Vollständige Induktion, ein Beweisverfahren

Tom Roth

2. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Mathematisches Beweisen

Ein Beweis in der Mathematik ist eine logisch fehlerfreie Herleitung einer Aussage aus zuvor als wahr angesehener Aussagen. Diese zuvor als wahr angesehen Aussagen werden als *Axiome* bezeichnet. Aussagen in der Mathemaik sind Sätze, die als wahr oder falsch angesehen werden können. Der Satz „Für alle ungeraden natürlichen Zahlen m und n ist die Summe $m+n$ eine gerade Zahl“ß wäre ein gutes Beispiel für eine mathematische Aussage. Aussagen können mit verschieden Aussageverknüpfungen miteinander zu logischen *Konjunktionen* verknüpft werden. Diese Konjunktionen haben einen eigenen Wahrheitswert, sind also wahr oder falsch. Ihr Wahrheitswert hängt dabei nur von den Wahrheitswerten der Aussagen, aus der sie bestehen, und wie diese verknüpft wurden, ab. Die Konjunktion „$2 > 1$ und 4 ist eine Primzahl“ besteht aus den beiden Aussagen „$2 > 1$“ und „4 ist eine Primzahl“ die mit der Aussagenverknüpfung „und“ verknüpft sind. Da bei einer undverknüpfung beide Aussage wahr sein müssen, ist die Konjunktion falsch, da die Aussage „4 ist eine Primzahl“ flasch ist. [1]

2 Verwendungszweck

3 Begriffe

4 Aufbau des Beweises

5 Beispiel

Wir wollen die Aussage beweisen:

$$A(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

Induktionsanfang (IA)

Für $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

Die Aussage ist also für $n = 1$ wahr. ✓

[1] Vgl. `https://www.logik.uni-jena.de/logikmedia/75/einfuehrung-in-das-mathematische-beweisen.pdf` (stand 2.9.25)

Induktionsschritt (IS)

Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges $n \geq 1$, also

$$A(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir zeigen, dass daraus $A(n+1)$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage auch für $n + 1$ wahr.

Schlussfolgerung

Da IA und IS gezeigt wurden, gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

6 Fazit

7 Quellen