

Exercice de la fin du monde

Partie	
Séquence	
Exercice	1

Dans une galaxie très lointaine se trouvent deux soleils et deux planètes. Chaque planète suit un mouvement circulaire uniforme autour de « son » soleil.

Les habitants de la planète 1 voudraient savoir si les deux planètes vont entrer en collision un jour ou l'autre. Ils disposent des relevés des positions des planètes depuis les 10 derniers milliards de secondes.

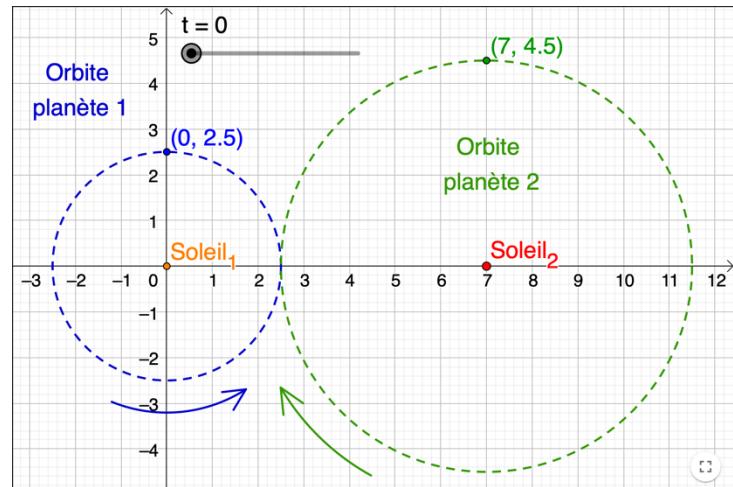
Vous pouvez obtenir ces positions en faisant varier le curseur t entre 0 et 10 sur la page huit.re/fin-du-monde (l'unité de temps est le milliard de secondes).

On note y_1 et y_2 les ordonnées des planètes 1 et 2.

Une physicienne de la planète 1 a résolu le problème en étudiant l'évolution de y_1 et y_2 en fonction du temps.

Elle a commencé par faire un tableau de quelques valeurs de y_1 en fonction de t , puis elle a représenté sur un graphique l'évolution de y_1 en fonction du temps, pour t allant de 0 à 15.

Faites un tableau de valeurs et une courbe qu'elle aurait pu obtenir.



Exercice de la fin du monde (suite)

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	2

Une mathématicienne prend connaissance de l'idée de la physicienne et la traduit en langage mathématique.

Comme les ordonnées y_1 et y_2 dépendent du temps t , il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que :

$$y_1 = f_1(t) \quad \text{et} \quad y_2 = f_2(t)$$

Ces deux fonctions se notent aussi :

$$f_1 : t \mapsto y_1 \quad \text{et} \quad f_2 : t \mapsto y_2$$

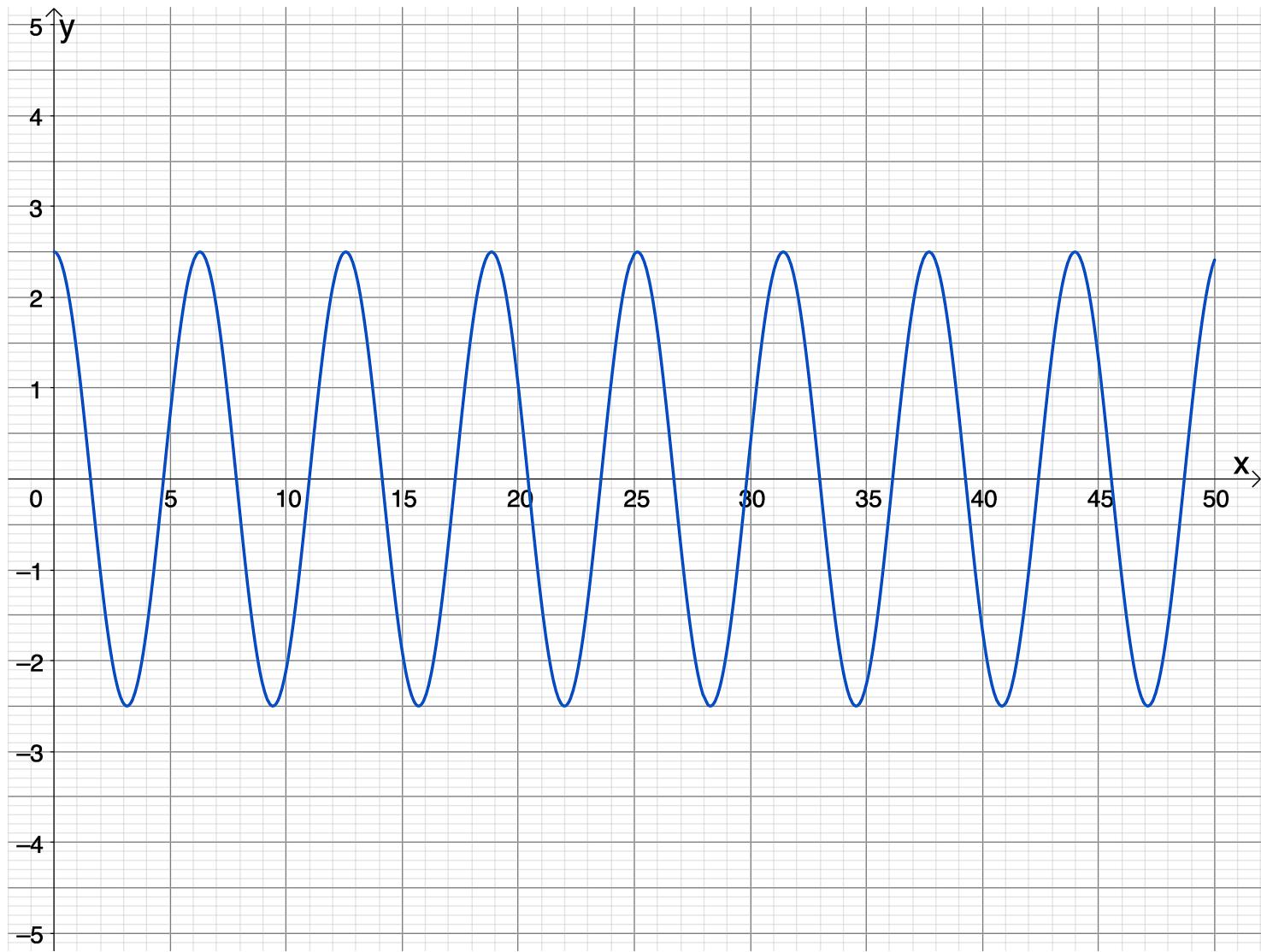
1. Quelle est l'image de 0 par la fonction f_1 ?
2. Quelle est l'image de 6,3 par la fonction f_1 ?
3. Quelle est l'image de 3,15 par la fonction f_1 ?
4. Quelle est la valeur de $f_2(0)$?
5. (Question pour les plus rapides) On considère la fonction $g_1 : t \mapsto x_1$ où x_1 est l'abscisse de la planète 1. On sait que la planète 1 retourne à la même position tous les 6,3 milliards de secondes. Traduisez cette information à l'aide des fonctions f_1 et g_1 .

Exercice de la fin du monde (suite et fin)

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	3

Voici la courbe de la fonction f_1 entre $t = 0$ et $t = 50$, tracée à l'aide de GeoGebra.

Allez sur huit.re/fin-du-monde et tracez soigneusement, sur ce même graphique, la courbe de la fonction f_2 sur l'intervalle de temps $[0 ; 50]$.



Aide (pour les absents) :

La fonction f_2 donne la valeur de y_2 (ordonnée de la planète 2) en fonction du temps t .

Tracer la courbe de f_2 , c'est donc tracer la courbe de y_2 en fonction de t , comme vous avez fait pour y_1 .

Pour obtenir une belle courbe, on va placer un point pour $t = 0$, puis $t = 1$, puis $t = 2$, etc.

Pour tracer la courbe pour t supérieur à 10, on remarque que la planète 2 fait la moitié d'un tour en 5,65 milliards de secondes, donc un tour complet en 11,3 milliards de secondes.

On a donc $f_2(0) = f_2(11,3) = 4,5$. On peut donc placer un point pour $t = 11,3$ et $y_2 = 4,5$.

Pour $t = 12$, la planète sera à la même position que pour $t = 0,7$ (car $0,7 + 11,3 = 12$). On place donc le curseur à $t = 0,7$ et on obtient la valeur de y_2 pour $t = 12$!

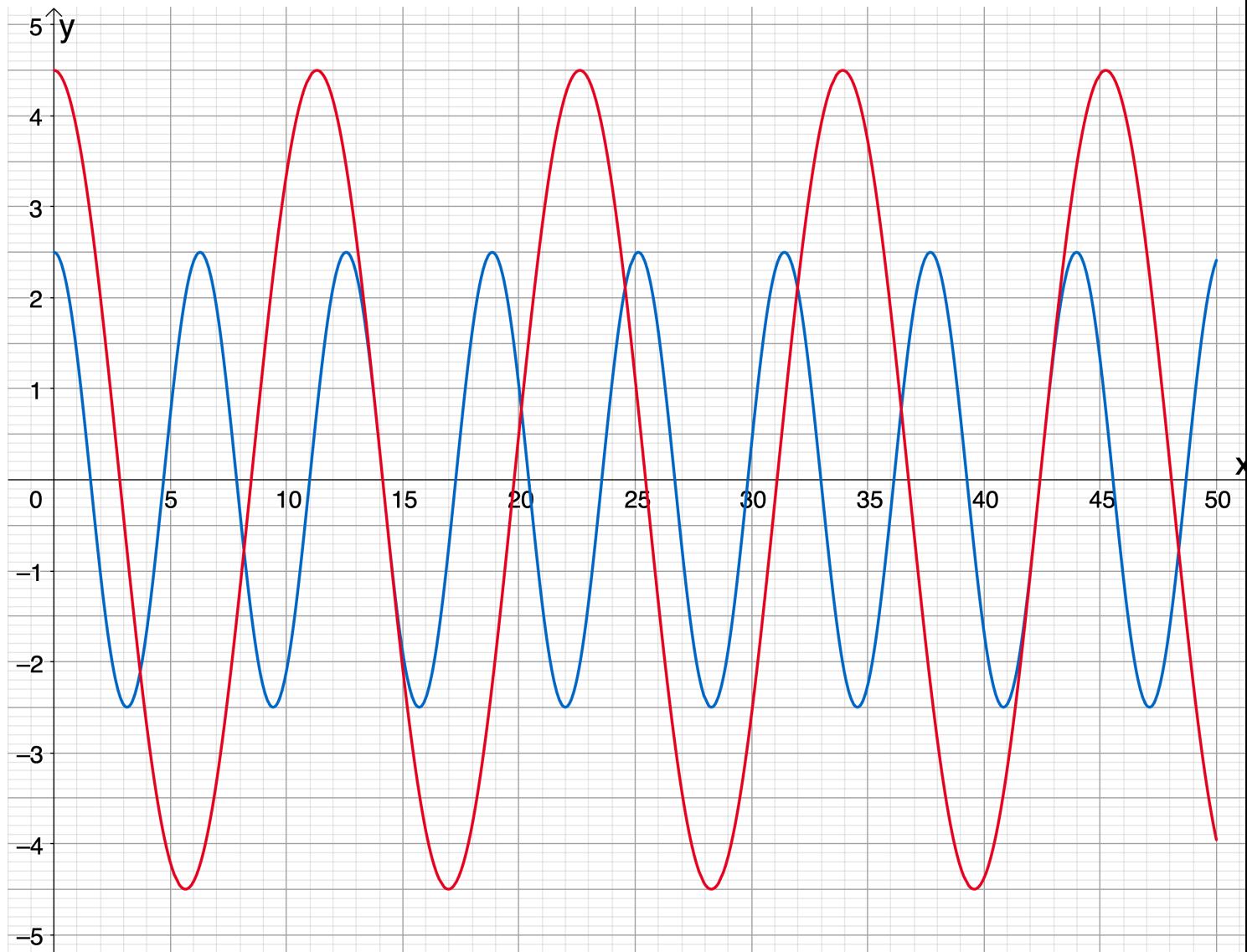
On procède de même pour placer les points avec $t = 13$, puis $t = 14$, etc.

Exercice de la fin du monde (suite et fin)

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	3

Voici la courbe de la fonction f_1 entre $t = 0$ et $t = 50$, tracée à l'aide de GeoGebra.

Allez sur huit.re/fin-du-monde et tracez soigneusement, sur ce même graphique, la courbe de la fonction f_2 sur l'intervalle de temps $[0 ; 50]$.



Intervalles de nombres (exemple)

L'intervalle $[0 ; 3,15]$ est l'ensemble des nombres compris entre 0 (inclus) et 3,15 (inclus).

Par exemple, 2 est compris entre 0 et 3,15. C'est donc un élément de l'intervalle $[0 ; 3,15]$, on écrit :

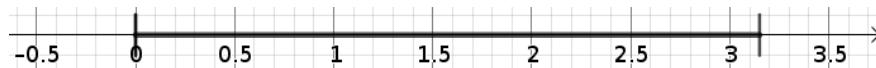
$$2 \in [0 ; 3,15] \quad (2 \text{ appartient à } [0 ; 3,15])$$

En revanche, 6,3 n'est pas compris entre 0 et 3,15. Ce n'est donc pas un élément de cet intervalle, on écrit :

$$6,3 \notin [0 ; 3,15] \quad (6,3 \text{ n'appartient pas à } [0 ; 3,15])$$

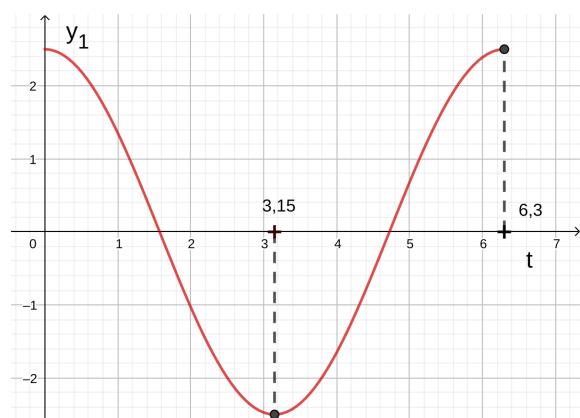
Les éléments de l'ensemble $[0 ; 3,15]$ sont les nombres x tels que $0 \leq x \leq 3,15$ où « \leq » signifie *inférieur ou égal*.

On peut représenter l'intervalle $[0 ; 3,15]$ par le segment ci-dessous :



Variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$:



La plus grande valeur de y_1 est 2,5. On dit que 2,5 est le maximum de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$.

Ce maximum est atteint en $t = 0$ et $t = 6,3$.

La plus petite valeur de y_1 est $-2,5$. On dit que $-2,5$ est le minimum de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$.

Ce minimum est atteint en $t = 3,15$.

Lorsque t augmente de 0 à 3,15, l'ordonnée y_1 diminue.

On dit que la fonction f_1 est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 3,15]$.

Lorsque t augmente de 3,15 à 6,3, l'ordonnée y_1 augmente.

On dit que la fonction f_1 est croissante sur l'intervalle $[3,15 ; 6,3]$.

On résume les variations de la fonction f_1 dans un tableau de variations.

t	0	3,15	6,3
Variations de $f_1(t)$	2,5	-2,5	2,5

Définitions

Une fonction f est croissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ augmente quand x augmente en restant dans l'intervalle.

Une fonction f est décroissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ diminue quand x diminue en restant dans l'intervalle.

Lorsque f est croissante sur l'intervalle ou décroissante sur l'intervalle, on dit qu'elle est monotone sur l'intervalle.

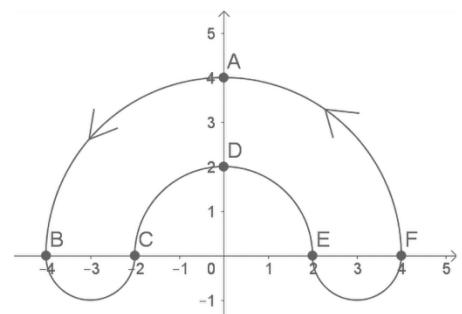
Exercice du cycliste

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	4

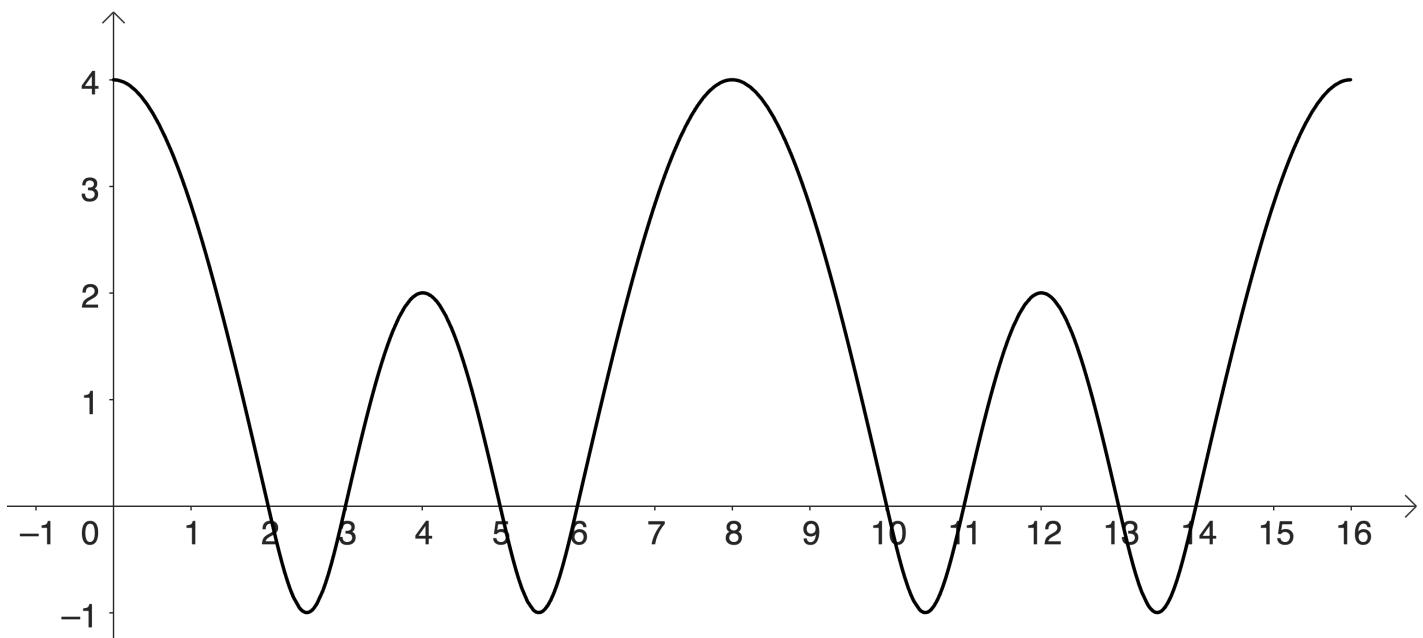
Un cycliste roule à vitesse constante sur le circuit représenté ci-après et effectue deux tours de circuit.

Au départ, il est au point A puis parcourt le circuit dans le sens ABCDEFA. Il met 8 minutes pour effectuer un tour, donc 16 minutes pour deux tours.

Sur la grille distribuée avec l'énoncé, tracez la courbe représentative de la fonction $f : t \rightarrow y$ où t est le temps écoulé depuis le départ en minutes et y l'ordonnée du cycliste.



Courbe de l'ordonnée du cycliste en fonction du temps (en minutes)

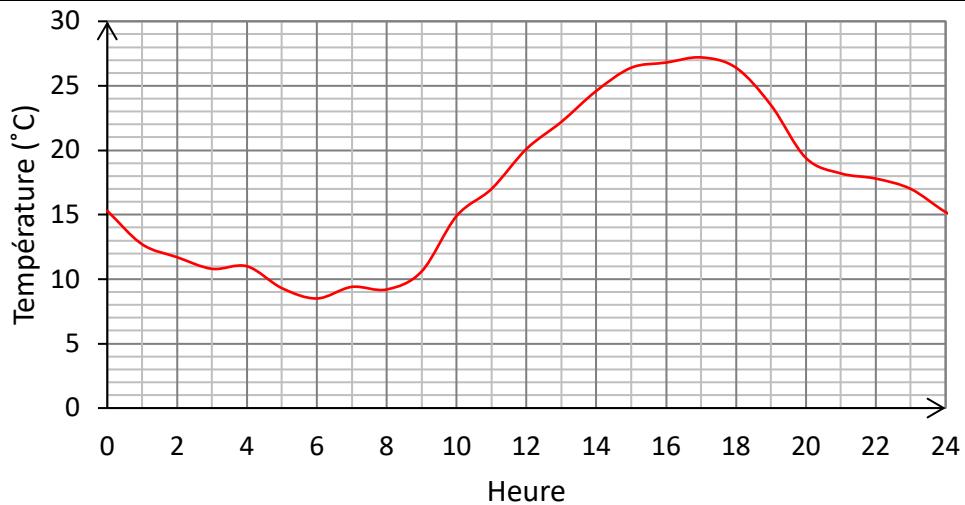


Exercice des températures

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	5

Un site de météo fournit une courbe des températures à Dijon pour la journée du 9 octobre 2023.

Soit la fonction $f: H \mapsto T$ où H est l'heure et T la température en degré Celsius.



- Quelle a été la température la plus élevée et à quelle heure a-t-elle été atteinte ?
Comment traduire cela pour la fonction f ?
- Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 ?
Comment traduire cela pour la fonction f ?
- Quelles sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 17 ?
Comment traduire cela pour la fonction f ?
- Dressez le tableau de variations de la fonction f .
- (Question pour les rapides) À quelle heure de la journée la température descend-elle la plus vite ?
- (Question pour les rapides) Quelle est la plus grande valeur possible de $f(H + 1) - f(H)$ lorsque H est compris entre 0 et 23 ?

Résolution graphique d'équations et inéquations

Équation ou inéquation	$f(H) = 12$	$f(H) = 5$	$f(H) \geq 17$	$f(H) \leq 10$
Solutions	1,6 et 9,3	Pas de solution	L'ensemble des nombres compris entre 11 et 23, 11 et 23 inclus.	L'ensemble des nombres compris entre 4,6 et 8,7, 5,5 et 8,8 inclus.
Ensemble des solutions, noté S	$S = \{10,4 ; 20,8\}$	$S = \emptyset$	$S = [11 ; 23]$	$S = [4,6 ; 8,7]$

Ensembles finis (exemples)

L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide : on le note \emptyset .

L'ensemble dont le seul élément est 1 est noté {1}.

L'ensemble dont les éléments sont 2 et 4 et 6 est noté {2 ; 4} ou bien {4 ; 2}. Etc.

Exercice de la fonction définie par une courbe		Partie	2
		Séquence	F1
		Exercice	6
<p>G est une grandeur qui dépend du temps t. Voici ci-contre la courbe de la fonction $f : t \mapsto G$.</p> <p>Compléter les phrases suivantes et le tableau de variations.</p> <p>L'image de 3 par f est</p> <p>Le nombre est un antécédent de 1 par f.</p> <p>Le minimum de f est Ce minimum est atteint en</p> <p>L'ensemble des solutions de l'équation $f(t) = 0$ est</p> <p>L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \leq 1$ est</p>			
t			
Variations de $f(t)$			

Exercice du tableau de variations		Partie	2
		Séquence	F1
		Exercice	7
<p>G est une grandeur qui dépend du temps t. On donne ci-dessous le tableau de variation de la fonction $f : t \mapsto G$.</p>			
t	0	1	4
Variations de $f(t)$	-2	3	0

1. Dans un repère, construire une courbe qui pourrait être la courbe de la fonction g .

2. Peut-on déterminer les solutions de l'équation $f(t) = 1$? Peut-on déterminer leur nombre?

3. Même question pour l'équation $f(t) = 3$.

4. Même question pour l'inéquation $f(t) \geq 0$.

5. Même question pour l'inéquation $f(t) \leq -2,5$.

Exercice du pluviomètre

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	8

Monsieur Martin a installé un pluviomètre dans son jardin. Chaque jour, il mesure la hauteur d'eau dans son pluviomètre, puis il le vide. Il a consigné dans un tableau chaque hauteur d'eau relevée du 1^{er} au 15 mars 2019.

Date	1 ^{er} mars	2 mars	3 mars	4 mars	5 mars	6 mars	7 mars	8 mars	9 mars	10 mars	11 mars	12 mars	13 mars	14 mars	15 mars
Hauteur d'eau (mm)	0	0	0	0	38	76	127	89	38	117	129	107	89	0	72

Monsieur Martin a remarqué que sa cave était inondée lorsque, sur une journée, la hauteur d'eau de son pluviomètre atteignait 142 mm.

Il doit s'absenter du 16 au 21 mars. Avant de partir, il consulte le site de la météo locale et obtient les données des tableaux ci-après.

Monsieur Martin doit-il s'inquiéter pour sa cave ?

Relevés météo				Prévisions météo			
Dates	Pluviométrie (L/m ²)	Dates	Pluviométrie (L/m ²)	Dates	Pluviométrie (L/m ²)	Dates	Pluviométrie (L/m ²)
1 ^{er} mars	0	9 mars	0,2	16 mars	3,2	17 mars	4
2 mars	0	10 mars	6	18 mars	3,4	19 mars	7
3 mars	0	11 mars	8	20 mars	1,2	21 mars	11
4 mars	0	12 mars	4,6				
5 mars	0,2	13 mars	2,6				
6 mars	1,6	14 mars	0				
7 mars	7,5	15 mars	1,4				
8 mars	2,6						

Comme les grandeurs P et H ne sont pas proportionnelles, les fonctions f et g ne sont pas linéaires

Quand H ou P augmente, l'autre grandeur augmente aussi : donc les fonctions f et g sont croissantes.

Sans hypothèse supplémentaire sur la forme du pluviomètre, on ne peut pas répondre de manière satisfaisante.

Mais si le pluviomètre a approximativement la forme d'un cône comme sur la photo, alors les courbes sont « régulières » et on peut alors relier les points.

Sous cette hypothèse, d'après la courbe de gauche, l'image de 11 par f est , donc la cave inondée. Et d'après la courbe de droite, le seul antécédent de 11 par g est , donc la cave inondée.

De plus, les prévisions météo six jours à l'avance ne sont pas fiables et la méthode par prolongement de courbe n'est pas très précise. Donc M. Legoff devrait s'inquiéter.

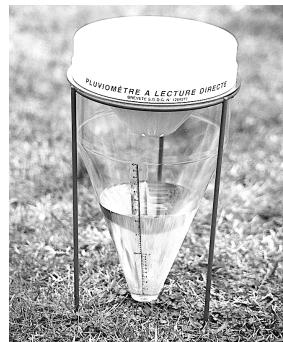


Tableau de valeur pour la courbe de l'exercice du Pluviomètre

Pluviométrie (L/m ²)	0	38	72	76	89	107	117	127	129
Hauteur d'eau (mm)	0	0,2	1,4	1,6	2,6	4,6	6	7,5	8

Exercice du test auto

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	9

Un journaliste travaillant pour un magazine automobile teste la consommation d'essence d'une voiture à différentes vitesses moyennes comprises entre 25 km/h et 130 km/h. La consommation C se mesure en litres consommés pour 100 kilomètres. Il obtient les résultats suivants.

V (km/h)	70	130	60	110	50	90	25
C (L/100 km)	5,9	10,5	5,5	8,1	5,2	6,3	6,3

On considère les fonctions suivante :

$$f : C \mapsto V \quad \text{et} \quad g : V \mapsto C$$

1. Déterminez l'image de 90 par g et l'image de 6,3 par f .
2. Le tableau ci-dessous pourrait-il être un tableau de variations de la fonction g ? Si oui, est-ce le seul possible ?

V	25	60	130
Variations de $g(V)$ [c'est-à-dire C]	6,3		10,5

3. Le tableau ci-dessous pourrait-il être un tableau de variations de la fonction g ? Si oui, est-ce le seul possible ?

V	25	45	130
Variations de $g(V)$ [c'est-à-dire C]	6,3		10,5

4. On fait l'hypothèse qu'à partir de 43 km/h, plus la vitesse est grande, plus la consommation est grande. Traduisez cette hypothèse en termes de variations de la fonction g . Que peut-on alors dire de $g(100)$?
5. On fait l'hypothèse que jusqu'à 43 km/h, plus la vitesse est grande, plus la consommation est petite. Traduisez cette hypothèse en termes de variations de la fonction g . Que peut-on alors dire de $g(40)$?
6. Dressez un tableau de variations cohérent avec les valeurs de l'énoncé et avec les hypothèses des questions 3 et 4.
7. (Question pour les rapides) On fait l'hypothèse qu'entre 90 km/h et 110 km/h, l'accroissement de la consommation est proportionnel à l'accroissement de la vitesse. Donnez une estimation de la consommation de carburant à 97 km/h.

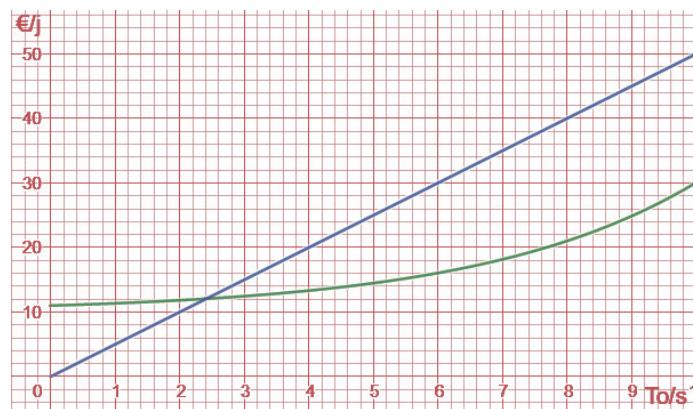
Exercice des FAI

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	10

Wolfgang.net et Zinfinity sont deux fournisseurs d'accès internet (FAI) pour les entreprises, qui proposent différents tarifs suivant le débit souhaité par l'entreprise. Ces tarifs sont représentés ci-dessous.

Le débit est donné en téraoctet par seconde (To/s) et le prix en euro par jour (€/j). Le débit maximal proposé est de 10 To/s.

Le tarif proposé par Zinfinity est proportionnel au débit fourni. On note $W(d)$ et $Z(d)$ les tarifs de Wolfgang.net et Zinfinity pour un débit de d . Complétez le tableau ci-dessous.



Équation ou inéquation	Solutions	Ensemble des solutions	Interprétation en termes de tarif
$W(d) = Z(d)$			
$W(d) \leq Z(d)$			
$W(d) \geq Z(d)$			

Exercice du croisement

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	11

Au volant de sa voiture, Nolwenn quitte Nantes en direction de Rennes en empruntant la voie rapide.

Au même moment, Rozenn quitte Rennes en direction de Nantes à l'autre bout de cette même voie rapide. La distance entre la porte de Rennes à Nantes et la porte de Nantes à Rennes est de 97 km.

Le trajet est dessiné ci-contre.

Nolwenn roule à la vitesse constante de 90 km/h.

Rozenn roule à la vitesse constante de 120 km/h.



Quand et où les deux automobilistes vont-elles se croiser ?

Étude des fonctions $N: t \mapsto 1,5t$ et $R: t \mapsto 97 - 2t$

La fonction N est linéaire (multiplier par 1,5) et croissante.

La fonction R est affine (multiplier par -2 puis ajouter 97) et décroissante mais pas linéaire car $R(0) \neq 0$.

Propriétés La courbe d'une fonction linéaire est une partie d'une droite passant par l'origine.

La courbe d'une fonction affine est une partie d'une droite qui ne passe pas par l'origine.

Taux d'accroissement des fonctions R et N

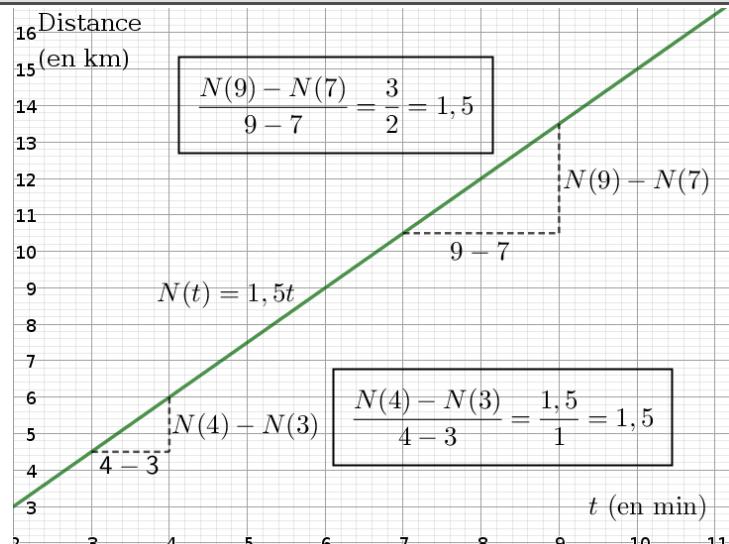
Pour tous t et t' tels que $t < t'$, on a :

$$\frac{N(t') - N(t)}{t' - t} = \frac{1,5t' - 1,5t}{t' - t} = \frac{1,5(t' - t)}{t' - t} = 1,5$$

$$\begin{aligned} \frac{R(t') - R(t)}{t' - t} &= \frac{97 - 2t' - (97 - 2t)}{t' - t} = \frac{-2t' + 2t}{t' - t} \\ &= \frac{-2(t' - t)}{t' - t} = -2 \end{aligned}$$

Ces taux d'accroissements ne dépendent pas de t et de t' car les vitesses de Nolwen et Rozenn sont constantes.

Ces taux sont les vitesses 1,5 km/min et -2 km/min.



Exercice du téléchargement

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	12

1. Un service de téléchargement propose à ses clients un tarif A, proportionnel au poids des données téléchargées:

- pour un poids de 40 Mo (mégaoctets), on paye 1,80 € ;
- pour un poids de 66 Mo, on paye 2,97 €.

Complétez, sans calculatrice, le tableau de proportionnalité ci-contre.

Poids des données (Mo)	40	66	80	146	106	73	1
Tarif A (€)							

2. Pour le mois de janvier, le site propose aux clients deux autres tarifs.

- Tarif B : somme fixe de 4,50 € en début de mois, puis 0,02 € par mégaoctet.
- Tarif C : 18 € pour un téléchargement illimité pendant tout le mois.

Déterminez, suivant le poids des données téléchargées, le tarif le plus avantageux.

2. On note $a(p)$ le prix avec le tarif A , $b(p)$ le prix avec le tarif B, $c(p)$ le prix avec le tarif C pour p Mo téléchargés.
On a :

$$a(p) = 0,045p$$

$$b(p) = 0,02p + 4,5$$

$$c(p) = 18$$

On peut répondre à l'aide du graphique, mais pour plus de précision il vaut mieux résoudre les équations ci-dessous.

$$a(p) = b(p)$$

$$0,045p = 0,02p + 4,5$$

$$0,025p = 4,5$$

$$p = \frac{4,5}{0,025} = 180$$

$$b(p) = c(p)$$

$$0,02p + 4,5 = 18$$

$$0,02p = 13,5$$

$$p = \frac{13,5}{0,02} = 675$$

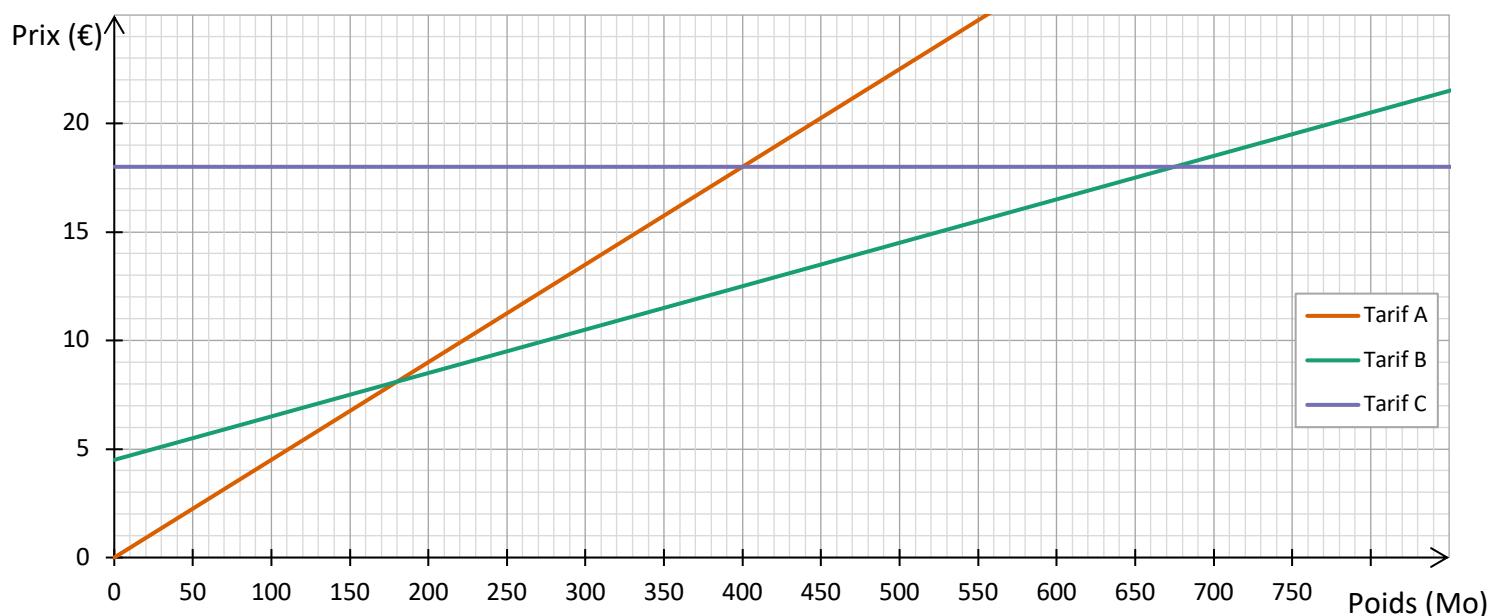
D'après ces résultats et le graphique, on peut dire que :

- jusqu'à 180 Mo téléchargés, le tarif le moins cher est le tarif A. Pour 180 Mo, le tarif A est égal au tarif B ;
- de 180 à 675 Mo téléchargés, le tarif le moins cher est le tarif B. Pour 675 Mo, le tarif B est égal au tarif C ;
- à partir de 675 Mo téléchargés, le tarif le moins cher est le tarif C.

À propos de la fonction c

La fonction c est une fonction affine particulière : elle prend toujours la même valeur. C'est une fonction constante. Ses taux d'accroissement sont nuls. La partie de droite qui la représente est horizontale.

Graphique pour l'exercice du téléchargement



Exercice du jardin potager

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	13

M. Legoff souhaite utiliser les 35 mètres de grillage dont il dispose pour délimiter un jardin potager rectangulaire. Pour que la surface du potager soit la plus grande possible, il utilise son mur pour délimiter un des côtés du rectangle. Ainsi, le grillage servira uniquement pour les trois autres côtés.



1. Comment peut-il s'y prendre ?

2. (Question pour les rapides) Même question en remplaçant 35 m par une longueur quelconque.

Solutions possibles de l'exercice du jardin potager

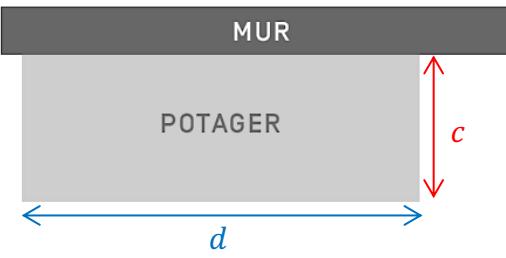
Le côté c varie entre 0 et 17,5 m. Le côté d varie entre 0 et 35 m.

Comme la longueur du grillage est de 35 m, on a $2c + d = 35$.

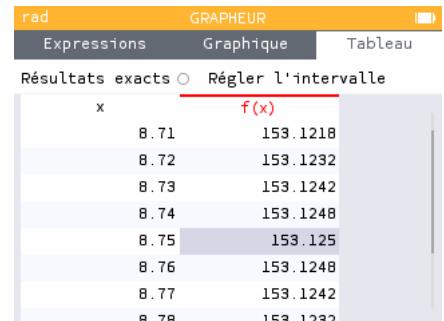
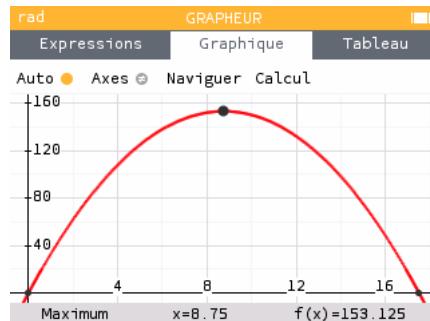
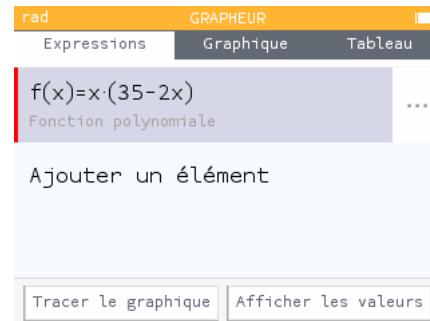
$$\text{Donc } c = \frac{35-d}{2} \quad \text{et} \quad d = 35 - 2c.$$

Donc l'aire du potager est donnée par :

$$A = d \times c = c(35 - 2c) = \frac{d(35 - d)}{2}$$



1^{re} méthode : étude de la fonction $f: c \mapsto c(35 - 2c)$ à la calculatrice Numworks

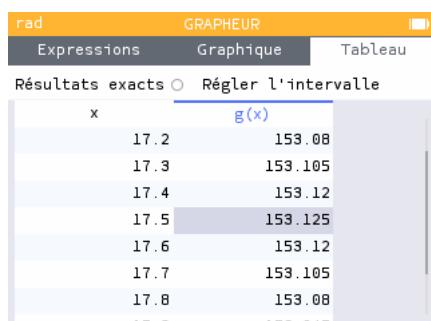
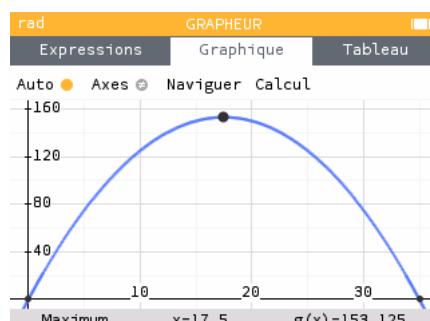
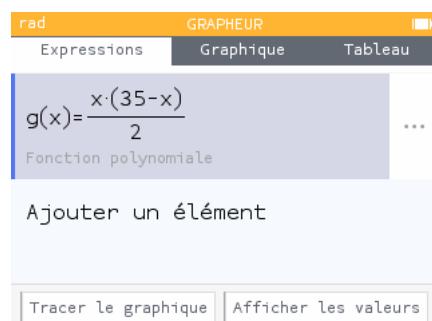


Sur l'application Grapheur de la calculatrice, la lettre x représente la longueur c , $f(x)$ représente l'aire du potager.

Le maximum de la fonction f est atteint pour $c = 8,75$ m. Dans ce cas, on a $d = 35 - 2 \times 8,75 = 17,5$ m.

La surface est maximale lorsque le côté perpendiculaire au mur mesure 8,75 m et celui parallèle au mur 17,5 m.

2^e méthode : étude de la fonction $g: d \mapsto d \frac{d(35-d)}{2}$ à la calculatrice Numworks



Sur l'application Grapheur de la calculatrice, la lettre x représente la longueur d , $g(x)$ représente l'aire du potager.

Le maximum de la fonction g est atteint pour $d = 17,5$ m. Dans ce cas, on a $c = \frac{35-17,5}{2} = 8,75$ m.

La surface est maximale lorsque le côté perpendiculaire au mur mesure 8,75 m et celui parallèle au mur 17,5 m.

Exercice du jardin potager (suite)

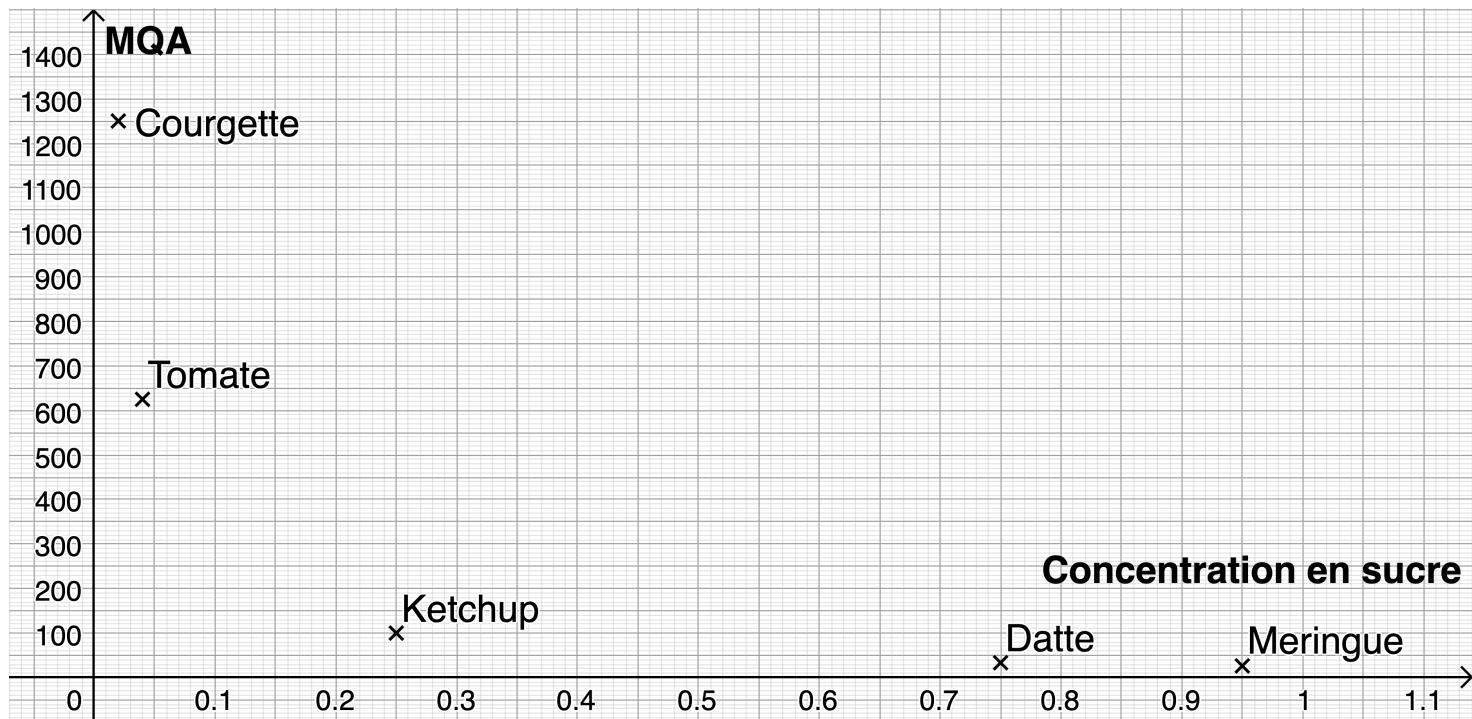
Partie	2
Séquence	F1
Exercice	14

- Malheureusement, M. Legoff n'a pas maximisé la surface de son potager puisqu'elle est seulement de 117m². Quelle peut être la longueur du côté perpendiculaire au mur de son potager ?
- La voisine de M. Legoff lui explique que s'il avait mieux choisi les dimensions, il aurait pu avoir un potager d'au moins 140 m². Quelles longueurs du côté perpendiculaire au mur lui auraient permis d'obtenir une aire supérieure ou égale à 140 m² ?

Exercice de la concentration en sucre

Partie	2
Séquence	F1
Exercice	15

Le médecin de Monsieur X lui recommande de ne pas consommer plus d'une certaine quantité de sucre par jour. La masse quotidienne autorisée (MQA) d'un aliment – si Monsieur X ne prend pas de sucre par ailleurs – dépend de la concentration en sucre de cet aliment. Voici quelques MQA regroupées dans un graphique.



Pour Monsieur X, quelle est la MQA des aliments suivants :

- les corn flakes sucrés dont la concentration en sucre est de 0,85 ;
- l'ananas dont la concentration en sucre est de 0,12 ;
- le fromage de chèvre dont la concentration en sucre est de 0,015.

SOLUTIONS POSSIBLES DE L'EXERCICE DE LA CONCENTRATION EN SUCRE

Méthode graphique

En reliant les points en arrondissant bien, on trouve environ 210 g pour l'ananas et 30 g pour les corn flakes. Mais cela ne fonctionne pas pour le fromage de chèvre.

Méthode calculatoire

On note C la concentration en sucre.

La quantité de sucre contenue dans une masse M d'un aliment de concentration C est égale à $C \times M$.

On a remarqué que pour tous les points du graphique, le produit $C \times MQA$ est égal à 25.

Cela signifie que monsieur X a droit à 25 g de sucre par jour au maximum.

- Pour l'ananas, $0,12 \times MQA = 25$, donc $MQA = \frac{25}{0,12} \simeq 208$ g.
- Pour le fromage de chèvre, $MQA = \frac{25}{0,015} \simeq 167$ g.

Bilan sur la fonction $f: C \mapsto MQA$

Pour tout $x \in]0; 1]$, on a $f(x) = \frac{25}{x}$. La courbe de f est un arc d'hyperbole.