Vollständige Induktion ein Beweisverfahren

Tom Roth

2. September 2025

Inhaltsverzeichnis

1 Einleitung

2 Zweck

3 Verfahren

4 Beispiel

Wir wollen die Aussage beweisen:

$$A(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}, \quad \forall n \geq 1$$

Induktionsanfang (IA)

Für $n = 1$:

$$1 = \frac{1 \cdot (1+1)}{2} = 1$$

Die Aussage ist also für $n = 1$ wahr. ✓

Induktionsschritt (IS)

Angenommen, die Aussage gilt für ein beliebiges $n \geq 1$, also

$$A(n) : 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2}$$

Wir zeigen, dass daraus $A(n+1)$ folgt:

$$\begin{aligned} 1 + 2 + \cdots + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + (n+1) \\ &= \frac{n(n+1) + 2(n+1)}{2} \\ &= \frac{(n+1)(n+2)}{2} \end{aligned}$$

Damit ist die Aussage auch für $n + 1$ wahr.

Schlussfolgerung

Da IA und IS gezeigt wurden, gilt die Aussage für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$.

5 Fazit