Martin-Luther-Universität Halle-Wittenberg
Institut für Mathematik
Dr. Christian Roth

Mathematik D

Formelsammlung

Satz 0.1 Prinzip der vollständigen Induktion

Für jede natürliche Zahl $n \in \mathbb{N}$ sei eine Aussage $A(n)$ gegeben. Es gelte:

(i) $A(1) = w$ *(Induktionsanfang)*

(ii) $[A(n) \Rightarrow A(n+1)] = w$, *für alle* $n \in \mathbb{N}$. *(Induktionsschluss)*

Dann ist $A(n) = w$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Satz 0.2 (Hauptsatz der Kombinatorik)

Für das Problem k Kugeln auf n Zellen zu verteilen ist die Anzahl der Möglichkeiten im folgenden Schema gegeben:

	mit Wiederholung	*ohne Wiederholung*
k-Permutation	n^k	$(n)_k := \frac{n!}{(n-k)!}$
k-Kombination	$\binom{n+k-1}{k}$	$\binom{n}{k} := \frac{n!}{k!(n-k)!}$

Definition 0.3 (Rang des linearen Gleichungssystems)

Es sei $(r-1)$ die Anzahl der durchführbaren Eliminationsschritte beim Gauß-Algorithmus. Dann heißt $r \in \mathbb{N}$ der Rang des linearen Gleichungssystems. Es gilt $r \leq m$ und $r \leq n$.

Definition 0.4 (Matrixmultiplikation) *Zwei Matrizen A und B heißen* **verkettet**, *wenn $A \in Mat^{m,l}(\mathbb{R})$ und $B \in Mat^{l,n}(\mathbb{R})$, d.h. wenn die Spaltenanzahl der ersten Matrix mit der Zeilenanzahl der zweiten Matrix übereinstimmt.*

$$\left.\begin{array}{r} A \in Mat^{m,l}(\mathbb{R}) \\ B \in Mat^{l.n}(\mathbb{R}) \end{array}\right\} \Rightarrow \quad A \cdot B \in Mat^{m,n}(\mathbb{R}), \qquad \textit{wobei}$$

$$(A \cdot B)_{ij} \; := \; \sum_{k=1}^{l} a_{ik} b_{kj},$$

d.h. der Eintrag der Matrix an der Stelle (i, j) ist das Skalarprodukt des i-ten Zeilenvektors von A mit dem j-ten Spaltenvektor von B.

$$\text{Für} \qquad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \quad \text{ist} \qquad A^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Definition 0.5 *Sei $A \in Mat^{2,2}(\mathbb{R})$.*
Dann heißt $\det A := ad - bc$ *die* **Determinante** *der Matrix A.*

Satz 0.6 (Laplacescher Entwicklungssatz)

$$\det A = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+j} a_{ij} \det M_{ij},$$

wobei M_{ij} die Matrix ist, die durch Streichung der i-ten Zeile und der j-ten Spalte entsteht.

Im Fall $n = 3$ **Regel von Sarrus** (Schema)

$$\det A = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{12}a_{21}a_{33}.$$

Satz 0.7 *Sei $A \in Mat^{n.n}(\mathbb{R})$. Dann sind äquivalent:*

1. *A ist invertierbar.*
2. *$detA \neq 0$.*
3. *$rg(A) = n$.*
4. *Das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ besitzt für jedes $b \in \mathbb{R}^n$ genau eine Lösung. Ist dies der Fall, so gilt für die Lösung*

$$x_i = \frac{\det[\underline{a}_1, ..., \underline{a}_{i-1}, \underline{b}, \underline{a}_{i+1}, ..., \underline{a}_n]}{\det[\underline{a}_1, \underline{a}_2, ..., \underline{a}_n]}, \qquad i = 1, ..., n,$$

$$\text{und} \qquad [A^{-1}]_{ij} = \frac{-1^{i+j}}{\det A} \det M_{ji}.$$

Andere Möglichkeit der Inversenberechnung für $A \in Mat^{n,n}(\mathbb{R})$ ist der Gauß-Algorithmus:

A	I_n
$\vdots$	$\vdots$
I_n	A^{-1}

Übersicht

	$A \in Mat^{m,n}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^m$	
$\underline{b} = \underline{0}$	$r = rg(A) = n$	nur triviale Lösung
	$r = rg(A) < n$	Lösung mit $(n-r)$ freien Parametern
$\underline{b} \neq \underline{0}$	$r = rg(A) < rg(A\|\underline{b})$	keine Lösung
	$r = rg(A) = rg(A\|\underline{b}) = n$	genau eine Lösung
	$r = rg(A) = rg(A\|\underline{b}) < n$	Lösung mit $(n-r)$ freien Parametern
	$A \in Mat^{n,n}(\mathbb{R})$, $\underline{b} \in \mathbb{R}^n$	
$\underline{b} = \underline{0}$	$r = rg(A) = n, \det A \neq 0$	nur triviale Lösung
	$r = rg(A) < n, \det A = 0$	Lösung mit $(n-r)$ freien Parametern
$\underline{b} \neq \underline{0}$	$r = rg(A) = n, \det A \neq 0$	genau eine Lösung
	$r = rg(A) < rg(A\|\underline{b}), \det A = 0$	keine Lösung
	$r = rg(A) = rg(A\|\underline{b}) < n, \det A = 0$	Lösung mit $(n-r)$ freien Parametern

Definition 0.8 *Das* **Skalarprodukt** *im* $\mathbb{R}^n$ *ist definiert durch*

$$(\underline{x}|\underline{y}) = \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \right) := \underline{x}^T \underline{y} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i.$$

Definition 0.9 (Geometrie des $\mathbb{R}^n$)

(i) $\underline{x} \perp \underline{y} \Leftrightarrow \underline{x}$, $\underline{y}$ *sind* **orthogonal**, *dann und nur dann wenn* $(\underline{x}|\underline{y}) = 0$.

(ii) $||\underline{x}|| := \sqrt{(\underline{x}|\underline{x})}$ *heißt die* **euklidische Norm** *des Vektors* $\underline{x}$.
$||\underline{x}||^2 = (\underline{x}|\underline{x}) = \sum_{i=1}^{n} x_i^2$.

(iii) $d(\underline{x}, \underline{y}) := ||\underline{x} - \underline{y}||$ *heißt* **euklidischer Abstand** *der Vektoren* $\underline{x}$ *und* $\underline{y}$.

(iv)

$$\sphericalangle(\underline{x}, \underline{y}) = \cos^{-1}\left(\frac{(\underline{x}|\underline{y})}{||\underline{x}|| \cdot ||\underline{y}||} \right), \text{ für } \underline{x} \neq \underline{0} \neq \underline{y},$$

heißt **euklidischer Winkel** *ziwschen* $\underline{x}$ *und* $\underline{y}$.

Definition 0.10 (Lineare Unabhängigkeit)
Sei V ein Vektorraum, $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k \in V$. $\{\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k\}$ heißen **linear unabhängig**, *falls die Implikation*

$$\alpha_1 + \underline{x}_1 + ... + \alpha_k \underline{x}_k = \underline{0} \quad \Rightarrow \quad \alpha_1 = ... = \alpha_k = 0$$

richtig ist. $\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k \in V$. $\{\underline{x}_1, ..., \underline{x}_k\}$ heißen **linear abhängig**, *falls sie nicht linear unabhängig sind.*

Definition 0.11 (Unterraum)
Sei V ein Vektorraum, $U \subset V$. U heißt ein **Unterraum** *von V, falls gilt:*

(i) $\underline{x}, \underline{y} \in U \Rightarrow \underline{x} + \underline{y} \in U$.

(ii) $\underline{x} \in U$, $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha \underline{x} \in U$.

Definition 0.12 (Dimension)
Sei U ein Unterraum des Vektorraumes V. Mit der **Dimension** *von U, $\dim U$, bezeichnet die maximale Anzahl von Vektoren $\underline{u}_1, ..., \underline{u}_k$, die linear unabhängig sind.*

Definition 0.13 (Basis)
Sei U ein Unterraum von V. Ein System von Vektoren $\{\underline{u}_1, ..., \underline{u}_k\} \subset U$ heißt eine **Basis** *von U, falls*

(i) $\{\underline{u}_1, ..., \underline{u}_k\}$ *sind linear unabhängig.*

(ii) $U = span\{\underline{u}_1, ..., \underline{u}_k\}$.

Definition 0.14 (Vektorprodukt, Kreuzprodukt)

(i) Seien $\underline{u}, \underline{v} \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$\underline{n} := \underline{u} \times \underline{v} = \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_2v_3 - u_3v_2 \\ u_3v_1 - u_1v_3 \\ u_1v_2 - u_2v_1 \end{pmatrix}$$

das **Vektorprodukt** *bzw.* **Kreuzprodukt** *der Vektoren $\underline{u}$ und $\underline{v}$.*

(ii) Seien $\underline{u}, \underline{v}, \underline{w} \in \mathbb{R}^3$. Dann heißt

$$[\underline{u}\underline{v}\underline{w}] := ((\underline{u} \times \underline{v})|\underline{w}) = \det(\underline{u}, \underline{v}, \underline{w})$$

das **Spatprodukt** *der Vektoren $\underline{u}$, $\underline{v}$, $\underline{w}$.*

Definition 0.15 (Konvergenz)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge:

(i) $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **Nullfolge***, falls gilt:*

$$\forall \varepsilon > 0 : \exists N_\varepsilon \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N_\varepsilon : \quad |a_n| \leq \varepsilon,$$

d.h. nach endlich vielne Folgengliedern liegen alle nachfolgenden Folgenglieder im Intervall $[-\varepsilon, \varepsilon]$. Man sagt $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert gegen 0,

$$a_n \to 0 \qquad bzw. \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = 0.$$

(ii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **konvergent***, falls es ein $a \in \mathbb{R}$ gibt, so dass $(a_n - a)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist. a heißt der* **Grenzwert** *der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$,*

$$a_n \to a \qquad bzw. \qquad \lim_{n\to\infty} a_n = a.$$

(iii) Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt **divergent***, falls sie nicht konvergent ist.*

Allgemeines Prinzip

$$x_n := \frac{a_k n^k + a_{k-1} n^{k-1} + ... + a_0}{b_l n^l + b_{l-1} n^{l-1} + ... + b_0}$$

(i) $x_n \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$, falls $l > k$.

(ii) $x_n \longrightarrow \frac{a_k}{b_k}$, falls $k = l$.

(iii) x_n divergent, falls $k > l$.

Definition 0.16 (Reihe)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ eine Folge. Unter der Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ versteht man die **Folge der Partialsummen** *$(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ mit $s_k = \sum_{n=1}^{k} a_n$. Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ heißt* **konvergent***, falls die Folge $(s_k)_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Bezeichnung:*

$$\lim_{k\to\infty} s_k = \lim_{k\to\infty} \sum_{n=1}^{k} a_n =: \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

Satz 0.17 (Majoranten-Kriterium)

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *mit* $|a_n| \leq c_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *und* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *konvergiert, dann ist auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *konvergent.* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *heißt* **konvergente Majorante**.

(i) Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ *mit* $a_n \geq c_n \geq 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, *und* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *divergiert, dann ist auch* $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ *divergent.* $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ *heißt* **divergente Minorante**.

Satz 0.18 (Quotientenkriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq 0$, $\forall\, n \geq n_0$.

$$
\begin{array}{lll}
(i) & \overline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{ist absolut konvergent.} \\
(ii) & \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n \quad \textit{ist divergent.} \\
(iii) & \underline{\lim}_{n\to\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq 1 \leq \overline{\lim} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| & \qquad \textit{keine Aussage möglich.}
\end{array}
$$

Satz 0.19 (Wurzelkriterium)

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $a_n \neq 0$.

$$
\begin{array}{llll}
(i) & \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} < 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{ist absolut konvergent.} \\
(ii) & \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} > 1 & \Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} a_n & \textit{ist divergent.} \\
(iii) & \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 1 & \Rightarrow & \textit{keine Aussage möglich.}
\end{array}
$$

Definition 0.20 (Grenzwert von Funktionen)

$x_0 \in \mathbb{R}$ *heißt Grenzwert von* $f(x)$ *für* $x \to x_0$, *falls gilt:*

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D, \;\; x_n \longrightarrow x_0 \;\;\Rightarrow\;\; f(x_n) \longrightarrow f(x_0) = y_0.$$

Definition 0.21 (Monotonieverhalten)

Sei $D \subset \mathbb{R}$, $f : D \to \mathbb{R}$.

(i) f *heißt* **wachsend**, *falls für* $x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$.

(ii) f *heißt* **streng wachsend**, *falls für* $x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$.

(iii) f *heißt* **fallend**, *falls für* $x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 \leq x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$.

(iv) f *heißt* **streng fallend**, *falls für* $x_1, x_2 \in D$ *mit* $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$.

(v) f *heift* **(streng) monoton**, *falls* f *(streng) wachsend* **oder** *(streng) fallend ist.*

Definition 0.22 (Differenzierbarkeit)

$f : [a, b] \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a, b)$, heißt **differenzierbar** *im Punkt x_0, falls der Grenzwert*

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0, x \neq x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert. $f'(x_0)$ heißt die **Ableitung** *von f an der Stelle x_0.*

Die Gleichung der Kurventangente im Punkt x_0 lautet dann

$$T_{x_0} = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0).$$

Ableitungsregeln

- $$(x^n)' = n \cdot x^{n-1}, \qquad x \in \mathbb{R},\ n \in \mathbb{N}_0$$

- $\sqrt{x}$ ist differenzierbar in jedem Punkt $x_0 > 0$ und
$$\left(\sqrt{x}\right)' = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

Satz 0.23 (Differentiationsregeln)

Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x \in (a, b)$. Dann gelten:

(i) *$f \pm g$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt:*

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0).$$

(ii) **(Produktregel)***: $f \cdot g$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt:*

$$(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0).$$

(ii) **(Quotientenregel)***: $g(x_0) \neq 0 \Rightarrow \frac{f}{g}$ ist differenzierbar in x_0 und es gilt:*

$$\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0) \cdot g(x_0) - f(x_0) \cdot g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Insbesondere gilt:

$$\left(\frac{1}{g}\right)'(x_0) = -\frac{g'(x_0)}{(g(x_0))^2}.$$

Satz 0.24 (Kettenregel)
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $x_0 \in (a,b)$, $g : (c,d) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar in* $f(x_0) \in (c,d)$. *Dann ist die Funktion* $h(x) = (g \circ f)(x) := g(f(x))$ *differenzierbar in* x_0 *und es gilt:*

$$h'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

Definition 0.25 (Extrema)

(i) **Lokale Extrema**: *Ein Punkt* $x_0 \in (a,b)$ *heißt* **lokales Maximum (lokales Minimum)** *von* f, *falls es ein* $\delta > 0$ *gibt, so dass für alle* $x : |x - x_0| < \delta$ *gilt* $(f(x) \leq f(x_0)\ f(x) \geq f(x_0))$.

(ii) *Ein Punkt* $x_0 \in (a,b)$ *heißt* **globales Maximum (globales Minimum)** *von* f, *falls* $f(x) \leq f(x_0)$ $(f(x) \geq f(x_0))$, $\forall x \in (a,b)$.

Proposition 0.26 (Monotonie)
Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *differenzierbar. Dann sind äquivalent:*

(i) f *ist monoton wachsend (streng),*

(ii) $f'(x) \geq 0$, $f'(x) > 0$,

bzw.

*(i)** f *ist monoton fallend (streng),*

*(ii)** $f'(x) \leq 0$, $f'(x) < 0$.

Definition 0.27 (Konvexität)
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$ *heißt* **konvex**, *falls jede Kurvensekante oberhalb des Graphen liegt, d.h.*

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ \ t \in (0,1) : tf(x_1) + (1-t)f(x_2) > f(tx_1 + (1-t)x_2).$$

f *heißt* **konkav**, *falls* $-f$ *konvex ist, d.h.*

$$\forall x_1, x_2 \in (a,b),\ \ t \in (0,1) : tf(x_1) + (1-t)f(x_2) < f(tx_1 + (1-t)x_2).$$

Bemerkung 0.28 *Ist* f *konvex, so nennt man* f *auch* **linksgekrümmt**. *Ist* f *konkav, so nennnt man* f *auch* **rechtsgekrümmt**.

Satz 0.29 *Sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Dann sind äquivalent:*

(i) f ist konvex (konkav) in (a,b).

(ii) f' ist wachsend (fallend) in (a,b).

(iii) $f'' \geq 0$ (≤ 0), $\forall x \in (a,b)$.

Definition 0.30 (Wendepunkte)
$f : (a,b) \to \mathbb{R}$, $x_0 \in (a,b)$ heißt **Wendepunkt** *von f, falls $f''(x_0) = 0$ und ein Wechsel des Krümmungsverhaltens vorliegt, (d.h. $\exists \delta > 0$, s.d. f konvex (konkav)in $(x_0 - \delta, x_0)$ und konkav (konvex) in $(x_0, x_0 + \delta)$) oder $f'''(x_0) \neq 0$.*

0.0.1 Kurvendiskussion

(i) Spezielle Punkte: Nullstelle, Schnittpunkt mit der $y - Achse$,
Symmetrie zur y-Achse $f(x) = f(-x)$, Symmetrie zum Ursprung $f(x) = -f(-x)$.

(ii) Extremwerte, Monotonieintervalle.

(iii) Wendepunkte, Konvexitäts-,Konkavitätsbereiche (Krümmungsbereiche).

(iv) Asymptoten, Polstellen, Definitionslücken (vgl. Übung).

Definition 0.31 (Partielle Ableitungen)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ offen. Setze

$$\varphi_i(t) := f(\underline{x}_0 + t\underline{e}_i), \qquad \underline{e}_i \ i - ter \ Einheitsvektor.$$

f besitzt die i-te **partielle Ableitung** *in Richtung $\underline{e}_i$, falls φ_i differenzierbar ist an der Stelle $t = 0$. Bezeichung:*

$$f_{x_i}(\underline{x}_0) = \frac{\partial}{\partial x_i} f(\underline{x}_0) = \partial_i f(\underline{x}_0) = \varphi_i'(0).$$

Definition 0.32 (Gradient)
Der Vektor $f'(\underline{x})^T = \nabla f(\underline{x})$, ∇ der Nabla-Operator, heißt **Gradient** *von $f(\underline{x})$.*

Definition 0.33 (Höhere Ableitungen)
$f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^n$.

(i) $\partial_i \partial_j f$ *heißt* **partielle Ableitung** *von* f *nach den Variablen* x_i *und* x_j.

(ii) Die Matrix der zweiten Ableitungen von f *(hier im Fall* $n = 3$*)*

$$f''(\underline{x}) = \begin{pmatrix} \partial_1^2 f(\underline{x}) & \partial_1\partial_2 f(\underline{x}) & \partial_1\partial_3 f(\underline{x}) \\ \partial_2\partial_1 f(\underline{x}) & \partial_2^2 f(\underline{x}) & \partial_2\partial_3 f(\underline{x}) \\ \partial_3\partial_1 f(\underline{x}) & \partial_3\partial_2 f(\underline{x}) & \partial_3^2 f(\underline{x}) \end{pmatrix} = \nabla^2 f(\underline{x})$$

heißte die **Hesse-Matrix** *oder die* **Hessesche** *von* f.

Satz 0.34 (Satz von Schwarz)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}^n$. *Existieren die partiellen Ableitungen bis zur Ordnung 2 und sind sie stetig, so gilt:*

$$\partial_i \partial_j f(\underline{x}) = \partial_j \partial_i f(\underline{x}), \;\; \forall \underline{x} \in D, \;\; i, j = 1, ..., n,$$

d.h. die Hesse-Matrix ist dann **symmetrisch**.

Definition 0.35 (Extrema)
Sei $D \subset \mathbb{R}^n$ *offen,* $f : D \to \mathbb{R}^n$ *stetig differenzierbar.*

(i) $\underline{x}_0 \in D$ *heißt* **lokales Minimum** *bzw.* **lokales Maximum** *von* f*, falls es eine Kugel* $B_r(\underline{x}_0)$ *(Kugel vom Radius* r *um den Punkt* $\underline{x}_0$*) gibt mit* $f(\underline{x}) \geq f(\underline{x}_0)$ *bzw.* $f(\underline{x}) \leq f(\underline{x}_0)$ $\forall \underline{x} \in B_r(\underline{x}_0)$.

(ii) $\underline{x}_0 \in D$ *heißt* **kritischer Punkt** *von* f*, falls* $\nabla f(\underline{x}_0) = \underline{0}$ *gilt.*

Satz 0.36 *Sei* $f : D \to \mathbb{R}$, $D \subset \mathbb{R}^2$ *zweimal stetig differenzierbar. Ist* $(x_0, y_0) \in D$ *ein kritischer Punkt, d.h.* $\nabla f(x_0, y_0) = \underline{0}$ *und ist* $D(x_0, y_0) = \det(\nabla^2 f(x_0, y_0)) > 0$*, dann gilt:*

(i) Falls $f_{x_1 x_1}(x_0, y_0) < 0$*, so hat* f *an der Stelle* (x_0, y_0) *ein* **lokales Maximum**.

(ii) Falls $f_{x_1 x_1}(x_0, y_0) > 0$*, so hat* f *an der Stelle* (x_0, y_0) *ein* **lokales Minimum**.

Wenn $D(x_0, y_0) < 0$ *ist, so hat* f *an der Stelle keinen lokalen Extremwert, sondern einen* **Sattelpunkt**. ■