

Paradigmas de Programación

Esquemas de recursión Tipos de datos inductivos

1er cuatrimestre de 2025

Departamento de Computación

Facultad de Ciencias Exactas y Naturales

Universidad de Buenos Aires

Breve repaso

Esquemas de recursión sobre listas

Tipos de datos algebraicos

Esquemas de recursión sobre otras estructuras

Las funciones map y filter

La clase pasada vimos las siguientes funciones:

```
map :: (a -> b) -> [a] -> [b]
```

```
map f [] = []
```

```
map f (x : xs) = f x : map f xs
```

```
filter :: (a -> Bool) -> [a] -> [a]
```

```
filter p [] = []
```

```
filter p (x : xs) = if p x  
                    then x : filter p xs  
                    else filter p xs
```

¿Qué tipo tiene la expresión map filter?

¿Cómo la podríamos usar?

Funciones anónimas

Notación “lambda”

Una expresión de la forma:

$$\backslash x \rightarrow e$$

representa una función que recibe un parámetro x y devuelve e .

$$(\backslash x_1 x_2 \dots x_n \rightarrow e) \equiv (\backslash x_1 \rightarrow (\backslash x_2 \rightarrow \dots (\backslash x_n \rightarrow e)))$$

Ejemplo

```
>> map (\ x -> (x, x)) [1, 2, 3]  
~> [(1, 1), (2, 2), (3, 3)]
```

Funciones de orden superior

¿Qué relación hay entre las siguientes funciones?

```
suma :: Int -> Int -> Int
```

```
suma x y = x + y
```

```
suma' :: (Int, Int) -> Int
```

```
suma' (x, y) = x + y
```

Están relacionadas del siguiente modo:

```
curry :: ((a, b) -> c) -> a -> b -> c
```

```
curry f x y = f (x, y)
```

```
uncurry :: (a -> b -> c) -> (a, b) -> c
```

```
uncurry f (x, y) = f x y
```

Dentro de algunas clases, veremos que se puede demostrar:

```
suma = curry suma'      suma' = uncurry suma
```

Breve repaso

Esquemas de recursión sobre listas

Tipos de datos algebraicos

Esquemas de recursión sobre otras estructuras

Esquemas sobre listas

Pensemos algunas funciones sobre listas

- ▶ `sumaL` : la suma de todos los valores de una lista de enteros
- ▶ `concatena` : la concatenación de todos los elementos de una lista de listas
- ▶ `reverso` : el reverso de una lista

Recursión estructural

Sea $g :: [a] \rightarrow b$ definida por dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} g [] &= \langle \text{caso base} \rangle \\ g (x : xs) &= \langle \text{caso recursivo} \rangle \end{aligned}$$

g está dada por **recursión estructural** si:

1. El caso base devuelve un valor fijo z .
2. El caso recursivo se escribe usando (cero, una o muchas veces) x y $(g \ xs)$, pero sin usar el valor de xs ni otros llamados recursivos.

$$\begin{aligned} g [] &= z \\ g (x : xs) &= \dots x \dots (g \ xs) \dots \end{aligned}$$

Recursión estructural

Ejemplos de recursión estructural

```
suma :: [Int] -> Int
suma []          = 0
suma (x : xs) = x + suma xs
```

```
(++) :: [a] -> [a] -> [a]
[]      ++ ys = ys
(x : xs) ++ ys = x : (xs ++ ys)
```

```
-- Insertion sort
isort :: Ord a => [a] -> [a]
isort []          = []
isort (x : xs) = insertar x (isort xs)
```

Recursión estructural

Ejemplo:

```
-- Selection sort
ssort :: Ord a => [a] -> [a]
ssort []      = []
ssort (x : xs) = minimo (x : xs)
                  : ssort (sacarMinimo (x : xs))
```

¿Es recursión estructural?

No.

Plegado de listas a derecha

La función `foldr` abstrae el esquema de recursión estructural:

`foldr`

```
foldr f z []      = z
foldr f z (x : xs) = f x (foldr f z xs)
```

¿Cuál es su tipo?

```
foldr :: (a -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

Toda recursión estructural es una instancia de `foldr`.

Plegado de listas a derecha

Ejemplo — suma con foldr

```
suma :: [Int] -> Int
```

```
suma = foldr (+) 0
```

```
suma [1, 2]  ~>  foldr (+) 0 [1, 2]
              ~>  (+) 1 (foldr (+) 0 [2])
              ~>  (+) 1 ((+) 2 (foldr (+) 0 []))
              ~>  (+) 1 ((+) 2 0)
              ~>*  3
```

Análogamente:

```
producto :: [Int] -> Int
```

```
producto = foldr (*) 1
```

```
and, or :: [Bool] -> Bool
```

```
and = foldr (&&) True
```

```
or  = foldr (||) False
```

Plegado de listas a derecha

Ejemplo — reverse con foldr

```
reverse :: [a] -> [a]
reverse []          = []
reverse (x : xs) = reverse xs ++ [x]
```

Es recursiva estructural. ¿Cómo la escribiríamos usando foldr?

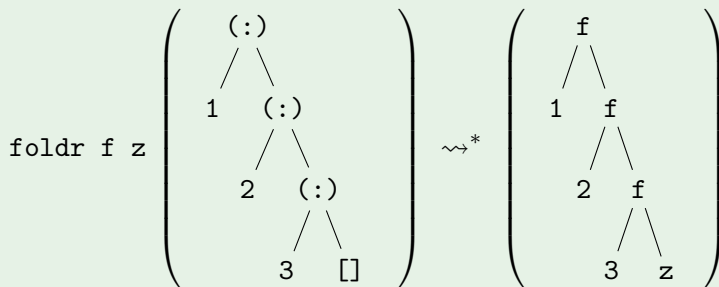
```
reverse = foldr (\ x rec -> rec ++ [x]) []
```

Otras formas equivalentes:

```
reverse = foldr (\ x rec -> flip (++) [x] rec) []
reverse = foldr (\ x -> flip (++) [x]) []
reverse = foldr (\ x -> flip (++) ((: []) x)) []
reverse = foldr (\ x -> (flip (++) . (: [])) x) []
reverse = foldr (flip (++) . (: [])) []
```

Plegado de listas a derecha

Ilustración gráfica del plegado a derecha



En particular, se puede demostrar que:

```
foldr (:) [] = id
foldr ((:) . f) [] = map f
foldr (const (+ 1)) 0 = length
```

Recursión primitiva

Sea $g :: [a] \rightarrow b$ definida por dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} g [] &= \langle \text{caso base} \rangle \\ g (x : xs) &= \langle \text{caso recursivo} \rangle \end{aligned}$$

Decimos que la definición de g está dada por **recursión primitiva** si:

1. El caso base devuelve un valor fijo z .
2. El caso recursivo se escribe usando (cero, una o muchas veces) x , $(g \ xs)$ **y también xs** , pero sin hacer otros llamados recursivos.

$$\begin{aligned} g [] &= z \\ g (x : xs) &= \dots x \dots xs \dots (g \ xs) \dots \end{aligned}$$

Similar a la recursión estructural, pero permite referirse a xs .

Recursión primitiva

Observación

- ▶ Todas las definiciones dadas por recursión estructural también están dadas por recursión primitiva.
- ▶ Hay definiciones dadas por recursión primitiva que no están dadas por recursión estructural.

Ejemplo

Dado un texto, borrar todos los espacios iniciales.

```
trim :: String -> String
```

```
>> trim "    Hola PLP" ~> "Hola PLP"
```

```
trim [] = []
```

```
trim (x : xs) = if x == ' ' then trim xs else x : xs
```

Intenten escribirla con foldr.

¿Están haciendo recursión estructural?

Recursión primitiva

Escribamos una función `recr` para abstraer el esquema de recursión primitiva:

```
recr f z []          = z
recr f z (x : xs) = f x xs (recr f z xs)
```

¿Cuál es su tipo?

```
recr :: (a -> [a] -> b -> b) -> b -> [a] -> b
```

Toda recursión primitiva es una instancia de `recr`.

Escribamos `trim` ahora usando `recr`:

```
trim = recr (\ x xs rec -> if x == ' '
                        then rec
                        else x : xs)
          []
```

Recursión iterativa

Sea $g :: b \rightarrow [a] \rightarrow b$ definida por dos ecuaciones:

$$\begin{aligned} g \text{ ac } [] &= \langle \text{caso base} \rangle \\ g \text{ ac } (x : xs) &= \langle \text{caso recursivo} \rangle \end{aligned}$$

Recursión iterativa

Decimos que la definición de g está dada por *recursión iterativa* si:

1. El caso base devuelve el acumulador ac .
2. El caso recursivo invoca inmediatamente a $(g \text{ ac}' xs)$, donde ac' es el acumulador actualizado en función de su valor anterior y el valor de x .

Recursión iterativa

Ejemplos de recursión iterativa

-- Reverse con acumulador.

```
reverse' :: [a] -> [a] -> [a]
```

```
reverse' ac [] = ac
```

```
reverse' ac (x : xs) = reverse' (x : ac) xs
```

-- Pasaje de binario a decimal con acumulador.

-- Precondición: recibe una lista de 0s y 1s.

```
bin2dec' :: Int -> [Int] -> Int
```

```
bin2dec' ac [] = ac
```

```
bin2dec' ac (b : bs) = bin2dec' (b + 2 * ac) bs
```

-- Insertion sort con acumulador.

```
isort' :: Ord a => [a] -> [a] -> [a]
```

```
isort' ac [] = ac
```

```
isort' ac (x : xs) = isort' (insertar x ac) xs
```

Plegado de listas a izquierda

Escribamos una función `foldl` para abstraer el esquema de recursión iterativa:

```
foldl f ac []          = ac
foldl f ac (x : xs) = foldl f (f ac x) xs
```

¿Cuál es su tipo?

```
foldl :: (b -> a -> b) -> b -> [a] -> b
```

Toda recursión iterativa es una instancia de `foldl`.

Plegado de listas a izquierda

En general `foldr` y `foldl` tienen comportamientos diferentes:

```
foldr (★) z [a, b, c] = a ★ (b ★ (c ★ z))  
foldl (★) z [a, b, c] = ((z ★ a) ★ b) ★ c
```

Si (★) es un operador asociativo y conmutativo, `foldr` y `foldl` definen la misma función. Por ejemplo:

```
suma      = foldr (+) 0      = foldl (+) 0  
producto  = foldr (*) 1      = foldl (*) 1  
and       = foldr (&&) True  = foldl (&&) True  
or        = foldr (||) False = foldl (||) False
```

Plegado de listas a izquierda

Ejemplo — pasaje de binario a decimal

```
bin2dec :: [Int] -> Int
bin2dec = foldl1 (\ ac b -> b + 2 * ac) 0
```

```
bin2dec [1, 0, 0]
```

```
~> foldl1 (\ ac b -> b + 2 * ac) 0 [1, 0, 0]
```

```
~> foldl1 (\ ac b -> b + 2 * ac) (1 + 0) [0, 0]
```

```
~> foldl1 (\ ac b -> b + 2 * ac) (0 + 2 * (1 + 0)) [0]
```

```
~> foldl1 (\ ac b -> b + 2 * ac) (0 + 2 * (0 + 2 * (1 + 0))) []
```

```
~> 0 + 2 * (0 + 2 * (1 + 0))
```

```
~>* 4
```

Plegado de listas a izquierda

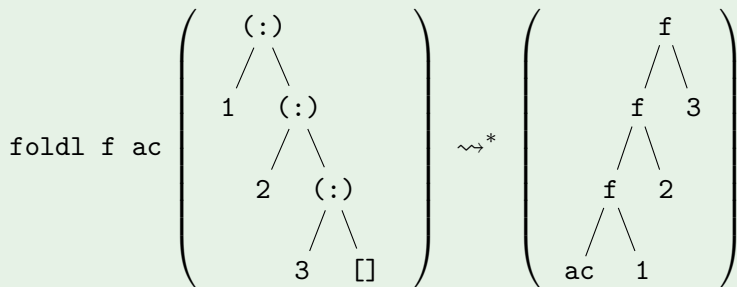
La función `foldl` es un operador de iteración.

Pseudocódigo imperativo:

```
función foldl f ac xs {  
    mientras xs no es vacía {  
        ac := f ac (head xs)  
        xs := tail xs  
    }  
    devolver ac  
}
```

Plegado de listas a izquierda

Ilustración gráfica del plegado a izquierda



En particular, se puede demostrar que:

$$\text{foldl } (\text{flip } (:)) \text{ []} = \text{reverse}$$

Resumen: esquemas de recursión sobre listas

Vimos los siguientes esquemas de recursión sobre listas:

1. Recursión estructural. `foldr`
2. Recursión primitiva. `recr`
3. Recursión iterativa. `foldl`

Para pensar

Recursión en simultáneo sobre más de una estructura

Definir la siguiente función usando `foldr`. (No tan fácil).

```
zip :: [a] -> [b] -> [(a, b)]  
zip []      []      = []  
zip (x : xs) (y : ys) = (x, y) : zip xs ys
```

Relación entre recursión estructural y primitiva

1. Definir `foldr` en términos de `recr`. (Fácil).
2. Definir `recr` en términos de `foldr`. (No tan fácil).
Idea: devolver una tupla con una copia de la lista original.

Relación entre recursión estructural e iterativa

1. Definir `foldl` en términos de `foldr`.
2. Definir `foldr` en términos de `foldl`.

Breve repaso

Esquemas de recursión sobre listas

Tipos de datos algebraicos

Esquemas de recursión sobre otras estructuras

Tipos de datos algebraicos

Conocemos algunos tipos de datos “primitivos”:

Char Int Float (a -> b) (a, b) [a]

String (sinónimo de [Char])

Se pueden definir nuevos tipos de datos con la cláusula data:

data Tipo = *⟨declaración de los constructores⟩*

Tipos de datos algebraicos

Ejemplo — tipos enumerados

Muchos constructores sin parámetros:

```
data Dia = Dom | Lun | Mar | Mie | Jue | Vie | Sab
```

Declara que existen constructores:

```
Dom :: Dia      Lun :: Dia      ...      Sab :: Dia
```

Declara además esos son los **únicos** constructores del tipo Dia.

```
esFinDeSemana :: Dia -> Bool
esFinDeSemana Sab = True
esFinDeSemana Dom = True
esFinDeSemana _   = False
```

```
>> esFinDeSemana Vie
~> False
```

Tipos de datos algebraicos

Ejemplo — tipos producto (tuplas/estructuras/registros/...)

Un solo constructor con muchos parámetros:

```
data Persona = LaPersona String String Int
```

Declara que el tipo Persona tiene un constructor (y **sólo ese**):

```
LaPersona :: String -> String -> Int -> Persona
```

```
nombre, apellido :: Persona -> String
```

```
nombre          (LaPersona n _ _) = n
```

```
apellido        (LaPersona _ a _) = a
```

```
fechaNacimiento :: Persona -> Int
```

```
fechaNacimiento (LaPersona _ _ f) = f
```

```
rebecaGuber = LaPersona "Rebeca" "Guber" 1926
```

```
>> apellido rebecaGuber
```

```
~> "Guber"
```

Tipos de datos algebraicos

Ejemplo

Un tipo puede tener muchos constructores con muchos parámetros:

```
data Forma = Rectangulo Float Float
           | Circulo Float
```

Declara que el tipo Forma tiene dos constructores (y **sólo esos**):

```
Rectangulo  :: Float -> Float -> Forma
Circulo     :: Float -> Forma
```

```
area :: Forma -> Float
area (Rectangulo ancho alto) = ancho * alto
area (Circulo radio)         = radio * radio * pi
```

Tipos de datos algebraicos

Ejemplo

Algunos constructores pueden ser **recursivos**:

```
data Nat = Zero
         | Succ Nat
```

Declara que el tipo Nat tiene dos constructores (y **sólo esos**):

```
Zero  :: Nat
Succ  :: Nat -> Nat
```

¿Qué forma tienen los valores de tipo Nat?

Zero

Succ Zero

Succ (Succ Zero)

Succ (Succ (Succ Zero))

...

Tipos de datos algebraicos

Las funciones sobre tipos de datos con constructores recursivos normalmente se definen por recursión:

```
doble :: Nat -> Nat
doble Zero      = Zero
doble (Succ n) = Succ (Succ (doble n))
```

La siguiente ecuación, ¿define un valor de tipo Nat o es un error?

```
infinito :: Nat
infinito = Succ infinito
```

Respuesta:

- ▶ Depende de cómo se interpreten las definiciones recursivas.
- ▶ Generalmente nos van a interesar las estructuras finitas.
- ▶ En Haskell se permite trabajar con estructuras infinitas.
Técnicamente hablando: en Haskell las definiciones recursivas se interpretan de manera *coinductiva* en lugar de *inductiva*.
- ▶ Ocasionalmente hablaremos de estructuras infinitas.

Tipos de datos algebraicos

Tipos de datos algebraico — caso general

En general un tipo de datos algebraico tiene la siguiente forma:

$$\begin{aligned} \text{data } T &= \text{CBase}_1 \langle \text{parámetros} \rangle \\ &\quad \dots \\ &\quad | \text{CBase}_n \langle \text{parámetros} \rangle \\ &\quad | \text{CRecursoivo}_1 \langle \text{parámetros} \rangle \\ &\quad \dots \\ &\quad | \text{CRecursoivo}_m \langle \text{parámetros} \rangle \end{aligned}$$

- ▶ Los constructores **base** no reciben parámetros de tipo T .
- ▶ Los constructores **recursivos** reciben al menos un parámetro de tipo T .
- ▶ Los valores de tipo T son los que se pueden construir aplicando constructores base y recursivos un número **finito** de veces y **sólo** esos.

(Entendemos la definición de T de forma **inductiva**).

Ejemplo: cuentas corrientes

```
type Cuenta = String
data Banco = Iniciar
           | Depositar  Cuenta Int Banco
           | Extraer    Cuenta Int Banco
           | Transferir Cuenta Cuenta Int Banco

bancoPLP = Transferir "A" "B" 3 (Depositar "A" 10 Iniciar)

saldo :: Cuenta -> Banco -> Int

saldo cuenta Iniciar = 0
saldo cuenta (Depositar cuenta' monto banco)
  | cuenta == cuenta' = saldo cuenta banco + monto
  | otherwise         = saldo cuenta banco
saldo cuenta (Extraer cuenta' monto banco)
  | cuenta == cuenta' = saldo cuenta banco - monto
  | otherwise         = saldo cuenta banco
saldo cuenta (Transferir origen destino monto banco)
  | cuenta == origen  = saldo cuenta banco - monto
  | cuenta == destino = saldo cuenta banco + monto
  | otherwise         = saldo cuenta banco
```

Ejemplo: listas

Las listas son un caso particular de tipo algebraico:

```
data Lista a = Vacía | Cons a (Lista a)
```

O, con la notación ya conocida:

```
data [a] = [] | a : [a]
```

Ejemplo: árboles binarios

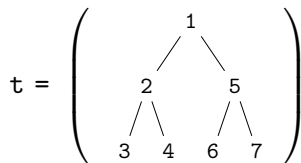
```
data AB a = Nil | Bin (AB a) a (AB a)
```

Definamos las siguientes funciones:

```
preorder  :: AB a -> [a]
```

```
postorder :: AB a -> [a]
```

```
inorder   :: AB a -> [a]
```



```
preorder t  ~>* [1, 2, 3, 4, 5, 6, 7]
```

```
postorder t  ~>* [3, 4, 2, 6, 7, 5, 1]
```

```
inorder  t  ~>* [3, 2, 4, 1, 6, 5, 7]
```

Ejemplo: árboles binarios

`insertar :: Ord a => a -> AB a -> AB a`

Pre: el árbol de entrada es un AB ordenado y sin repetidos.

Post: el árbol resultante es un AB ordenado y sin repetidos que contiene a los elementos del AB de entrada y al elemento dado.

`insertar x Nil = Bin Nil x Nil`

`insertar x (Bin izq y der)`

`| x < y = Bin (insertar x izq) y der`

`| x > y = Bin izq y (insertar x der)`

`| otherwise = Bin izq y der`

Breve repaso

Esquemas de recursión sobre listas

Tipos de datos algebraicos

Esquemas de recursión sobre otras estructuras

Recursión estructural

En el caso de las listas, dada una función $g :: [a] \rightarrow b$:

$$\begin{aligned} g [] &= \langle \text{caso base} \rangle \\ g (x : xs) &= \langle \text{caso recursivo} \rangle \end{aligned}$$

decíamos que g estaba dada por recursión estructural si:

- ▶ El caso base devuelve un valor fijo z .
- ▶ El caso recursivo se escribe usando (cero, una o muchas veces) x y $(g \ xs)$, pero sin usar el valor de xs ni otros llamados recursivos.

Recursión estructural

La recursión estructural se generaliza a tipos algebraicos en general.
Supongamos que T es un tipo algebraico.

Dada una función $g :: T \rightarrow Y$ definida por ecuaciones:

$$\begin{aligned} g \text{ (CBase}_1 \langle \text{parámetros} \rangle) &= \langle \text{caso base}_1 \rangle \\ \dots & \\ g \text{ (CBase}_n \langle \text{parámetros} \rangle) &= \langle \text{caso base}_n \rangle \\ g \text{ (CRecurso}_1 \langle \text{parámetros} \rangle) &= \langle \text{caso recursivo}_1 \rangle \\ \dots & \\ g \text{ (CRecurso}_m \langle \text{parámetros} \rangle) &= \langle \text{caso recursivo}_m \rangle \end{aligned}$$

Decimos que g está dada por **recursión estructural** si:

1. Cada caso base se escribe combinando los parámetros.
2. Cada caso recursivo se escribe combinando:
 - ▶ Los parámetros del constructor que no son de tipo T .
 - ▶ El llamado recursivo sobre cada parámetro de tipo T .

Pero:

- ▶ Sin usar los parámetros del constructor que son de tipo T .
- ▶ Sin hacer a otros llamados recursivos.

Recursión estructural

```
data AB a = Nil
          | Bin (AB a) a (AB a)
```

Ejemplo

Definamos una función `foldAB` que abstraiga el esquema de recursión estructural sobre árboles binarios.

```
foldAB :: b -> (b -> a -> b -> b) -> AB a -> b
```

```
foldAB cNil cBin Nil = cNil
```

```
foldAB cNil cBin (Bin i r d) =  
  cBin (foldAB cNil cBin i) r (foldAB cNil cBin d)
```

Recursión estructural

Ejemplo

1. ¿Qué función es `(foldAB Nil Bin)`?
2. Definir `mapAB :: (a -> b) -> AB a -> AB b` usando `foldAB`.
3. Definir `maximo :: AB a -> Maybe a` usando `foldAB`.
4. Definir `altura :: AB a -> Int` usando `foldAB`.
5. ¿Se puede definir la función `ordenado :: AB a -> Bool` usando `foldAB`?
6. ¿Se puede definir la función `caminoMasLargo :: AB a -> [a]` usando `foldAB`?

ι ι ι ι ι ι ι ι ι ι ? ? ? ? ? ? ? ? ?

Lectura recomendada

Artículo de Hutton.

Graham Hutton. *A tutorial on the universality and expressiveness of fold.*

J. Functional Programming 9 (4): 355–372, julio de 1999.

Comentarios: recursión estructural

Casos degenerados de recursión estructural sobre listas

Es recursión estructural (no usa la cabeza):

```
length :: [a] -> Int
length []          = 0
length (_ : xs) = 1 + length xs
```

Es recursión estructural (no usa el llamado recursivo sobre la cola):

```
head :: [a] -> a
head []          = error "No tiene cabeza."
head (x : _) = x
```