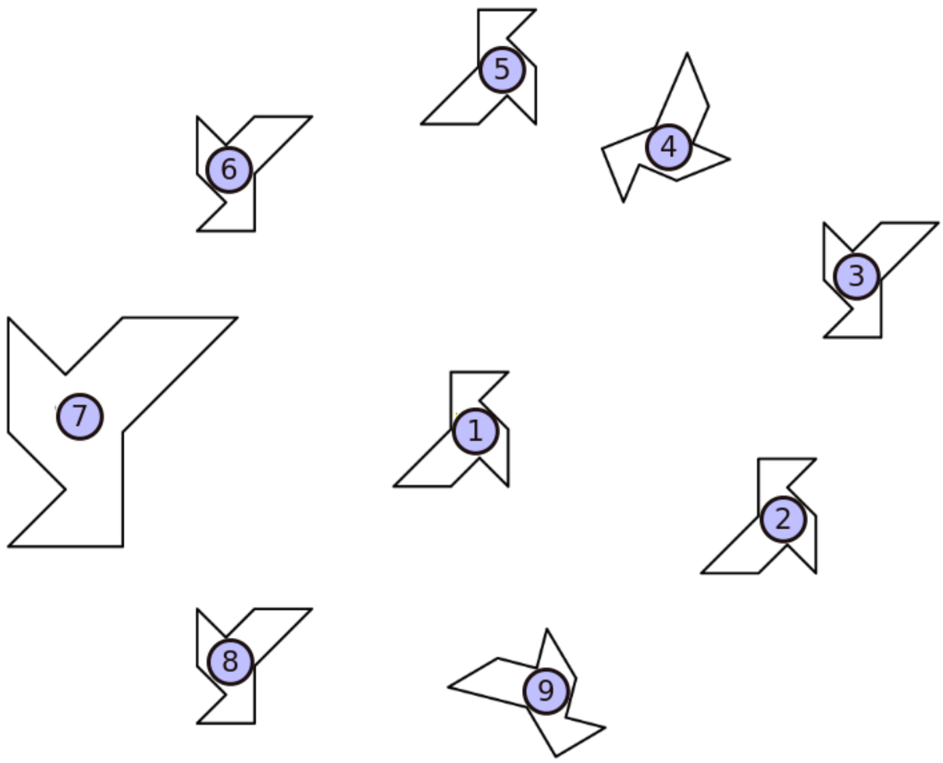
EXERCICE DES COCOTTES



Parmi les cocottes 2 à 9, lesquelles ont été obtenues à partir de la cocotte 1 par une translation ?

Tracer sur la feuille le vecteur de chacune de ces translations.

A – Définitions d'un vecteur et d'une translation

Définition d'un vecteur non nul

Un vecteur non nul du plan est constitué :

– d'une direction du plan ;

– d'un sens associé à cette direction ;

– d'une longueur non nulle.

Notation Un vecteur se note avec une flèche, par exemple $\vec{u}$ ou $\vec{v}$.

Vecteur nul On considère aussi un vecteur appelé vecteur nul et noté $\vec{0}$.
Sa longueur est 0 mais il n'a ni direction, ni sens.

Exemple fondamental

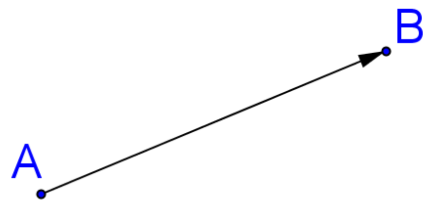
1) Soient A et B deux points distincts.

Par définition, le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est le vecteur non nul :

– de direction la direction de la droite (AB) ;

– de sens A vers B ;

– de longueur AB.



On peut représenter le vecteur par une flèche joignant A à B.

On peut aussi le représenter par une flèche joignant d'autres points à condition que les direction, sens et longueur soient les mêmes.

2) Soit C un point. Par définition, le vecteur $\overrightarrow{CC}$ est le vecteur nul.

Exercice

Soient A et B deux points distincts. Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{BA}$ sont-ils égaux ?

Définition d'une translation

On considère un vecteur non nul. La translation de vecteur $\vec{u}$ est la transformation du plan qui consiste à déplacer les points dans la direction de $\vec{u}$, le sens de $\vec{u}$ et la longueur de $\vec{u}$.

La translation de vecteur nul est la transformation qui à chaque point associe lui-même.

B – Égalité de deux vecteurs

Théorème Soient A, B, C et D quatre points.

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$ si et seulement si

Exercice 1 Soient A, B, C et D quatre points tels que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CD}$. Que peut-on dire des vecteurs $\overrightarrow{AC}$ et $\overrightarrow{BD}$?

Exercice 2 Soient A, B et C trois points. Trouver une condition simple pour que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{BC}$.

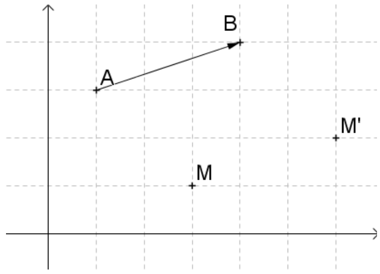
Exercice 3 A, B et C sont trois points, et D et E sont les points tels que $\overrightarrow{BA} = \overrightarrow{CD}$ et $\overrightarrow{AC} = \overrightarrow{BE}$
Démontrer que C est le milieu du segment $[DE]$.

C – Coordonnées d'un vecteur dans un repère

Théorème Soit $\overrightarrow{AB}$ un vecteur. Soit M un point et soit M' son image par la translation de vecteur $\overrightarrow{AB}$.

Alors $x_{M'} =$

et $y_{M'} =$



Définition Les coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$ dans le repère sont $x_B - x_A$ et $y_B - y_A$.

Remarques et notation

1) Tout vecteur pouvant s'écrire sous la forme $\overrightarrow{AB}$, la définition précédente permet donc de définir les coordonnées de n'importe quel vecteur.

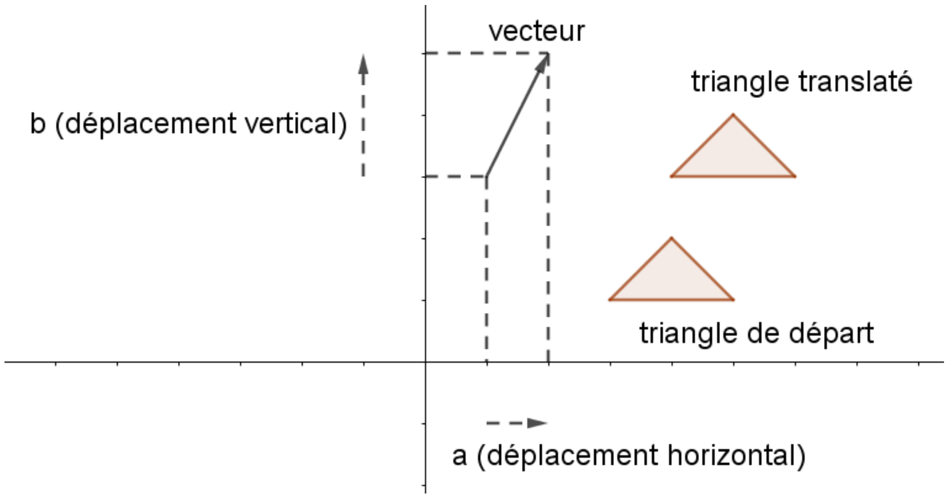
2) Deux vecteurs sont égaux si et seulement s'ils ont les mêmes coordonnées.

3) Les coordonnées du vecteur nul sont 0 et 0.

4) Soient a et b les coordonnées d'un vecteur $\vec{u}$. On note $\vec{u}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$.

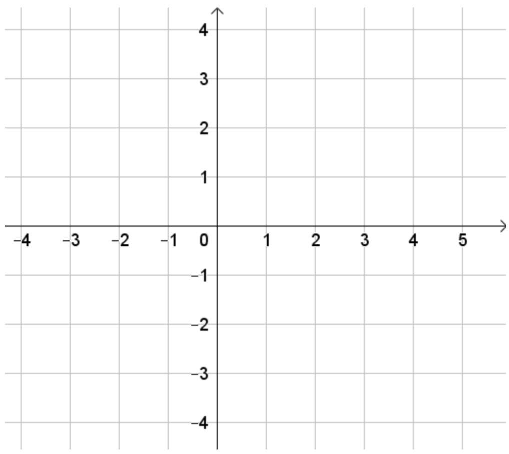
a est le déplacement horizontal de la translation de vecteur $\vec{u}$: vers la droite si $a > 0$, vers la gauche si $a < 0$.
b est le déplacement vertical de la translation de vecteur $\vec{u}$: vers le haut si $b > 0$, vers le bas si $b < 0$.

Exemple dans le cas $\boldsymbol{a > 0}$ et $\boldsymbol{b > 0}$:



Exercice 4 On considère les points $I(1\,;0)$, $J(0\,;1)$ et $A(4\,;2{,}5)$.
Représenter ci-contre les vecteurs suivants
et déterminer leurs coordonnées :

$\overrightarrow{OA}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{AO}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{IJ}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$ $\overrightarrow{JA}\begin{pmatrix} \cdots \\ \cdots \end{pmatrix}$



Exercice 5 Quelle est l'image du point $A(-3\,;1{,}5)$ par la translation de vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}$? Faire une figure.

Exercice 6 On considère les points $A(-4\,;1)$, $B(-2\,;3)$ et $C(-1{,}5\,;-1)$.

a) Quelles sont les coordonnées du point M tel que $\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{CM}$?

b) Quelles sont les coordonnées des points N tel que $\overrightarrow{CA} = \overrightarrow{NC}$?

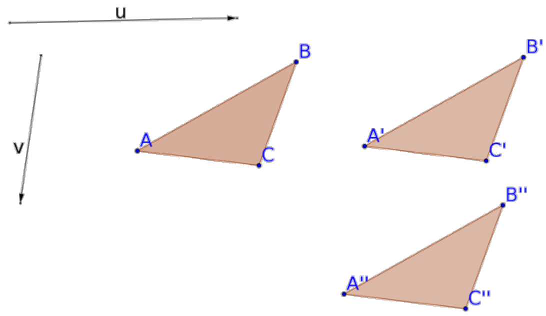
c) Quelle est la nature du quadrilatère $BMNC$?

Théorème et définition

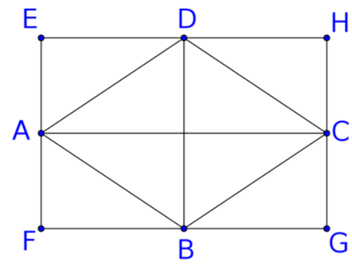
Soient $\vec{u}$ et $\vec{v}$ deux vecteurs.

Alors la transformation qui consiste à enchaîner la translation de vecteur $\vec{u}$ puis la translation de vecteur $\vec{v}$ est aussi une translation.

Le vecteur de cette translation est appelé somme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$. On le note $\vec{u}+\vec{v}$.



Exercice 7 $EFGH$ est un rectangle. A, B, C et D sont les milieux des côtés $[EF]$, $[FG]$, $[GH]$ et $[HE]$.
Sans justifier, compléter les égalités à l'aide des points précédents :



$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{.....}$ $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{.....}$

$\overrightarrow{ED}+\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{.....}$ $\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{HC}=\overrightarrow{.....}$

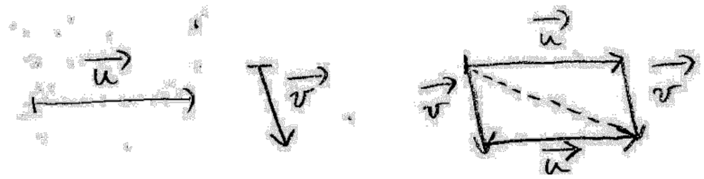
$\overrightarrow{DC}+\overrightarrow{CD}=\overrightarrow{.....}$ $\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{.....}$

$\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{CD}+\overrightarrow{CB}=\overrightarrow{.....}$

Propriété

On considère deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

Alors $\vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$.



Propriété (relation de Chasles)

Pour tous points A, B et C, on a :

Remarque On considère deux points A et B. Alors $\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BA}=$

Définition

Le vecteur opposé d'un vecteur $\vec{u}$ est l'unique vecteur dont la somme avec $\vec{u}$ est égale à $\vec{0}$.

Ce vecteur est noté $-\vec{u}$.

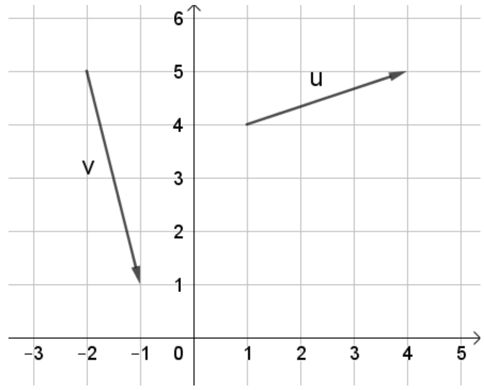
Propriété Étant donnés deux points A et B, on a $-\overrightarrow{AB}=$

Notation Étant donné deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$, la somme $\vec{u}+(-\vec{v})$ est notée $\vec{u}-\vec{v}$.

Exercice 8 Mêmes consignes que l'exercice 7.

$\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{BG}=\overrightarrow{.....}$ $\overrightarrow{AC}-\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{.....}$ $\overrightarrow{AD}-\overrightarrow{DA}=\overrightarrow{.....}$ $\overrightarrow{EF}-\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{.....}$

Exercice 9 Soient les vecteurs $\vec{u}\binom{3}{1}$ et $v\binom{1}{-4}$. Quelles sont les coordonnées du vecteur $\vec{u}+\vec{v}$?



<u>Conjecture</u> : On représente le vecteur $\vec{u}+\vec{v}$ ci-contre.

On peut alors conjecture que $\vec{u}+\vec{v}\binom{\cdots}{\cdots}$

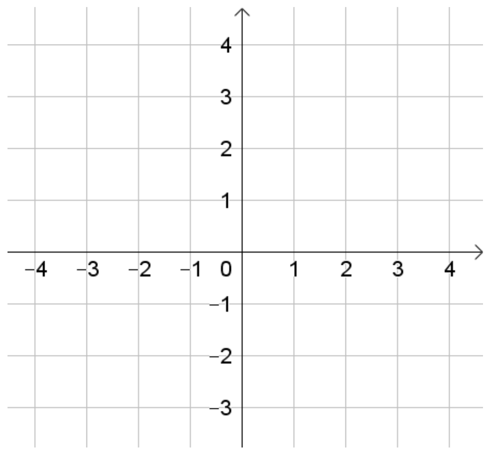
<u>Preuve de la conjecture</u> :

Théorème

Soient $\vec{u}\binom{a}{b}$ et $\vec{v}\binom{c}{d}$. Alors $\vec{u}+\vec{v}\binom{a+c}{b+d}$. D'autre part, $-\vec{u}\binom{-a}{-b}$

Exercice 10 Soient les points $A(1{,}5\,;-2)$, $B(-1;0{,}5)$, $C(2\,;0)$ et $D(3\,;2{,}5)$.

Soient les vecteurs $\vec{u}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{CD}$ et $\vec{v}=\overrightarrow{AB}-\overrightarrow{CD}$.



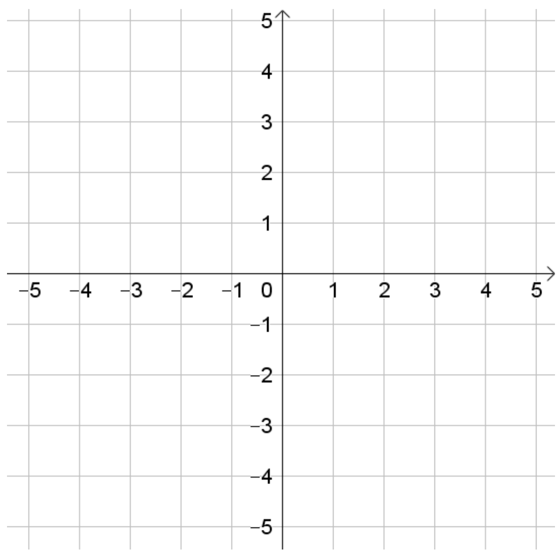
a) Sans calculs, représenter ci-contre les points et vecteurs précédents.

b) Conjecturer quelles sont les coordonnées des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$.

c) Démontrer les conjectures de la question précédente.

Exercice 11 A et B sont deux points du plan. Quels sont les points G tels que $\overrightarrow{GA}+\overrightarrow{GB}=\vec{0}$?

Exercice 12 Soient les points $A(2;\ 1)$, $B(0;\ -2)$ et $C(-1;\ -1)$. On note D le point tel que $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$.



a) Faire une figure ci-contre.

b) Déterminer les coordonnées du point D.

c) Démontrer que $ABDC$ est un parallélogramme.

d) <u>**Défi**</u> : généraliser le résultat obtenu au **c)**.