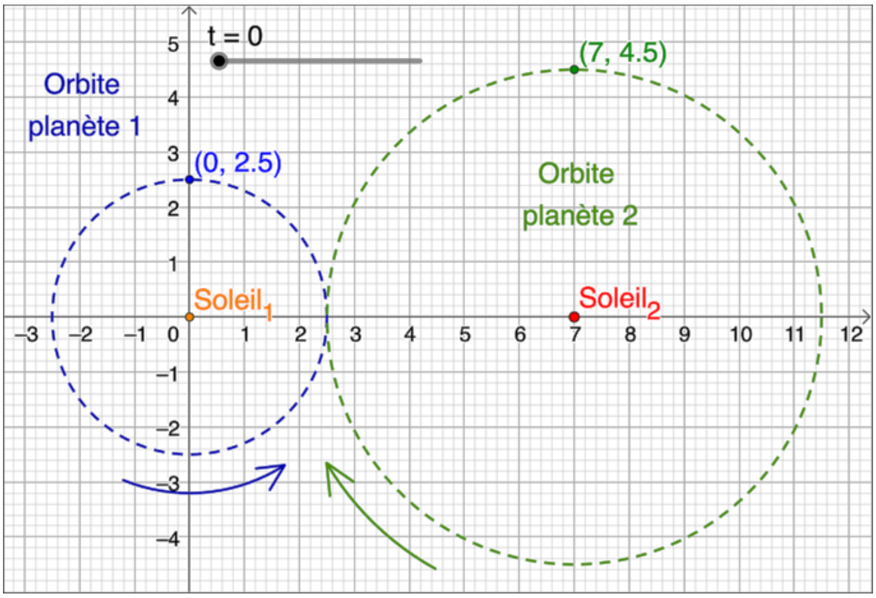
## Exercice de la fin du monde

Dans une galaxie très lointaine se trouvent deux soleils et deux planètes. Chaque planète suit un mouvement circulaire uniforme autour de « son » soleil.

Les habitants de la planète 1 voudraient savoir si les deux planètes vont entrer en collision un jour ou l'autre. Ils disposent des relevés des positions des planètes depuis les 10 derniers milliards de secondes.

Vous pouvez obtenir ces positions en faisant varier le curseur *t* entre 0 et 10 sur la page **huit.re/fin-du-monde** (l'unité de temps est le milliard de secondes).




On note $y_1$ et $y_2$ les ordonnées des planètes 1 et 2.

Une physicienne de la planète 1 a résolu le problème en étudiant l'évolution de $y_1$ et $y_2$ en fonction du temps. Elle a commencé par faire un tableau de quelques valeurs de $y_1$ en fonction de *t*, puis elle a représenté sur un graphique l'évolution de $y_1$ en fonction du temps, pour *t* allant de 0 à 15.

**Faites un tableau de valeurs et une courbe qu'elle aurait pu obtenir.**

---

## Exercice de la fin du monde (suite)

Un mathématicien prend connaissance de l'idée de la physicienne et la traduit en langage mathématique. Comme les ordonnées $y_1$ et $y_2$ dépendent du temps $t$, il existe deux fonctions $f_1$ et $f_1$ telles que $y_1 = f_1(t)$ et $y_2 = f_2(t)$.

Ces deux fonctions se notent aussi $f_1 : t \mapsto y_1$ et $f_2 : t \mapsto y_2$

**1.** Quelle est l'image de 0 par la fonction $f_1$ ?

**2.** Quelle est l'image de 6,3 par la fonction $f_1$?

**3.** Quelle est l'image de 3,15 par la fonction $f_1$?

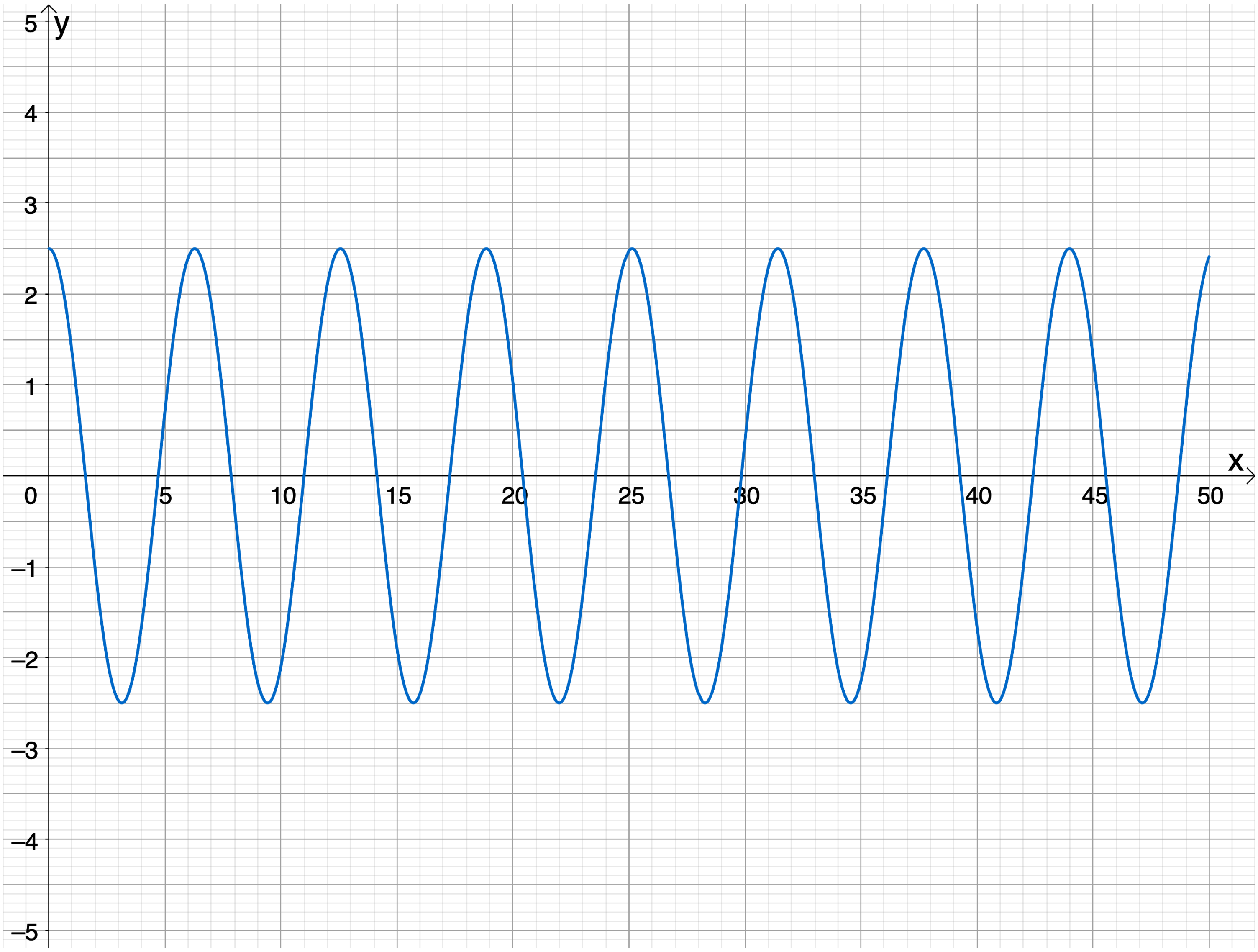
**4.** Quelle est la valeur de $f_2(0)$ ?

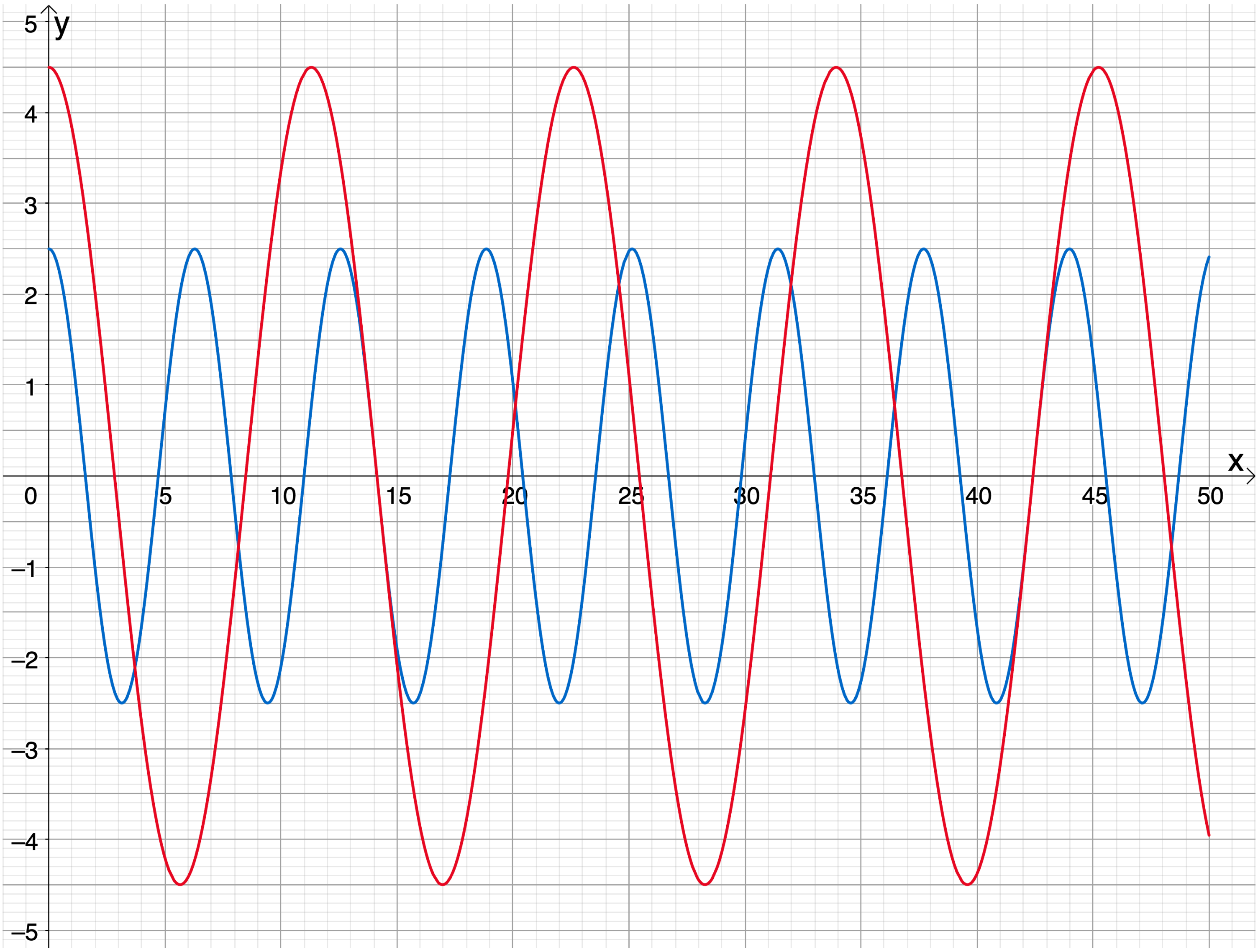
**5.** *(Question pour les plus rapides)* On considère la fonction $g_1 : t \mapsto x_1$ où $x_1$ est l'abscisse de la planète 1.
On sait que la planète 1 retourne à la même position tous les 6,3 milliards de secondes.
Traduisez cela à l'aide des fonctions $f_1$ et $g_1$.

---

## EXERCICE DE LA FIN DU MONDE (SUITE ET FIN)

Voici la courbe de la fonction $f_1$ entre $t = 0$ et $t = 50$, tracée à l'aide de GeoGebra.
Allez sur **huit.re/fin-du-monde** et tracez soigneusement, sur ce même graphique, la courbe de la fonction $f_2$ sur l'intervalle de temps $[0\,;50]$.




y
x
5
4
3
2
1
0
−1
−2
−3
−4
−5
5
10
15
20
25
30
35
40
45
50

*ATTENTION, CE BILAN COMPORTE UNE ERREUR. À VOUS DE LA CORRIGER !*

**Intervalles de nombres (exemple)**

L'intervalle$[0\,;3{,}15]$ est l'ensemble des nombres compris entre $0$ (inclus) et $3{,}15$ (inclus).

Par exemple, $2$ est compris entre $0$ et $3{,}15$. C'est donc <u>un élément de l'intervalle</u> $[0\,;3{,}15]$, on écrit :

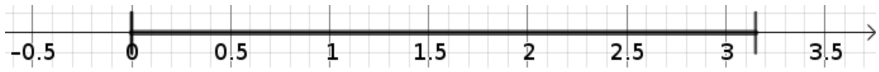
$$2 \in [0\,;3{,}15] \qquad \textit{(2 \underline{appartient} à } [0\,;3{,}15]\textit{)}$$

En revanche, $6{,}3$ n'est pas compris entre $0$ et $3{,}15$. Ce n'est donc pas un élément de cet intervalle, on écrit :

$$6{,}3 \notin [0\,;3{,}15] \qquad \textit{(2 \underline{n'appartient pas} à } [0\,;3{,}15]\textit{)}$$

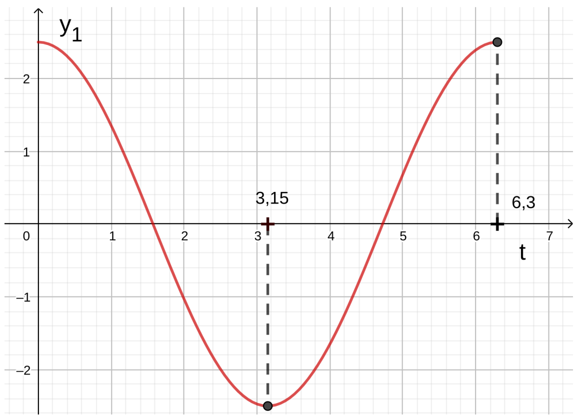
Les éléments de l'ensemble $[0\,;3{,}15]$ sont les nombres $x$ tels que $0 \leq x \leq 3{,}15$ où « $\leq$ » signifie *inférieur ou égal*.

On peut représenter l'intervalle $[0\,;3{,}15]$ par le segment ci-dessous :




**Variations de la fonction $f_1$ sur l'intervalle $[0\,;\ 6{,}3]$**

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de $f_1$ sur l'intervalle $[0\,;\ 6{,}3]$ :




La plus grande valeur de $y_1$ est $2{,}5$. On dit que $2{,}5$ est <u>le maximum de la fonction $f_1$ sur l'intervalle</u> $[0\,;\ 6{,}3]$.
Ce maximum est atteint en $t = 0$ et $t = 6{,}3$.

La plus petite valeur de $y_1$ est $-2{,}5$. On dit que $-2{,}5$ est <u>le minimum de la fonction $f_1$ sur l'intervalle</u> $[0\,;\ 6{,}3]$.
Ce minimum est atteint en $t = 3{,}15$.

Lorsque $t$ augmente de $0$ à $3{,}15$, l'ordonnée $y_1$ diminue.
On dit que la fonction $f_1$ <u>est décroissante sur l'intervalle</u> $[0\,;\ 3{,}15]$.

Lorsque $t$ augmente de $3{,}15$ à $6{,}3$, l'ordonnée $y_1$ augmente.
On dit que la fonction $f_1$ <u>est croissante sur l'intervalle</u> $[3{,}15\,;\ 6{,}3]$.

On résume les variations de la fonction $f_1$ dans un <u>tableau de variations</u>.

| $t$ | 0 | | 3,15 | | 6,3 |
|---|---|---|---|---|---|
| Variations de $f_1(t)$ | 2,5 | ↘ | -2,5 | ↗ | 2,5 |

**Définitions**

Une fonction $f$ est <u>croissante sur un intervalle</u> lorsque $f(x)$ augmente quand $x$ augmente en restant dans l'intervalle.

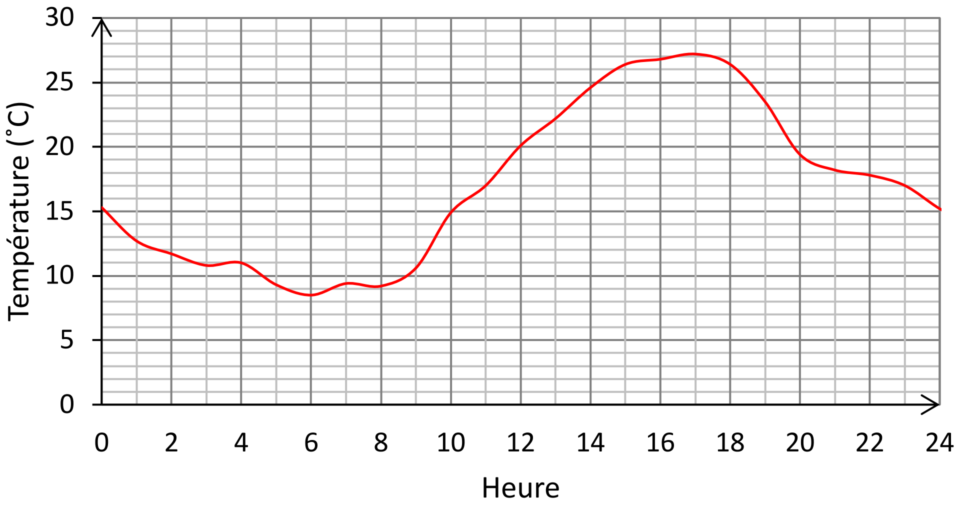
Une fonction $f$ est <u>décroissante sur un intervalle</u> lorsque $f(x)$ diminue quand $x$ ~~diminue~~ AUGMENTE en restant dans l'intervalle.

Une fonction $f$ est <u>monotone sur un intervalle</u> lorsqu'elle est croissante sur l'intervalle ou décroissante sur l'intervalle.

## Exercice des températures

Un site de météo fournit une courbe des températures à Dijon pour la journée du 9 octobre 2023.

Soit la fonction $f : H \mapsto T$ où $H$ est l'heure et $T$ la température en degré Celsius.




1. Quelle a été la température la plus élevée et à quelle heure a-t-elle été atteinte ? Que cela signifie-t-il pour la fonction $f$ ?
2. Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 ? Que cela signifie-t-il pour la fonction $f$ ?
3. Quelles sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 17 ? Que cela signifie-t-il pour la fonction $f$ ?
4. Dressez le tableau de variations de la fonction $f$.
5. (Question pour les rapides) À quelle heure de la journée la température descend-elle la plus vite ?
6. (Question pour les rapides) Quelle est la plus grande valeur possible de $f(H+1) - f(H)$ lorsque $H$ est compris entre 0 et 23 ?

---

**Résolution graphique d'équations et inéquations**

| Équation ou inéquation | $f(H) = 12$ | $f(H) = 5$ | $f(H) \geq 17$ | $f(H) \leq 10$ |
|---|---|---|---|---|
| Solutions | 1,6 et 9,3 | Pas de solution | L'ensemble des nombres compris entre 11 et 23, 11 et 23 inclus. | L'ensemble des nombres compris entre 4,6 et 8,7, 5,5 et 8,8 inclus. |
| Ensemble des solutions, noté $\mathcal{S}$ | $\mathcal{S} = \{10{,}4\ ;\ 20{,}8\}$ | $\mathcal{S} = \emptyset$ | $\mathcal{S} = [11\ ;\ 23]$ | $\mathcal{S} = [4{,}6\ ;\ 8{,}7]$ |

**Ensembles finis (exemples)**

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé <u>ensemble vide</u> : on le note $\emptyset$.

L'ensemble dont le seul élément est 1 est noté $\{1\}$.

L'ensemble dont les éléments sont 2 et 4 et 6 est noté $\{2\ ;\ 4\}$ ou bien $\{4\ ;\ 2\}$.

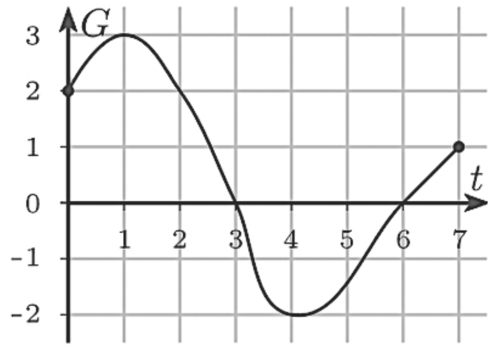
Etc.

---

## EXERCICE DE LA FONCTION DÉFINIE PAR UNE COURBE

$G$ est une grandeur qui dépend du temps $t$. Voici ci-contre la courbe de la fonction $f : t \mapsto G$.

**Compléter les phrases suivantes et le tableau de variations.**




L'image de 3 par $f$ est . . . . .

Le nombre . . . . . est un antécédent de 1 par $f$.

Le minimum de $f$ est . . . . . Ce minimum est atteint en . . . . .

L'ensemble des solutions de l'équation $f(t) = 0$ est . . . . . . . . . . . . . . .

L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \leq 1$ est . . . . . . . . . . . . . . .

| $t$ | |
|---|---|
| Variations de $f(t)$ | |

## Exercice du pluviomètre

Monsieur Legoff, habitant du nord du Finistère, a installé un pluviomètre dans son jardin. Chaque jour, il mesure la hauteur d'eau dans son pluviomètre, puis il le vide. Il a consigné dans un tableau chaque hauteur d'eau relevée du 1er au 15 mars 2019.

| **Date** | **1er mars** | **2 mars** | **3 mars** | **4 mars** | **5 mars** | **6 mars** | **7 mars** | **8 mars** | **9 mars** | **10 mars** | **11 mars** | **12 mars** | **13 mars** | **14 mars** | **15 mars** |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Hauteur d'eau (mm) | 0 | 0 | 0 | 0 | 38 | 76 | 127 | 89 | 38 | 117 | 129 | 107 | 89 | 0 | 72 |

Monsieur Legoff a remarqué que sa cave était inondée lorsque, sur une journée, la hauteur d'eau de son pluviomètre atteignait 142 mm.

Il doit s'absenter du 16 au 21 mars. Avant de partir, il consulte le site de la météo locale et obtient les données des tableaux ci-après.

**Monsieur Legoff doit-il s'inquiéter pour sa cave ?**

| **Relevés météo** | | | |
|---|---|---|---|
| **Dates** | **Pluviométrie ($L/m^2$)** | **Dates** | **Pluviométrie ($L/m^2$)** |
| 1er mars | 0 | 9 mars | 0,2 |
| 2 mars | 0 | 10 mars | 6 |
| 3 mars | 0 | 11 mars | 8 |
| 4 mars | 0 | 12 mars | 4,6 |
| 5 mars | 0,2 | 13 mars | 2,6 |
| 6 mars | 1,6 | 14 mars | 0 |
| 7 mars | 7,5 | 15 mars | 1,4 |
| 8 mars | 2,6 | | |

| **Prévisions météo** | |
|---|---|
| **Dates** | **Pluviométrie ($L/m^2$)** |
| 16 mars | 3,2 |
| 17 mars | 4 |
| 18 mars | 3,4 |
| 19 mars | 7 |
| 20 mars | 1,2 |

---

**Bilan**

Comme les grandeurs *P* et *H* ne sont pas proportionnelles, les fonctions $f$ et $g$ ne sont pas linéaires

Quand *H* ou *P* augmente, l'autre grandeur augmente aussi : donc les fonctions $f$ et $g$ sont croissantes.

Sans hypothèse supplémentaire sur la forme du pluviomètre, on ne peut pas répondre de manière satisfaisante.

Mais si le pluviomètre a approximativement la forme d'un cône comme sur la photo, alors les courbes sont « régulières » et on peut alors relier les points.


Sous cette hypothèse, d'après la courbe de gauche, l'image de 11 par $f$ est . . . . . , donc la cave . . . . . . . . . . inondée. Et d'après la courbe de droite, le seul antécédent de 11 par $g$ est . . . . . , donc la cave . . . . . . . . . . inondée.

De plus, les prévisions météo six jours à l'avance ne sont pas fiables et la méthode par prolongement de courbe n'est pas très précise. Donc M. Legoff devrait s'inquiéter.

<u>Remarque</u> : Les données de l'exercice correspondent à un pluviomètre conique tel que :

$$H = f(P) = 64{,}6\sqrt[3]{P} \text{ et } P = g(H) = \left(\frac{H}{64{,}6}\right)^3$$

## EXERCICE DU TEST AUTO

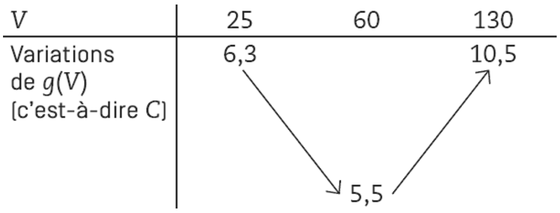
Un journaliste travaillant pour un magazine automobile teste la consommation d'essence d'une voiture à différentes vitesses moyennes comprises entre 25 km/h et 130 km/h. La consommation $C$ se mesure en litres consommés pour 100 kilomètres. Il obtient les résultats suivants.

| $V$ (km/h) | 70 | 130 | 60 | 110 | 50 | 90 | 25 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $C$ ($L$/100 km) | 5,9 | 10,5 | 5,5 | 8,1 | 5,2 | 6,3 | 6,3 |

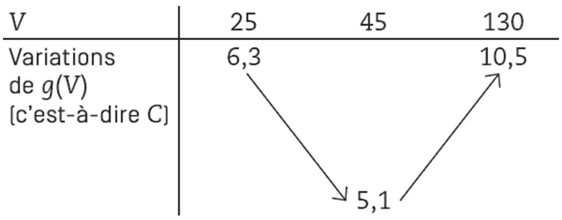
Soient les fonctions $f : C \mapsto V$ et $g : V \mapsto C$.

**1.** Déterminez l'image de 90 par $g$ et l'image de 6,3 par $f$.

**2.** Le tableau ci-dessous pourrait-il être un tableau de variations de la fonction $g$ ? Si oui, est-ce le seul possible ?




**3.** Le tableau ci-dessous pourrait-il être un tableau de variations de la fonction $g$ ? Si oui, est-ce le seul possible ?




**4.** On fait l'hypothèse qu'à partir de 43 km/h, plus la vitesse est grande, plus la consommation est grande.
Traduisez cette hypothèse en termes de variations de la fonction $g$. Que peut-on alors dire de $g(100)$ ?

**5.** On fait l'hypothèse que jusqu'à 43 km/h, plus la vitesse est grande, plus la consommation est petite.
Traduisez cette hypothèse en termes de variations de la fonction $g$. Que peut-on alors dire de $g(40)$ ?

**6.** Dressez un tableau de variations cohérent avec les valeurs de l'énoncé et avec les hypothèses des questions 3 et 4.

**7.** (Question pour les rapides) On fait l'hypothèse qu'entre 90 km/h et 110km/h, l'accroissement de la consommation est proportionnel à l'accroissement de la vitesse. Donnez une estimation de la consommation de carburant à 97 km/h.