

# Rapport du Projet Darcy

Écoulement de Darcy et pollution d'une couche de sédiments

REZAÏ Mathis, ROUJOU Thomas

March 27, 2025

## Contents

<b>1</b>	<b>Modélisation de l'écoulement de Darcy</b>	<b>2</b>
1.1	Problème de base . . . . .	2
1.2	Formulation variationnelle . . . . .	2
1.3	Découpage de $\Omega$ . . . . .	2
1.4	Application du théorème de Green . . . . .	2
1.5	Formulation finale avec conditions aux limites . . . . .	3
1.6	Implémentation dans FreeFem et interprétation . . . . .	3
<b>2</b>	<b>Propagation du polluant</b>	<b>4</b>
2.1	Problème de base . . . . .	4
2.2	Discrétisation temporelle . . . . .	4
2.3	Formulation variationnelle . . . . .	4
2.4	Implémentation dans FreeFem et interprétation . . . . .	5
<b>3</b>	<b>Conclusion</b>	<b>6</b>

# 1 Modélisation de l'écoulement de Darcy

## 1.1 Problème de base

On considère le problème suivant :

$$-\nabla \cdot (K \nabla H) = 0$$

avec les conditions aux limites :

$$H(x, y_{\max}) = H_{\text{top}}, \quad H(x_{\max}, [0, y_1]) = H_{\text{right}}, \quad \frac{\partial H}{\partial n} = 0 \quad \text{sur le reste du contour.}$$

## 1.2 Formulation variationnelle

Soit  $v \in H_0^1$  (avec  $H_0^1$  désignant l'espace des fonctions test nulles sur le bord approprié), nous avons l'équation variationnelle :

$$-\int_{\Omega} \nabla \cdot (K \nabla H) v \, d\Omega = 0$$

où  $K$  est défini par morceaux comme suit :

$$K = \begin{cases} 0.01 & \text{dans } [0, y_1], \\ 0.1 & \text{dans } [y_1, y_2], \\ 0.01 & \text{dans } [y_2, y_3]. \end{cases}$$

La formulation intégrale s'écrit :

$$-\int_{\Omega} \nabla(K \nabla H) \cdot v \, d\Omega = 0.$$

## 1.3 Découpage de $\Omega$

On décompose le domaine  $\Omega$  en trois sous-domaines :

$$\Omega = \Omega_1 \cup \Omega_2 \cup \Omega_3 \quad \text{avec} \quad \Omega_i \cap \Omega_j = \emptyset \quad \text{pour } i \neq j.$$

Cela nous donne l'équation variationnelle suivante :

$$\int_{\Omega_1} (-K_1 \Delta H \cdot v) \, d\Omega + \int_{\Omega_2} (-K_2 \Delta H \cdot v) \, d\Omega + \int_{\Omega_3} (-K_3 \Delta H \cdot v) \, d\Omega = 0.$$

## 1.4 Application du théorème de Green

En appliquant le théorème de Green sur chaque sous-domaine  $\Omega_i$ , nous obtenons pour  $\Omega_1$  :

$$\int_{\Omega_1} (-K_1 \nabla H \cdot \nabla v) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_1} K_1 \frac{\partial H}{\partial \nu} v \, d\Gamma.$$

Pour  $\Omega_2$  :

$$\int_{\Omega_2} (-K_2 \nabla H \cdot \nabla v) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_2} K_2 \frac{\partial H}{\partial \nu} v \, d\Gamma.$$

Et pour  $\Omega_3$  :

$$\int_{\Omega_3} (-K_3 \nabla H \cdot \nabla v) \, d\Omega - \int_{\partial\Omega_3} K_3 \frac{\partial H}{\partial \nu} v \, d\Gamma.$$

## 1.5 Formulation finale avec conditions aux limites

En tenant compte des conditions initiales et des limites, nous obtenons la formulation suivante :

$$\int_{\Omega_1} (-K_1 \nabla H \cdot \nabla v) \, d\Omega + \int_{\Omega_2} (-K_2 \nabla H \cdot \nabla v) \, d\Omega + \int_{\Omega_3} (-K_3 \nabla H \cdot \nabla v) \, d\Omega = 0.$$

## 1.6 Implémentation dans FreeFem et interprétation

Une fois la solution  $H$  calculée dans FreeFem, la vitesse du fluide dans le milieu est donnée par :

$$\mathbf{u} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \end{pmatrix} = -K \nabla H.$$

La figure suivante montre le champ de vecteurs vitesse tracé avec FreeFem :

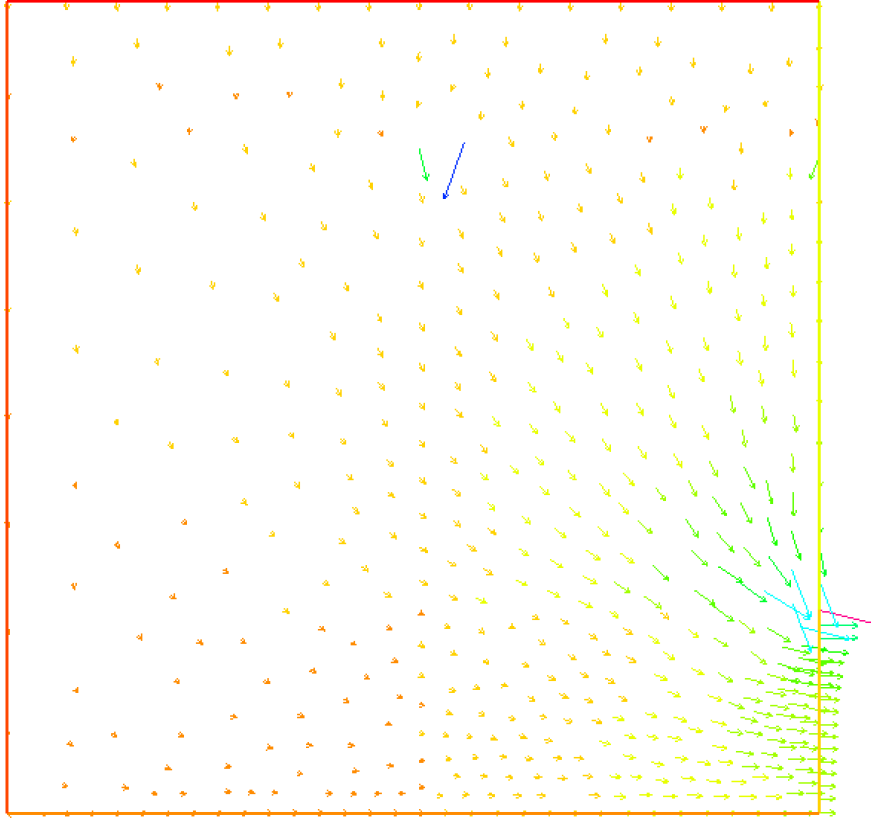


Figure 1: Champ de vecteurs vitesse dans le domaine  $\Omega$ .

**Interprétation :** L'écoulement est orienté vers le coin inférieur droit, ce qui est cohérent avec la condition  $H_{\text{right}}$ . De plus, on observe une différence notable dans la vitesse selon les sous-domaines, due aux différentes perméabilités  $K_1$ ,  $K_2$  et  $K_3$ .

## 2 Propagation du polluant

### 2.1 Problème de base

La propagation de la concentration  $\phi(x, y, t)$  de polluant est modélisée par :

$$\frac{\partial \phi}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi - \nabla \cdot (\nu \nabla \phi) = 0,$$

avec les conditions aux limites :

$$\nabla \phi \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{sur } \partial\Omega \times (0, T],$$

et la condition initiale complète :

$$\phi(x, y, t = 0) = \exp(-20((x - x_s)^2 + (y - y_s)^2)).$$

### 2.2 Discrétisation temporelle

On discrétise le temps en intervalles réguliers de longueur  $\Delta t$ , avec  $t_n = n\Delta t$ ,  $n \in \mathbb{N}$ . La concentration au pas de temps  $n$  est notée  $\phi^n(x, y)$ .

L'équation discrétisée par Euler implicite s'écrit :

$$\frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^{n+1} - \nabla \cdot (\nu \nabla \phi^{n+1}) = 0.$$

### 2.3 Formulation variationnelle

Soit  $v \in H^1(\Omega)$ . En multipliant l'équation discrétisée par  $v$  et en intégrant sur  $\Omega$ , on obtient :

$$\int_{\Omega} \frac{\phi^{n+1} - \phi^n}{\Delta t} v \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^{n+1} v \, d\Omega - \int_{\Omega} \nabla \cdot (\nu \nabla \phi^{n+1}) v \, d\Omega = 0.$$

Sur chaque sous-domaine  $\Omega_i$ , le coefficient  $\nu$  est constant. En appliquant le théorème de Green :

$$-\nu_i \int_{\Omega_i} \Delta \phi^{n+1} v \, d\Omega = \nu_i \int_{\Omega_i} \nabla \phi^{n+1} \cdot \nabla v \, d\Omega - \nu_i \int_{\partial\Omega_i} \frac{\partial \phi^{n+1}}{\partial n} v \, d\Gamma.$$

Le terme sur  $\partial\Omega_i$  est nul aux frontières externes, et les contributions sur les interfaces entre sous-domaines s'annulent. La formulation sur chaque sous-domaine devient :

$$\int_{\Omega_i} \phi^{n+1} v \, d\Omega + \Delta t \int_{\Omega_i} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^{n+1} v \, d\Omega + \Delta t \nu_i \int_{\Omega_i} \nabla \phi^{n+1} \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega_i} \phi^n v \, d\Omega.$$

En sommant sur tous les sous-domaines  $\Omega_i$ , on obtient l'équation finale : Trouver  $u \in H_0^1$  tel que pour tout  $v \in H_0^1$ , on a

$$\int_{\Omega} \phi^{n+1} v \, d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \mathbf{u} \cdot \nabla \phi^{n+1} v \, d\Omega + \Delta t \int_{\Omega} \nu \nabla \phi^{n+1} \cdot \nabla v \, d\Omega = \int_{\Omega} \phi^n v \, d\Omega.$$

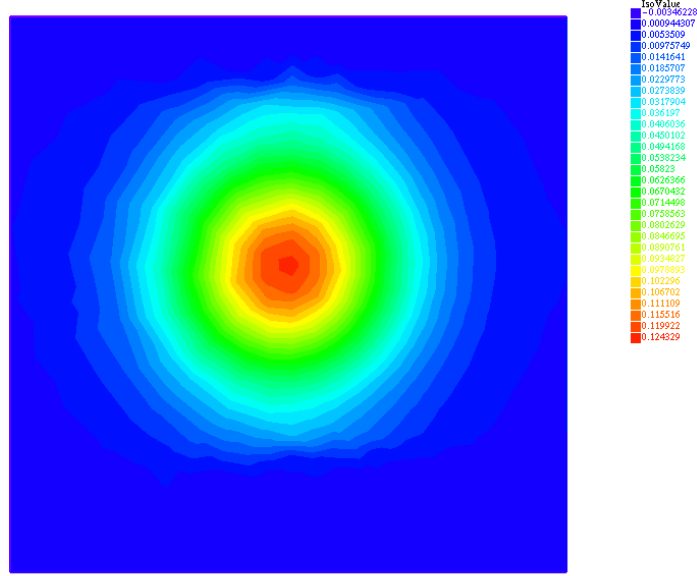


Figure 2: Distribution initiale de la concentration ( $t = 0$ ).

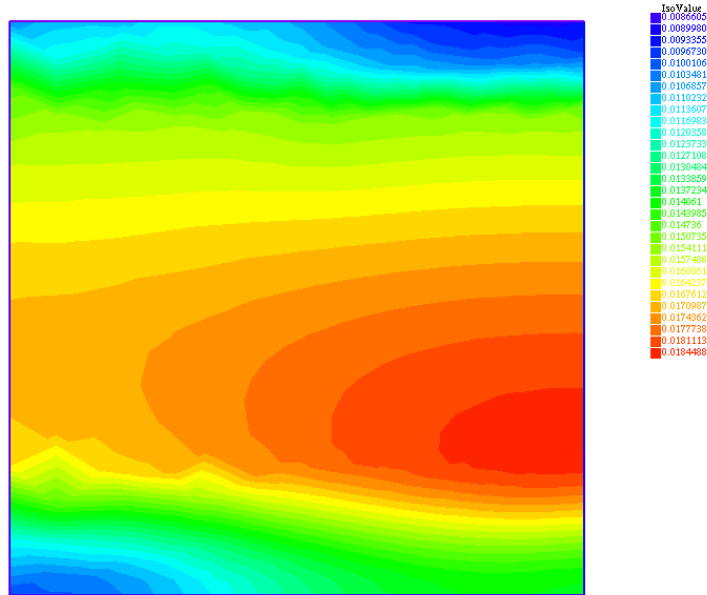


Figure 3: Distribution de la concentration à un temps long ( $t = T$ ).

## 2.4 Implémentation dans FreeFem et interprétation

Les résultats obtenus pour  $\phi$  sont visualisés sous forme de deux graphiques :

- Une première image représentant la distribution initiale de la concentration, à  $t = 0$ .
- Une seconde image représentant la distribution de la concentration à un temps long  $t = T$ .

**Interprétation :** La pollution se déplace vers le coin inférieur droit sous l'effet de l'écoulement, ce qui est cohérent avec les conditions aux limites et la direction imposée

par  $\mathbf{u}$ . Cependant, en raison des différences de coefficients de diffusion  $\nu$ , la descente du polluant est ralentie dans les couches moins diffuses. Cela crée une répartition inégale de la concentration à travers les sous-domaines.

### 3 Conclusion

Ce projet a permis de modéliser et d'analyser numériquement deux phénomènes liés au milieu poreux étudié :

- L'écoulement de Darcy, influencé par les variations de perméabilité et les conditions aux limites.
- La propagation d'un polluant sous l'effet combiné de l'advection et de la diffusion, prenant en compte des propriétés physiques hétérogènes dans le domaine.

Les simulations ont mis en évidence des comportements spécifiques à chaque couche du domaine, notamment l'effet des différences de perméabilité sur l'écoulement et des coefficients de diffusion sur la propagation de la pollution. Ces résultats sont cohérents avec les hypothèses et les équations fondamentales utilisées. En modifiant les paramètres  $H_{top}$  et  $H_{right}$  on remarque que les échnager inverse notre champs de vitesse créant alors une sortie vers le haut, là où une augmentation de leur différence accentue la champs de vitesse et donc la vitesse d'expulsion de la pollution comme on peut l'observer ci-dessous

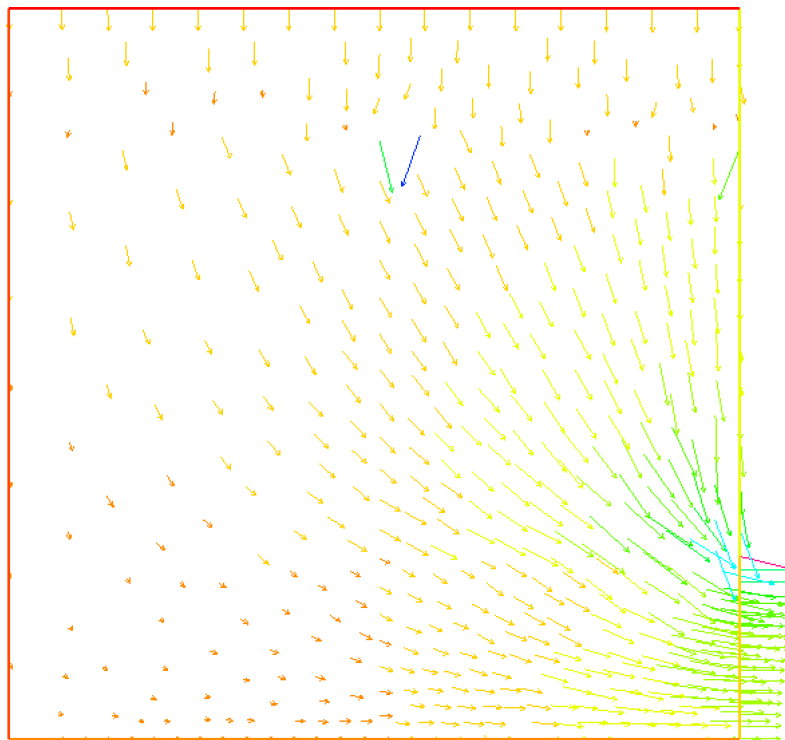


Figure 4: Champ de vecteurs vitesse dans le domaine  $\Omega$  avec  $H_{right} = 0.01$  et  $H_{top}=1$

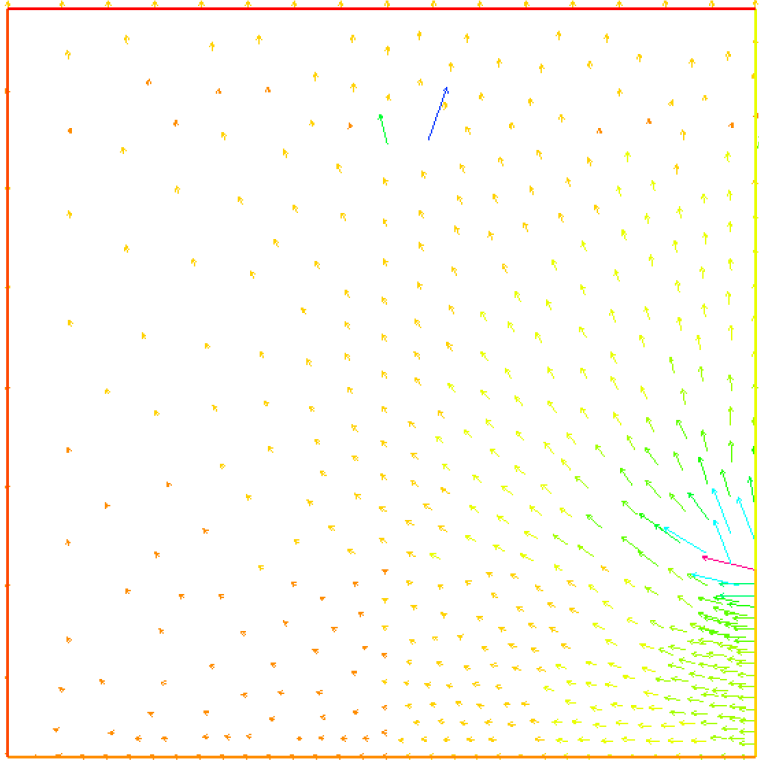


Figure 5: Champ de vecteurs vitesse dans le domaine  $\Omega$  avec  $H_{right} = 1$  et  $H_{top}=0.667$

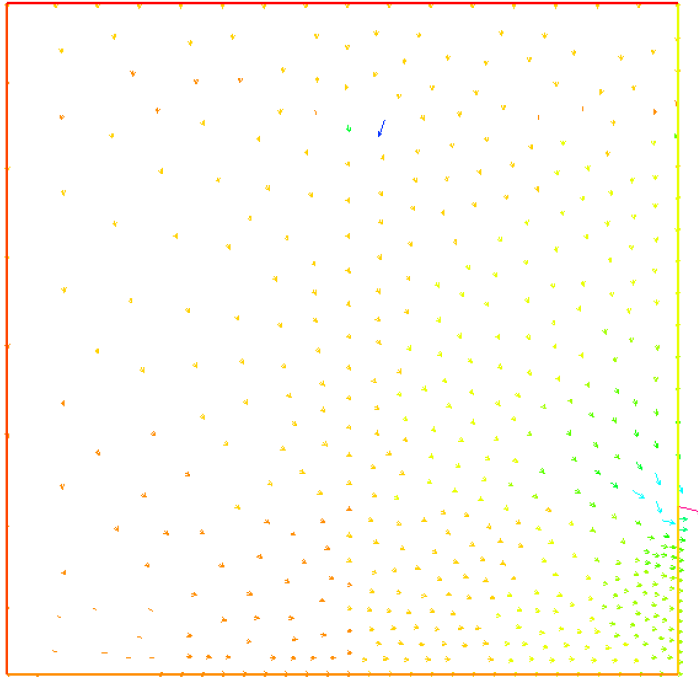


Figure 6: Champ de vecteurs vitesse dans le domaine  $\Omega$  avec  $H_{right} = 0.9$  et  $H_{top}=1$