# VOLLSTÄNDIGE INDUKTION - EIN BEWEISVERFAHREN

## WIE FUNKTIONIERT ES UND WARUM IST ES SO WICHTIG?

Von Tom Roth

# GLIEDERUNG

- **Mathematisches Beweisen**
- **Aufbau der vollständigen Induktion Anhand der Gaußschen Summenformel**
- **Beispiel aus der analytischen Geometrie**
- **Fazit**

# MATHEMATISCHES BEWEISEN

- **Aussagen**
- **Logikoperatoren**
  - Wahrheitstabellen

# MATHEMATISCHES BEWEISEN - BISHERIGE BEWEISARTEN

- **Direkter Beweis:** $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$
- **Indirekter Beweis:** $\neg\mathrm{P} \Rightarrow \neg\mathrm{Q}$
- **Widerspruchsbeweis:** $\neg\mathrm{P} \Rightarrow (\mathrm{Q} \wedge \neg\mathrm{Q})$

# VOLLSTÄNDIGE INDUKTION – BEISPIEL GAUßSCHE SUMMENFORMEL

$$1 + 2 + \cdots + n = ?$$

Gauß:

$$1 + 2 + \cdots + \mathrm{n} = \sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{k} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2}$$

Zu beweisende Aussage $\mathrm{A}$:

$$\mathrm{A}(\mathrm{n}) = 1 + 2 + \cdots + \mathrm{n} = \frac{\mathrm{n}(\mathrm{n}+1)}{2} \quad \forall \mathrm{n} \in \mathbb{N}, \mathrm{n} \geq 1$$

# VOLLSTÄNDIGE INDUKTION – BEISPIEL GAUßSCHE SUMMENFORMEL

1.Schritt Induktionsanfang:

- Zeigen, dass die Aussage für ein spezifisches n (meist n=1) gilt :

$$A(1) = 1$$

$$1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$$

$$1 = 1 \blacksquare$$

-> Aussage ist für n=1 wahr.

# VOLLSTÄNDIGE INDUKTION
# – BEISPIEL GAUßSCHE SUMMENFORMEL

2.Schritt Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: man nimmt an, dass A(n) wahr ist.
- Zeigen, dass, wenn A(n) wahr ist, A(n + 1) dann auch wahr ist:

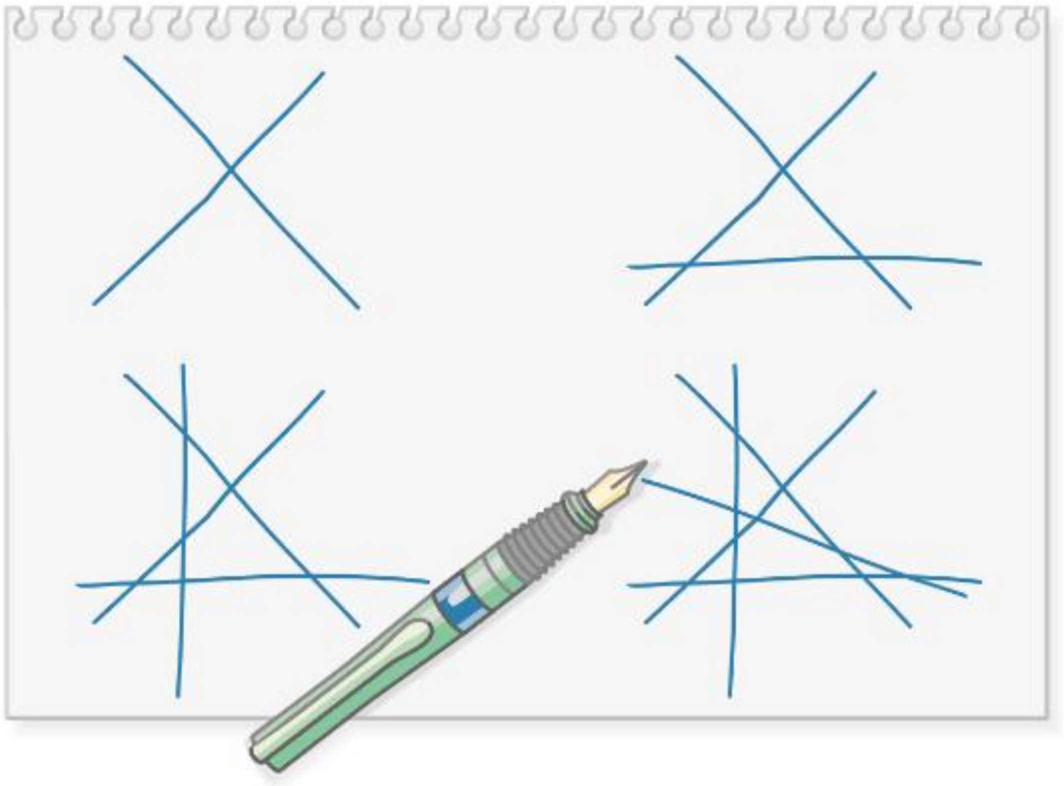
$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

# VOLLSTÄNDIGE INDUKTION
# – BEISPIEL GAUßSCHE SUMMENFORMEL

Schlussfolgerung:

Aus Induktionsanfang und Induktionsschluss folgt, dass die Aussage A für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ wahr ist.

# BEISPIEL AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE



Maximale Anzahl an Schnittpunkten von n Geraden:

$$S(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$$

# FAZIT

- Induktionsanfang (gilt für spezifisches n)
- Induktionsschritt (gilt für jeden Nachfolger)
- Essenziell zum Beweisen von Aussagen über natürliche Zahlen

# QUELLEN

**Textquellen:**

**https://www.logik.uni-jena.de/logikmedia/75/einfuehrung-in-das-mathematischebeweisen.pdf (Stand 2.9.25)**
**https://rg1-teaching.mpi-inf.mpg.de/old-ag2/teaching/dsl/v22-dsl.pdf (Stand 3.9.25)**
**https://studyflix.de/mathematik/zahlenmengen-3260/natuerliche-zahlen (Stand 3.9.25)**
**https://studyflix.de/mathematik/vollstandige-induktion-2406 (Stand 15.9.25)**
**https://studyflix.de/mathematik/gaussche-summenformel-2408 (Stand 3.9.25)**
**Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Problem 1 6.2**

**Bildquellen:**

**Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Abb. 1.**
**Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Fig. 1.**
**Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Abb. 3.**

VIELEN DANK FÜR EURE AUFMERKSAMKEIT.
HAB IHR NOCH FRAGEN?