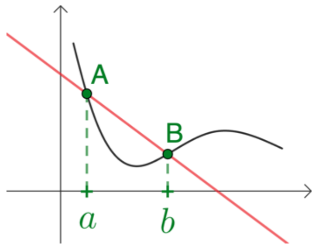
Nombre dérivé

INTRODUCTION

Dans le chapitre 3, nous avons étudié le <u>taux de variation</u> qui est la <u>vitesse d'accroissement moyenne</u> d'une fonction entre deux instants distincts.

On rappelle que le taux de variation d'une fonction f entre deux nombres a et b est donné par…



… la formule $\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$.

… le coefficient directeur de la droite qui coupe la courbe de f aux points d'abscisses a et b (en rouge sur la figure ci-contre).

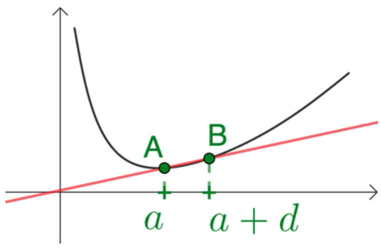
Dans le présent chapitre, on s'intéresse au <u>nombre dérivé</u> qui est la <u>vitesse d'accroissement instantanée</u> d'une fonction à un instant donné.

<u>Remarque</u> : Pour déterminer la vitesse d'accroissement de la fonction f en a, on ne peut pas calculer le taux de variation entre a et a… En effet, la formule donnerait $\frac{f(a)-f(a)}{a-a} = \frac{0}{0}$, ce qui n'aurait aucun sens car on ne peut pas diviser par zéro !

NOMBRE DÉRIVÉ ET VARIATION INSTANTANÉE

On appelle <u>nombre dérivé de f en a</u> la vitesse d'accroissement de la quantité $f(x)$ lorsque $x = a$.
On note ce nombre $f'(a)$, ce qui se dit « f prime de a ».

On va s'approcher de la valeur de $f'(a)$ en calculant le taux de variation de f entre a et un nombre très proche de a. Il suffit pour cela de choisir un nombre d très proche de 0 et de calculer le taux de variation de f entre a et $a + d$.



Lorsqu'on fait tendre la valeur de d vers 0, on constate que le taux de variation de f entre a et $a + d$ se rapproche d'une valeur limite.

<u>Le nombre dérivé $f'(a)$ est égal à cette valeur limite.</u>

<u>Exemple</u> : On considère $f(x) = x^2$, $a = 3$ et…

… $d = 0{,}1$ *Le taux de variation de f entre 3 et $3{,}1$ est :* $\frac{f(3{,}1)-f(3)}{3{,}1-3} = \frac{3{,}1^2-3^2}{0{,}1} = \frac{9{,}61-9}{0{,}1} = \frac{0{,}61}{0{,}1} = \mathbf{6{,}1}$

… $d = 0{,}01$. *Le taux de variation de f entre 3 et $3{,}01$ est :* $\frac{f(3{,}01)-f(3)}{3{,}01-3} = \frac{3{,}01^2-3^2}{0{,}01} = \frac{9{,}0601-9}{0{,}01} = \frac{0{,}0601}{0{,}01} = \mathbf{6{,}01}$

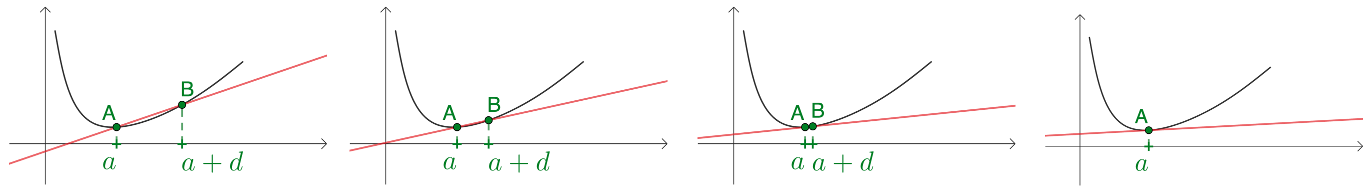
… $d = 0{,}001$. *Le taux de variation de f entre 3 et $3{,}001$ est :* $\frac{f(3{,}001)-f(3)}{3{,}001-3} = \frac{3{,}001^2-3^2}{0{,}001} = \frac{9{,}006001-9}{0{,}001} = \frac{0{,}006001}{0{,}001} = \mathbf{6{,}001}$

On observe que le taux de variation de f entre 3 et $3 + d$ se rapproche de 6 lorsqu'on fait tendre d vers 0. On peut donc conjecturer que $f'(3) = 6$. Pour le prouver, on calcule le taux de variation de f entre 3 et $3 + d$, pour toutes les valeurs possibles de d :

$$\frac{f(3+d)-f(3)}{3+d-3} = \frac{(3+d)^2-3^2}{d} = \frac{9+6d+d^2-9}{d} = \frac{6d+d^2}{d} = \mathbf{6+d}$$

Le taux de variation de f entre 3 et $3 + d$ est donc égal à $6 + d$. Or, $6 + d$ se rapproche de 6 lorsqu'on fait tendre la valeur de d vers 0. On peut donc conclure que $f'(3) = 6$.

NOMBRE DÉRIVÉ ET TANGENTE

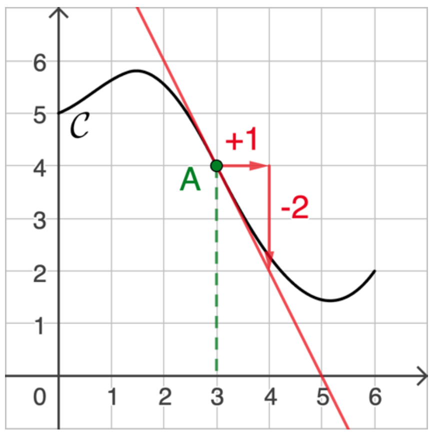


Lorsqu'on fait tendre la valeur de d vers 0, le point de la courbe de f d'abscisse $a+d$ (le point B) se rapproche du point d'abscisse a (le point A). On observe alors que la droite (AB) se rapproche d'une position limite : celle de la droite <u>tangente à la courbe de f au point d'abscisse a</u> (dernière figure).

Or, le nombre dérivé $f'(a)$ est la valeur limite du taux de variation de f entre a et $a+d$ lorsque d se rapproche de 0. C'est donc la valeur limite du coefficient directeur de la droite (AB) lorsque B se rapproche de A. On en déduit la propriété suivante :

Propriété Le nombre dérivé $f'(a)$ est égal au coefficient directeur de la droite tangente à la courbe de f au point d'abscisse a.

<u>Exemple</u> : On donne la courbe de la fonction f définie sur $[0\,;6]$ et la tangente à la courbe de f au point d'abscisse 3, notée T.



1. Déterminer graphiquement le nombre dérivé de f en 3.

D'après l'énoncé, la tangente au point de la courbe de f d'abscisse 3 est la droite T. On lit graphiquement que son coefficient directeur est -2.

Donc le nombre dérivé de f en 3 est -2.

$$f'(3) = -2$$

2. Déterminer une équation de la droite tangente T.

Puisque le coefficient directeur de T est -2, une équation de T est de la forme :

$$y = -2x + q$$

Où q est l'ordonnée à l'origine de T.

Pour déterminer la valeur de b, on utilise le fait que les coordonnées du point $A(3;4)$ vérifient l'équation de T puisque A appartient à T. On a donc :

$$\begin{aligned} y_A &= -2 \times x_A + q \\ 4 &= -2 \times 3 + q \\ 4 &= -6 + q \\ 4 + 6 &= q \\ q &= 10 \end{aligned}$$

Une équation de la droite T est donc donnée par :

$$y = -2x + 10$$