

PROBABILITÉS

I – EXPÉRIENCE ALÉATOIRE, ISSUES, ÉVÉNEMENTS

Une expérience aléatoire est une expérience « soumise au hasard », imprévisible.

Les résultats possibles sont appelés issues.

Un événement est composé d'un certain nombre d'issues, parfois une seule.

Exemple du lancer de dé

Pour l'expérience aléatoire du lancer d'un dé classique (faces numérotées de 1 à 6), on peut choisir six issues : « obtenir 1 », ..., « obtenir 6 ».

Dans ce cas, « Obtenir un multiple de 3 » est un événement constitué de deux issues : « obtenir 3 » et « obtenir 6 ».

Mais si on ne s'intéresse qu'à la parité du nombre obtenu, on peut aussi choisir seulement deux issues : « le nombre obtenu est pair » et « le nombre obtenu est impair ».

II – PROBABILITÉ D'UN ÉVÉNEMENT

La probabilité d'un événement est un nombre de l'intervalle $[0; 1]$.

Ce nombre correspond au « niveau de certitude » de l'événement :

	Probabilité	Probabilité (%)
Événement impossible	0	0 %
Événement qui a autant de chances de se produire que de ne pas se produire	0,5	0,5 %
Événement certain	1	1 %

de plus en plus probable

Intuitivement, on voudrait que plus l'événement « se produit souvent », plus sa probabilité soit proche de 1 (c'est-à-dire 100%)

III – CHOIX DES PROBABILITÉS DES ISSUES D'UNE EXP. ALÉATOIRE

Une fois choisies les issues d'une expérience aléatoire, nous pouvons choisir les probabilités des différentes issues de l'expérience. Il y a deux manières de le faire.

Choix à partir de fréquences observées (sur un exemple)

Notons f (fente) et d (dos) les deux issues du jet de cauri (photo). Pour choisir les probabilités p et q des issues f et d , on lance 120 fois un cauri. On obtient alors (par exemple) 47 fois f et 73 fois d .

On peut donc choisir les probabilités : $p = \frac{47}{120}$ et $q = \frac{73}{120}$.

Ou des valeurs approchées de ces deux fréquences, en prenant soin que la somme de ces valeurs approchées vaille 100 % : $p = 0,39 = 39\%$ et $q = 0,61 = 61\%$



Choix à partir d'une hypothèse d'équiprobabilité (sur un exemple)

On lance un dé ordinaire. On peut considérer qu'il y a « autant de chance d'obtenir chacun des nombres de 1 à 6 ». On choisit donc six probabilités égales, et pour que leur somme vaille 1, on choisit $\frac{1}{6}$ pour chacune, c'est-à-dire environ 16,7 %.

Modèle d'équiprobabilité pour une expérience aléatoire (cas général)

Choisir un modèle d'équiprobabilité, c'est choisir des probabilités égales pour toutes les issues. On dit alors que les issues sont équiprobables.

IV – ÉVÉNEMENTS ET ENSEMBLES

Définitions On associe à un événement d'une expérience aléatoire l'ensemble des issues qui le constituent. Cet ensemble est encore appelé abusivement événement.

À un événement certain on associe l'ensemble de toutes les issues, l'univers noté Ω .

Notation et propriétés

La probabilité d'un événement A est notée $P(A)$.

Pour toute expérience aléatoire, on a $P(\emptyset) = 0$ et $P(\Omega) = 1$

(la probabilité de l'événement impossible est 0, celle de l'événement certain est 1).

Exemple du dé équilibré avec 6 issues $\Omega = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$ et $P(\{2; 4; 6\}) = 0,5$.

V – PROPRIÉTÉS DES PROBABILITÉS

Propriétés

- La somme des probabilités des issues d'une expérience aléatoire vaut 1.
- La probabilité d'un événement est la somme des probabilités des issues qui le composent.
- Pour tout événement A , on a $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$

Exemple du dé avec 6 issues

En notant p_i la probabilité d'obtenir l'issue i , on a : $p_1 + p_2 + p_3 + p_4 + p_5 + p_6 = 1$.

La probabilité d'obtenir un multiple de trois est $p_3 + p_6$.

La probabilité de ne pas obtenir un multiple de trois est $1 - (p_3 + p_6)$.

Propriétés

Avec un modèle d'équiprobabilité à N issues :

- la probabilité de chacune des issues est $\frac{1}{N}$;
- la probabilité d'un événement est $\frac{n}{N}$ où n est le nombre d'issues de l'événement :

$$\text{probabilité} = \frac{\text{nombre d'issues favorables}}{\text{nombre total d'issues}}$$