$P(M) = \forall \Gamma, x, \sigma, \tau, N \cdot \Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau \wedge \Gamma \vdash N:\sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x:=N\}:\tau$

Caso $\lambda y:\rho \cdot M$.

$$\forall M, y, \rho \cdot \underbrace{P(M)}_{HI} \Rightarrow \underbrace{P(\lambda y:\rho \cdot M)}_{TI}$$

Asumiendo antecedentes de TI,

Sabemos $\Gamma, x:\sigma \vdash \lambda y:\rho \cdot M : \tau$ (1)

$\Gamma \vdash N:\sigma$ (2)

Qvq $\Gamma \vdash (\lambda y:\rho \cdot M)\{x:=N\}:\tau$

por def de $\cdot\{x:=N\}$ (asumimos $y \neq x$, sino $\lambda y:\rho \cdot M\{x:=N\} = \lambda:\rho \cdot M$ y la dem es trivial)

Qvq $\Gamma \vdash \lambda y:\rho \cdot (M\{x:=N\}):\tau$ (7)

por (1) sabemos $\tau = \rho \to \gamma$ y podemos armar la derivación del juicio

$$\frac{\Gamma, x:\sigma, y:\rho \vdash M:\gamma \quad (3)}{\Gamma, x:\sigma \vdash \lambda y:\rho \cdot M : \rho \to \gamma} \text{ T-Abs}$$

Podemos aplicar la TI con $\Gamma = \Gamma, y:\rho$ $x=x$ $\sigma=\sigma$ $\tau=\gamma$ $N=N$

$$P(M) = \forall \Gamma, x, \sigma, \tau, N \cdot \Gamma, x:\sigma \vdash M:\tau \wedge \Gamma \vdash N:\sigma \Rightarrow \Gamma \vdash M\{x:=N\}:\tau$$

Sabemos pues

$\Gamma, x:\sigma, y:\rho \vdash M:\gamma$ (4) $\wedge$ $\Gamma, y:\rho \vdash N:\sigma$ (5) $\Rightarrow$ $\Gamma, y:\rho \vdash M\{x:=N\}:\gamma$ (6)

Antes de asumir (6) tenemos que ver que (4) y (5) valen.

De (2) sabemos que (5) vale.

De (3) sabemos que (4) vale

Sabemos que $\Gamma, y:\rho \vdash M\{x:=N\}:\gamma$

Veamos el árbol para (7) con $\tau = \rho \to \gamma$

$$\frac{\Gamma, y:\rho \vdash M\{x:=N\}:\gamma}{\Gamma \vdash \lambda y:\rho \cdot (M\{x:=N\}) : \rho \to \gamma} \text{ T-Abs}$$

Por (6) sabemos que el árbol existe y entonces vale (7)