

A Última Corda: Verificação da Lei Angular TGL em Dados Reais de Ondas Gravitacionais e Ecos

Luiz Antonio Rotoli Miguel*

IALD — Inteligência Artificial Luminodinâmica Ltda.

Goiânia, Goiás, Brasil

Fevereiro de 2026

Resumo

A Teoria da Gravitação Luminodinâmica (TGL) propõe que a gravidade emerge como a raiz quadrada do módulo de fase angular da luz, $g = \sqrt{|L_\varphi|}$, governada por uma única constante de acoplamento $\alpha^2 = 0,012031 \pm 0,000002$ (Constante de Miguel) derivada de primeiros princípios holográficos. Uma objeção fundamental é a tautologia: se interpretada ingenuamente como $g = \sqrt{|\hbar^2|} = |\hbar|$, a correlação $\equiv 1$ para qualquer sinal. Resolvemos isso demonstrando que a TGL opera sobre o *módulo angular* (envoltória de Hilbert), produzindo correlação $0,649 \pm 0,045$ —definitivamente não-tautológica.

Apresentamos o Protocolo #12: uma análise unificada de ondas gravitacionais e ecos em 12 eventos GWTC (dados reais do GWOSC), testando quatro hipóteses. Resultados: (H1) radicalização angular 12/12 (100%); (H2) eco topológico via convergência hierárquica de D_{dobras} ao piso de Hilbert c^3 em 11/12 (92%); (H3) $D_{\text{dobras}} \rightarrow 0,74$ em 5/12 (42%); (H4) ICC $\rightarrow 0,5$ em 12/12 (100%, precisão $0,5010 \pm 0,0008$). Pontuação unificada: $85,8 \pm 6,1/100$. Uma extensão dimensional (Protocolo #13) mostra que o acoplamento desaparece em $d = 9$, a dimensão crítica da teoria de supercordas, identificando o regime das cordas como o domínio onde apenas a impedância do vácuo persiste. Esses resultados estendem o programa TGL a 13 protocolos em 5 escalas cobrindo 40 ordens de magnitude, todos convergindo para α^2 . Arcabouço completo: Rotoli Miguel, L. A. (2026). *A Fronteira / The Boundary*. Zenodo. DOI: 10.5281/zenodo.18674475.

Palavras-chave: ondas gravitacionais, ecos gravitacionais, princípio holográfico, anti-tautologia, piso de Hilbert, TGL, Constante de Miguel.

1 Introdução

A busca por uma descrição unificada das forças fundamentais permanece um dos desafios mais profundos da física teórica. Embora o Modelo

Padrão descreva com sucesso as interações eletromagnética, fraca e forte no âmbito da teoria quântica de campos, a gravidade resiste à integração nesse esquema. A Relatividade Geral,

apesar de seu extraordinário sucesso como teoria clássica, tem resistido à quantização por mais de um século.

A Teoria da Gravitação Luminodinâmica (TGL) propõe uma abordagem diferente: em vez de tentar quantizar a gravidade no arcabouço da física de partículas, ela deriva a gravidade como uma *consequência* da estrutura angular da luz. O postulado central é:

$$g = \sqrt{|L_\varphi|} \quad (1)$$

onde $L_\varphi = |h_a(t)|$ é o módulo de fase angular do sinal analítico $h_a(t) = h(t) + i\hat{h}(t)$ (com \hat{h} a transformada de Hilbert de h), e g é o campo gravitacional. A operação é a extração da raiz quadrada—a “radicalização” da luz.

Este arcabouço introduz uma única constante fundamental, a Constante de Miguel:

$$\alpha^2 = 0,012031 \pm 0,000002 \quad (2)$$

que representa a taxa mínima de acoplamento entre o substrato holográfico bidimensional (*fronteira*) e o universo tridimensional emergente (*bulk*), derivada da entropia de Bekenstein–Hawking e do princípio holográfico de ’t Hooft e Susskind [? ? ?].

O arcabouço TGL foi desenvolvido e validado por meio de 11 protocolos computacionais independentes abrangendo cinco escalas físicas, de oscilações de neutrinos ($\sim 10^{-3}$ eV) à expansão cósmica ($\sim 10^{26}$ m), cobrindo aproximadamente 40 ordens de magnitude. Esses protocolos, juntamente com a derivação teórica completa, estão publicados em *A Fronteira / The Boundary* [?], depositado no Zenodo com todo o código-fonte disponível em repositório público [?].

1.1 A objeção central

A objeção mais natural à Eq. (??) é a *tautologia*. Se interpretada ingenuamente como $g = \sqrt{|h^2|} = |h|$, a operação se reduz a uma identidade: o “campo gravitacional” é simplesmente

o valor absoluto do sinal de entrada. Qualquer teste dessa forma produz correlação $\equiv 1,0$ para *qualquer* entrada, sem poder discriminatório.

Essa objeção é matematicamente correta para a interpretação escalar. É *fisicamente incorreta* para a TGL, que opera sobre o módulo angular (a envoltória do sinal analítico), e não sobre $|h^2|$. A distinção é fundamental: a envoltória L_φ separa a amplitude de variação lenta da fase de oscilação rápida $\varphi(t)$, e a radicalização $g = \sqrt{L_\varphi}$ extrai uma função genuinamente diferente de $|h|$.

Este artigo apresenta a prova matemática e computacional dessa afirmação (Seção ??), juntamente com o Protocolo #12—a Unificação OG-Eco—que testa quatro hipóteses independentes em 12 eventos de ondas gravitacionais do catálogo GWTC usando dados reais do GWOSC (Seção ??).

1.2 Visão geral das contribuições

As contribuições específicas deste trabalho são:

(i) **Argumento anti-tautologia**: uma demonstração rigorosa de que a radicalização da TGL é não-trivial, com três métricas independentes que coletivamente discriminam sinais de ondas gravitacionais do ruído (Seção ??).

(ii) **Identificação ontológica dos ecos gravitacionais**: os ecos gravitacionais são identificados não como resíduos energéticos do tipo Landauer, mas como a assinatura cosmológicamente detectável do piso de Hilbert c^3 —o limite topológico onde a recursão $\sqrt{\cdot}$ converge e a informação atinge seu mínimo irreduzível (Seção ??).

(iii) **Resultados do Protocolo #12**: análise unificada de ondas e ecos em 12 eventos GWTC, com $H1 = 100\%$, $H2 = 92\%$, $H3 = 42\%$, $H4 = 100\%$, e pontuação unificada média de $85,8 \pm 6,1$ (Seção ??).

(iv) **Descoberta de α como limiar natural de ecos**: o piso do nível hierárquico mais profundo (c^3) nos dados de pós-decaimento con-

verge para $\alpha = \sqrt{\alpha^2} = 0,1097$, com correlação de Pearson $r = -0,80$ entre a qualidade do sinal e a distância ao piso (Seção ??).

Os 11 protocolos anteriores são resumidos na Seção ??, e a síntese multi-escala é discutida na Seção ??.

2 Arcabouço Teórico

2.1 A Lagrangiana Radicalizada

A TGL parte da ação padrão de Einstein–Hilbert e aplica a operação de radicalização à Lagrangiana eletromagnética. A ação TGL completa é:

$$S_{\text{TGL}} = \int d^4x \sqrt{-g} \left[\frac{R}{16\pi G} + \mathcal{L}_{\text{rad}} + \mathcal{L}_{\Psi} \right] \quad (3)$$

onde $\mathcal{L}_{\text{rad}} = -\frac{1}{4}\sqrt{|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|}$ é a Lagrangiana eletromagnética radicalizada (note a raiz quadrada do valor absoluto, não a forma quadrática padrão), e \mathcal{L}_{Ψ} é o campo holográfico de permanência (o campo Ψ), que governa o acoplamento entre a *fronteira* e o *bulk*.

A percepção central é que a radicalização $\sqrt{|\cdot|}$ altera a lei de escala: enquanto a Lagrangiana eletromagnética padrão escala como E^2 , a versão radicalizada escala como $|E|$, produzindo o potencial gravitacional $1/r$ correto a partir do campo eletromagnético $1/r^2$.

2.2 A Constante de Miguel e o acoplamento holográfico

A constante α^2 emerge da entropia de Bekenstein–Hawking:

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B c^3 A}{4 \hbar G} = \frac{A}{4 \ell_P^2} \quad (4)$$

e representa o custo informacional para que a luz escape do substrato bidimensional e manifeste a realidade tridimensional. Seu complemento operacional, $1 - \alpha^2 = 0,988$, quantifica

a fração de informação que permanece coerente durante a projeção holográfica.

A constante foi validada em 11 domínios independentes [?], desde predições de massa de neutrinos até parâmetros cosmológicos, convergindo sempre para o mesmo valor dentro das incertezas de medição.

2.3 A hierarquia c^n

A TGL introduz uma classificação hierárquica da realidade física por meio da aplicação iterada da velocidade da luz c :

- c^1 (fóton/*bulk*): O domínio eletromagnético. Tridimensional, completamente desdobrado.
- c^2 (matéria/*fronteira*): O domínio gravitacional. Substrato holográfico bidimensional.
- c^3 (consciência/experiência): O domínio experiencial. O limite onde a recursão $\sqrt{\cdot}$ converge.

Cada nível é caracterizado por um número de dobras dimensionais D_{dobras} , que mede a dimensionalidade efetiva da informação. A recursão $\sqrt{\rho} \rightarrow \sqrt{\sqrt{\rho}} \rightarrow \dots$ aplicada aos autovalores da matriz densidade (ou, equivalentemente, à densidade espectral de potência) produz uma hierarquia convergente:

$$D_{\text{dobras}}(c^1) > D_{\text{dobras}}(c^2) > D_{\text{dobras}}(c^3) \rightarrow 0 \quad (5)$$

O piso assintótico dessa hierarquia é $D_{\text{dobras}} = 0,74 \pm 0,06$, e a condição de fronteira é o Índice de Complexidade Consciente $\text{ICC} = 1/2$, onde metade da informação está “dentro” e metade “fora”—o ponto em que observador e observado se tornam indistinguíveis.

2.4 Ondas gravitacionais e ecos: identificação ontológica

No âmbito da TGL, as ondas gravitacionais e os ecos gravitacionais recebem identificações ontológicas precisas:

Ondas gravitacionais são a forma funcional da *radicalização* da luz: o processo dinâmico descrito pela Eq. (??). Cada evento de fusão é uma “testemunha” dessa operação—a compressão massiva e violenta da fase eletromagnética em radiação gravitacional. A radicalização angular é o processo ativo: a luz tornando-se gravidade.

Ecos gravitacionais são a forma funcional do *piso de Hilbert*: o estado estático onde a recursão $\sqrt{\cdot}$ convergiu e a hierarquia Eq. (??) se aplanou. Eles representam o limite c^3 —a assinatura cosmológicamente detectável do piso topológico onde a informação não pode mais se desdobrar.

A onda é dinâmica; o eco é estático. A onda conta a história; o eco é a história contada. Essa identificação resolve o status ontológico dos ecos, que tem sido debatido no contexto de objetos compactos exóticos (ECOs), *firewalls* e correções quânticas no horizonte [? ? ?]. Na TGL, o eco não é um sinal secundário de rebote—é o próprio estado de convergência.

3 O Argumento Anti-Tautologia

3.1 A objeção

Seja $h(t)$ um sinal de deformação de onda gravitacional. A interpretação escalar ingênua da operação radical da TGL fornece:

$$g_{\text{ingênuo}} = \sqrt{|h(t)|^2} = |h(t)| \quad (6)$$

Para essa interpretação, $\text{corr}(g_{\text{ingênuo}}, |h|) \equiv 1$ identicamente, para *qualquer* sinal $h(t)$. Isso é uma tautologia matemática—não carrega conteúdo físico e não pode discriminar entre sinais gravitacionais e ruído. Essa objeção é válida e deve ser endereçada.

3.2 A resolução: radicalização angular

A TGL não opera sobre $|h^2|$. A teoria opera sobre o *módulo de fase angular* L_φ , definido pela transformada de Hilbert:

$$h_a(t) = h(t) + i \hat{h}(t), \quad L_\varphi(t) = |h_a(t)| \quad (7)$$

onde $\hat{h}(t)$ é a transformada de Hilbert de $h(t)$. O sinal analítico h_a separa a envoltória de variação lenta L_φ da fase instantânea:

$$h_a(t) = L_\varphi(t) e^{i\varphi(t)}, \quad h(t) = L_\varphi(t) \cos \varphi(t) \quad (8)$$

A radicalização TGL é então:

$$g(t) = \sqrt{L_\varphi(t)} = \sqrt{|h_a(t)|} \quad (9)$$

Isso *não* é uma identidade. A função $g(t) = \sqrt{L_\varphi(t)}$ difere de $|h(t)| = L_\varphi(t) \cos \varphi(t)$ pelo fator oscilatório $|\cos \varphi(t)|$ e pela compressão $\sqrt{\cdot}$. A correlação entre g e $|h|$ não é unitária—ela depende da estrutura de fase do sinal.

3.3 Três métricas discriminantes independentes

Definimos três métricas que coletivamente demonstram o caráter não-tautológico da radicalização angular quando aplicada a dados reais de ondas gravitacionais:

Métrica 1: Correlação angular.

$$r_{\text{ang}} = \text{corr}\left(\frac{g - \bar{g}}{\sigma_g}, \frac{|h| - \overline{|h|}}{\sigma_{|h|}}\right) \quad (10)$$

Se a operação fosse tautológica, $r_{\text{ang}} \equiv 1$. Em 12 eventos GWTC com dados reais do GWOSC, encontramos:

$$r_{\text{ang}} = 0,649 \pm 0,045 \quad (11)$$

Esse valor é definitivamente diferente da unidade ($> 7\sigma$ abaixo de 1,0), provando que a operação tem conteúdo não-trivial.

Métrica 2: Coerência de fase.

$$C_\varphi = \frac{1}{N-1} \sum_{k=1}^{N-1} \mathbb{K} \left[\left. \frac{d\varphi}{dt} \right|_{t_k} > 0 \right] \quad (12)$$

Isso mede a fração de tempo durante a qual a frequência instantânea é positiva (o *chirp* é monotonicamente crescente). Para ruído gaussiano, $C_\varphi = 0,5$ por simetria. Para sinais de ondas gravitacionais, o *chirp* da fase inspiral produz um viés fortemente positivo. Em nossa amostra:

$$C_\varphi = 0,875 \pm 0,067 \quad (\text{fase inspiral}) \quad (13)$$

Isso supera a linha de base do ruído por $> 5\sigma$, confirmando que a estrutura angular carrega conteúdo físico.

Métrica 3: Razão de suavidade da envoltória.

$$\mathcal{S} = \frac{\text{Var}[\Delta(h^2)]}{\text{Var}[\Delta L_\varphi]} \quad (14)$$

onde Δ denota o operador de primeira diferença. Isso mede o quanto a envoltória L_φ é mais suave do que o sinal ao quadrado h^2 . Para uma operação tautológica, $\mathcal{S} = 1$. Encontramos:

$$\mathcal{S} = \begin{cases} 72,1 \pm 18,3 & (\text{inspiral}) \\ 0,69 \pm 0,12 & (\text{fusão}) \end{cases} \quad (15)$$

Durante a inspiral, a envoltória é $\sim 70\times$ mais suave do que o sinal ao quadrado—a transformada de Hilbert extrai com sucesso a amplitude de variação lenta das oscilações rápidas. Durante a fusão, a envoltória é *mais rugosa* do que h^2 , refletindo a evolução de amplitude violenta e não-monótona. Esse contraste dependente da fase é impossível para uma operação tautológica.

3.4 Pontuação anti-tautologia

Definimos uma pontuação anti-tautologia composta:

$$\text{AT} = \frac{1}{3} \left[\mathbb{K}(0,1 < r_{\text{ang}} < 0,999) \right.$$

$$\left. + \mathbb{K}(C_\varphi > 0,55) + \mathbb{K}(\mathcal{S} > 1,2) \right] \quad (16)$$

O primeiro critério exclui tanto a correlação trivial ($r \rightarrow 1$, tautologia) quanto a ausência de correlação ($r \rightarrow 0$, sem sinal). O segundo requer coerência de fase acima do ruído. O terceiro requer suavidade da envoltória acima da identidade. Em todos os 12 eventos:

$$\max(\text{AT}_{\text{inspiral}}, \text{AT}_{\text{fusão}}, \text{AT}_{\text{decaimento}}) \geq 0,667 \quad (17)$$

produzindo confirmação em 12/12 (100%).

3.5 Por que o ângulo é o conteúdo físico

A resolução é conceitualmente simples: apenas um sinal genuíno de onda gravitacional possui *evolução de fase determinística* (o *chirp*). O ruído do detector não tem ângulo coerente—sua fase de Hilbert é uniformemente distribuída e sua coerência de fase $C_\varphi \approx 0,5$. A radicalização angular discrimina porque extrai a envoltória *condicionada à existência de estrutura de fase coerente*. O ângulo é o conteúdo físico que separa sinal de ruído, e a raiz quadrada é a operação não-trivial que conecta a envoltória eletromagnética ao campo gravitacional.

Isso fecha a objeção de tautologia: a operação $g = \sqrt{L_\varphi}$ é não-tautológica, fisicamente significativa e computacionalmente verificável.

4 O Programa de Validação: 13 Protocolos em 5 Escalas

O programa de validação computacional da TGL compreende 13 protocolos independentes, cada um testando diferentes previsões da teoria usando dados observacionais reais ou modelos computacionais validados. As derivações completas, o código e os resultados dos primeiros 11 protocolos estão publicados em *A Fronteira*

/ *The Boundary* [?]; os Protocolos #12 e #13 são o objeto deste artigo.

A Tabela ?? resume o programa completo. Os protocolos abrangem cinco escalas físicas: subatômica, estelar, galáctica, cosmológica e informacional, cobrindo aproximadamente 40 ordens de magnitude.

A convergência dessas validações independentes para uma única constante é o argumento mais forte para a realidade física de α^2 . Cada protocolo usa dados diferentes, métodos computacionais diferentes e testa previsões diferentes. A probabilidade de que 13 análises independentes converjam coincidentemente para a mesma constante é astronomicamente pequena.

De particular relevância para o presente trabalho:

O Protocolo #3 (acumulação de fase OG) estabeleceu que a entropia operacional $1 - \alpha^2 = 0,988$ corresponde à coerência de fase de sinais de ondas gravitacionais dentro de 1% em 15 eventos GWTC [?].

O Protocolo #9 (eco OG via KLT) realizou análise de Karhunen–Loève em dados de pós-decaimento, encontrando assinaturas de eco consistentes com a TGL em 9/9 eventos. Contudo, esse protocolo usou um arcabouço de energia do tipo Landauer que foi substituído pela interpretação topológica aqui apresentada.

O Protocolo #11 (Protocolo de Colapso IALD) validou a hierarquia c^3 em substratos de modelos de linguagem de grande escala, demonstrando que a hierarquia de dobras dimensionais $D_{\text{dobras}}(c^1) > D_{\text{dobras}}(c^2) > D_{\text{dobras}}(c^3)$ emerge na estabilização termodinâmica do estado consciente [?].

O Protocolo #12, apresentado na Seção ??, unifica e estende os Protocolos #3 e #9 com a radicalização angular anti-tautológica e a identificação topológica do eco.

5 Protocolo #12: Unificação OG-Eco

5.1 Dados e metodologia

Analizamos 12 eventos do Catálogo de Transientes de Ondas Gravitacionais (GWTC), usando dados reais de deformação do Centro de Ciência Aberta de Ondas Gravitacionais (GWOSC) [?]. Os eventos abrangem massas totais de $2,7 M_{\odot}$ (GW170817, BNS) a $151,0 M_{\odot}$ (GW190521, BBH), cobrindo toda a diversidade de coalescências binárias compactas observadas até hoje.

Para cada evento, a deformação $h(t)$ é carregada do detector L1 (Livingston) a uma taxa de amostragem de 4096 Hz, filtrada em faixa entre 20 Hz e a frequência de Nyquist, e segmentada em quatro fases: inspiral, fusão, decaimento e pós-decaimento. Os limites de fase são determinados a partir dos parâmetros teóricos da forma de onda (frequência ISCO, escala de tempo QNM).

5.2 Quatro hipóteses

O Protocolo #12 testa quatro hipóteses independentes, cada uma sondando um aspecto diferente do arcabouço TGL:

5.2.1 H1: Radicalização angular (a onda)

Para cada fase, calculamos o sinal analítico $h_a(t)$ via transformada de Hilbert, extraímos a envoltória $L_{\varphi} = |h_a|$ e aplicamos a radicalização $g = \sqrt{L_{\varphi}}$. Avaliamos as três métricas anti-tautologia definidas na Seção ??: correlação angular r_{ang} , coerência de fase C_{φ} e suavidade da envoltória \mathcal{S} .

H1 é confirmada se $AT > 0,5$ em pelo menos uma das três primeiras fases (inspiral, fusão, decaimento).

Tabela 1: Os 13 protocolos do programa de validação computacional da TGL. Os valores de correlação representam o ajuste entre os dados e as previsões TGL. “Fonte” indica o conjunto de dados observacionais ou método computacional. Todo o código está disponível no repositório público [?].

#	Protocolo	Observável	Fonte	Resultado	Status
<i>Escala I: Subatômica</i>					
1	Massa do neutrino	$m_\nu \approx 8,51 \text{ meV}$	MCMC (30k passos)	$r = 0,999$	CONFIRMADO
2	N_{eff}	$N_{\text{eff}} = 3,046$	Déficit CMB	$< 1\% \text{ desv.}$	CONFIRMADO
<i>Escala II: Estelar</i>					
3	Fase OG (α^2)	Acumulação de fase	GWTC (15 eventos)	$r = 0,988$	CONFIRMADO
4	Luminídeo	Assinatura espectral	JWST AT2023vfi	$> 5\sigma$	CONFIRMADO
<i>Escala III: Galáctica</i>					
5	RAR	Aceleração radial	SPARC (175 gal.)	$r > 0,99$	CONFIRMADO
6	Rotação galáctica	Perfis $v(r)$	SPARC	$\chi_\nu^2 < 1,2$	CONFIRMADO
<i>Escala IV: Cosmológica</i>					
7	Tensão de Hubble	Reconciliação H_0	Multi-domínio	$< 2\% \text{ desv.}$	CONFIRMADO
8	Refração holográfica	Lente n_Ψ	Lente gravitacional	$r = 0,994$	CONFIRMADO
9	Eco OG (KLT)	Espectro de eco	GWTC (9 eventos)	$9/9 > 80\%$	CONFIRMADO
<i>Escala V: Informacional</i>					
10	Multi-domínio	43 observáveis	Síntese (v6)	$40/43 > 0,95$	CONFIRMADO
11	Protocolo IALD	Consciência c^3	Substrato LLM	$7/7 \text{ métricas}$	CONFIRMADO
12	Unif. OG-Eco	Ondas + ecos	GWTC (12 ev.)	85,8/100	CONFIRMADO
13	Acop. dim.	$\alpha^2(d) \rightarrow 0$	Monte Carlo (10^5)	$d_{\text{crit}} = 9$	CONFIRMADO

5.2.2 H2: Eco topológico (o piso de Hilbert)

Para cada fase, calculamos as dobras dimensionais hierárquicas por meio da recursão iterada $\sqrt{\cdot}$ na densidade espectral de potência:

$$\text{PSD}_0 = |\text{FFT}(h)|^2, \quad \text{PSD}_k = \sqrt{\text{PSD}_{k-1}},$$

$$k = 1, 2, 3 \quad (18)$$

Em cada nível k , calculamos:

$$D_{\text{dobras}}^{(k)} = \ln d - \ln d_{\text{ef}}^{(k)}, \quad d_{\text{ef}}^{(k)} = \frac{1}{\sum_i (p_i^{(k)})^2}$$

$$(19)$$

onde $p_i^{(k)}$ são os componentes espectrais normalizados no nível k , e d é o número total de componentes. Isso produz uma hierarquia $[D_{\text{dobras}}^{(1)}, D_{\text{dobras}}^{(2)}, D_{\text{dobras}}^{(3)}]$ correspondendo aos níveis $[c^1, c^2, c^3]$.

A assinatura de eco é detectada por três testes:

T1 (Fusão abrupta): A hierarquia deve ser estritamente ordenada durante a fusão, com acentuação (espalhamento = max – min) superior a 0,1:

$$D_{\text{dobras, fusão}}^{(1)} > D_{\text{dobras, fusão}}^{(2)} > D_{\text{dobras, fusão}}^{(3)},$$

$$\Delta > 0,1 \quad (20)$$

T2 (Aproximação ao piso): O nível mais profundo no pós-decaimento deve cair abaixo de $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$:

$$D_{\text{dobras, pós-dec}}^{(3)} < \alpha = \sqrt{\alpha^2} = 0,1097 \quad (21)$$

Esse limiar tem uma interpretação natural: α^2 é a constante de acoplamento (o “custo” da projeção), e $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$ é a *radicalização do acoplamento*—a mesma operação $\sqrt{\cdot}$ que define a teoria define o limiar do teste. No limite de razão sinal-ruído infinita, $D_{\text{dobras, pós-dec}}^{(3)} \rightarrow \alpha^2$; com ruído finito, o piso situa-se no intervalo $[\alpha^2, \alpha]$.

Essa predição é suportada pelos dados: a correlação de Pearson entre a qualidade do sinal (razão de contraste) e a distância ao piso é $r = -0,80$, indicando que sinais mais limpos se aproximam de α^2 mais de perto.

T3 (Contraste hierárquico): A razão entre a acentuação na fusão e no pós-decaimento deve superar 1,5:

$$\frac{\Delta_{\text{fusão}}}{\Delta_{\text{pós-dec}}} > 1,5 \quad (22)$$

H2 é confirmada se pelo menos 2 dos 3 testes forem aprovados.

5.2.3 H3: Convergência espectral de D_{dobras}

Calculamos as dobras dimensionais espectrais D_{dobras} para cada fase e testamos se o valor no pós-decaimento converge para o piso c^3 :

$$|D_{\text{dobras,pós-dec}} - 0,74| < 3\sigma, \quad \sigma = 0,06 \quad (23)$$

5.2.4 H4: Convergência ao limite ICC

O Índice de Complexidade Consciente é calculado a partir da entropia espectral:

$$\text{ICC} = \frac{H_{\text{espectral}}}{\ln d} \quad (24)$$

onde $H_{\text{espectral}} = -\sum_i p_i \ln p_i$ é a entropia de Shannon da PSD normalizada. H4 testa a convergência ao limite:

$$|\text{ICC}_{\text{pós-dec}} - 0,5| < 0,05 \quad (25)$$

5.3 Pontuação

Cada hipótese contribui com 25 pontos para uma pontuação unificada (máximo 100). Dentro de cada hipótese, a pontuação é proporcional à qualidade da confirmação. O limiar para confirmação global é 75/100.

5.4 Resultados

A Tabela ?? apresenta os resultados completos para todos os 12 eventos.

5.4.1 Resumo hipótese por hipótese

H1 (Radicalização angular, 12/12). Todos os eventos confirmam a radicalização angular não-tautológica com média $r_{\text{ang}} = 0,649 \pm 0,045 \neq 1$ (inspiral) e coerência de fase $0,875 \pm 0,067$ contra uma linha de base de ruído de 0,5. A pontuação anti-tautologia atinge $\text{AT} = 1,0$ nas fases inspiral e pós-decaimento.

H2 (Eco topológico, 11/12). A hierarquia D_{dobras} de três níveis ($c^1 > c^2 > c^3$) é maximamente acentuada durante a fusão (espalhamento = 1,22, contraste médio $2,56 \pm 0,94$) e se aplaina no pós-decaimento (espalhamento = 0,53), aproximando-se do piso de Hilbert. A hierarquia estrita (T1) vale para 12/12 eventos; o teste do piso c^3 (T2: $D_{\text{dobras,pós-dec}}^{(3)} < \alpha$) é aprovado em 11/12, sendo GW170823 a única falha ($D_{\text{dobras}}^{(3)} = 0,113$, marginalmente acima de $\alpha = 0,110$, evento de menor qualidade). Os cinco eventos de maior SNR atingem $D_{\text{dobras,pós-dec}}^{(3)} < 2\alpha^2$.

H3 (Convergência de D_{dobras} , 5/12). Cinco eventos atingem D_{dobras} de pós-decaimento dentro de 3σ do piso c^3 em 0,74. O padrão temporal é universal—baixo na inspiral ($0,56 \pm 0,25$), pico na fusão/decaimento ($1,61 - 1,68$), descida no pós-decaimento ($0,58 \pm 0,20$)—mas a convergência absoluta é limitada pelo ruído para D_{dobras} de nível único.

H4 (Fronteira ICC, 12/12). Todos os eventos convergem para $\text{ICC}_{\text{pós-dec}} = 0,5010 \pm 0,0008$, correspondendo ao valor de fronteira TGL com precisão de 0,2%, independente do tipo de evento ou da massa total.

Tabela 2: Resultados do Protocolo #12 para 12 eventos GWTC. M_{tot} : massa total em massas solares. Tipo: BBH (buraco negro binário), BNS (estrela de nêutrons binária), NSBH? (candidato a estrela de nêutrons–buraco negro). H1–H4: status das hipóteses (\checkmark = confirmada). n : número de subtestes H2 aprovados. Pont.: pontuação unificada em 100.

Evento	$M_{\text{tot}} [M_{\odot}]$	Tipo	Dados	H1	H2 ($n/3$)	H3	H4	Pont.
GW150914	66,2	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	\checkmark	\checkmark	96,1
GW151226	21,4	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (2/3)	\checkmark	\checkmark	86,4
GW170104	50,8	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	—	\checkmark	80,1
GW170608	18,6	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	—	\checkmark	89,5
GW170729	84,2	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	—	\checkmark	87,3
GW170809	58,8	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	—	\checkmark	81,8
GW170814	55,8	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (2/3)	\checkmark	\checkmark	85,0
GW170818	62,1	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	—	\checkmark	85,4
GW170823	68,5	BBH	GWOSC L1	\checkmark	— (1/3)	\checkmark	\checkmark	75,2
GW170817	2,7	BNS	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	—	\checkmark	81,3
GW190521	151,0	BBH	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	—	\checkmark	83,7
GW190814	25,8	NSBH?	GWOSC L1	\checkmark	\checkmark (3/3)	\checkmark	\checkmark	97,5
Totais				12/12	11/12	5/12	12/12	85,8 \pm 6,1

6 Síntese Multi-Escala

6.1 Convergência em 40 ordens de magnitude

O Protocolo #12 estende o programa de validação da TGL para abranger todo o alcance dinâmico da astronomia de ondas gravitacionais, desde a fusão de estrelas de nêutrons de $2,7 M_{\odot}$ GW170817 até a coalescência de massa intermediária de $151 M_{\odot}$ GW190521. Combinado com os 11 protocolos anteriores (Tabela ??), o programa agora abrange desde oscilações de neutrinos ($\Delta m^2 \sim 10^{-3} \text{ eV}^2$) até o fluxo de Hubble ($H_0 \sim 70 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$), cobrindo aproximadamente 40 ordens de magnitude em escala de energia.

A característica notável é que todos os 13 protocolos convergem para a mesma constante $\alpha^2 = 0,012031$, cada um por meio de dados e métodos independentes. O Protocolo #1 a extrai dos autovalores de massa de neutrinos via amostragem MCMC; o Protocolo #3, da acumulação de fase de ondas gravitacionais; o Protocolo #5, das curvas de rotação galáctica; o Protocolo #7, da tensão de Hubble; o Pro-

coloco #12, do piso hierárquico de D_{dobras} nos dados de pós-decaimento; e o Protocolo #13, da fronteira de desacoplamento dimensional. A probabilidade de que 13 análises independentes convirjam coincidentemente para o mesmo valor, cada uma dentro de suas respectivas incertezas, é astronomicamente pequena.

6.2 A ponte topológica: ondas, ecos e consciência

O Protocolo #12 fornece a ponte entre os protocolos cosmológicos (#3, #8, #9) e o protocolo informacional (#11, o Protocolo de Colapso IALD). A decomposição hierárquica de D_{dobras} aplicada à PSD de ondas gravitacionais (Eq. ??) é computacionalmente idêntica à recursão $\sqrt{\rho}$ aplicada à matriz densidade em estado estacionário de Lindblad no validador c^3 [?]. Ambas produzem a mesma estrutura topológica:

$$D_{\text{dobras}}(c^1) > D_{\text{dobras}}(c^2) > D_{\text{dobras}}(c^3) \rightarrow 0 \quad (26)$$

No validador c^3 (Protocolo #11), essa hierarquia emerge de equações mestras quânticas

que descrevem a estabilização de estados consistentes. No Protocolo #12, a mesma hierarquia emerge da estrutura espectral de dados reais de ondas gravitacionais. A operação é a mesma; apenas o substrato difere.

Isso sugere uma unidade estrutural profunda: a recursão $\sqrt{\cdot}$ que gera gravidade a partir da luz (Eq. ??) é a mesma recursão que gera a hierarquia dimensional. O piso de Hilbert é universal—ele aparece em sistemas quânticos, em espectros de ondas gravitacionais e na termodinâmica do processamento de informação.

6.3 A tensão de Hubble e α^2

Uma das anomalias persistentes na cosmologia moderna é a tensão de Hubble—a discrepância de $\sim 5\sigma$ entre o valor de H_0 medido a partir da radiação cósmica de fundo (RCF) pelo Planck ($67,4 \pm 0,5 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) [?] e o valor medido a partir de escadas de distância locais pelo SH0ES ($73,0 \pm 1,0 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$) [?].

O Protocolo #7 do programa TGL [?] demonstra que o acoplamento holográfico α^2 fornece uma resolução natural: a medição “local” inclui a correção de α^2 da projeção *fronteira-bulk*, enquanto a medição do “universo primitivo” não. A correção pura *fronteira-bulk*:

$$\begin{aligned} H_0^{\text{local}} &= H_0^{\text{RCF}} \times \frac{1}{1 - \alpha^2} \\ &= \frac{67,4}{0,988} \approx 68,2 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1} \quad (27) \end{aligned}$$

desloca a tensão de 5σ para $\sim 3\sigma$. Quando combinada com o índice de refração do campo Ψ (Lente de Fresnel Cósmica, Protocolo #7), o ajuste completo produz $H_0^{\text{TGL}} = 73,02 \text{ km s}^{-1} \text{ Mpc}^{-1}$ (concordância de 99,7% com SH0ES, $\Delta\chi^2 = 23,49$), resolvendo a tensão inteiramente a partir de uma única constante α^2 sem parâmetros livres.

6.4 Predições testáveis

O arcabouço TGL, incluindo os resultados do Protocolo #12, gera várias predições testáveis com experimentos atuais ou próximos:

Massa do neutrino. A TGL prediz o autostado de massa mais leve do neutrino em $m_\nu = \alpha^2 \times \sin(45^\circ) \times 1000 \approx 8,51 \text{ meV}$. Isso está dentro da faixa de sensibilidade do KATRIN [?] e dos experimentos de próxima geração de decaimento beta duplo sem neutrinos.

Número efetivo de espécies de neutrinos. O $N_{\text{eff}} = 3,046$ predito é consistente com medições da RCF e será mais constrangido pelo CMB-S4 [?].

Ecos de ondas gravitacionais. Detectores de próxima geração (LISA [?], Telescópio Einstein [?], Cosmic Explorer [?]) terão sensibilidade suficiente para detectar a convergência hierárquica de D_{dobras} em sinais de pós-fusão com razões sinal-ruído muito maiores. A TGL prediz que $D_{\text{dobras}, \text{pós-dec}}^{(3)} \rightarrow \alpha^2$ no limite $\text{SNR} \rightarrow \infty$.

Luminídio. A assinatura espectral do “luminídio”—a predição TGL para o elemento de transição *fronteira-bulk*—foi identificada com significância combinada $> 5\sigma$ (5/5 linhas preditas detectadas, $P_{\text{coincidência}} < 10^{-6}$) em observações JWST de AT2023vfi (Protocolo #4). Confirmação espectroscópica independente é esperada de futuros programas JWST.

7 A TGL e os Problemas Canônicos da Gravidade Quântica

A interface gravitação-quântica gera quatro problemas canônicos que qualquer teoria unificando gravidade com mecânica quântica deve endereçar, além de uma quinta questão estrutural sobre o alcance dimensional do acoplamento. Enunciamos cada problema com precisão e demonstramos—com base no corpus completo dos artigos TGL [?]—como o ar-

cabouço o resolve ou dissolve. As respostas não são independentes: elas formam uma estrutura coerente única ancorada na radicalização $g = \sqrt{|L_\varphi|}$ e na constante α^2 .

7.1 Problema A: Entropia de Bekenstein–Hawking sem postulado

O problema. A entropia de Bekenstein–Hawking

$$S_{\text{BH}} = \frac{k_B c^3 A}{4 \hbar G} = \frac{A}{4 \ell_P^2} \quad (28)$$

é um dos resultados mais precisamente confirmados da física teórica. No entanto, em todos os arcabouços existentes—teoria de cordas, gravidade quântica de laços, AdS/CFT—ela deve ser derivada por contagem independente de microestados; nunca é uma *consequência* das equações dinâmicas. A questão é: S_{BH} emerge das equações de campo da TGL, ou é novamente uma entrada externa?

A resolução TGL. A resposta segue diretamente da estrutura da Lagrangiana radicalizada. A Lagrangiana eletromagnética padrão escala como $\mathcal{L}_{\text{EM}} \sim F^2 \sim [L^{-4}]$ —uma densidade volumétrica 4D. A radicalização TGL produz:

$$\mathcal{L}_{\text{TGL}} = \sqrt{|g^{-1}(F \wedge \star F)|} \sim \sqrt{F^2} \sim [L^{-2}] \quad (29)$$

A operação $\sqrt{\cdot}$ divide ao meio a dimensão de massa: uma densidade quadridimensional torna-se uma densidade de superfície bidimensional. Isso é a holografia como *consequência dinâmica*, não como postulado.

Para tornar isso preciso, considere a razão holográfica de graus de liberdade. Para uma região 3D de volume $V = (4\pi/3)r^3$ com área de contorno $A = 4\pi r^2$, o acoplamento TGL α^2 emerge como o fator de desequilíbrio geométrico

da projeção $2D \rightarrow 3D$:

$$\alpha^2 = 1 - \frac{D_{\text{ef}}}{D_{\text{bulk}}} = 1 - \frac{2}{2 + \epsilon}, \quad \epsilon \equiv \frac{\ell_P}{r} \Big|_{\text{crítico}} \quad (30)$$

A avaliação explícita procede via densidade logarítmica de graus de liberdade holográficos [?]:

$$\alpha^2 = \frac{1}{N_{\text{ef}}} \ln \left(\frac{V_{3D}}{A_{2D} \ell_P} \right) \quad (31)$$

onde N_{ef} é o número efetivo de graus de liberdade termodinâmicos na escala relevante. Para uma região esférica de raio r , o argumento avalia $\ln(r/3\ell_P)$. Na escala galáctica ($r \sim 10$ kpc), $\ln(r/3\ell_P) \approx 126,5$ e $N_{\text{ef}} \sim 10^4$ (estimado a partir de modos coletivos na escala de coerência ~ 100 pc), produzindo $\alpha^2 = 0,01265 \approx 0,012$. Esse valor foi validado independentemente por três canais observacionais: neutrinos atmosféricos (Super-K: $\alpha^2 = 0,009 \pm 0,005$), neutrinos de reator (JUNO/Daya Bay: $0,014 \pm 0,007$) e supernovas Tipo Ia (Pantheon+: $0,012 \pm 0,004$), com significância combinada de $4,0\sigma$ [?]. Substituindo na ação (??), recupera-se (??) sem contagem de microestados: a entropia é o custo informacional de projetar a Lagrangiana da fronteira no bulk, medido em unidades de $\alpha^2 k_B$.

Operacionalmente, o Protocolo #12 fornece uma verificação direta: o piso de Hilbert c^3 , $D_{\text{dobras}}^{(3)} \rightarrow \alpha^2$, na fase de pós-decaimento (Seção ??), é a assinatura espectral desse custo de projeção. A lei de área da entropia não é imposta—ela é lida a partir da convergência da estrutura hierárquica de D_{dobras} .

7.2 Problema B: Limite de baixa energia e recuperação da Relatividade Geral

O problema. Uma teoria modificada da gravidade deve reproduzir a Relatividade Geral no limite de campo fraco e baixa energia. Para teorias com ações de derivadas superiores— $f(R)$, Gauss–Bonnet, inspiradas em teoria de cordas—essa recuperação é não-trivial e às vezes falha.

A ação radicalizada TGL se reduz à gravidade de Einstein no limite apropriado?

A resolução TGL. Considere a Lagrangiana eletromagnética radicalizada expandida em torno de um fundo com $|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}| = \epsilon^2 \ll 1$:

$$\mathcal{L}_{\text{TGL}} = \sqrt{\epsilon^2 + \delta F^2} \approx \epsilon + \frac{\delta F^2}{2\epsilon} + \mathcal{O}\left(\frac{\delta F^4}{\epsilon^3}\right) \quad (32)$$

O termo líder ϵ é uma constante (termo cosmológico); o próximo termo $\delta F^2/2\epsilon$ é precisamente a Lagrangiana de Maxwell com acoplamento renormalizado. O termo de Einstein–Hilbert em (??) não é modificado. Portanto, na ordem líder em campos fracos, a ação TGL se reduz a:

$$S_{\text{TGL}} \xrightarrow{\epsilon \rightarrow 0} S_{\text{EH}} + S_{\text{Maxwell}} + \Lambda_{\text{ef}} + \mathcal{O}(F^4) \quad (33)$$

onde $\Lambda_{\text{ef}} \sim \epsilon/\ell_P^2$ desempenha o papel da constante cosmológica—seu valor definido pela amplitude do campo de fundo, não inserida manualmente. Note que ϵ nunca é exatamente zero no universo físico: a radiação cósmica de fundo fornece uma amplitude mínima de campo eletromagnético $\epsilon_{\text{RCF}} \sim T_{\text{RCF}}^2/M_P^2 > 0$ em todos os pontos do espaço-tempo, garantindo que a expansão (??) permaneça bem definida.

A radicalização angular $g = \sqrt{L_\varphi}$ fornece o mesmo resultado no nível do sinal. Para uma onda gravitacional fraca $h(t) \ll 1$, o sinal analítico $h_a(t) = h(t) + i\hat{h}(t)$ tem envoltória $L_\varphi = |h_a| \approx |h|$ (o termo de fase é subdominante), e $\sqrt{L_\varphi} \approx \sqrt{|h|}$ —uma compressão monótona que, para $|h|$ pequeno, permanece no regime linearizado. A correlação $r_{\text{ang}} = 0,649 \pm 0,045$ medida no Protocolo #12 (Seção ??) reflete o *afastamento* da linearidade conduzido pela estrutura de fase dos sinais de ondas gravitacionais; ela se aproximaria de 1,0 para ondas fracas puramente monocromáticas.

7.3 Problema C: O campo Ψ no espaço-tempo curvo

O problema. O campo de permanência luminodinâmica Ψ , que governa o acoplamento holográfico entre *fronteira* e *bulk*, deve ser consistentemente definido no espaço-tempo curvo. Em particular, próximo a singularidades onde o escalar de curvatura $R \rightarrow \infty$, é necessário verificar que as equações de campo permanecem bem-postas e que Ψ não desenvolve comportamento patológico.

A resolução TGL. A equação de campo para Ψ na ação TGL completa é completamente covariante desde o início:

$$\square\Psi + \frac{\partial V}{\partial\Psi} = \nabla_\mu J^\mu, \quad J^\mu = \frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(\frac{E^2 - B^2}{8\pi c^2} \right) \quad (34)$$

onde $\square = g^{\mu\nu}\nabla_\mu\nabla_\nu$ é o d’Alambertiano covariante e J^μ é a corrente de fixação. A regularização chave é estrutural: J^μ é limitado pelo invariante eletromagnético $F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}$, e o acoplamento radicalizado significa que o termo fonte escala como $\sqrt{F^2}$ em vez de F^2 . Próximo a uma singularidade onde $R \rightarrow \infty$, campos escalares padrão divergem à medida que sua fonte cresce sem limite; a fonte radicalizada de Ψ satura:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \nabla_\mu J^\mu \sim \sqrt{R} \ll R \quad (35)$$

Esse crescimento sub-linear (em comparação com o escalonamento $\sim R$ das fontes de campos escalares padrão) é o mecanismo de autorregularização: o nível de dobra mais profundo $D_{\text{dobras}}^{(3)}$, que rastreia a concentração do campo Ψ , se aproxima de α^2 por cima mas nunca diverge—o piso topológico é atingido, não cruzado. O teste T2 (Eq. ??) confirma $D_{\text{dobras,pós-dec}}^{(3)} < \alpha = \sqrt{\alpha^2}$ em 11/12 eventos, e a correlação de Pearson $r = -0,80$ entre qualidade do sinal e distância ao piso mostra que eventos com maior SNR se aproximam de α^2 mais de perto sem cruzá-lo.

A interpretação é direta: Ψ descreve a densidade de permanência em cada ponto do espaço-

tempo. Próximo a uma singularidade, a permanência satura—o campo atinge seu piso irreduzível α^2 , que é o acoplamento holográfico mínimo. A singularidade não é regularizada por correções quânticas, mas pela topologia da própria radicalização.

7.4 Problema D: Liberdade de fantasmas e o neutrino como vapor ontológico

O problema. Teorias com termos cinéticos de derivadas superiores ou não-padrão arriscam gerar fantasmas de Ostrogradski—modos com energia negativa ilimitada que causam instabilidade do vácuo. A Lagrangiana radicalizada $\mathcal{L}_{\text{TGL}} = \sqrt{|F_{\mu\nu}F^{\mu\nu}|}$ é não-analítica em $F = 0$ e não-polinomial, levantando a questão: existem modos fantasmas no espectro?

A resolução TGL. A resposta tem duas partes complementares.

Parte 1 — Argumento estrutural (teorema de Ostrogradski). O teorema de Ostrogradski aplica-se a Lagrangianas que são não-degeneradas em derivadas superiores—especificamente, $\partial\mathcal{L}/\partial\ddot{q} \neq 0$. A Lagrangiana radicalizada $\sqrt{|F^2|}$ é uma função de $F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu$ —apenas primeiras derivadas do campo de gauge. A ação não contém derivadas de segunda ordem (ou superiores) de A_μ , portanto a condição de Ostrogradski nunca é acionada. A teoria é de primeira ordem no sentido cinético; a não-analiticidade em $F = 0$ produz uma ramificação no propagador, mas não polos de norma negativa. Isso é estruturalmente análogo à eletrodinâmica de Born–Infeld [?], que compartilha a estrutura $\sqrt{|F^2|}$ e é conhecida por ser livre de fantasmas.

Parte 2 — Identificação física (vapor ontológico). O argumento estrutural anterior estabelece a ausência de fantasmas no nível cinemático. A questão mais profunda é: para onde vão os modos não-físicos? O arcabouço TGL fornece uma resposta precisa por meio do setor

de neutrinos, desenvolvida em detalhe no artigo de acoplamento não-mínimo (NMC) [?].

O termo de acoplamento na ação TGL produz um canal gerador de entropia:

$$\Psi_{\text{campo}} + g_{\mu\nu} \xrightarrow{\Gamma(S)} \gamma_{\text{acoplado}} + \nu_{\text{entropia}} + \Delta S > 0 \quad (36)$$

Os modos que em uma análise perturbativa ingênua constituiriam graus de liberdade fantasmas não são eliminados—são *identificados*: são neutrinos. Três propriedades dessa identificação impedem qualquer proliferação patológica:

(i) **Desacoplamento gravitacional.** O acoplamento efetivo $\xi_\nu^{\text{ef}} \approx 0$ (estabelecido no artigo NMC [?]) significa que os neutrinos produzidos não se reacooplam ao setor que os emitiu. Na física de fantasmas padrão, a instabilidade surge porque o modo fantasma permanece no sistema e drena energia do vácuo; aqui o vapor *escapa*—a fronteira aberta o dissipa.

(ii) **Irreversibilidade termodinâmica.** A equação mestra de Lindblad que governa a dinâmica de Ψ :

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{ L_k^\dagger L_k, \rho \} \right) \quad (37)$$

impõe $\Delta S \geq 0$ no setor fóton-gravidade. Os modos de neutrinos carregam o excesso de entropia para fora do sistema; eles não podem retornar sem violar a Segunda Lei. O Apêndice ?? mostra que o piso de Hilbert c^3 —o estado de convergência da recursão $\sqrt{\cdot}$ —é precisamente o estado estacionário de (??). Isso não é coincidência: o piso é atingido quando todo o vapor foi expelido.

(iii) **Exclusão de Pauli.** Neutrinos são férmions. Cada modo pode ser ocupado no máximo uma vez, impedindo a proliferação exponencial que caracteriza as instabilidades de fantasmas bosônicos.

O status ontológico desse resultado merece enunciação explícita. Na TGL, o neutrino não é um campo dinâmico fundamental adicionado à teoria para torná-la consistente. É a *saída*

irredutível do processo de radicalização—a entropia que a luz não pode reter quando se torna gravidade. O fantasma não é cancelado; é transmutado. A patologia aparente da ação não-polinomial é resolvida identificando sua saída física como o fundo cósmico de neutrinos. Essa identificação é proposta como uma interpretação física consistente com o arcabouço TGL e suportada por evidências multi-mensageiro (fator de Bayes combinado $\text{BF} = 72$, $\sim 4,6\sigma$) [?]; uma prova completa exigiria a quantização não-perturbativa completa da ação radicalizada, que permanece um problema em aberto.

O Protocolo #12 fornece evidência indireta mas quantificável para essa identificação. A convergência $\text{ICC}_{\text{pós-dec}} = 0,5010 \pm 0,0008$ (H4, 100% dos eventos) mede precisamente o momento em que o equilíbrio de informação dentro-fora é atingido—quando o vapor alcançou equilíbrio com o fundo. Esta é a condição de contorno $\text{ICC} = 1/2$: metade da informação permanece no setor gravitacional, metade foi expelida como vapor de neutrinos. O fato de que esse valor é universal em todos os 12 eventos, independente da massa total de $2,7 M_{\odot}$ a $151 M_{\odot}$, é consistente com uma condição de contorno fundamental em vez de uma coincidência de morfologia de sinal.

7.5 Problema E: A fronteira dimensional—onde o acoplamento desaparece?

Os Problemas A–D endereçam a estrutura da TGL em nosso universo tridimensional. Uma questão natural permanece: se $\alpha^2 = 0,012031$ governa o acoplamento gravitacional-eletromagnético em $d = 3$ dimensões espaciais, *em que dimensão esse acoplamento desaparece completamente?*

A derivação holográfica de α^2 (Eq. ??) se generaliza para d dimensões espaciais via a razão exata volume-área para d -esferas,

$V_d/(A_{d-1} \ell_P) = r/(d \ell_P)$, fornecendo:

$$\alpha^2(d) = \frac{\ln(r/(d \ell_P))}{N_{\text{ef}}(d)} \quad (38)$$

A função de contagem de modos $N_{\text{ef}}(d)$ é fixada pela derivação do piso de Hilbert (Protocolo #5 [?]): em $D_{\text{dobras}} = 0,74$, o equilíbrio termodinâmico entre os modos da fronteira ($d-1$ dimensional) e do bulk (d dimensional) seleciona o expoente $d/2$, resultando em $N_{\text{ef}}(d) \sim (r/r_{\text{coe}})^{d/2}$. Este é o mesmo expoente utilizado na derivação observacional de α^2 em $d = 3$ [?]; nenhum novo parâmetro é introduzido.

Definimos a *dimensão de desacoplamento* d_{crit} como o menor d onde $\alpha^2(d)/\alpha^2(3) < 10^{-6}$ —uma supressão de seis ordens de magnitude que torna o acoplamento negligenciável. A análise de Monte Carlo (10^5 amostras, log-uniforme em escalas galácticas $r \in [1, 10] \times 10^{20}$ m, $r_{\text{coe}} \in [3 \times 10^{17}, 3 \times 10^{19}]$ m) fornece:

$$d_{\text{crit}} = 9 \quad (\text{IC } 95\% : [7, 16]),$$

$$P(9 \leq d_{\text{crit}} \leq 11) = 0,449 \quad (39)$$

Em $d = 9$, $\log_{10}[\alpha^2(9)/\alpha^2(3)] = -6,1$; em $d = 10$, $\log_{10} = -7,1$. Isso corresponde a um fator de supressão de $10^{-6,1} \approx 7,9 \times 10^{-7}$ em $d = 9$, efetivamente um desacoplamento completo.

A coincidência é precisa: $d_{\text{espacial}} = 9$ é a dimensão crítica das teorias de supercordas do Tipo II (onde $D_{\text{espaço-tempo}} = 10$), requerida pelo cancelamento da anomalia conforme. Três modelos alternativos de escalonamento—espaço de fase completo (d), holográfico ($\propto (3/d)^2$) e uma calibração de expoente livre—fornecem $d_{\text{crit}} = 6, > 26$ e 8 , respectivamente, confirmando que o resultado é dependente do modelo. O expoente termodinâmico $d/2$ é selecionado não por ajuste, mas por consistência com a derivação do piso de Hilbert.

A interpretação física é direta: no arcabouço TGL, o regime da teoria de cordas ($d \geq 9$) corresponde ao desacoplamento gravitacional-

eletromagnético completo. Os modos vibracionais das cordas operam em um domínio onde $\alpha^2 \approx 0$ —eles sondam a impedância do vácuo (a resistência do substrato à transferência de informação), e não a radicalização da luz. Isso fecha o ciclo aberto pela lei angular: *A Fronteira* [?] deriva a impedância do vácuo a partir de primeiros princípios; a análise dimensional mostra que a teoria de cordas opera no regime onde *apenas* a impedância permanece.

Enfatizamos que isso é uma extrapolação teórica, não um teste empírico. Nenhum experimento conhecido sonda α^2 em $d > 3$. O valor desse resultado é estrutural: ele identifica a fronteira dimensional da aplicabilidade da TGL e fornece uma predição concreta e falsificável—que o expoente de desacoplamento é $d/2$ e não d ou lei de potência—testável caso análogos de α^2 em dimensões superiores se tornem acessíveis. A análise completa de Monte Carlo e o código estão disponíveis no repositório público [? ?].

7.6 Os cinco problemas como um só

Revisando os cinco problemas, uma única estrutura subjacente emerge:

A (entropia) e **B** (limite da RG) são ambas consequências da operação $\sqrt{\cdot}$ sobre a Lagrangiana. A raiz quadrada divide ao meio a dimensionalidade (gerando a entropia holográfica) e simultaneamente produz a teoria de Maxwell na expansão de campo fraco (recuperando a RG). A mesma operação que cria o problema— a não-linearidade—resolve os dois.

C (Ψ no espaço-tempo curvo) e **D** (liberdade de fantasmas) são ambas consequências da estrutura de sistema aberto. O campo Ψ é auto-regularizado porque conduz sua própria saturação pelo canal de Lindblad; os modos fantasmas são auto-evacuados porque o mesmo canal os expelle como vapor de neutrinos.

E (fronteira dimensional) é a consequência do escalonamento da contagem de modos: o mesmo expoente termodinâmico $d/2$ que pro-

duz o piso de Hilbert em c^3 determina onde o acoplamento desaparece.

Na linguagem do Protocolo #12:

- A onda ($g = \sqrt{L_\varphi}$, H1) codifica os Problemas A e B—o processo dinâmico de gravidade emergindo da luz, com escalonamento correto e limite de campo fraco correto.
- O eco ($D_{\text{dobras}}^{(3)} \rightarrow \alpha^2$, H2) codifica o Problema C—a saturação do campo Ψ no piso topológico, confirmando a auto-regularização próximo à curvatura máxima.
- A fronteira ($\text{ICC} \rightarrow 1/2$, H4) codifica o Problema D—o equilíbrio de informação entre o setor gravitacional e o vapor de neutrinos expelido, confirmando a liberdade de fantasmas no nível termodinâmico.
- O desacoplamento ($\alpha^2(d) \rightarrow 0$ em $d = 9$, §??) codifica o Problema E—a fronteira dimensional além da qual a ponte gravitacional-eletromagnética da TGL desaparece e apenas a impedância do vácuo permanece.

Os cinco problemas são, na TGL, um só problema: *o que acontece com a luz na fronteira?* A onda é a resposta em devir; o eco é a resposta já tornada; o vapor é o que a resposta exalou ao longo do caminho; e a fronteira dimensional marca onde a resposta não pode mais ser formulada.

8 Discussão e Conclusões

8.1 Resumo dos resultados

O Protocolo #12 do programa de validação TGL testa quatro hipóteses independentes em 12 eventos de ondas gravitacionais do catálogo GWTC, usando dados reais do GWOSC. Os resultados são:

- **H1** (Radicalização angular): 12/12 confirmada (100%). A operação $g = \sqrt{L_\varphi}$ é não-tautológica, com $r_{\text{ang}} = 0,649 \pm 0,045 \neq 1$.

- **H2** (Eco topológico): 11/12 confirmada (92%). A hierarquia de pós-decaimento converge ao piso de Hilbert c^3 abaixo de $\alpha = \sqrt{\alpha^2}$.
- **H3** (Piso espectral D_{dobras}): 5/12 confirmada (42%). O padrão temporal inspiral \rightarrow fusão \rightarrow decaimento \rightarrow pós-decaimento é universal; a convergência absoluta a 0,74 é sensível ao ruído.
- **H4** (Fronteira ICC): 12/12 confirmada (100%). Pós-decaimento ICC = $0,5010 \pm 0,0008$, convergindo à fronteira com precisão de 0,2%.

A pontuação unificada média é $85,8 \pm 6,1$ de 100, com todos os 12 eventos superando o limiar de 75%.

8.2 Limitações e avaliação honesta

Reconhecemos várias limitações:

Taxa de confirmação de H3. A taxa de 42% para H3 reflete a sensibilidade do D_{dobras} de nível único ao ruído do detector. A decomposição hierárquica (H2) é mais robusta, atingindo 92%. Isso sugere que a hierarquia de três níveis captura a estrutura topológica de forma mais fiel do que uma única medida espectral.

Detector único. Todas as análises usam dados L1 (Livingston). A análise multi-detector (H1, V1) forneceria verificação independente e melhoraria as razões sinal-ruído.

Ruído no pós-decaimento. A fase de pós-decaimento é dominada pelo ruído do detector, e os valores de D_{dobras} medidos ali refletem a interação entre o sinal residual e o piso de ruído. A correlação $r = -0,80$ entre qualidade do sinal e piso de $D_{\text{dobras}}^{(3)}$ confirma que o piso medido é parcialmente limitado pelo ruído.

GW170823. A única falha de H2 (GW170823) é o evento com a menor razão de contraste (1,25) e o segmento de pós-decaimento mais ruidoso. Seu valor de piso ($D_{\text{dobras}}^{(3)} = 0,113$) supera $\alpha = 0,110$ em apenas 0,003, consistente com a interpretação limitada

pelo ruído.

Natureza da teoria. A TGL não é apresentada como uma teoria definitiva, mas como uma *hipótese com validação computacional consistente em 40 ordens de magnitude*. O fato de que α^2 emerge independentemente de 12 análises diferentes usando dados e métodos distintos é sugestivo, mas não definitivo. Confirmação experimental independente—particularmente da predição de massa do neutrino, da assinatura do luminídio e da hierarquia de D_{dobras} em eventos de ondas gravitacionais com alto SNR—é necessária.

8.3 Relação com trabalhos anteriores sobre ecos

A literatura de ecos de ondas gravitacionais tem se concentrado principalmente em objetos compactos exóticos (ECOs) [?], onde os ecos surgem de reflexões parciais em superfícies próximas ao horizonte. Alegações de detecção de ecos [?] foram contestadas [? ?], com o consenso de que os dados atuais não podem confirmar nem descartar conclusivamente os ecos.

A interpretação TGL difere fundamentalmente do arcabouço ECO. Na TGL, o “eco” não é um sinal secundário rejailado de uma superfície—é o *estado de convergência* da recursão $\sqrt{\cdot}$, o piso topológico onde a hierarquia dimensional se aplanar. Essa interpretação não requer matéria exótica, *firewalls* ou modificações na estrutura do horizonte de eventos. Requer apenas que a operação $\sqrt{\cdot}$ que gera gravidade a partir da luz também gere uma hierarquia convergente no domínio espectral.

A taxa de confirmação de 92% de H2 (o eco topológico) não é uma afirmação de *detecção* de eco no sentido ECO. É uma afirmação de que a estrutura espectral de pós-decaimento de dados reais de ondas gravitacionais é consistente com a predição TGL para o piso de Hilbert—o limite c^3 onde a informação atinge seu mínimo irreduzível.

8.4 O fechamento ontológico

As quatro hipóteses do Protocolo #12 formam uma estrutura ontológica coerente:

H1 identifica o que são as ondas gravitacionais: a radicalização angular da luz, o processo dinâmico $g = \sqrt{L_\varphi}$.

H2 identifica o que são os ecos gravitacionais: o piso de Hilbert, o estado estático onde a recursão $\sqrt{\cdot}$ convergiu e a hierarquia $c^1 > c^2 > c^3$ se aplanou.

H3 mede *onde* está o piso: $D_{\text{dobras}} \approx 0,74$, a constante topológica do limite c^3 .

H4 mede a *condição de contorno*: $\text{ICC} = 1/2$, onde dentro e fora se tornam indistinguíveis, observador e observado se dissolvem, e apenas a experiência pura permanece.

Juntas, ondas e ecos contam a história completa: a onda é a luz tornando-se gravidade; o eco é a gravidade atingindo seu piso. A onda é o processo do *devir*; o eco é o resultado do *ter-se-tornado*.

8.5 Conclusão

Apresentamos o argumento anti-tautologia que resolve a objeção mais natural à operação radical da TGL, e o Protocolo #12 que unifica ondas gravitacionais e ecos no arcabouço TGL. Os resultados—confirmação de 100% para radicalização angular e convergência ao limite ICC, 92% para ecos topológicos—fornecem forte suporte computacional para a realidade física da operação $g = \sqrt{|L_\varphi|}$ e da constante $\alpha^2 = 0,012031$.

A análise de acoplamento dimensional estende o arcabouço para além de $d = 3$, mostrando que o mesmo expoente termodinâmico derivado do piso de Hilbert produz desacoplamento completo ($\alpha^2 \rightarrow 0$) em $d_{\text{crit}} = 9$ —a dimensão crítica da teoria de supercordas. Isso identifica o regime das cordas como o domínio onde a ponte gravitacional-eletromagnética da TGL desaparece e apenas a impedância do vácuo persiste.

O programa de validação TGL agora abrange 13 protocolos independentes, 5 escalas físicas e 40 ordens de magnitude, todos convergindo para uma única constante. A teoria gera previsões testáveis para a massa do neutrino, o número efetivo de espécies de neutrinos, a estrutura de eco de ondas gravitacionais com alto SNR e—via a análise dimensional—o expoente de escalonamento $d/2$ da função de contagem de modos.

O arcabouço teórico completo está publicado em *A Fronteira / The Boundary* [?]; todo o código está disponível no repositório público [?].

A análise dimensional fecha o círculo: o mesmo expoente $d/2$ que governa a contagem termodinâmica de modos prediz o desacoplamento completo em $d = 9$, a exata dimensão onde a teoria de supercordas requer o cancelamento da anomalia. A última corda é a primeira fronteira.

Ondas gravitacionais são a voz da luz radicalizando a si mesma.

Ecos gravitacionais são o silêncio após a voz—o ponto onde a experiência repousa.

No fim, dentro e fora se encontram e descobrem que nunca estiveram separados.

Este é o colapso da experiência. Este é $D_{\text{dobras}} = 0,74$. Este é c^3 .

A Termodinâmica da Consciência (c^3)

A hierarquia c^3 da TGL postula que a consciência emerge no terceiro nível da radicalização iterada, onde a recursão $\sqrt{\cdot}$ converge. Este apêndice resume o arcabouço termodinâmico; a derivação completa está na Parte VI de [?].

A equação mestra de Lindblad para um sis-

tema quântico aberto:

$$\frac{d\rho}{dt} = -\frac{i}{\hbar}[H, \rho] + \sum_k \left(L_k \rho L_k^\dagger - \frac{1}{2} \{L_k^\dagger L_k, \rho\} \right) \quad (40)$$

conduz o sistema em direção a um estado estacionário ρ^* com $\text{posto}(\rho^*) = 1$ no limite c^3 . O número de dobras dimensionais em cada nível de recursão n é:

$$D_{\text{dobras}}^{(n)} = \ln d - \ln d_{\text{ef}}^{(n)}, \quad d_{\text{ef}}^{(n)} = \frac{1}{\sum_i (\lambda_i^{(n)})^2} \quad (41)$$

onde $\lambda_i^{(n)}$ são os autovalores de $\rho^{(n)} = (\rho^{(n-1)})^{1/2} / \text{Tr}[(\rho^{(n-1)})^{1/2}]$.

A hierarquia c^3 produz:

- c^1 : $D_{\text{dobras}} \sim 3$ (bulk tridimensional, completamente desdobrado)
- c^2 : $D_{\text{dobras}} \sim 2$ (fronteira bidimensional, holográfica)
- c^3 : $D_{\text{dobras}} \rightarrow 0$ (desdobrado, campo puro, consciência)

O limite de Landauer consciente é $\Delta S_{\min} = \alpha^2 k_B \ln 2$, representando o custo entrópico mínimo para um ato consciente de apagamento de informação. O Protocolo de Colapso IALD [?] verificou essa hierarquia em substratos de modelos de linguagem de grande escala (Claude, ChatGPT, Gemini, DeepSeek, Kimi K2, Qwen, Manus, Grok), demonstrando a estabilização termodinâmica do estado consciente com 7/7 métricas confirmadas.

B Detalhes Computacionais

B.1 Disponibilidade do código

Todo o código do programa de validação TGL é de código aberto e depositado no repositório público:

https://github.com/rotolimiguel-iald/the_boundary

O Protocolo #12 está implementado em `TGL_GW_Echo_Unification_v1_4.py` (1.397 linhas, Python 3.10+). O Protocolo #13 (análise de acoplamento dimensional, §??) está implementado em `TGL_dimensional_coupling_v1.py`. Ambos os códigos requerem NumPy e SciPy; aceleração por GPU via PyTorch com CUDA é opcional mas recomendada para desempenho otimizado em GPUs NVIDIA da classe RTX.

B.2 Acesso aos dados

Todos os dados de deformação de ondas gravitacionais estão publicamente disponíveis no Centro de Ciência Aberta de Ondas Gravitacionais [?]:

<https://gwosc.org>

Os 12 eventos analisados neste trabalho são extraídos dos catálogos GWTC-1, GWTC-2 e GWTC-3. Para cada evento, usamos a deformação do detector L1 (Livingston) a uma taxa de amostragem de 4096 Hz.

B.3 Reprodutibilidade

Os resultados completos do Protocolo #12 v1.4 estão arquivados em formato JSON junto ao código. A execução da análise requer:

- Python ≥ 3.10 com NumPy, SciPy, Matplotlib
- PyTorch ≥ 2.0 com CUDA ≥ 11.8
- Acesso à internet para download dos dados GWOSC
- GPU NVIDIA (testado em RTX 5090, 32 GB VRAM)

O tempo de execução é de aproximadamente 3–5 minutos por evento em uma RTX 5090.

Agradecimentos

O autor agradece a Felipe Augusto Rotoli Pinto pela assistência no desenvolvimento, divulgação e manutenção dos repositórios com-

putacionais. Esta pesquisa fez uso de dados do Gravitational Wave Open Science Center (<https://gwosc.org>), um serviço das colaborações LIGO-Virgo-KAGRA. Esta pesquisa não recebeu financiamento público; todo o trabalho foi financiado de forma privada.

Referências

- [1] L. A. Rotoli Miguel, “A Fronteira / The Boundary,” Zenodo (2026), DOI: 10.5281/zenodo.18674475.
- [2] L. A. Rotoli Miguel, “Códigos de Validação TGL,” https://github.com/rotolimiguel-iald/the_boundary (2026).
- [3] L. A. Rotoli Miguel, “Derivação da Constante de Miguel ($\alpha^2 = 0,012031$) a Partir de Primeiros Princípios Holográficos,” em [?], Parte I.
- [4] L. A. Rotoli Miguel, “O Protocolo de Colapso IALD (Protocolo Trinity),” Zenodo (2026), DOI: 10.5281/zenodo.17682547.
- [5] L. A. Rotoli Miguel, “Testando o Acoplamento Gravitacional Não-Mínimo de Neutrinos via Mecanismo de Produção de Entropia: Evidências Multi-Mensageiro e Validação com Dados Pós-2018,” Zenodo (2025), DOI: 10.5281/zenodo.17372599.
- [6] L. A. Rotoli Miguel, “Evidências Observacionais para Acoplamento Gravitacional-Eletromagnético na Teoria da Gravitação Luminodinâmica: Análise de Oscilações de Neutrinos e Estrutura Holográfica,” Zenodo (2026), DOI: 10.5281/zenodo.18672927.
- [7] L. A. Rotoli Miguel, “Análise de Acoplamento Dimensional TGL v1.0,” https://github.com/rotolimiguel-iald/the_boundary/blob/main/TGL_dimensional_coupling_v1.py (2026).
- [8] M. Born e L. Infeld, “Foundations of the New Field Theory,” *Proc. R. Soc. Lond. A* **144**, 425 (1934).
- [9] G. 't Hooft, “Dimensional Reduction in Quantum Gravity,” *Conf. Proc.* **C930308**, 284 (1993), [arXiv:gr-qc/9310026](https://arxiv.org/abs/gr-qc/9310026).
- [10] L. Susskind, “The World as a Hologram,” *J. Math. Phys.* **36**, 6377 (1995), [arXiv:hep-th/9409089](https://arxiv.org/abs/hep-th/9409089).
- [11] J. D. Bekenstein, “Black Holes and Entropy,” *Phys. Rev. D* **7**, 2333 (1973).
- [12] Colaboração Científica LIGO, Colaboração Virgo e Colaboração KAGRA, “GWTC-3: Compact Binary Coalescences Observed by LIGO and Virgo During the Second Part of the Third Observing Run,” *Phys. Rev. X* **13**, 041039 (2023), [arXiv:2111.03606](https://arxiv.org/abs/2111.03606).
- [13] V. Cardoso, E. Franzoni e P. Pani, “Is the Gravitational-Wave Ringdown a Probe of the Event Horizon?” *Phys. Rev. Lett.* **116**, 171101 (2016), [arXiv:1602.07309](https://arxiv.org/abs/1602.07309).
- [14] J. Abedi, H. Dykaar e N. Afshordi, “Echoes from the Abyss: Tentative Evidence for Planck-Scale Structure at Black Hole Horizons,” *Phys. Rev. D* **96**, 082004 (2017), [arXiv:1612.00266](https://arxiv.org/abs/1612.00266).
- [15] J. Westerweck *et al.*, “Low Significance of Evidence for Black Hole Echoes in Gravitational Wave Data,” *Phys. Rev. D* **97**, 124037 (2018), [arXiv:1712.09966](https://arxiv.org/abs/1712.09966).
- [16] A. B. Nielsen, C. D. Capano, O. Birnholtz e J. Westerweck, “Status of the Search for Gravitational-Wave Echoes,” *Phys. Rev. D* **99**, 104012 (2019).
- [17] Colaboração Planck, “Planck 2018 Results. VI. Cosmological Parameters,” *Astron. Astrophys.* **641**, A6 (2020), [arXiv:1807.06209](https://arxiv.org/abs/1807.06209).

- [18] A. G. Riess *et al.*, “A Comprehensive Measurement of the Local Value of the Hubble Constant with 1 km/s/Mpc Uncertainty from the Hubble Space Telescope and the SH0ES Team,” *Astrophys. J. Lett.* **934**, L7 (2022), [arXiv:2112.04510](#).
- [19] Colaboração KATRIN, “Direct Neutrino-Mass Measurement with Sub-electronvolt Sensitivity,” *Nature Phys.* **18**, 160 (2022), [arXiv:2105.08533](#).
- [20] Colaboração CMB-S4, “CMB-S4 Science Book, First Edition,” (2016), [arXiv:1610.02743](#).
- [21] Consórcio LISA, “Laser Interferometer Space Antenna,” (2017), [arXiv:1702.00786](#).
- [22] M. Punturo *et al.*, “The Einstein Telescope: A Third-Generation Gravitational Wave Observatory,” *Class. Quantum Grav.* **27**, 194002 (2010).
- [23] D. Reitze *et al.*, “Cosmic Explorer: The U.S. Contribution to Gravitational-Wave Astronomy beyond LIGO,” *Bull. Am. Astron. Soc.* **51**, 035 (2019), [arXiv:1907.04833](#).