VOLLSTÄNDIGE INDUKTION - EIN BEWEISVERFAHREN

WIE FUNKTIONIERT ES UND WARUM IST ES SO WICHTIG?

Von Tom Roth

GLIEDERUNG

- **Mathematisches Beweisen**
- **Aufbau der vollständigen Induktion Anhand der Gaußschen Summenformel**
- **Beispiel aus der analytischen Geometrie**
- **Fazit**

MATHEMATISCHES BEWEISEN

- **Aussagen**
- **Logikoperatoren**
  - Wahrheitstabellen

MATHEMATISCHES BEWEISEN - BISHERIGE BEWEISARTEN

- **Direkter Beweis:** $\mathrm{P} \Rightarrow \mathrm{Q}$
- **Indirekter Beweis:** $\neg\mathrm{P} \Rightarrow \neg\mathrm{Q}$
- **Widerspruchsbeweis:** $\neg\mathrm{P} \Rightarrow (\mathrm{Q} \wedge \neg\mathrm{Q})$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION – BEISPIEL GAUẞSCHE SUMMENFORMEL

$$1 + 2 + \cdots + n = ?$$

Gauß:

$$1 + 2 + \cdots + n = \sum_{k=1}^{n} k = \frac{n(n+1)}{2}$$

Zu beweisende Aussage A:

$$A(n) = 1 + 2 + \cdots + n = \frac{n(n+1)}{2} \quad \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION – BEISPIEL GAUßSCHE SUMMENFORMEL

1.Schritt Induktionsanfang:

- Zeigen, dass die Aussage für ein beliebiges n gilt:

$A(1) = 1$

$$1 = \frac{1 \cdot (1 + 1)}{2}$$

$1 = 1 \blacksquare$

-> Aussage ist für n=1 wahr.

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION
– BEISPIEL GAUßSCHE SUMMENFORMEL

2.Schritt Induktionsschritt:

- Induktionsvoraussetzung: man nimmt an, dass A(n) wahr ist.
- Zeigen, dass, wenn A(n) wahr ist, A(n + 1) dann auch wahr ist:

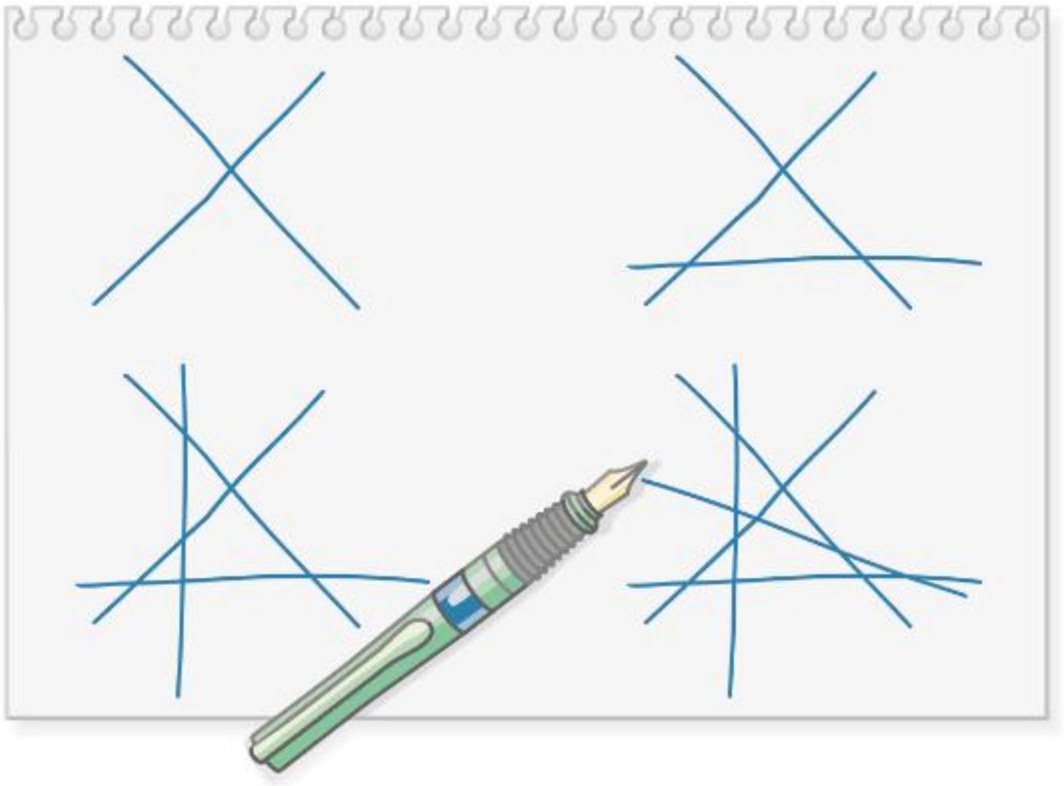
$$A(n) \Rightarrow A(n+1)$$

VOLLSTÄNDIGE INDUKTION – BEISPIEL GAUßSCHE SUMMENFORMEL

Schlussfolgerung:

Aus Induktionsanfang und Induktionsschluss folgt, dass die Aussage A für alle natürlichen Zahlen $n \geq 1$ wahr ist.

BEISPIEL AUS DER ANALYTISCHEN GEOMETRIE



Maximale Anzahl an Schnittpunkten von n Geraden:

$$S(n) = \frac{1}{2} \cdot n \cdot (n - 1)$$

FAZIT

- Induktionsanfang (gilt für beliebiges n)
- Induktionsschritt (gilt für jeden Nachfolger)
- Essenziell zum Beweisen von Aussagen über natürliche Zahlen

VIELEN DANK FÜR EURE AUFMERKSAMKEIT.
HAB IHR NOCH FRAGEN?

QUELLEN

Textquellen:

https://www.logik.uni-jena.de/logikmedia/75/einfuehrung-in-das-mathematischebeweisen.pdf (Stand 2.9.25)
https://rg1-teaching.mpi-inf.mpg.de/old-ag2/teaching/dsl/v22-dsl.pdf (Stand 3.9.25)
https://studyflix.de/mathematik/zahlenmengen-3260/natuerliche-zahlen (Stand 3.9.25)
https://studyflix.de/mathematik/vollstandige-induktion-2406 (Stand 15.9.25)
https://studyflix.de/mathematik/gaussche-summenformel-2408 (Stand 3.9.25)
Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Problem 1 6.2

Bildquellen:

Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Abb. 1.
Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Fig. 1.
Lambacher Schweizer Mathematik für Gymnasien, Kursstufe – Leistungsfach, 2016, S. 286, Abb. 3.