Le produit scalaire

QU'EST-CE QUE LE PRODUIT SCALAIRE ?

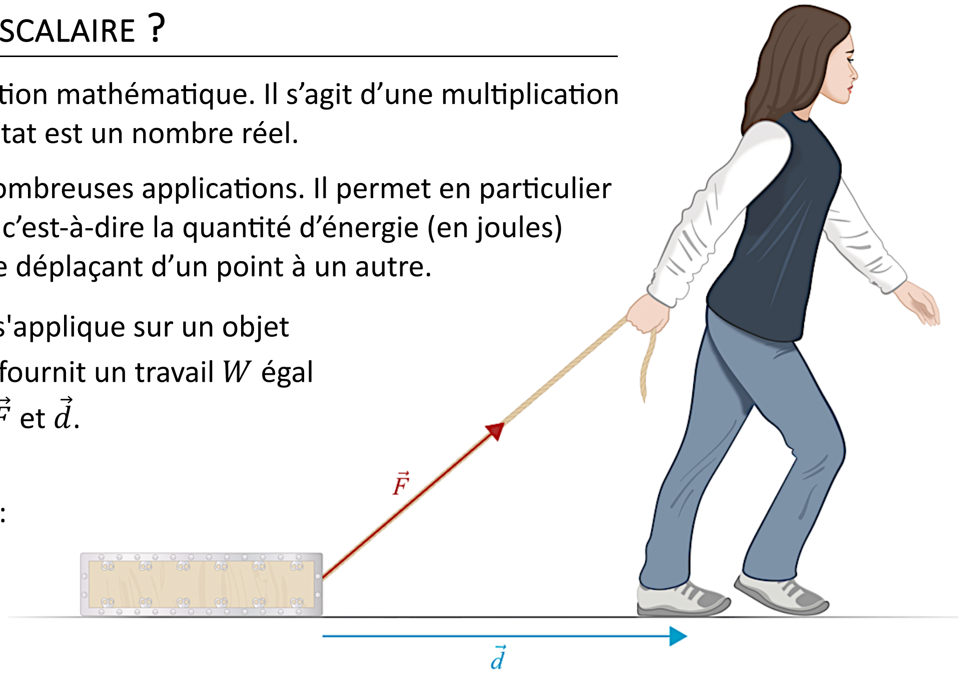
Le <u>produit scalaire</u> est une opération mathématique. Il s'agit d'une multiplication entre deux vecteurs dont le résultat est un nombre réel.

Le produit scalaire possède de nombreuses applications. Il permet en particulier de calculer le <u>travail d'une force</u>, c'est-à-dire la quantité d'énergie (en joules) qu'une force fournit à un objet se déplaçant d'un point à un autre.

Ainsi, une force constante $\vec{F}$ qui s'applique sur un objet parcourant un trajet rectiligne $\vec{d}$ fournit un travail W égal au produit scalaire des vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{d}$.

On note le produit scalaire avec un point entre les deux vecteurs :

$$\boxed{\boldsymbol{W = \vec{F} \cdot \vec{d}}}$$



Ainsi, le produit scalaire est un nombre réel :

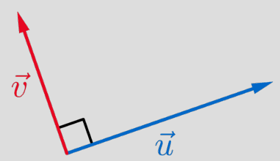
- **positif** lorsque la force favorise le mouvement (travail moteur, l'objet gagne de l'énergie) ;
- **négatif** lorsque la force s'oppose au mouvement (travail résistant, l'objet perd de l'énergie) ;
- **nul** lorsque la force n'a pas d'effet sur le mouvement (travail nul).

DEUX CAS PARTICULIERS…

➔ Produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **orthogonaux**, alors leur produit scalaire est nul :

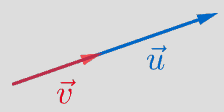
$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$$



➔ Produit scalaire de deux vecteurs colinéaires

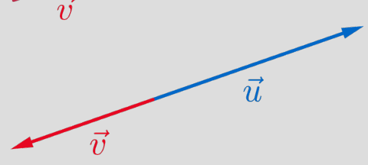
Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires <u>de même sens</u>**, alors leur produit scalaire est égal au produit de leurs normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$

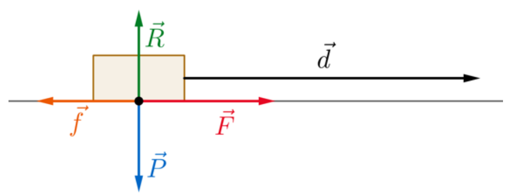


Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires <u>de sens opposés</u>**, alors leur produit scalaire est égal à l'opposé du produit de leurs normes :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = -\|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\|$$



<u>Exemple</u> : On déplace un carton sur 10 m. On note $\vec{d}$ le vecteur déplacement. Le carton subit quatre forces : son poids $\vec{P}$, la réaction du sol $\vec{R}$, la force de poussée $\vec{F}$ d'intensité 130 N (newton) et la force de frottement du sol $\vec{f}$ d'intensité 100 N.



Pour calculer le travail de chaque force, on calcule le produit scalaire entre les vecteurs force et déplacement :

- *Les vecteurs $\vec{P}$ et $\vec{d}$ sont orthogonaux, donc :* $\vec{P} \cdot \vec{d} = 0\,J$
- *Les vecteurs $\vec{R}$ et $\vec{d}$ sont orthogonaux, donc :* $\vec{R} \cdot \vec{d} = 0\,J$
- *Les vecteurs $\vec{F}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires de même sens, donc :* $\vec{F} \cdot \vec{d} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{d}\| = 130 \times 10 = 1300\,J$
- *Les vecteurs $\vec{f}$ et $\vec{d}$ sont colinéaires de sens opposés, donc :* $\vec{f} \cdot \vec{d} = -\|\vec{f}\| \times \|\vec{d}\| = -100 \times 10 = -1000\,J$

L'énergie totale gagnée par le carton est alors la somme des travails de ces quatre forces :

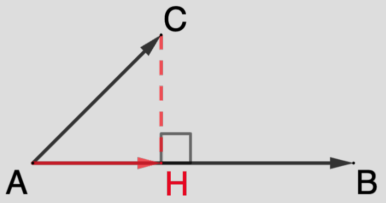
$$\vec{P} \cdot \vec{d} + \vec{R} \cdot \vec{d} + \vec{F} \cdot \vec{d} + \vec{f} \cdot \vec{d} = 0 + 0 + 1300 + (-1000) = 300\,J$$

TROIS MÉTHODES POUR CALCULER UN PRODUIT SCALAIRE

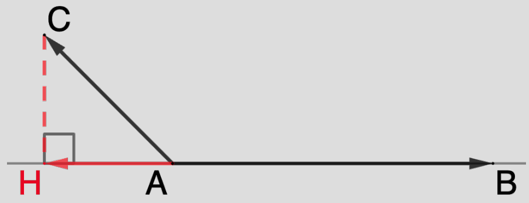
MÉTHODE 1 : CONSTRUIRE LE PROJETÉ ORTHOGONAL

Lorsque A, B et C sont trois points non-alignés, on peut calculer le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ en construisant **le point H, projeté orthogonal du point C sur la droite (AB)**. On distingue alors deux cas :

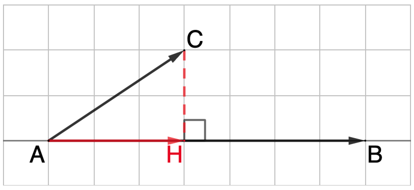
Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de <u>même sens</u>, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = AB \times AH}$.



Si les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de <u>sens opposés</u>, alors $\boldsymbol{\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -AB \times AH}$.

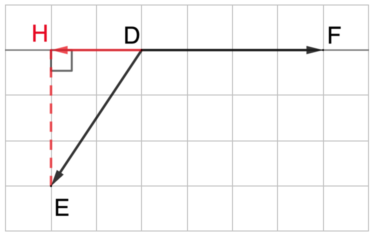


<u>Exemples</u> :



On construit H le projeté orthogonal de C sur (AB).
Puisque $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AH}$ sont colinéaires de même sens :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} &= AB \times AH \\ &= 7 \times 3 \\ &= 21\end{aligned}$$



On construit H le projeté orthogonal de E sur (DF).
Puisque $\overrightarrow{DF}$ et $\overrightarrow{DH}$ sont colinéaires de sens opposés :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{DE} \cdot \overrightarrow{DF} &= -DF \times DH \\ &= -4 \times 2 = -8\end{aligned}$$

MÉTHODE 2 : UTILISER LA FORMULE GÉNÉRALE

Si on connait la norme des vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ainsi qu'une mesure de l'angle $(\vec{u}\,;\vec{v})$, alors on peut utiliser la formule générale du produit scalaire :

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = \|\vec{u}\| \times \|\vec{v}\| \times \cos(\vec{u}\,;\vec{v})}$$

<u>Exemples</u> :

1. *$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont tels que $\|\vec{u}\| = 3{,}5$ et $\|\vec{v}\| = 4$ et tels qu'une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ est $\frac{2\pi}{3}$. On a donc :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3{,}5 \times 4 \times \cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = 3{,}5 \times 4 \times \left(-\frac{1}{2}\right) = -7$$

2. *Le triangle ABC est tel que $AB = 5$, $BC = 3$ et $\widehat{ABC} = \frac{\pi}{4}$. On a donc :*

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{BC} = AB \times BC \times \cos(\widehat{ABC}) = 5 \times 3 \times \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 5 \times 3 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{15\sqrt{2}}{2}$$

MÉTHODE 3 : UTILISER LES COORDONNÉES DES VECTEURS

Si on connait les coordonnées des vecteurs $\vec{u}(x\,;y)$ et $\vec{v}(x'\,;y')$, alors on peut utiliser la formule analytique du produit scalaire :

$$\boldsymbol{\vec{u} \cdot \vec{v} = x \times x' + y \times y'}$$

<u>Exemple</u> : *Le produit scalaire de $\vec{u}(2\,;7)$ et $\vec{v}(4{,}5\,;-1)$ est donné par :*

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 2 \times 4{,}5 + 7 \times (-1) = 9 - 7 = 2$$

Le produit scalaire de $\vec{r}(-2{,}5\,;5)$ et $\vec{s}(3\,;1)$ est donné par :

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = (-2{,}5) \times 3 + 5 \times 1 = -7{,}5 + 5 = -2{,}5$$