第4章 折现现金流量估价

李连军 博士 教授

- Chapter Outline
  - 4.1 单期投资的情形（One-Period Case）
  - 4.2 多期投资的情形（Multi-period Case）
  - 4.3 复利计息期数（Compounding Periods）
  - 4.4 简化公式（Simplifications）
  - 4.5 如何评估公司的价值（What Is a Firm Worth?）

4.1 单期投资的情形

- 终值（FV）：一笔资金经过一个时期或多个时期以后的价值。

$$FV = C_0 \times (1 + r)$$

- 现值：$PV=C_1/(1+r)$
- 投资的净现值（NPV）=－成本+PV

不确定性与价值评估

- 不确定的投资其风险较大，这时就要求一个更高的贴现率。
- 比如投资油画，其风险高，确定性的市场利率假如是10%，投资油画的贴现率可能要求为25%。

4.2 多期投资的情形

- 终值

$$FV = C_0 \times (1 + r)^T$$

C_0：期初投资金额,

r：利息率

T：资金投资所持续的期数

- 现值

$$\mathrm{PV} = C_\mathrm{T}/(1 + r)^T$$

4.3 复利计息期数

- 一年期终值：

$$FV = C_0 \times \left(1+\frac{r}{m}\right)^m$$

- r:名义年利率，m: 一年复利计息次数
- 实际年利率：

$$\left(1+\frac{r}{m}\right)^m - 1$$

实际年利率

C_0	复利计息次数（m）	C_1	实际年利率= $\left(1+\frac{r}{m}\right)^m-1$
$1,000	每年（m=1）	$1,100.00	0.10
1,000	每半年（m=2）	1,102.50	0.102 5
1,000	每季（m=4）	1,103.81	0.103 81
1,000	每日（m=365）	1,105.16	0.105 16

多年期复利

$$FV = C_0 \times \left(1+\frac{r}{m}\right)^{m\times T}$$

连续复利

$$FV = C_0 \times e^{rT}$$

- C_0是初始的投资，r是名义利率，T是投资所持续的年限；e是一个常数，其值约为2.718

连续复利

图4-11描述了年、半年以及连续计息方式之间的关系。半年复利计息的曲线比年复利计息曲线更高更平滑，连续计息方式的曲线则最高、最平滑。

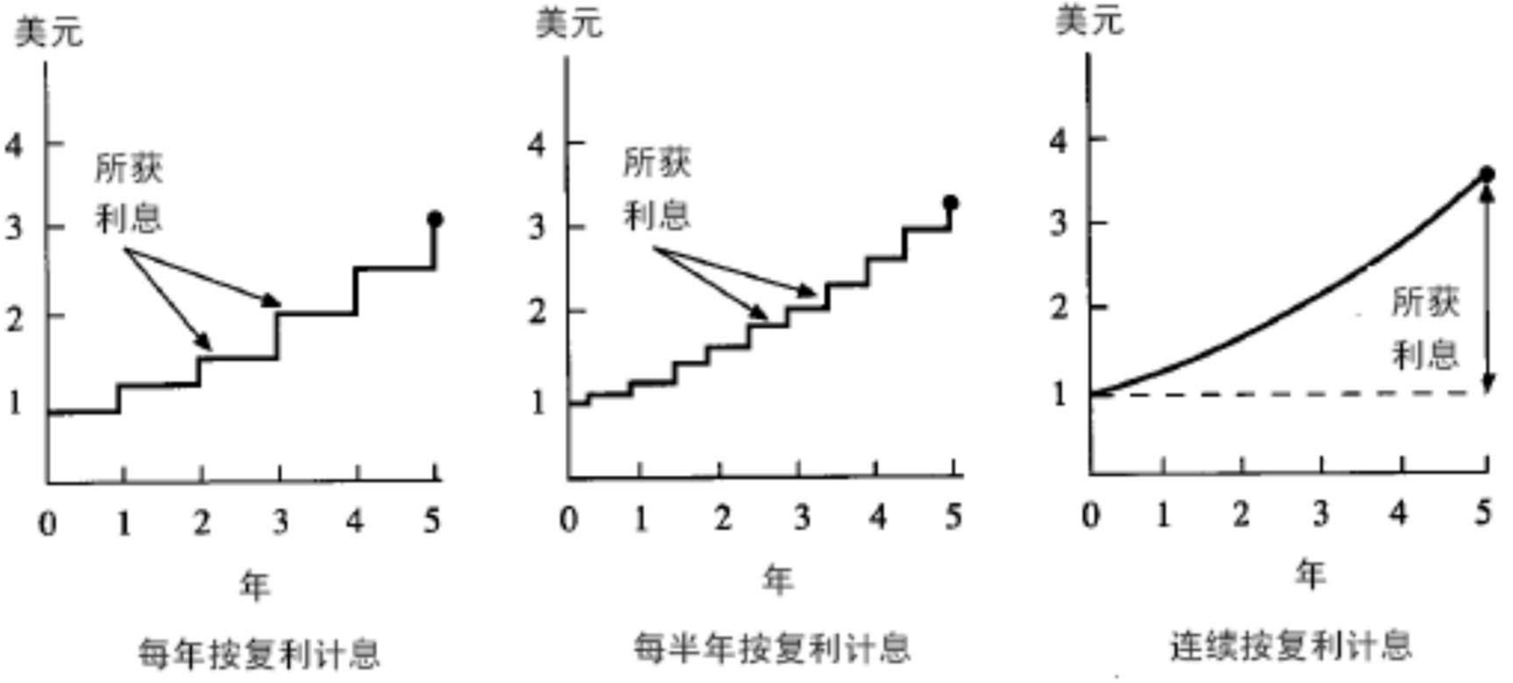


图4-11　每年、每半年和连续计息

4.4 简化公式（Simplifications）

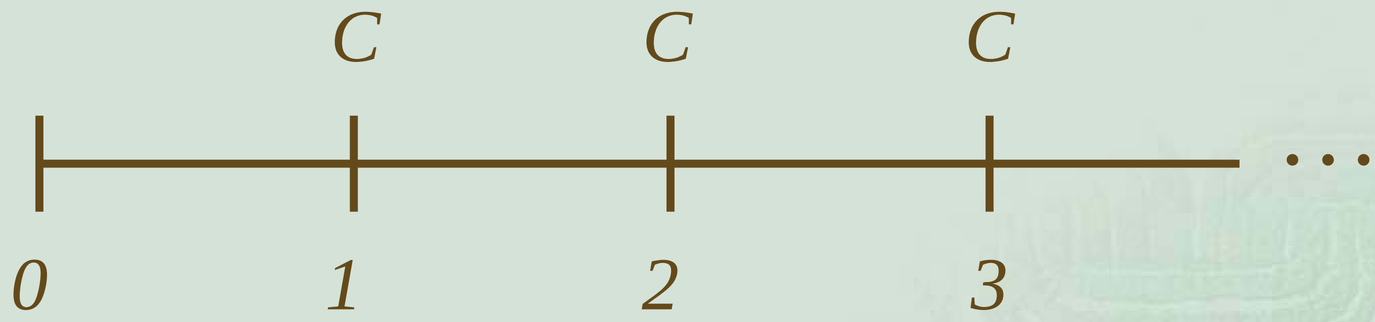
- 永续年金（Perpetuity）
  - 永续年金(annuity)是一系列没有止境的现金流
  - 比如英国政府发行的金边债券（*consols*）（由英国政府1751年开始发行的长期债券），一个购买金边债券的投资者有权永远每年都在英国政府领取利息
  - 比如NOBEL奖、其它奖学金等
- 永续增长年金（Growing perpetuity）
  - A stream of cash flows that grows at a constant rate forever.
  - 比如：上市公司的高管人员在年报中经常承诺公司在未来将以20%的股利增长率向股东派现

4.4 简化形式（Simplifications）

- 年金（Annuity）
  - 年金是指一系列稳定有规律的、持续一段固定时期的现金收付活动
  - A stream of constant cash flows that lasts for a fixed number of periods.
  - 比如：人们退休后所得到的养老金经常是以年金的形式发放的。租赁费和抵押借款也通常是年金的形式
- 增长年金（Growing annuity）
  - A stream of cash flows that grows at a constant rate for a fixed number of periods.

永续年金（Perpetuity）

A constant stream of cash flows that lasts forever.



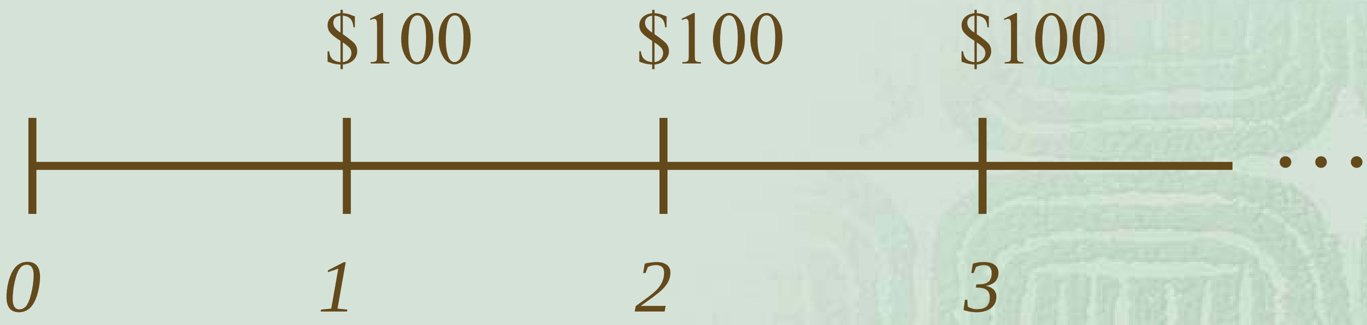
$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \frac{C}{(1+r)^3} + \cdots$$

The formula for the present value of a perpetuity is:

$$PV = \frac{C}{r}$$

Perpetuity: Example

假如有一笔永续年金，以后每年要付给投资者100美元，如果相关的利率水平为8%，那么该永续年金的现值为多少?



$$PV = \frac{\$100}{.08} = \$1,250$$

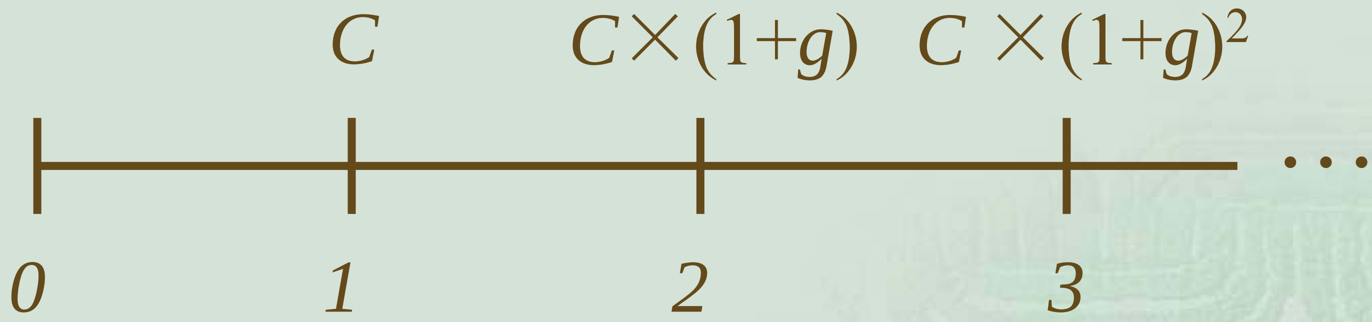
永续增长年金（Growing Perpetuity）

假如有一个房屋建筑在扣除各项费用后，明年房东会有 100,000美元的房租现金收入。这笔现金流预计会以每年5%的速度增长。如果能肯定这种增长趋势会永远持续下去，这种现金流序列就称作永续增长年金(growing perpetuity)。有关的利率是11%，因而适当的贴现率应为11%，这笔现金流的现值计算方法可表达为：

$$PV = \frac{\$100{,}000}{1.11} + \frac{\$100{,}000(1.05)}{(1.11)^2} + \frac{\$100{,}000(1.05)^2}{(1.11)^3} + \cdots + \frac{\$100{,}000(1.05)^{N-1}}{(1.11)^N} + \cdots$$

上述问题显然是个关于无穷级数的计算问题。

永续增长年金（Growing Perpetuity）



$$PV = \frac{C}{(1+r)} + \frac{C\times(1+g)}{(1+r)^2} + \frac{C\times(1+g)^2}{(1+r)^3} + \cdots$$

The formula for the present value of a growing perpetuity is:

$$PV = \frac{C}{r-g}$$

永续增长年金（Growing Perpetuity）

- 上述公式中，
  - C：现在开始一期以后收到的现金流；
  - g：每期的固定增长率
  - r：适当的贴现率
- 关于永续增长年金的计算公式有三点需要注意：
  - 上述公式中的分子是现在起一期后的现金流，而不是目前的现金流
  - 贴现率r一定要大于固定增长率g，这样永续增长年金公式才会有意义
  - 假定现金流的收付是有规律的和确定的
  - 通常的约定：假定现金流是在年末发生的(或者说是在期末发生的)；第0期表示现在，第1期表示从现在起1年末，依次类推

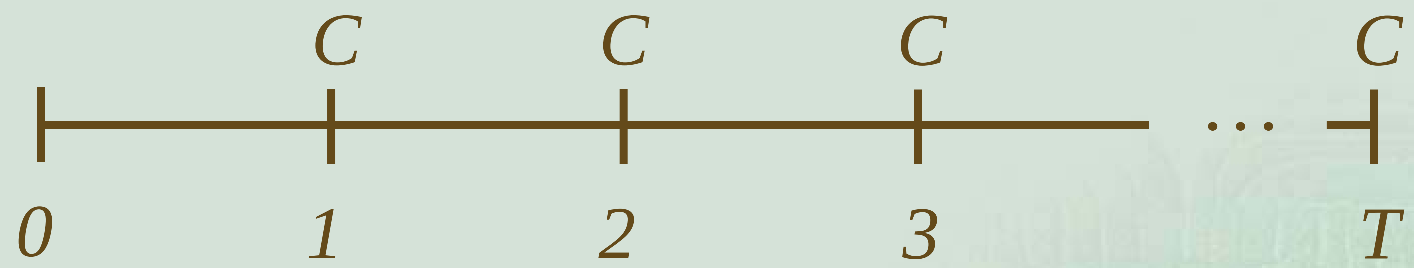
永续增长年金

房东由房屋可得的现金流（房租）的现值为

$$PV = \frac{100000}{.11 - .05} = \$1666667$$

年金（Annuity）

A constant stream of cash flows with a fixed maturity.

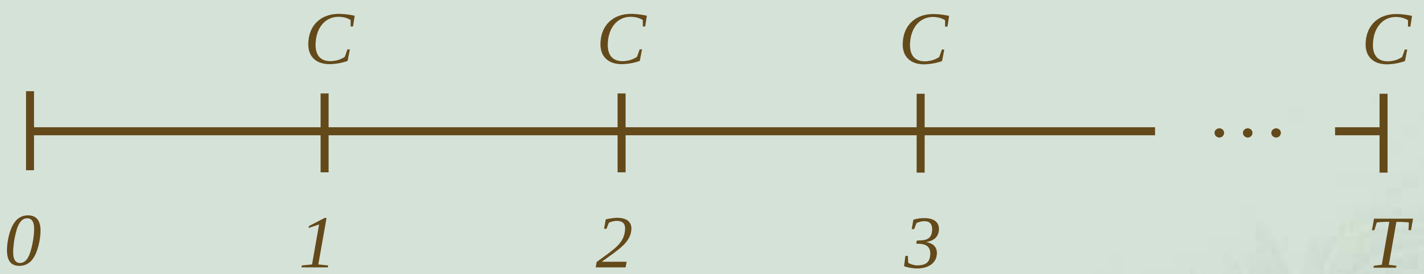


$$PV=\frac{C}{(1+r)}+\frac{C}{(1+r)^2}+\frac{C}{(1+r)^3}+\cdots\frac{C}{(1+r)^T}$$

年金现值公式:

$$PV=\frac{C}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^T}\right]$$

年金现值计算的另一种思维：



年金现值可由两个永续年金现值之差求出:
从时期1开始的永续年金
减去从时期 $T+1$ 开始的永续年金

$$PV = \frac{C}{r} - \frac{\left(\frac{C}{r}\right)}{(1+r)^T}$$

年金（Annuity）

$$PV = \frac{C}{r}\left[1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right]$$

$$A_r^T = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{1}{(1+r)^T}\right)$$

$$PV = C \times A_r^T$$

- 年金现值系数 A_r^T
  - 是在利率为r的情况下，T年内每年获得1美元的年金的现值
  - 年金现值系数表

Annuity: Example Ⅱ

马克·杨（Mark Young）赢得了一项州博彩大奖，在以后20年中每年将得到50,000美元的奖金，一年以后开始领取奖金。若年利率为8%，这项奖项的真实价值是多少?

$$\text{百万美元大奖的现值} = \underbrace{\$50{,}000}_{\text{每期所得奖金}} \times \underbrace{\left[\frac{1}{0.08} - \frac{1}{0.08(1.08)^{20}}\right]}_{\text{年金系数}}$$

$$= \$50{,}000 \times 9.818\,1$$

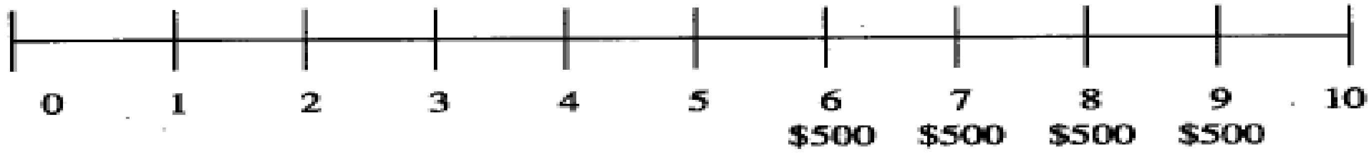
$$= \$490{,}905$$

关于年金计算中需要注意的地方

- 对于年金计算中现金流产生的时间差异：
  - 递延年金（delayed annuity）
    - 现金流收付产生在多期以后的年金
  - 先付年金（annuity in advance）
    - 与后付年金相对应：通常假定第一次年金收付发生在1期之后
    - 年金的第一次支付发生在现在或者说是0期
    - 教材P67例4－22
  - 不定期年金（the infrequent annuity）
    - 指年金的支付频率不确定，超过1年期
  - 使两笔年金的现值相等

递延年金实例

丹尼尔·卡拉维洛（ Danielle Caravello）在六年后开始的四年之内，每年会收到**500**美元。如果利率为**10**%，那么他的年金的现值为多少**?**



分析过程包括两步：

(1) 用式（4-13）计算年金的现值，也就是：

在第5期年金的现值：

$$\$500\left[\frac{1}{0.10}-\frac{1}{0.10(1.10)^4}\right]=\$500\times A_{0.10}^{4}$$

$$=\$500\times 3.169\ 9$$

$$=\$1{,}584.95$$

注意1,584.95美元代表年金在第5期的现值。

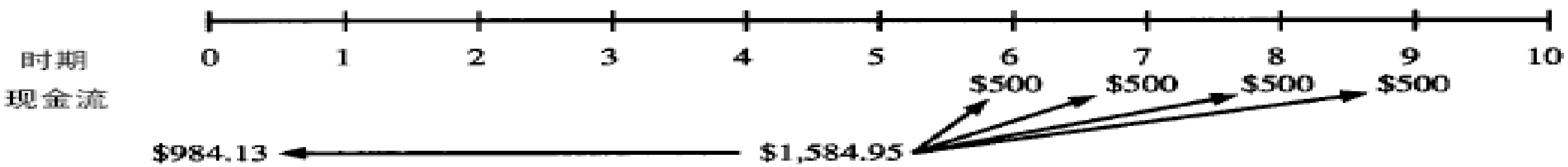
经常有学生会认为1,584.95美元是在第6期的现值，因为年金是在第6期开始的。但是，我们的计算公式求出的是年金在开始付出现金流之前一期的现值。在最典型的案例中，年金的第一次支付是发生在第一期的。这里公式计算的是年金在第0期的现值。

(2) 将年金在第5期的现值贴现到当前，也就是0期。这样

0期的现值：

$$\frac{\$1{,}584.95}{(1.10)^5}=\$984.13$$

需要再一次指出的是，因为年金计算公式求出的是丹尼尔的年金在第5期的现值，第二步的计算要再将其经过的这五期时间进行贴现。这两步计算过程可由图4-12绘出。



注：第一步：用年金公式将四期现金的支付贴现至第5期。

第二步：将第5期的现值（1,584.95美元）再贴现至当前。

图4-12 丹尼尔年金的贴现过程

不定期年金实例

陈安娜（**Ann Chen**）小姐得到一笔**450**美元的年金，每两年支付一次，持续时间为**20**年。第一次支付是在第**2**期，也就是两年以后，年利率为**6**％。该年金的现值为多少？

第一步，首先需确定两年期的利率：

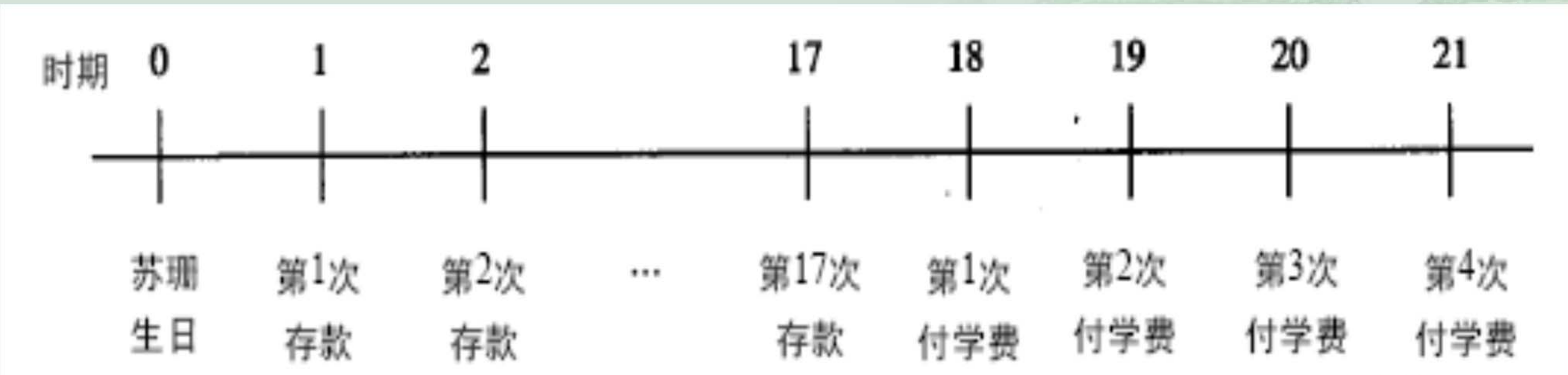
R＝(1＋6%)(1+6%)-1=12.36%

第二步，计算10年期的年金现值：

$$PV=\$450*[1/0.1236-1/0.1236(1+0.1236)^{10}]=\$2\,505.57$$

两笔年金的现值相等

哈罗德（Harold）和海伦·南希（Helen Nash）开始为他们刚出生的女儿苏珊（Susan）进行大学教育存款，南希夫妇估计当他们的女儿上大学时，每年的费用将达30,000美元，在以后几十年中年利率将为14％。这样，他们现在要每年存多少钱才能够支付女儿四年大学期间的费用?为了便于计算，我们假定苏珊今天出生，她父母将在她18岁生日那年支付第1年的学费。在以后的17年中，他们每年都在苏珊生日那天存入相同金额的存款。第1次存款是在1年以后。



两笔年金的现值相等

计算过程分三步：前两步要计算最后4年要支付学费的现值，然后再计算南希夫妇每年要存多少款，其现值才等于所支付学费的现值。

(1) 用年金公式计算4年学费的现值：

$$\$30{,}000\times\left[\frac{1}{0.14}-\frac{1}{0.14\times(1.14)^4}\right]=\$30{,}000\times A_{0.14}^{4}$$

$$=\$30{,}000\times 2.9137=\$87{,}411$$

(2) 计算4年学费在第0期的现值：

$$\frac{\$87{,}411}{(1.14)^{17}}=\$9{,}422.91$$

(3) 使存款与支付学费的现值相等：

$$C\times A_{0.14}^{17}=\$9{,}422.91$$

$$C=\frac{\$9{,}422.91}{6.3729}=\$1{,}478.59$$

增长年金（Growing Annuity）

- 比如：由于企业的实际增长率变化或通货膨胀等的原因，使得企业现金流随着时间而增长情况
- 增长年金的现值可视为两个永续增长年金的现值的差额

增长年金（Growing Annuity）

增长年金现值的计算公式

$$PV=\frac{C}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{(1+r)}\right)^{T}\right]$$

其中：

C：是指第一期末开始支付的数额；

r：是指适当利率利率；

g：是指每期的固定增长率

T：是指年金支付的持续期

Growing Annuity：Example

斯图尔特·加贝尔（Stuart Gabriel）是一个二年级的MBA学生，他得到了一份每年80,000美元薪金的工作。他估计他的年薪会每年增长9%，直到40年后他退休为止。若年利率为20%，他工作期间工资的现值为多少?

$$PV = \$80{,}000 \times \left[\frac{1}{0.20 - 0.09} - \frac{1}{0.20 - 0.09} \left(\frac{1.09}{1.20} \right)^{40} \right] = \$711{,}731$$

4.5 如何确定公司价值（What Is a Firm Worth?）

- 从概念上说，公司的价值就是公司所产生的现金流的现值。
- 如何确定现金流的多少、产生的时间以及风险是容易出错的地方。

某公司预计在明年产生5,000美元的净现金流(现金流入减去现金流出)，在随后的五年中每年产生2,000美元的净现金流。从现在开始，七年后公司可以10,000美元售出。公司的所有者对公司期望的投资收益率为10%。

公司的现值

年末	公司的净现金流	现值系数（r=10%）	净现金流的现值
1	$ 5,000	0.909 09	$ 4,545.45
2	2,000	0.826 45	1,652.90
3	2,000	0.751 31	1,502.62
4	2,000	0.683 01	1,366.02
5	2,000	0.620 92	1,241.84
6	2,000	0.564 47	1,128.94
7	10,000	0.513 15	5,131.58
		公司的现值	$16,569.35

因此，该公司的价值为**16,569.35**美元。

本章小结

- 两个基本概念：现值与终值
- 利率一般是按照年计息的。
- 投资决策的基本方法是净现值法：

$$NPV = -C_0 + \frac{C}{(1+r)} + \frac{C}{(1+r)^2} + \cdots + \frac{C}{(1+r)^N} = -C_0 + \sum_{t=1}^{N} \frac{C}{(1+r)^t}$$

本章小结

- **四个简化公式**

$$永续年金:PV=\frac{C}{r}$$

$$永续增长年金:PV=\frac{C}{r-g}$$

$$年金:PV=\frac{C}{r}\left[1-\frac{1}{(1+r)^T}\right]$$

$$增长年金:PV=\frac{C}{r-g}\left[1-\left(\frac{1+g}{(1+r)}\right)^T\right]$$

本章小结

- 在上述公式应用中需要注意的问题：
  - 各个公式的分子是从现在起一期以后收到的现金流；
  - 现实生活中的现金流分布常常是不规律的，为了避免大量的笨拙计算，在本书和实际中常会假定现金流分布是有规律的；
  - 有些问题是关于几期以后开始的年金(或永续年金)的现值的计算。同学们应学会结合贴现公式和年金(或永续年金)公式来求解；
  - 有时年金或永续年金可能是每两年或更多年时期发生一次，而不是每1年1次。年金和永续年金的计算公式可以轻易地解决这些问题；
  - 在应用过程中，同学们还经常会碰到令两个年金的现值相等来联合求解的问题。

课后作业

- 李某购房公积金贷款546000元，期限15年，期 间 为 2009.8.6—2024.8.5 。 月 利 率 为 3.225‰。
- 1.假如每月等额本息还款，每月还款额为多少？
- 2.假如第一月还款期为9月15日，那么第一个月还款金额为多少？