Utiliser le produit scalaire…

…POUR CALCULER UNE LONGUEUR

Le produit scalaire permet de retrouver la norme d'un vecteur, et donc la distance entre deux points.

> **Propriété** Soit $\vec{u}$ un vecteur. Le carré de la norme de $\vec{u}$ est égal au produit scalaire de $\vec{u}$ avec lui-même.
> $$\|\vec{u}\|^{2} = \vec{u} \cdot \vec{u}$$

***Exemple 1* : Déterminer la norme du vecteur $\vec{u}\begin{pmatrix}-1\\5\end{pmatrix}$.**

On calcule le produit scalaire de $\vec{u}$ avec lui-même :

$$\vec{u} \cdot \vec{u} = (-1) \times (-1) + 5 \times 5 = (-1)^2 + 5^2 = 1 + 25 = 26$$

On a donc $\|\vec{u}\|^{2} = 26$. On en déduit que $\|\vec{u}\| = \sqrt{26}$.

***Exemple 2* : Soient deux points $A(4;5)$ et $B(7;3)$. Déterminer la distance AB.**

On commence par déterminer coordonnées du vecteur $\overrightarrow{AB}$.

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}7-4\\3-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\-2\end{pmatrix}$$

On calcule ensuite le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ avec lui-même :

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AB} = 3 \times 3 + (-2) \times (-2) = 3^2 + (-2)^2 = 9 + 4 = 13$$

On a donc $AB^{2} = 13$. On en déduit que $AB = \sqrt{13}$.

…POUR DÉTERMINER SI DEUX VECTEURS SONT ORTHOGONAUX

On rappelle que deux vecteurs sont dits orthogonaux lorsque leurs directions sont perpendiculaires, c'est-à-dire lorsqu'ils forment un angle droit.

> **Propriété** Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux si et seulement si leur produit scalaire est nul.
> $$\vec{u} \perp \vec{v} \iff \vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{0}$$

Si on connait les coordonnées de deux vecteurs, on peut alors calculer leur produit scalaire pour déterminer s'ils sont orthogonaux.

***Exemple 1* : Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}-10\\6\end{pmatrix}$. Déterminer si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.**

On calcule le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u} \cdot \vec{v} = 3 \times (-10) + 5 \times 6 = -30 + 30 = 0$$

Puisque $\vec{u} \cdot \vec{v} = 0$, on en déduit que $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont orthogonaux.

***Exemple 2* : Soient trois points $A(3;5)$, $B(-1;2)$ et $C(6;7)$. Déterminer si les droites (AB) et (AC) sont perpendiculaires.**

***Attention**, on commence par déterminer les coordonnées des vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:*

$$\overrightarrow{AB}\begin{pmatrix}-1-3\\2-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\-3\end{pmatrix} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{AC}\begin{pmatrix}6-3\\7-5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}$$

On calcule ensuite le produit scalaire de $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$:

$$\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = -4 \times 3 + (-3) \times 2 = -12 - 6 = -18$$

*Puisque $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} \neq 0$, on en déduit que $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ **ne sont pas** orthogonaux et que les droites (AB) et (AC) ne sont pas perpendiculaires.*

…POUR CALCULER LA MESURE D'UN ANGLE

On peut aller encore plus loin et déterminer la mesure de n'importe quel angle grâce au produit scalaire ! Voyons la méthode sur un exemple.

<u>Exemple</u> : Soient deux vecteurs $\vec{u}\begin{pmatrix}-3\\3\sqrt{3}\end{pmatrix}$ et $\vec{v}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$. Déterminer une mesure de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$.

On calcule le produit scalaire de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = -3\times 0 + 3\sqrt{2}\times 2 = 6\sqrt{3}$$

On calcule les normes de $\vec{u}$ et $\vec{v}$:

$\|\vec{u}\|^2 = (-3)\times(-3) + 3\sqrt{3}\times 3\sqrt{3} = (-3)^2 + \left(3\sqrt{3}\right)^2 = 9 + 27 = 36$ *donc* $\|\vec{u}\| = \sqrt{36} = 6$

$\|\vec{v}\|^2 = 0\times 0 + 2\times 2 = 0^2 + 2^2 = 4$ *donc* $\|\vec{v}\| = \sqrt{4} = 2$

On exprime le produit scalaire avec la formule générale :

$$\vec{u}\cdot\vec{v} = \|\vec{u}\|\times\|\vec{v}\|\times\cos(\vec{u};\vec{v})$$

On remplace les termes par les valeurs obtenues précédemment :

$$6\sqrt{3} = 6\times 2\times\cos(\vec{u};\vec{v})$$

On en déduit la valeur de $\cos(\vec{u};\vec{v})$ *:*

$$\cos(\vec{u};\vec{v}) = \frac{6\sqrt{3}}{6\times 2} = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

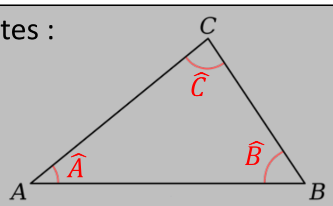
On peut donc conclure que la mesure en radian de l'angle $(\vec{u};\vec{v})$ est $\frac{\pi}{6}$ ou $-\frac{\pi}{6}$.

LE THÉORÈME D'AL-KASHI

Le théorème d'Al-Kashi est une généralisation du théorème de Pythagore valable dans n'importe quel triangle ! Plus besoin d'avoir un triangle rectangle !

Théorème Doit ABC un triangle quelconque. On a les trois l'égalité suivantes :

$$BC^2 = AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{A}\right)$$
$$AC^2 = AB^2 + BC^2 - 2\times AB\times BC\times\cos\left(\widehat{B}\right)$$
$$AB^2 = AC^2 + BC^2 - 2\times AC\times BC\times\cos\left(\widehat{C}\right)$$



On peut utiliser ce théorème pour calculer les longueurs d'un triangle ou pour déterminer la mesure d'un angle.

<u>Exemple</u> : Soit un triangle ABC tel que $AB = 6$, $AC = 4$ et $BC = 3$. Déterminer la mesure de $\widehat{A}$.

Pour l'angle $\widehat{A}$, on utilise la première formule :

$$\begin{aligned}
BC^2 &= AB^2 + AC^2 - 2\times AB\times AC\times\cos\left(\widehat{A}\right)\\
3^2 &= 6^2 + 4^2 - 2\times 6\times 4\times\cos\left(\widehat{A}\right)\\
9 &= 36 + 16 - 48\cos\left(\widehat{A}\right)\\
9 &= 52 - 48\cos\left(\widehat{A}\right)\\
48\cos\left(\widehat{A}\right) &= 52 - 9\\
48\cos\left(\widehat{A}\right) &= 43\\
\cos\left(\widehat{A}\right) &= \frac{43}{48}
\end{aligned}$$

On a donc :

$$\widehat{A} = \arccos\left(\frac{43}{48}\right) \approx 26^\circ$$