



Mathematik D

Probeklausur

1. Gegeben sei die Matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & -7 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$$

Bestimmen Sie die Determinante von A und berechnen Sie die Inverse (falls existent).

2. Gegeben sei das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= 18 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 &= 0 \\ x_1 + x_2 - x_3 &= \alpha \end{aligned}$$

Untersuchen Sie in Abhängigkeit des Parameters α , ob das lineare Gleichungssystem

- (a) eine eindeutige Lösung,
- (b) keine Lösung,
- (c) unendlich viele Lösungen hat.

Arbeiten Sie mit dem Gaußschen Algorithmus. Geben Sie die Ränge der Matrizen A und $A|\underline{b}$ an.

3. Untersuchen Sie den Rang der Matrix A in Abhängigkeit von α :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & \alpha \\ 1 & \alpha & 1 & 0 \\ \alpha & \alpha & \alpha & 0 \end{pmatrix}.$$

4. Gegeben seien:

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 5 & 0 & 1 \\ -1 & 3 & 2 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 4 & 2 & -1 \\ 3 & 5 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $A \cdot B$ und $B \cdot A$. Gilt die Gleichheit?

5. Beweisen Sie mittels vollständiger Induktion:

$$\frac{1}{4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots + \frac{1}{(3n-2) \cdot (3n+1)} = \sum_{i=1}^n \frac{1}{(3i-2)(3i+1)} = \frac{n}{3n+1}.$$

6. Ein Fahrradschloss hat vier Rädchen mit den Ziffern 0,...,9.

- (a) Wie viele Kombinationen muss Paul durchprobieren, wenn er das Fahrrad stehlen möchte?
- (b) Sein kleiner Bruder Max hat den Besitzer beim Abschließen des Fahrrades beobachtet. Aber er konnte sich nur merken, dass die Kombination aus zwei geraden Zahlen bestand, die jede zweimal vorkam. Wie viele Möglichkeiten muss Paul mit dieser Information durchtesten?

Frohe Weihnachten und einen guten Rutsch ins Neue Jahr!