FORMULAIRE

Dans tout ce formulaire on ne parle pas du domaine de définition de la formule : par exemple $\sqrt{a}$ sous-entend $a \geqslant 0$, $n \in \mathbf{N}^*$, k est une constante.

Logarithme et Exponentielle : $\mathrm{e}^{\ln x} = \ln(e^x) = x$

$\ln 1 = 0$	$\ln(ab) = \ln(a) + \ln(b)$	$\ln(a/b) = \ln(a) - \ln(b)$	$\ln(1/a) = -\ln(a)$	$\ln(\sqrt{a}) = \ln(a)/2$	$\ln(a^\alpha) = \alpha \ln(a)$
$\mathrm{e}^0 = 1$	$\mathrm{e}^{x+y} = \mathrm{e}^x \mathrm{e}^y$	$\mathrm{e}^{x-y} = \mathrm{e}^x/\mathrm{e}^y$	$\mathrm{e}^{-x} = 1/\mathrm{e}^x$	$\sqrt{\mathrm{e}^x} = \mathrm{e}^{x/2}$	$(\mathrm{e}^x)^y = \mathrm{e}^{xy}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} \ln(x) = -\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x) = +\infty$	$\lim\limits_{x\to 0} x\ln(x) = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$
$\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x/x = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)/x = 0$	$\lim\limits_{x\to-\infty} x^n\mathrm{e}^x = 0$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x/x^n = +\infty$	$\lim\limits_{x\to+\infty} \ln(x)/x^n = 0$

Dérivées

Fonctions usuelles		Fonctions usuelles		Règles de dérivation		Exemples
$f(x)$	$f'(x)$	$f(x)$	$f'(x)$			
k	0	x	1	$(u+v)' = u' + v'$	$(u \times v)' = u'v + uv'$	$\left(3x^2 \ln x\right)' = 6x\ln x + 3x$
$k \times x$	k	x^k	kx^{k-1}	$(k \times u)' = k \times u'$	$(u^k)' = ku'u^{k-1}$	$\left(\sin^3(x)\right)' = 3\cos x \sin^2 x$
$\frac{1}{x}$	$-\frac{1}{x^2}$	$\frac{1}{x^n}$	$-\frac{n}{x^{n+1}}$	$\left(\frac{1}{u}\right)' = -\frac{u'}{u^2}$	$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$	$\left(\frac{1-x^2}{1+x^2}\right)' = \frac{-4x}{(1+x^2)^2}$
$\sqrt{x}$	$\frac{1}{2\sqrt{x}}$	$\ln x$	$\frac{1}{x}$	$(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$	$(u(v(x)))' = u'(v(x)) \times v'(x)$	$\left(\sin\left(\mathrm{e}^{2x}\right)\right)' = 2\mathrm{e}^{2x}\cos\left(\mathrm{e}^{2x}\right)$
$\sin x$	$\cos x$	e^x	e^x	$(\sin u)' = u'\cos u$	$(\ln u)' = \frac{u'}{u}$	$\left(\mathrm{e}^{-5x^3}\right)' = -15x^2\mathrm{e}^{-5x^3}$
$\cos x$	$-\sin x$	$\tan x$	$1 + \tan^2 x$	$(\cos u)' = -u'\sin u$	$(\mathrm{e}^u)' = u'\mathrm{e}^u$	$\left(\sin(x^3)\right)' = 3x^2\cos(x^3)$

Dérivées partielles

On dérive une fonction de plusieurs variables par rapport à une variable en considérant les autres variables comme constantes.

$\frac{\partial}{\partial x}(-5x^2y^3) = -10xy^3$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y}(-5x^2y^3) = -15x^2y^2$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{e}^{-5x^2y^3} = -10xy^3\mathrm{e}^{-5x^2y^3}$ $\qquad$ $\frac{\partial}{\partial y}\mathrm{e}^{-5x^2y^3} = -15x^2y^2\mathrm{e}^{-5x^2y^3}$

Matrice Jacobienne, Trace, Déterminant

Pour un système $\left\{\begin{array}{l} x' = f(x,y) \\ y' = g(x,y) \end{array}\right.$ on définit la *Matrice Jacobienne* : $A(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \\ \frac{\partial g}{\partial x}(x,y) & \frac{\partial g}{\partial y}(x,y) \end{pmatrix}$

Pour une matrice $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ on définit sa *trace* $tr(A) = a + d$ et son *déterminant* $det(A) = ad - bc$.

Moyenne, Variance, Covariance

Pour une série X de n mesures x_i, on a la *moyenne* $\mu(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n} x_i$, la *variance* $\mathrm{Var}(X) = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu(X))^2 = \mu(X^2) - \mu(X)^2$,
l'*écart-type* $\sigma(X) = \sqrt{\mathrm{Var}(X)}$. On a $\mu(aX+b) = a\mu(X) + b$, $\mathrm{Var}(aX+b) = a^2\mathrm{Var}(X)$, $\sigma(aX+b) = |a|\sigma(X)$.
Pour une série de n couples de mesures (x_i, y_i), on a le *centre de gravité* $G = (\mu(X), \mu(Y))$,
la *covariance* $\mathrm{Cov}(X,Y) = \dfrac{1}{n}\left(\sum\limits_{i=1}^{n}(x_i - \mu(X))(y_i - \mu(Y))\right) = \mu(XY) - \mu(X)\mu(Y)$,
le *coefficient de corrélation linéaire* $\rho(x,y) = \dfrac{\mathrm{Cov}(x,y)}{\sqrt{\mathrm{Var}(x)\mathrm{Var}(y)}}$,
la *droite des moindres carrés* $y = \hat{a}x + \hat{b}$, où $\hat{a} = \dfrac{\mathrm{Cov}(X,Y)}{\mathrm{Var}(X)}$, $\hat{b} = \mu(Y) - \hat{a}\mu(X)$.

Inertie Totale, Intraclasse, Interclasse

Pour un nuage Γ de n points M_i et de centre de gravité G on a l'*inertie totale* $\mathcal{I}(\Gamma) = \dfrac{1}{n}\left(d(M_1,G)^2 + d(M_2,G)^2 + \cdots + d(M_n,G)^2\right)$.
Si ce nuage est la réunion disjointe de k sous-nuages $\Gamma_1, \ldots, \Gamma_k$, de centres de gravité $G_1, \ldots, G_k$, formés de $n_1, \ldots, n_k$ points on a l'*inertie intraclasse* : $\mathcal{I}_{intra} = \overline{p}_1\mathcal{I}(\Gamma_1) + \ldots + \overline{p}_k\mathcal{I}(\Gamma_k)$ où $\overline{p}_i = n_i/n$ est le poids relatif de Γ_i dans Γ
et l'*inertie interclasse* : $\mathcal{I}_{inter} = \overline{p}_1 d_2(G_1,G)^2 + \ldots + \overline{p}_k d_2(G_k,G)^2$, alors $\boxed{\mathcal{I}(\Gamma) = \mathcal{I}_{intra} + \mathcal{I}_{inter}}$.