

2017 年陕西省中考数学试卷

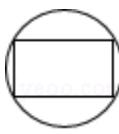
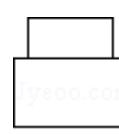
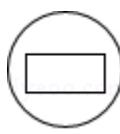
一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) 计算: $(-\frac{1}{2})^2 \cdot 1 = (\quad)$

- A. $-\frac{5}{4}$ B. $-\frac{1}{4}$ C. $-\frac{3}{4}$ D. 0

2. (3 分) 如图所示的几何体是由一个长方体和一个圆柱体组成的，则它的主视图是 ()

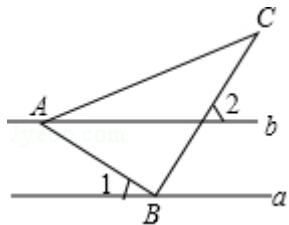


- A.  B.  C.  D. 

3. (3 分) 若一个正比例函数的图象经过 A (3, -6), B (m, -4) 两点，则 m 的值为 ()

- A. 2 B. 8 C. -2 D. -8

4. (3 分) 如图, 直线 $a \parallel b$, Rt $\triangle ABC$ 的直角顶点 B 落在直线 a 上, 若 $\angle 1=25^\circ$, 则 $\angle 2$ 的大小为 ()



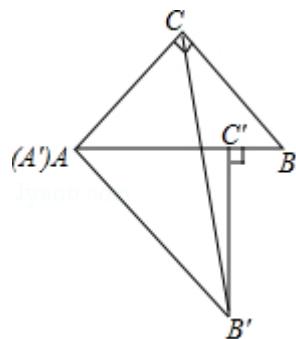
- A. 55° B. 75° C. 65° D. 85°

5. (3 分) 化简: $\frac{x-y}{x-y} \cdot \frac{y}{x+y}$, 结果正确的是 ()

A. 1 B. $\frac{x^2+y^2}{x^2-y^2}$

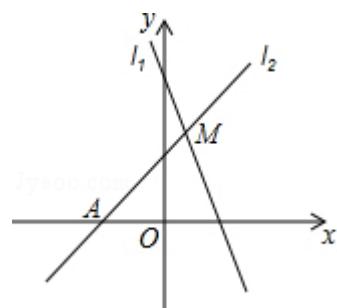
C. $\frac{x-y}{x+y}$ D. x^2+y^2

6. (3分) 如图, 将两个大小、形状完全相同的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 拼在一起, 其中点 A' 与点 A 重合, 点 C' 落在边 AB 上, 连接 $B'C$. 若 $\angle ACB=\angle AC'B'=90^\circ$, $AC=BC=3$, 则 $B'C$ 的长为 ()



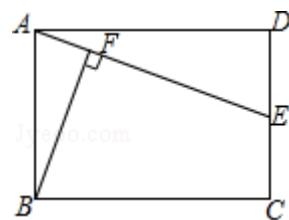
- A. $3\sqrt{3}$ B. 6 C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{21}$

7. (3分) 如图, 已知直线 $l_1: y=-2x+4$ 与直线 $l_2: y=kx+b$ ($k \neq 0$) 在第一象限交于点 M . 若直线 l_2 与 x 轴的交点为 $A (-2, 0)$, 则 k 的取值范围是 ()



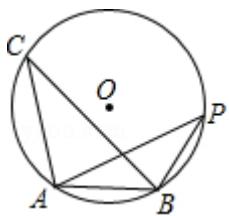
- A. $-2 < k < 2$ B. $-2 < k < 0$ C. $0 < k < 4$ D. $0 < k < 2$

8. (3分) 如图, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=2$, $BC=3$. 若点 E 是边 CD 的中点, 连接 AE , 过点 B 作 $BF \perp AE$ 交 AE 于点 F , 则 BF 的长为 ()



- A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

9. (3分) 如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, $\angle C=30^\circ$, $\odot O$ 的半径为 5, 若点 P 是 $\odot O$ 上的一点, 在 $\triangle ABP$ 中, $PB=AB$, 则 PA 的长为 ()



- A. 5 B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{3}$

10. (3分) 已知抛物线 $y=x^2-2mx-4$ ($m>0$) 的顶点 M 关于坐标原点 O 的对称点为 M' , 若点 M' 在这条抛物线上, 则点 M 的坐标为 ()

- A. (1, -5) B. (3, -13) C. (2, -8) D. (4, -20)

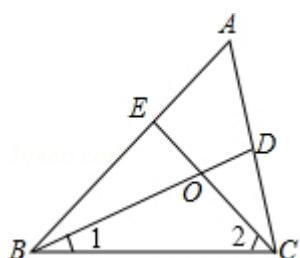
二、填空题 (本大题共 4 小题, 每小题 3 分, 共 12 分)

11. (3分) 在实数 -5 , $-\sqrt{3}$, 0 , π , $\sqrt{6}$ 中, 最大的一个数是_____.

12. (3分) 请从以下两个小题中任选一个作答, 若多选, 则按第一题计分.

A. 如图, 在 $\triangle ABC$ 中, BD 和 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线. 若 $\angle A=52^\circ$, 则 $\angle 1+\angle 2$ 的度数为_____.

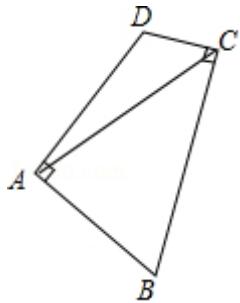
B. $\sqrt[3]{17}\tan 38^\circ 15' \approx$ _____. (结果精确到 0.01)



13. (3分) 已知 A, B 两点分别在反比例函数 $y=\frac{3m}{x}$ ($m\neq 0$) 和 $y=\frac{2m-5}{x}$ ($m\neq$
 $\frac{5}{2}$) 的图象上, 若点 A 与点 B 关于 x 轴对称, 则 m 的值为_____.

14. (3分) 如图, 在四边形 ABCD 中, $AB=AD$, $\angle BAD=\angle BCD=90^\circ$, 连接

AC. 若 $AC=6$, 则四边形 ABCD 的面积为_____.

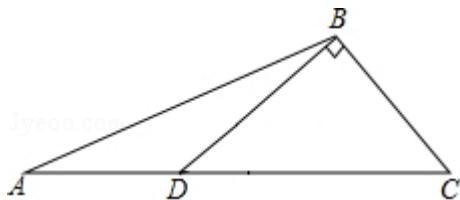


三、解答题（本大题共 11 小题，共 78 分）

15. (5 分) 计算: $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{6} + |\sqrt{3} - 2| - (\frac{1}{2})^{-1}$.

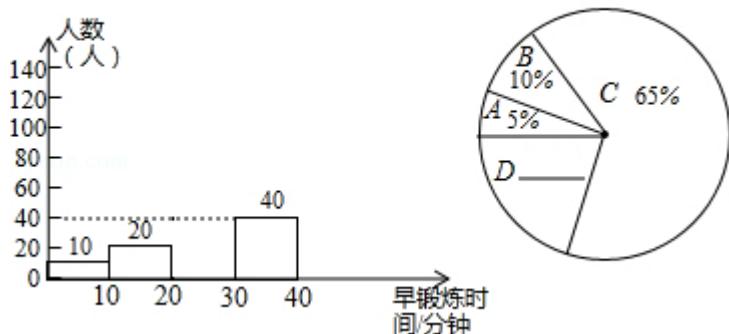
16. (5 分) 解方程: $\frac{x+3}{x-3} \cdot \frac{2}{x+3} = 1$.

17. (5 分) 如图, 在钝角 $\triangle ABC$ 中, 过钝角顶点 B 作 $BD \perp BC$ 交 AC 于点 D. 请用尺规作图法在 BC 边上求作一点 P, 使得点 P 到 AC 的距离等于 BP 的长. (保留作图痕迹, 不写作法)



18. (5 分) 养成良好的早锻炼习惯, 对学生的学习和生活都非常有益, 某中学为了了解七年级学生的早锻炼情况, 校政教处在七年级随机抽取了部分学生, 并对这些学生通常情况下一天的早锻炼时间 x (分钟) 进行了调查. 现把调查结果分成 A、B、C、D 四组, 如下表所示, 同时, 将调查结果绘制成下面两幅不完整的统计图.

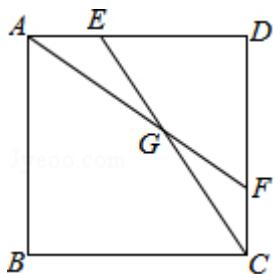
所抽取七年级学生早锻炼时间统计图



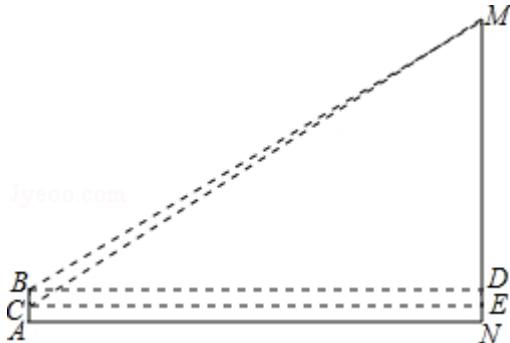
请你根据以上提供的信息，解答下列问题：

- (1) 补全频数分布直方图和扇形统计图；
- (2) 所抽取的七年级学生早锻炼时间的中位数落在_____区间内；
- (3) 已知该校七年级共有 1200 名学生，请你估计这个年级学生中约有多少人一天早锻炼的时间不少于 20 分钟。（早锻炼：指学生在早晨 7:00~7:40 之间的锻炼）

19. (7分) 如图，在正方形 ABCD 中，E、F 分别为边 AD 和 CD 上的点，且 $AE=CF$ ，连接 AF、CE 交于点 G. 求证： $AG=CG$.



20. (7分) 某市一湖的湖心岛有一颗百年古树，当地人称它为“乡思柳”，不乘船不易到达，每年初春时节，人们喜欢在“聚贤亭”观湖赏柳。小红和小军很想知道“聚贤亭”与“乡思柳”之间的大致距离，于是，有一天，他们俩带着侧倾器和皮尺来测量这个距离。测量方法如下：如图，首先，小军站在“聚贤亭”的 A 处，用侧倾器测得“乡思柳”顶端 M 点的仰角为 23° ，此时测得小军的眼睛距地面的高度 AB 为 1.7 米，然后，小军在 A 处蹲下，用侧倾器测得“乡思柳”顶端 M 点的仰角为 24° ，这时测得小军的眼睛距地面的高度 AC 为 1 米。请你利用以上测得的数据，计算“聚贤亭”与“乡思柳”之间的距离 AN 的长（结果精确到 1 米）。(参考数据： $\sin 23^\circ \approx 0.3907$, $\cos 23^\circ \approx 0.9205$, $\tan 23^\circ \approx 0.4245$, $\sin 24^\circ \approx 0.4067$, $\cos 24^\circ \approx 0.9135$, $\tan 24^\circ \approx 0.4452$.)



21. (7分) 在精准扶贫中，某村的李师傅在县政府的扶持下，去年下半年，他对家里的3个温室大棚进行修整改造，然后，1个大棚种植香瓜，另外2个大棚种植甜瓜，今年上半年喜获丰收，现在他家的甜瓜和香瓜已全部售完，他高兴地说：“我的日子终于好了”。

最近，李师傅在扶贫工作者的指导下，计划在农业合作社承包5个大棚，以后就用8个大棚继续种植香瓜和甜瓜，他根据种植经验及今年上半年的市场情况，打算下半年种植时，两个品种同时种，一个大棚只种一个品种的瓜，并预测明年两种瓜的产量、销售价格及成本如下：

品种 项目	产量(斤/每棚)	销售价(元/每斤)	成本(元/每棚)
香瓜	2000	12	8000
甜瓜	4500	3	5000

现假设李师傅今年下半年香瓜种植的大棚数为 x 个，明年上半年8个大棚中所产的瓜全部售完后，获得的利润为 y 元。

根据以上提供的信息，请你解答下列问题：

(1) 求出 y 与 x 之间的函数关系式；

(2) 求出李师傅种植的8个大棚中，香瓜至少种植几个大棚？才能使获得的利润不低于10万元。

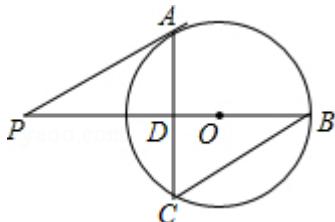
22. (7分) 端午节“赛龙舟，吃粽子”是中华民族的传统习俗。节日期间，小邱家包了三种不同馅的粽子，分别是：红枣粽子(记为A)，豆沙粽子(记为B)，肉粽子(记为C)，这些粽子除了馅不同，其余均相同。粽子煮好后，小邱的妈妈给一个白盘中放入了两个红枣粽子，一个豆沙粽子和一个肉粽子；给一个花盘中放入了两个肉粽子，一个红枣粽子和一个豆沙粽子。

根据以上情况, 请你回答下列问题:

- (1) 假设小邱从白盘中随机取一个粽子, 恰好取到红枣粽子的概率是多少?
- (2) 若小邱先从白盘里的四个粽子中随机取一个粽子, 再从花盘里的四个粽子中随机取一个粽子, 请用列表法或画树状图的方法, 求小邱取到的两个粽子中一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的概率.

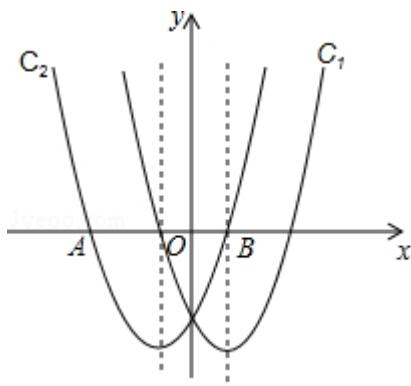
23. (8分) 如图, 已知 $\odot O$ 的半径为 5, PA 是 $\odot O$ 的一条切线, 切点为 A , 连接 PO 并延长, 交 $\odot O$ 于点 B , 过点 A 作 $AC \perp PB$ 交 $\odot O$ 于点 C 、交 PB 于点 D , 连接 BC , 当 $\angle P=30^\circ$ 时,

- (1) 求弦 AC 的长;
- (2) 求证: $BC \parallel PA$.



24. (10 分) 在同一直角坐标系中, 抛物线 $C_1: y=ax^2-2x-3$ 与抛物线 $C_2: y=x^2+mx+n$ 关于 y 轴对称, C_2 与 x 轴交于 A 、 B 两点, 其中点 A 在点 B 的左侧.

- (1) 求抛物线 C_1 , C_2 的函数表达式;
- (2) 求 A 、 B 两点的坐标;
- (3) 在抛物线 C_1 上是否存在一点 P , 在抛物线 C_2 上是否存在一点 Q , 使得以 AB 为边, 且以 A 、 B 、 P 、 Q 四点为顶点的四边形是平行四边形? 若存在, 求出 P 、 Q 两点的坐标; 若不存在, 请说明理由.



25. (12 分) 问题提出

(1) 如图①, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB=12$, 若点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 则 OA 的长为_____;

问题探究

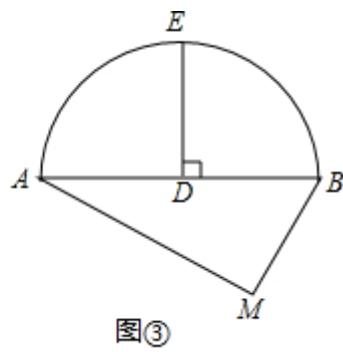
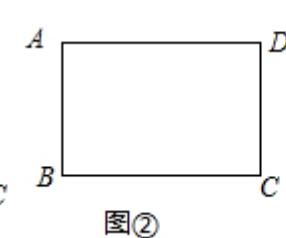
(2) 如图②, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=12$, $AD=18$, 如果点 P 是 AD 边上一点, 且 $AP=3$, 那么 BC 边上是否存在一点 Q , 使得线段 PQ 将矩形 $ABCD$ 的面积平分? 若存在, 求出 PQ 的长; 若不存在, 请说明理由.

问题解决

(3) 某城市街角有一草坪, 草坪是由 $\triangle ABM$ 草地和弦 AB 与其所对的劣弧围成的草地组成, 如图③所示. 管理员王师傅在 M 处的水管上安装了一喷灌龙头, 以后, 他想只用喷灌龙头来给这块草坪浇水, 并且在用喷灌龙头浇水时, 既要能确保草坪的每个角落都能浇上水, 又能节约用水, 于是, 他让喷灌龙头的转角正好等于 $\angle AMB$ (即每次喷灌时喷灌龙头由 MA 转到 MB , 然后再转回, 这样往复喷灌.) 同时, 再合理设计好喷灌龙头喷水的射程就可以了.

如图③, 已测出 $AB=24m$, $MB=10m$, $\triangle AMB$ 的面积为 $96m^2$; 过弦 AB 的中点 D 作 $DE \perp AB$ 交 \widehat{AB} 于点 E , 又测得 $DE=8m$.

请你根据以上信息, 帮助王师傅计算喷灌龙头的射程至少多少米时, 才能实现他的想法? 为什么? (结果保留根号或精确到 0.01 米)



2017 年陕西省中考数学试卷

参考答案与试题解析

一、选择题（本大题共 10 小题，每小题 3 分，共 30 分）

1. (3 分) (2017•陕西) 计算: $(\frac{1}{2})^{-2} \cdot 1 = (\quad)$

- A. $\frac{5}{4}$ B. $\frac{1}{4}$ C. $\frac{3}{4}$ D. 0

【考点】1G: 有理数的混合运算.

【专题】11 : 计算题; 511: 实数.

【分析】原式先计算乘方运算，再计算加减运算即可得到结果.

$$\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$$

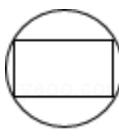
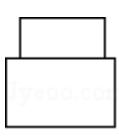
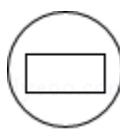
【解答】解: 原式 = $\frac{1}{4} \cdot 1 = \frac{1}{4}$,

故选 C

【点评】此题考查了有理数的混合运算，熟练掌握运算法则是解本题的关键.

2. (3 分) (2017•陕西) 如图所示的几何体是由一个长方体和一个圆柱体组成的，则它的主视图是 ()



- A.  B.  C.  D. 

【考点】U2: 简单组合体的三视图.

【分析】根据从正面看得到的图形是主视图，可得答案.

【解答】解: 从正面看下边是一个较大的矩形，上便是一个角的矩形，
故选: B.

【点评】本题考查了简单组合体的三视图，从正面看得到的图形是主视图.

3. (3分) (2017•陕西) 若一个正比例函数的图象经过 A(3, -6), B(m, -4) 两点, 则 m 的值为 ()

- A. 2 B. 8 C. -2 D. -8

【考点】F8: 一次函数图象上点的坐标特征.

【分析】运用待定系数法求得正比例函数解析式, 把点 B 的坐标代入所得的函数解析式, 即可求出 m 的值.

【解答】解: 设正比例函数解析式为: $y=kx$,

将点 A(3, -6) 代入可得: $3k=-6$,

解得: $k=-2$,

\therefore 函数解析式为: $y=-2x$,

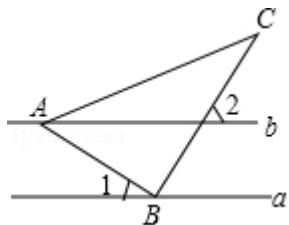
将 B(m, -4) 代入可得: $-2m=-4$,

解得 $m=2$,

故选: A.

【点评】本题考查了一次函数图象上点的坐标特征. 解题时需灵活运用待定系数法建立函数解析式, 然后将点的坐标代入解析式, 利用方程解决问题.

4. (3分) (2017•陕西) 如图, 直线 $a \parallel b$, Rt $\triangle ABC$ 的直角顶点 B 落在直线 a 上, 若 $\angle 1=25^\circ$, 则 $\angle 2$ 的大小为 ()



- A. 55° B. 75° C. 65° D. 85°

【考点】JA: 平行线的性质.

【分析】由余角的定义求出 $\angle 3$ 的度数, 再根据平行线的性质求出 $\angle 2$ 的度数, 即可得出结论.

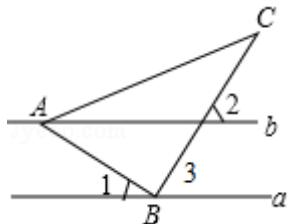
【解答】解: $\because \angle 1=25^\circ$,

$$\therefore \angle 3 = 90^\circ - \angle 1 = 90^\circ - 25^\circ = 65^\circ.$$

$\because a \parallel b$,

$$\therefore \angle 2 = \angle 3 = 65^\circ.$$

故选：C.



【点评】本题考查的是平行线的性质，解题时注意：两直线平行，同位角相等。

5. (3分) (2017•陕西) 化简： $\frac{x}{x-y} - \frac{y}{x+y}$ ，结果正确的是()

A. 1 B. $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2}$

C. $\frac{x-y}{x+y}$ D. $x^2 + y^2$

【考点】6B：分式的加减法。

【专题】11：计算题；513：分式。

【分析】原式通分并利用同分母分式的减法法则计算即可得到结果。

$$\frac{x^2 + xy - xy + y^2}{x^2 - y^2}$$

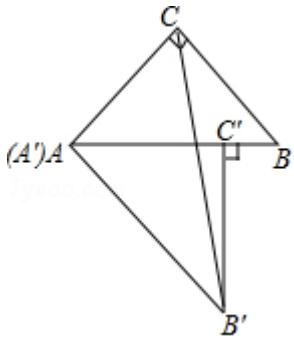
【解答】解：原式= $\frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} = \frac{x^2}{x^2 - y^2}$.

故选 B

【点评】此题考查了分式的加减法，熟练掌握运算法则是解本题的关键。

6. (3分) (2017•陕西) 如图，将两个大小、形状完全相同的 $\triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 拼在一起，其中点 A' 与点 A 重合，点 C' 落在边 AB 上，连接 $B'C$. 若

$\angle ACB = \angle AC'B' = 90^\circ$, $AC = BC = 3$, 则 $B'C$ 的长为()



- A. $3\sqrt{3}$ B. 6 C. $3\sqrt{2}$ D. $\sqrt{21}$

【考点】KQ: 勾股定理.

【分析】根据勾股定理求出 AB , 根据等腰直角三角形的性质得到 $\angle CAB'=90^\circ$, 根据勾股定理计算.

【解答】解: $\because \angle ACB=\angle AC'B'=90^\circ$, $AC=BC=3$,

$$\therefore AB=\sqrt{AC^2+BC^2}=3\sqrt{2}, \quad \angle CAB=45^\circ,$$

$\because \triangle ABC$ 和 $\triangle A'B'C'$ 大小、形状完全相同,

$$\therefore \angle C'AB'=\angle CAB=45^\circ, \quad AB'=AB=3\sqrt{2},$$

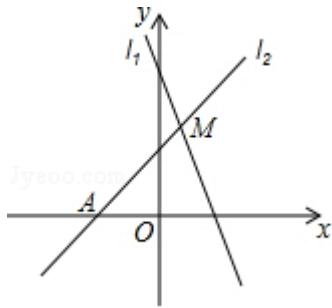
$$\therefore \angle CAB'=90^\circ,$$

$$\therefore B'C=\sqrt{CA^2+B'A^2}=3\sqrt{3},$$

故选: A.

【点评】本题考查的是勾股定理的应用、等腰直角三角形的性质, 在任何一个直角三角形中, 两条直角边长的平方之和一定等于斜边长的平方.

7. (3分) (2017•陕西) 如图, 已知直线 $l_1: y=-2x+4$ 与直线 $l_2: y=kx+b$ ($k \neq 0$) 在第一象限交于点 M. 若直线 l_2 与 x 轴的交点为 A (-2, 0), 则 k 的取值范围是 ()



- A. $-2 < k < 2$ B. $-2 < k < 0$ C. $0 < k < 4$ D. $0 < k < 2$

【考点】FF：两条直线相交或平行问题；F8：一次函数图象上点的坐标特征.

【专题】17：推理填空题.

【分析】首先根据直线 l_2 与 x 轴的交点为 $A(-2, 0)$ ，求出 k 、 b 的关系；然后求出直线 l_1 、直线 l_2 的交点坐标，根据直线 l_1 、直线 l_2 的交点横坐标、纵坐标都大于 0，求出 k 的取值范围即可.

【解答】解： \because 直线 l_2 与 x 轴的交点为 $A(-2, 0)$ ，

$$\therefore -2k+b=0,$$

$$\therefore \begin{cases} y = -2x + 4 \\ y = kx + 2k \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = \frac{4-2k}{k+2} \\ y = \frac{8k}{k+2} \end{cases}$$

解得

\because 直线 l_1 : $y=-2x+4$ 与直线 l_2 : $y=kx+b$ ($k \neq 0$) 的交点在第一象限，

$$\begin{cases} \frac{4-2k}{k+2} > 0 \\ \frac{8k}{k+2} > 0 \end{cases}$$

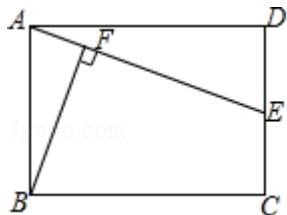
$$\therefore \begin{cases} k < 2 \\ k > 0 \end{cases}$$

解得 $0 < k < 2$.

故选：D.

【点评】此题主要考查了两条直线的相交问题，以及一次函数图象的点的特征，要熟练掌握.

8. (3分)(2017•陕西)如图，在矩形ABCD中， $AB=2$ ， $BC=3$.若点E是边CD的中点，连接AE，过点B作 $BF \perp AE$ 交AE于点F，则 BF 的长为()

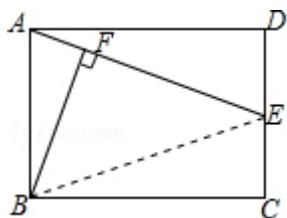


- A. $\frac{3\sqrt{10}}{2}$ B. $\frac{3\sqrt{10}}{5}$ C. $\frac{\sqrt{10}}{5}$ D. $\frac{3\sqrt{5}}{5}$

【考点】S9：相似三角形的判定与性质；**LB：**矩形的性质.

【分析】根据 $S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\text{矩形 } ABCD} = 3 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BF$, 先求出 AE , 再求出 BF 即可.

【解答】解：如图，连接 BE .



\because 四边形 $ABCD$ 是矩形,

$\therefore AB=CD=2$, $BC=AD=3$, $\angle D=90^\circ$,

在 $Rt\triangle ADE$ 中, $AE=\sqrt{AD^2+DE^2}=\sqrt{3^2+1^2}=\sqrt{10}$,

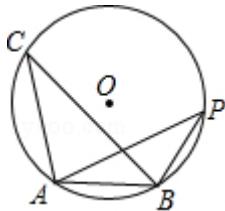
$\because S_{\triangle ABE} = \frac{1}{2}S_{\text{矩形 } ABCD} = 3 = \frac{1}{2} \cdot AE \cdot BF$,

$$\therefore BF = \frac{3\sqrt{10}}{5}.$$

故选 B.

【点评】本题考查矩形的性质、勾股定理、三角形的面积公式等知识，解题的关键是灵活运用所学知识解决问题，学会用面积法解决有关线段问题，属于中考常考题型.

9. (3分)(2017•陕西)如图, $\triangle ABC$ 是 $\odot O$ 的内接三角形, $\angle C=30^\circ$, $\odot O$ 的半径为5, 若点P是 $\odot O$ 上的一点, 在 $\triangle ABP$ 中, $PB=AB$, 则PA的长为()



- A. 5 B. $\frac{5\sqrt{3}}{2}$ C. $5\sqrt{2}$ D. $5\sqrt{3}$

【考点】MA: 三角形的外接圆与外心; KH: 等腰三角形的性质.

【分析】连接 OA、OB、OP，根据圆周角定理求得 $\angle APB = \angle C = 30^\circ$ ，进而求得

$\angle PAB = \angle APB = 30^\circ$ ， $\angle ABP = 120^\circ$ ，根据垂径定理得到

$OB \perp AP$ ， $AD = PD$ ， $\angle OBP = \angle OBA = 60^\circ$ ，即可求得 $\triangle AOB$ 是等边三角形，从而求得 $PB = OA = 5$ ，解直角三角形求得 PD ，即可求得 PA .

【解答】解：连接 OA、OB、OP，

$\because \angle C = 30^\circ$ ，

$\therefore \angle APB = \angle C = 30^\circ$ ，

$\because PB = AB$ ，

$\therefore \angle PAB = \angle APB = 30^\circ$

$\therefore \angle ABP = 120^\circ$ ，

$\because PB = AB$ ，

$\therefore OB \perp AP$ ， $AD = PD$ ，

$\therefore \angle OBP = \angle OBA = 60^\circ$ ，

$\because OB = OA$ ，

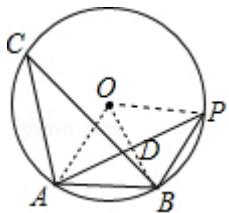
$\therefore \triangle AOB$ 是等边三角形，

$\therefore AB = OA = 5$ ，

则 Rt $\triangle PBD$ 中， $PD = \cos 30^\circ \cdot PB = \frac{\sqrt{3}}{2} \times 5 = \frac{5\sqrt{3}}{2}$ ，

$$\therefore AP=2PD=5\sqrt{3},$$

故选 D.



【点评】本题考查了圆周角定理、垂径定理、等边三角形的判定和性质以及解直角三角形等，作出辅助性构建等边三角形是解题的关键。

10. (3 分) (2017•陕西) 已知抛物线 $y=x^2-2mx-4$ ($m>0$) 的顶点 M 关于坐标原点 O 的对称点为 M'，若点 M' 在这条抛物线上，则点 M 的坐标为 ()
- A. (1, -5) B. (3, -13) C. (2, -8) D. (4, -20)

【考点】H3: 二次函数的性质。

【分析】先利用配方法求得点 M 的坐标，然后利用关于原点对称点的特点得到点 M' 的坐标，然后将点 M' 的坐标代入抛物线的解析式求解即可。

【解答】解： $y=x^2-2mx-4=x^2-2mx+m^2-m^2-4=(x-m)^2-m^2-4$.

\therefore 点 M $(m, -m^2-4)$.

\therefore 点 M' $(-m, m^2+4)$.

$$\therefore m^2+2m^2-4=m^2+4.$$

解得 $m=\pm 2$.

$\because m>0$,

$\therefore m=2$.

$\therefore M(2, -8)$.

故选 C.

【点评】本题主要考查的是二次函数的性质、关于原点对称的点的坐标特点，求得点 M' 的坐标是解题的关键。

二、填空题（本大题共 4 小题，每小题 3 分，共 12 分）

11. (3 分) (2017•陕西) 在实数 $-5, -\sqrt{3}, 0, \pi, \sqrt{6}$ 中，最大的一个数是 π .

【考点】2A：实数大小比较.

【分析】根据正数大于 0，0 大于负数，正数大于负数，比较即可.

【解答】解：根据实数比较大小的方法，可得

$$\pi > \sqrt{6} > 0 > -\sqrt{3} > -5,$$

故实数 $-5, -\sqrt{3}, 0, \pi, \sqrt{6}$ 其中最大的数是 π .

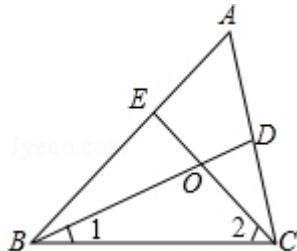
故答案为： π .

【点评】此题主要考查了实数大小比较的方法，要熟练掌握，解答此题的关键是要明确：正实数 $> 0 >$ 负实数，两个负实数绝对值大的反而小.

12. (3 分) (2017•陕西) 请从以下两个小题中任选一个作答，若多选，则按第一题计分.

A. 如图，在 $\triangle ABC$ 中， BD 和 CE 是 $\triangle ABC$ 的两条角平分线. 若 $\angle A=52^\circ$ ，则 $\angle 1+\angle 2$ 的度数为 64° .

B. $\sqrt[3]{17}\tan 38^\circ 15' \approx$ 2.03 . (结果精确到 0.01)



【考点】T6：计算器—三角函数；25：计算器—数的开方；K7：三角形内角和定理.

【分析】A：由三角形内角和得 $\angle ABC + \angle ACB = 180^\circ - \angle A = 128^\circ$ ，根据角平分线定

义得 $\angle 1 + \angle 2 = \frac{1}{2} \angle ABC + \frac{1}{2} \angle ACB = \frac{1}{2} (\angle ABC + \angle ACB)$ ；

B: 利用科学计算器计算可得.

【解答】解: A、 $\because \angle A=52^\circ$,

$$\therefore \angle ABC+\angle ACB=180^\circ-\angle A=128^\circ,$$

\because BD 平分 $\angle ABC$ 、CE 平分 $\angle ACB$,

$$\therefore \angle 1=\frac{1}{2}\angle ABC, \angle 2=\frac{1}{2}\angle ACB,$$

$$\text{则 } \angle 1+\angle 2=\frac{1}{2}\angle ABC+\frac{1}{2}\angle ACB=\frac{1}{2}(\angle ABC+\angle ACB)=64^\circ,$$

故答案为: 64° ;

B、 $\sqrt[3]{17}\tan 38^\circ 15' \approx 2.5713 \times 0.7883 \approx 2.03$,

故答案为: 2.03.

【点评】本题主要考查三角形内角和定理、角平分线的定义及科学计算器的运用, 熟练掌握三角形内角和定理、角平分线的定义是解题的关键.

13. (3 分) (2017•陕西) 已知 A, B 两点分别在反比例函数 $y=\frac{3m}{x}$ ($m\neq 0$) 和

$y=\frac{2m-5}{x}$ ($m\neq 2$) 的图象上, 若点 A 与点 B 关于 x 轴对称, 则 m 的值为 1

【考点】G6: 反比例函数图象上点的坐标特征; P5: 关于 x 轴、y 轴对称的点的坐标.

【分析】设 A (a, b), 则 B (a, -b), 将它们的坐标分别代入各自所在的函数解析式, 通过方程来求 m 的值.

【解答】解: 设 A (a, b), 则 B (a, -b),

$$\text{依题意得: } \begin{cases} b=\frac{3m}{a} \\ -b=\frac{2m-5}{a} \end{cases},$$

$$\text{所以 } \frac{3m+2m-5}{a} = 0, \text{ 即 } 5m-5=0,$$

解得 $m=1$.

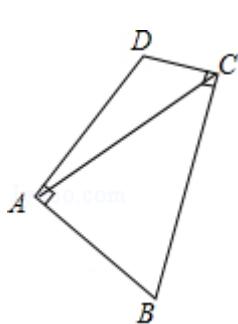
故答案是：1.

【点评】本题考查了反比例函数图象上点的坐标特征，关于x轴，y轴对称的

$$\text{点的坐标. 根据题意得 } \frac{3m+2m-5}{a} = 0, \text{ 即 } 5m-5=0 \text{ 是解题的难点.}$$

14. (3分) (2017•陕西) 如图，在四边形ABCD中，

$AB=AD, \angle BAD=\angle BCD=90^\circ$ ，连接AC. 若 $AC=6$ ，则四边形ABCD的面积为 18



【考点】KD: 全等三角形的判定与性质.

【分析】作辅助线；证明 $\triangle ABM \cong \triangle ADN$ ，得到 $AM=AN$ ， $\triangle ABM$ 与 $\triangle ADN$ 的面积相等；求出正方形AMCN的面积即可解决问题.

【解答】解：如图，作 $AM \perp BC$ 、 $AN \perp CD$ ，交CD的延长线于点N；

$$\because \angle BAD=\angle BCD=90^\circ$$

\therefore 四边形AMCN为矩形， $\angle MAN=90^\circ$ ；

$$\because \angle BAD=90^\circ,$$

$$\therefore \angle BAM=\angle DAN;$$

在 $\triangle ABM$ 与 $\triangle ADN$ 中，

$$\begin{cases} \angle BAM = \angle DAN \\ \angle AMB = \angle AND \\ AB = AD, \end{cases}$$

$\therefore \triangle ABM \cong \triangle ADN$ (AAS)，

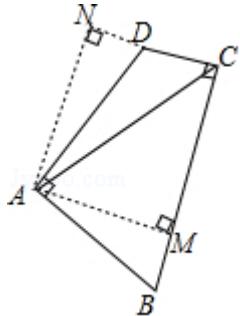
$\therefore AM=AN$ (设为 λ); $\triangle ABM$ 与 $\triangle ADN$ 的面积相等;

\therefore 四边形 $ABCD$ 的面积=正方形 $AMCN$ 的面积;

由勾股定理得: $AC^2=AM^2+MC^2$, 而 $AC=6$;

$\therefore 2\lambda^2=36$, $\lambda^2=18$,

故答案为: 18.



【点评】本题主要考查了全等三角形的判定及其性质、正方形的判定及其性质等几何知识点的应用问题; 解题的关键是作辅助线, 构造全等三角形和正方形.

三、解答题 (本大题共 11 小题, 共 78 分)

15. (5 分) (2017•陕西) 计算: $(-\sqrt{2}) \times \sqrt{6} + |\sqrt{3} \cdot 2| - (\frac{1}{2})^{-1}$.

【考点】79: 二次根式的混合运算; 6F: 负整数指数幂.

【分析】根据二次根式的性质以及负整数指数幂的意义即可求出答案.

【解答】解: 原式 = $\sqrt{12} + 2\sqrt{3} - 2$

$$= 2\sqrt{3}\sqrt{3}$$

$$= 3\sqrt{3}$$

【点评】本题考查学生的运算能力, 解题的关键是熟练运用运算法则, 本题属于基础题型.

16. (5 分) (2017•陕西) 解方程: $\frac{x+3}{x-3} - \frac{2}{x+3} = 1$.

【考点】B3：解分式方程.

【分析】利用解分式方程的步骤和完全平方公式，平方差公式即可得出结论.

【解答】解：去分母得， $(x+3)^2 - 2(x-3) = (x-3)(x+3)$,

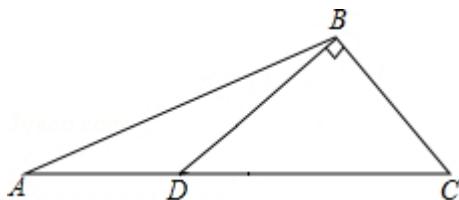
去括号得， $x^2 + 6x + 9 - 2x + 6 = x^2 - 9$,

移项，系数化为1，得 $x = -6$,

经检验， $x = -6$ 是原方程的解.

【点评】此题是解分式方程，主要考查了解分式方程的方法和完全平方公式，平方差公式，解本题的关键是将分式方程转化为整式方程.

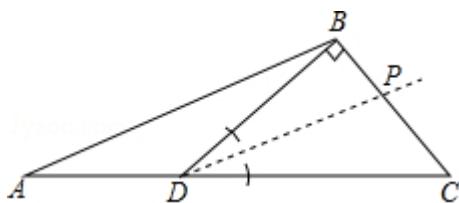
17. (5分) (2017•陕西) 如图，在钝角 $\triangle ABC$ 中，过钝角顶点B作 $BD \perp BC$ 交AC于点D. 请用尺规作图法在BC边上求作一点P，使得点P到AC的距离等于BP的长. (保留作图痕迹，不写作法)



【考点】N2：作图—基本作图.

【分析】根据题意可知，作 $\angle BDC$ 的平分线交BC于点P即可.

【解答】解：如图，点P即为所求.

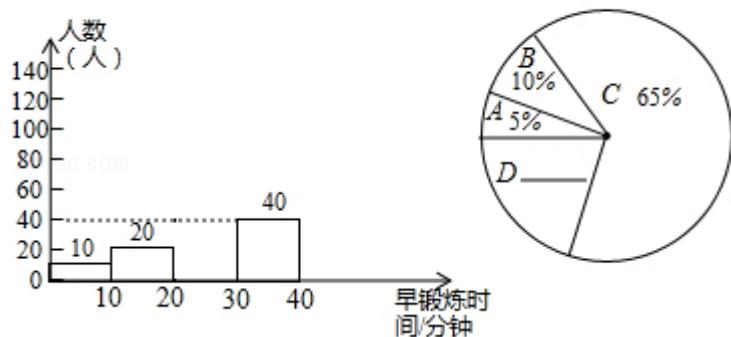


【点评】本题考查的是作图—基本作图，熟知角平分线的作法和性质是解答此题的关键.

18. (5分) (2017•陕西) 养成良好的早锻炼习惯，对学生的学习和生活都非常有益，某中学为了了解七年级学生的早锻炼情况，校政教处在七年级随机抽取了部分学生，并对这些学生通常情况下一天的早锻炼时间x(分钟)进行了调

查. 现把调查结果分成 A、B、C、D 四组, 如下表所示, 同时, 将调查结果绘制成下面两幅不完整的统计图.

所抽取七年级学生早锻炼时间统计图



请你根据以上提供的信息, 解答下列问题:

- (1) 补全频数分布直方图和扇形统计图;
- (2) 所抽取的七年级学生早锻炼时间的中位数落在 C 区间内;
- (3) 已知该校七年级共有 1200 名学生, 请你估计这个年级学生中约有多少人一天早锻炼的时间不少于 20 分钟. (早锻炼: 指学生在早晨 7: 00~7: 40 之间的锻炼)

【考点】V8: 频数(率)分布直方图; V5: 用样本估计总体; VB: 扇形统计图; W4: 中位数.

- 【分析】**(1) 先根据 A 区间人数及其百分比求得总人数, 再根据各区间人数之和等于总人数、百分比之和为 1 求得 C 区间人数及 D 区间百分比可得答案;
 (2) 根据中位数的定义求解可得;
 (3) 利用样本估计总体思想求解可得.

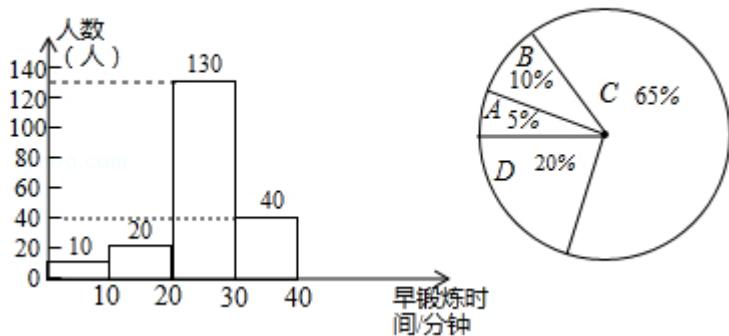
【解答】解: (1) 本次调查的总人数为 $10 \div 5\% = 200$,

则 20~30 分钟的人数为 $200 \times 65\% = 130$ (人),

D 项目的百分比为 $1 - (5\% + 10\% + 65\%) = 20\%$,

补全图形如下:

所抽取七年级学生早锻炼时间统计图



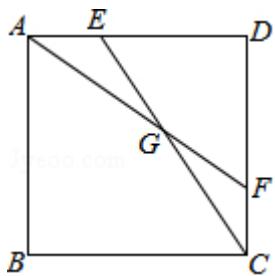
(2) 由于共有 200 个数据，其中位数是第 100、101 个数据的平均数，则其中位数位于 C 区间内，故答案为：C；

(3) $1200 \times (65\% + 20\%) = 1020$ (人)，

答：估计这个年级学生中约有 1020 人一天早锻炼的时间不少于 20 分钟。

【点评】本题考查的是条形统计图和扇形统计图的综合运用，读懂统计图，从不同的统计图中得到必要的信息是解决问题的关键。条形统计图能清楚地表示出每个项目的数据；扇形统计图直接反映部分占总体的百分比大小。

19. (7 分) (2017•陕西) 如图，在正方形 ABCD 中，E、F 分别为边 AD 和 CD 上的点，且 AE=CF，连接 AF、CE 交于点 G. 求证：AG=CG.



【考点】 LE: 正方形的性质； KD: 全等三角形的判定与性质。

【分析】根据正方向的性质，可得 $\angle ADF=\angle CDE=90^\circ$, $AD=CD$ ，根据全等三角形的判定与性质，可得答案。

【解答】证明： \because 四边形 ABCD 是正方形，

$$\therefore \angle ADF=\angle CDE=90^\circ, AD=CD.$$

$\because AE=CF$,

$\therefore DE=DF$,

在 $\triangle ADF$ 和 $\triangle CDE$ 中 $\begin{cases} AD = CD \\ \angle ADF = \angle CDE \\ DF = DE \end{cases}$,

$\therefore \triangle ADF \cong \triangle CDE$ (SAS),

$\therefore \angle DAF = \angle DCE$,

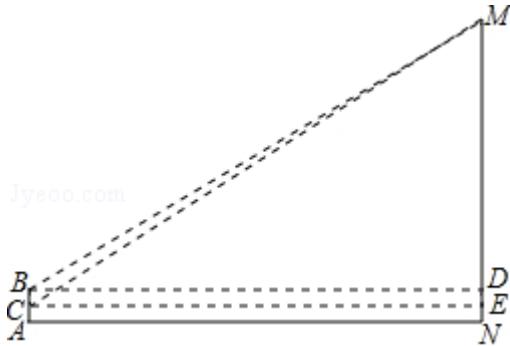
在 $\triangle AGE$ 和 $\triangle CGF$ 中, $\begin{cases} \angle GAE = \angle GCF \\ \angle AGE = \angle CGF \\ AE = CF \end{cases}$,

$\therefore \triangle AGE \cong \triangle CGF$ (AAS),

$\therefore AG = CG$.

【点评】本题考查了正方形的性质, 利用全等三角形的判定与性质是解题关键, 又利用了正方形的性质.

20. (7分) (2017•陕西) 某市一湖的湖心岛有一颗百年古树, 当地人称它为“乡思柳”, 不乘船不易到达, 每年初春时节, 人们喜欢在“聚贤亭”观湖赏柳. 小红和小军很想知道“聚贤亭”与“乡思柳”之间的大致距离, 于是, 有一天, 他们俩带着侧倾器和皮尺来测量这个距离. 测量方法如下: 如图, 首先, 小军站在“聚贤亭”的 A 处, 用侧倾器测得“乡思柳”顶端 M 点的仰角为 23° , 此时测得小军的眼睛距地面的高度 AB 为 1.7 米, 然后, 小军在 A 处蹲下, 用侧倾器测得“乡思柳”顶端 M 点的仰角为 24° , 这时测得小军的眼睛距地面的高度 AC 为 1 米. 请你利用以上测得的数据, 计算“聚贤亭”与“乡思柳”之间的距离 AN 的长 (结果精确到 1 米). (参考数据: $\sin 23^\circ \approx 0.3907$, $\cos 23^\circ \approx 0.9205$, $\tan 23^\circ \approx 0.4245$, $\sin 24^\circ \approx 0.4067$, $\cos 24^\circ \approx 0.9135$, $\tan 24^\circ \approx 0.4452$.)



【考点】TA：解直角三角形的应用-仰角俯角问题.

【分析】作 $BD \perp MN$, $CE \perp MN$, 垂足分别为点 D、E, 设 $AN=x$ 米, 则 $BD=CE=x$ 米, 再由锐角三角函数的定义即可得出结论.

【解答】解：如图，作 $BD \perp MN$, $CE \perp MN$, 垂足分别为点 D、E, 设 $AN=x$ 米, 则 $BD=CE=x$ 米,

在 $\text{Rt}\triangle MBD$ 中, $MD=x \cdot \tan 23^\circ$,

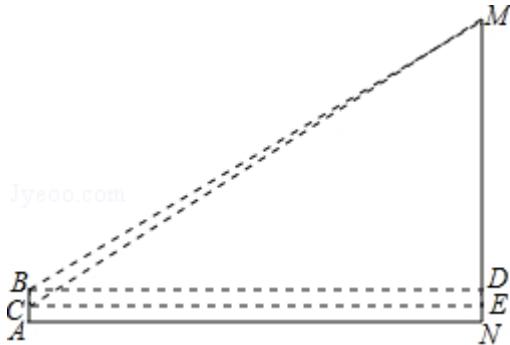
在 $\text{Rt}\triangle MCE$ 中, $ME=x \cdot \tan 24^\circ$,

$$\because ME-MD=DE=BC,$$

$$\therefore x \cdot \tan 24^\circ - x \cdot \tan 23^\circ = 1.7 - 1,$$

$$\therefore x = \frac{0.7}{\tan 24^\circ - \tan 23^\circ}, \text{ 解得 } x \approx 34 \text{ (米)}.$$

答：“聚贤亭”与“乡思柳”之间的距离 AN 的长约为 34 米.



【点评】本题考查的是解直角三角形的应用-仰角俯角问题, 熟记锐角三角函数的定义是解答此题的关键.

21. (7 分) (2017•陕西) 在精准扶贫中, 某村的李师傅在县政府的扶持下, 去

年下半年，他对家里的 3 个温室大棚进行修整改造，然后，1 个大棚种植香瓜，另外 2 个大棚种植甜瓜，今年上半年喜获丰收，现在他家的甜瓜和香瓜已全部售完，他高兴地说：“我的日子终于好了”.

最近，李师傅在扶贫工作者的指导下，计划在农业合作社承包 5 个大棚，以后就用 8 个大棚继续种植香瓜和甜瓜，他根据种植经验及今年上半年的市场情况，打算下半年种植时，两个品种同时种，一个大棚只种一个品种的瓜，并预测明年两种瓜的产量、销售价格及成本如下：

品种 项目	产量（斤/每棚）	销售价（元/每斤）	成本（元/每棚）
香瓜	2000	12	8000
甜瓜	4500	3	5000

现假设李师傅今年下半年香瓜种植的大棚数为 x 个，明年上半年 8 个大棚中所产的瓜全部售完后，获得的利润为 y 元.

根据以上提供的信息，请你解答下列问题：

- (1) 求出 y 与 x 之间的函数关系式；
- (2) 求出李师傅种植的 8 个大棚中，香瓜至少种植几个大棚？才能使获得的利润不低于 10 万元.

【考点】FH：一次函数的应用.

【分析】(1) 利用总利润=种植香瓜的利润+种植甜瓜的利润即可得出结论；

(2) 利用(1)得出的结论大于等于 100000 建立不等式，即可确定出结论.

【解答】解：(1) 由题意得，

$$y = (2000 \times 12 - 8000)x + (4500 \times 3 - 5000)(8-x)$$

$$= 7500x + 68000,$$

(2) 由题意得， $7500x + 6800 \geq 100000$,

$$\therefore x \geq \frac{4}{15},$$

$\because x$ 为整数，

\therefore 李师傅种植的 8 个大棚中，香瓜至少种植 5 个大棚.

【点评】此题是一次函数的应用，主要考查了一次函数的应用以及解一元一次不等式，解题的关键是：（1）根据数量关系，列出函数关系式；（2）根据题意建立不等式，是一道基础题目。

22.（7分）（2017•陕西）端午节“赛龙舟，吃粽子”是中华民族的传统习俗。节日期间，小邱家包了三种不同馅的粽子，分别是：红枣粽子（记为A），豆沙粽子（记为B），肉粽子（记为C），这些粽子除了馅不同，其余均相同。粽子煮好后，小邱的妈妈给一个白盘中放入了两个红枣粽子，一个豆沙粽子和一个肉粽子；给一个花盘中放入了两个肉粽子，一个红枣粽子和一个豆沙粽子。

根据以上情况，请你回答下列问题：

- (1) 假设小邱从白盘中随机取一个粽子，恰好取到红枣粽子的概率是多少？
- (2) 若小邱先从白盘里的四个粽子中随机取一个粽子，再从花盘里的四个粽子中随机取一个粽子，请用列表法或画树状图的方法，求小邱取到的两个粽子中一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的概率。

【考点】X6：列表法与树状图法；X4：概率公式。

【分析】(1) 根据题意可以得到小邱从白盘中随机取一个粽子，恰好取到红枣粽子的概率；

(2) 根据题意可以写出所有的可能性，从而可以解答本题。

【解答】解：(1) 由题意可得，

小邱从白盘中随机取一个粽子，恰好取到红枣粽子的概率是： $\frac{2}{4} = \frac{1}{2}$ ，

即小邱从白盘中随机取一个粽子，恰好取到红枣粽子的概率是 $\frac{1}{2}$ ；

(2) 由题意可得，出现的所有可能性是：

(A, A)、(A, B)、(A, C)、(B, A)、
(A, A)、(A, B)、(A, C)、(B, B)、
(B, A)、(B, B)、(B, C)、(C, A)、
(C, B)、(C, C)、(C, C)，

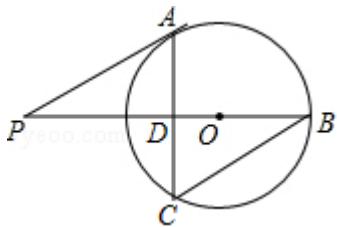
\therefore 小邱取到的两个粽子中一个是红枣粽子、一个是豆沙粽子的概率是： $\frac{3}{16}$ 。

【点评】本题考查列表法与树状图法、概率公式，解答本题的关键是明确题意，

写出所有的可能性，利用概率的知识解答.

23. (8分) (2017•陕西) 如图，已知 $\odot O$ 的半径为5， PA 是 $\odot O$ 的一条切线，切点为 A ，连接 PO 并延长，交 $\odot O$ 于点 B ，过点 A 作 $AC \perp PB$ 交 $\odot O$ 于点 C 、交 PB 于点 D ，连接 BC ，当 $\angle P=30^\circ$ 时，

- (1) 求弦 AC 的长；
- (2) 求证： $BC \parallel PA$.



【考点】MC：切线的性质.

【分析】(1) 连接 OA ，由于 PA 是 $\odot O$ 的切线，从而可求出 $\angle AOD=60^\circ$ ，由垂径定理可知： $AD=DC$ ，由锐角三角函数即可求出 AC 的长度.

(2) 由于 $\angle AOP=60^\circ$ ，所以 $\angle BOA=120^\circ$ ，从而由圆周角定理即可求出 $\angle BCA=60^\circ$ ，从而可证明 $BC \parallel PA$

【解答】解：(1) 连接 OA ，

$\because PA$ 是 $\odot O$ 的切线，

$$\therefore \angle PAO=90^\circ$$

$$\because \angle P=30^\circ,$$

$$\therefore \angle AOD=60^\circ,$$

$\because AC \perp PB$ ， PB 过圆心 O ，

$$\therefore AD=DC$$

$$\frac{5\sqrt{3}}{2}$$

在 $Rt\triangle ODA$ 中， $AD=OA \cdot \sin 60^\circ = \frac{5\sqrt{3}}{2}$

$$\therefore AC=2AD=5\sqrt{3}$$

(2) $\because AC \perp PB$ ， $\angle P=30^\circ$ ，

$\therefore \angle PAC=60^\circ$,

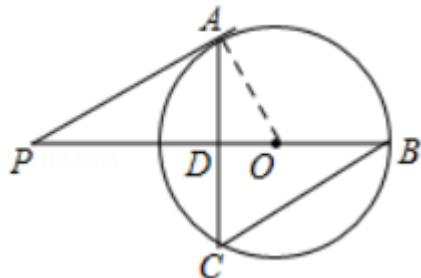
$\because \angle AOP=60^\circ$

$\therefore \angle BOA=120^\circ$,

$\therefore \angle BCA=60^\circ$,

$\therefore \angle PAC=\angle BCA$

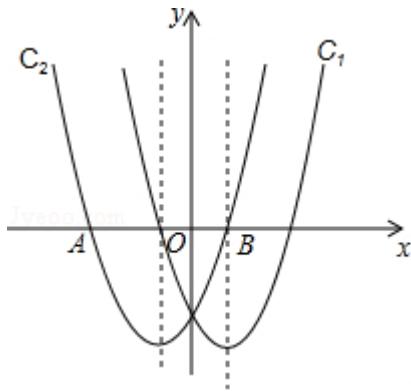
$\therefore BC \parallel PA$



【点评】本题考查圆的综合问题，涉及切线的性质，解直角三角形，平行线的判定等知识，综合程度较高，属于中等题型.

24. (10分) (2017•陕西) 在同一直角坐标系中，抛物线 $C_1: y=ax^2-2x-3$ 与抛物线 $C_2: y=x^2+mx+n$ 关于 y 轴对称， C_2 与 x 轴交于 A 、 B 两点，其中点 A 在点 B 的左侧.

- (1) 求抛物线 C_1 ， C_2 的函数表达式；
- (2) 求 A 、 B 两点的坐标；
- (3) 在抛物线 C_1 上是否存在一点 P ，在抛物线 C_2 上是否存在一点 Q ，使得以 AB 为边，且以 A 、 B 、 P 、 Q 四点为顶点的四边形是平行四边形？若存在，求出 P 、 Q 两点的坐标；若不存在，请说明理由.



【考点】 HF: 二次函数综合题.

【分析】 (1) 由对称可求得 a 、 n 的值，则可求得两函数的对称轴，可求得 m 的值，则可求得两抛物线的函数表达式；

(2) 由 C_2 的函数表达式可求得 A 、 B 的坐标；

(3) 由题意可知 AB 只能为平行四边形的边，利用平行四边形的性质，可设出 P 点坐标，表示出 Q 点坐标，代入 C_2 的函数表达式可求得 P 、 Q 的坐标.

【解答】 解：

(1) $\because C_1$ 、 C_2 关于 y 轴对称，

$\therefore C_1$ 与 C_2 的交点一定在 y 轴上，且 C_1 与 C_2 的形状、大小均相同，

$\therefore a=1$, $n=-3$,

$\therefore C_1$ 的对称轴为 $x=1$,

$\therefore C_2$ 的对称轴为 $x=-1$,

$\therefore m=2$,

$\therefore C_1$ 的函数表达式为 $y=x^2+2x-3$, C_2 的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$;

(2) 在 C_2 的函数表达式为 $y=x^2-2x-3$ 中，令 $y=0$ 可得 $x^2-2x-3=0$ ，解得 $x=-3$ 或 $x=1$ ，

$\therefore A(-3, 0)$, $B(1, 0)$;

(3) 存在.

$\because AB$ 的中点为 $(-1, 0)$ ，且点 P 在抛物线 C_1 上，点 Q 在抛物线 C_2 上，

$\therefore AB$ 只能为平行四边形的一边，

$\therefore PQ \parallel AB$ 且 $PQ = AB$,

由(2)可知 $AB = 1 - (-3) = 4$,

$\therefore PQ = 4$,

设 $P(t, t^2 - 2t - 3)$, 则 $Q(t+4, t^2 - 2t - 3)$ 或 $(t-4, t^2 - 2t - 3)$,

①当 $Q(t+4, t^2 - 2t - 3)$ 时, 则 $t^2 - 2t - 3 = (t+4)^2 + 2(t+4) - 3$, 解得 $t = -2$,

$\therefore t^2 - 2t - 3 = 4 + 4 - 3 = 5$,

$\therefore P(-2, 5), Q(2, 5)$;

②当 $Q(t-4, t^2 - 2t - 3)$ 时, 则 $t^2 - 2t - 3 = (t-4)^2 + 2(t-4) - 3$, 解得 $t = 2$,

$\therefore t^2 - 2t - 3 = 4 - 4 - 3 = -3$,

$\therefore P(-2, -3), Q(2, -3)$,

综上可知存在满足条件的点 P, Q , 其坐标为 $P(-2, 5), Q(2, 5)$ 或

$P(-2, -3), Q(2, -3)$.

【点评】本题为二次函数的综合应用, 涉及待定系数法、对称的性质、函数图象与坐标轴的交点、平行四边形的性质、方程思想及分类讨论思想等知识. 在

(1) 中由对称性质求得 a, n 的值是解题的关键, 在(2)中注意函数图象与坐标轴的交点的求法即可, 在(3)中确定出 PQ 的长度, 设 P 点坐标表示出 Q 点的坐标是解题的关键. 本题考查知识点较多, 综合性较强, 难度适中.

25. (12分)(2017•陕西)问题提出

(1) 如图①, $\triangle ABC$ 是等边三角形, $AB=12$, 若点 O 是 $\triangle ABC$ 的内心, 则 OA 的长为 $4\sqrt{3}$;

问题探究

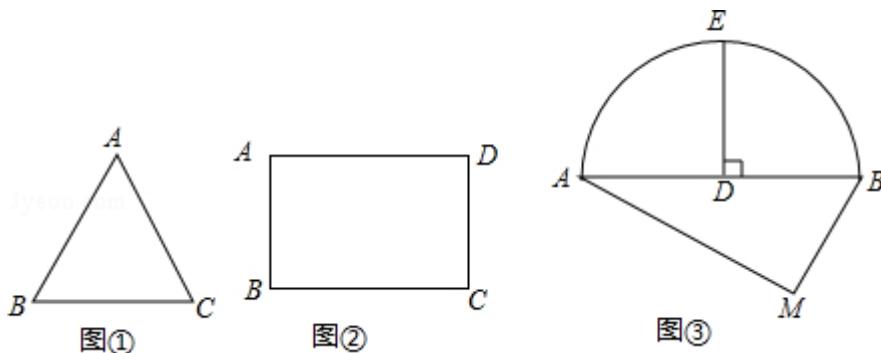
(2) 如图②, 在矩形 $ABCD$ 中, $AB=12$, $AD=18$, 如果点 P 是 AD 边上一点, 且 $AP=3$, 那么 BC 边上是否存在一点 Q , 使得线段 PQ 将矩形 $ABCD$ 的面积平分? 若存在, 求出 PQ 的长; 若不存在, 请说明理由.

问题解决

(3) 某城市街角有一草坪，草坪是由 $\triangle ABM$ 草地和弦 AB 与其所对的劣弧围成的草地组成，如图③所示。管理员王师傅在 M 处的水管上安装了一喷灌龙头，以后，他想只用喷灌龙头来给这块草坪浇水，并且在用喷灌龙头浇水时，既要能确保草坪的每个角落都能浇上水，又能节约用水，于是，他让喷灌龙头的转角正好等于 $\angle AMB$ （即每次喷灌时喷灌龙头由 MA 转到 MB ，然后再转回，这样往复喷灌。）同时，再合理设计好喷灌龙头喷水的射程就可以了。

如图③，已测出 $AB=24m$ ， $MB=10m$ ， $\triangle AMB$ 的面积为 $96m^2$ ；过弦 AB 的中点 D 作 $DE \perp AB$ 交 \widehat{AB} 于点 E ，又测得 $DE=8m$ 。

请你根据以上信息，帮助王师傅计算喷灌龙头的射程至少多少米时，才能实现他的想法？为什么？（结果保留根号或精确到 0.01 米）



【考点】MR：圆的综合题。

【分析】(1) 构建 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中，利用 $\cos \angle OAD = \cos 30^\circ = \frac{AD}{OA}$ ，可得 OA 的长；

(2) 经过矩形对角线交点的直线将矩形面积平分，根据此结论作出 PQ ，利用勾股定理进行计算即可；

(3) 如图 3，作辅助线，先确定圆心和半径，根据勾股定理计算半径：

在 $\text{Rt}\triangle AOD$ 中， $r^2 = 12^2 + (r-8)^2$ ，解得： $r=13$ 根据三角形面积计算高 MN 的长，证明 $\triangle ADC \sim \triangle ANM$ ，列比例式求 DC 的长，确定点 O 在 $\triangle AMB$ 内部，利用勾股定理计算 OM ，则最大距离 FM 的长可利用相加得出结论。

【解答】解：(1) 如图 1，过 O 作 $OD \perp AC$ 于 D ，则 $AD = \frac{1}{2}AC = \frac{1}{2} \times 12 = 6$ ，

$\because O$ 是内心， $\triangle ABC$ 是等边三角形，

$$\therefore \angle OAD = \frac{1}{2} \angle BAC = \frac{1}{2} \times 60^\circ = 30^\circ,$$

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $\cos \angle OAD = \cos 30^\circ = \frac{AD}{OA}$,

$$\therefore OA = 6 \div \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3},$$

故答案为: $4\sqrt{3}$;

(2) 存在, 如图 2, 连接 AC 、 BD 交于点 O , 连接 PO 并延长交 BC 于 Q , 则线段 PQ 将矩形 $ABCD$ 的面积平分,

\because 点 O 为矩形 $ABCD$ 的对称中心,

$$\therefore CQ = AP = 3,$$

过 P 作 $PM \perp BC$ 于点, 则 $PM = AB = 12$, $MQ = 18 - 3 - 3 = 12$,

$$\text{由勾股定理得: } PQ = \sqrt{PM^2 + MQ^2} = \sqrt{12^2 + 12^2} = 12\sqrt{2};$$

(3) 如图 3, 作射线 ED 交 AM 于点 C

$\because AD = DB$, $ED \perp AB$, \widehat{AB} 是劣弧,

$\therefore \widehat{AB}$ 所在圆的圆心在射线 DC 上,

假设圆心为 O , 半径为 r , 连接 OA , 则 $OA = r$, $OD = r - 8$, $AD = \frac{1}{2}AB = 12$,

在 $Rt\triangle AOD$ 中, $r^2 = 12^2 + (r - 8)^2$,

解得: $r = 13$,

$$\therefore OD = 5,$$

过点 M 作 $MN \perp AB$, 垂足为 N ,

$$\therefore S_{\triangle ABM} = 96, AB = 24,$$

$$\therefore \frac{1}{2}AB \cdot MN = 96,$$

$$\frac{1}{2} \times 24 \times MN = 96,$$

$$\therefore MN = 8, NB = 6, AN = 18,$$

$\because CD \parallel MN$,

$\therefore \triangle ADC \sim \triangle ANM$,

$$\therefore \frac{DC}{MN} = \frac{AD}{AN},$$

$$\therefore \frac{DC}{8} = \frac{12}{18},$$

$$\therefore DC = \frac{16}{3},$$

$\therefore OD < CD$,

\therefore 点 O 在 $\triangle AMB$ 内部,

\therefore 连接 MO 并延长交 \widehat{AB} 于点 F, 则 MF 为草坪上的点到 M 点的最大距离,

\therefore 在 \widehat{AB} 上任取一点异于点 F 的点 G, 连接 GO, GM,

$$\therefore MF = OM + OF = OM + OG > MG,$$

即 $MF > MG$,

过 O 作 $OH \perp MN$, 垂足为 H, 则 $OH = DN = 6$, $MH = 3$,

$$\therefore OM = \sqrt{MH^2 + OH^2} = \sqrt{3^2 + 6^2} = 3\sqrt{5},$$

$$\therefore MF = OM + r = 3\sqrt{5} + 13 \approx 19.71 \text{ (米)},$$

答: 喷灌龙头的射程至少为 19.71 米.

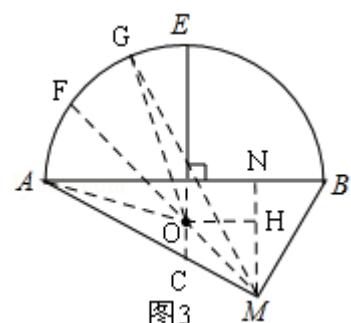


图3

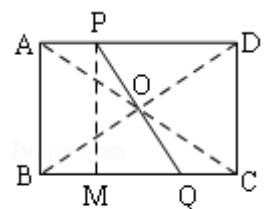


图2

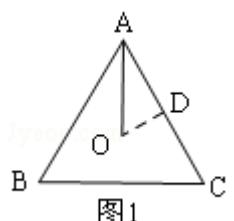


图1

【点评】本题是圆的综合题，考查了三角形相似的性质和判定、勾股定理、等边三角形的性质及内心的定义、特殊的三角函数值、矩形的性质等知识，明确在特殊的四边形中将面积平分的直线一定过对角线的交点，本题的第三问比较复杂，辅助线的作出是关键，根据三角形的三角关系确定其最大射程为 MF .