

Vollständige Induktion, ein Beweisverfahren

Tom Roth

2. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1	Mathematisches Beweisen	1
1.1	Direkter Beweis	1
1.2	Beweis durch Kontraposition	2
1.3	Widerspruchsbeweis	2
1.4	Induktionsbeweis	2
1.4.1	Vollständige Induktion	2
2	Induktive Mengendefinition	3
3	Begriffe	3
4	Aufbau der vollständigen Induktion	4
5	Beispiele	4
6	Fazit	5
7	Quellen	5

1 Mathematisches Beweisen

Ein Beweis in der Mathematik ist eine logisch fehlerfreie Herleitung einer Aussage aus zuvor als wahr angesehener Aussagen. Diese zuvor als wahr angesehen Aussagen werden als *Axiome* bezeichnet. Aussagen in der Mathematik sind Sätze, die als wahr oder falsch angesehen werden können. Der Satz „Für alle ungeraden natürlichen Zahlen m und n ist die Summe $m + n$ eine gerade Zahl“ wäre ein gutes Beispiel für eine mathematische Aussage. Dabei werden zwei Aussagen mit einer Aussageverknüpfung, hier „und“, zu einer Konjunktion verknüpft, die ihren eigenen Wahrheitswert besitzt. Meist sollen Aussagen der Form $\forall x(P(x) \Rightarrow Q(x))$, also wenn . Hierbei sind die beiden Aussagen P und Q mit einer „wenn, dann“-Verknüpfung miteinander verknüpft. Diese Art von Konjunktionen nennt man *Implikationen*. Es soll also bewiesen werden, dass wenn P gilt, Q auch gilt.

Die dazugehörige Wahrheitstabelle sieht wie folgt aus:

P	Q	$P \Rightarrow Q$
W	W	W
W	F	F
F	W	W
F	F	W

Wie zu sehen ist, ist diese Aussage nur falsch, wenn P wahr ist, und Q falsch. Diese Aussage kann allerdings auch umgeformt werden.

Das Kommutativgesetz darf nicht angewendet werden. $P \Rightarrow Q \not\equiv Q \Rightarrow P$.

Die Wahrheitswerte können allerdings mithilfe des „nicht“-Operators negiert werden. Da die Konjunktion nur falsch ist, wenn P wahr und Q falsch ist gilt auch: $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$.

Einfache Aussagen können auch umgeformt werden.

So gilt auch $P \equiv \neg P \Rightarrow (Q \ \& \ \neg Q)$. Auf Grund der Vielfalt der Aussagen gibt es verschiedene Beweisverfahren, die zum Teil auf die selben Aussagen angewendet werden können, oder verschiedene Arten von Aussagen beweisen können. Die gängigsten werden im folgenden kurz erklärt.

1.1 Direkter Beweis

Der direkte Beweis wird bei Implikationen verwendet. Dabei nimmt man P als wahr an und leitet daraus Q her.

1.2 Beweis durch Kontraposition

Bei der Kontraposition macht man sich die Umformung der Implikation zu nutze. Wie vorher gezeigt gilt $P \Rightarrow Q \equiv \neg Q \Rightarrow \neg P$. Man zeigt also, dass wenn Q falsch ist, P auch falsch ist.

1.3 Widerspruchsbeweis

Mit dem Widerspruchsbeweis beweist man einfache Aussagen. Wenn man zum Beispiel zeigen will, dass P gilt, kann man durch die oben gezeigte Umformung dem Widerspruchsbeweis auch zeigen, dass seine negation einen Widerspruch erzeugt, also falsch ist. Denn $P \equiv \neg P \Rightarrow (Q \ \& \ \neg Q)$ gilt. $(Q \ \& \ \neg Q)$ ist immer falsch, denn Q kann nicht gleichzeitig richtig und falsch sein. Man könnte also auch schreiben $\neg P \Rightarrow \perp$. Beim Widerspruchsbeweis nimmt man also das Gegenteil der Aussage an und zeigt, dass dies zu einem Widerspruch führt.

1.4 Induktionsbeweis

Der Induktionsbeweis wird verwendet, um Aussagen für alle Elemente einer bestimmten Menge zu beweisen. Bei der Menge kann es sich um verschiedene Dinge handeln. Meist handelt es sich um Zahlen, es kann aber alles mögliche sein, das sich induktiv definieren lässt. Wie die Induktive Mengendefinition funktioniert wird im nächsten Abschnitt erklärt.

1.4.1 Vollständige Induktion

Bei der vollständigen Induktion entspricht die Menge immer den natürlichen Zahlen. Man beweist also bei der vollständigen Induktion, dass eine Aussage für alle natürlichen Zahlen gilt.¹

¹Vgl. <https://www.logik.uni-jena.de/logikmedia/75/einfuehrung-in-das-mathematische-beweisen.pdf> (stand 2.9.25)

2 Induktive Mengendefinition

Beim Festlegen einer *induktiven Menge* folgt man zwei Schritten.

1. Basismenge: Festlegung bestimmter Basisobjekte, die in der Menge M enthalten sein sollen.
2. Erzeugungsregel: Aufstellen von Regeln, mit denen sich die anderen Elemente aus den Basisobjekten ergeben ^{2 3}

Häufig will man etwas für alle *natürlichen Zahlen* beweisen. Diese haben folgende vier Eigenschaften, die auch als ihre Definition angesehen werden können:

1. „Die kleinste Natürliche Zahl ist 1.
2. Jede natürliche Zahl hat eine um 1 größere Zahl. Diese ist ihr Nachfolger.
3. Zwischen einer natürlichen Zahl und ihrem Nachfolger liegt keine weitere natürliche Zahl.
4. Es gibt keine größte natürliche Zahl. Es gibt also unendlich viele natürliche Zahlen.“⁴

Anhand der ersten beiden Eigenschaften kann man schon erkennen, dass sich die natürlichen Zahlen als induktive Menge definieren lassen.

3 Begriffe

²Vgl. <https://www.logik.uni-jena.de/logikmedia/75/einfuehrung-in-das-mathematische-beweisen.pdf> (stand 2.9.25)

³Vgl. <https://rg1-teaching.mpi-inf.mpg.de/old-ag2/teaching/dsl/v22-dsl.pdf> (stand 3.9.25)

⁴<https://studyflix.de/mathematik/zahlenmengen-3260/natuerliche-zahlen> (stand 3.9.25)

4 Aufbau der vollständigen Induktion

Die vollständige Induktionsbeweis besteht aus zwei Schritten, dem *Induktionsanfang* und dem *Induktionsschritt*. Wenn man die Aussage A für die Menge

$$M := \{n \in \mathbb{N} \mid A(n)\}$$

beweisen möchte sehen die beiden Schritte folgendermaßen aus:

- **Induktionsanfang:** Man zeigt, dass $A(1)$ wahr ist.
- **Induktionsschritt:** Man zeigt, dass $A(n) \Rightarrow A(n+1)$ wahr ist.
Auch dieser Schritt besteht aus zwei Teilen:
 - Man nimmt man an, dass $A(n)$ wahr ist. Das ist die sogenannte *Induktionsvoraussetzung*.
 - Man leitet aus der Induktionsvoraussetzung her, dass $A(n+1)$ wahr ist. Das nennt man *Induktionsschluss*.⁵

5 Beispiele

5.1 Gaußsche Summenformel

Der Mathematiker Carl Friedrich Gauß hat die Formel

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{k=1}^n k = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

zur Berechnung der Summe der ersten n Zahlen aufgestellt.⁶

Folgende Aussage soll nun bewiesen werden:

$$A(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

Dafür werden die beiden Schritte des Induktionsbeweises ausgeführt.

⁵Vgl. <https://www.logik.uni-jena.de/logikmedia/75/einfuehrung-in-das-mathematische-beweisen.pdf> (stand 2.9.25)

⁶Vgl. <https://studyflix.de/mathematik/gaussche-summenformel-2408>, (stand 3.9.25)

5.1.1 Induktionsanfang (IA)

Zeige, dass $A(1)$ gilt:

$$\begin{aligned} A(1) &= 1 \\ 1 &= \frac{1 * (1 + 1)}{2} \\ 1 &= 1 \quad \checkmark \end{aligned}$$

Die Aussage A ist also für $n = 1$ wahr. \checkmark

5.1.2 Induktionsschritt (IS)

Zeige, dass $A(n) \Rightarrow A(n + 1)$ gilt:

Dafür wird angenommen, dass $A(n)$ wahr ist (*Induktionsvoraussetzung*):

$$A(n) : 1 + 2 + \dots + n = \frac{n(n + 1)}{2}$$

Danach wird gezeigt, dass, wenn $A(n)$ wahr ist, auch $A(n + 1)$ wahr ist (*Induktionsschritt*):

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \dots + n + (n + 1) &= \frac{n(n + 1)}{2} + (n + 1) \\ &= \frac{n(n + 1) + 2(n + 1)}{2} \\ &= \frac{(n + 1)(n + 2)}{2} \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage A auch für $n + 1$ wahr. \checkmark

5.1.3 Schlussfolgerung

Da IA und IS gezeigt wurden, gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

6 Fazit

7 Quellen