第 5 章 平面直角坐标系

5.1 平面直角坐标系的有关概念

知识清单

- 知识1 有序数对
- 知识2 平面直角坐标系
- 知识3 象限
- 知识4 点的坐标

知识 1 有序数对

在日常生活中,可以用有序数对来描述物体的位置,这样可以用含有两个数的组合来表示一个确定的位置,其中两个数各自表示不同的含义,我们把这种有顺序的两个数a与b组成的数对,叫做有序数对,记作(a,b).

易混对比

(a,b)与(b,a)顺序不同,含义就不同.例如:用$(3,5)$表示第 3 列的第 5 位同学,那么$(5,3)$就表示第 5 列的第 3 位同学.

例 1 如图是某教室学生座位的平面图:

第5排				陈帅				
第4排						李浩		夏凡
第3排			张军					
第2排								
第1排		王明						
	第1列	第2列	第3列	第4列	第5列	第6列	第7列	第8列

(1)请说出王明和陈帅的座位位置;

(2)若用$(3,2)$表示第 3 排第 2 列的位置,那么$(5,5)$表示什么位置?王明和陈帅的座位位置可以怎样表示?

(3)请说出$(3,3)$和$(4,8)$表示哪两位同学的座位位置?

(4)$(3,4)$和$(4,3)$表示的位置相同吗?一般地,若$a\neq b$,(a,b)与(b,a)表示的位置相同吗?

思路分析 平面上确定物体的位置有多种方法,但基本上都需要两个数据,本题可以通过排数和列数来确定位置,即先确定有序数对的第一个数,再确定第二个数.

解析 (1)王明的座位位置是第 1 排第 2 列;陈帅的座位位置是第 5 排第 4 列.

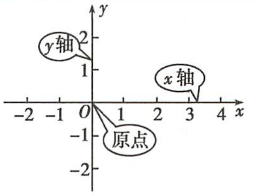
(2)$(5,5)$表示的位置是第 5 排第 5 列;王明的位置可表示为$(1,2)$,陈帅的位置可表示为$(5,4)$.

(3)$(3,3)$表示张军的座位位置;$(4,8)$表示夏凡的座位位置.

(4)$(3,4)$表示的是第 3 排第 4 列的位置,$(4,3)$表示的是第 4 排第 3 列的位置,所以它们表示的位置不相同.一般地,若$a\neq b$,(a,b)与(b,a)表示的位置不相同.

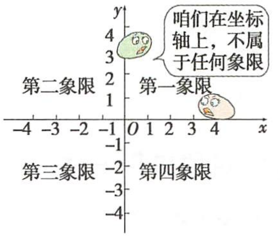
知识 2 平面直角坐标系

	相关概念	具体内容
平面直角坐标系	定义	在平面内画两条互相垂直并且原点重合的数轴,这样就建立了平面直角坐标系
	两轴	水平的数轴叫做x轴或横轴,习惯上取向右为正方向;竖直的数轴叫做y轴或纵轴,习惯上取向上为正方向
	原点	两坐标轴的交点为平面直角坐标系的原点
	坐标平面	坐标系所在的平面叫做坐标平面

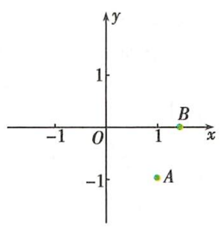


知识 3 象限

x轴和y轴把坐标平面分成四个部分,每个部分称为象限,按逆时针顺序依次叫做第一象限、第二象限、第三象限、第四象限,坐标轴上的点不属于任何象限,如图.



例 2 如图所示,点A,点B所在的位置分别是 ( )



A.第二象限,y轴上 B.第四象限,y轴上

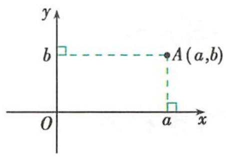
C.第二象限,x轴上 D.第四象限,x轴上

解析 点B在x轴上,坐标轴上的点不属于任何一个象限,点A在第四象限内.

答案 D

知识 4 点的坐标

对于坐标平面内的任意一点 A，过 A 点分别向 x 轴、y 轴作垂线，垂足在 x 轴、y 轴上对应的数 a、b 分别叫做点 A 的横坐标和纵坐标，有序数对 (a,b) 叫做点 A 的坐标，记作 $A(a,b)$，如图.



温馨提示

①点的坐标 (a,b) 的顺序不能颠倒，当 $a\neq b$ 时，有序数对 (a,b) 与 (b,a) 表示的是不同点的坐标.

②一个点可以用一个有序数对表示，反之，一个有序数对在坐标平面内都有唯一的一点与之对应，即坐标平面上的点与有序数对是一一对应的.

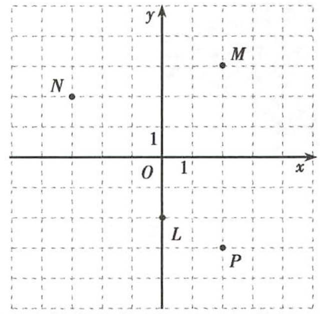
1. 已知坐标平面内的点，确定点的坐标

先由已知点 P 分别向 x 轴、y 轴作垂线，设垂足分别为 A、B，再求出垂足 A 在 x 轴上对应的数 a 与垂足 B 在 y 轴上对应的数 b，最后按顺序写成 (a,b) 即可.

2. 已知点的坐标，确定点的位置

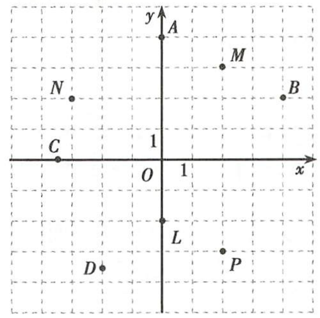
若点 P 的坐标是 (a,b)，先在 x 轴上找到横坐标为 a 的点 A，在 y 轴上找到纵坐标为 b 的点 B；再分别过点 A、点 B 作 x 轴、y 轴的垂线，两垂线的交点就是所要确定的点 P.

例 3 如图.(1) 写出平面直角坐标系中点 M、N、L、O、P 的坐标；(2) 在图中画出 $A(0,4)$，$B(4,2)$，$C(-3.5,0)$，$D(-2,-3.5)$.



解析 (1) 先从该点向 x 轴作垂线，垂足对应的数为该点的横坐标，再从该点向 y 轴作垂线，垂足对应的数为该点的纵坐标. 点 M 的坐标为 $(2,3)$；点 N 的坐标为 $(-3,2)$；点 L 的坐标为 $(0,-2)$；点 O 的坐标为 $(0,0)$；点 P 的坐标为 $(2,-3)$.

(2) 要描出给出坐标的点的位置，可先在 x 轴上找到该点横坐标的对应点，过对应点作 x 轴的垂线；再在 y 轴上找到该点纵坐标的对应点，过对应点作 y 轴的垂线，两垂线的交点即为该点的位置. A，B，C，D 的位置如图.

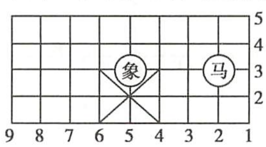


方法清单

方法 1 有序数对的应用方法

在同一平面内，表示物体的位置需要用两个数，这两个数顺序不同，表示的位置也不同. 用有序数对表示位置时，必须明确前后两个数表示的实际意义.

例 1 如图所示的“马”所处的位置为 $(2,3)$.



(1) 你能表示图中“象”的位置吗？

(2) 写出“马”的下一步可以到达的位置.

思路分析 (1) 由“马”的位置为 $(2,3)$ 可知，有序数对中的前一数字表示水平方向，后一数字表示竖直方向，从而可表示出“象”的位置；(2) 中国象棋中“马走日”“象飞田”，依据此规则可写出“马”的下一步位置.

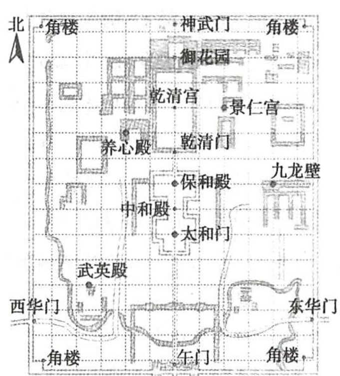
解析 (1) 象的位置为 $(5,3)$.

(2) 马的下一步可以到达的位置为 $(1,1)$、$(3,1)$、$(3,5)$、$(1,5)$、$(4,2)$、$(4,4)$.

方法 2 坐标平面中点的位置的确定

确定点在坐标平面中的位置，关键是根据不同象限中点的坐标特征去判断，根据题中的已知条件，判断横坐标、纵坐标是大于 0，等于 0，还是小于 0，就可以确定点在坐标平面中的位置.

例 2 如图是利用平面直角坐标系画出的故宫博物院的主要建筑分布图，若这个坐标系分别以正东、正北方向为 x 轴、y 轴的正方向，表示太和门的点的坐标为 $(0,-1)$，表示九龙壁的点的坐标为 $(4,1)$，则表示下列宫殿的点的坐标正确的是 (　　)



A.景仁宫(4,2)　　B.养心殿(-2,3)

C.保和殿(1,0)　　D.武英殿(-3.5,-4)

解析　因为表示太和门的点的坐标为(0,-1),表示九龙壁的点的坐标为(4,1),

所以可以确定表示中和殿的点的坐标为(0,0),即坐标原点,

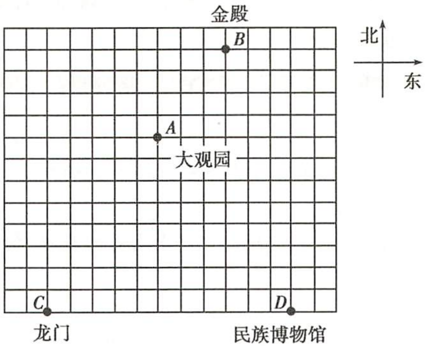
所以表示景仁宫、养心殿、保和殿、武英殿的点的坐标分别为(2,4)、(-2,3)、(0,1)、(-3.5,-3),选项 B 正确.故选 B.

答案　B

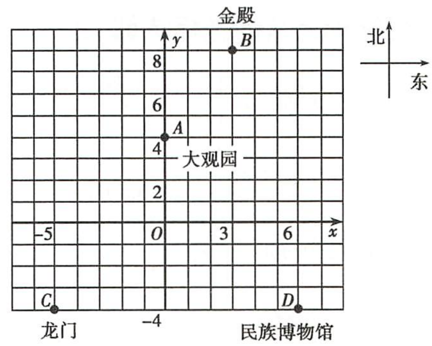
方法 3　用坐标表示地理位置的方法

用坐标表示地理位置时,一是要选择适当的位置为坐标原点,要以能简捷地确定平面内的点的坐标为原则;二是坐标轴的方向通常是以正北为纵轴的正方向,这样可以使东西南北方向与地理位置方向一致;三是要注意标明比例尺和坐标轴上的单位长度.

例 3　如图是某市旅游景点的平面示意图,建立适当的平面直角坐标系,分别写出图中各个景点的坐标.



解析　以 O 点为坐标原点,取正东的方向为 x 轴的正方向,取正北的方向为 y 轴的正方向,以一个方格的边长作为一个单位长度,建立平面直角坐标系(坐标系不唯一),则各个景点的坐标分别是 $A(0,4)$,$B(3,8)$,$C(-5,-4)$,$D(6,-4)$.



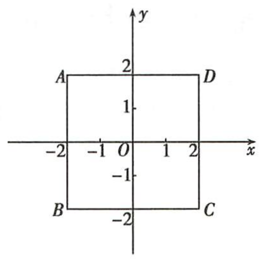
方法 4　用坐标刻画一个简单图形的方法

一个图形选取的原点不同,图形上各点的坐标也会不同.平面直角坐标系的建立方法不唯一,建立适当的平面直角坐标系可方便解题,一般尽可能地建立使大多数点的坐标都为整数且易表示的平面直角坐标系.

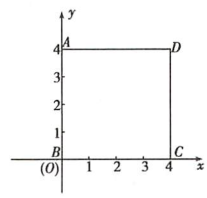
例 4　已知正方形 $ABCD$ 的边长为 4,建立适当的平面直角坐标系,写出各顶点的坐标.

解析　此题为开放性题,答案不唯一,只要合理即可.

解法一:以正方形的中心为原点,平行于两邻边的直线为坐标轴建立如图所示的平面直角坐标系,则各个顶点的坐标为 $A(-2,2)$,$B(-2,-2)$,$C(2,-2)$,$D(2,2)$.



解法二:以一个顶点为原点,两相邻边所在的直线为坐标轴建立如图所示的平面直角坐标系,则各个顶点的坐标为 $A(0,4)$,$B(0,0)$,$C(4,0)$,$D(4,4)$.



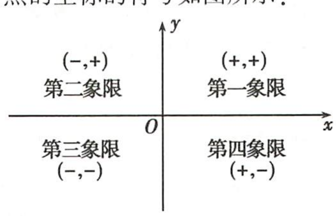
5.2　点的坐标的有关性质

知识清单

- 知识 1　各象限内点的坐标的符号特征
- 知识 2　坐标轴上点的坐标特征
- 知识 3　象限角的平分线上的点的坐标特征
- 知识 4　与坐标轴平行的直线上的点的坐标特征
- 知识 5　点到坐标轴的距离
- 知识 6　平面直角坐标系内的平移变换

知识 1　各象限内点的坐标的符号特征

各象限内点的坐标的符号如图所示:



知识 2 坐标轴上点的坐标特征

①点 $P(x,y)$ 在 x 轴上 $\Leftrightarrow\begin{cases}x\text{ 为任意实数},\\ y=0.\end{cases}$

②点 $P(x,y)$ 在 y 轴上 $\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y\text{ 为任意实数}.\end{cases}$

③点 $P(x,y)$ 是坐标原点 $\Leftrightarrow\begin{cases}x=0,\\ y=0.\end{cases}$

温馨提示

①原点既是 x 轴上的点，又是 y 轴上的点.

②点的横坐标或纵坐标为 0，说明点在 y 轴上或在 x 轴上.

例 1 已知点 $P(a+2,b-3)$.

(1)若点 P 在 x 轴上，则 $b=$________；

(2)若点 P 在 y 轴上，则 $a=$________；

(3)若点 P 是原点，则 $a=$________，$b=$________.

解析 (1)点 P 在 x 轴上，则 $b-3=0,b=3$.

(2)点 P 在 y 轴上，则 $a+2=0,a=-2$.

(3)点 P 是原点，则 $a+2=0,b-3=0$，

即 $a=-2,b=3$.

答案 (1)3 (2)-2 (3)-2；3

知识 3 象限角的平分线上的点的坐标特征

(1)第一、三象限的角平分线上的点的横、纵坐标相等.

(2)第二、四象限的角平分线上的点的横、纵坐标互为相反数.

温馨提示

已知点 $P(a,b)$.

①若点 $P(a,b)$ 在第一、三象限的角平分线上，则 $a=b$；若 $a=b$，则 $P(a,b)$ 在第一、三象限的角平分线上.

②若点 $P(a,b)$ 在第二、四象限的角平分线上，则 $a+b=0$ (或 $a=-b$)；若 $a+b=0$ (或 $a=-b$)，则 $P(a,b)$ 在第二、四象限的角平分线上.

例 2 已知点 $M(3a-4,2a-6)$ 在第四象限的角平分线上，则 a 的值为________.

解析 因为点 M 在第四象限的角平分线上，所以点 M 的横、纵坐标互为相反数，所以 $3a-4+2a-6=0$，解得 $a=2$.

答案 2

知识 4 与坐标轴平行的直线上的点的坐标特征

1.平行于 x 轴的直线上的点的纵坐标都相等.

2.平行于 y 轴的直线上的点的横坐标都相等.

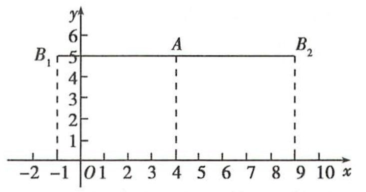
温馨提示

①若 $AB/\!/x$ 轴，则 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 的纵坐标相等，即 $y_1=y_2$；若 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$，且 $x_1\neq x_2$，$y_1=y_2\neq 0$，则 $AB/\!/x$ 轴.

②若 $CD/\!/y$ 轴，则 $C(m_1,n_1)$，$D(m_2,n_2)$ 的横坐标相等，即 $m_1=m_2$；若 $C(m_1,n_1)$，$D(m_2,n_2)$，且 $m_1=m_2\neq 0$，$n_1\neq n_2$，则 $CD/\!/y$ 轴.

例 3 若线段 AB 平行于 x 轴，AB 长为 5，且点 A 的坐标为 $(4,5)$，则点 B 的坐标为____________.

解析 如图所示，因为线段 AB 平行于 x 轴，所以 A,B 两点的纵坐标相同，因此，B 点的纵坐标是 5. 又因为 AB 长为 5，所以点 B 的横坐标是 $4+5=9$ 或 $4-5=-1$，所以点 B 的坐标为 $(-1,5)$ 或 $(9,5)$.



答案 $(-1,5)$ 或 $(9,5)$

点拨 当点 $A(x_1,y_1)$，$B(x_2,y_2)$ 所在的直线平行于 x 轴时，$AB=|x_1-x_2|$，即两点的纵坐标相同时，这条线段的长度是它们的横坐标的差的绝对值，所以 B 点的位置分两种情况考虑.

知识 5 点到坐标轴的距离

点 P 的坐标为 (x,y)，那么点 P 到 x 轴的距离为这点纵坐标的绝对值，即 $|y|$.

点 P 到 y 轴的距离为这点横坐标的绝对值，即 $|x|$.

温馨提示

①已知点的坐标可以求出点到 x 轴、y 轴的距离，应注意取相应坐标的绝对值.

②由点到 x 轴、y 轴的距离可以求出点的坐标，但要注意分类讨论.

例 4 在平面直角坐标系的第二象限内有一点 M，点 M 到 x 轴的距离为 3，到 y 轴的距离为 4，则点 M 的坐标是 ( )

A.$(3,-4)$　　B.$(4,-3)$

C.$(-4,3)$　　D.$(-3,4)$

解析 设点 M 的坐标为 (x,y)，因为点 M 到 x 轴的距离为 3，所以 $|y|=3$，即 $y=\pm3$.

因为点 M 到 y 轴的距离为 4，所以 $|x|=4$，即 $x=\pm4$.

因为点 M 在第二象限内，则 $x<0,y>0$，

所以 $x=-4,y=3$，所以点 M 的坐标为 $(-4,3)$. 故选 C.

答案 C

点拨 距离是长度，为正值，而点的横、纵坐标是有正负之分的，若点到 x 轴的距离为 $a(a>0)$，则该点的纵坐标等于 a 或 $-a$，解题时注意分类讨论.

知识 6 平面直角坐标系内的平移变换

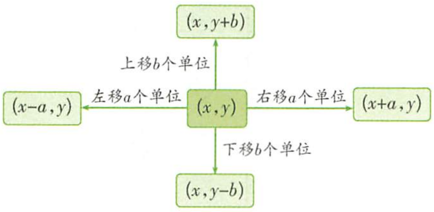
用坐标表示平移

变化规律：(1)左右平移：当图形中所有的点的横坐标都加上或者减去同一个正数 a，纵坐标不变时，图形会水平向右或向左平移 a 个单位；在平面直角坐标系中，将点 (x,y) 向右(或向左)平移 $a(a>0)$ 个单位，可以得到对应点的坐标为 $(x+a,y)$ (或 $(x-a,y)$).

(2)上下平移：当图形中所有的点的纵坐标都加上或者减去同一个正数 b，横坐标不变时，图形会向上或向下平移 b

个单位;在平面直角坐标系中,将点(x,y)向上(或向下)平移$b(b>0)$个单位,可以得到对应点的坐标为$(x,y+b)$(或$(x,y-b)$).

直观图示:图形上某一点(x,y)进行平移的变化规律如图.



其中,a,b大于零.

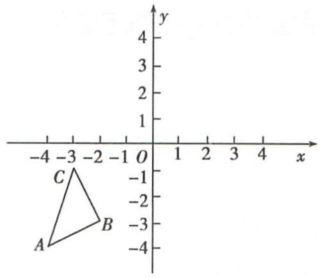
温馨提示

图形的平移是指在平面直角坐标系中保持坐标轴不动的情况下,图形的整体移动.在平移变换下,图形的形状及大小不变,变的仅仅是图形的位置.

例5 如图,三角形ABC三个顶点的坐标分别是$A(-4,-4)$,$B(-2,-3)$,$C(-3,-1)$.

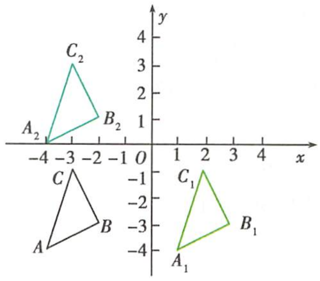
(1)将三角形ABC三个顶点的横坐标都加上5,纵坐标不变,分别得到点A_1,B_1,C_1,依次连接A_1,B_1,C_1各点,所得三角形$A_1B_1C_1$与三角形ABC在大小、形状和位置上有什么关系?

(2)将三角形ABC三个顶点的纵坐标都加上4,横坐标不变,分别得到点A_2,B_2,C_2,依次连接A_2,B_2,C_2各点,所得三角形$A_2B_2C_2$与三角形ABC在大小、形状和位置上有什么关系?



思路分析 (1)纵坐标不变,横坐标都加上5,就是将三角形ABC向右平移5个单位长度;(2)横坐标不变,纵坐标都加上4,就是将三角形ABC向上平移4个单位长度.

解析 平移后的图形如图所示.



(1)所得三角形$A_1B_1C_1$与三角形ABC的大小、形状完全相同,三角形$A_1B_1C_1$可以看作是将三角形ABC向右平移5个单位长度得到的.

(2)所得三角形$A_2B_2C_2$与三角形ABC的大小、形状完全相同,三角形$A_2B_2C_2$可以看作是将三角形ABC向上平移4个单位长度得到的.

方法清单

方法1 利用点的坐标的符号特征解题的方法
方法2 点到坐标轴的距离的应用方法
方法3 利用图形的平移确定变化的坐标的方法
方法4 平面直角坐标系中图形面积的计算方法
方法5 点的坐标在探索规律问题中的应用方法

方法1 利用点的坐标的符号特征解题的方法

各象限内点的坐标符号:第一象限内点的横、纵坐标皆为正数,即(+,+);第二象限内点的横坐标为负数,纵坐标为正数,即(-,+);第三象限内点的横、纵坐标皆为负数,即(-,-);第四象限内点的横坐标为正数,纵坐标为负数,即(+,-).

例1 设$M(a,b)$为平面直角坐标系中的点.

(1)当$a>0,b<0$时,点M位于第几象限?

(2)当$ab>0$时,点M位于第几象限?

(3)若a为任意实数,且$b<0$时,点M位于何处?

解析 (1)$\because a>0,b<0$,

$\therefore$点M位于第四象限.

(2)$\because ab>0$,$\therefore a>0,b>0$或$a<0,b<0$,

$\therefore$点M位于第一象限或第三象限.

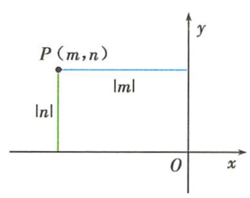
(3)$\because a$为任意实数,$b<0$,

$\therefore$点M在x轴的下方,即点M在第三象限或第四象限或在y轴负半轴上.

方法2 点到坐标轴的距离的应用方法

点到坐标轴的距离与这个点的坐标是有区别的,表现在两方面:①到x轴的距离与纵坐标有关,到y轴的距离与横坐标有关;②距离都是非负数,而坐标可以是负数.

如图,点$P(m,n)$到x轴的距离为$|n|$,到y轴的距离为$|m|$.



例2 已知坐标平面上一点A,A点到x轴的距离为3,到y轴的距离恰为到x轴距离的3倍.若A点在第二象限,则A点的坐标为 ( )

A.$(-9,3)$ B.$(-3,1)$ C.$(-3,9)$ D.$(-1,3)$

解析 因为A点在第二象限,所以A点的坐标符号为(-,+).因为A点到x轴的距离为3,所以A点的纵坐标为3.又因为A点到y轴的距离恰为到x轴距离的3倍,所以A点的横坐标为-9,所以A点的坐标为$(-9,3)$.

答案 A

方法 3 利用图形的平移确定变化的坐标的方法

将一个图形上的每个点的横坐标都加上(或减去)一个正数 a,再把纵坐标都加上(或减去)一个正数 b,相应的新图形就是把原图形先向右(或向左)平移 a 个单位,再向上(或向下)平移 b 个单位.

例 3 已知线段 CD 是由线段 AB 平移得到的,点 $A(-1,4)$ 的对应点为 $C(4,7)$.则点 $B(-4,-1)$ 的对应点 D 的坐标为 ( )

A.$(1,2)$ B.$(2,9)$ C.$(5,3)$ D.$(-9,-4)$

解析 平移中点的变化规律是横坐标右移加,左移减;纵坐标上移加,下移减.

因为点 $A(-1,4)$ 的对应点为 $C(4,7)$,

所以平移规律为向右平移 5 个单位长度,再向上平移 3 个单位长度.

因为点 B 的坐标为 $(-4,-1)$,

所以点 D 的坐标为 $(1,2)$.

答案 A

方法 4 平面直角坐标系中图形面积的计算方法

在平面直角坐标系中,解决与面积有关的问题时,要会求出点到坐标轴的距离,在求面积时,要会应用转化方法,将图形补成规则的图形或将图形分割成规则的图形进行求解.

例 4 已知三角形的三个顶点坐标,求三角形的面积通常有以下三种方法:

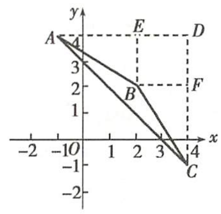
方法 1:直接法.计算三角形一边的长,并求出该边上的高.

方法 2:补形法.将三角形的面积转化成若干个特殊的四边形和三角形的面积的和与差.

方法 3:分割法.选择一条恰当的直线,将三角形分割成两个便于计算面积的三角形.

现给出三点坐标:$A(-1,4)$,$B(2,2)$,$C(4,-1)$,请你选择一种方法计算 $\triangle ABC$ 的面积,你的答案是 $S_{\triangle ABC}=$______.

解析 如图,$\triangle ADC$,$\triangle AEB$,$\triangle CFB$ 均为直角三角形,四边形 $EBFD$ 为正方形.$S_{\triangle ADC}=\frac{25}{2}$,$S_{\triangle AEB}=S_{\triangle CFB}=3$,$S_{正方形EBFD}=4$,所以 $S_{\triangle ABC}=\frac{25}{2}-3-3-4=\frac{5}{2}$.

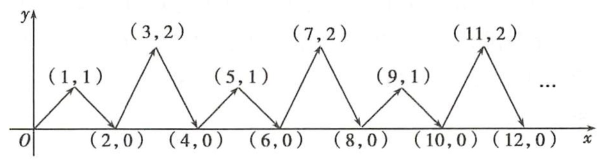


答案 $\frac{5}{2}$

方法 5 点的坐标在探索规律问题中的应用方法

在平面直角坐标系中,常常出现点有规律地(平行)移动,同时伴随着点的位置及点的坐标有规律地改变.对于动点的坐标探究,关键在于仔细观察,找到坐标的变化规律.

例 5 如图,动点 P 在平面直角坐标系中按图中箭头所示方向运动,第 1 次从原点运动到点 $(1,1)$,第 2 次运动到点 $(2,0)$,第 3 次运动到点 $(3,2)$,……,按这样的运动规律,经过第 2 020 次运动后,动点 P 的坐标是 ( )



A.$(2\ 020,1)$ B.$(2\ 020,0)$

C.$(2\ 020,2)$ D.$(2\ 021,0)$

解析 设第 n 次运动后点 P 运动到 P_n 点(n 为自然数).

观察,发现规律:$P_0(0,0)$,$P_1(1,1)$,$P_2(2,0)$,$P_3(3,2)$,$P_4(4,0)$,$P_5(5,1)$,……,

$\therefore P_{4n}(4n,0)$,$P_{4n+1}(4n+1,1)$,$P_{4n+2}(4n+2,0)$,$P_{4n+3}(4n+3,2)$.

$\because 2\ 020=4\times505$,

$\therefore P_{2\ 020}$的坐标为$(2\ 020,0)$.故选 B.

答案 B