第10章 收益和风险：资本资产定价模型

第10章 目录

10.1 单一证券

- 单一证券的特征，特别是:
  - 期望收益
    - 单个证券的期望收益可以简单地以过去一段时期从这一证券所获得的平均收益来表示。
  - 方差和标准差
    - 用来评价证券收益的变动程度。
  - 协方差和相关系数
    - 用来度量两种证券收益之间的相互关系

10.2.1 期望收益和方差

期望收益

$$\bar{R} = \frac{1}{T}\sum_{i=1}^{T} R_i$$

方差

$$Var = \frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}\left(R_i - \bar{R}\right)^2$$

标准差

$$SD = \sqrt{Var} = \sqrt{\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}\left(R_i - \bar{R}\right)^2}$$

10.2.2 协方差和相关系数

- 当衡量两个证券的收益之间的相关性及其相关程度时，我们感兴趣的特征指标是：
  - 协方差

$$\delta_{AB}=Cov(R_A,R_B)=\frac{1}{T-1}\sum_{i=1}^{T}\left(R_{Ai}-\bar{R}_A\right)\left(R_{Bi}-\bar{R}_B\right)$$

  - 相关系数

$$\rho_{AB}=Corr(R_A,R_B)=\frac{Cov(R_A,R_B)}{SD(R_A)\times SD(R_B)}$$

10.2 期望收益、方差和协方差

经济状况	Supertech公司R_{at}	Slowpoke公司R_{Bt}
萧条	-20%	5%
衰退	10%	7%
正常	30%	-12%
繁荣	50%	9%

考虑下列两种风险资产世界， 每种经济状况出现的概率都是 1/4 。

期望收益、方差与标准差

经济状况	Supertech公司R_{at}	Slowpoke公司R_{Bt}	
萧条	-20%	5%	
衰退	10%	7%	
正常	30%	-12%	
繁荣	50%	9%	
期望收益	17.5%	5.5%	
方差	0.066875	0.013225	
标准差	25.86%	11.50%	

协方差与相关系数

经济状况	Supertech公司R_{at}	Slowpoke公司R_{Bt}
萧条	-20%	5%
衰退	10%	7%
正常	30%	-12%
繁荣	50%	9%
期望收益	17.5%	5.5%
方差	0.066875	0.013225
标准差	25.86%	11.50%
协方差	-0.004875	
相关系数	-0.1639	

10.2 期望收益、方差和协方差

- 协方差的含义
  - 如果两个公司的股票收益正相关，则它们的协方差为正值
  - 如果两个公司的股票收益负相关，则它们的协方差为负值
  - 如果两个公司的股票收益没有相关，则它们的协方差等于零
  - 两个变量的先后并不重要。也就是说， A和A的协方差等于A和A的协方差
- 相关系数的含义
  - 如果相关系数为正，我们说两个变量之间为正相关
  - 如果相关系数为负，我们说两个变量之间为负相关
  - 如果相关系数为零，我们说两个变量之间为没有相关
  - 相关系数总是界于＋1和－1之间
  - 两种资产收益之间的相关系数等于＋ 1、－1和0的情况，即完全正相关、完全负相关和完全不相关

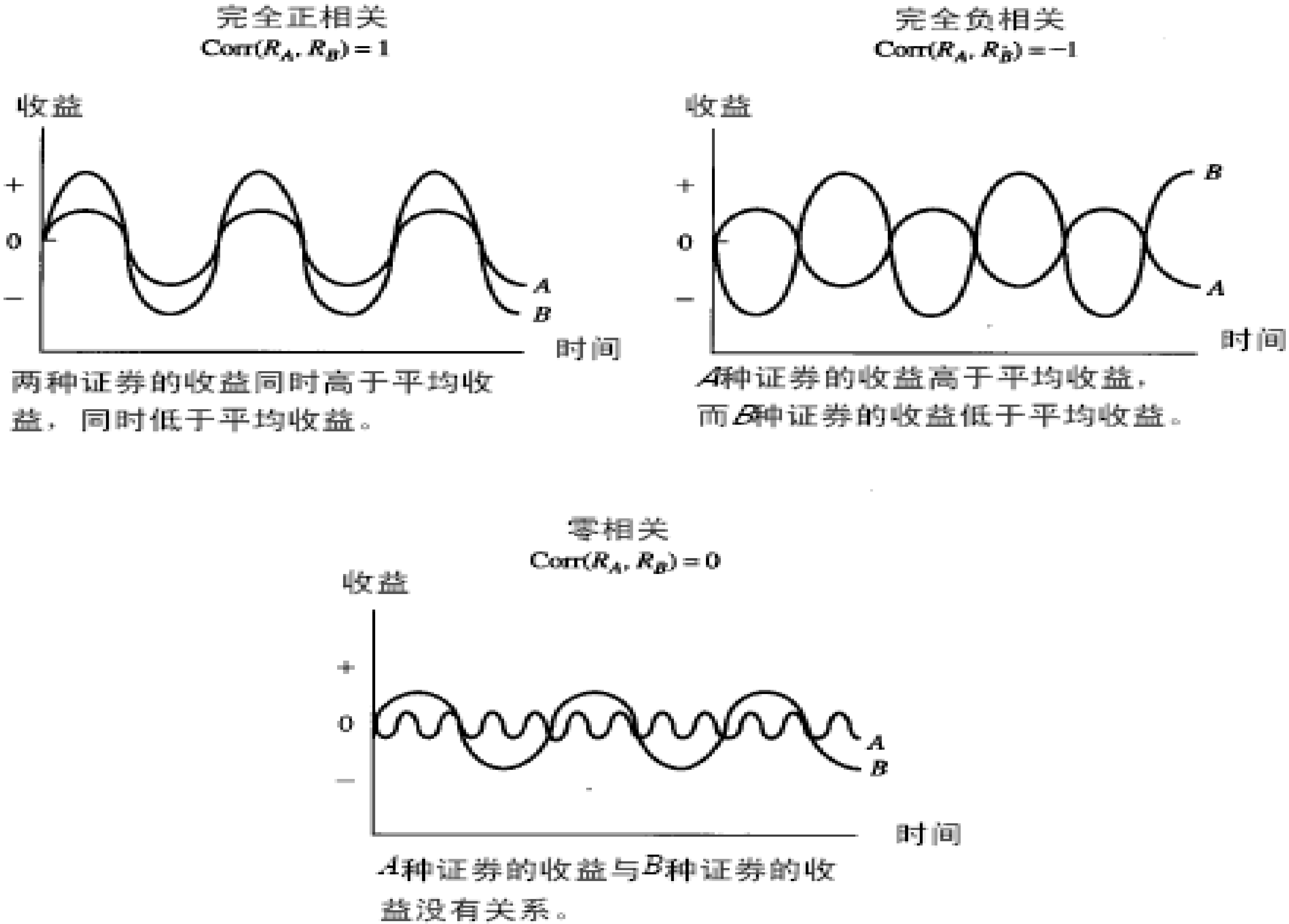


图10-1　不同的相关系数：某一时期两种资产收益之间的相互关系

10.3 投资组合的收益与风险

- 设想一个投资者已经估计出每个证券的期望收益、标准差和这些证券两两之间的相关系数，那么投资者应该如何选择证券构成最佳的投资组合(portfolio)呢？
- 显然，投资者应该选择一个具有高期望收益、低标准差的投资组合
  - 每个证券的期望收益与由这些证券构成的投资组合的期望收益之间的相互关系
  - 每个证券的标准差、这些证券之间的相关系数与由这些证券构成的投资组合的标准差之间的相互关系
- 仍然以上述例子为例来说明。

10.3 投资组合的收益和风险

- 组合的期望收益
  - 构成组合的各个证券的期望收益的加权平均值

$$r_P = w_A r_A + w_B r_B$$

- 组合的方差和标准差

$$\delta_P^2 = X_A^2 \delta_A^2 + 2 X_A X_B \delta_{A,B} + X_B^2 \delta_B^2$$

  - 投资组合的方差取决于组合中各种证券的方差和每两种证券之间的协方差

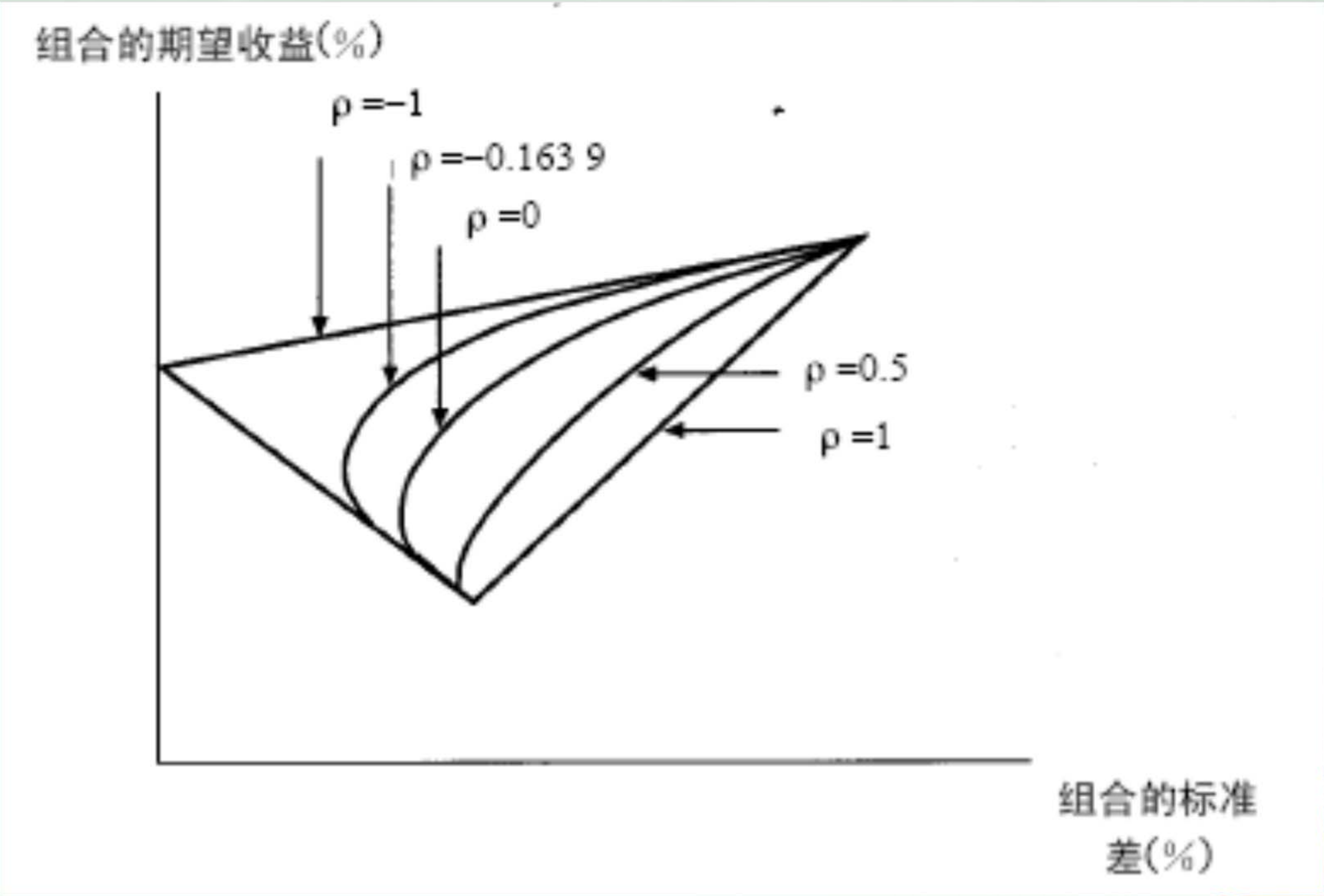
10.3 投资组合的收益和风险

- 在证券方差给定的情况下，如果两种证券收益之间相互关系或协方差为正，组合的方差就上升；如果两种证券收益之间的相互关系或协方差为负，组合的方差就下降
- 投资组合多元化的效应
  - 比较投资组合的标准差和各个证券的标准差具有的意义
  - 各个证券标准差的加权平均数：$w_A\delta_A+w_B\delta_B$
  - 由于投资组合多元化效应的作用，投资组合的标准差一般小于组合中各个证券标准差的加权平均数
  - 当ρ_{AB}=+1时，投资组合收益的标准差正好等于组合中各个证券的收益的标准差的加权平均数

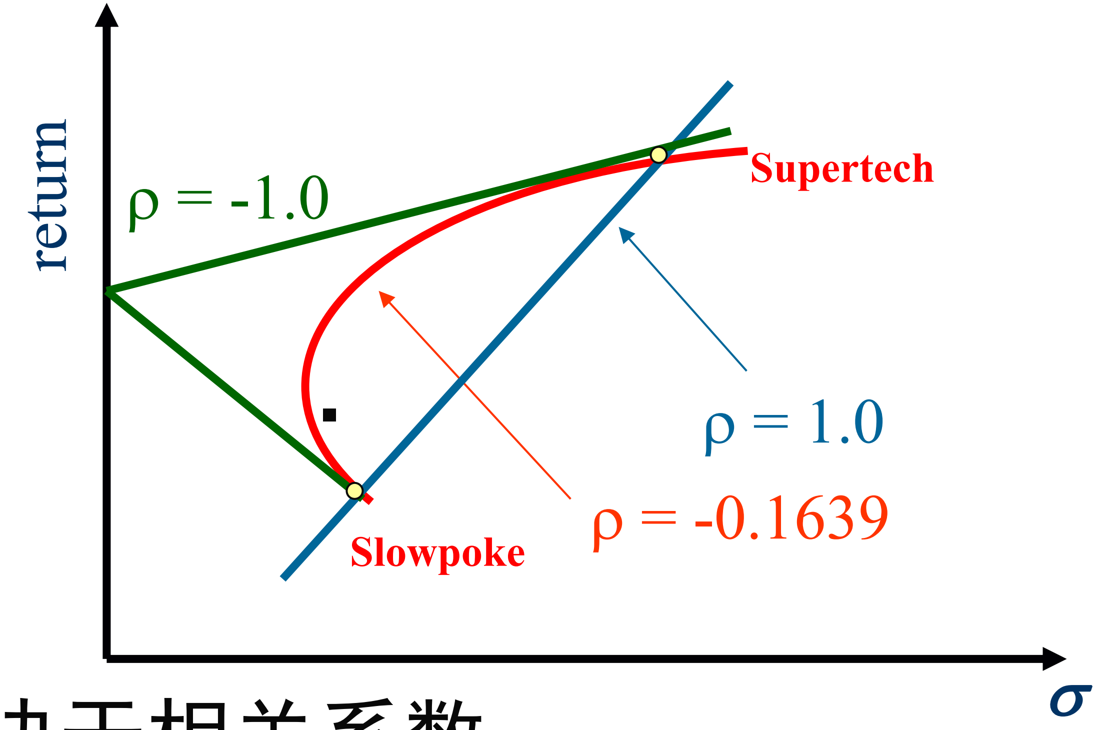
10.3 投资组合的收益和风险

- 当由两种证券构成投资组合时，只要$\rho_{AB}<1$，投资组合的标准差就小于这两种证券各自的标准差的加权平均数，也就是投资组合多元化的效应就会发生作用
- 组合的扩展——多种资产构成的组合
  - 在由多种证券构成的投资组合中，只要组合中两两证券收益之间的相关系数小于1，组合的标准差一定小于组合中各种证券的标准差的加权平均数
  - 最近10年期间标准普尔500指数和其中一些重要证券的标准差比较
    - 表中所有证券的标准差都大于标准普尔500指数的标准差

10.4 两种资产组合的有效集



不同相关 性的两种证券组合



- 关系取决于相关系数

$$-1.0 \leq r \leq +1.0$$

- 如果 r = +1.0, 不可能降低任何风险
- 如果 r = –1.0, 可以完全化解风险

几点说明

- 直线代表在两种证券的相关系数(ρ_{AB})等于1的情况下的各种可能的组合
- 由于投资组合中的证券的两两相关系数小于1时，组合多元化效应将发生作用，因此，曲线总是位于直线的左边
- 弓形曲线与纵线的切点代表具有最小方差的组合
- 投资机会集或可行性集：投资者可以通过合理地构建这两种证券的组合而获得曲线上的任意一点，由此组成的可选择集
  - 投资者不可能获得曲线上方的任意一点，因为他不可能提高某些证券的收益，降低某些证券的标准差，或降低两种证券之间的相关系数

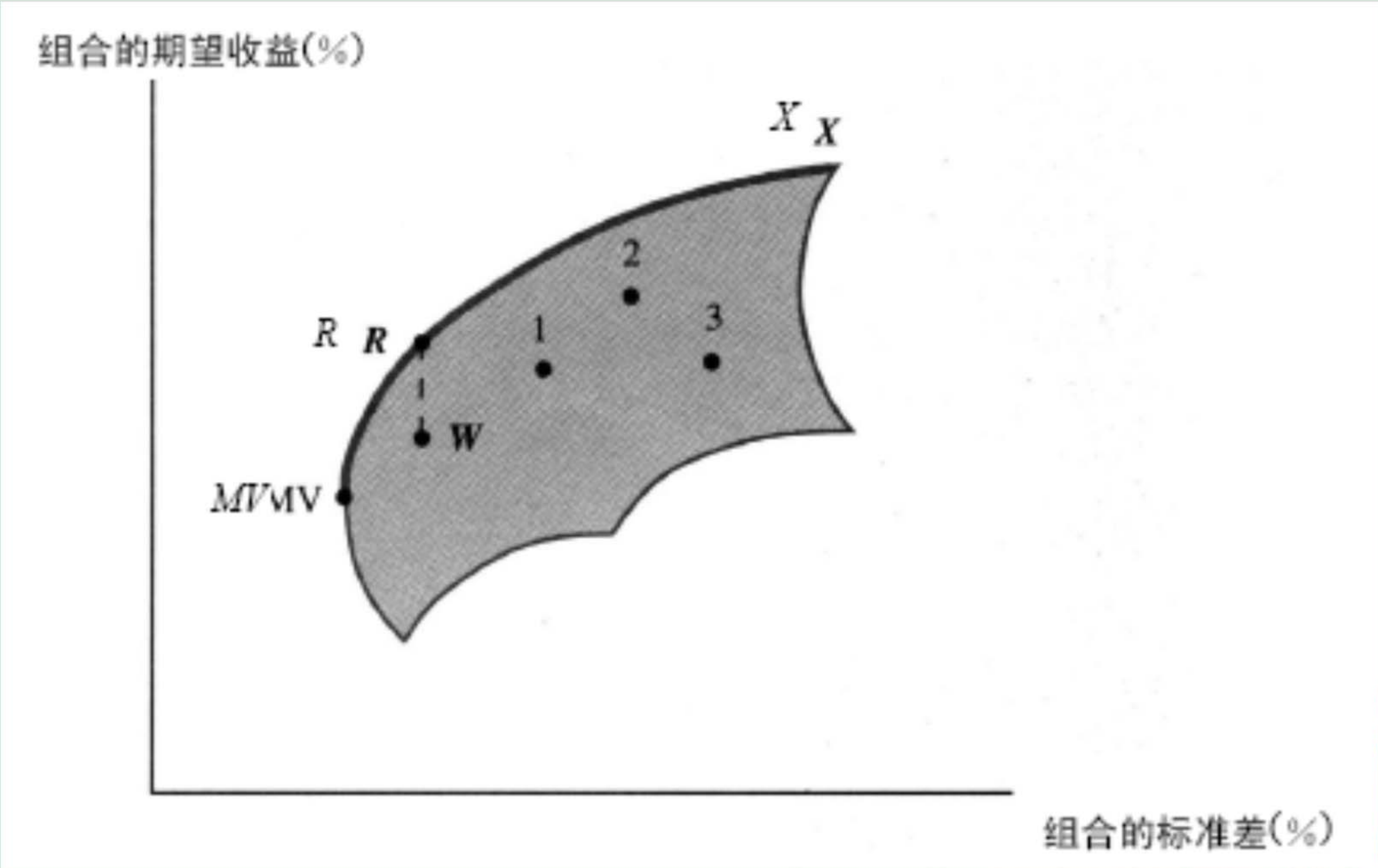
几点说明

- 事实上，只要$\rho_{AB}\leq 0$，弓型的曲线就会出现。当$\rho_{AB}>0$，弓型的曲线可能出现，也可能不出现
- 从最小方差组合至弓形曲线右端的这段曲线被称为“有效集”(efficient Set)或“有效边界”(efficient frontier)
- 一对证券之间只存在一个相关系数，相关系数愈低，曲线愈弯曲。当相关系数逼近－1时，曲线的弯曲度最大。当相关系数等于－1时，结果可能令人惊奇，但实际上这种结果几乎不可能发生

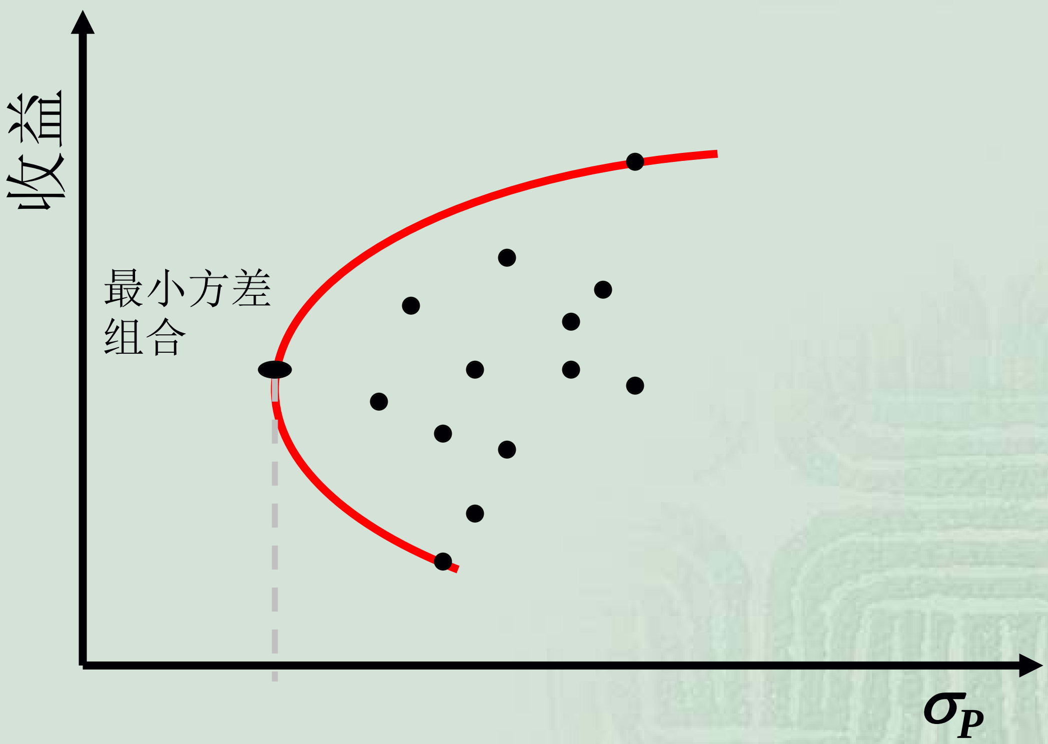
10.5 多种资产组合的有效集

- 两种资产组合
  - 不同投资比例形成的有效集是一条曲线
- 多种资产组合
  - 不同数量投资形成的组合
  - 不同投资比例形成的组合
  - 不同数量、不同投资比例形成的组合
- 当只有两种证券构成投资组合时，所有的各种组合都位于一条弓型曲线之中
- 当多种证券构成投资组合时，所有的各种组合都位于一个区域之中

10.5 多种资产组合的有效集

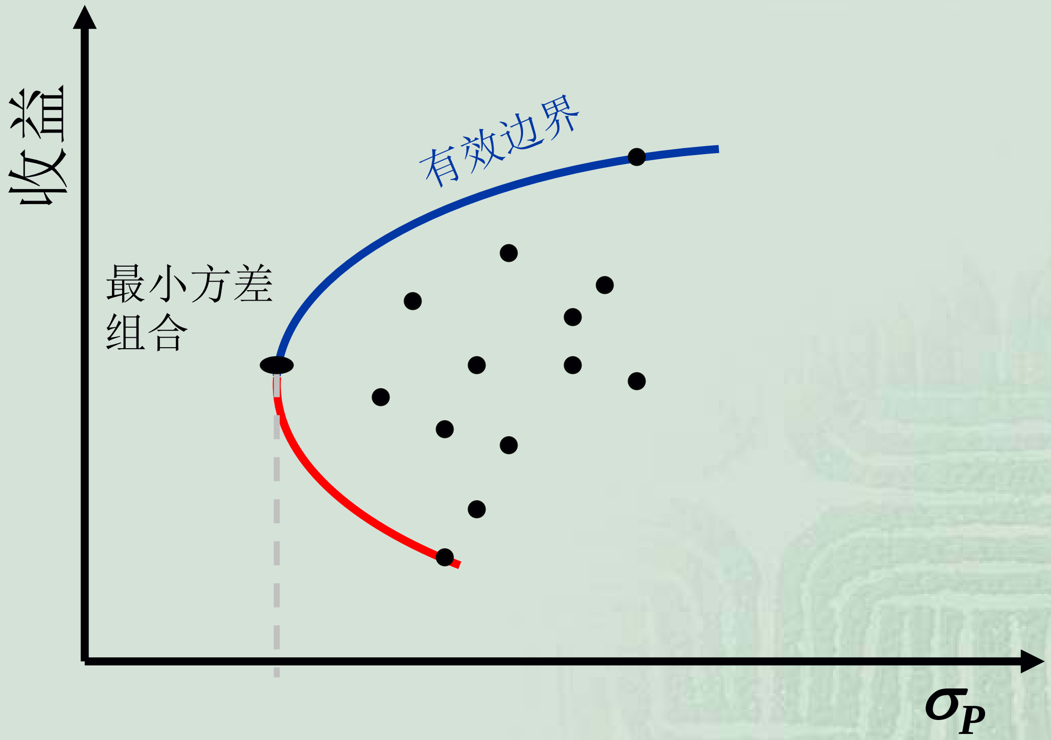


10.5 多种资产组合的有效集



给定机会集，我们可以找出最小方差组合.

10.5 多种资产组合的有效集



最小方差组合上方的机会集部分是有效边界

多种资产组合的方差和标准差

应用矩阵法对N种资产组合的方差及其标准差的计算：

表10-4　投资组合方差的矩阵计算表

股票	1	2	3	…	N
1	$X_1^2\sigma_1^2$	$X_1X_2\mathrm{Cov}(R_1, R_2)$	$X_1X_3\mathrm{Cov}(R_1, R_3)$		$X_1X_N\mathrm{Cov}(R_1, R_N)$
2	$X_2X_1\mathrm{Cov}(R_2, R_1)$	$X_2^2\sigma_2^2$	$X_2X_3\mathrm{Cov}(R_2, R_3)$		$X_2X_N\mathrm{Cov}(R_2, R_N)$
3	$X_3X_1\mathrm{Cov}(R_3, R_1)$	$X_3X_2\mathrm{Cov}(R_3, R_2)$	$X_3^2\sigma_3^2$		$X_3X_N\mathrm{Cov}(R_3, R_N)$
	…				…
N	$X_NX_1\mathrm{Cov}(R_N, R_1)$	$X_NX_2\mathrm{Cov}(R_N, R_2)$	$X_NX_3\mathrm{Cov}(R_N, R_3)$		$X_N^2\sigma_N^2$

多种资产组合的方差和标准差

在一个投资组合中，两种证券之间的协方差对组合收益的方差的影响大于每种证券的方差对组合收益的方差的影响。

表10-5　组合中方差与协方差的项数与构成组合的证券种数之间的关系

构成组合的证券种数	组合收益的方差的总项数	组合中各种证券的方差的项数	组合中各对证券的协方差的项数
1	1	1	0
2	4	2	2
3	9	3	6
10	100	10	90
100	10,000	100	9,900
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
N	N^2	N	N^2-N

10.6 多元化：一个实例

- 考虑由N种资产构成的投资组合
  - 做如下简化假定：
    - 组合中所有的证券具有相同的方差
    - 组合中两两证券之间的协方差是相同的
    - 所有证券在组合中的比例相同

10.6 多元化：一个实例

表10-6 特殊的组合收益的方差的矩阵计算表

股票	1	2	3	...	N
1	$(1/N^2)\overline{\text{Var}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$		$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$
2	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Var}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$		$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$
3	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Var}}$		$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$
...					...
N	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$	$(1/N^2)\overline{\text{Cov}}$		$(1/N^2)\overline{\text{Var}}$

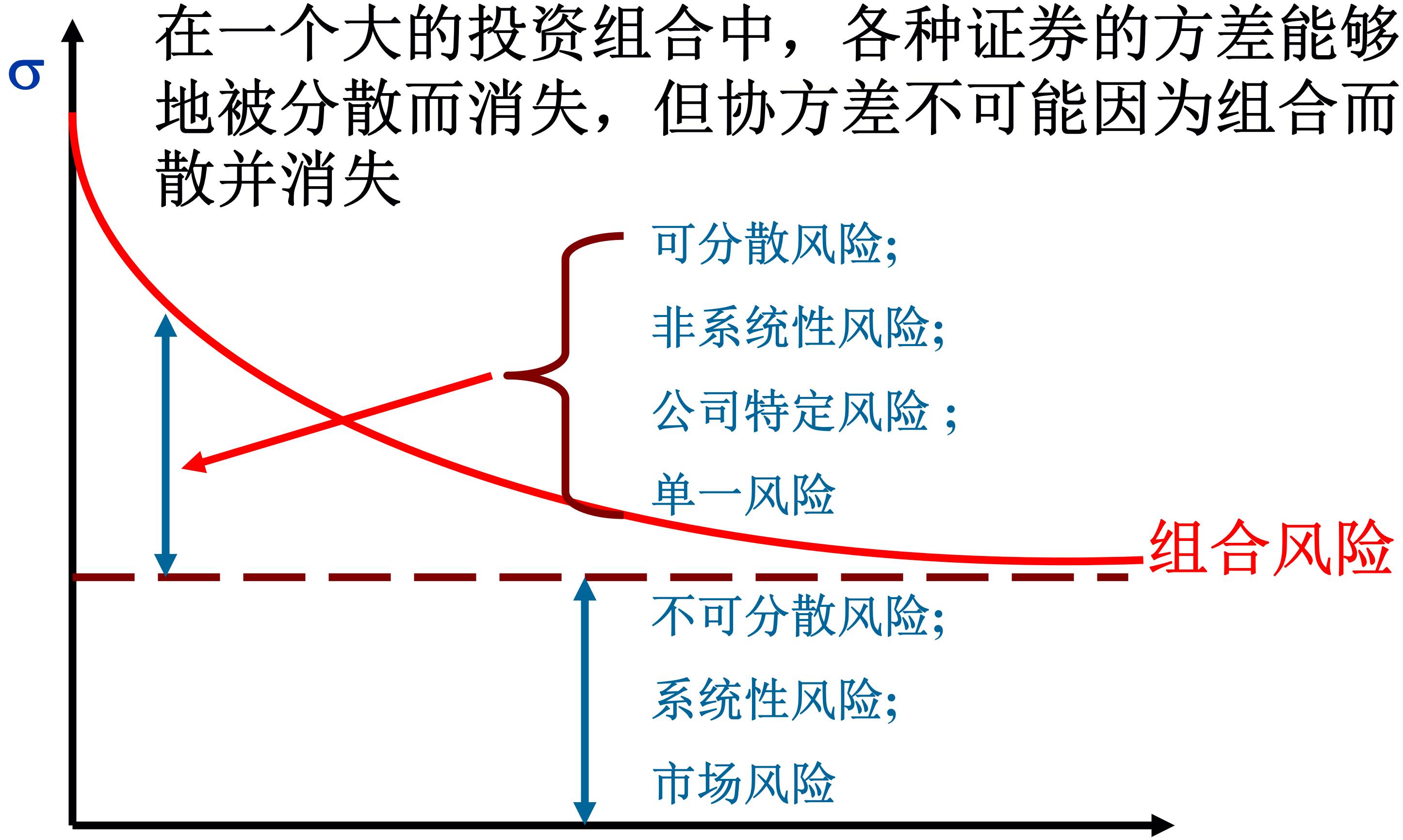
$$\begin{aligned}
\text{组合收益的方差} &= N\times(1/N^2)\overline{\text{Var}}+N(N-1)\times(1/N^2)\overline{\text{Cov}} \\
&=(1/N)\overline{\text{Var}}+[(N^2-N)/N^2]\overline{\text{Cov}} \\
&=(1/N)\overline{\text{Var}}+[1-(1/N)]\overline{\text{Cov}}
\end{aligned}$$

10.6 多元化：一个实例

- 一个有趣而重要的结果：当N趋向无穷大时，组合收益的方差等于组合中各对证券的平均协方差
- 在我们这一特殊的组合中，当证券的种数不断增加的时候，各种证券的方差最终完全消失。但无论如何，各对证券的平均协方差， 仍然存在。组合收益的方差成为组合中各对证券的平均协方差
- 也就是说，投资组合不能分散和化解全部风险，而只能分散和化解部分风险
- 某证券的总风险＝组合风险＋可分散风险
  - 组合风险又称系统性风险、市场风险或不可分散风险，是投资者在持有一个完整充分的投资组合之后仍需承受的风险
  - 可风险风险又称非系统性风险或公司特有风险，是通过投资组合可以分散掉的风险

组合风险是投资组合中股票数量的函数

在一个大的投资组合中，各种证券的方差能够有效地被分散而消失，但协方差不可能因为组合而被分散并消失

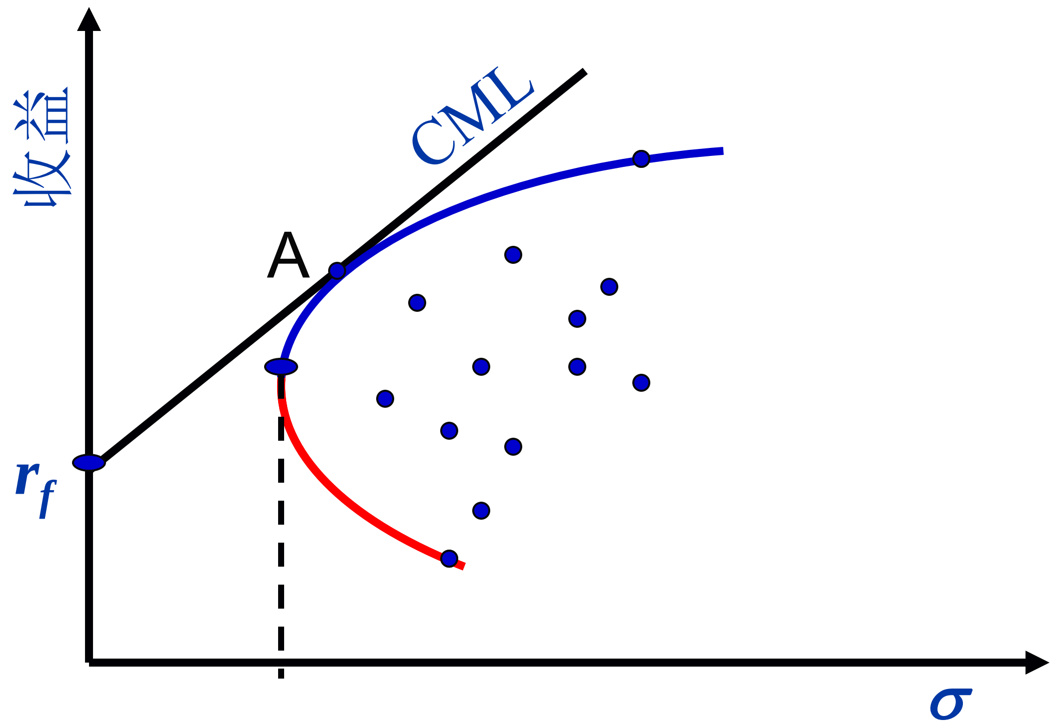


这样的多元化能够消除单一证券的一些风险，但不能消除所有的风险。 .

10.7 无风险借贷

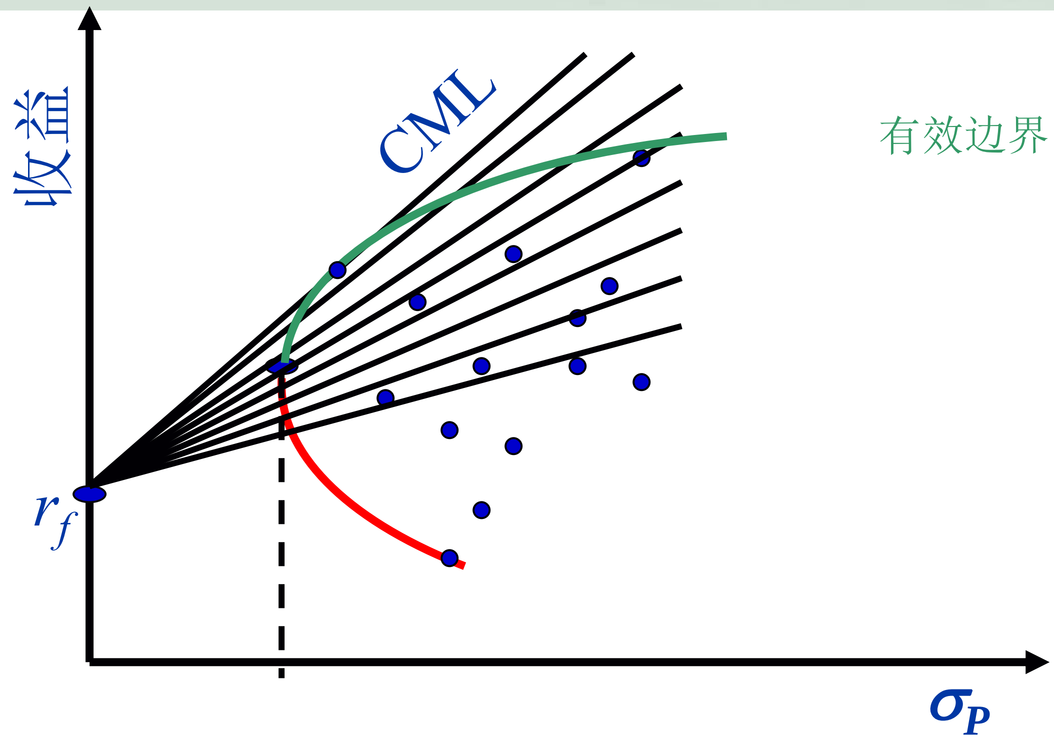
- 在上述分析中，我们假定所有属于有效集的证券都具有风险
- 在现实生活中，投资者通常更多的是将无风险资产与风险资产组合来构成自己的投资选择集
- 考虑一个风险投资与无风险证券构成的组合
  - 教材P190，例10－3

10.7 无风险借贷



现在，投资者可以利用国债和平衡基金来分配他们的资金。

10.7 无风险借贷



利用可获得的无风险资产和找到的有效边界，我们选择最陡峭的那条资本配置线

10.7 无风险借贷

- 射线CML（Capital Market Line）是风险投资组合有效集的切线，代表最优投资组合线，表示由无风险资产和风险资产组合A共同构成的各种组合。从切点以内的直线上的各个点就是部分投资于无风险资产、部分投资于风险资产组合A而形成的各种组合。
- 超过切点的那部分直线是通过按照无风险利率借钱投资于风险资产组合A来实现的

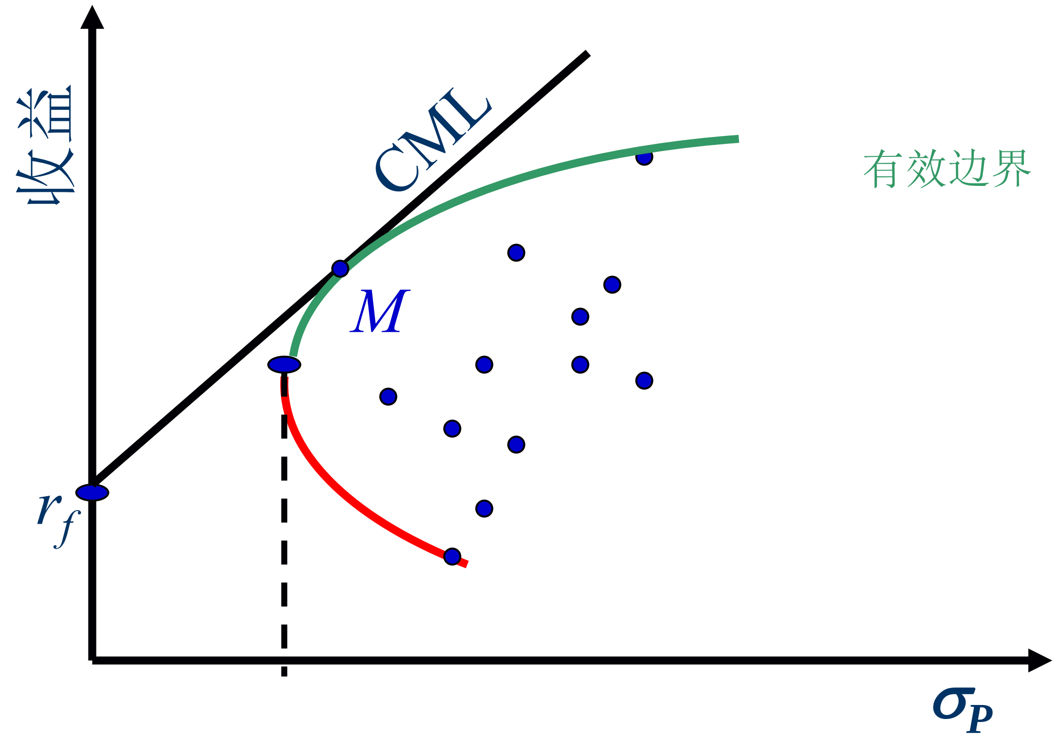
分离原理

- 投资者的投资决策包括两个相互独立的决策过程：
  - 在估计组合中各种证券或资产的期望收益和方差，以及各对证券或资产收益之间的协方差之后，投资者可以计算风险资产的有效集
  - 投资者必须决定如何构造风险资产组合(A点)与无风险资产之间的组合

10.8 市场均衡

- 考虑众多投资者的情形
- 共同期望假设
  - 所有投资者可以获得相似的信息源，因此他们对期望收益、方差和协方差的估计完全相同
- 市场均衡组合的定义
  - 在一个具有共同期望的世界中，所有的投资者都会持有以A点所代表的风险资产组合

10.8 市场均衡



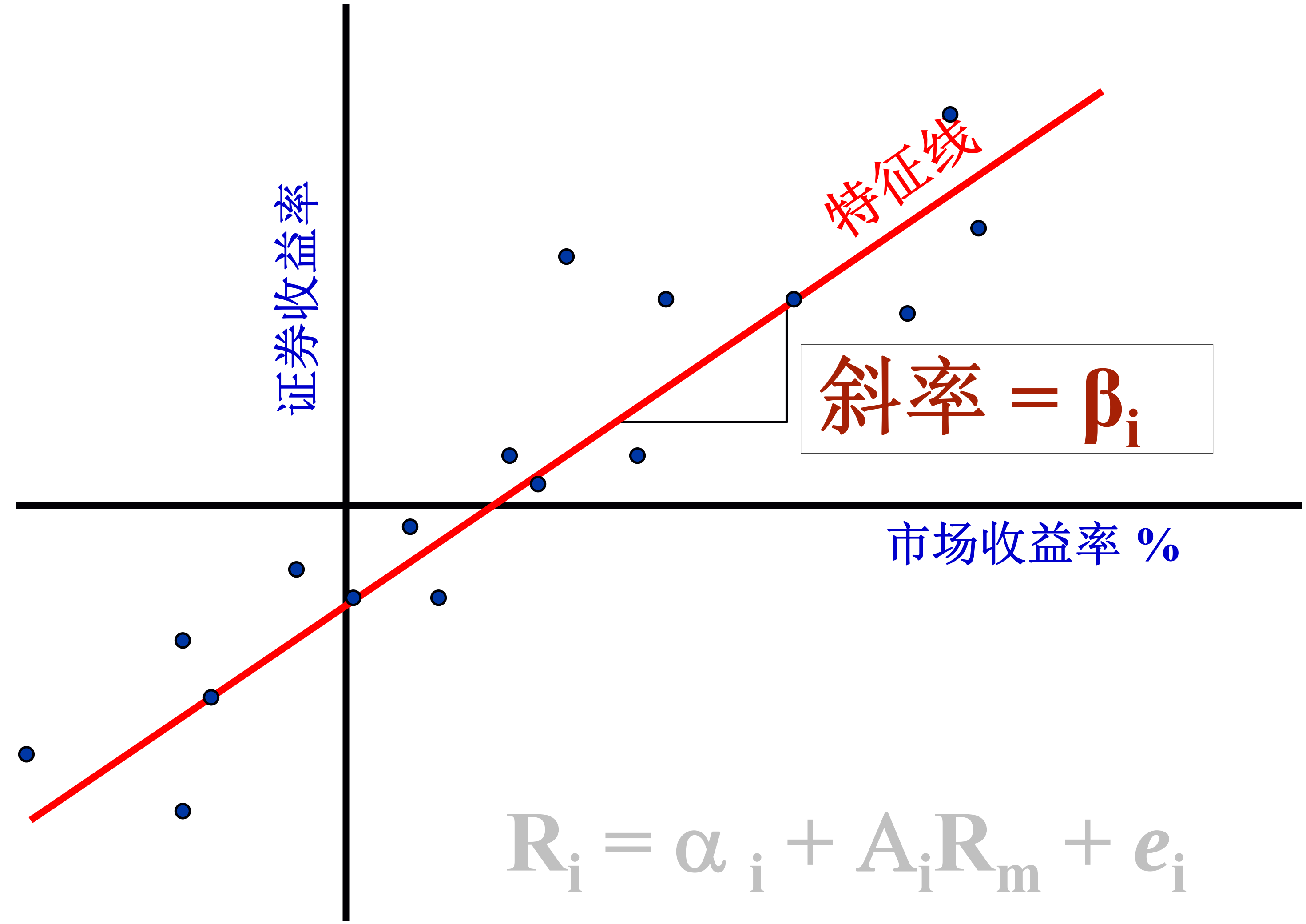
资本配置线确立后，所有的投资者都会沿着这条线选择一个点——某些由无风险资产构成的市场组合和市场组合M。 在一个具有共同期望的世界中，所有的投资者都会选择M点所代表的风险资产组合。

风险定义：当投资者持有市场组合

- 研究人员已经指出在一个大型投资组合中，单个证券最佳的风险度量是这个证券的贝塔系数。
- 贝塔系数是度量一种证券对于市场组合变动的反映程度的指标

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

利用回归方法估测®系数



贝塔系数公式

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

显然，贝塔系数的估测取决于市场组合的选择。

10.9 期望收益与风险之间的关系：资本资产定价模型（CAPM）

市场的期望收益率:

$$\overline{R}_M = R_F + \text{市场风险溢价}$$

单个证券的期望收益率:

$$\overline{R}_i = R_F + \beta_i \times \underbrace{(\overline{R}_M - R_F)}_{\text{市场风险溢价}}$$

这个可用于多元化组合中的单一证券期望收益率的计算。

单个证券的期望收益

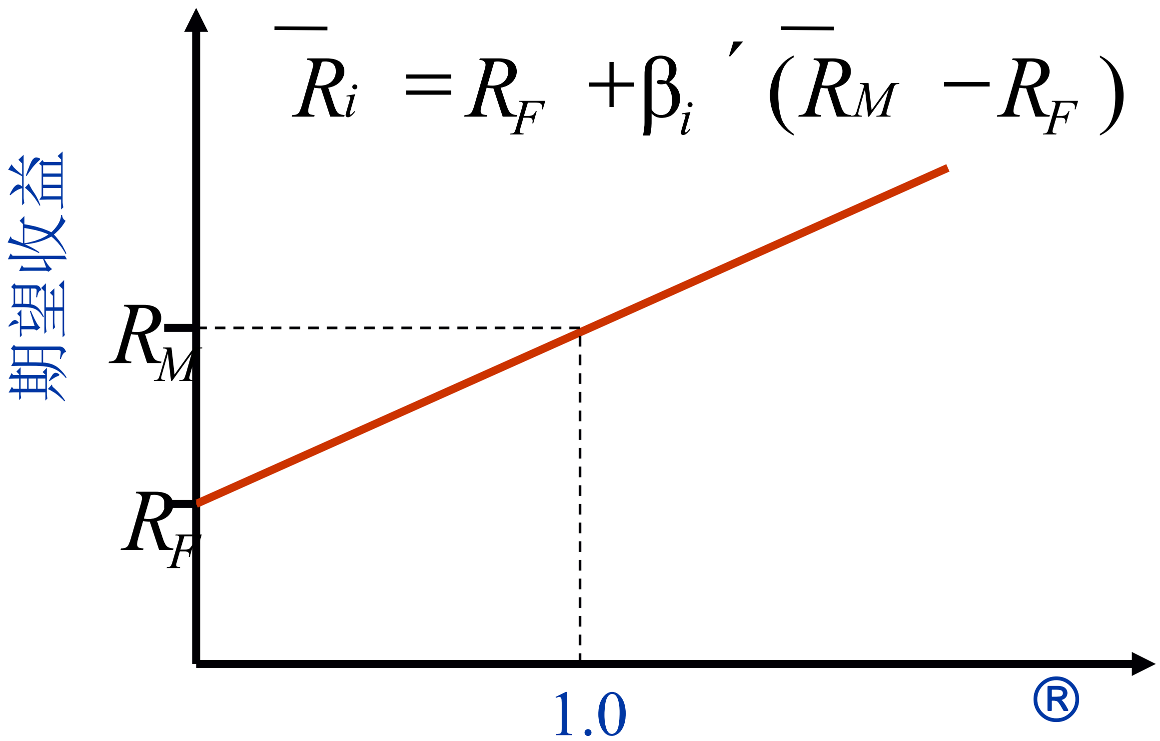
- 该公式称为资本资产定价模型 (CAPM)

$$\bar{R}_i = R_F + \beta_i \times (\bar{R}_M - R_F)$$

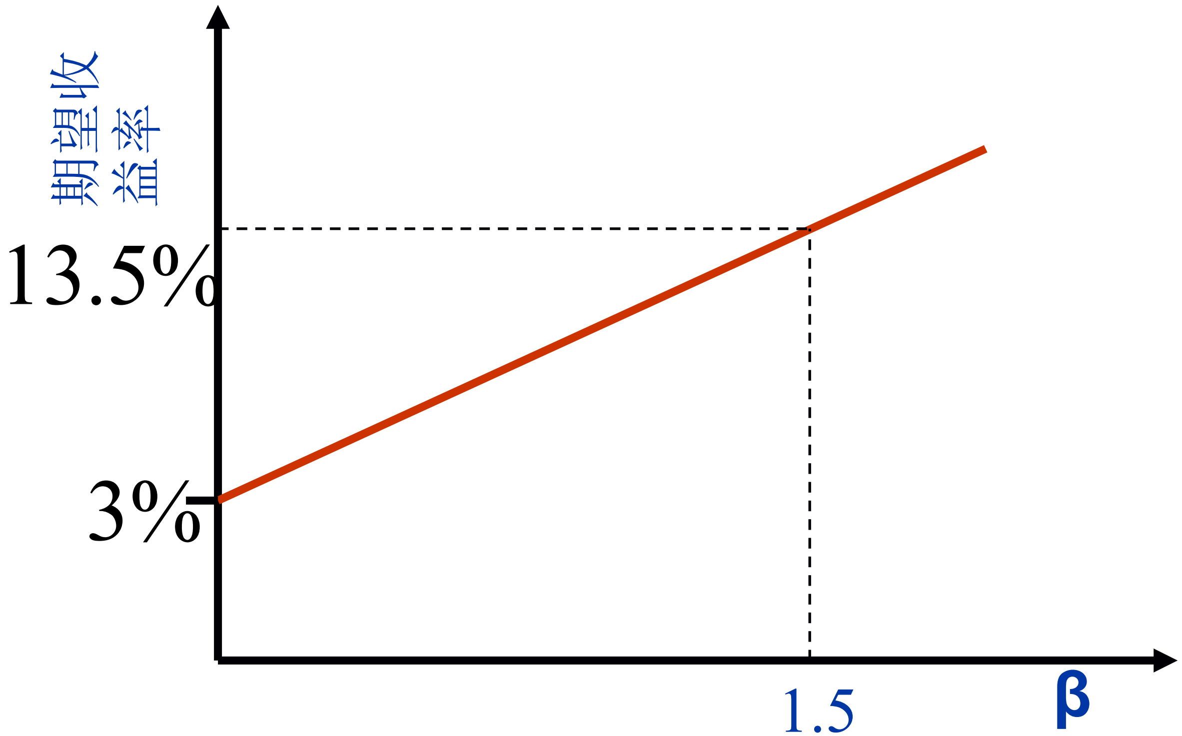
证券的期望收益 = 无风险利率 + 证券的贝塔系数 × 市场风险溢价

- 假设 $\beta_i = 0$, 则期望收益率为 R_F.
- 假设 $\beta_i = 1$, 则 $\bar{R}_i = \bar{R}_M$

风险和期望收益率的关系



风险和期望收益率的关系



$$\beta_i = 1.5 \qquad R_F = 3\% \qquad \overline{R_M} = 10\%$$

$$\overline{R_i} = 3\% + 1.5 \times (10\% - 3\%) = 13.5\%$$

本章小结

- 本章阐述了第四个现代投资组合理论.
- 由证券A和证券A组成的投资组合的期望收益和方差是

$$E(r_P) = w_A E(r_A) + w_A E(r_A)$$

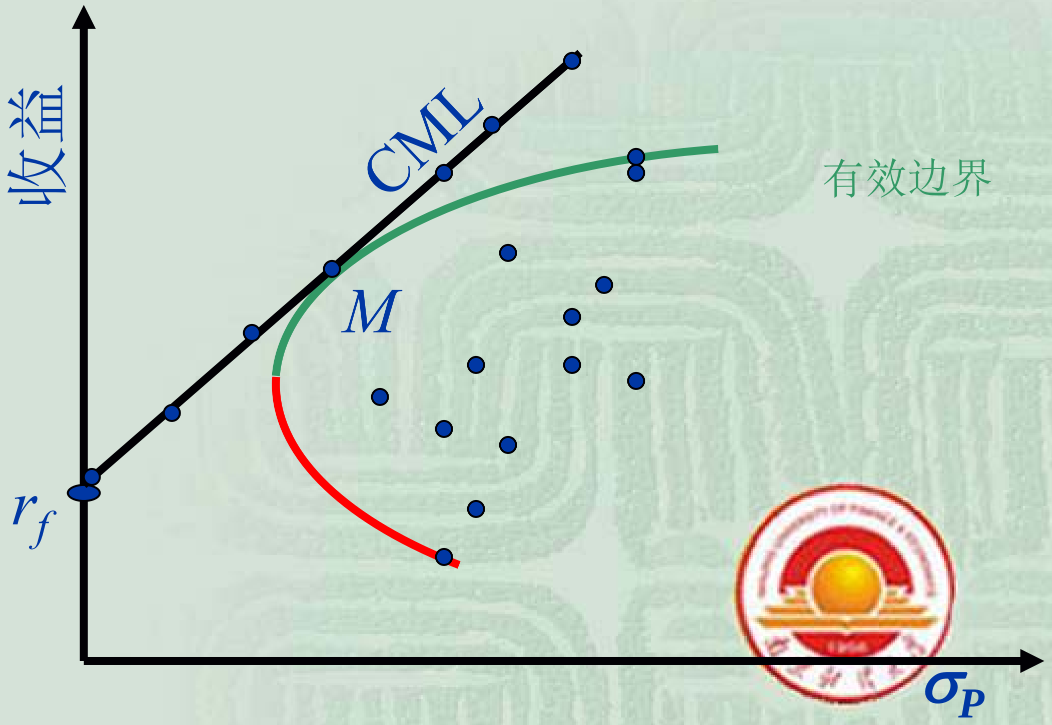
$$\sigma_P^2 = (w_A \sigma_A)^2 + (w_A \sigma_A)^2 + 2(w_A \sigma_A)(w_A \sigma_A)\rho_{AA}$$

- 通过改变 w_A, 我们可以得出投资组合的有效集 .我们可以将两种资产组合的有效集绘制成一条曲线. 要指出的是,这条曲线的弯曲程度反映了投资组合多元化的效应:两种证券收益之间的相关系数越低,曲线的弯曲程度越高.多元化效应越大 .
- 当投资组合由许多资产构成时,有效集的这种一般形状也成立.

10.10 本章小结

- 风险资产组合的有效集合可以与无风险资产借入或贷出相结合．在这种情况下,每一个理性的投资者都会选择持有风险证券的组合

然后,投资者可以通过按无风险利率借入或贷出,获取在CML线上所需要的某一点.



10.10 本章小结

- 在投资组合中,一种证券对一个大型、有效多元化的投资组合的风险的作用或贡献与这种证券收益与市场收益之间的协方差成一定比例。这种贡献经过标准化，称为“贝塔系数”

$$\beta_i = \frac{Cov(R_i, R_M)}{\sigma^2(R_M)}$$

- 资本资产定价模型表明一种证券的期望收益与该种证券的贝塔系数线形正相关:

$$\bar{R}_i = R_F + \beta_i \times (\bar{R}_M - R_F)$$