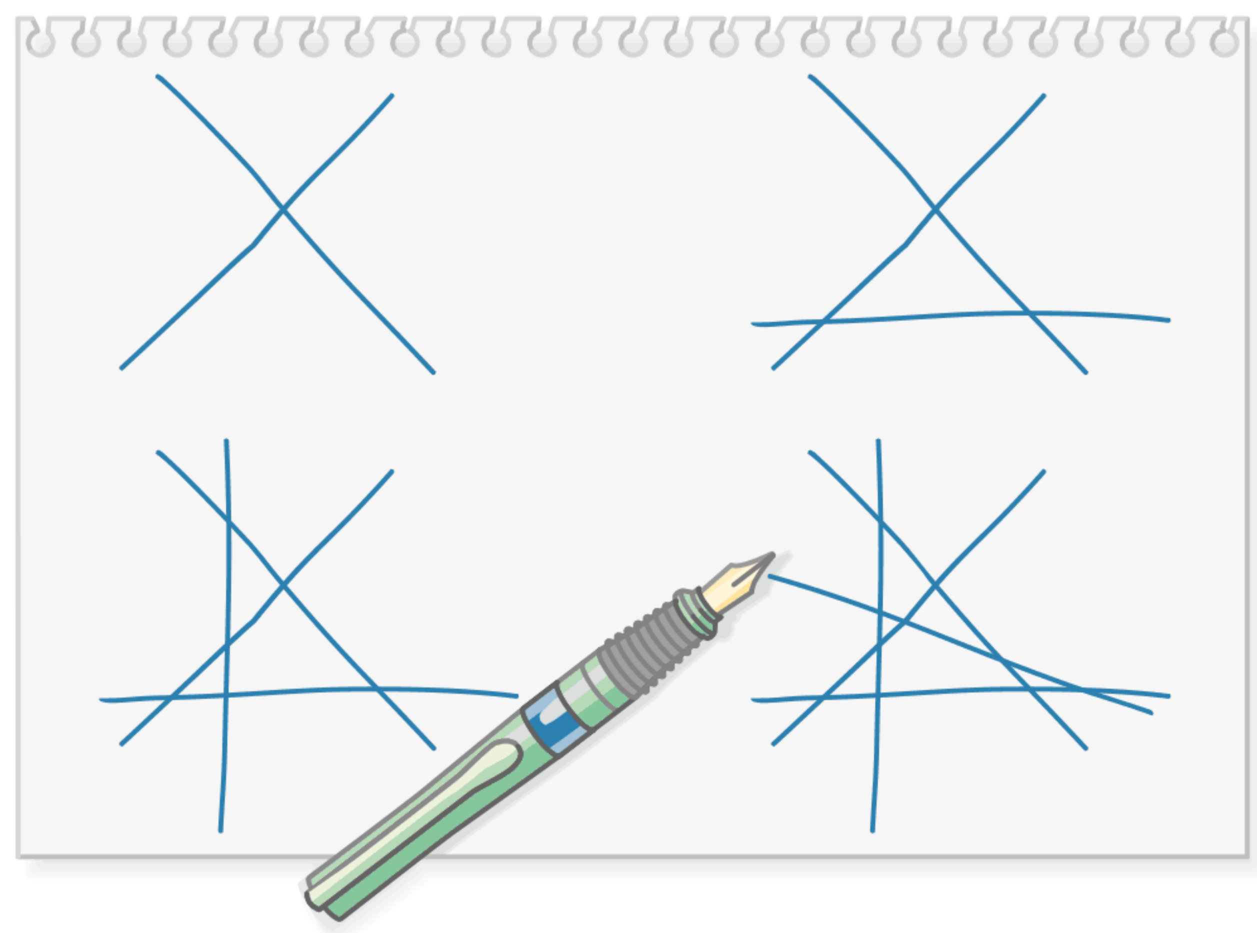
Vollständige Induktion

Soll eine Aussage, die für alle natürlichen Zahlen gilt, bewiesen werden, so stößt man häufig auf folgende Schwierigkeit: Man kann eine solche Aussage zwar für konkrete natürliche Zahlen nachweisen, aber ein Beweis für alle natürlichen Zahlen ist damit noch nicht erbracht.
Mit dem Beweisverfahren der vollständigen Induktion können solche Aussagen für alle natürlichen Zahlen bewiesen werden.

Problem 1

Stefan zeichnet nicht zueinander parallele Geraden auf ein Blatt und interessiert sich für den Zusammenhang zwischen der Zahl n der gezeichneten Geraden und der maximal möglichen Anzahl S der dabei entstehenden Schnittpunkte.
Dabei entsteht die Tabelle in Fig. 1. Aufgrund dieser Beispiele vermutet er folgenden Zusammenhang: $S_n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$.
Wie kann man diese Formel beweisen?

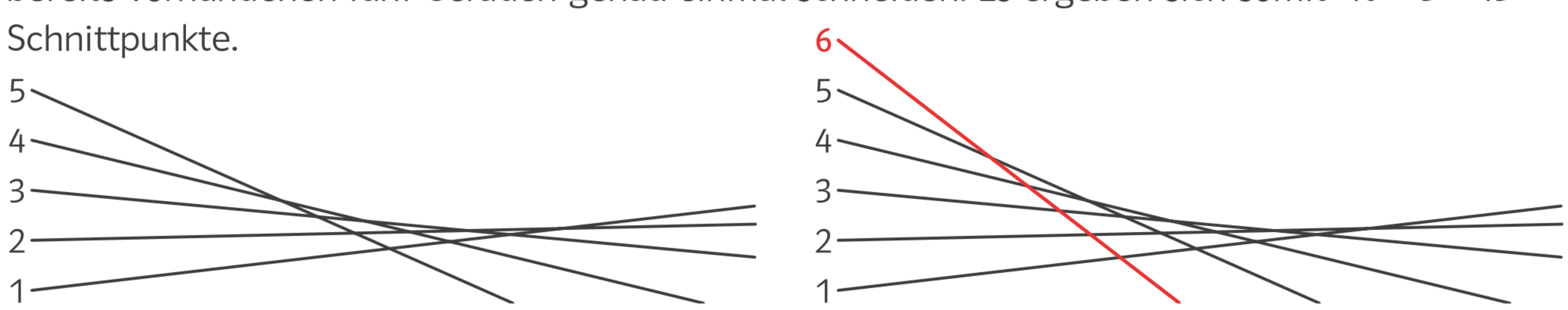


n	S
1	0
2	1
3	3
4	6
5	10

Fig. 1

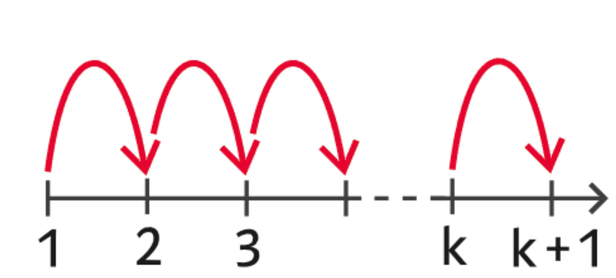
Erarbeitung 1

Beim Berechnen der maximalen Anzahl von Schnittpunkten für sechs nicht zueinander parallele Geraden stellt man fest, dass die Anzahl einfach zu berechnen ist, wenn man die Anzahl von zehn Schnittpunkten für fünf Geraden bereits kennt. Die sechste Gerade kann nämlich jede der bereits vorhandenen fünf Geraden genau einmal schneiden. Es ergeben sich somit $10 + 5 = 15$ Schnittpunkte.



Eine solche Überlegung kann man auch allgemein durchführen.
Bei der (k + 1)-ten Geraden kommen maximal k Schnittpunkte dazu. Wenn man wüsste, dass es bei k Geraden maximal $S_k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k - 1)$ Schnittpunkte gibt, so könnte man die Anzahl bei $k + 1$ Geraden folgendermaßen berechnen:
$S_k + k = \frac{1}{2} \cdot k \cdot (k - 1) + k = \frac{1}{2} \cdot (k^2 - k + 2k) = \frac{1}{2} \cdot (k^2 + k) = \frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot k.$
Dies ist die Formel für $k + 1$ Geraden, denn $\frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot k = \frac{1}{2} \cdot (k + 1) \cdot ((k + 1) - 1) = S_{k+1}$.

Wenn man nun noch nachweist, dass die Formel für eine Gerade $(n = 1)$ gilt, dann kann man mit einem Kettenschluss folgern, dass die Formel für alle natürlichen Zahlen gilt:
Für $n = 1$ erhält man $S_1 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 0 = 0$. Dies ist offensichtlich richtig.
Mit einem Kettenschluss folgt nun: Nachdem die Formel für $n = 1$ gültig ist, gilt sie mit obiger Überlegung auch für $n = 1 + 1 = 2$ und damit dann wiederum für $n = 3$ usw.



Ergebnis 1

Satz: Beweisverfahren der vollständigen Induktion
Mit folgenden zwei Schritten kann man eine Aussage für alle natürlichen Zahlen beweisen:
(I) Induktionsanfang: Man beweist die Aussage für eine erste natürliche Zahl, z.B. $n = 1$.
(II) Induktionsschritt: Man nimmt an, dass die Aussage für eine natürliche Zahl $k \geq n$ gilt, und beweist unter dieser Voraussetzung, dass die Aussage auch für die nachfolgende Zahl $k + 1$ gilt.
Kettenschluss: Da die Aussage nach (I) für eine erste natürliche Zahl gilt und nach (II) mit jeder natürlichen Zahl auch für deren Nachfolger, so gilt sie für alle natürlichen Zahlen.

Problem 2

Auch für Beweise in der Analysis kann das Verfahren der vollständigen Induktion angewandt werden.
Betrachtet werden die Ableitungen der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$ (Fig. 1).
Es liegt nahe, dass für jede natürliche Zahl n für die n-te Ableitung von f gilt: $f^{(n)}(x) = (n + x) \cdot e^x$.
Diese Behauptung soll mit vollständiger Induktion bewiesen werden.

$f(x) = x \cdot e^x$
$f'(x) = (1 + x) \cdot e^x$
$f''(x) = (2 + x) \cdot e^x$
$f'''(x) = (3 + x) \cdot e^x$

Fig. 1

Erarbeitung 2

(I) Induktionsanfang $(n = 1)$:
Nach der Produktregel gilt $f^{(1)}(x) = f'(x) = (1 + x) \cdot e^x$. Die Aussage gilt also für $n = 1$.

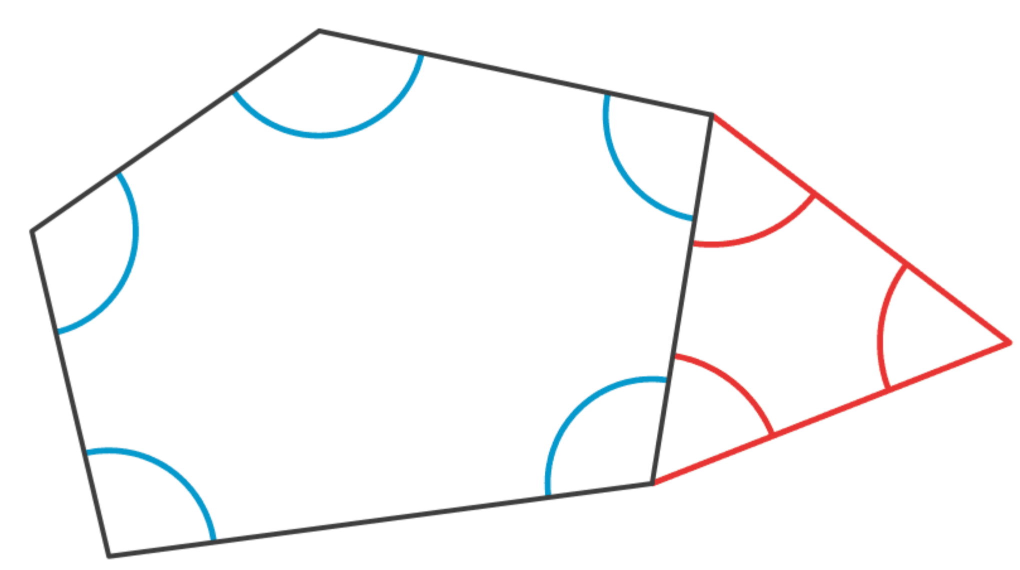
(II) Induktionsschritt $(k \to k + 1)$:
Man nimmt an, dass die Aussage für $n = k$ gilt: $f^{(k)}(x) = (k + x) \cdot e^x$. Damit beweist man, dass die Aussage auch für $n = k + 1$ gilt:
$f^{(k+1)}(x) = (f^{(k)}(x))' = ((k + x) \cdot e^x)' = e^x + (k + x) \cdot e^x = (k + 1 + x) \cdot e^x$. □

Ergebnis 2

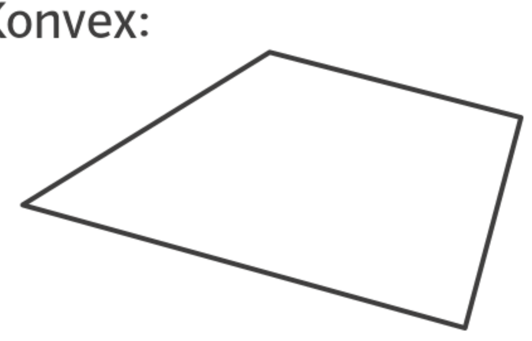
Für alle natürlichen Zahlen n gilt für die n-te Ableitung der Funktion f mit $f(x) = x \cdot e^x$:
$f^{(n)}(x) = (n + x) \cdot e^x$.

Lösungen | Seite 477

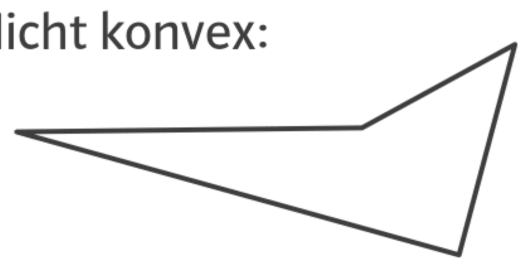
1 Ein Vieleck, das keine einspringenden Ecken hat, wird als konvexes Vieleck bezeichnet.
a) Zeichnen Sie konvexe Dreiecke, Vierecke, Fünfecke usw. und bestimmen Sie die Summe der Größen der Innenwinkel.
b) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion: Die Summe der Größen der Innenwinkel in einem konvexen Vieleck $(n \geq 3)$ mit n Ecken beträgt $(n - 2) \cdot 180°$.



Konvex:



Nicht konvex:

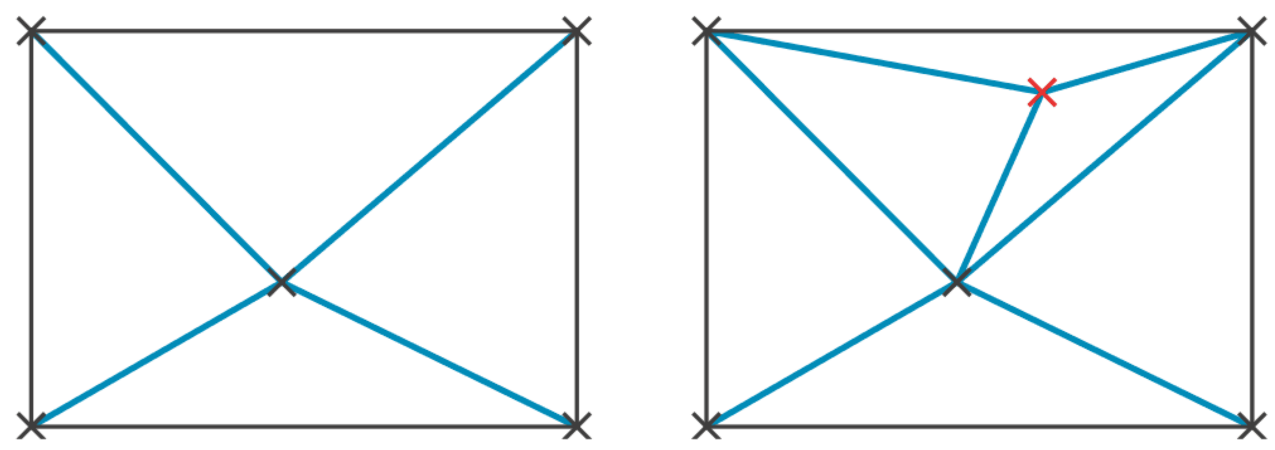


Beachten Sie: In Aufgabe 1 und 2 ist für den Induktionsanfang $n = 3$ zu wählen.

2 Beweisen Sie die folgende Aussage für $n \geq 3$: In einem konvexen Vieleck mit n Ecken gibt es $d = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 3)$ Diagonalen.

3 Im Innern eines Rechtecks sind Punkte angeordnet. Diese Punkte werden untereinander und mit den Eckpunkten so verbunden, dass sich keine Verbindungslinien kreuzen.
Dabei entstehen Dreiecke.
a) Bestimmen Sie die Anzahl der Dreiecke für einen, zwei, drei und vier innere Punkte. Geben Sie eine Formel für die Anzahl der Dreiecke bei n inneren Punkte an.
b) Beweisen Sie die Formel aus Teilaufgabe a) mit vollständiger Induktion.

Ein innerer Punkt $n = 1$ — Zwei innere Punkte $n = 2$



4 Zeigen Sie mit vollständiger Induktion.
a) Die n-te Ableitung von f mit $f(x) = 3x \cdot e^x$ ist $f^{(n)}(x) = (3n + 3x) \cdot e^x$.
b) Die n-te Ableitung von f mit $f(x) = (x + 4) \cdot e^x$ ist $f^{(n)}(x) = (n + 4 + x) \cdot e^x$.
c) Die n-te Ableitung von f mit $f(x) = x \cdot e^{2x}$ ist $f^{(n)}(x) = (2^n \cdot x + n \cdot 2^{n-1}) \cdot e^{2x}$.

5 Zeigen Sie mit vollständiger Induktion die Summenformel für $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 1$.
a) Summe der ersten n natürlichen Zahlen: $1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n + 1)$.
b) Summe der ersten n Quadratzahlen: $1^2 + 2^2 + 3^2 + \dots + n^2 = \frac{1}{6} \cdot n \cdot (n + 1) \cdot (2n + 1)$.
c) Summe der ersten n geraden natürlichen Zahlen: $2 + 4 + 6 + \dots + 2n = n \cdot (n + 1)$.
d) Summe der ersten n ungeraden natürlichen Zahlen: $1 + 3 + 5 + \dots + (2n - 1) = n^2$.

Zu der Aussage aus Aufgabe 5 a) gibt es auch einen schönen, anschaulichen Beweis von Carl Friedrich Gauß, der keine vollständige Induktion verwendet.