一阶倒立摆系统仿真

一阶倒立摆系统仿真

1. 仿真软件
2. 倒立摆动态系统建模
    - 2.1 倒立摆系统的简化
    - 2.2 倒立摆系统运动学方程推导
    - 2.3 线性化处理
3. 倒立摆状态空间反馈控制
    - 3.1 状态空间方程一般形式
    - 3.2 倒立摆系统状态空间方程
    - 3.3 加入状态反馈控制
4. LQR控制器实现反馈控制
    - 4.1 LQR控制器
    - 4.2 Matlab求解
5. Simulink仿真建模与动画效果
    - 5.1 仿真环境搭建
    - 5.2 仿真环境所需代码

1. 仿真软件

本次仿真所采用的求解软件是MATLAB。

2. 倒立摆动态系统建模

2.1 倒立摆系统的简化

我们可以简化倒立摆系统为如图1所示的形式，简单来说就是通过调控滑块运动状态，使杆直立不倒。

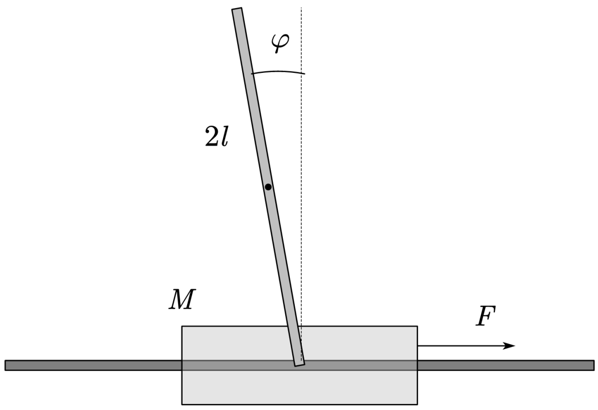

图1 倒立摆模型示意图

下表是倒立摆系统的各个参数：

符号	物理含义	参数值
M	滑块质量	0.2275kg
m	摆杆质量	0.0923kg
l	摆杆转动轴心到杆质心的长度	0.185m
J	摆杆转动惯量	0.00412kg*m^2

2.2 倒立摆系统运动学方程推导

接下来我们来对倒立摆系统的运动学方程进行推导。如图2所示，摆杆长度为$2l$，倾角为φ。我们设滑块质心位置为$(X,0)$，摆杆质心位置为(X_m,Y_m)。

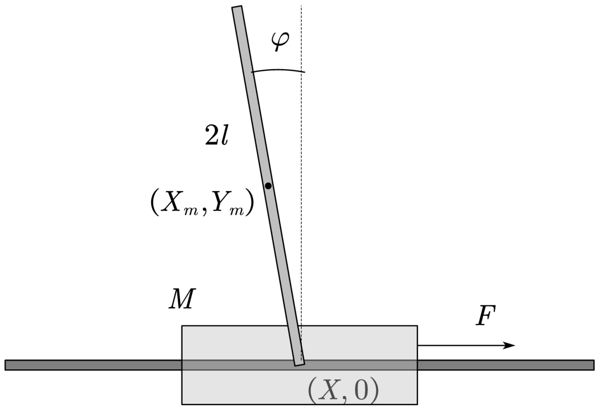

图2 坐标示意图

我们可以列出如下表达式：

$$X_m = X - l\cdot\sin\varphi \tag{1}$$
$$Y_m = l\cdot\cos\varphi \tag{2}$$

对(1), (2)式分别求对时间t的一阶导数，可得到如下表达式：

$$\dot{X_m} = \dot{X} - l\cdot\dot{\varphi}\cdot\cos\varphi \tag{3}$$
$$\dot{Y_m} = -l\cdot\dot{\varphi}\cdot\sin\varphi \tag{4}$$

基础表达式已经写好，下面我们可以使用拉格朗日力学方程来建立倒立摆系统方程。拉格朗日力学方程如下：

$$\begin{aligned}&\mathcal{L} = T - V\\ &\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{q}_i}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial q_i} = Q_i\end{aligned}$$

其中T,V分别是这个力学体系的动能和势能，Q_i为q_i所对应的非保守的广义力。为了简便计算，我们做出如下规定：滑块所在平面的势能$V_M=0$，则摆杆势能为$V_m = mgl\cos\varphi$，总势能为$V=V_M+V_m=mgl\cos\varphi$。接下来关于动能T的推导会相对复杂一些，因为摆杆的动能包括了平动和转动。

$$\begin{aligned}T &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(X_m^2+Y_m^2) + \frac{1}{2}J\omega^2\\ &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 - 2l\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\cos^2\varphi + l^2\dot{\varphi}^2\sin^2\varphi) + \frac{1}{2}J\omega^2\\ &= \frac{1}{2}M\dot{X}^2 + \frac{1}{2}m(\dot{X}^2 - 2l\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi + l^2\dot{\varphi}^2) + \frac{1}{2}J\omega^2\\ &= \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - ml\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}J\omega^2\end{aligned}$$

$$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - ml\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgl\cos\varphi \tag{5}$$

下面需要将式(5)代入到拉格朗日力学方程中，对于本系统来说，拉格朗日力学方程如下：

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} = F\\ &\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}) - \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi} = 0\end{aligned} \tag{6}$$

式子(5)：$\mathcal{L} = T - V = \frac{1}{2}(M+m)\dot{X}^2 + \frac{1}{2}ml^2\dot{\varphi}^2 - ml\dot{X}\dot{\varphi}\cos\varphi + \frac{1}{2}J\omega^2 - mgl\cos\varphi$，代入后的结果如下：

$$\begin{aligned}&X:\\ &\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}} = (M+m)\dot{X} - ml\dot{\varphi}\cos\varphi\\ &\quad\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X} = 0\end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}})=(M+m)\ddot{X}-ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{X}})-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial X}$$

$$=(M+m)\ddot{X}-ml(\ddot{\varphi}\cos\varphi-\dot{\varphi}^2\sin\varphi)=F \tag{7}$$

φ :

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}}=ml^2\dot{\varphi}-ml\dot{X}\cos\varphi+J\dot{\varphi}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}=ml\dot{X}\dot{\varphi}\sin\varphi+mgl\sin\varphi$$

$$\frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}})=ml^2\ddot{\varphi}-ml(\ddot{X}\cos\varphi-\dot{X}\dot{\varphi}\sin\varphi)+J\ddot{\varphi}$$

$$\therefore\quad \frac{d}{dt}(\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\dot{\varphi}})-\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial\varphi}$$

$$=ml^2\ddot{\varphi}-ml(\ddot{X}\cos\varphi-\dot{X}\dot{\varphi}\sin\varphi)+J\ddot{\varphi}-ml\dot{X}\dot{\varphi}\sin\varphi-mgl\sin\varphi$$

$$=ml^2\ddot{\varphi}-ml\ddot{X}\cos\varphi+J\ddot{\varphi}-mgl\sin\varphi$$

$$=l\ddot{\varphi}-\ddot{X}\cos\varphi+\frac{J}{ml}\ddot{\varphi}-g\sin\varphi=0 \tag{8}$$

至此，倒立摆系统的动力学方程推导完毕。

2.3 线性化处理

上文得到的式$(7),(8)$，可以看出，倒立摆系统的为非线性微分方程，为了后面数学分析的简便性和应用LQR控制器进行反馈控制，我们需要对式$(7),(8)$进行线性化处理。

当$\varphi\rightarrow 0$时，$\sin\varphi\rightarrow\varphi,\cos\varphi\rightarrow 1$，并且$\dot{\varphi}^2$是$\varphi$的高阶无穷小，因此$\dot{\varphi}^2\sin\varphi\rightarrow 0$。

线性化处理后，得到如下微分方程组：

$$\begin{cases}(M+m)\ddot{X}-ml\ddot{\varphi}=F\\ l\ddot{\varphi}-\ddot{X}+\dfrac{J}{ml}\ddot{\varphi}-g\varphi=0\end{cases} \tag{9}$$

接下来我们会建立倒立摆系统的状态空间方程。

3. 倒立摆状态空间反馈控制

3.1 状态空间方程一般形式

系统状态空间方程一般形式如下所示：

$$\begin{cases}\dot{Z}=AZ+BU\\ Y=CZ+DU\end{cases} \tag{10}$$

其中，向量Z代表系统状态变量，向量U代表系统输入，向量Y代表系统输出，矩阵A,B,C,D为系统状态矩阵。

另外，状态空间方程与经典控制理论中的传递函数$G(s)$关系如下：

$$G(s)=C(SI-A)^{-1}B+D \tag{11}$$

3.2 倒立摆系统状态空间方程

结合上面所说的状态空间方程的形式，我们需要将倒立摆系统微分方程化为同样的形式。在倒立摆系统中，我们主要关注这四个状态量：滑块的位移X与速度$\dot{X}/v$、摆杆的倾角φ与角速度$\dot{\varphi}/\omega$。所以，我们做出如下规定：

$$Z=\begin{bmatrix}z_1\\z_2\\z_3\\z_4\end{bmatrix}$$

$$
\begin{aligned}
z_1 &= X \\
z_2 &= \dot{X} \\
z_3 &= \varphi \\
z_4 &= \dot{\varphi}
\end{aligned}
$$

之后我们可以将倒立摆动态系统微分方程化为如下形式:

$$
\begin{aligned}
(M+m)\dot{z}_2 - ml\dot{z}_4 &= F \\
l\dot{z}_4 - \dot{z}_2 + \frac{J}{ml}\dot{z}_4 - gz_3 &= 0
\end{aligned} \tag{12}
$$

通常，在状态空间方程中，习惯性将系统输入记作U，因此这里我们令$U = F$。为了表达式的简便性，我们记$a = \frac{J}{ml}$。随后将微分方程化为矩阵形式，即为倒立摆开环状态空间方程了:

$$
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mgl}{Ml+Ma+ma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml+Ma+ma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l+a}{Ml+Ma+ma} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml+Ma+ma} \end{bmatrix} \cdot U \tag{13}
$$

3.3 加入状态反馈控制

根据式(10)中$\dot{Z} = AZ + BU$，我们令$U = -KZ$，得到:

$$
\dot{Z} = (A - BK)Z + BU \tag{14}
$$

其中，$K = [k_1, k_2, k_3, k_4]$。此外，我们一般把矩阵$(A - BK)$称作闭环控制状态空间矩阵A_{cl}。系统闭环状态反馈控制示意图如图3所示。

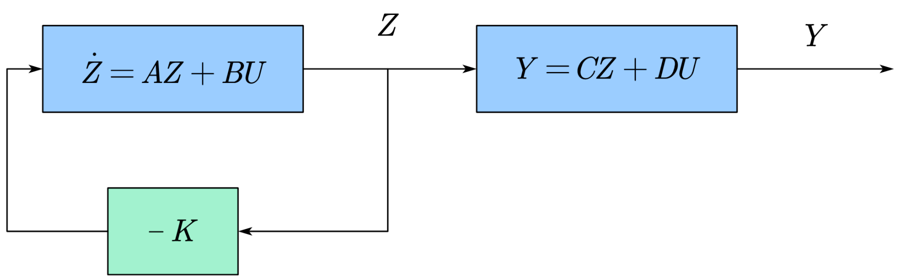

图3 系统闭环状态反馈控制

之后，我们把$U = -KZ$带入到式(11)中去:

$$
\begin{bmatrix} \dot{z}_1 \\ \dot{z}_2 \\ \dot{z}_3 \\ \dot{z}_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{mgl}{Ml+Ma+ma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & \frac{(M+m)g}{Ml+Ma+ma} & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{l+a}{Ml+Ma+ma} \\ 0 \\ \frac{1}{Ml+Ma+ma} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -k_1 & -k_2 & -k_3 & -k_4 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \\ z_4 \end{bmatrix} \tag{15}
$$

4. LQR控制器实现反馈控制

4.1 LQR控制器

在现代控制理论中，在我们得到矩阵A_{cl}后，求其特征值，就能够知道控制系统的表现能力，如系统是否能稳定、是否能快速收敛到稳定值等等。因此，在设计控制器时，重点就是如何配置矩阵A_{cl}的特征值，如同在经典控制理论中配置传递函数的极点。这时我们引入了LQR控制器。

LQR一般形式表示如下:

$$
J = \int_0^\infty (x^T Q x + u^T R u) dt
$$

其中，x为被控对象的状态变量；u为被控对象的输入量；矩阵Q和R分别代表状态变量x及输入量u的权重，Q,R均为对角矩阵，对角线中的值代表权重系数。关于LQR控制器的详细推导请参考这篇[文章]。

4.2 Matlab求解

下面我们使用Matlab计算出矩阵K，并求解倒立摆系统的微分方程（数值解）。

```
%% lqrcontrol.m
clear all;
%% 系统参数
M = 0.2275;
m = 0.0923;
g = 9.8;
L = 0.185;
J = 0.00412;

%% 状态空间矩阵
a=J/(m*L);
fen_mu=M*L+M*a+m*a;

%% 状态空间矩阵
A=[
    0 1 0 0;
    0 0 m*g*L/fen_mu 0;
    0 0 0 1;
    0 0 (m+M)*g/fen_mu 0
    ];
B=[0;(L+a)/fen_mu;0;1/fen_mu];
C=eye(4);
D=0;

%% 建立系统
cart=ss(A,B,C,D);

%% LQR
Q = diag([10 1 10 1]);% x,dot(x),phi,dot(phi)
R = 0.001;
% 计算出k
K =lqr(cart,Q,R);
% 计算Acl的特征值，观察系统稳定性
eig(A-B*K)

%% 求解微分方程
tspan=0:0.05:10;
y_0=[0;0;pi/12;0];
[t,y] = ode45(@(t,y)solve_cart(t,y,m,M,L,g,J,K),tspan, y_0);

figure;
grid on;
hold on;
plot(tspan,y(:,1));
plot(tspan,y(:,2));
plot(tspan,y(:,3));
plot(tspan,y(:,4));
legend({'x', '$$\dot{x}$$', '$$\varphi$$', '$$\dot{\varphi}$$'}, 'Interpreter', 'latex');
hold off
```

运行$lqrcontrol.m$文件后，就能够获得倒立摆系统的四个状态量随时间变化趋势。

下面是摆杆初始倾角$\varphi_0=15^{\circ}$的状态量变化图：

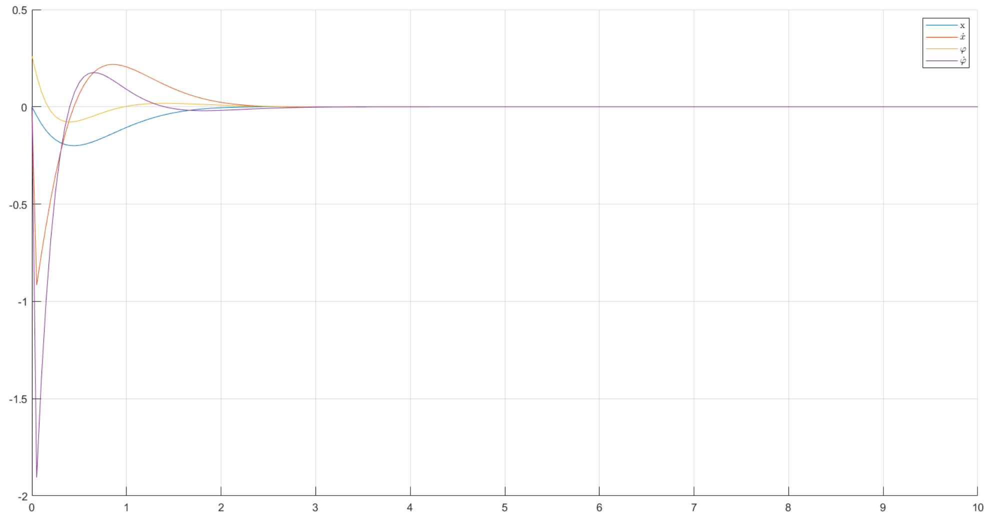

图4 初始倾角为15°时，倒立摆系统的状态量变化图

从上图能够清晰地看到，摆杆在滑块的运动控制下3s内保持直立平衡，响应速度较快，系统输入量也较为合适，避免了过高要求的输入。

下面我们通过Matlab中的Simulink进行倒立摆系统的仿真。

5. Simulink仿真建模与动画效果

5.1 仿真环境搭建

我们通过Matlab中的Simulink模块来搭建仿真环境，并借助Simulink中的Simscape搭建倒立摆系统的物理仿真。

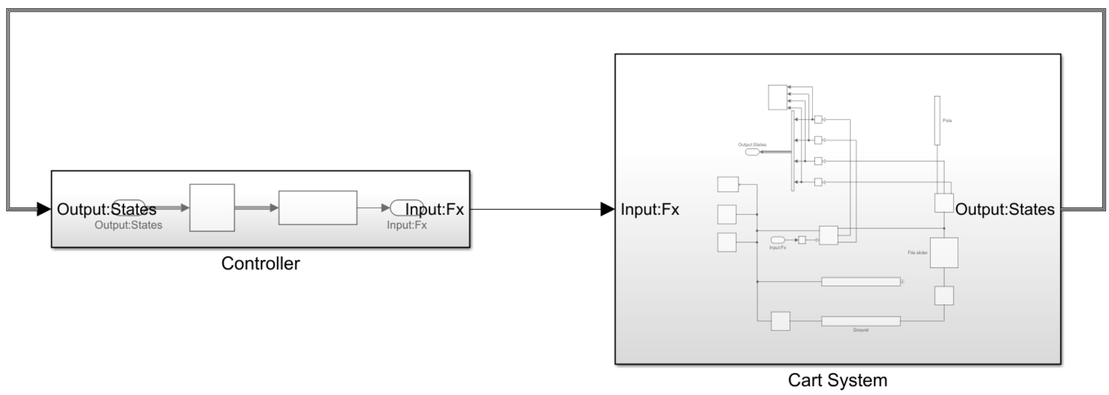

图5 Simulink仿真环境总览

从上图我们可以看到，整个仿真环境分为2个Subsystem，左边是Controller，右边是倒立摆物理系统Cart System仿真，两边组成了一个闭环控制系统。我们首先来看Cart System：

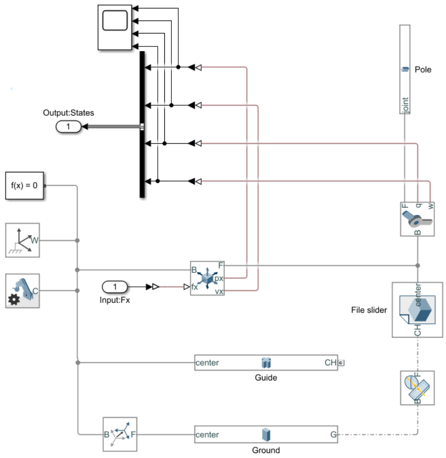

图6 Cart System建模总览

Cart System环境配置步骤如下：

1. 设置Simulink求解器、世界坐标系和机械配置（模拟重力加速度）；
2. 添加所需的物理实体，包括导轨地面、滑块、摆杆、转轴以及旋转关节。对于滑块来说，它是系统的主动元件，配置一个三轴自由度的属性（实际滑块是X轴单轴运动），随后对各个实体设置好合适的大小以及坐标系。上述滑块由Solidworks软件建模得到并导入Simscape中；
3. 在滑块与导轨地面间添加实体碰撞效果Spatial Contact；
4. 由于Simscape中的状态量和Simulink中的状态量数据类型并不一致，所以需要设置好相应的数据转换器；
5. 将需要的四个状态量输出，并用scope模块观察。

下面我们来看Controller：

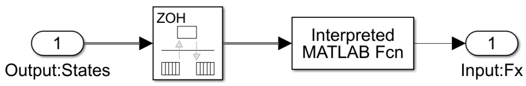

图7 Controller建模总览

Controller配置步骤如下：

1. 将Cart System的输出（四个状态量）作为控制器的输入；
2. 添加Rate Transition，并设置Controller模块每隔0.001s触发后面的Matlab求解方程；
3. 添加Interpreted MATLAB Function，设置预先写好的Matlab控制算法脚本（具体内容在5.2节）。

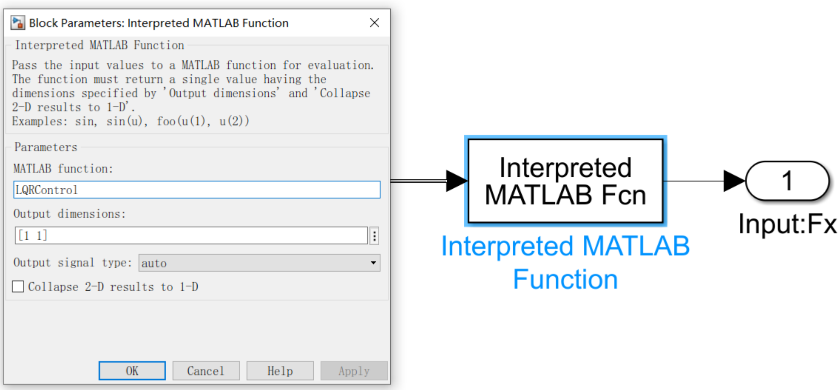

图8 Interpreted MATLAB Function具体设置

5.2 仿真环境所需代码

代码编写步骤如下：

1. 编写倒立摆系统初始参数、控制算法函数脚本$startUp.m$。在运行脚本后，仿真模块能从Matlab工作区查找到系统初始参数，以及函数名；
2. 编写LQR控制器脚本$cartLQR.m$，与上文$lqrcontrol.m$文件求解微分方程过程一只，去除掉了绘图部分；
3. 编写反馈控制脚本$LQRControl.m$，也就是状态反馈控制中的$U=-KX$的代码实现，如下所示：

```
%% LQRControl.m
function Fx = LQRControl(states)
global K_LQR
%% desired value
X_des = [0;0;0;0];
%% control law
Fx = K_LQR*(X_des - states);
end
```

我们在Cart System中添加了Scope模块，可以在仿真模型运行后观察倒立摆系统的四个状态量，如图10所示：

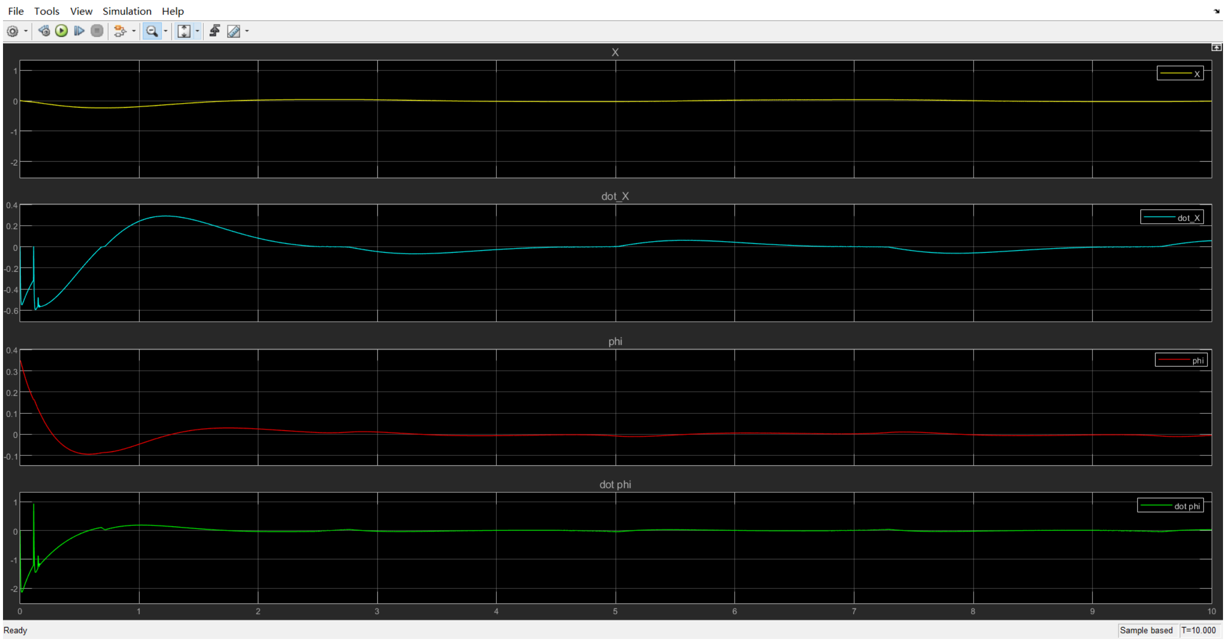

图10 仿真环境下的四个状态量

至此，关于一阶倒立摆系统的建模仿真结束。