

Laétitia Genechesi  
Eugénie Guest  
Roxane Leduc  
Nathan Lesourd  
Léna Lufiacre  
Manon Rose



# **Projet mathématique STPI2 – Groupe B**

## **Algèbre linéaire**

**Année 2020-2021**

## Table des matières

PRÉSENTATION DU PROBLÈME.....	3
INTRODUCTION.....	4
HISTOIRE.....	5
Histoire des déterminants:.....	5
Premiers calculs de déterminants.....	5
Des déterminants de tailles supérieures.....	5
Une notion en évolution.....	5
Une notation également en évolution constante.....	7
Une notion plus moderne et de plus en plus maîtrisée.....	7
L'apparition des matrices, une notion arrivant après celle des déterminants.....	8
Gauss ou le Prince des mathématiques.....	9
Une enfance modeste mais déjà pleine de génie.....	9
Des études brillantes remplies de découvertes.....	9
Ses premiers ouvrages et des découvertes qui ont marqués le monde des sciences.....	9
Une vie personnelle tragique.....	10
Wilhelm Jordan.....	11
Un géodésiste peu connu mais brillant.....	11
Méthode du pivot de Gauss ou élimination de Gauss-Jordan.....	11
Une origine méconnue très ancienne et lointaine à la fois.....	11
Son arrivée en Europe près de vingt siècles plus tard.....	12
ANALYSE MATHÉMATIQUE.....	14
Méthode du pivot de Gauss.....	14
Calcul du déterminant.....	17
Démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution d'un système de Cramer.....	20
Complément sur les matrices LU.....	20
ANALYSE INFORMATIQUE.....	23
Introduction.....	23
Présentation de l'algorithme.....	24
Principe du programme: [1].....	24
Présentation des résultats.....	26
Wilson :.....	26
Hilbert:.....	28
Étude des comportements des stratégies de résolution en fonction de la dimension de la matrice de Hilbert.....	30
APPLICATIONS.....	33
Équilibrage des équations chimiques :.....	38
Économie : modèle input output :.....	39
Électricité : Intensité et loi des mailles :.....	42
.....	45
CONCLUSION.....	46
BIBLIOGRAPHIE.....	47

## PRÉSENTATION DU PROBLÈME

Un système d'équations linéaires représente la base calculatoire de l'algèbre linéaire. Il s'agit d'un système du type :

$$\begin{cases} a_{1,1}x_1 + a_{1,2}x_2 + \dots + a_{1,n}x_n = \lambda_1 \\ a_{2,1}x_1 + a_{2,2}x_2 + \dots + a_{2,n}x_n = \lambda_2 \\ \vdots \\ a_{n,1}x_1 + a_{n,2}x_2 + \dots + a_{n,n}x_n = \lambda_n \end{cases}$$

Les nombres  $a_{ij}$  avec  $i \in [1,n]$  et  $j \in [1,n]$ , sont les coefficients réels du système.

Les nombres  $\lambda_i$  avec  $i \in [1,n]$  représentent le second membre.

Les nombres  $x_j$  avec  $j \in [1,n]$  sont les inconnues du système.

*Remarque* : On se concentre ici sur l'étude de systèmes dits de Cramer (systèmes de  $n$  équations à  $n$  inconnues).

Un système d'équation linéaire peut être représenté sous une forme matricielle :

**$Ax = \Lambda$**  où  $A$  est une matrice  $n \times n$ ,  $\Lambda$  est un vecteur fixé et  $X$  le vecteur inconnu.

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \dots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \dots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \dots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix} \Leftrightarrow A \cdot X = \Lambda$$

La résolution de ces systèmes d'équations linéaires peut se faire soit en appliquant la méthode du pivot de Gauss (la solution de ces systèmes carrés existe et est unique si le déterminant de la matrice  $A$  est différent de 0), soit en calculant le déterminant (à l'aide de cette même méthode) de ce système qui peut être représenté sous une forme matricielle.

# INTRODUCTION

La résolution des systèmes d'équations linéaires est un des problèmes mathématiques les plus anciens. Elle est utilisée dans de nombreux domaines : traitement numérique du signal, optimisation linéaire, ou approximation de problèmes non linéaires en analyse numérique. Avec l'arrivée des ordinateurs et l'évolution de l'informatique, diverses méthodes ont été développées visant à améliorer l'efficacité de la résolution de tels systèmes (rapidité des calculs, stabilité de la solution...). Depuis la règle de Cramer, que l'on doit au mathématicien suisse Gabriel Cramer (1704-1752), deux grandes familles de méthodes ont été développées : les méthodes directes (qui fournissent une solution en un nombre fini d'opérations, mais, si la taille du système est élevée, le nombre d'opérations l'est tout autant) et les méthodes itératives (l'idée est ici de décomposer la matrice  $A$ ).

La méthode que nous allons développer ici est une des méthodes directes, celle de la méthode du pivot de Gauss (autrement appelée méthode de Gauss-Jordan). L'idée est de transformer par étapes le système à résoudre en des systèmes plus simples, tous équivalents au système initial, jusqu'à un système résolu, sur lequel on lit directement la solution. Pour annuler des termes, la méthode de Gauss combine le fait d'échanger deux lignes, de multiplier une ligne par un réel non nul et d'ajouter une ligne à une autre. Ainsi on va chercher à se ramener à un système triangulaire (aussi appelé "système échelonné") grâce à des combinaisons linéaires successives entre les lignes (système de remontée).

Nous verrons ensuite un moyen permettant le calcul du déterminant pour une matrice carrée. Comme nous l'avons vu plus tôt, on peut écrire un système d'équations linéaires sous la forme matricielle  $AX = B$ . La matrice  $A$  et le vecteur  $B$  sont connus. La résolution du système consiste à calculer le vecteur des inconnues  $X$ . La valeur de chaque inconnue est exprimée explicitement comme quotient de deux déterminants (que l'on pourra déterminer en s'aidant de la méthode du pivot de Gauss). Une telle méthode est totalement inadaptée pour la résolution numérique des gros systèmes linéaires, car le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires et le temps de calcul sont considérables.

La rédaction de ce dossier, dans le cadre du projet mathématique, nous permettra de comprendre la méthode de résolution qu'est la méthode de Gauss-Jordan et le calcul de déterminant. Nous commencerons dans un premier temps par évoquer l'histoire du développement de la méthode de Gauss-Jordan et des premiers calculs de déterminants, nous nous attarderons ensuite sur une analyse mathématique puis informatique du problème. Nous verrons quelques applications et, pour finir, nous rédigerons une conclusion, suivie de la bibliographie comprenant les différentes références que nous avons utilisées.

# HISTOIRE

## Histoire des déterminants:

### Premiers calculs de déterminants

A l'origine, le déterminant détermine l'unicité de la solution d'un système d'équations linéaires. C'est Cardan en 1545 dans son ouvrage latin qui va introduire le premier déterminant de taille 2, sous forme d'une règle pour résoudre des systèmes de deux équations à deux inconnues. Il appellera cette formule *regula de modo*. [2]

Les déterminants de taille supérieure arriveront plus de cent ans plus tard simultanément au Japon et en Allemagne. Pourtant coupé du monde, le Japon donnera les premiers exemples de déterminants de tailles supérieures (3 et 4) grâce au Japonais Seki Kōwa. Presque au même moment, Leibniz fera de même. En 1678, Leibniz utilisa une notation à indices dans le cas d'un système de trois équations à deux inconnues, il montra en éliminant les deux inconnues que la nullité du déterminant obtenu était une condition de résolution du système. Les deux mathématiciens feront des erreurs de signes sur les tailles supérieures et leurs travaux resteront dans l'oubli. [12],[9],[13]

### Des déterminants de tailles supérieures

Les déterminants de taille quelconque, arriveront en 1748 dans un traité d'algèbre posthume de Maclaurin. Celui-ci écrira sans erreur la solution d'un système de quatre équations à quatre inconnues. On doit à Cramer en 1750, la première méthode de résolution d'un système linéaire de  $n$  équations à  $n$  inconnues mais celui-ci ne donnera aucune démonstration, cependant, il introduit les déterminants dans son traité d'*Introduction à l'analyse des courbes algébriques*. Dans ce même traité, il cherche à démontrer le rapport entre la taille de l'ensemble des solutions d'un système linéaire homogène et le degré des équations mais il n'y parvient pas. [9],[13]

C'est dans cette même année que Cramer explicite le concept de déterminant (sans utiliser le terme) et énonce une méthode de résolution des systèmes carrés, mais il ne va s'intéresser qu'aux cas où le déterminant n'est pas nul. [12] Les calculs sont complexes car basés sur la signature d'une permutation.

### Une notion en évolution

De nombreux mathématiciens vont utiliser cette notion, comme Bézout en 1764 qui publiera plus tard en 1779 son ouvrage *Théorie générale des équations algébriques* où il

utilisera les déterminants ; puis Vandermonde en 1771 et Laplace en 1772 définissent un déterminant d'ordre  $n$  par récurrence sur  $n$ , ils vont en fait développer par rapport à une colonne ou une ligne. Enfin Lagrange, en 1773, relie le calcul de déterminants et le calcul de volumes.[13]

Mais c'est Gauss en 1801 qui utilisera réellement pour la première fois la notion de déterminant dans son ouvrage *Disquisitiones arithmeticae*, il le définira comme un ensemble de nombres qui déterminent une propriété mathématique. Aujourd'hui nous le qualifions de discriminant d'une forme quadratique binaire (un polynôme homogène de degré 2 avec un nombre quelconque de variables), qui est en fait un cas particulier du déterminant moderne. Gauss s'approchera de l'obtention du théorème sur le déterminant d'un produit. Il ouvrira, de plus, la voie de l'introduction des matrices. Les déterminants  $(2,2)$  sont appelés « mineurs » de  $D$  où  $D$  est le déterminant principal du système. [2] [3]

Le déterminant dans son sens moderne sera utilisé par Cauchy, il écrira dans son article de synthèse :[13]

*« Gauss s'en est servi avec avantage dans ses Recherches analytiques pour découvrir les propriétés générales des formes du second degré, c'est-à-dire des polynômes du second degré à deux ou plusieurs variables, et il a désigné ces mêmes fonctions sous le nom de déterminants. Je conserverai cette dénomination qui fournit un moyen facile d'énoncer les résultats ; j'observerai seulement qu'on donne aussi quelquefois aux fonctions dont il s'agit le nom de résultantes à deux ou à plusieurs lettres. Ainsi les deux expressions suivantes, déterminant et résultante, devront être regardées comme synonymes. »*

Il utilisera de nouvelles notions comme l'application de transposée, ne modifiant pas le déterminant, et la formule du déterminant d'un produit. Binet proposera lui aussi une démonstration détaillée du déterminant d'un produit durant la même année. [15]

En 1812, Cauchy calcula de nombreux déterminants comme par exemple celui portant son nom  $1/(a_k + b_i)$  et s'intéressa aussi au calcul du déterminant de Vandermonde. En 1815, Cauchy proposa la règle générale du produit de deux déterminants. [13]

En 1841, Jacobi met en lumière les déterminants dans ses trois traités dans le journal de Crelle. Il est le premier à proposer des méthodes de calcul systématiques sous forme d'algorithme. Il permit le développement de l'utilisation des déterminants en algèbre et en analyse. Il est également à l'origine du jacobien en 1829. [2],[3]

Grassmann donnera en 1844 la représentation des grassmanniennes qui élargiront le sens des déterminants.

## Une notation également en évolution constante

Les mathématiciens utilisaient une notation très simple pour les déterminants jusque-là, pas de barre ou d'accolade :[3]

$$\begin{array}{ccc} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{array}$$

Cauchy, en 1840, utilisa une notation plus simple qu'en 1815, sous une forme multilinéaire alternée pour la première fois dans son fascicule Exercices d'analyse et de physique mathématique. [16]

$$\begin{Bmatrix} a, & b, & c, \\ a', & b', & c', \\ a'', & b'', & c''. \end{Bmatrix}$$

Cayley et Sylvester en 1843 et 1841 introduisent par la suite le cadre matriciel, ils sont à l'origine de la notation entre barres verticales des déterminants. Cayley établit d'ailleurs la formule de calcul de l'inverse. Encore aujourd'hui on utilise la notation laissée par les deux mathématiciens. [13]

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ a' & b' & c' \\ a'' & b'' & c'' \end{vmatrix}$$

## Une notion plus moderne et de plus en plus maîtrisée

Hoëné-Wronski utilisera les déterminants pour de nouvelles notions avec le wronskien pour les équations différentielles, on découvrira aussi les propriétés de symétrie du déterminant qui seront utilisées dans de nombreuses branches des mathématiques. [13]

Baltzer et Trudi, en 1857 et 1862 joueront un rôle majeur dans l'utilisation des déterminants et démontreront de nombreuses propriétés jusque-là jamais démontrées

notamment : « dans un système carré de déterminant nul, si le numérateur correspondant à une des inconnues dans la règle de Cramer est nul, ceux de toutes les autres inconnues le sont aussi ». [12]

Enfin en 1867, Carroll énoncera 17 propriétés sur les déterminants dans son ouvrage *Elementary Treatise on Determinants : With Their Application to Simultaneous Linear Equations and Algebraical Geometry*. [13]

## **L'apparition des matrices, une notion arrivant après celle des déterminants**

Les concepts de déterminants et de matrices sont étroitement liés en termes d'histoire, en effet ils proviennent tous deux de l'étude des systèmes d'équations linéaires au cours du XVIIIe siècle. [12]

C'est Sylvester qui donna pour la première fois le nom matrice (« matrix ») à ce nouvel instrument qu'il qualifie de tableau rectangulaire de nombres qu'il ne pouvait appeler déterminant, en 1850. Il fait très rapidement le lien entre matrice et déterminant et un an plus tard il soulignera :

« Dans des articles antérieurs, j'ai appelé *matrix* un tableau rectangulaire de termes à partir desquels plusieurs systèmes de déterminants peuvent être engendrés, comme issus des entrailles d'un parent commun »

Hamilton en 1853 et Cayley en 1858 vont par la suite définir les premiers calculs sur les matrices tels que la somme, le produit, l'associativité de la multiplication, sa distributivité par rapport à l'addition et il étudie les conditions de la commutativité mais ceux-ci seront limités aux matrices carrées d'ordre 2 et 3 uniquement. Cayley donnera d'ailleurs dans un mémoire l'inverse d'une matrice et la transposée d'un produit : *A Memoir on the Theory of Matrices*. Il traitera par la suite le cas des matrices rectangulaires où leur produit est en fait une composition de transformations. Cayley, dans son mémoire, explique la résolution des équations dans le domaine des matrices.

Cela marque une grande avancée pour celles-ci qui, jusqu'à maintenant, n'étaient utilisées qu'en lien avec les déterminants. Enfin Jordan donnera en 1870 pour la première fois une matrice de forme réduite qui sera nommée matrice de Jordan. [15] [2]



# Gauss ou le Prince des mathématiques

## Une enfance modeste mais déjà pleine de génie

Carl Friedrich Gauss est né le 30 avril 1777 à Brunswick (en Allemagne) dans une famille modeste où il est le seul enfant.[7] Sa mère est illettrée et son père sait lire et écrire, sa mère n'a d'ailleurs pu retenir sa date de naissance, elle se souvenait uniquement du jour : un mercredi, huit jours avant l'Ascension ayant lieu elle-même 40 jours après Pâques [16]. C'est le jeune Gauss qui résolut cette énigme et trouva sa date de naissance. Dès son plus jeune âge, il éprouve un intérêt particulier pour les mathématiques. A l'âge de 3 ans, il parvient à détecter une erreur de calcul dans un dossier de son père. Il rentre à l'école à l'âge de 7 ans mais, à la différence de ses camarades, il sait déjà lire et écrire. Il donnera la formule du calcul de la somme des entiers de 1 à 100 à son professeur, en lui expliquant qu'il suffisait de regrouper les nombres en 50 paquets de somme 101 :  $100+1$ ,  $99+2$ ,  $98+3$  ect .[7]

## Des études brillantes remplies de découvertes

Lors de sa 17ème année, il étudie les langues anciennes et débute l'apprentissage des mathématiques à l'université de Göttingen. Puis le 30 mars 1796 il parvient à construire à la règle et au compas un polygone régulier à 17 côtés (basé sur la racine 17ème de l'unité). C'est suite à cela qu'il décida de consacrer sa vie aux mathématiques. [17]

En 1799 il présente sa thèse de doctorat dans laquelle il démontre le théorème fondamental de l'algèbre en utilisant notamment les nombres complexes, il corrige et complète la tentative de preuve de d'Alembert, il la démontre au total quatre fois en utilisant des méthodes différentes.[5][7]

## Ses premiers ouvrages et des découvertes qui ont marqué le monde des sciences

En 1801, il publiera son célèbre ouvrage *Disquisitiones arithmeticae* (en latin), un ouvrage de 500 pages fondateur de la théorie des nombres, on retrouve notamment dans celui-ci la notion de modulo et de congruence ainsi que la démonstration de deux façons différentes de la loi de la réciprocité quadratique, qui fut conjecturée par Euler et Legendre. Cet ouvrage sera traduit en français dès 1807. On découvre par la suite l'astéroïde Cérès, Gauss chercha donc à déterminer la trajectoire de celui-ci et mis au point la méthode des moindres carrés. Grâce à son travail, on retrouve l'astéroïde au lieu précis que Gauss avait prédit un mois auparavant. Il est élu, le 12 avril 1804, membre de la Royal Society. [6],[7]

En 1807, il est nommé professeur de mathématiques et directeur de l'observatoire de Göttingen. Gauss joua un rôle très important dans la découverte des géométries non-euclidiennes notamment par le biais de son élève Riemann. En juin 1809, il publie son second livre sur la théorie du mouvement des corps célestes : *Theorica motus corporum coelestium* où apparaît pour la première fois la fameuse courbe en cloche des probabilités. [7] Puis en 1812 il s'intéresse à la série hypergéométrique, ses problèmes liés à la convergence, le calcul approché d'intégrales. Il poursuit ses recherches en astronomie à partir de 1817, celles-ci l'encouragent à améliorer les lentilles qui lui permettent d'observer le ciel. Gauss contribua donc au développement de l'optique et présenta sa méthode d'approximation de Gauss qui consiste à n'utiliser que des rayons dont les angles par rapport à l'axe optique sont très faibles (petits angles de réfraction et de réflexion). [18]

Il étudia également la géodésie et la géométrie afin de permettre à l'armée d'avoir des cartes bien plus précises. Il publie son traité de géométrie différentielle *Disquisitiones generales circa superficies curvas* en 1827, dans cet ouvrage il introduit les coordonnées curvilignes ou coordonnées de Gauss. A partir de 1828, il commença à collaborer avec Weber. Tous deux se pencheront sur la physique et étudieront le magnétisme terrestre durant 6 années. Gauss introduira pour la première fois la notion de potentiel. Tous deux formuleront 2 théorèmes fondamentaux en électromagnétisme qui sont : la non existence de monopôle magnétique et la proportionnalité entre le flux d'un champ électrique à travers une surface fermée et la charge électrique totale contenue dans cette surface. En 1831, il définira précisément les nombres complexes et, plus tard, donnera la Théorie du magnétisme terrestre. [16], [17]

## Une vie personnelle tragique

Malgré ses incroyables découvertes scientifiques, Gauss eut une vie personnelle plus que tragique.

En 1805, il se marie avec Johanna Osthoff mais celle-ci meurt en couche 4 ans plus tard en mettant au monde leur 3ème enfant qui décédera à son tour quelques mois plus tard.[7]

Il épouse moins d'un an après, Minna Waldeck la meilleure amie de Johanna mais il s'agit d'un mariage de raison et celle-ci décède d'une maladie en 1831. C'est sa fille Thérèse qui s'occupera de son père jusqu'à sa mort. Il verra mourir 2 de ses 6 enfants. En 1850, Gauss commence à souffrir de troubles cardiaques, l'hydropisie, et meurt à l'âge de 78 ans dans son sommeil, le 23 février 1855 à 1h05 du matin à Göttingen.[16]

# Wilhelm Jordan

## Un géodésiste peu connu mais brillant

Jordan est né le 1er mars 1842 à Ellwangen en Allemagne. Il fit ses études à l'Institut polytechnique de Stuttgart puis commença à travailler en tant qu'assistant ingénieur sur le projet de construction de chemin de fer pendant 2 ans puis il retourna y travailler plus tard en tant que géodésiste. Il deviendra par la suite professeur à Karlsruhe en 1868 puis participa, 6 ans plus tard, à une expédition en Libye menée par Friedrich Gerhard Rohlfs. Il devint, jusqu'à sa mort, professeur de géodésie et de géométrie pratique à l'université de Hanovre. Jordan eut aussi un grand intérêt pour la littérature et écrivit son œuvre la plus célèbre : *Handbuch der Vermessungskunde* portée sur la géodésie. Dans le domaine des mathématiques, il est célèbre pour sa collaboration avec Gauss dans la méthode de l'élimination de Gauss-Jordan notamment dans la partie algorithmique. On retrouve d'ailleurs cette méthode dans la troisième édition de 1888 de son œuvre. [18]

Souvent confondu avec Camille Jordan (à qui l'on doit de nombreux concepts sur la théorie des groupes) et Pascual Jordan à qui on attribue parfois à tort l'élimination de Gauss-Jordan.[7]

## Méthode du pivot de Gauss ou élimination de Gauss-Jordan

La méthode du pivot de Gauss, aussi appelée méthode de Gauss-Jordan est un algorithme très connu en algèbre linéaire, qui permet de trouver les solutions d'un système de plusieurs équations linéaires, de déterminer le rang d'une matrice et de calculer son inverse lorsque celle-ci est carrée et inversible. Après avoir appliqué cette méthode, on obtient la forme échelonnée réduite de la matrice. Cette méthode doit son nom aux mathématiciens Carl Friedrich Gauss et Wilhelm Jordan. [16]

## Une origine méconnue très ancienne et lointaine à la fois

Contrairement à ce que l'on peut penser cette méthode n'a pas été créée de toute pièce par les deux mathématiciens européens mais elle a vu le jour un siècle avant notre ère en Chine, les mathématiciens chinois l'ont notamment écrite dans le livre chinois *Jiuzhang Suanshu*, qui signifie en français *Les Neufs chapitres sur l'art mathématique*, il s'agit du plus ancien texte mathématique chinois connu, il est composé de 246 problèmes contenus dans neuf chapitres. On la retrouve plus précisément dans le chapitre huit, nommé « Fang cheng » ou la disposition rectangulaire. [10], [14] Selon Liu Hui, un célèbre mathématicien du III<sup>ème</sup> siècle après Jésus Christ ayant écrit plusieurs commentaires à ce sujet notamment en 263, ce serait Chang Ts'ang qui serait à l'origine de cette méthode et qui l'aurait présentée sous la forme de dix-huit exercices. Chang Ts'ang était un mathématicien et chancelier de l'empereur chinois au II<sup>ème</sup> siècle avant JC. La méthode chinoise avait pour but de résoudre des problèmes arithmétiques en colonnes parallèles,

une colonne représentait une condition linéaire imposée à un ensemble d'inconnues qu'ils appelaient « choses ». Certains calculs retrouvés avaient pour but de résoudre des problèmes liés à des sommes d'argent. Ces colonnes sont constituées de nombres posés sur une « surface à calculer » et suggèrent des ensembles de nombres qui s'apparentent à ce que l'on qualifierait aujourd'hui de matrice du système augmentée des seconds membres. Cet ensemble possède une forme carrée ou rectangulaire, c'est la raison pour laquelle les méthodes chinoises s'appelleront « fangcheng », cela signifie : répartition de nombres en carré. Les moyens de résolution vont utiliser la « multiplication partout » (biang cheng), il s'agit de la multiplication d'une colonne de nombres par un facteur identique. Celle-ci aboutit à la « réduction directe » ou zhi chu, qui correspond à la soustraction terme à terme des coefficients de deux colonnes afin d'obtenir l'élimination du coefficient de l'une des inconnues. Les mathématiciens chinois parvenaient déjà à réduire la « matrice » à la forme triangulaire et à calculer toutes les inconnues par substitutions successives. Méthode que Gauss trouvera près de 20 siècles plus tard. [4]

## **Son arrivée en Europe près de vingt siècles plus tard**

Cet algorithme arrivera en Europe bien plus tard au XIX<sup>ème</sup> siècle sous une nouvelle forme plus moderne, on la retrouve dans un ouvrage de Gauss où il présente sa méthode des moindres carrées en 1810. A l'origine, cette méthode était utilisée pour calculer les trajectoires des astéroïdes dans l'espace comme Cérès, découvert par Piazzi en 1801, mais on retrouve dans cet ouvrage, dans l'article treize, la présentation de sa méthode de résolution des systèmes à plusieurs équations linéaires. En effet, Pallas, une nouvelle planète, découverte par Olbers, pousse Gauss à déterminer à nouveau sa trajectoire de la manière la plus précise possible, c'est dans cet ouvrage qu'il va donc expliciter pour la première fois comment il met en œuvre sa méthode. Il se base sur 6 observations effectuées lorsque Pallas est proche de la Terre, il tire de ses observations 12 équations possédant 6 inconnues : l'anomalie moyenne, le mouvement diurne moyen, la longitude du périhélie, l'excentricité, la longitude du nœud et l'inclinaison. Il cherche d'abord à trouver une solution approchée et détermine 12 équations linéaires vérifiant les modifications à effectuer aux 6 inconnues. Il décide de mettre de côté la dixième équation car les données observées étaient, en fait, trop imprécises. Il possède donc 11 équations avec lesquelles il obtient 6 équations normales et 6 corrections à la fin. Il tente de résoudre le système composé des 6 équations normales. Gauss formule des remarques qui commencent à évoquer la formulation du pivot de Gauss où il cherche à se ramener à un système triangulaire.[10] [4]

A l'origine, la méthode de Maclaurin et les formules de Cramer (malgré le manque de démonstrations) auraient pu clore la question de la résolution de systèmes linéaires. Cependant, elles étaient limitées à 4 équations pour Maclaurin, et les travaux sur l'Astronomie et la Géodésie exigeaient la résolution de nombreuses équations, or le nombre de calculs devenait très vite indénombrable et conséquent ce qui rendait

l'utilisation de ces méthodes très difficiles. Le nombre d'opérations à effectuer était d'environ 300 millions de multiplications pour seulement 10 équations ! [4]

La méthode du pivot de Gauss est donc apparue dans ce contexte et avait pour but de diminuer le nombre de ces opérations. Celle-ci sera complétée quelques années plus tard par Wilhelm Jordan en 1888. C'est dans son ouvrage *Géodésie* que ce-dernier complètera cette méthode avec des notations différentes. Cette méthode sera diffusée par la suite dans tout l'Occident sous le nom de méthode du Pivot de Gauss ou l'élimination de Gauss-Jordan. Cependant cette méthode de résolution n'est pas unique, d'autres ont été mises au point mais seules 3 sont considérées comme des « méthodes exactes » : les formules de Cramer, le pivot de Gauss ou l'élimination de Gauss-Jordan et la méthode de Cholesky. Trois autres méthodes seront, elles, des « méthodes approchées » : le processus itératif de Gauss, Jacobi et Seidel. [4] [14]

L'élimination de Gauss-Jordan reste encore aujourd'hui l'une des plus connues et des plus utilisées.

## ANALYSE MATHÉMATIQUE

### Méthode du pivot de Gauss

Pour [19], la résolution de systèmes d'équations linéaires peut se faire en appliquant la méthode du pivot de Gauss.

- Dans le cas d'un système homogène (système linéaire à second membre nul), on a au moins une solution : la solution nulle. Toute combinaison linéaire des solutions d'un système homogène est une solution de ce système.

$$S_H \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 & +a_{12}x_2 & +a_{13}x_3 & +\cdots & & +a_{1n}x_n & = 0 \\ & a_{22}x_2 & +a_{23}x_3 & +\cdots & & +a_{2n}x_n & = 0 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & a_{rr}x_r & +\cdots & +a_{rn}x_n = 0 \end{array} \right.$$

- Dans le cas d'un système quelconque :

$$S \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & +\cdots & & +a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & +\cdots & & +a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & & \vdots & & \\ & & & a_{rr}x_r & +\cdots & +a_{rn}x_n & = b_r \\ & & & & & 0 & = b_{r+1} \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & 0 & = b_m \end{array} \right.$$

Si  $r = m = n$ , on aura au plus une solution unique (cas des systèmes de Cramer : la démonstration est faite plus bas).

Le système (S) est dit *incompatible* si et seulement si l'ensemble des solutions équivaut à l'ensemble vide. Il est *compatible* s'il possède au moins une solution. Deux systèmes sont dits *équivalents* s'ils ont le même ensemble de solutions.

La méthode du pivot de Gauss consiste à se ramener à un système triangulaire grâce à des combinaisons linéaires successives entre les lignes (système de remontée). Ce processus aboutit à un système échelonné puis réduit, qui conduit immédiatement aux solutions du système.

Pour [22], un système est dit *échelonné* si le nombre de coefficients nuls, en début de ligne, croît strictement ligne après ligne et est *échelonné réduit* si en plus le premier coefficient non nul d'une ligne vaut 1. Le système ci-dessous de  $m$  équations à  $r$  inconnues est donc dit échelonné. Il possède  $r$  équations principales et  $m-r$  équations auxiliaires. Les coefficients diagonaux sont non-nuls et sont appelés *pivots*. Les inconnues  $x_1 \dots x_r$  sont appelées les *inconnues principales*. Les inconnues  $x_{r+1} \dots x_m$  sont quant à elles appelées les *variables auxiliaires* ou *paramètres*.  $r$  désigne le *rang* du système.

$$S \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & a_{12}x_2 & + \cdots & & + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ & a_{22}x_2 & + \cdots & & + a_{2n}x_n & = & b_2 \\ & & \ddots & & & & \\ & & & a_{rr}x_r & + \cdots & + a_{rn}x_n & = b_r \\ & & & & & 0 & = b_{r+1} \\ & & & & & \vdots & \\ & & & & & 0 & = b_m \end{array} \right.$$

Pour [23], on effectue des combinaisons linéaires afin de parvenir à un système échelonné. On utilise principalement trois opérations élémentaires sur les équations :

→  $L_i \leftarrow \lambda L_i$  avec  $\lambda$  différent de 0 : on peut multiplier une équation par un réel non nul.

→  $L_i \leftarrow L_i + \lambda L_j$  avec  $\lambda \in \mathbb{R}$  (et  $j$  différent de  $i$ ) : on peut ajouter à l'équation  $L_i$  un multiple d'une autre équation  $L_j$ .

→  $L_i \leftrightarrow L_j$  : on peut échanger deux équations.

*Remarques :*

→ Le "pivot" est le premier coefficient de la ligne d'équation. Il reste inchangé par combinaison linéaire.

→ Les pivots les plus favorables sont +1 ou -1. Il est donc utile d'échanger les lignes pour avoir un pivot égal à +1 ou -1.

→ L'algorithme n'utilise que des opérations sur les lignes, pas sur les colonnes.

Considérons le système suivant :

$$(S) : \left\{ \begin{array}{ccccccc} a_{11}x_1 + & \dots & + & a_{1j}x_j & + & \dots & + & a_{1p}x_p & = & b_1 \\ a_{21}x_1 + & \dots & + & a_{2j}x_j & + & \dots & + & a_{2p}x_p & = & b_2 \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{i1}x_1 + & \dots & + & a_{ij}x_j & + & \dots & + & a_{ip}x_p & = & b_i \\ \vdots & & & \vdots & & & & \vdots & & \vdots \\ a_{n1}x_1 + & \dots & + & a_{nj}x_j & + & \dots & + & a_{np}x_p & = & b_n \end{array} \right.$$

Dans notre cas, on s'intéresse aux systèmes linéaires que l'on peut mettre sous la forme de matrices carrées, donc on prend  $p=n$ .

On veut que le coefficient  $a_{11}$  soit non nul :

→ Si  $a_{11}$  est non nul, on ne change rien.

→ Sinon, on cherche un coefficient non nul  $a_{i1}$  sur la première colonne et on échange les lignes 1 et i. Cependant, si la première colonne n'est constituée que de coefficients nuls, on ignore alors définitivement cette colonne, et on recommence avec la deuxième colonne.

Ici, on fait l'hypothèse que  $a_{11}$  est non nul. Ce coefficient est le pivot. Pour éliminer les coefficients sous le pivot en première colonne, on effectue les opérations élémentaires suivantes :

$$(S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a_{21}x_1 + \dots + a_{2j}x_j + \dots + a_{2p}x_p = b_2 & L_2 \leftarrow a_{11}L_2 - a_{21}L_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{i1}x_1 + \dots + a_{ij}x_j + \dots + a_{ip}x_p = b_i & L_i \leftarrow a_{11}L_i - a_{i1}L_1 \\ \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nj}x_j + \dots + a_{np}x_p = b_n & L_n \leftarrow a_{11}L_n - a_{n1}L_1 \end{cases}$$

On obtient alors un système (S') dans lequel, à l'exception du pivot, les coefficients de la première colonne s'annulent comme suit :

$$(S') : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1j}x_j + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a'_{22}x_2 + \dots + a'_{2j}x_j + \dots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ \vdots \\ a'_{i2}x_2 + \dots + a'_{ij}x_j + \dots + a'_{ip}x_p = b'_i \\ \vdots \\ a'_{n2}x_2 + \dots + a'_{nj}x_j + \dots + a'_{np}x_p = b'_n \end{cases}$$

Cette première étape étant terminée, déplaçons-nous en deuxième colonne. Nous faisons alors l'hypothèse que le pivot  $a'_{22}$  est non nul. L'objectif est alors d'éliminer les coefficients sous ce nouveau pivot. On effectue les opérations élémentaires suivantes :  $L_i \leftarrow a'_{22}L_i - a'_{i2}L_2$  pour i variant de 3 à n.

On obtient alors un système (S'') dans lequel, à l'exception des pivots et des termes qui les précèdent éventuellement en colonne, les coefficients des deux premières colonnes s'annulent comme suit :

$$(S'') : \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 + \dots + a_{1p}x_p = b_1 \\ a'_{22}x_2 + a'_{23}x_3 + \dots + a'_{2p}x_p = b'_2 \\ a''_{33}x_3 + \dots + a''_{ip}x_p = b''_i \\ \vdots \\ a''_{n3}x_3 + \dots + a''_{np}x_p = b''_n \end{cases}$$



On poursuit ainsi la mise sous forme échelonnée de la matrice du système. A un moment donné, il est possible qu'un pivot soit nul. On échange alors l'équation concernée avec l'une des équations suivantes de manière à obtenir un pivot non nul. Il est également possible que tous les pivots potentiels pour passer à l'étape suivante soient nuls. L'algorithme s'arrête lorsqu'on a épuisé toutes les colonnes (au bout de  $n$  itérations). Le système est alors échelonné et le rang de la matrice est le nombre de lignes non nulles. A la fin de ces étapes, on peut résoudre le système linéaire puisqu'il est alors sous forme triangulaire.

On trouvera des exemples de résolution de tels systèmes dans les parties analyse informatique et application du présent document.

## Calcul du déterminant

Selon [20], le calcul du déterminant permet de savoir si une matrice est inversible (déterminant non nul) ou non (déterminant nul) et, de façon plus générale, il joue un rôle important dans le calcul matriciel et la résolution de systèmes linéaires. On peut caractériser un déterminant comme une application, qui, à une matrice carrée d'ordre  $n$ , associe un scalaire dans l'espace vectoriel.

*Remarque* : on peut en effet écrire un système d'équations linéaires sous la forme matricielle  $AX = B$ . La matrice  $A$  et le vecteur  $B$  sont connus. La résolution du système consiste à calculer le vecteur des inconnues  $X$ . La valeur de chaque inconnue est exprimée explicitement comme quotient de deux déterminants. Au dénominateur, se retrouve systématiquement le déterminant de la matrice  $A$ . Quant au numérateur, il résulte du calcul du déterminant d'une nouvelle matrice carrée d'ordre  $n$ . Si  $x_i$  est la  $i$ -ième composante du vecteur  $X$ , cette nouvelle matrice est constituée de  $A$  dans laquelle les coefficients de  $B$  se substituent à sa  $i$ -ième colonne. Le quotient de ces déterminants correspond à la valeur de la  $i$ -ième composante de l'inconnue  $X$ . Une telle méthode est totalement inadaptée pour la résolution numérique des gros systèmes linéaires, car le nombre d'opérations arithmétiques élémentaires et le temps de calcul sont considérables. On peut faire un rapide exemple pour le cas d'une matrice  $2 \times 2$  :

On pose la matrice  $A : \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ . Ainsi que le vecteur  $B : \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}$ . On déduit les solutions  $x, y$  du vecteur des inconnues  $X$  en résolvant ceci (résolution simple car le déterminant d'une matrice  $2 \times 2$  est  $ad-bc$ : avec  $ab$  en première ligne et  $cd$  en seconde) :

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 4 & 1 \\ -1 & 3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = \frac{13}{5}, \quad y = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 3 \end{vmatrix}} = -\frac{6}{5}.$$

On cherche maintenant à calculer le déterminant d'une matrice  $A$  carrée quelconque appartenant à l'ensemble des matrices réelles.

$$A = \begin{pmatrix} a_{1;1} & \cdots & a_{1;n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n;1} & \cdots & a_{n;n} \end{pmatrix}$$

On le note :

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

On peut remarquer que :

- le déterminant de A ne change pas lorsque :

- On ajoute à une colonne de A une combinaison linéaire des autres colonnes de A.
- On ajoute à une ligne de A une combinaison linéaire des autres lignes de A.

- le déterminant de A change en son opposé lorsque :

- On permute deux lignes ou deux colonnes.

*Quelques propriétés issues de [24]* : si tous les éléments d'une même colonne ou d'une même ligne sont multiples d'un même nombre, ce nombre peut être mis en facteur du déterminant, si une colonne (resp. ligne) s'écrit comme la somme de deux colonnes (resp. lignes), on peut écrire le déterminant comme somme de deux déterminants. Enfin, si une colonne (resp. ligne) est nulle ou que deux colonnes (resp. lignes) sont égales ou qu'une colonne (resp. ligne) est une combinaison linéaire des autres, le déterminant est nul.

Soit A une matrice carrée. D'après [25], la méthode algorithmique du pivot de Gauss nous permet, dans un premier temps, par transformations successives, de faire apparaître des zéros sous la diagonale donnant une matrice triangulaire supérieure :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

On note le déterminant de cette matrice  $\det(A)$  et on factorise par linéarité par rapport à la première colonne (pivot de Gauss) :

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Puis, on soustrait de chaque colonne notée  $C_j$ , pour  $j > 2$ , la colonne notée  $C_1$  multipliée par  $-a_{1j}$ . C'est l'opération élémentaire  $C_j \leftarrow C_j - a_{1j}C_1$ , on obtient alors :

$$\det A = a_{11} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}.$$

Puis de même, par linéarité avec la deuxième colonne, on obtient :

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & 0 & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix},$$

Et ainsi de suite, par linéarité sur toutes les colonnes, au bout de  $n$  étapes, on obtient :

$$\det A = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{vmatrix} = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots a_{nn} \cdot \det I_n,$$

avec  $\det I_n = 1$ . Le déterminant est donc égal au produit des éléments diagonaux de la matrice triangulaire initiale.

*Remarque* : Dire que  $\det(A) \neq 0$  équivaut à dire que  $A$  est inversible. Dans ce cas,  $\det(A^{-1}) = (\det(A))^{-1}$ .

Développons selon une ligne ou une colonne.

Soit  $A = (a_{i,j}) \in M_n(R)$ , une matrice carrée d'ordre  $n$ . On appelle *mineur* d'indice  $(i_0, j_0)$ , le nombre :  $\Delta_{i_0, j_0} = (-1)^{i_0+j_0} \det(A_{i_0, j_0})$ , où  $A_{i_0, j_0}$  est la matrice carrée d'ordre  $n-1$  obtenue à partir

de la matrice A, en supprimant sa  $i_0^{\text{ième}}$  ligne et sa  $j_0^{\text{ième}}$  colonne. On a finalement :  $\det(A) = \sum a_{i_0 j} \Delta_{i_0 j} = \sum a_{i_0 j_0} \Delta_{i_0 j_0}$ .

**Remarque :** On appelle *déterminant de Vandermonde* et on note  $V(x_0 \dots x_n)$ , le déterminant de la matrice  $(x_i^j)_{0 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n}$ . Alors,

$$V(x_0 \dots x_n) = \begin{vmatrix} 1 & x_0 & \dots & x_0^n \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & x_n & \dots & x_n^n \end{vmatrix} = \prod_{i < j} (x_j - x_i).$$

Ce déterminant est donc nul si et seulement si les nombres  $(x_0 \dots x_n)$  sont deux à deux distincts.

## Démonstration de l'existence et de l'unicité de la solution d'un système de Cramer

**[21]** Les solutions de systèmes linéaires peuvent être de différents types : elles peuvent en effet être uniques dans des conditions bien particulières (dans le cas d'un système de Cramer) sinon, soit elles n'existent pas, soit il y en a une infinité.

Comme nous l'avons vu plus tôt, un système de Cramer est un système linéaire de la forme :

$$\text{Soit } (S) : \begin{cases} a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n = d_1 \\ \vdots \\ a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n = d_n \end{cases}.$$

Qui peut se traduire par une matrice carrée ( $n=p$ ), avec  $\det(S) \neq 0$ . On appelle  $\det(S)$  le déterminant de la matrice M, avec :

$$M = \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Ce système a une solution unique. Effectivement, on peut écrire le système (S) sous la forme  $M.X = D$ . Or, on sait que le système est de Cramer, donc  $\det(S) \neq 0$ , c'est-à-dire  $\det(M) \neq 0$ , donc M est inversible, donc  $(S) \Leftrightarrow M.X = D \Leftrightarrow X = M^{-1}.D$  avec les coefficients de  $M^{-1}$  et D fixés, donc la matrice solution X est unique.

## Complément sur les matrices LU

Selon **[27]**, la décomposition LU est une forme particulière d'élimination de Gauss-Jordan. User de cette décomposition à un intérêt indéniable. En effet, dès que l'on doit résoudre plusieurs systèmes partageant une même matrice A mais avec des seconds

membres B distincts, on préférera utiliser ce type de méthode afin de ne pas retriangulariser A à chaque fois.

Soit A une matrice carrée d'ordre n. On dit que A admet une décomposition LU **unique** s'il existe une matrice triangulaire inférieure réduite (c'est-à-dire une matrice dont les éléments diagonaux valent 1), notée L (pour *low*), et une matrice triangulaire supérieure, notée U (pour *up*), qui vérifient l'égalité  $A = LU$ . Cette décomposition existe si au cours de l'élimination de Gauss sur la matrice A, les pivots sont non nuls (pour une matrice inversible, la décomposition LU existe si et seulement si toutes les sous-matrices principales d'ordre 1 à n-1 sont inversibles).

*Remarque* : Pour bien comprendre cette décomposition, on joint ci-dessous la forme générale des matrices L et U :

$$L = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ l_{21} & 1 & & \\ \vdots & \vdots & \ddots & \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & 1 \end{bmatrix} \quad U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ & & \ddots & u_{n-1,n} \\ & & & u_{nn} \end{bmatrix}$$

Pour démontrer l'unicité de cette décomposition, nous reprenons de [26] diverses propriétés des matrices triangulaires. Un produit de matrices triangulaires inférieures (resp. supérieures) reste une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure). De même, l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure) est une matrice triangulaire inférieure (resp. supérieure).

Démonstration de l'unicité issue de [28] : raisonnons par l'absurde en supposant l'existence de deux décompositions :  $A = L_1 U_1 = L_2 U_2$  où  $L_1$  et  $L_2$  sont inversibles, puisqu'elles ont une diagonale unité. Les matrices  $U_1$  et  $U_2$  sont inversibles puisque A l'est aussi. Donc on peut écrire  $(L_2)^{-1} L_1 = U_2 (U_1)^{-1}$ . Or,  $(L_2)^{-1} L_1$  est triangulaire inférieure à diagonale unité et  $U_2 (U_1)^{-1}$  est triangulaire supérieure. Cette expression n'est possible que si de part et d'autre de l'égalité, les produits de matrices sont des matrices diagonales réduites (c'est-à-dire encore la matrice identité), ainsi,  $L_1 = L_2$  et  $U_1 = U_2$ .

Selon [27], l'algorithme de décomposition LU est itératif. Il vise, par itérations successives à décomposer progressivement A sous forme d'un produit de matrices triangulaires inférieures d'une part et triangulaires supérieures d'autre part. Afin de construire L et U on va utiliser l'élimination de Gauss en « se souvenant » des opérations faites. A la fin de la triangularisation de A on obtient U. Une étape de l'élimination revient à multiplier A par une matrice  $M^{(k)}$ . On a :  $m_i^k = -a_{ik} / a_{kk}$  (la matrice  $M^{(k)}$  est une matrice identité pour laquelle les éléments sous-diagonaux de la k-ième colonne sont les coefficients  $m_i^k$ ) :

$$M^{(k)} = \begin{pmatrix} \overset{k^{\text{e}} \text{ colonne}}{1} & & & \\ & \ddots & & \\ & & 1 & \\ & & m_{k+1}^k & \ddots \\ & & \vdots & \ddots & 1 \\ & & m_n^k & & & 1 \end{pmatrix}$$

Notons  $M$  le produit  $M^{(n-1)} \dots M^{(k)} \dots M^{(1)}$ . On obtient  $MA = U$ , or, du fait du constat fait plus tôt, de l'unicité de la décomposition et comme l'inverse d'une matrice triangulaire inférieure est une matrice triangulaire inférieure, cela nous prouve que la matrice  $U$  obtenue est celle de la décomposition LU et que la matrice  $M$  est l'inverse de la matrice  $L$  recherchée. Pour calculer la matrice  $L$  il faut inverser les  $L^{(i)}$  et calculer le produit :  $L = M^{(1)-1} \dots M^{(n-1)-1}$ . Donc  $M^{(k)}$  est inversible d'inverse  $L^{(k)}$ .

Il n'est pas toujours vrai qu'une matrice  $A$  admet une décomposition LU. Cependant dans certains cas, en permutant des lignes de  $A$  (inversible), la décomposition devient possible. On obtient alors une décomposition de la forme  $A = PLU$ , où  $P$  est une *matrice de permutation*. Bien que les décompositions **LU** et **PLU** conduisent à des formules distinctes, généralement quand on parle de la décomposition LU, on fait référence à l'une ou l'autre de ces décompositions.

Cette factorisation matricielle permet de résoudre plusieurs systèmes d'équations linéaires dans lesquels les coefficients des inconnues restent inchangés, mais avec des seconds membres qui sont à chaque fois différents. La résolution est facilitée du fait de la forme triangulaire des matrices. On va déterminer le vecteur  $x$  d'inconnues associé au second membre  $b$  :  $Ax = b$ . Ce problème est donc équivalent à la résolution du système linéaire **LU**  $x = b$  (la méthode de Gauss va s'exécuter en  $n-1$  étapes qui vont viser à triangulariser progressivement le système linéaire par transformations successives), que l'on peut mettre, en posant  $Ux = y$ , sous la forme : **Ly** =  $b$ . On détermine dans un premier temps les composantes de  $y$  par des substitutions élémentaires (étape dite de *descente*) :

$$Ly = b \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = b_1/l_{11} \\ y_i = \frac{1}{l_{ii}}(b_i - \sum_{j=1}^{i-1} l_{ij}y_j) \quad \forall i = 2, 3, \dots, n. \end{cases}$$

Dans un second temps, on calcule les composantes du vecteur  $x$  en résolvant le système triangulaire supérieur :  $Ux = y$ , ce qui se fait de manière similaire, mais en calculant d'abord  $x_n$  :  $x_n = y_n / U_{nn}$  etc. en remontant (étape dite de *remontée*) :

$$Ux = y \Leftrightarrow \begin{cases} x_n = y_n/u_{nn} \\ x_i = \frac{1}{u_{ii}}(y_i - \sum_{j=i+1}^n u_{ij}x_j) \quad \forall i = n-1, n-2, \dots, 1. \end{cases}$$

En algèbre linéaire, les *mineurs* d'une matrice carrée sont les déterminants de ses sous-matrices carrées. Ainsi, on appelle *mineur d'ordre k* le déterminant d'une sous-matrice carrée de taille  $k$  obtenue en supprimant  $n - k$  lignes et  $n - k$  colonnes de la matrice initiale. On dit que le *mineur* est *principal* si c'est le déterminant d'une sous-matrice de  $A$  obtenue en extrayant les lignes et colonnes de mêmes indices.

Si  $A$  est décomposée sous forme LU, son déterminant se calcule facilement :  $\det(A) = \det(L) \det(U)$ . Avec  $\det(L) = 1$  donc  $\det(A) = \det(U) = \pm \prod u_{ii}$  (le signe du déterminant dépend du nombre de permutations de lignes effectuées durant la décomposition).

Soit  $A_k$  (respectivement  $L_k$  et  $U_k$ ) une sous matrice principale de  $A$  (resp. de  $L$  et  $U$ ) d'ordre  $k$  et qui représente les  $k$  premières étapes sur la matrice  $A$  (resp.  $L$  et  $U$ ). Donc on a  $A_k = L_k U_k$  et  $\det(A_k) = \det(L_k) \det(U_k)$ . Or  $\det(L) = \det(L_k) = 1$ , donc  $\det(A_k) = \det(U_k)$ . Il s'agit

du produit des  $k$  premiers pivots. Donc *le mineur principal* d'ordre  $k$  de la matrice  $A$  est le produit des  $k$  premiers pivots.

*Remarque* : D'après [28], on peut déterminer la complexité de cette méthode de Gauss en déterminant le nombre d'opérations effectuées. Finalement, on obtient un coût total de l'ordre de  $(2n^3/3)$  opérations.

# ANALYSE INFORMATIQUE

## Introduction

Avant tout propos et avant même de parler du fonctionnement du programme, il est important d'énoncer le problème majeur de l'analyse informatique : sa dimension discrète. En effet, un ordinateur ne peut pas traiter des nombres à virgule infini tel que  $\pi$ , il doit en faire une approximation. Cette précision va dépendre de l'espace de stockage alloué par l'ordinateur à la variable. Plus le nombre d'octet (8 bits) alloué sera élevé, plus la précision sera grande par la même occasion. Voici ci-dessous un tableau récapitulatif des nombres d'octets alloués en fonction des types de variables sous Pascal.

[29]

### Types réels

Type	Intervalle positif approximatif	Chiffres significatifs	Taille en octets
Real48	2.9e-39 .. 1.7e+38	11-12	6
Single	1.5e-45 .. 3.4e+38	7-8	4
Double	5.0e-324 .. 1.7e+308	15-16	8
Real	5.0e-324 .. 1.7e+308	15-16	8
Extended	• Plates-formes 32 bits : 3.4e-4932 .. 1.1e+4932	10-20	10
	• Plates-formes 64 bits : 5.0e-324 .. 1.7e+308	15-16	8
Comp	$-2^{63}+1$ .. $2^{63}-1$	10-20	8
Currency	-922337203685477.5808 .. 922337203685477.5807	10-20	8

Pour la suite de notre programme nous remplirons des matrices avec des flottants (réels). Afin de pouvoir déclarer ces matrices nous utiliserons le type Real enregistré sur 8 octets signé (allant de 5,010-324 à 1,710+308). La précision est donc élevée puisque notre matrice est composée de coefficients ayant chacun 16 chiffres significatifs (le choix que nous avons fait pour notre affichage [30]).

Néanmoins ce ne sera pas la précision finale du résultat. Effectivement, les nombreuses itérations (addition, multiplication, division) pour obtenir les solutions du système vont amener aussi de nouvelles imprécisions. Par conséquent, ayant conscience de cette imprécision il sera intéressant par la suite de confronter notre résultat informatique à celui théorique.



## Présentation de l'algorithme

L'objectif de cette partie va être d'automatiser la résolution des systèmes d'équations linéaires à l'aide de la méthode du pivot de Gauss. Pour se faire nous allons réaliser un programme pascal. La modélisation des équations linéaires se fera sous forme matriciel et par conséquent de tableau pour la programmation **[31]**.

$a_{1,1}$	$a_{1,2}$	...	$a_{1,n}$	$\lambda_1$
$a_{2,1}$	$a_{2,2}$	...	$a_{2,n}$	$\lambda_2$
$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$	$\vdots$
$a_{n,1}$	$a_{n,2}$	...	$a_{n,n}$	$\lambda_n$

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & \cdots & a_{1,n} \\ a_{2,1} & a_{2,2} & \cdots & a_{2,n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n,1} & a_{n,2} & \cdots & a_{n,n} \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}$$

### Principe du programme :

**[32]**

Première étape :

Elle consiste à choisir une ligne dont le coefficient de  $x_1$  est non nul et à la mettre en première ligne. Ce coefficient est appelé pivot de Gauss. Pour des raisons de commodité de calculs, on pourra privilégier une ligne ayant un pivot égal à 1 s'il existe sinon celle avec la valeur absolue maximale du pivot. On verra dans le développement que ce dernier choix peut être contesté.

Deuxième étape :

On cherche ensuite à annuler toute la colonne en dessous du pivot choisi, en effectuant les actions élémentaires de Gauss utilisant la première ligne.

Troisième étape :

La première ligne ne changera plus. On réitère les deux étapes précédentes pour le sous-système constitué des  $n-1$  autres lignes. On continue jusqu'à la fin pour les sous-systèmes restants. Finalement on trouve un système échelonné.

Afin de mieux appréhender les différentes itérations présentées ci-dessus et pour faciliter le codage ultérieurement nous avons réalisé un exemple généralisé pour un système à 3 équations et 3 inconnues **[33]** :

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda_1 & L_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = \lambda_2 & L_2 \\ a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = \lambda_3 & L_3 \end{array}$$
  

$$\begin{array}{ll} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda_1 & L_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = \lambda_2^{(1)} & L_2 \rightarrow L_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}L_1 \\ 0 + a_{32}^{(1)}x_2 + a_{33}^{(1)}x_3 = \lambda_3^{(1)} & L_3 \rightarrow L_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}L_1 \end{array}$$

$$a_{22}^{(1)} = a_{22} - \frac{a_{21}a_{12}}{a_{11}} \quad a_{23}^{(1)} = a_{23} - \frac{a_{21}a_{13}}{a_{11}} \quad \lambda_2^{(1)} = \lambda_2 - \frac{a_{21}}{a_{11}}\lambda_1$$

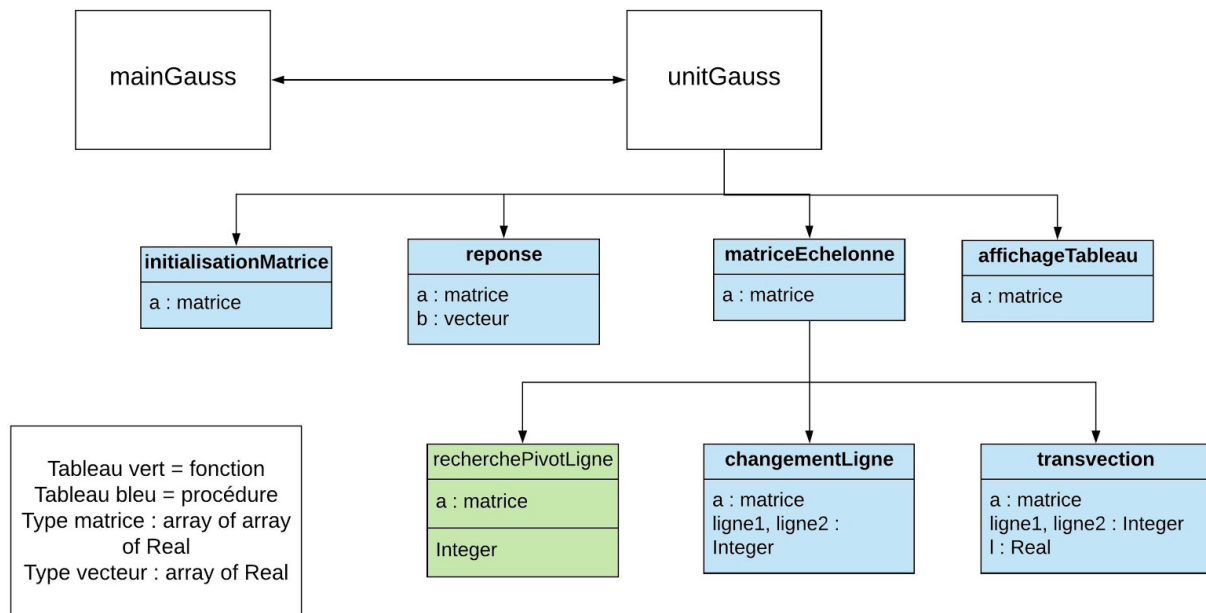
$$a_{32}^{(1)} = a_{32} - \frac{a_{31}a_{12}}{a_{11}} \quad a_{33}^{(1)} = a_{33} - \frac{a_{31}a_{13}}{a_{11}} \quad \lambda_3^{(1)} = \lambda_3 - \frac{a_{31}}{a_{11}}\lambda_1$$

$$\begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = \lambda_1 & L_1 \\ 0 + a_{22}^{(1)}x_2 + a_{23}^{(1)}x_3 = \lambda_2^{(1)} & L_2 \\ 0 + 0 + a_{33}^{(2)}x_3 = \lambda_3^{(2)} & L_3 \rightarrow L_3 - \frac{a_{32}}{a_{22}}L_2 \end{array}$$

$$a_{33}^{(2)} = a_{33}^{(1)} - \frac{a_{32}}{a_{22}} a_{23}^{(1)} \quad \lambda_3^{(2)} = \lambda_3^{(1)} - \frac{a_{32}}{a_{22}} \lambda_2^{(1)}$$

Pour commencer et structurer nos idées, nous avons réalisé une analyse descendante de notre programme [34] :

#### Résolution d'un système d'équation linéaire grâce à la méthode du pivot de Gauss



## Présentation des résultats

Afin de vérifier le bon fonctionnement du programme et de l'utiliser, nous avons traité les deux exemples suivants : la résolution du système de Wilson et de Hilbert.

### Wilson :

La matrice suivante décrit la matrice de Wilson.

On retrouve un système linéaire avec 4 équations et 4 inconnues. Le second membre n'a pas d'importance dans la matrice de Wilson. Néanmoins afin de faciliter l'étude des solutions puis la comparaison avec le modèle théorique nous allons chercher à avoir 4 solutions qui sont 1. Pour obtenir de telles solutions, il faut que le second membre (colonne 5) se compose ligne par ligne de la somme des coefficients de chaque ligne.

$$\begin{pmatrix} 10 & 7 & 8 & 7 & 32 \\ 7 & 5 & 6 & 5 & 23 \\ 8 & 6 & 10 & 9 & 33 \\ 7 & 5 & 9 & 10 & 31 \end{pmatrix}$$

Suite à l'initialisation de la matrice avec le format Real [35] pour les coefficients on peut procéder à une disjonction de cas. Lorsque que l'on choisit comme pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue maximale OU ALORS on choisit comme pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue minimale.

#### 1) Choix du pivot : pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue maximale

```
C:\WINDOWS\SYSTEM32\cmd.exe
Voici ci-dessous 1 exemple de Wilson:
Voici votre matrice initialisee :
  x1      x2      x3      x4      |
1 10.000000000000000 7.000000000000000 8.000000000000000 7.000000000000000 32.000000000000000
2 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
3 8.000000000000000 6.000000000000000 10.000000000000000 9.000000000000000 33.000000000000000
4 7.000000000000000 5.000000000000000 9.000000000000000 10.000000000000000 31.000000000000000

1e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 10.000000000000000 7.000000000000000 8.000000000000000 7.000000000000000 32.000000000000000
2 0.0000000000000004 0.1000000000000003 0.4000000000000004 0.1000000000000003 0.6000000000000014
3 8.000000000000000 6.000000000000000 10.000000000000000 9.000000000000000 33.000000000000000
4 7.000000000000000 5.000000000000000 9.000000000000000 10.000000000000000 31.000000000000000
```

Les itérations intermédiaires sont à retrouver dans les fichiers .txt de résultat des exemples.

```
6e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 10.000000000000000 7.000000000000000 8.000000000000000 7.000000000000000 32.000000000000000
2 -0.0000000000000004 0.3999999999999997 3.5999999999999996 3.3999999999999995 7.399999999999986
3 0.0000000000000006 -0.0000000000000000 2.4999999999999996 4.2499999999999973 6.749999999999947
4 0.0000000000000007 -0.0000000000000000 -0.0000000000000000 0.1000000000000028 0.1000000000000034

Les reponses sont:
x1 = 0.9999999999999748 x2 = 1.0000000000000417 x3 = 0.999999999999896 x4 = 1.0000000000000062

Les mineurs principaux sont:
m1 = 10.000000000000000 m2 = 0.3999999999999997 m3 = 2.4999999999999996 m4 = 0.1000000000000028
```

## 2) Choix du pivot : pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue minimale

```
C:\WINDOWS\SYSTEM32\cmd.exe
Voici ci-dessous 1 exemple de Wilson:
Voici votre matrice initialisee :
  x1      x2      x3      x4      |
1 10.000000000000000 7.000000000000000 8.000000000000000 7.000000000000000 32.000000000000000
2 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
3 8.000000000000000 6.000000000000000 10.000000000000000 9.000000000000000 33.000000000000000
4 7.000000000000000 5.000000000000000 9.000000000000000 10.000000000000000 31.000000000000000

1e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
2 -0.0000000000000002 -0.1428571428571430 -0.5714285714285716 -0.1428571428571430 -0.8571428571428579
3 8.000000000000000 6.000000000000000 10.000000000000000 9.000000000000000 33.000000000000000
4 7.000000000000000 5.000000000000000 9.000000000000000 10.000000000000000 31.000000000000000

2e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
2 -0.0000000000000002 -0.1428571428571430 -0.5714285714285716 -0.1428571428571430 -0.8571428571428579
3 0.0000000000000004 0.2857142857142860 3.1428571428571432 3.2857142857142860 6.7142857142857153
4 7.000000000000000 5.000000000000000 9.000000000000000 10.000000000000000 31.000000000000000

3e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
2 -0.0000000000000002 -0.1428571428571430 -0.5714285714285716 -0.1428571428571430 -0.8571428571428579
3 0.0000000000000000 0.2857142857142860 3.1428571428571432 3.2857142857142860 6.7142857142857153
4 0.0000000000000000 0.0000000000000000 3.0000000000000000 5.0000000000000000 8.0000000000000000

4e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
2 -0.0000000000000002 -0.1428571428571430 -0.5714285714285716 -0.1428571428571430 -0.8571428571428579
3 0.0000000000000000 0.0000000000000000 2.0000000000000000 3.0000000000000000 5.0000000000000000
4 0.0000000000000000 0.0000000000000000 3.0000000000000000 5.0000000000000000 8.0000000000000000

5e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
2 -0.0000000000000002 -0.1428571428571430 -0.5714285714285716 -0.1428571428571430 -0.8571428571428579
3 0.0000000000000000 0.0000000000000000 2.0000000000000000 3.0000000000000000 5.0000000000000000
4 0.0000000000000000 0.0000000000000000 3.0000000000000000 5.0000000000000000 8.0000000000000000

6e etape :
  x1      x2      x3      x4      |
1 7.000000000000000 5.000000000000000 6.000000000000000 5.000000000000000 23.000000000000000
2 -0.0000000000000002 -0.1428571428571430 -0.5714285714285716 -0.1428571428571430 -0.8571428571428579
3 0.0000000000000000 0.0000000000000000 2.0000000000000000 3.0000000000000000 5.0000000000000000
4 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.0000000000000000 0.5000000000000000 0.5000000000000000

Les reponses sont:
x1 = 0.9999999999999990 x2 = 1.0000000000000016 x3 = 1.0000000000000000 x4 = 1.0000000000000000

Les mineurs principaux sont:
m1 = 7.0000000000000000 m2 = -0.1428571428571430 m3 = 2.0000000000000000 m4 = 0.5000000000000000
```

Il est intéressant de constater ce que l'on avait énoncé en introduction, la dimension discrète du calcul d'un ordinateur amène des imprécisions. En revanche, ces imprécisions vont pouvoir être diminuées en fonction de la stratégie de résolution du système. Le choix du pivot en fait partie. Théoriquement, le choix le plus judicieux est de choisir 1 comme pivot s'il existe ou alors la valeur absolue maximale. Pourquoi ce choix, car lors de la transvection on divise toute une ligne par le pivot donc plus le pivot est élevé, plus les coefficients remplissant la matrice seront faibles avec des imprécisions relatives aussi plus faibles. Dans la pratique c'est tout autre chose puisque la stratégie obtenant les solutions qui s'approchent le plus du modèle théorique est la seconde stratégie.

Alors comment l'expliquer ? Certains pivots vont entraîner plus ou moins de décimal (cas de  $\frac{1}{3}$  qui engendre un nombre de décimal infini). Ces pivots que l'on appelle aussi mineurs

principaux (liste affichée sur le programme) ne sont pas les mêmes en fonction des deux stratégies. C'est cette liste qui explique l'imprécision de la méthode 1 car 3 des mineurs principaux de celle-ci ne sont pas des entiers contre seulement 1 seul pour la seconde méthode.

Par conséquent, la bonne stratégie pour un nombre d'itération restreint (ici maximum 10 itérations pour une solution) ne peut être connue à l'avance. Elle relève d'une part de hasard, et doit être choisie après l'application et la comparaison des deux stratégies.

On verra dans le second exemple si une des stratégies tire son épingle du jeu lorsque le nombre d'itérations devient important. On notera que le fait de changer les lignes de la matrice deux à deux lors de la recherche du pivot n'impacte pas la précision du calcul puisqu'il n'y a pas de calcul à proprement dit.

Étudions maintenant plus précisément les solutions obtenues avec la seconde stratégie qui s'est avérée la meilleure (voir ci-dessus le programme détaillé). Sur les quatre solutions obtenues seules deux sont en accord avec le modèle théorique, c'est à dire égal à 1. On peut tout de même remarquer que ces imprécisions parviennent après peu d'itérations : 7 itérations pour x4, 8 itérations pour x3, 9 itérations pour x2 et 10 itérations pour x1.

Grâce à ces quelques résultats on se rend compte que plus le nombre d'itérations est grand pour obtenir une solution, plus elle s'éloigne de la solution théorique. Cette dernière affirmation se confirme puisque x3 et x4 sont égales aux solutions théoriques tandis que x1 et x2 s'en approchent en comptabilisant plus d'itération. Cette accumulation d'erreurs au fur et à mesure des itérations peut s'apparenter à l'effet boule de neige (x1 dépend de x2 qui dépend de x3 qui elle-même dépend de x4). Le stockage n'étant pas infini, des approximations sont faites lors de chaque calcul et s'accumulent. Par conséquent, il est primordial d'optimiser son programme en limitant le nombre d'itération sinon on s'éloigne des solutions théoriques et le travail informatique n'aurait guère d'importance. Dans le cas où l'optimisation n'est plus possible mais il demeure un grand nombre d'itérations les solutions pourront être considérées mais uniquement en tant qu'approximation.

## Hilbert :

$$\left( \begin{array}{cccc} \frac{1}{i+j-1} & \cdots & \frac{1}{i+j-1} & \sum_{k=1}^j \frac{1}{k} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \frac{1}{i+j-1} & \cdots & \frac{1}{i+j-1} & \sum_{k=1}^j \frac{1}{i+k-1} \end{array} \right)$$

On retrouve maintenant pour le second exemple la matrice généralisée de Hilbert.

Elle présente le même nombre d'équations que d'inconnues comme le précédent exemple mais peut exister pour différentes dimensions. Les coefficients de la matrice dépendent tous de leur ligne et de leur colonne. Tout comme le premier exemple, la dernière colonne contient le second membre avec pour chaque ligne la

somme de la ligne en question. L'objectif est le même, avoir pour une matrice de dimension n, n réponses égales à 1 pour faciliter la comparaison avec le modèle théorique.

Pour illustrer la matrice généralisée prenons comme exemple la matrice de Hilbert de dimension 3. Comme pour l'exemple de Wilson nous allons comparer les solutions en fonction de la stratégie pour en déterminer la meilleure.

$$\begin{pmatrix} 1 & \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{11}{6} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{13}{12} \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{4} & \frac{1}{5} & \frac{47}{60} \end{pmatrix}$$

1) Choix du pivot : pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue maximale

```
Voici ci-dessous l exemple de Hilbert:
Veuillez saisir le nombre d inconnu et d equation connue :
3
Voici votre matrice initialisee :
      x1      x2      x3
1 1.0000000000000000 0.5000000000000000 0.3333333333333333 1.8333333333333333
2 0.5000000000000000 0.3333333333333333 0.2500000000000000 1.0833333333333333
3 0.3333333333333333 0.2500000000000000 0.2000000000000000 0.7833333333333332

Les reponses sont:
x1 = 0.9999999999999985 x2 = 1.00000000000000098 x3 = 0.9999999999999900

Les mineurs principaux sont:
m1 = 1.0000000000000000 m2 = 0.0833333333333333 m3 = -0.0055555555555555
```

2) Choix du pivot : pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue minimale

```
Voici ci-dessous l exemple de Hilbert:
Veuillez saisir le nombre d inconnu et d equation connue :
3
Voici votre matrice initialisee :
      x1      x2      x3
1 1.0000000000000000 0.5000000000000000 0.3333333333333333 1.8333333333333333
2 0.5000000000000000 0.3333333333333333 0.2500000000000000 1.0833333333333333
3 0.3333333333333333 0.2500000000000000 0.2000000000000000 0.7833333333333332

Les reponses sont:
x1 = 0.9999999999999977 x2 = 1.00000000000000147 x3 = 0.9999999999999850

Les mineurs principaux sont:
m1 = 0.3333333333333333 m2 = -0.04166666666666667 m3 = 0.0333333333333333
```

Le constat est différent du premier exemple, la première stratégie consistant à choisir comme pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue maximale est la plus convaincante. On constate aussi que la première méthode a généré 1 seul mineur principal entier contre 0 pour la seconde. C'est ce dernier point qui accentue l'imprécision des solutions de la seconde méthode.



## Étude des comportements des stratégies de résolution en fonction de la dimension de la matrice de Hilbert

Il peut maintenant être intéressant de regarder le comportement des deux stratégies en fonction de la dimension de la matrice de Hilbert. Pour évaluer l'incertitude, nous renseignerons la moyenne de la différence absolue entre la solution théorique et  $x_n$ . Enfin, nous compléterons ce tableau avec le nombre de mineurs principaux entiers ou avec une partie décimale finie afin de conjecturer ou non une quelconque corrélation entre ce nombre et l'incertitude absolue.

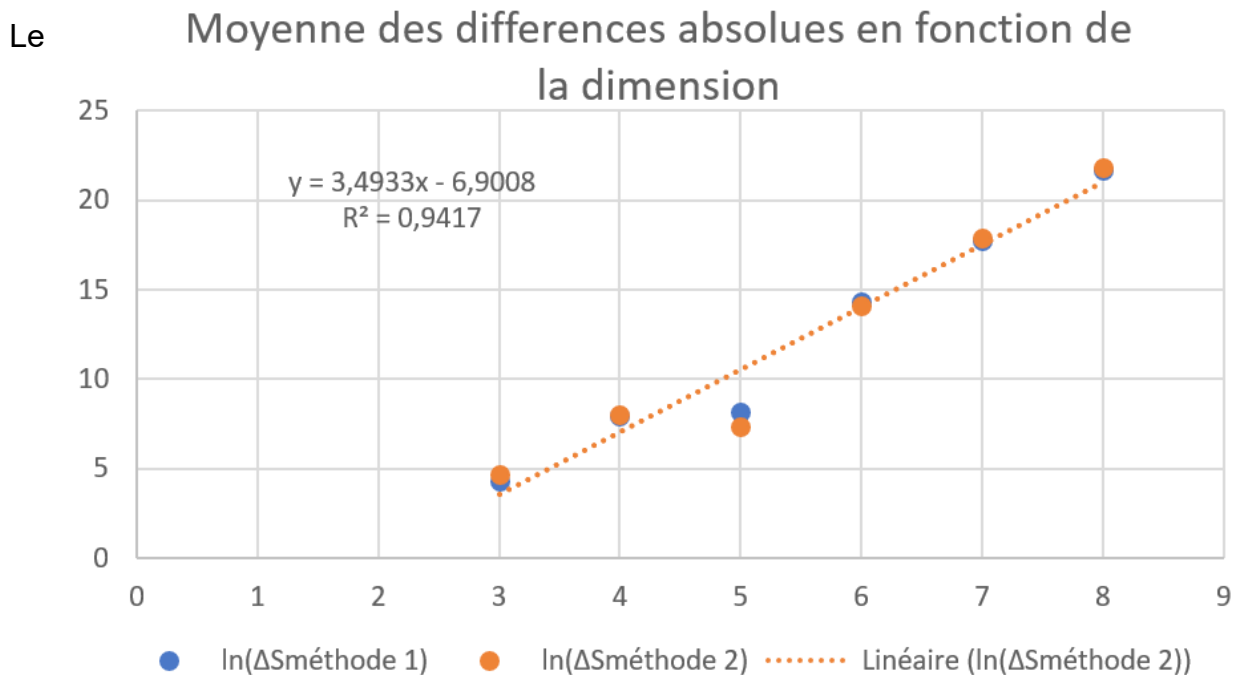
Notations :

- Méthode 1 : Choix du pivot : pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue maximale
- Méthode 2 : Choix du pivot : pivot 1 lorsqu'il existe sinon la valeur absolue minimale
- $\Delta S_{\text{méthode } x}$ : Moyenne des différences absolues entre la solution théorique et  $x_n$  de la méthode  $x$
- $nbE_{\text{méthode } x}$ : Nombre de mineurs principaux entiers ou avec partie décimale finie de la méthode  $x$
- $nbl_{\text{méthode } x}$ : Nombre d'itération maximale pour la détermination d'une solution (nombre d'étape + nombre de solutions) de la méthode  $x$

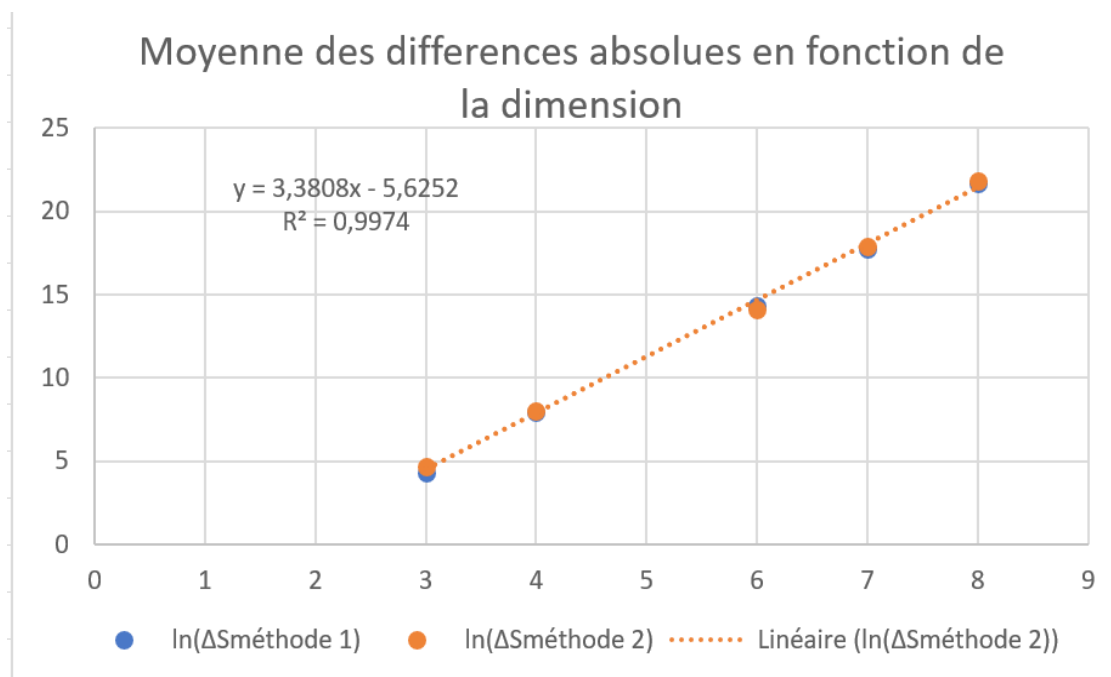
Dimension	$\Delta S_{\text{méthode } 1}$ (10-16)	$\Delta S_{\text{méthode } 2}$ (10-16)	$nbE_{\text{méthode } 1}$	$nbE_{\text{méthode } 2}$	$nbl_{\text{méthode } 1}$	$nbl_{\text{méthode } 2}$
3	71	107	1	0	6	6
4	2773	2999	1	1	10	10
5	3462	1540	1	1	15	15
6	1673982	1354154	1	0	21	21
7	49079446	60019023	1	0	28	28
8	2522733940	3017723777	1	0	36	36

Pour rester factuel dans un premier temps, la méthode 1 s'est avérée plus précise pour les dimensions 3, 4, 7 et 8 puisque la moyenne des différences absolues entre la solution théorique et  $x_n$  de la méthode 1 est plus faible que la méthode 2. En retenant ce critère de précision, la méthode 1 est préférable car 4 cas sur 6 obtiennent des solutions plus précises grâce à cette méthode. Néanmoins ce critère de précision est relatif, on aurait pu s'intéresser non pas à une moyenne des différences absolues par rapport à 1 mais plutôt au nombre de réponses qui ont la différence absolue la plus faible par rapport à l'autre méthode. Le nombre d'itérations quant à lui ne change pas en fonction des méthodes.

Voici ci-dessous un graphique réalisé avec Excel des trois premières colonnes du tableau précédent à l'échelle logarithmique :



résultat est très surprenant avec une tendance qui apparaît à l'échelle logarithmique. Après une régression linéaire, on obtient un coefficient de corrélation  $R^2$  égal à 0,9417 ce qui n'est pas très bon mais on observe une « aberration » en dimension 5. Que se passe-t-il si on ne considère pas cette dimension ?



On obtient maintenant un coefficient de corrélation bien meilleur ( $R^2=0,9974$ ) avec une corrélation linéaire qui se dégage entre la dimension et notre critère de précision à



l'échelle logarithmique. De plus, on constate qu'à l'échelle logarithmique la différence de précision entre les deux méthodes est minime.

Pour conclure cette étude, il est difficile de déterminer une méthode avec si peu de dimension étudiée. Pour notre domaine d'étude, c'est à dire entre 6 à 36 itérations on ne peut pas choisir la méthode la plus convaincante avant calcul, une part de hasard intervient. Mais cette incertitude sur le choix de la méthode n'est pas très importante finalement puisqu'elle affecte de façon minime la précision du résultat par rapport à la dimension. Enfin, on a constaté qu'à l'échelle logarithmique et sur ce domaine d'itérations on pouvait établir une relation linéaire entre la moyenne des différences absolues entre la solution théorique et  $x_n$ , et la dimension de la matrice de Hilbert. Ce dernier point est fascinant puisqu'il établit une relation sur des événements aléatoires.

## APPLICATIONS

**[37]** Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour le calcul d'un déterminant d'une matrice carrée. Soit A une matrice carrée d'ordre n=4 :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 & 1 \\ -1 & 0 & -1 & -3 \end{pmatrix} \begin{matrix} L_2 \\ L_3 \\ L_4 \end{matrix}$$

Pour résoudre le calcul du déterminant de cette matrice, on devra effectuer 4 pivots puisque la matrice est d'ordre n=4.

Le premier pivot est  $P_1=1$ , c'est-à-dire que la première ligne reste inchangée et que le premier chiffre  $\neq 0$  de cette ligne est 1. On obtient par combinaisons linéaires :

$$\begin{matrix} L_2 \leftarrow L_2 - 2L_1 \\ L_3 \leftarrow L_3 - L_1 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_1 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$$

Le second pivot est  $P_2=-1$ , c'est-à-dire que la deuxième ligne reste inchangée et que le premier chiffre  $\neq 0$  de cette ligne est -1. On obtient :

$$\begin{matrix} L_3 \leftarrow L_3 + L_2 \\ L_4 \leftarrow L_4 + L_2 \end{matrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -4 \end{pmatrix}$$

Si on laisse la matrice de cette façon, le troisième pivot sera nul, donc on échange les 2 dernières colonnes pour éviter ce problème. A devient :

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & -4 & 0 \end{pmatrix}$$

Le troisième pivot est  $P_3 = -2$ . De la même façon, on obtient :

$$L_4 \leftarrow L_4 - 2L_3 \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

La matrice obtenue est alors triangulaire, on peut donc directement résoudre le système linéaire associé en “re traduisant” cette matrice sous forme de système.

Appliquons la méthode du pivot de Gauss pour résoudre un système linéaire à 3 équations. Pour cela, on transforme une matrice carrée A d'ordre 3, représentant la partie gauche du système, en matrice triangulaire supérieure de même ordre. On note à droite, une matrice B qui représente les seconds membres du système linéaire. On applique la méthode du pivot de Gauss aux deux parties :

Soit le système linéaire suivant :

$$\begin{cases} 2x + y - 4z = 8 \\ 3x + 3y - 5z = 14 \\ 4x + 5y - 2z = 16 \end{cases}$$

A partir de ce système, on note les matrices A et B suivantes :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -4 \\ 3 & 3 & -5 \\ 4 & 5 & -2 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 8 \\ 14 \\ 16 \end{bmatrix}$$

On peut alors appliquer la méthode du pivot de Gauss sur la nouvelle matrice notée :

$$M = \left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 3 & 3 & -5 & 14 \\ 4 & 5 & -2 & 16 \end{array} \right]$$

Le premier pivot vaut 2 (un 0 apparaît sur la 2ème ligne et correspond à un 2 qui équivaut au pivot pour la matrice B) :

$$\left[ \begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -4 & 8 \\ 0 & 3/2 & 1 & 2 \\ 0 & 3 & 6 & 0 \end{array} \right]$$

Le second pivot vaut  $3/2$  :

2	1	-4	8
0	3/2	1	2
0	0	4	-4

Le troisième pivot vaut 4.

On obtient alors le système linéaire simple suivant :

$$\begin{cases} 2x+2+4=8 \\ 3/2 y -1 =2 \\ 4z = -4 \end{cases}$$

d'où

$$\begin{cases} x=1 \\ y=2 \\ z=-1 \end{cases}$$

On retrouve ce même résultat dans grâce au programme ci-dessous, développé dans la partie analyse informatique.

```

C:\WINDOWS\SYSTEM32\cmd.exe
3 4.0000000000000000 5.0000000000000000 -2.0000000000000000 16.0000000000000000

1e etape :
  x1          x2          x3          |
1 2.0000000000000000 1.0000000000000000 -4.0000000000000000 8.0000000000000000
2 0.0000000000000000 1.5000000000000000 1.0000000000000000 2.0000000000000000
3 4.0000000000000000 5.0000000000000000 -2.0000000000000000 16.0000000000000000

2e etape :
  x1          x2          x3          |
1 2.0000000000000000 1.0000000000000000 -4.0000000000000000 8.0000000000000000
2 0.0000000000000000 1.5000000000000000 1.0000000000000000 2.0000000000000000
3 0.0000000000000000 3.0000000000000000 6.0000000000000000 0.0000000000000000

3e etape :
  x1          x2          x3          |
1 2.0000000000000000 1.0000000000000000 -4.0000000000000000 8.0000000000000000
2 0.0000000000000000 1.5000000000000000 1.0000000000000000 2.0000000000000000
3 0.0000000000000000 0.0000000000000000 4.0000000000000000 -4.0000000000000000

Les reponses sont:
x1 = 1.0000000000000000 x2 = 2.0000000000000000 x3 = -1.0000000000000000

Les mineurs principaux sont:
m1 = 2.0000000000000000 m2 = 1.5000000000000000 m3 = 4.0000000000000000

-----
(program exited with code: 0)

Appuyez sur une touche pour continuer...

```

**[42]** Autre résolution d'un système linéaire par la méthode du pivot de Gauss.

Soit le système linéaire suivant :

$$(S) \quad \begin{cases} x + 3y + 4z = 50 & (L_1) \\ 3x + 5y - 4z = 2 & (L_2) \\ 4x + 7y - 2z = 31 & (L_3) \end{cases}$$

dans un premier temps, on élimine  $x$  dans  $(L_2)$  et  $(L_3)$  par les opérations suivantes:

$$(S) \quad \begin{cases} x + 3y + 4z = 50 & (L_1) \\ y + 4z = 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 5y + 18z = 169 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 4(L_1) \end{cases}$$

ensuite, on élimine  $y$  dans  $(L_3)$ , par les opérations suivantes:

$$(S) \quad \begin{cases} x + 3y + 4z = 50 & (L_1) \\ y + 4z = 37 & (L_2) \leftarrow (L_2) - 3(L_1) \\ 2z = 16 & (L_3) \leftarrow (L_3) - 5(L_2) \end{cases}$$

d'où de  $(L_3) : z = +8$

puis de  $(L_2) y = 37 - 4z = 5$

et enfin de  $(L_1) : x = 50 - 3y - 4z = 3$

Les solutions de  $(S)$  sont donc :  $x = 3 ; y = 5 ; z = 8$

De même, ce résultat est confirmé par le programme de résolution par le pivot de Gauss :

```

C:\WINDOWS\SYSTEM32\cmd.exe
Voici votre matrice initialise :
  x1      x2      x3      |
1 1.0000000000000000 3.0000000000000000 4.0000000000000000 50.0000000000000000
2 3.0000000000000000 5.0000000000000000 -4.0000000000000000 2.0000000000000000
3 4.0000000000000000 7.0000000000000000 -2.0000000000000000 31.0000000000000000

1e etape :
  x1      x2      x3      |
1 1.0000000000000000 3.0000000000000000 4.0000000000000000 50.0000000000000000
2 0.0000000000000000 -4.0000000000000000 -16.0000000000000000 -148.0000000000000000
3 4.0000000000000000 7.0000000000000000 -2.0000000000000000 31.0000000000000000

2e etape :
  x1      x2      x3      |
1 1.0000000000000000 3.0000000000000000 4.0000000000000000 50.0000000000000000
2 0.0000000000000000 -4.0000000000000000 -16.0000000000000000 -148.0000000000000000
3 0.0000000000000000 -5.0000000000000000 -18.0000000000000000 -169.0000000000000000

3e etape :
  x1      x2      x3      |
1 1.0000000000000000 3.0000000000000000 4.0000000000000000 50.0000000000000000
2 0.0000000000000000 -4.0000000000000000 -16.0000000000000000 -148.0000000000000000
3 0.0000000000000000 0.0000000000000000 2.0000000000000000 16.0000000000000000

Les reponses sont:
x1 = 3.0000000000000000 x2 = 5.0000000000000000 x3 = 8.0000000000000000

Les mineurs principaux sont:
m1 = 1.0000000000000000 m2 = -4.0000000000000000 m3 = 2.0000000000000000

-----
(program exited with code: 0)

Appuyez sur une touche pour continuer...

```

**[39]** L'algèbre linéaire est un outil essentiel pour toutes les branches des mathématiques appliquées, en particulier lorsqu'il s'agit de modéliser puis résoudre numériquement des problèmes issus de divers domaines : sciences physiques ou mécaniques, sciences du vivant, chimie, économie, sciences de l'ingénieur,...

Les systèmes linéaires forment la base calculatoire de l'algèbre linéaire, permettant de traiter une bonne partie de la théorie de l'algèbre linéaire en dimension finie. On peut visualiser ces systèmes sous différentes formes, telles que le calcul d'équations de droites, d'équations de plans, de points et droites d'intersection,...

Les systèmes linéaires ont de nombreuses applications, comme de déterminer si un ensemble de vecteurs est linéairement indépendant.

En effet, les  $n$  vecteurs de  $\mathbb{R}^m$

$$\left[ \begin{matrix} a_{11} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{matrix} \right], \dots, \left[ \begin{matrix} a_{1n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{matrix} \right] \text{ s}$$

sont linéairement indépendants si le système suivant a une solution unique, la solution  $x_1 = \dots = x_n = 0$  :

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n = 0 \\ \dots \dots \dots \dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n = 0 \end{cases}$$

On a donc le théorème suivant :  $Ax = 0$  admet la solution unique  $x = 0$  si et seulement si les colonnes de  $A$  sont linéairement indépendantes.

**[40]** D'autres exemples d'applications de la résolution de systèmes linéaires par la méthode de Gauss sont l'approximation numérique des solutions d'une équation différentielle, les marches aléatoires ou encore le calcul d'un indice de pertinence sur internet.

L'inconvénient de la méthode du déterminant, c'est qu'elle conduit à de nombreux calculs (environ  $n!$  additions et produits), alors qu'avec la méthode de Gauss l'ordre de grandeur est :  $\frac{2}{3}n^3 + \frac{n^2}{2}$ . Pour  $n=7$  par exemple avec la méthode des déterminants, on a environ 5040 opérations alors qu'avec la méthode de Gauss il n'y en a qu'environ 250. La méthode de Gauss est basée sur l'idée qu'un déterminant triangulaire est facile à calculer :

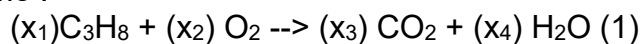
$$\begin{vmatrix} a & a & a \\ 0 & b & b \\ 0 & 0 & c \end{vmatrix} = abc$$

En exprimant des données sous la forme de variables, afin de pouvoir poser des systèmes linéaires à résoudre, on pourra grâce à la méthode de Gauss s'intéresser à des applications concrètes des systèmes.

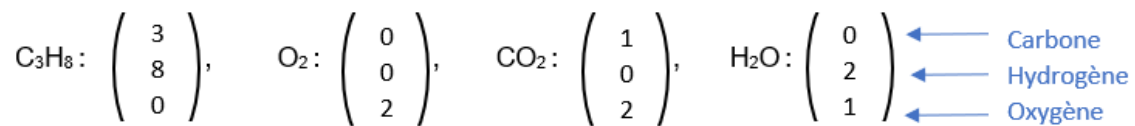
## Équilibrage des équations chimiques :

**[44]** La méthode du pivot de Gauss et celle du déterminant peuvent notamment servir en chimie, pour résoudre des systèmes permettant d'équilibrer des réactions.

Une équation chimique décrit les quantités de substances consommées et produites lors d'une réaction chimique. Par exemple, quand on brûle du propane ( $C_3H_8$ ), il se combine avec de l'oxygène ( $O_2$ ) pour former du dioxyde de carbone ( $CO_2$ ) et de l'eau ( $H_2O$ ) selon une équation de la forme :



Pour équilibrer cette réaction, les chimistes cherchent des nombres entiers  $x_1, \dots, x_4$  de façon à ce que le nombre total d'atomes de carbone (C), d'hydrogène (H) et d'oxygène (O) à gauche de l'équation corresponde exactement, pour chaque corps, au nombre d'atomes de la partie droite (selon le principe « rien ne se crée, rien ne se perd »). Il existe une méthode systématique pour équilibrer une réaction chimique. Elle consiste à établir une équation vectorielle qui décrit le nombre d'atomes de chacune des espèces présentes dans la réaction. Comme l'équation (1) fait intervenir 3 types d'atomes (carbone, hydrogène et oxygène), on construit pour chacun des réactifs de l'équation (1) un vecteur de  $\mathbb{R}^3$  qui contient le nombre d'atomes par molécule ; on considère donc :



Pour que l'équation (1) soit équilibrée, les coefficients  $x_1, \dots, x_4$  doivent vérifier la relation

$$x_1 \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = x_3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

On passe tout dans le premier membre, en changeant de signe si nécessaire :

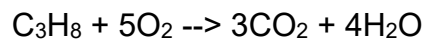
$$\begin{pmatrix} 3 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 8 & 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 2 & -2 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

La méthode du pivot conduit à la solution générale :

$$x_1 = \frac{1}{4} * x_4, \quad x_2 = \frac{5}{4} * x_4, \quad x_3 = \frac{3}{4} * x_4, \quad \text{et } x_4 \text{ quelconque.}$$

Dans une équation chimique les coefficients doivent être entiers ; on prend donc  $x_4 = 4$  et l'on obtient dans ce cas  $x_1 = 1$ ,  $x_2 = 5$ , et  $x_3 = 3$ .

L'équation équilibrée est



Cette équation resterait équilibrée si, par exemple, on doublait tous les coefficients. Mais pour diverses raisons, les chimistes préfèrent travailler avec des équations équilibrées dont les coefficients sont des nombres entiers aussi petits que possible.

## Économie : modèle input output :

**[44]** En économie on peut notamment parler de l'analyse input output de Leontief. C'est un modèle économique traitant de la production des différents biens et examinant ainsi l'interdépendance des différents secteurs industriels.

Le modèle input-output considère que chaque branche économique utilise un seul procédé pour produire un seul output. On a alors un cas particulier de fonction linéaire de production.

Leontief a défini, grâce à son modèle, l'existence de prix d'équilibres attribués à la production totale des différents secteurs de façon à ce que le revenu de chaque secteur contrebalance exactement ses dépenses.

C'est le calcul de ces prix d'équilibres qui va nécessiter l'utilisation de la méthode du pivot de Gauss.

On peut alors considérer l'exemple suivant :

Une économie constituée de trois secteurs : la production de charbon, d'électricité et de l'acier, qui dépendent les uns des autres, selon le tableau suivant :



Charbon	Electricité	Acier	Acheté par
0	0.4	0.6	Charbon
0.6	0.1	0.2	Electricité
0.4	0.5	0.2	Acier

Comme toute la production est prise en compte, le total des valeurs de chaque colonne est égal à 1.

L'électricité et l'acier sont achetés pour une moindre part par eux même car cela correspond à une dépense nécessaire.

On note respectivement  $p_c$ ,  $p_e$  et  $p_a$  ( c'est-à-dire les valeurs en euros) de la production totale des secteurs du charbon, de l'électricité et de l'acier. On va donc déterminer, si possible, les prix d'équilibre de façon à ce que les revenus de chaque secteur compensent exactement ses dépenses.

On peut alors traduire chacune des lignes du tableau par des équations linéaires. Par exemple l'industrie charbonnière doit dépenser  $0,4p_e$  euros pour sa part de production électrique et  $0,6p_a$  pour sa part d'acier, ce total est alors égal à  $0,4p_e + 0,6p_a$  et par l'hypothèse des prix d'équilibre, le revenu de ce même secteur doit être égal à ses dépenses. On peut donc écrire l'équation

$$p_c = 0,4p_e + 0,6p_a$$

On fait de même pour l'industrie électrique et l'industrie de l'acier :

$$\begin{cases} p_e = 0,6p_c + 0,1p_e + 0,2p_a \\ p_a = 0,4p_c + 0,5p_e + 0,2p_a \end{cases}$$

alors trois équations qui forment un système linéaire

$$\begin{cases} p_c = 0,4p_e + 0,6p_a \\ p_e = 0,6p_c + 0,1p_e + 0,2p_a \\ p_a = 0,4p_c + 0,5p_e + 0,2p_a \end{cases}$$

On simplifie,

$$\begin{cases} - 0,4p_e - 0,6p_a + p_c = 0 \\ - 0,6p_c - 0,1p_e - 0,2p_a + p_e = 0 \\ - 0,4p_c - 0,5p_e - 0,2p_a + p_a = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} - 0,4p_e - 0,6p_a + p_c = 0 \\ - 0,6p_c + 0,9p_e - 0,2p_a = 0 \\ - 0,4p_c - 0,5p_e + 0,8p_a = 0 \end{cases}$$

On peut alors écrire ce système sous la forme d'une matrice qu'on va réduire pour avoir une matrice à forme échelonnée

$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ -0.6 & 0.9 & -0.2 & 0 \\ -0.4 & -0.5 & 0.8 & 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & -0.66 & 0.56 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 0.66 & -0.56 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & -0.4 & -0.6 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 1 & 0 & -0.94 & 0 \\ 0 & 1 & -0.85 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

la solution générale est de la forme  
 $p_c = 0.85p_e$  et  $p_c = 0.94p_a$

On obtient ainsi le vecteur d'équilibre de cette économie

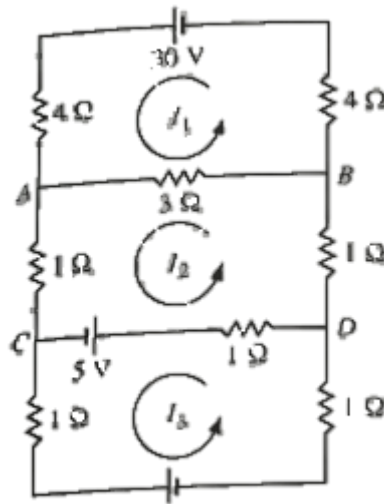
$$\begin{aligned}
p &= \begin{pmatrix} p_c \\ p_e \\ p_a \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 0.94p_a \\ 0.85p_a \\ p_a \end{pmatrix} \\
&= p_a \begin{pmatrix} 0.94 \\ 0.85 \\ 1 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Ainsi pour tout  $p_a$  on connaît un choix de prix d'équilibre, ce qui permet pour chaque valeur de  $p_a$  de connaître les recettes et les dépenses que chaque secteur doit avoir pour que l'économie se suffise à elle-même.

## Électricité : Intensité et loi des mailles :

**[44] [41]** La méthode de résolution des systèmes linéaires par la méthode du pivot de Gauss peut aussi permettre de résoudre des problèmes d'électricité.

En effet, pour trouver les intensités du circuit de la figure ci-dessous, on va se servir de systèmes linéaires.



Dans cet exemple, on utilise d'abord la loi des mailles selon laquelle la somme algébrique des différences de potentiel  $RI$  le long d'une maille orientée est égale à la somme algébrique des tensions aux bornes d'un générateur de cette maille orientée. Pour la maille 1 l'intensité  $I_1$  traverse trois résistances et la somme des différences de potentiel  $RI$  est

$$4I_1 + 4I_1 + 3I_1 = (4 + 4 + 3)I_1 = 11I_1$$

Avec la loi de Kirchhoff on obtient dans la maille 1 cette équation :

$$11I_1 - 3I_2 = 30$$

De même pour la maille 2 et la maille 3 :

$$-3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5$$

$$-I_2 + 3I_3 = -25$$

On obtient alors un système de trois équations à trois inconnues  $I_1$ ,  $I_2$  et  $I_3$  ainsi pour trouver les trois intensités, on peut mettre ce système sous forme de matrice et la résoudre en utilisant le pivot de Gauss.

$$\begin{cases} 11I_1 - 3I_2 = 30 \\ -3I_1 + 6I_2 - I_3 = 5 \\ -I_2 + 3I_3 = -25 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} 11 & -3 & 0 & 30 \\ -3 & 6 & -1 & 5 \\ 0 & -1 & 3 & -25 \end{pmatrix}$$

On a finalement  $I_1 = 3A$ ,  $I_2 = 1A$  et  $I_3 = -8A$ .

Ce résultat est corroboré par celui donné par le programme :

```

C:\WINDOWS\SYSTEM32\cmd.exe
Voici votre matrice initialisee :
  x1      x2      x3
1 11.000000000000000 -3.000000000000000 0.000000000000000 30.000000000000000
2 -3.000000000000000 6.000000000000000 -1.000000000000000 5.000000000000000
3 0.000000000000000 -1.000000000000000 3.000000000000000 -25.000000000000000

1e etape :
  x1      x2      x3
1 -3.000000000000000 6.000000000000000 -1.000000000000000 5.000000000000000
2 0.0000000000000004 19.000000000000000 -3.6666666666666665 48.333333333333360
3 0.000000000000000 -1.000000000000000 3.000000000000000 -25.000000000000000

2e etape :
  x1      x2      x3
1 -3.000000000000000 6.000000000000000 -1.000000000000000 5.000000000000000
2 0.0000000000000004 19.000000000000000 -3.6666666666666665 48.333333333333360
3 0.000000000000000 -1.000000000000000 3.000000000000000 -25.000000000000000

3e etape :
  x1      x2      x3
1 -3.000000000000000 6.000000000000000 -1.000000000000000 5.000000000000000
2 0.000000000000000 -1.000000000000000 3.000000000000000 -25.000000000000000
3 0.0000000000000004 0.000000000000000 53.333333333333360 -426.6666666666666900

Les reponses sont:
x1 = 3.000000000000000 x2 = 1.000000000000000 x3 = -8.000000000000000

Les mineurs principaux sont:
m1 = -3.000000000000000      m2 = -1.000000000000000      m3 = 53.333333333333360

```

On peut remarquer que la valeur négative de  $I_3$  vient du fait que le courant qui passe dans la maille 3 est de sens contraire à celui qui est dessiné sur la figure. Pour montrer la linéarité de la loi d'Ohm et de la loi de Kirchhoff on peut interpréter le système comme une équation vectorielle.

$$I_1 \begin{pmatrix} 11 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} + I_2 \begin{pmatrix} -3 \\ 6 \\ -1 \end{pmatrix} + I_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 30 \\ 5 \\ -25 \end{pmatrix}$$

La première composante de chaque vecteur est liée à la première maille et de même pour la deuxième et troisième composante. Ainsi le premier vecteur de résistances  $R_1$  est constitué de toutes les résistances à travers lesquelles passe le courant  $I_1$ , etc. La forme matricielle de l'équation donne la version matricielle de la loi d'Ohm.

$$Ri = v$$

avec

$$R = \begin{pmatrix} r_1 & r_2 & r_3 \end{pmatrix}$$

$$i = \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{pmatrix}$$

La linéarité de cette loi est donc mise en avant.

Finalement on peut résoudre des problèmes de modèles de circuits électriques avec l'utilisation de matrices et la résolution du pivot de Gauss, car ce modèle est linéaire (les lois d'Ohm et de Kirchhoff sont linéaires)

**[45]** Ensuite, un autre exemple non détaillé d'application de la résolution de systèmes linéaires par la méthode de Gauss ou du calcul de déterminants : Leontief (prix Nobel d'économie en 1973) s'en est servi afin de déterminer pour chaque secteur de l'économie américaine (l'industrie de charbon, l'industrie automobile, les communications,...) comment celui-ci distribuait sa production aux autres secteurs, en traduisant les données chiffrées en système de 500 équations à 500 inconnues, ensuite réduit à un système de 42 équations à 42 inconnues. Il a ainsi pu montrer l'importance de la modélisation mathématique en économie.

**[44]** D'autres exemples d'applications des systèmes linéaires donnés dans le livre *Algèbre linéaire et applications* de David C. Lay :

-l'exploration pétrolière : Quand un navire cherche des gisements de pétrole en pleine mer, qu'il n'y a plus aucun repère extérieur, ses ordinateurs résolvent des milliers de systèmes linéaires par jour. Les équations sont établies en fonction des données sismiques obtenues grâce à des ondes de choc sous-marines produites par des canons à air.

- l'organisation d'événements : Beaucoup de décisions de management s'appuient de nos jours sur des modèles de programmation linéaire qui utilisent des centaines de variables. Les compagnies aériennes par exemple, emploient ces méthodes pour organiser l'emploi du temps des équipages, gérer les emplacements des avions ou planifier des services techniques tels que la maintenance ou les opérations dans les terminaux.

-les réseaux électriques : Les ingénieurs utilisent des logiciels de simulation pour concevoir des circuits électriques et des puces électroniques constituées de millions de transistors. Ces logiciels reposent sur des techniques d'algèbre linéaire et des systèmes linéaires solvables par la méthode de Gauss.

## CONCLUSION

Pour conclure, les déterminants ont toujours suscité un grand intérêt pour de nombreux mathématiciens à partir du 16ème siècle, ils ont été introduits bien avant les matrices qui, elles, n'interviendront que bien après. La méthode du pivot de Gauss, contrairement à ce que l'on pourrait penser, a vu le jour au 2ème siècle avant notre ère en Chine mais elle est arrivée en Europe bien plus tard, au 19ème siècle avec Gauss et Jordan, et leurs travaux sur l'astronomie et la géodésie.

D'après nos recherches, la méthode du pivot de Gauss consiste à se ramener à un système triangulaire grâce à des combinaisons linéaires successives et grâce au choix d'un « pivot » permettant d'échelonner le système et ainsi de le résoudre. Cette méthode permet alors la résolution générale et simple des systèmes d'équations linéaires.

En passant par les matrices, cette méthode algorithmique amène également à calculer leurs déterminants. En effet, par transformations successives, la méthode du pivot de Gauss permet de se ramener à une matrice triangulaire supérieure. Puis, par factorisations linéaires par rapport aux colonnes de cette matrice, on trouve que son déterminant est égal au produit des éléments diagonaux de la matrice triangulaire initiale.

L'analyse informatique nous a permis d'automatiser la méthode du pivot de Gauss. Cela nous a permis de rendre les résolutions des systèmes plus rapides et de travailler sur des systèmes avec un nombre d'inconnues et d'équations bien plus conséquent. Grâce au programme nous avons pu trouver les solutions des quelques applications présentées dans la dernière partie.

Cette étude nous a aussi fait découvrir la dimension discrète du calcul numérique avec les imprécisions qui en découlent. De plus on a constaté sur un domaine d'itération une corrélation linéaire entre les imprécisions de la résolution et la dimension de la matrice de Hilbert étudiée. Il faudrait par la suite étendre ce domaine d'étude afin de voir si l'on peut arriver à une généralisation et confirmer nos premiers résultats.

Nous avons donc pu voir, que la résolution de systèmes linéaires par les méthodes du pivot de Gauss et du calcul de déterminants servent dans de nombreux et variés domaines.

En effet, au travers d'applications de systèmes, exprimés via des matrices, nous avons pu calculer les coefficients inconnus de systèmes dans les secteurs de la chimie (équations de réactions chimiques), de l'économie (modèle input-output), ou encore de l'électricité (calcul d'intensité dans une maille). Tous nos résultats ont pu être vérifiés grâce au programme créé dans la partie "Analyse Informatique".

Les systèmes linéaires peuvent également servir afin de modéliser des vecteurs, pour lesquels on pourra déterminer, en résolvant le système, si ces derniers sont linéairement indépendants ou non.

Cependant, les calculs de déterminants entraînent beaucoup plus de calculs que la méthode de Gauss, ce qui complexifiera grandement les résolutions et augmentera par la même occasion le temps de calcul, c'est pourquoi on utilisera plutôt cette deuxième méthode dans le cadre des applications de systèmes linéaires.

## BIBLIOGRAPHIE

### Histoire des systèmes d'équations linéaires

1. La naissance des objets mathématiques, Enrico GIUSTI, Ellipse
2. Une histoire des mathématiques, Routes et Dédalles, Amy DAHAN-DALMEDICE, Jeanne PEIFFER
3. Histoire des mathématiques, Jean C Baudet, Vuibert
4. Histoire d'algorithmes, Jean Luc Chabert, Belin sup
5. Les Mathématiques, les 100 plus grandes découvertes qui ont changé l'histoire des mathématiques, Tom JACKSON, Contre-dire
6. La mathématisation du réel, Giorgio ISRAEL, Seuil
7. Histoire des Mathématiques, Jean-Pierre ESCOFIER, DUNOD
8. <https://antonio Garciaa.pagesperso-orange.fr/histoires%20demaths/HLINALG.pdf>, Antonio Graciaa, Eléments d'histoire d'algèbre linéaire
9. <http://serge.mehl.free.fr/chrono/Cauchy.html#autre>, Chronomaths, Serge Mehl
10. [http://www-soc.lip6.fr/~hassan/annexe\\_tme3.pdf](http://www-soc.lip6.fr/~hassan/annexe_tme3.pdf), L'élimination de Gauss-Jordan
11. <http://villemine.gerard.free.fr/Esprit/Gauss.htm>, Mathématicien Gauss, Villemine Gerard
12. [http://www.numdam.org/article/CSHM\\_1993\\_\\_2\\_3\\_159\\_0.pdf](http://www.numdam.org/article/CSHM_1993__2_3_159_0.pdf), Jean-Luc DORIER, Émergence du concept de rang dans l'étude des systèmes d'équations linéaires
13. [https://www.wikiwand.com/fr/D%C3%A9terminant\\_\(math%C3%A9matiques\)](https://www.wikiwand.com/fr/D%C3%A9terminant_(math%C3%A9matiques)), Wikiwand
14. [https://www.wikiwand.com/fr/%C3%89limination\\_de\\_Gauss-Jordan](https://www.wikiwand.com/fr/%C3%89limination_de_Gauss-Jordan), Wikiwand
15. <http://www.masmaths.net/Articles/Histoire%20des%20maths-math%C3%A9maticiens/carl%20friedrich%20gauss>, Farouk Boucekkine
16. [https://boowiki.info/art/mathematiciens-allemand/carl-friedrich-gauss.html#upbrertscher\\_12-0](https://boowiki.info/art/mathematiciens-allemand/carl-friedrich-gauss.html#upbrertscher_12-0)
17. <https://www.futura-sciences.com/sciences/personnalites/astronomie-carl-gauss-234/>
18. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Wilhelm\\_Jordan](https://fr.wikipedia.org/wiki/Wilhelm_Jordan)

### Analyse mathématique

19. Prépas sciences, Maths (p.93), Bertrand Hauchecorne (2017)
20. Outils mathématiques pour physiciens et ingénieurs (p.171), Jean-Marc Poitevin (2017)
21. Cap Prépa 1re année (p.735), G. Debeaumarché, F. Dorra et M. Hocart (2009)
22. <https://ljk.imag.fr/membres/Bernard.Ycart/mel/sl/sl.pdf>, I. Bernard Ycart (2011) : Systèmes linéaires
23. [https://www-pequan.lip6.fr/~jmc/polycopies/cours2-meth\\_dir\\_sys\\_lin.pdf](https://www-pequan.lip6.fr/~jmc/polycopies/cours2-meth_dir_sys_lin.pdf), Polytech'Paris UPMC : Résolution de systèmes linéaires, méthodes directes
24. [http://exo7.emath.fr/cours/ch\\_determinants.pdf](http://exo7.emath.fr/cours/ch_determinants.pdf), Sophie Chemla : Déterminants
25. <https://www.maths-france.fr/MathSup/Cours/26-systemes.pdf>, Jean Louis Rouget (2018) : Systèmes d'équations linéaires
26. [https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice\\_triangulaire](https://fr.wikipedia.org/wiki/Matrice_triangulaire), Wikipedia L'encyclopédie libre
27. [https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9composition\\_LU](https://fr.wikipedia.org/wiki/D%C3%A9composition_LU), Wikipedia L'encyclopédie libre



28. PolyAN\_draux15-18

### Analyse informatique

29. [http://docwiki.appmethod.com/appmethod/1.13/topics/fr/Types\\_simples](http://docwiki.appmethod.com/appmethod/1.13/topics/fr/Types_simples), Types simples (Object Pascal), docwiki, 2013
30. [https://pascal.developpez.com/cours/cyberzoide/?page=pg\\_Variables#LVIII-E](https://pascal.developpez.com/cours/cyberzoide/?page=pg_Variables#LVIII-E), Variables, formats et maths, developpez.com, 2000
31. <https://hdd34.developpez.com/articles/artdynarr/>, Les tableaux dynamiques, developpez.com, 2000
32. <https://bouquinpython.readthedocs.io/fr/latest/matrices.html>, Python pour CPGE scientifiques, Laurent Garcin, 2017
33. <http://www.wens.aero.jussieu.fr/lefrere/master/mni/mnncs/te/te1-alg-lin/gauss-jordan.pdf>, Elimination de Gauss-Jordan (avec pivot partiel), Université Paris IV, 2008-2009
34. Algèbre linéaire et géométrie, Luc Jolivet / Rabah Labbas, 2005
35. <http://ptrau.free.fr/program/pascal11.htm>, Tableaux, Ptrau

### Applications

36. <https://www.youtube.com/watch?v=0uYJ3RNL5SU>, Exo7Math. (2013, 10 décembre). Systèmes linéaires
37. Exo7Math. (2013). Cours de Mathématiques - M22 Algèbre linéaire
38. <https://math.unice.fr/~nivoche/pdf/CoursSystLin%20Exo7.pdf>, La résolution des systèmes linéaires
39. Cabanial, J.M. (2020). Les applications linéaires. M4 Insa Rouen
40. [https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/systemes\\_lineaires/1-syslin\\_reg.pdf](https://www.deleze.name/marcel/sec2/applmaths/csud/systemes_lineaires/1-syslin_reg.pdf), Déléze (2017), Systèmes d'équations linéaires
41. <http://www.dmi.usherb.ca/~charette/mat102/algebrelinaire32009.pdf>, SYSTEMES LINEAIRES (2009)
42. [http://perso-laris.univ-angers.fr/~hardouin/MemoireThese\\_Euriell-Le-Corronc.pdf](http://perso-laris.univ-angers.fr/~hardouin/MemoireThese_Euriell-Le-Corronc.pdf), Le Corronc, Euriell (2011) Modèles et calculs garantis pour les systèmes linéaires
43. Algèbre linéaire et applications - David C. Lay - Edition Pearson
44. Algebre linéaire - Serge Lang - Edition InterEditions Paris