Fonction dérivée

INTRODUCTION

On a vu que la vitesse d'accroissement instantanée d'une fonction f en un certain nombre réel a est donnée par le nombre dérivé de f en a, et noté $f'(a)$.

Lorsque la fonction f admet un nombre dérivé pour tous les réels appartenant à un intervalle I, on dit que f est dérivable sur l'intervalle I.

On peut alors définir la fonction dérivée de f sur l'intervalle I : c'est la fonction qui à tout réel x de I associe $f'(x)$, le nombre dérivé de f en x. On note cette fonction f'.

$$f' : x \mapsto f'(x)$$

Exemple : Si $f(t)$ est la distance parcourue (en m) par une voiture en fonction du temps t (en s), alors la fonction dérivée $t \mapsto f'(t)$ donne la vitesse instantanée (en m/s) de la voiture en fonction du temps t.

DÉRIVÉES DE FONCTIONS USUELLES

Les dérivées de certaines fonctions usuelles sont à connaitre **par cœur**. Voici les dérivées au programme de tronc commun de 1ère technologique :

	$f(x)$	$f'(x)$
Fonction carré	x^2	$2x$
Fonction cube	x^3	$3x^2$
Fonction affine	$ax+b$	a

Exemples de dérivées de fonctions affines :

La dérivée de $f(x) = 3x - 7$ *est* $f'(x) = 3$.
La dérivée de $g(x) = -x + 2$ *est* $g'(x) = -1$.
La dérivée de $h(x) = 5 + 4x$ *est* $h'(x) = 4$.

DÉRIVÉES ET OPÉRATIONS

Dérivée d'une somme de deux fonctions

Si f et g sont dérivables sur intervalle I, alors leur somme est dérivable sur I et on a :

$$(f + g)' = f' + g'$$

Exemple : La fonction h définie par $h(x) = x^2 + x^3$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $h'(x) = 2x + 3x^2$.

Dérivée du produit d'une fonction par un réel

Si f est dérivable sur un intervalle I est a est un nombre réel, alors $a \times f$ est dérivable et on a :

$$(a \times f)' = a \times f'$$

Exemple : La fonction h définie par $h(x) = 5x^2$ est dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a $h'(x) = 5 \times 2x = 10x$.

Calculer des dérivées

On peut utiliser les deux propriétés précédentes pour calculer les dérivées de fonctions polynômes de degré 2 ou 3. Voyons comment faire sur des exemples…

Exemple 1 : La fonction h est définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = 7x^2 + 5x - 4$.

Pour calculer sa dérivée, on décompose : $h(x) = 7 \times x^2 + 5x - 4$

Ainsi, on constate que h est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $h'(x) = 7 \times 2x + 5$

Donc $h'(x) = 14x + 5$.

Exemple 2 : La fonction s est définie sur $\mathbb{R}$ par $s(t) = -t^3 + 9t^2 - 2$.

Pour calculer sa dérivée, on décompose : $s(t) = -t^3 + 9 \times t^2 + 0\text{t} - 2$

Ainsi, on constate que s est bien dérivable sur $\mathbb{R}$ et on a : $s'(t) = -3t^2 + 9 \times 2t + 0$

Donc $s'(t) = -3t^2 + 18t$.

Signe de la dérivée et sens de variation

Propriété Soit f une fonction dérivable sur un intervalle I.
La fonction $\boldsymbol{f}$ **est croissante** sur I si et seulement si $\boldsymbol{f'(x)}$ **est positif** pour tout x de I.
La fonction $\boldsymbol{f}$ **est décroissante** sur I si et seulement si $\boldsymbol{f'(x)}$ **est négatif** pour tout x de I.

Cette propriété est <u>très importante</u> car elle permet de démontrer le sens de variations d'une fonction en étudiant le signe de la fonction. Voyons la méthode sur un exemple.

Exemple : On étudie le sens de variation de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = x^2 - 6x + 7$.

- *On calcule sa dérivée : On a $f'(x) = 2x - 6$.*
- *On étudie le signe de $f'(x)$. C'est une fonction affine de coefficient directeur strictement positif. Elle sera donc négative puis positive. On cherche pour quelle valeur de x elle s'annule :*
  $$f'(x) = 0 \Leftrightarrow 2x - 6 = 0 \Leftrightarrow 2x = 6 \Leftrightarrow x = 3$$
- *On construit le tableau de signe de la dérivée et on en déduit le tableau de variation de f.*

x	$-\infty$		3		$+\infty$
Signe de $f'(x)$		$-$	0	$+$	
Variations de $f(x)$		↘	-2	↗	