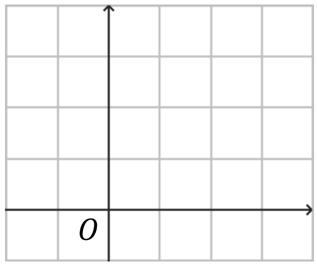
EXERCICE DE LA PLUS PETITE LONGUEUR



Dans un plan muni d'un repère d'origine O, on considère les points $A(0\,;3)$ et $B(2\,;0)$.

Parmi toutes les longueurs OM où M est un point de la droite (AB), quelle est la plus petite ? Commencez par faire une figure ci-contre.

On a démontré que la droite (AB) a pour équation $y = 3 - 1{,}5x$.
Donc pour tout nombre x, le point M d'abscisse x de la droite (AB) a pour ordonnée $3 - 1{,}5x$.
Donc la distance entre O et M est $f(x) = \sqrt{x^2 + (3 - 1{,}5x)^2}$.

Attention ! Pour trouver le minimum de f, on ne peut pas se contenter d'une courbe ou d'un tableau de valeurs car il s'agit d'un exercice de géométrie abstraite. La fonction f est une <u>fonction théorique</u> : nous devons faire une démonstration dans le cadre des mathématiques théoriques.

EXERCICE DE LA PLUS PETITE LONGUEUR (SUITE)

Plus un nombre est grand, plus sa racine carrée est grande. Et plus un nombre est petit, plus sa racine carrée est petite. Donc il suffit de trouver le minimum de la fonction g définie par $g(x) = x^2 + (3 - 1{,}5x)^2$ pour tout x.

1. Démontrez que $g(x) = 3{,}25x^2 - 9x + 9$ pour tout x.

2. Démontrez que $g(x) = \frac{(6{,}5x-9)^2+36}{13}$ pour tout x.

3. Démontrez que le minimum de g est $\frac{36}{13}$.

4. Quelle est la plus petite longueur parmi toutes les longueurs OM où M est un point de la droite (AB) ?

Opérations sur les inégalités
a, b et c sont trois nombres tels que $a \geq b$. Alors :

- $a + c \geq b + c$
- $a - c \geq b - c$
- $c \times a \geq c \times b$ et $\frac{a}{c} \geq \frac{b}{c}$ si $c > 0$
- $c \times a \leq c \times b$ et $\frac{a}{c} \leq \frac{b}{c}$ si $c < 0$

On a des résultats similaires avec des inégalités strictes.

<u>Exemple</u>: détermination du minimum de la fonction $h : x \mapsto 2 + 3(x-4)^2$
Pour tout x, on a :

$$(x-4)^2 \geq 0 \quad \text{(un carré est toujours positif ou nul)}$$

$$3(x-4)^2 \geq 0 \quad \text{(on multiplie par 3, nombre positif)}$$

$$2 + 3(x-4)^2 \geq 2 \quad \text{(on ajoute 2)}$$

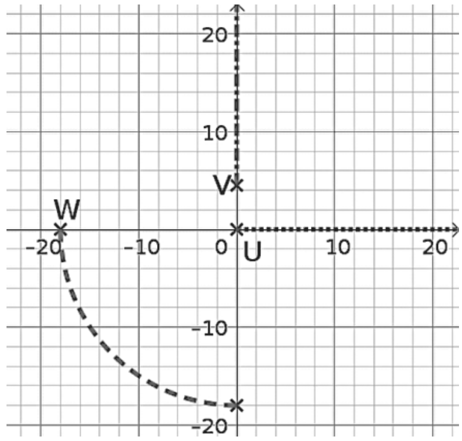
Donc pour tout x, on a donc $h(x) \geq 2$.

De plus, $h(4) = 2 + (4-4)^2 = 2$.

Donc le minimum de la fonction h est 2 et il est atteint en $x = 4$.

EXERCICE DES TROIS ROBOTS

Trois robots miniatures *U*, *V* et *W* se déplacent sur une surface plane munie d'un repère orthonormé d'origine *O* (unité de longueur : 1 mètre).



Au départ, le robot *U* se trouve en *O*, le robot *V* sur le point de coordonnées (0 ; 4,5) et le robot *W* sur le point de coordonnées (–18 ; 0).

À *t* = 0, les trois robots se mettent en marche :

- *U* se déplace vers la droite, sur l'axe des abscisses, à la vitesse constante de 0,045 m/s ;
- *V* se déplace vers le haut, sur l'axe des ordonnées, à la vitesse constante de 0,02 m/s ;
- *W* fait des allers-retours sur le quart de cercle de centre *O* et de rayon 18 compris entre les points de coordonnées (–18 ; 0) et (0 ; –18), à la vitesse constante de 0,03 m/s.

Déterminez, suivant les valeurs de *t*, quel robot est le plus proche de *O*.

Lien entre l'exercice des trois robots et les fonctions théoriques

D'après la formule $d = v \times t$, les distances sont :

$$u(t) = 0{,}045t\,; \qquad v(t) = 4{,}5 + 0{,}02t\,; \qquad w(t) = 18 \qquad \text{pour tout } t \geq 0.$$

Ces formules ressemblent beaucoup à celles de l'exercice du téléchargement (vue plus tôt dans la partie 2) :

$$a(p) = 0{,}045p\,; \qquad b(p) = 4{,}5 + 0{,}02p\,; \qquad c(p) = 18 \qquad \text{pour tout poids de données } p \geq 0.$$

Les réponses à ces deux exercices pratiques sont similaires car elles se déduisent des résultats théoriques suivants. Soit les fonctions affines théoriques f, g et h définies par :

$$f(x) = 0{,}045x\,; \qquad g(x) = 4{,}5 + 0{,}02x\,; \qquad h(x) = 18 \qquad \text{pour tout } x \in \mathbb{R}.$$

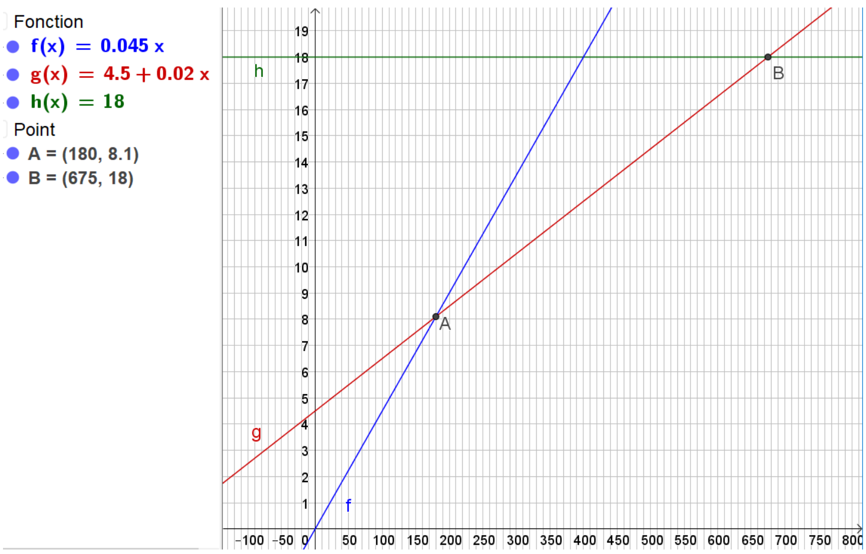
Alors :

1. $f(x) < g(x) < h(x)$ pour $x < 180$

2. $g(x) < f(x)$ et $g(x) < h(x)$ pour $180 < x < 675$

3. $h(x) < g(x) < f(x)$ pour $x > 675$

Pour démontrer ces résultats, il est pratique d'avoir les courbes ci-contre sous les yeux, mais attention, ces courbes permettent seulement de faire des conjectures car les fonctions *f*, *g* et *h* sont théoriques.

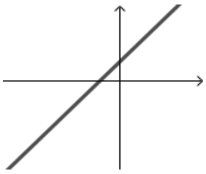


<u>Théorème : sens de variation des fonctions affines</u>

Soit p et q deux nombres avec $p \neq 0$ et soit f la fonction $f : x \mapsto px + q$.

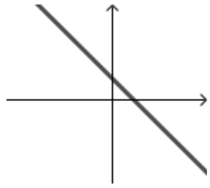
<u>1er cas</u> : $p > 0$

Alors la fonction f est croissante.



<u>2e cas</u> : $p < 0$

Alors la fonction f est décroissante.



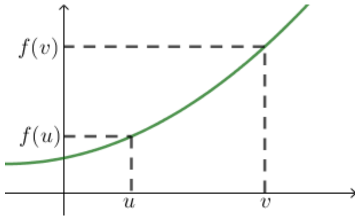
Caractérisation de la croissance ou de la décroissance d'une fonction

On considère une fonction f et I un intervalle. On suppose que pour tout x dans I, le nombre $f(x)$ est défini.

Pour que f soit croissante sur l'intervalle I, il faut et il suffit que pour tous les nombres u et v de I :

$$\text{si } u \leq v, \text{ alors } f(u) \leq f(v)$$

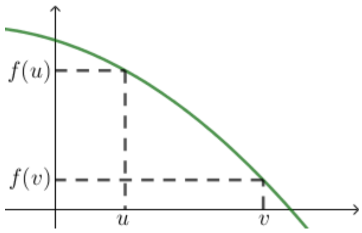
Une fonction croissante conserve le sens des inégalités.



Pour que f soit décroissante sur l'intervalle I, il faut et il suffit que pour tous les nombres u et v de I :

$$\text{si } u \leq v, \text{ alors } f(u) \geq f(v)$$

Une fonction décroissante inverse le sens des inégalités.



EXERCICE DES FONCTIONS g, h

Le but de l'exercice est de comparer $g(x) = 4{,}5 + 0{,}02x$ et $h(x) = 18$ pour tout x.

1. Résolvez l'équation $g(x) = 18$.

2. En utilisant le sens de variation de la fonction g, comparez $g(x)$ et 18 pour tout x.

EXERCICE DES FONCTIONS F, f, g

Le but de l'exercice est de comparer $f(x) = 0{,}045x$ et $g(x) = 4{,}5 + 0{,}02x$ pour tout x.

Comparer deux nombres c et d revient à étudier le signe de $d - c$.

N.B. : le signe d'un nombre peut être strictement positif ou bien strictement négatif ou bien nul.

On cherche donc le signe de $F(x) = g(x) - f(x)$ pour tout x.

1. Montrez que la fonction F est affine.

2. Résolvez l'équation $F(x) = 0$.

3. En utilisant le sens de variation de la fonction F, déterminez le signe de $F(x)$ pour tout x.

4. En utilisant la question **3**, comparez $f(x)$ et $g(x)$ pour tout x.

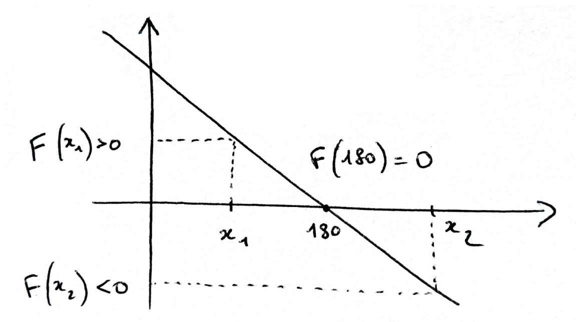
---

1. $F(x) = 4{,}5 + 0{,}02x - 0{,}045x = -0{,}025x + 4{,}5 = px + q$ avec $p = -0{,}025$ et $q = 4{,}5$

2. On a démontré que la seule solution de l'équation $F(x) = 0$ est 180.

3. On sait déjà que $F(180) = 0$.

La fonction F est décroissante car $p = -0{,}025 < 0$



<u>Cas $x < 180$</u> : Alors $F(x) > F(180)$.
Et comme $F(x) \neq 0$, le signe de $F(x)$ est positif.

<u>Cas $x > 180$</u> : Alors $F(x) < F(180)$.
Et comme $F(x) \neq 0$, le signe de $F(x)$ est négatif.

On peut résumer les résultats dans un tableau des signes :

x	$-\infty$	180	$-\infty$
Signe de $F(x)$	$+$	0	$-$

4. <u>Cas $x < 180$</u> Alors $F(x) > 0$, donc $g(x) - f(x) > 0$, donc $g(x) > f(x)$
<u>Cas $x > 180$</u> Alors $F(x) < 0$, donc $g(x) - f(x) < 0$, donc $g(x) < f(x)$

Exercice de synthèse sur les fonctions affines

Soit m la fonction associée au programme de calcul :

```
Multiplier par 3
Retirer 8
Soustraire le résultat obtenu au double du nombre de départ
```

1. La fonction m est-elle pratique ou théorique ?

2. Quelle est l'image de $\frac{1}{3}$ par m ?

3. Démontrez que $m(x) = -x + 8$ pour tout x.

4. La fonction m est-elle affine ? Est-elle linéaire ?

5. Quel est le sens de variation de m ?

6. Dressez le tableau des signes de $m(x)$.

7. Tracez la courbe représentative de m ci-dessous.