Logique

I – Raisonnement par l'absurde

Pour démontrer qu'une proposition est vraie, on peut supposer qu'elle est fausse puis chercher à obtenir une contradiction. Si on y arrive, cela signifie que la proposition n'était pas fausse, donc qu'elle est vraie. On a alors fait un **raisonnement par l'absurde**.

Exemple de raisonnement par l'absurde
Pour montrer que 1/3 n'est pas décimal, on a supposé que 1/3 était décimal. On en a alors déduit qu'une certaine puissance de 10 est divisible par 3, ce qui est contradictoire avec le fait que la somme de ses chiffres est égale à 1. On a ainsi démontré par l'absurde que 1/3 n'est pas décimal.

II – Implication

Une propriété mathématique est une phrase mathématique vraie. Certaines peuvent s'écrire :

« Si *proposition 1*, alors *proposition 2* ».

Ces propriétés s'appellent des **implications**.

Exemple d'implication

« Si M est le milieu du segment [AB], alors M est équidistant de A et B. »

Cette implication peut aussi se formuler :

« Pour que M soit le milieu du segment [AB], il faut que M soit équidistant de A et B. »

Ou encore :

« Pour que M soit équidistant de A et de B, il suffit que M soit le milieu de [AB] »

III – Réciproque d'une implication

Soit une propriété mathématique qui s'écrit sous forme d'implication :

« Si *proposition 1*, alors *proposition 2* ».

La **réciproque** d'une telle propriété est la phrase :

« Si *proposition 2*, alors *proposition 1* ».

Attention ! La réciproque d'une propriété n'est pas toujours vraie.

Exemple d'implication vraie dont la réciproque est fausse
On connaît la propriété :

« Si M est le milieu du segment [AB], alors M est équidistant de A et B. »

La réciproque de cette propriété est :

« Si M est équidistant de A et B, alors M est le milieu du segment [AB] ».

Elle est fausse car il y a d'autres points que le milieu de [AB] qui sont équidistants de A et B.

Exemple d'implication vraie où la réciproque est vraie
On connaît la propriété :

« Si ABCD est un parallélogramme, alors les diagonales de ABCD ont le même milieu. »

La réciproque de cette propriété est :

« Si les diagonales de ABCD ont le même milieu, alors ABCD est un parallélogramme. »

Cette réciproque est vraie.

IV – Propositions équivalentes

Si l'implication : « Si *proposition 1*, alors *proposition 2* » et son implication réciproque : « Si *proposition 2*, alors *proposition 1* » sont toutes les deux vraies, alors *proposition 1* et *proposition 2* sont dites **équivalentes**.

Exemple de propositions équivalentes
« ABCD est un parallélogramme. » et « Les diagonales de ABCD ont le même milieu. » sont deux propositions équivalentes. Cette équivalence peut s'écrire :

« Pour que ABCD soit un parallélogramme,
il faut et il suffit que les diagonales de ABCD aient le même milieu. »

Ou bien :

« Pour que les diagonales de ABCD aient le même milieu,
il faut et il suffit que ABCD soit un parallélogramme. »

Ou encore :

« ABCD est un parallélogramme
si et seulement si les diagonales de ABCD ont le même milieu. »