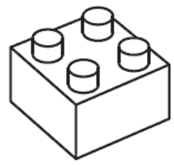
## EXERCICE DU JEU DE SÉGO

Votre copine Ségo vous propose un jeu : « Place ce Lego à environ 30 cm au-dessus du sol et lâche-le :



- s'il tombe sur un des quatre côtés, je te donne 5 € ;
- s'il tombe sur les tenons, tu me donnes 3 € ;
- s'il tombe sur la base, je ne te donne rien et tu ne me donnes rien. »

**Avez-vous intérêt à jouer au jeu de Ségo ?**

---

**Rappels de probabilités**

Une expérience soumise au hasard, dont le résultat est imprévisible, est appelée expérience aléatoire

Pour étudier une telle expérience, on fait d'abord une liste des résultats possibles.
Ces résultats sont appelés issues.

Un événement est quelque chose qui pourrait s'être produit au cours de l'expérience.
Il est constitué de certaines issues.

La probabilité d'un événement est un nombre compris entre 0 et 1.
Il correspond aux chances de se produire de l'événement.

| | **Probabilité** | **Probabilité (%)** |
|---|---|---|
| **Événement impossible** | 0 | 0 % |
| **Événement qui a autant de chances de se produire que de ne pas se produire** | 0,5 | 0,5 % |
| **Événement certain** | 1 | 1 % |

de plus
en plus
probable

**Modèle probabiliste du lancer du Lego**

Pour savoir si on a intérêt à jouer, on va choisir un modèle probabiliste du lancer de Lego : on doit d'abord choisir les issues puis ensuite les probabilités des issues.

On pourrait choisir six issues (les six faces) mais trois suffisent.
On les note *b* comme base, *c* comme côté et *t* comme tenons.

Il faut maintenant choisir les probabilités des issues *b, c* et *t*, que l'on note *p*, *q* et *r*.

## EXERCICE DU JEU DE SÉGO (SUITE)

Voici les résultats des lancers de briques des différents groupes. Les fréquences de chaque groupe ont été arrondies au centième de telle sorte que la somme des trois fréquences vaille 1.

| **Groupes** | **Gpe 1** | **Gpe 2** | **Gpe 3** | **Gpe 4** | **Gpe 5** | **Gpe 6** | **Gpe 7** | **Gpe 8** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre total de lancers | 6 | 6 | 10 | 10 | 10 | 18 | 40 | 50 |
| Nombre de *b* | 1 | 2 | 5 | 5 | 4 | 4 | 12 | 12 |
| Nombre de *c* | 2 | 3 | 2 | 3 | 1 | 2 | 12 | 10 |
| Nombre de *t* | 3 | 1 | 3 | 2 | 5 | 12 | 16 | 28 |
| Fréquence de *b* | 0,17 | 0,33 | 0,50 | 0,50 | 0,40 | 0,22 | 0,30 | 0,24 |
| Fréquence de *c* | 0,33 | 0,50 | 0,20 | 0,30 | 0,10 | 0,11 | 0,30 | 0,20 |
| Fréquence de *t* | 0,50 | 0,17 | 0,30 | 0,20 | 0,50 | 0,67 | 0,40 | 0,56 |

Proposez, pour les probabilités *p*, *q* et *r*, de meilleures valeurs que les fréquences ci-dessus.

## EXERCICE DU JEU DE SÉGO (SUITE ET FIN)

Quand vous faites une partie du jeu de Ségo, vous avez donc environ :

- 21 % de chances de gagner 5 € ;
- 50 % de chances de perdre 3 € ;
- 29 % de chances de ne rien gagner ni perdre.

Donc sur 100 parties, vous gagnez en moyenne 21 fois 5 € et vous perdez en moyenne 50 fois 3 €.

**Avez-vous intérêt à jouer ?**

## EXERCICE DE L'ÉVOLUTION DES FRÉQUENCES OBSERVÉES

Votre professeur a lancé 100 fois un Lego (résultat : 33 *b*, 15 *c* et 52 *t*), puis encore 100 fois (résultat : 28 *b*, 20 *c* et 52 *t*).On considère que ces deux séries correspondent aux groupes fictifs 9 et 10.

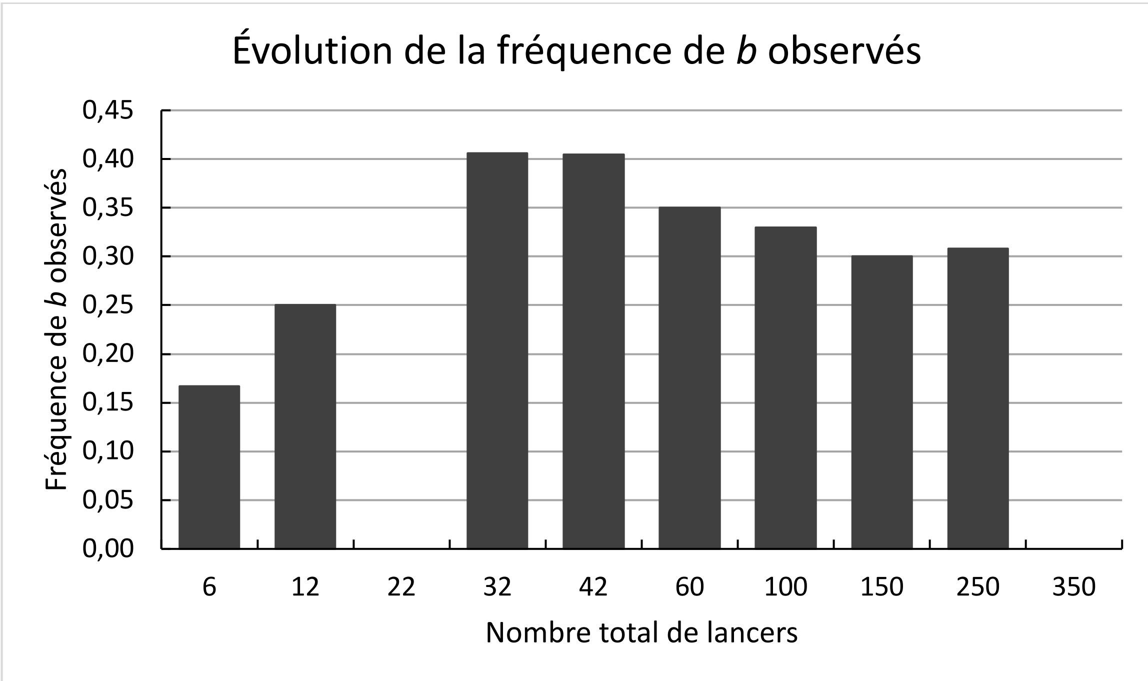
On a regroupé progressivement les résultats des groupes 1 à 10 dans le tableau suivant.

| **Groupes** | **1** | **1 et 2** | **1 à 3** | **1 À 4** | **1 À 5** | **1 À 6** | **1 À 7** | **1 À 8** | **1 À 9** | **1 À 10** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre total de lancers | 6 | 12 | 22 | 32 | 42 | 60 | 100 | 150 | 250 | 350 |
| Nombre de *b* | 1 | 3 | 8 | 13 | 17 | 21 | 33 | 45 | 77 | 102 |

Puis on a représenté sur un diagramme en bâtons l'évolution des fréquences de *b* observés.

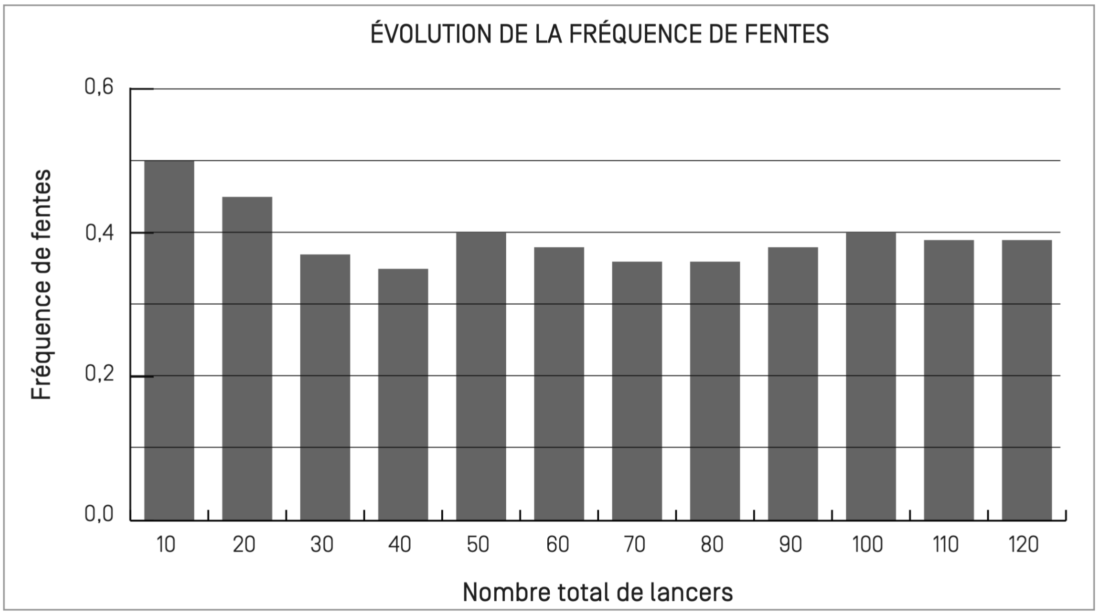
**1.** Les troisième et dernier bâtons sont manquants. Dessinez-les.

**2.** Que constatez-vous concernant l'évolution de la fréquence de *b* ?



## EXERCICE – JEU DU CAURI

Un cauri est un coquillage qui peut retomber de deux manières lorsqu'on le lance : sur le **dos** ou sur la **fente**.
Pour étudier l'expérience aléatoire du lancer de cauri, on lance 120 fois un cauri ; tous les 10 lancers, on calcule la fréquence de l'événement « le cauri tombe sur la fente ». On obtient le diagramme en bâtons ci-dessous.




**1.** Parmi les 10 premiers lancers, combien a-t-on obtenu de fentes ?
**2.** Parmi les 50 premiers lancers, combien a-t-on obtenu de fentes ?
**3.** Choisissez des « bonnes valeurs » pour les probabilités de chacune des deux issues. Justifiez les choix.

## EXERCICE DES ÉVÈNEMENTS

On revient au lancer du Lego. Complétez le tableau ci-après en indiquant, pour chacun des évènements, le nombre de fois où il a été réalisé lors des 350 lancers, la fréquence de l'évènement et sa probabilité.

| **Évènement** | **Nombre de réalisations** | **Fréquence observée** | **Probabilité** |
|---|---|---|---|
| La brique tombe sur la base. | 102 | $\frac{102}{350}$ | 0,29 ou 29 % |
| La brique tombe sur un côté. | 74 | $\frac{74}{350}$ | 0,21 ou 21 % |
| La brique tombe sur les tenons. | 174 | $\frac{174}{350}$ | 0,5 ou 50 % |
| La brique tombe sur la base **ou** sur un côté. | | | |
| La brique tombe sur la base **et** sur un côté. | | | |
| La brique ne tombe pas sur un côté. | | | |
| La brique tombe sur la base **ou** un côté **ou** les tenons. | | | |

**Deux méthodes pour déterminer la probabilité de « *b* ou *c* » :**

Méthode . . . . . . . . . . . . . . : $\frac{102+74}{350} = \frac{176}{350} \simeq 0{,}50$

Méthode . . . . . . . . . . . . . . : $p + q = 0{,}29 + 0{,}21 = 0{,}50$

**Trois méthodes pour déterminer la probabilité du « contraire de *c* » :**

Méthode . . . . . . . . . . . . . . : $\frac{350-74}{350} = \frac{276}{350} \simeq 0{,}79$

Méthode . . . . . . . . . . . . . . : $p + r = 0{,}29 + 0{,}50 = 0{,}79$

Méthode . . . . . . . . . . . . . . : $100\% - q = 100\% - 21\% = 79\%$

**Propriété**

La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le constituent.

**Définition et notation**

L'événement contraire d'un événement $A$ est l'événement réalisé lorsque $A$ ne l'est pas. Il est noté $\overline{A}$.

**Propriété**

La probabilité de $\overline{A}$ est la différence entre 1 et la probabilité de $A$.

---

**Événements et ensembles**

Les mathématiciennes et mathématiciens associent à un événement d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues qui font que l'événement est réalisé. Cet ensemble est encore appelé abusivement « événement ». Voici des exemples :

- Pour un lancer de dé classique, l'événement « obtenir un nombre pair » est représenté par l'ensemble dont les éléments sont 2, 4 et 6 et qui est noté $\{2; 4; 6\}$ ou bien $\{4; 6; 2\}$ (l'ordre n'est pas important).
- Pour le lancer de Lego, l'événement « la brique tombe sur la base » est constitué de la seule issue *b*. L'ensemble associé est $\{b\}$. À l'événement « la brique tombe sur la base ou sur un côté » on associe l'ensemble $\{b; c\}$
- Pour une expérience aléatoire quelconque, à un événement certain on associe l'ensemble de toutes les issues.

Cet ensemble est appelé univers et est noté Ω. Pour le Lego, on a : $\Omega = \{b; c; t\}$.

La probabilité d'un événement $A$ est notée $P(A)$.

La propriété sur la probabilité d'un événement contraire s'écrit donc : $P(\overline{A}) = 1 - P(A)$.

## EXERCICE DES ÉVÈNEMENTS (SUITE)

Faites la liste de tous les événements possibles du lancer de brique et de leur probabilité (donnez les résultats sous forme d'ensembles et avec la notation *P(…)* ci-dessus).

## EXERCICE DE L'URNE MYSTÈRE

Une urne opaque contient des boules rouges, bleues, vertes et jaunes, indiscernables au toucher.

On tire au hasard une boule, puis on la remet dans l'urne. On réalise l'expérience 1 000 fois, en remettant la boule tirée dans l'urne après chaque tirage, puis on continue jusqu'à 5 000 tirages, et jusqu'à 10 000 tirages. Voici les résultats.

| | **1 000 tirages** | **5 000 tirages** | **10 000 tirages** |
|---|---|---|---|
| **Nombre de boules rouges tirées** | 163 | 760 | 1 508 |
| **Nombre de boules bleues tirées** | 244 | 1 249 | 2 476 |
| **Nombre de boules vertes tirées** | 292 | 1 502 | 2 982 |
| **Nombre de boules jaunes tirées** | 301 | 1 489 | 3 034 |

On choisit un modèle à quatre issues notées $r$, $b$, $v$, $j$ (notations naturelles).

**1.** Proposez une « bonne valeur » pour les probabilités $P(\{r\})$, $P(\{b\})$, $P(\{v\})$ et $P(\{j\})$ des quatre issues.

**2.** Avec le modèle choisi à la question 1, quelles sont les valeurs de $P(\{r\ ;\ j\})$, $P\left(\overline{\{b\}}\right)$ et $P\left(\overline{\{b ; v\}}\right)$ ?

---

**Solutions possibles de l'exercice de l'urne mystère**

**1.** On choisit comme probabilités des valeurs approchées des fréquences d'apparition sur 10 000 lancers car c'est le plus grand nombre de lancers dont on dispose :

$$P(\{r\}) = 0{,}15 \qquad P(\{b\}) = 0{,}25 \qquad P(\{v\}) = 0{,}30 \qquad P(\{j\}) = 0{,}30.$$

Ces choix sont cohérents car $0{,}15 + 0{,}25 + 0{,}30 + 0{,}30 = 1$.

**2.** La probabilité d'un événement est la somme des probabilités de ses issues :

$$P(\{r ; j\}) = P(\{r\}) + P(\{j\}) = 0{,}15 + 0{,}30 = 0{,}45.$$

$$P\left(\overline{\{b\}}\right) = 1 - P(\{b\}) = 1 - 0{,}25 = 075$$

ou bien : $P\left(\overline{\{b\}}\right) = P(\{r\ ;\ v\ ;\ j\}) = P(\{r\}) + P(\{v\}) + P(\{j\}) = 0{,}15 + 0{,}30 + 0{,}30 = 0{,}75.$

$$P\left(\overline{\{b ; v\}}\right) = 1 - P(\{b\ ;\ v\}) = 1 - (0{,}25 + 0{,}30) = 0{,}45$$

ou bien : $P\left(\overline{\{b ; v\}}\right) = P(\{r\ ;\ j\}) = 0{,}45.$

---

## Deux modèles du lancer d'une pièce de 1 €

On considère l'expérience aléatoire qui consiste à lancer en l'air une pièce de 1 € et observer sa position une fois retombée. Nous choisissons deux issues, *pile* et *face*, et notons *p* et *q* leurs probabilités. Il y a deux manières de choisir $p$ et $q$.

pile face

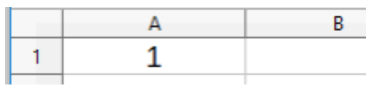
**Modèle 1 : à partir de fréquences observées**
On a effectué « en vrai » 250 lancers de cette pièce. On a obtenu 131 piles et 119 faces. La fréquence de pile observée de 0,524.

On peut alors choisir $p = 0{,}52$ puis $q = 0{,}48$ pour que la somme des deux probabilités égale 1.

**Modèle 2 : à partir de considérations de symétries**
Les motifs côté pile et côté face sont très légers. On décide de négliger leur influence sur les chances de tomber d'un côté ou de l'autre. On choisit alors $p = 0{,}5$ et $q = 0{,}5$ (issues **équiprobables**).

**Compatibilité de l'hypothèse d'équiprobabilité avec les 250 lancers réels (simulation avec un tableur)**
Pour savoir si l'hypothèse d'équiprobabilité est compatible avec les 131 piles et 119 faces obtenus « en vrai », on simule plusieurs fois 250 lancers d'une pièce équilibrée avec un tableur.

On saisit **=ALEA.ENTRE.BORNES(0 ;1)** dans la cellule A1. La cellule A1 affiche alors 1 avec probabilité $\frac{1}{2}$ et 0 avec probabilité $\frac{1}{2}$. En associant pile à 1 et face à 0, on a simulé le lancer d'une pièce équilibrée.




Exemple où 1 s'affiche

Ensuite, on recopie la cellule A1 vers le bas jusqu'à la ligne 250. Dans les cellules A1 à A250, on a simulé 250 lancers. Pour connaître le nombre de 1 parmi les cellules A1 à A250, on saisit **=NB.SI(A1 ; A250 ; 1)** dans une cellule vide.

En répétant plusieurs fois cette simulation de 250 lancers, on a constaté qu'il était tout à fait possible d'obtenir 131 piles et 119 faces. Donc les résultats des 250 vrais lancers sont compatibles avec des probabilités de $\frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2}$.

## Exercice de simulation

On souhaite avoir une idée du nombre de 1, de 2, de 3, de 4, de 5 et de 6 qu'il est possible d'obtenir quand on lance 600 fois un dé classique équilibré. Plutôt que d'effectuer plusieurs séries de 600 lancers réels, vous allez simuler cela avec un tableur.

**1.** À l'aide d'un tableur, simulez au moins 10 fois 600 lancers d'un dé équilibré en notant à chaque fois le nombre de 1, de 2, de 3, de 4, de 5 et de 6 obtenus.

*<u>Aide tableur</u> : **=ALEA.ENTRE.BORNE(n;m)** renvoie un nombre entier au hasard entre n et m avec équiprobabilité.*
***=NB.SI(plage de données;x)** renvoie le nombre de cellules d'une plage de données dont la valeur vaut x.*
*Le raccourci clavier **Ctrl+Maj+F9** permet d'actualiser les données, c'est-à-dire de simuler de nouveaux tirages.*

**2.** Remplissez le tableau ci-dessous.

| | **1** | **2** | **3** | **4** | **5** | **6** |
|---|---|---|---|---|---|---|
| Nombre minimal d'apparition au cours d'une simulation de 600 lancers. | | | | | | |
| Nombre maximal d'apparition au cours d'une simulation de 600 lancers. | | | | | | |
| Fréquence minimale observée au cours d'une simulation de 600 lancers (en %). | | | | | | |
| Fréquence maximale observée au cours d'une simulation de 600 lancers (en %). | | | | | | |

## Exercice de Delphine et Aminata

Dans le porte-monnaie de Delphine, il y a 3 pièces de 5 centimes, 2 pièces de 10 centimes et 1 pièce de 20 centimes. Une pièce tombe du porte-monnaie et Delphine la donne à sa fille Aminata.

On considère les trois événements suivants.

$A$ : « Aminata reçoit 5 centimes ou 10 centimes. »
$B$ : « La pièce reçue ne suffit pas à Aminata pour acheter un bonbon à 10 centimes. »
$C$ : « La pièce reçue suffit à Aminata pour acheter un bonbon à 10 centimes. »

**1.** On choisit un premier modèle à six issues équiprobables notées $c_1$, $c_2$, $c_3$, $d_1$, $d_2$, $v$ (où $c$, $d$, $v$ signifient cinq, dix et vingt).
Avec ce modèle, écrivez $A$, $B$ et $C$ sous forme d'ensemble, puis déterminez $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

**2.** On choisit un deuxième modèle à trois issues notées $c$, $d$ et $v$. Proposez de bonnes valeurs pour les probabilités de ces trois issues.
Avec ce modèle, écrivez $A$, $B$ et $C$ sous forme d'ensemble, puis déterminez $P(A)$, $P(B)$ et $P(C)$.

EXERCICES DE PROBABILITÉS

**Exercice 1**

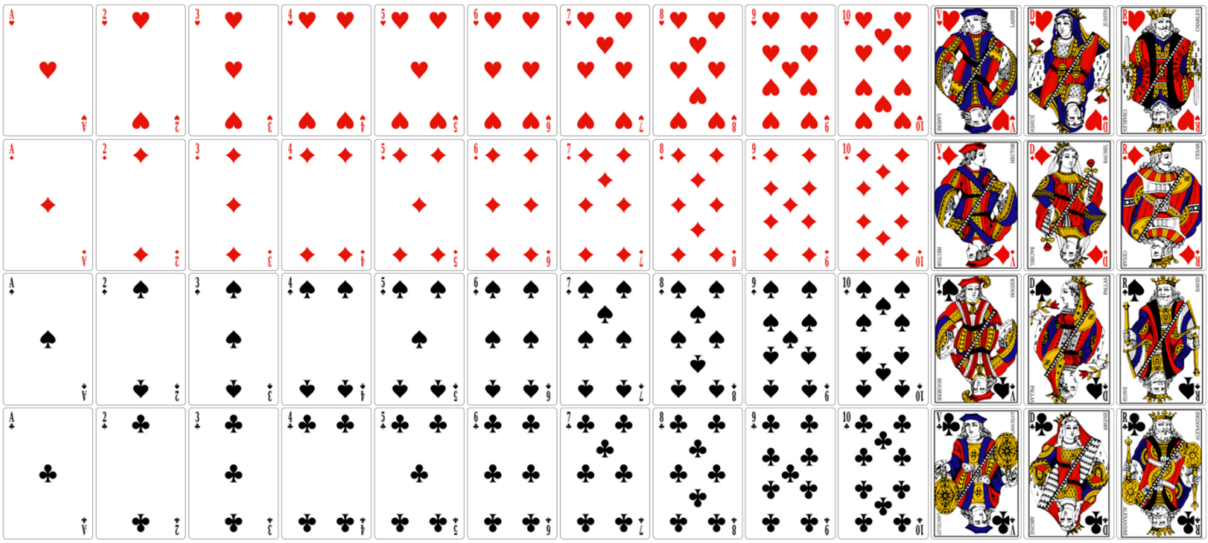
On jette un dé équilibré et on choisit comme univers : Ω = {1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 5 ; 6}.
On note *S* l'événement « Le dessin obtenu sur le dé possède exactement deux axes de symétrie. »

Écrivez *S* sous forme d'ensemble, puis proposez une bonne valeur pour *P*(*S*).

**Exercice 2**

Voici un jeu français de 52 cartes.

Sur la 1re ligne, il y a les 13 cœurs. Ce sont des cartes rouges.
Sur la 2e ligne, il y a les 13 carreaux. Ce sont des cartes rouges.
Sur la 3e ligne, il y a les 13 piques. Ce sont des cartes noires.
Sur la 4e ligne, il y a les 13 trèfles. Ce sont des cartes noires.



On tire une carte au hasard dans le jeu et on considère les événements suivants :

***V* : « tirer un valet » ; *T* : « tirer un trèfle » ; *R* : « tirer une carte rouge » ;**
**« *V* ou *T* » ; « *V* et *T* » ; « *R* ou *T* » ; « *R* et *T* » ; « ni *V* ni *T* ».**

**1.** Pour cette expérience aléatoire, on choisit un premier modèle avec 52 issues équiprobables : les 52 cartes.
Avec ce modèle, quelles sont les probabilités des événements précédents ?

**2.** On choisit maintenant un second modèle avec 4 issues équiprobables : cœur, carreau, pique, trèfle.
Avec ce modèle, on peut déterminer les probabilités de certains des événements précédents : lesquels ?

**Exercice 3**

La fonction Python `randint` peut être utilisée à condition de l'importer à partir de la bibliothèque `random`.
Elle retourne aléatoirement un des nombres entiers compris entre le premier et le second argument, avec équiprobabilité.

Que peut-il s'afficher quand on exécute le programme Python ci-après et avec quelle probabilité ?

```
from random import randint
if randint(-2, 2) > 0:
    print("gagné")
else:
    print("perdu")
```