

26.1 投影

知识清单

- 知识1 投影
知识2 平行投影
知识3 平行投影的变化规律
知识4 中心投影
知识5 平行投影与中心投影的区别与联系
知识6 正投影

知识1 投影

一般地,用光线照射物体,在某个平面(地面、墙壁等)上得到的影子叫做物体的投影.其中,照射光线叫做投影线,投影所在的平面叫做投影面.

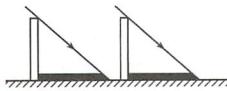
知识2 平行投影

1. 定义:

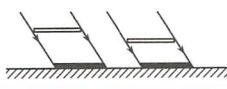
太阳光线可以看成平行光线,像这样的光线所形成的影子称为平行投影.

2. 平行投影的特征:

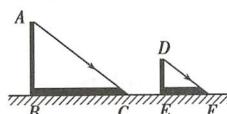
(1)如图,等高的物体垂直于地面放置时,同一时刻,它们在太阳光下的影子一样长



(2)如图,等长的物体平行于地面放置时,同一时刻,它们在太阳光下的影子一样长,并且都等于物体本身的高度



(3)如图,不等高的物体垂直于地面放置时,同一时刻,它们在太阳光下的物高与影长成比例,即 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$
(其理论依据是相似三角形对应边成比例,AB,DE分别是物体的高,BC,EF是相应的影长)



平行投影

知识3 平行投影的变化规律

1. 太阳光线下物体影子的长短不仅与物体的高度有关,而且与时间有关.同一时刻,高物体的影子较长;同一时刻,所有物体的影子与其高度成正比.

2. 太阳光线下物体影子的方向和长度变化规律(北半球)如下:

一天之中,由于太阳东升西落,所以早晨人的影子向

西,傍晚人的影子向东.例如一天之中,影子的方向变化为正西—西北—正北—东北—正东;一天之中影子的长度变化为长—短—长.

例1 下面四幅图是两个物体不同时刻在太阳光下的影子,按照时间的先后顺序正确的是()



- A. ①→②→③→④
B. ④→②→③→①
C. ③→④→①→②
D. ①→③→②→④

解析 根据平行投影的特点和规律可知,图①的影子指向东北,说明是下午;图②的影子指向正东,说明是傍晚;图③的影子指向正西,说明是早晨;图④的影子指向西北,说明是上午.所以按时间顺序排列为③④①②.故选 C.

答案 C

知识4 中心投影

1. 定义:若一束光线是从一点发出的,这样的光线形成的影子称为中心投影,这个“点”就是中心,相当于物理上学习的“点光源”.生活中的点光源主要有探照灯、手电筒、路灯、台灯、投影仪、放映机的灯光等.

2. 中心投影的特征:

(1) 等高的物体垂直于地面放置时,如图1,离点光源近的物体的影子短;离点光源远的物体的影子长.

(2) 等长的物体平行于地面放置时,如图2,一般情况下,离点光源越近,影子越长;离点光源越远,影子越短,但不会小于物体本身的高度.

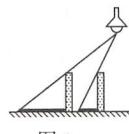


图1

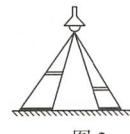
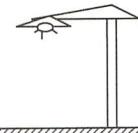


图2

(3) 点光源、物体边缘的点以及它的影子上的对应点在同一条直线上,根据其中两个点,就可以得到第三个点的位置.

例2 如图所示,晚上小亮在路灯下散步,在小亮由A处走到B处的过程中,他在地上的影子()



- A. 逐渐变短
B. 逐渐变长
C. 先变短后变长
D. 先变长后变短

解析

过程	影子的变化	依据或理由
由 A 处到路灯正下方	变短	物体垂直于地面放置时,离点光源越近影子越短,
由路灯正下方到 B 处	变长	离点光源越远影子越长

答案 C

知识 5 平行投影与中心投影的区别与联系

	区别	联系
平行投影	平行投影下,同一时刻所有物体的影子朝同一方向,且物高与影长之比皆相等	①影子都随投影面的变化而发生变化. ②都可以根据物体与影子的对应点判断光线的来源与方向
中心投影	中心投影下,同一时刻,物体的影子方向及大小跟它与点光源的位置及距离密切相关	

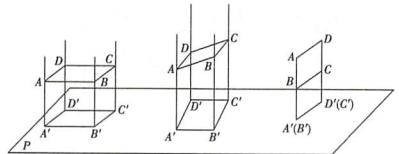
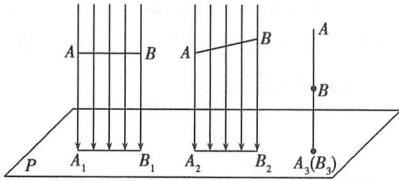


易混对比

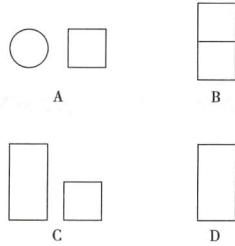
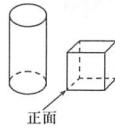
在平行投影中,同一时刻改变物体的方向和位置,其投影也跟着发生变化;在中心投影中,同一灯光下,改变物体的位置和方向,其投影也跟着发生变化.在中心投影中,固定物体的位置和方向,改变灯光的位置,物体投影的方向和位置也要发生变化.

知识 6 正投影

正投影	在平行投影中,如果投影线与投影面互相垂直,就称为正投影
线段的正投影	(1)当木棒 AB 平行于投影面 P 时,它的正投影是线段 A_1B_1 ,木棒与它的投影的大小关系为 $AB=A_1B_1$; (2)当木棒 AB 倾斜于投影面 P 时,它的正投影是线段 A_2B_2 ,木棒与它的投影的大小关系为 $AB>A_2B_2$; (3)当木棒 AB 垂直于投影面 P 时,它的正投影是一个点 $A_3(B_3)$
平面图形的正投影	(1)当纸板 ABCD 平行于投影面 P 时,ABCD 的正投影与 ABCD 的形状、大小一样; (2)当纸板 ABCD 倾斜于投影面 P 时,ABCD 的正投影与 ABCD 的形状、大小不一样; (3)当纸板 ABCD 垂直于投影面 P 时,ABCD 的正投影为一条线段



例 3 观察如图所示的物体,若投影线的方向如箭头所示,则它们的正投影是下列选项中的 ()



解析 圆柱的正投影是长方形,其中短边等于圆柱底面的直径,长边等于圆柱的高;正方体的正投影是与它一个面全等的正方形,且长方形在正方形的左边.故选 C.

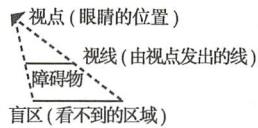
答案 C

知识拓展 视点、视线、视角与盲区

观测点的位置叫做视点,由视点发出的观测线叫做视线,两条视线的夹角叫做视角.

视点常常指眼睛的位置,视线并不是太阳光线或灯光光线等实际存在的线,常用虚线表示.

视线遇到障碍物,会有看不到的地方,称为盲区.



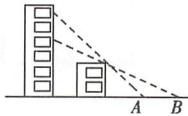
①人离障碍物越近,盲区越大.

②将视点与障碍物的顶点连接并延长,交地面于一点,此点即是盲区与非盲区的分界点.

例 小明与小刚分别住在同一幢楼的四层和六层,他们楼前有一供热中心,准备去他们家家访的王老师在下面喊他们,小明说:“王老师在哪儿呢?”小刚则说:“我看到王老师啦!”请问此时王老师在什么位置?(王老师的身高忽略不计)

解析 王老师在小明的盲区内,所以小明看不到,王老师在小刚的盲区外,所以小刚能看到,由此题可以得出结论:楼层越高盲区越小.

如图所示,此时王老师在线段 AB 上(不包括 B 点,包括 A 点).



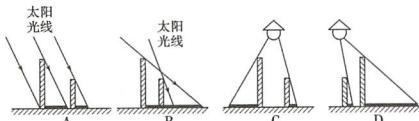
方法清单

- 方法1 平行投影与中心投影的识别方法
- 方法2 确定平行投影下物体的影子的方法
- 方法3 中心投影的应用方法
- 方法4 利用平行投影确定影长的方法
- 方法5 利用相似图形解决投影问题的方法

方法 1 平行投影与中心投影的识别方法

根据两物体的影子判断其是在灯光下还是在阳光下的投影，关键是看这两个物体的顶端和其影子的顶端的连线是平行还是相交，若平行则是在阳光下的投影，若相交则是灯光下的投影。

例1 下列物体的影子，不正确的是 ()



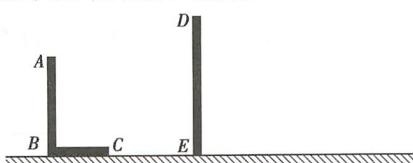
解析 太阳光线是平行的，故影长与物体高度成正比，所以A中的影子正确；太阳光线是平行的，故B中的影子错误；因为物体在光源两侧，所以影子方向不同，故C中的影子正确；因为灯光是发散的，所以影长与物体高度不成比例且物体在光源同侧，影子方向相同，故D中的影子正确。

答案 B

方法 2 确定平行投影下物体的影子的方法

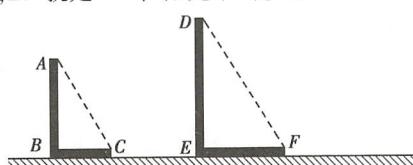
同一时刻太阳光线是平行的，所以物体的影子都是在同一时刻形成的，过所求物体顶端作太阳光线或已知平行投影线的平行线，便可画出同一时刻物体的影子。

例2 如图，已知AB和DE是直立在地面上的两根立柱， $AB=5\text{ cm}$ ，某一时刻AB在阳光下的投影 $BC=3\text{ cm}$ ，请在图中画出此时DE在阳光下的投影。



解析 连接AC，AC所在的直线就是太阳光线。因为平行投影的投影线是平行的，所以只要从点D处作太阳光线的平行线即可得DE在阳光下的投影。

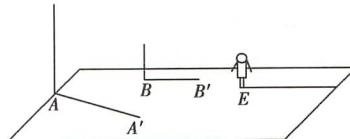
如图，EF就是DE在阳光下的投影。



方法 3 中心投影的应用方法

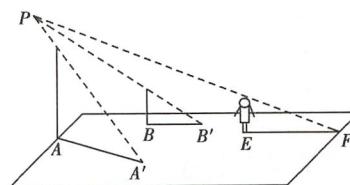
光源和物体所处的位置及方向影响物体的中心投影，光源或物体的方向改变，则该物体的影子的方向也发生变化，但光源、物体的影子始终在物体的两侧。

例3 如图是两根标杆及它们在灯光下的影子，请在图中画出点光源的位置(用点P表示)，并在图中画出人在该点光源下的影子(用线段EF表示)。



思路分析 分别过标杆的顶端及其影子的顶端作直线，两条直线的交点即为点光源的位置，从而可画出人在该点光源下的影子。

解析 如图，点P是点光源，EF是人在点光源P下的影子。



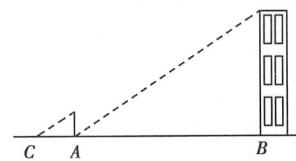
方法 4 利用平行投影确定影长的方法

1. 同一时刻太阳光下：

$$\frac{\text{物体的高度}}{\text{物体的影长}} = \frac{\text{另一物体的高度}}{\text{另一物体的影长}}$$

2. 落在墙上的影长即为对应的此部分物体的高度。

例4 小明在测量楼高时，先测出楼房落在地面上的影长BA为15米(如图)，然后在A处竖立一根高2米的标杆，测得标杆的影长AC为3米，则楼高为 ()



A. 10米 B. 12米 C. 15米 D. 22.5米

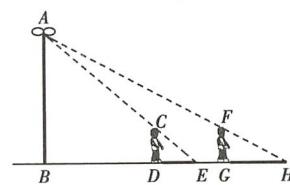
解析 \because 在同一时刻物高和影长成正比， $\therefore \frac{\text{标杆的高}}{\text{标杆的影长}} = \frac{\text{楼高}}{\text{楼影长}}$ ，即 $\frac{2}{3} = \frac{\text{楼高}}{15}$ ， \therefore 楼高为10米。故选A。

答案 A

方法 5 利用相似图形解决投影问题的方法

物体的投影分为中心投影和平行投影。一般来说，中心投影中，物体影子的长短主要取决于物体所处的位置，而平行投影中，影子的长短主要取决于物体的高度。投影中难度较大的题目往往是与相似三角形、解直角三角形等知识相结合而形成的综合题。其主要解题思路是由投影的特点构造相似三角形，并利用相似三角形、直角三角形的性质求解相关问题。

例5 如图，有一路灯杆AB，在灯光下，大华在D点处的影长 $DE=3\text{ 米}$ ，沿BD方向行走到达G点， $DG=5\text{ 米}$ ，这时大华的影长 $GH=5\text{ 米}$ 。如果大华的身高为2米，求路灯杆AB的高度。



解析 ∵ $CD \parallel AB$,
 $\therefore \triangle EAB \sim \triangle ECD$,
 $\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE}$, 即 $\frac{2}{AB} = \frac{3}{3+BD}$ ①.
 $\because FG \parallel AB$, $\therefore \triangle HFG \sim \triangle HAB$,
 $\therefore \frac{FG}{AB} = \frac{HG}{HB}$, 即 $\frac{2}{AB} = \frac{5}{BD+5+5}$ ②,

$$\text{由①②得 } \frac{3}{3+BD} = \frac{5}{BD+5+5},$$

$$\therefore BD = 7.5 \text{ 米},$$

$$\therefore \frac{2}{AB} = \frac{3}{7.5+3},$$

$$\therefore AB = 7 \text{ 米}.$$

答: 路灯杆 AB 的高度为 7 米.

26.2 三视图

知识清单

知识1 几何体的三视图



知识2 常见几何体的三视图



知识3 几何体三视图的画法

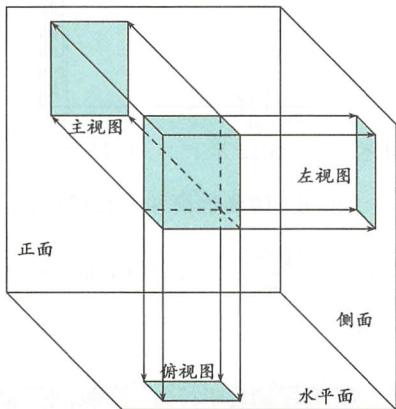


知识4 组合体的三视图

知识 1 几何体的三视图



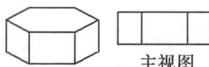
	内容
视图	当我们从某一角度观察一个物体时,所看到的图形叫做物体的一个视图
三视图	用三个互相垂直的平面作为投影面,其中正对着我们的叫做正面,正面下方的叫做水平面,右边的叫做侧面。 一个物体在三个投影面内同时进行正投影,在正面内得到的由前向后观察物体的视图叫做主视图;在水平面内得到的由上向下观察物体的视图叫做俯视图;在侧面内得到的由左向右观察物体的视图叫做左视图



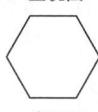
温馨提示

主视图、俯视图和左视图都是相对于观察者而言的,位于物体不同方向的观察者,他们所画出的三种视图可能是不一样的.

例 1 一个几何体及它的主视图和俯视图如图所示,那么它的左视图正确的是 ()



主视图



俯视图



A



B



C

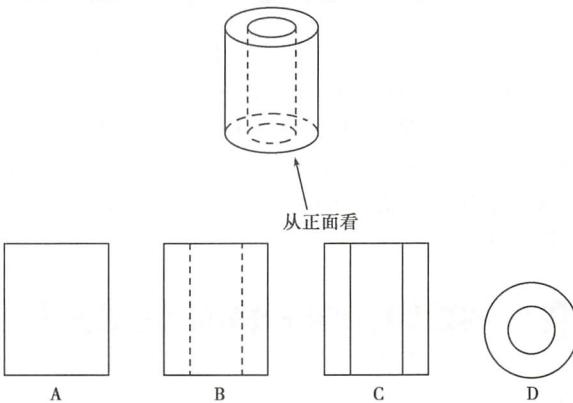


D

解析 由几何体的主视图和俯视图可知该几何体为正六棱柱.则从左面看应该是两个并列并且大小相同的矩形,故 B 正确.

答案 B

例 2 如图,空心圆柱体的主视图是 ()



解析 因为该几何体为空心圆柱体,所以它的主视图的轮廓应为矩形,但中间的轮廓线是看不见的,应用虚线表示,故选 B.

答案 B

知识 2 常见几何体的三视图



几何体	主视图	左视图	俯视图
正方体			
长方体			
圆柱			

几何体	主视图	左视图	俯视图
圆锥	△	△	○
球	○	○	○

知识 3 几何体三视图的画法

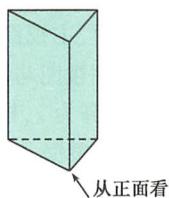
	内容
摆放位置关系	俯视图在主视图的下方,左视图在主视图的右边
实虚关系	看得见的部分的轮廓线画成实线,被其他部分遮挡而看不见的部分的轮廓线画成虚线
画 法	(1)确定主视图的位置,画出主视图; (2)在主视图的正下方画出俯视图,注意与主视图“长对正”; (3)在主视图正右方画出左视图,注意与主视图“高平齐”,与俯视图“宽相等”



温馨提示

主视图反映物体的长与高,左视图反映物体的宽与高,俯视图反映物体的长与宽.在画各种视图时,要对物体的长、宽、高进行度量,不要求百分之百与物体等大,但要控制误差.

例 3 画出图中的正三棱柱的三视图.



方法清单

方法 1 几何体的三视图的识别方法



方法 2 由三视图还原几何体的方法



方法 3 由三视图确定小正方体的个数的方法



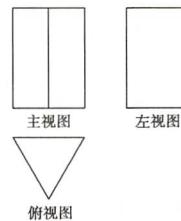
方法 4 根据三视图求几何体的体积或表面积的方法



方法 1 几何体的三视图的识别方法

掌握几种简单几何体的三视图是识别几何体的三视图的基础.日常生活中看到的很多物体,它们的形状不规则,但是它们一般可以看作由一些基本几何体(棱柱、棱台、棱锥、圆柱、圆台、圆锥、球等)组合成的或切割而成的.

解析 画正三棱柱的三视图,关键是确定从正面、左面、上面三个方向看到的平面图形.如图.



知识 4 组合体的三视图



1. 将具体实物合理地抽象成简单几何体的组合体,再将简单几何体的组合体分解成单个几何体,然后画出三视图.

2. 画一个非常规的组合体的三视图的方法:

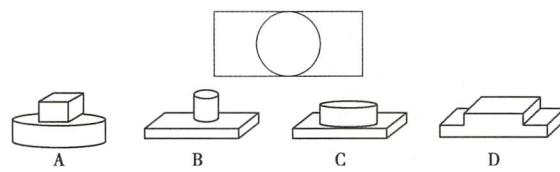
首先要认真观察,判断组合体的组成部分,然后按照画几何体三视图的方法正确画出它的三视图.



温馨提示

组合体是由几种基本几何体“改造”而成的,它的三视图也可以根据基本几何体的三种视图进行绘制,但要注意虚线、实线的区别,尺寸需尽可能地反映物体的原貌.

例 4 下列四个物体的俯视图与所给出的视图一致的是 ()



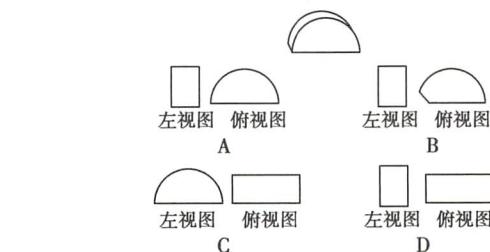
解析 A 选项中的组合体的俯视图为 (), B 选项

中的组合体的俯视图为 (), C 选项中的组合体

的俯视图为 (), D 选项中的组合体的俯视图为 (). 故选 C.

答案 C

例 1 如图所示的几何体,它的左视图与俯视图都正确的是 ()



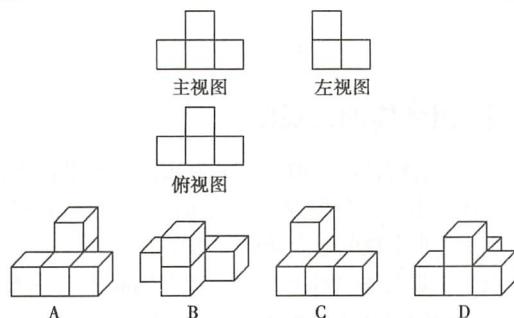
解析 该几何体的左视图是长、宽分别等于圆的半径和几何体厚度的矩形,俯视图是长、宽分别等于圆的直径和几何体厚度的矩形,故选 D.

答案 D

方法 2 由三视图还原几何体的方法

由三视图描述几何体,一般先根据各视图想象从各个方向看到的几何体形状,然后综合起来确定几何体的形状,再根据三个视图“长对正、高平齐、宽相等”的关系,确定轮廓线的位置以及各个面的尺寸.

例 2 如图,三视图对应的几何体是()



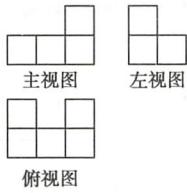
解析 观察三视图和各选项中的立体图形,从主视图看排除选项 C;从左视图看排除选项 B 和 D;选项 A 符合三视图的要求,故选 A.

答案 A

方法 3 由三视图确定小正方体的个数的方法

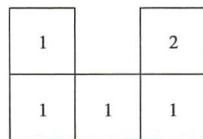
已知一个几何体的两种视图(含俯视图),其形状不能确定时,可先由俯视图把握几何体的堆叠方式,再结合另一个视图确定可能的小正方体的个数.

例 3 下面是几个一样的小正方体摆出的立体图形的三视图,由三视图可知小正方体的个数为()



A.3 B.4 C.5 D.6

解析 根据题中三视图,在俯视图中标出该位置处小正方体的个数,如图所示.

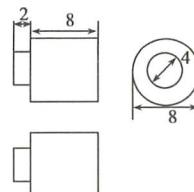


答案 D

方法 4 根据三视图求几何体的体积或表面积的方法

由三视图求几何体的体积或表面积时,首先要根据三视图描述几何体,再根据三视图“长对正、高平齐、宽相等”的关系和轮廓线的位置确定各个面的尺寸,然后求表面积或体积.

例 4 如图是某几何体的三视图,根据图中所标的数据求得该几何体的体积为()

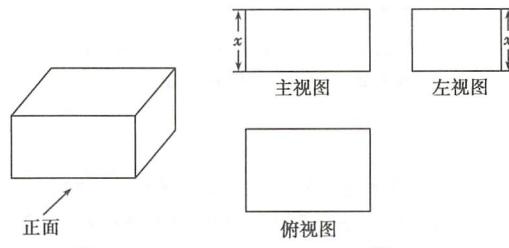


- A. 236π B. 136π
C. 132π D. 120π

解析 由三视图可知,几何体是由两个圆柱组成的,故该几何体的体积为 $\pi \times 2^2 \times 2 + \pi \times 4^2 \times 8 = 8\pi + 128\pi = 136\pi$. 故选 B.

答案 B

例 5 图 2 是图 1 中长方体的三视图,若用 S 表示面积,且 $S_{\text{主}}=x^2+2x$, $S_{\text{左}}=x^2+x$,则 $S_{\text{俯}}=$ ()



- A. x^2+3x+2 B. x^2+2
C. x^2+2x+1 D. $2x^2+3x$

解析 画物体的三视图时,主视图与俯视图“长对正”、主视图与左视图“高平齐”、左视图与俯视图“宽相等”.由长方体的三视图可知长方体的高为 x,根据 $S_{\text{主}}=x^2+2x$ 可得长方体底面长方形的长为 $x+2$;根据 $S_{\text{左}}=x^2+x$ 可得长方体底面长方形的宽为 $x+1$,所以 $S_{\text{俯}}=(x+2)(x+1)=x^2+3x+2$,故选 A.

答案 A