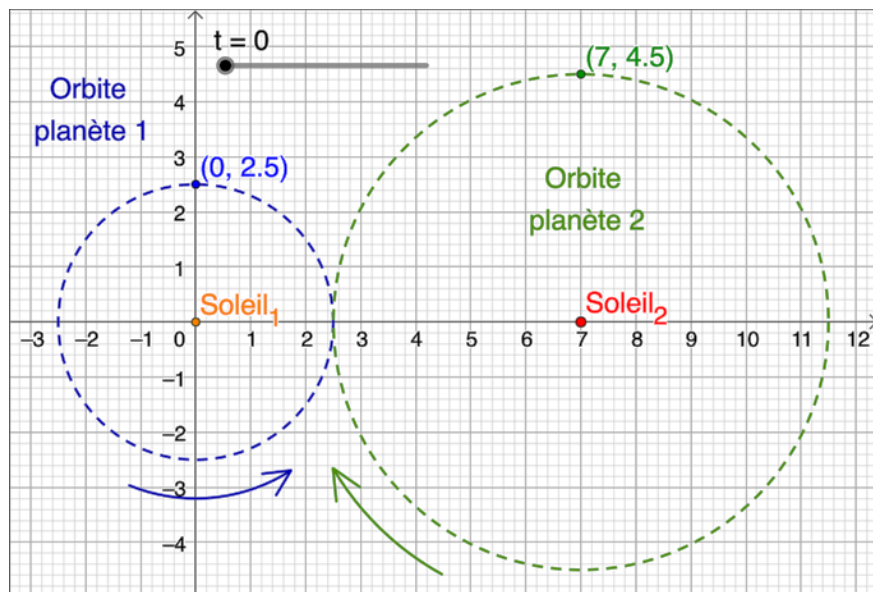


EXERCICE DE LA FIN DU MONDE

Dans une galaxie très lointaine se trouvent deux soleils et deux planètes. Chaque planète suit un mouvement circulaire uniforme autour de « son » soleil.

Les habitants de la planète 1 voudraient savoir si les deux planètes vont entrer en collision un jour ou l'autre. Ils disposent des relevés des positions des planètes depuis les 10 derniers milliards de secondes.

Vous pouvez obtenir ces positions en faisant varier le curseur t entre 0 et 10 sur la page huit.re/fin-du-monde (l'unité de temps est le milliard de secondes).



On note y_1 et y_2 les ordonnées des planètes 1 et 2.

Une physicienne de la planète 1 a résolu le problème en étudiant l'évolution de y_1 et y_2 en fonction du temps. Elle a commencé par faire un tableau de quelques valeurs de y_1 en fonction de t , puis elle a représenté sur un graphique l'évolution de y_1 en fonction du temps, pour t allant de 0 à 15.

Faites un tableau de valeurs et une courbe qu'elle aurait pu obtenir.

EXERCICE DE LA FIN DU MONDE (SUITE)

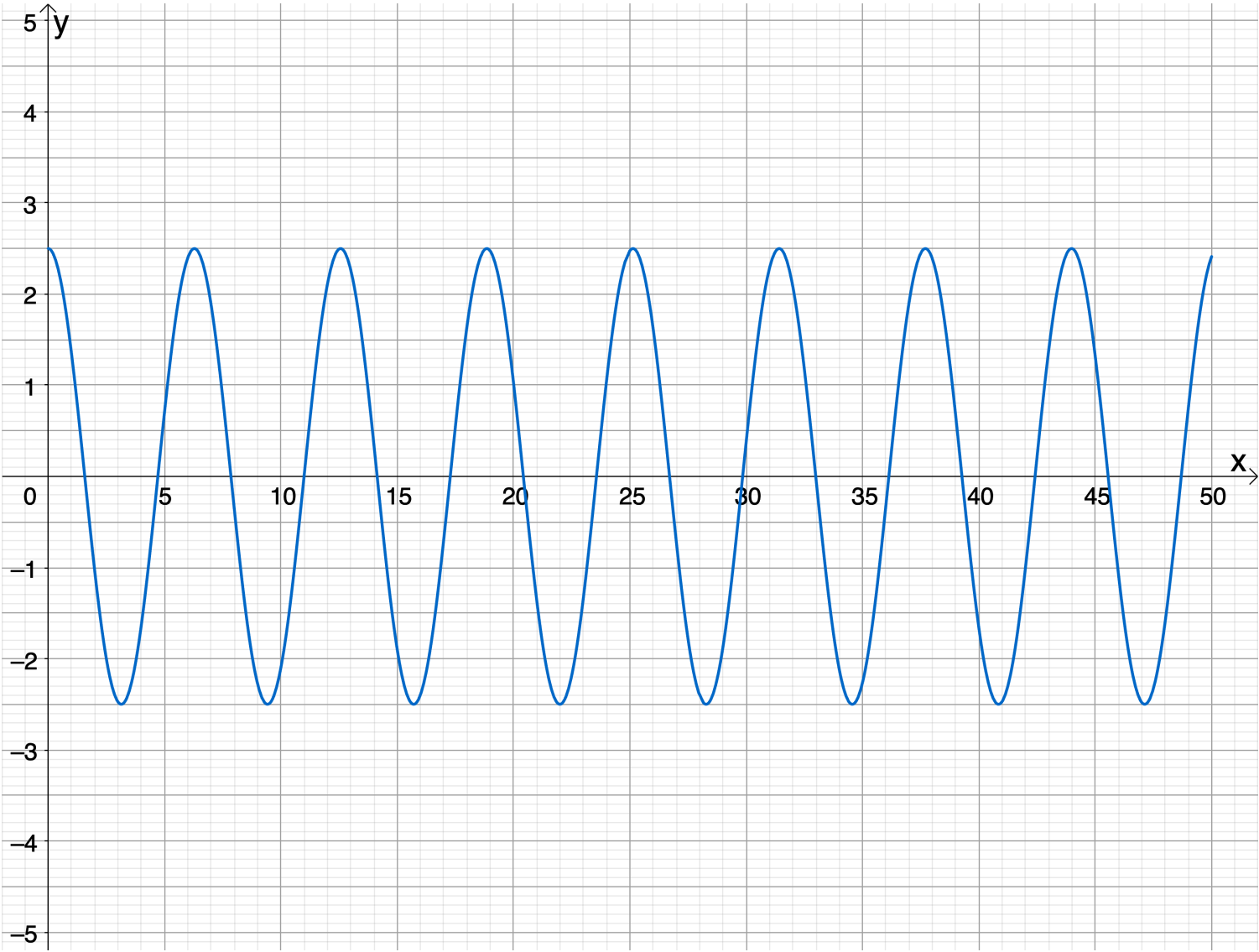
Un mathématicien prend connaissance de l'idée de la physicienne et la traduit en langage mathématique. Comme les ordonnées y_1 et y_2 dépendent du temps t , il existe deux fonctions f_1 et f_2 telles que $y_1 = f_1(t)$ et $y_2 = f_2(t)$.

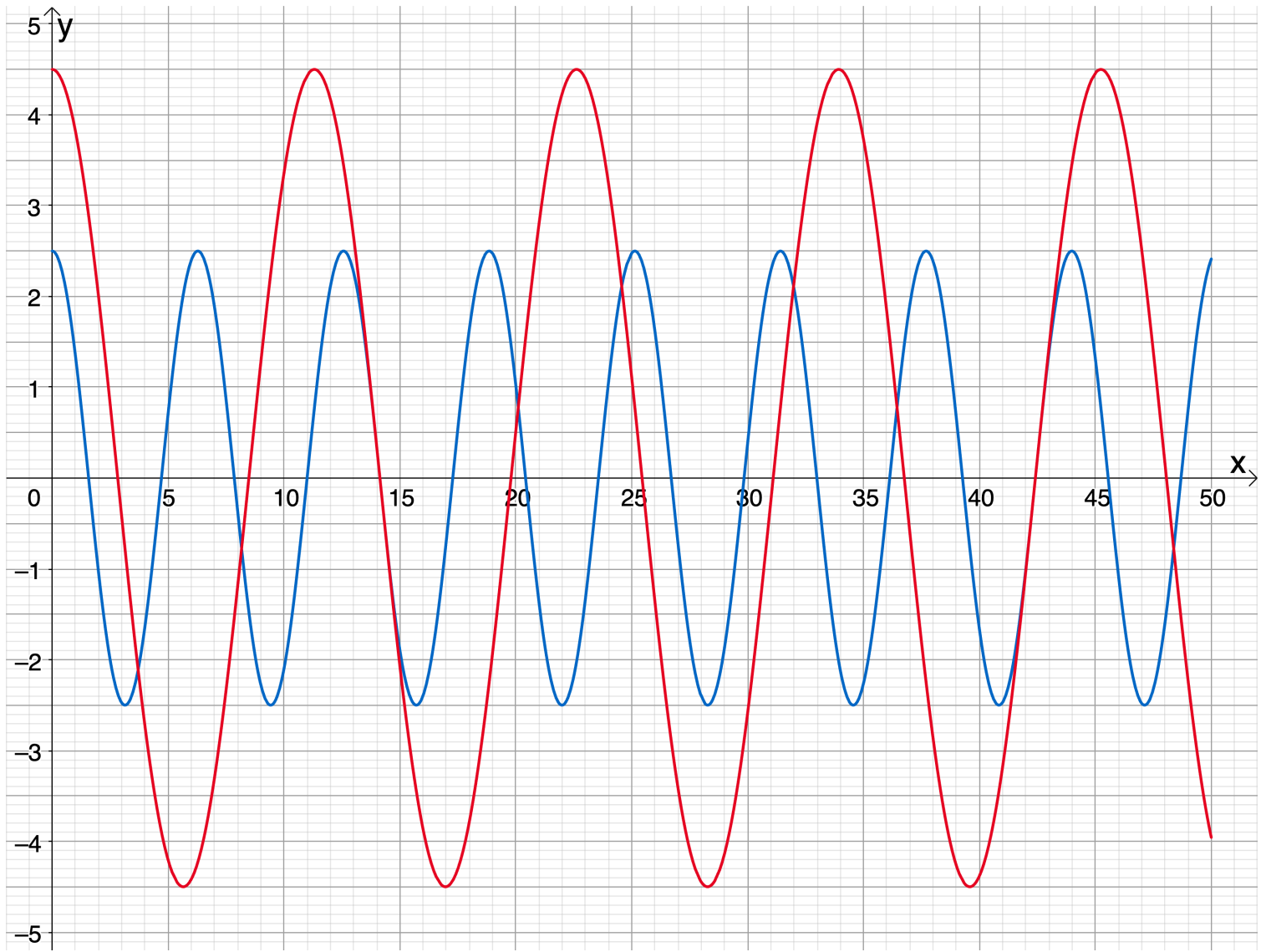
Ces deux fonctions se notent aussi $f_1 : t \mapsto y_1$ et $f_2 : t \mapsto y_2$

1. Quelle est l'image de 0 par la fonction f_1 ?
2. Quelle est l'image de 6,3 par la fonction f_1 ?
3. Quelle est l'image de 3,15 par la fonction f_1 ?
4. Quelle est la valeur de $f_2(0)$?
5. (Question pour les plus rapides) On considère la fonction $g_1 : t \mapsto x_1$ où x_1 est l'abscisse de la planète 1. On sait que la planète 1 retourne à la même position tous les 6,3 milliards de secondes. Traduisez cela à l'aide des fonctions f_1 et g_1 .

EXERCICE DE LA FIN DU MONDE (SUITE ET FIN)

Voici la courbe de la fonction f_1 entre $t = 0$ et $t = 50$, tracée à l'aide de GeoGebra.
Allez sur huit.re/fin-du-monde et tracez soigneusement, sur ce même graphique, la courbe de la fonction f_2 sur l'intervalle de temps $[0 ; 50]$.





ATTENTION, CE BILAN COMPORTE UNE ERREUR. À VOUS DE LA CORRIGER !

Intervalle de nombres (exemple)

L'intervalle $[0 ; 3,15]$ est l'ensemble des nombres compris entre 0 (inclus) et 3,15 (inclus).

Par exemple, 2 est compris entre 0 et 3,15. C'est donc un élément de l'intervalle $[0 ; 3,15]$, on écrit :

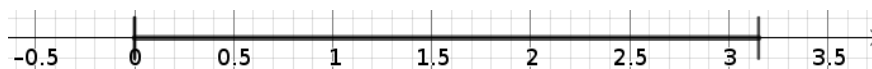
$$2 \in [0 ; 3,15] \quad (2 \text{ appartient à } [0 ; 3,15])$$

En revanche, 6,3 n'est pas compris entre 0 et 3,15. Ce n'est donc pas un élément de cet intervalle, on écrit :

$$6,3 \notin [0 ; 3,15] \quad (2 \text{ n'appartient pas à } [0 ; 3,15])$$

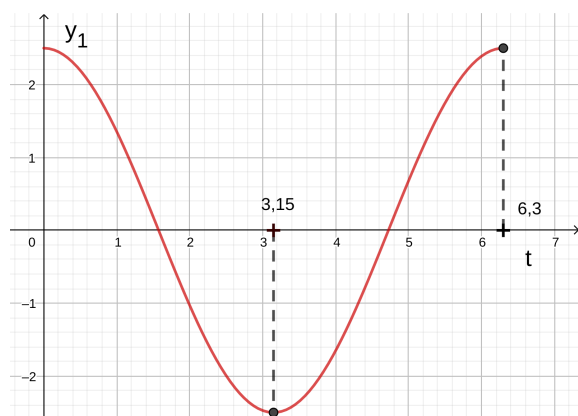
Les éléments de l'ensemble $[0 ; 3,15]$ sont les nombres x tels que $0 \leq x \leq 3,15$ où « \leq » signifie *inférieur ou égal*.

On peut représenter l'intervalle $[0 ; 3,15]$ par le segment ci-dessous :



Variations de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$

On a tracé ci-dessous la courbe représentative de f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$:



La plus grande valeur de y_1 est 2,5. On dit que 2,5 est le maximum de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$.

Ce maximum est atteint en $t = 0$ et $t = 6,3$.

La plus petite valeur de y_1 est $-2,5$. On dit que $-2,5$ est le minimum de la fonction f_1 sur l'intervalle $[0 ; 6,3]$.

Ce minimum est atteint en $t = 3,15$.

Lorsque t augmente de 0 à 3,15, l'ordonnée y_1 diminue.

On dit que la fonction f_1 est décroissante sur l'intervalle $[0 ; 3,15]$.

Lorsque t augmente de 3,15 à 6,3, l'ordonnée y_1 augmente.

On dit que la fonction f_1 est croissante sur l'intervalle $[3,15 ; 6,3]$.

On résume les variations de la fonction f_1 dans un tableau de variations.

t	0	3,15	6,3
Variations de $f_1(t)$	2,5	-2,5	2,5

Définitions

Une fonction f est croissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ augmente quand x augmente en restant dans l'intervalle.

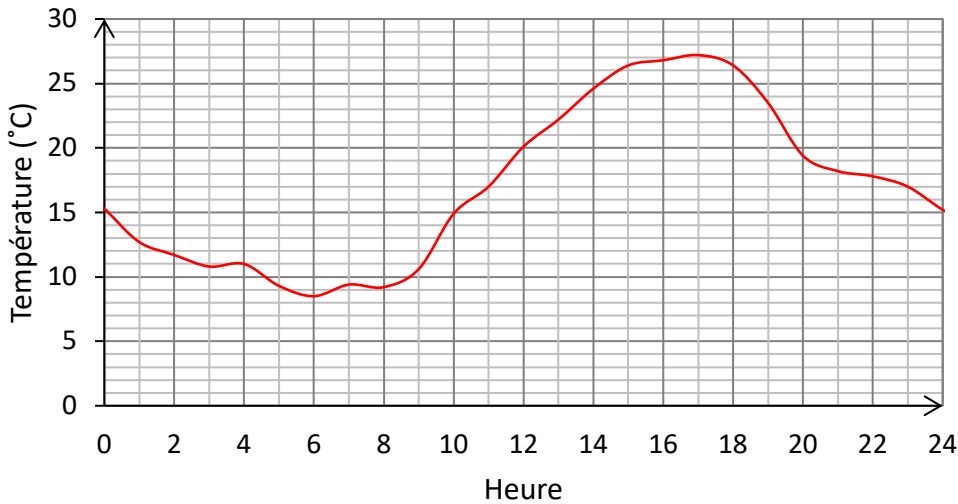
Une fonction f est décroissante sur un intervalle lorsque $f(x)$ diminue quand x ~~diminue~~ **AUGMENTE** en restant dans l'intervalle.

Une fonction f est monotone sur un intervalle lorsqu'elle est croissante sur l'intervalle ou décroissante sur l'intervalle.

EXERCICE DES TEMPÉRATURES

Un site de météo fournit une courbe des températures à Dijon pour la journée du 9 octobre 2023.

Soit la fonction $f: H \mapsto T$ où H est l'heure et T la température en degré Celsius.



- 1. Quelle a été la température la plus élevée et à quelle heure a-t-elle été atteinte ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
- 2. Quelle est l'ordonnée du point de la courbe d'abscisse 4 ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
- 3. Quelles sont les abscisses des points de la courbe d'ordonnée 17 ? Que cela signifie-t-il pour la fonction f ?
- 4. Dressez le tableau de variations de la fonction f .
- 5. (Question pour les rapides) À quelle heure de la journée la température descend-elle la plus vite ?
- 6. (Question pour les rapides) Quelle est la plus grande valeur possible de $f(H + 1) - f(H)$ lorsque H est compris entre 0 et 23 ?

Résolution graphique d'équations et inéquations

Équation ou inéquation	$f(H) = 12$	$f(H) = 5$	$f(H) \geq 17$	$f(H) \leq 10$
Solutions	1,6 et 9,3	Pas de solution	L'ensemble des nombres compris entre 11 et 23, 11 et 23 inclus.	L'ensemble des nombres compris entre 4,6 et 8,7, 5,5 et 8,8 inclus.
Ensemble des solutions, noté S	$S = \{10,4 ; 20,8\}$	$S = \emptyset$	$S = [11 ; 23]$	$S = [4,6 ; 8,7]$

Ensembles finis (exemples)

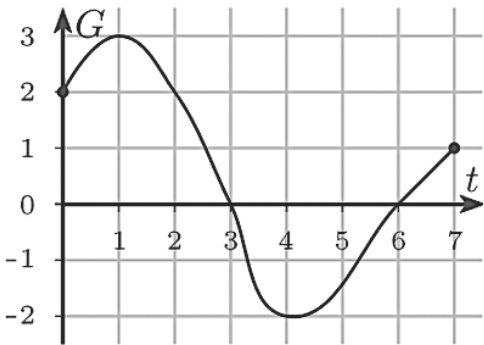
L'ensemble qui ne contient aucun élément est appelé ensemble vide : on le note \emptyset .
L'ensemble dont le seul élément est 1 est noté $\{1\}$.
L'ensemble dont les éléments sont 2 et 4 et 6 est noté $\{2 ; 4\}$ ou bien $\{4 ; 2\}$.
Etc.

EXERCICE DE LA FONCTION DÉFINIE PAR UNE COURBE

G est une grandeur qui dépend du temps t . Voici ci-contre la courbe de la fonction $f : t \mapsto G$.

Compléter les phrases suivantes et le tableau de variations.

- L'image de 3 par f est
- Le nombre est un antécédent de 1 par f .
- Le minimum de f est Ce minimum est atteint en
- L'ensemble des solutions de l'équation $f(t) = 0$ est
- L'ensemble des solutions de l'inéquation $f(t) \leq 1$ est



t	
Variations de $f(t)$	

EXERCICE DU PLUVIOMÈTRE

Monsieur Legoff, habitant du nord du Finistère, a installé un pluviomètre dans son jardin. Chaque jour, il mesure la hauteur d’eau dans son pluviomètre, puis il le vide. Il a consigné dans un tableau chaque hauteur d’eau relevée du 1^{er} au 15 mars 2019.

Date	1 ^{er} mars	2 mars	3 mars	4 mars	5 mars	6 mars	7 mars	8 mars	9 mars	10 mars	11 mars	12 mars	13 mars	14 mars	15 mars
Hauteur d’eau (mm)	0	0	0	0	38	76	127	89	38	117	129	107	89	0	72

Monsieur Legoff a remarqué que sa cave était inondée lorsque, sur une journée, la hauteur d’eau de son pluviomètre atteignait 142 mm.

Il doit s’absenter du 16 au 21 mars. Avant de partir, il consulte le site de la météo locale et obtient les données des tableaux ci-après.

Monsieur Legoff doit-il s’inquiéter pour sa cave ?

Relevés météo				
Dates			Dates	
Pluviométrie (L/m²)			Pluviométrie (L/m²)	
1 ^{er} mars	0		9 mars	0,2
2 mars	0		10 mars	6
3 mars	0		11 mars	8
4 mars	0		12 mars	4,6
5 mars	0,2		13 mars	2,6
6 mars	1,6		14 mars	0
7 mars	7,5		15 mars	1,4
8 mars	2,6			

Prévisions météo	
Dates	Pluviométrie (L/m²)
16 mars	3,2
17 mars	4
18 mars	3,4
19 mars	7
20 mars	1,2

Bilan

Comme les grandeurs P et H ne sont pas proportionnelles, les fonctions f et g ne sont pas linéaires. Quand H ou P augmente, l’autre grandeur augmente aussi : donc les fonctions f et g sont croissantes. Sans hypothèse supplémentaire sur la forme du pluviomètre, on ne peut pas répondre de manière satisfaisante. Mais si le pluviomètre a approximativement la forme d’un cône comme sur la photo, alors les courbes sont « régulières » et on peut alors relier les points. Sous cette hypothèse, d’après la courbe de gauche, l’image de 11 par f est, donc la cave inondée. Et d’après la courbe de droite, le seul antécédent de 11 par g est, donc la cave inondée. De plus, les prévisions météo six jours à l’avance ne sont pas fiables et la méthode par prolongement de courbe n’est pas très précise. Donc M. Legoff devrait s’inquiéter.



Remarque : Les données de l’exercice correspondent à un pluviomètre conique tel que :

$$H = f(P) = 64,6\sqrt[3]{P} \text{ et } P = g(H) = \left(\frac{H}{64,6}\right)^3$$