

# **Notes**

François Rousseau

2025-10-12

# **Table of contents**

<b>Préface</b>	<b>3</b>
<b>1 Introduction</b>	<b>4</b>
<b>2 Résumé</b>	<b>5</b>
<b>3 Systèmes dynamiques</b>	<b>6</b>
<b>Références</b>	<b>8</b>

# **Préface**

Quelques notes de travail.

# **1 Introduction**

Intro.

## **2 Résumé**

En résumé, ce livre ne contient pas encore grand-chose.

## 3 Systèmes dynamiques

Un système dynamique est une formalisation mathématique permettant de décrire l'évolution de l'état d'un système dans le temps. Les trois composantes fondamentales sont :

1.  $X$  : l'espace d'états, c'est-à-dire l'ensemble de tous les états possibles du système (également appelé espace de phase),
2.  $T$  : l'ensemble de temps,
3.  $\phi_t$  : l'opérateur d'évolution (appelé flot pour les systèmes à temps continu) qui transforme un état initial  $x_0$  en l'état  $x_t$  à l'instant  $t$ .

Si l'opérateur d'évolution ne dépend que du temps, on peut écrire :

$$\dot{x}_t = f(t, x_t)$$

qui est une équation différentielle<sup>1</sup> ordinaire (EDO) du premier ordre. L'EDO définit la trajectoire d'un point dans un espace d'états de dimension finie.

Habituellement, on considère que la fonction  $f$ , appelée champ de vecteurs, est connue et l'objectif est alors de calculer les trajectoires des points dans l'espace d'états (la fonction  $x$  est l'inconnue). Il s'agit de faire de la prédiction à partir de conditions initiales. Se posent alors les questions de l'existence, d'unicité ou de stabilité des trajectoires. En apprentissage, la configuration est typiquement inversée : on considère un ensemble de points d'apprentissage et on souhaite estimer une fonction  $f$  qui prédit au mieux les observations.

Dans le cas où la fonction inconnue  $x$  dépend de plusieurs variables (comme le temps et les coordonnées spatiales), on parlera d'équation différentielle partielle (EDP). C'est le cas lorsque l'on souhaite modéliser un système qui varie à la fois dans le temps et dans l'espace. L'état du système  $x_t$  est alors

<sup>1</sup> Les équations différentielles apparaissent avec l'invention du calcul infinitésimal par Isaac Newton et Gottfried Leibniz.

une fonction définie sur le domaine spatial. L'ensemble de toutes les fonctions possibles est appelé espace fonctionnel. Une EDP décrit alors l'évolution d'un système dynamique en dimension infinie.

Transport optimal : la carte de transport optimal est le gradient d'une fonction convexe.

Descente de gradient : EDO et flot de gradient.

## Références