第一章　李雨轩　2204112913

1-4 (1) $O(n^2)$

(2) $O(2^n)$

(3) $O(1)$

(4) $O(\log n)$

(5) $O(n)$

1-9 (1) $f(n)=\Theta(g(n))$，因为 $f(n)=\log n^2=2\log n$

$\exists i,j\in\mathbb{R}^+$，$\exists n_0\in\mathbb{N}$，如 $i=1$，$j=10$，$n_0=10$

$\forall n>n_0$ 时 $\log n+5\leq\log n^2\leq(\log n+5)\cdot 10$

(2) $f(n)=O(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\sqrt{n}}{\log n^2}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{2\sqrt{n}}}{\frac{2}{\ln 10\cdot n}}=\ln 10\sqrt{n}=\infty$$

(3) $f(n)=\Omega(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log^2 n}{n}=\lim_{n\to\infty}2\log n\cdot\frac{1}{\ln 10\cdot n}=0$$

故 $f(n)=\Omega(g(n))$

(4) $f(n)=\Omega(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\log n+n}{\log n}=\lim_{n\to\infty}n+\frac{n}{\log n}=\infty$$

(5) $f(n)=\Theta(g(n))$

$f(n)=\Theta(1)$, $g(n)=\Theta(1)$

(6) $f(n)=\Omega(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\log^2 n}{\log n}=\infty$$

(7) $f(n)=\Omega(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{100n^2}{2^n}=\lim_{n\to\infty}\frac{200n}{\ln 2\cdot 2^x}=\lim_{n\to\infty}\frac{200}{\ln 4\cdot 2^x}=0$$

(8) $f(n)=O(g(n))$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^n}{3^n}=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n=0$$

1-10 证明 $n!=o(n^n)$

$n=2$ 时, $n!=2<n^n=4$

假设 $n=k$ 时, 有 $k!<k^k$

$n=k+1$ 时 $(k+1)!=k!(k+1)$

$(k+1)^{(k+1)}=(k+1)^k\cdot k+1$

又 $k!<k^k<(k+1)^k$

故 $k!(k+1)<(k+1)^{k+1}$

即 $\forall n>2$, 有 $n!<n^n$, 故 $n!=o(n^n)$