中考数学 | 刷完这50道经典几何难题，数学稳稳130+！

中学

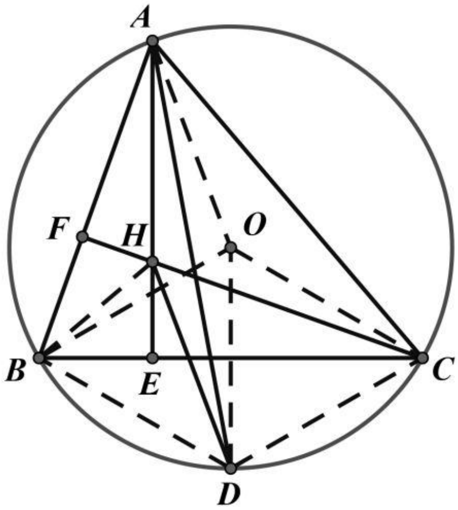
第一题：

已知：ΔABC 外接于$\odot O$，$\angle BAC=60°$，$AE\perp BC$，$CF\perp AB$，AE、CF 相交于点 H，点 D 为弧 BC 的中点，连接 HD、AD。求证：ΔAHD 为等腰三角形

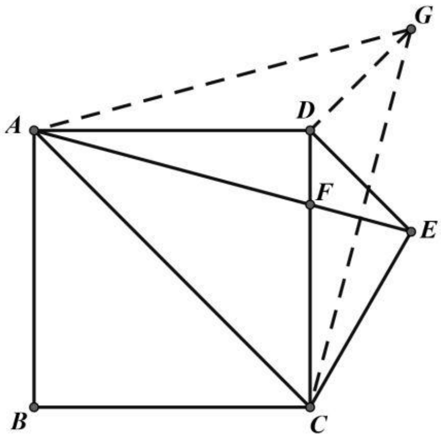
简证：易证∠BHC＝120°，∠BOC＝120°，∴B、H、O、C 四点共圆。

DB＝DO＝DC，∴DH＝DO＝OA，又 AH// OD，∴ $AHDO$ 是菱形

∴AH＝HD，△AHD 为等腰三角形。



第二题：



如图，F 为正方形 $ABCD$ 边 CD 上一点，连接 AC、AF，延长 AF 交 AC 的平行线 DE 于点 E，连接 CE,且 AC=AE。求证：$CE=CF$

简证：作点 E 关于 AD 对称点 G，则 DE⊥DG

△CDG≌△ADE，△ACG 是等边三角形。

∠GAC＝60°，∠DAF＝15°，∠CEF＝30°，∠DEF＝30°，∠CFE＝30°，

∴△CEF 是等腰三角形。CE＝CF。

第三题：

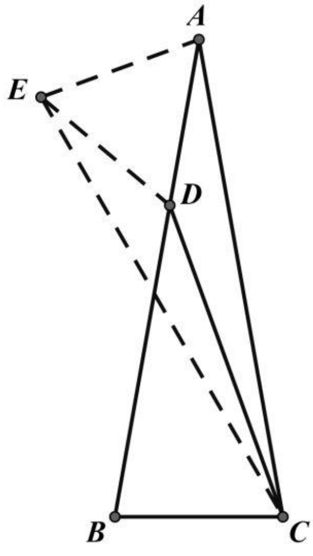
已知：ΔABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=20°$，$\angle BDC=30°$。

求证：$AD=BC$

简证：以 AD 为边作正三角形 ADE（如图）

易知△ABC≌△CAE

∴AD＝AE＝BC。



第四题：

已知：ΔABC 中，D 为 AC 边的中点，$\angle A = 3\angle C$，$\angle ADB = 45°$。求证：$AB \perp BC$

简证：过 D 作 $DE \perp AC$ 交 BC 于 E

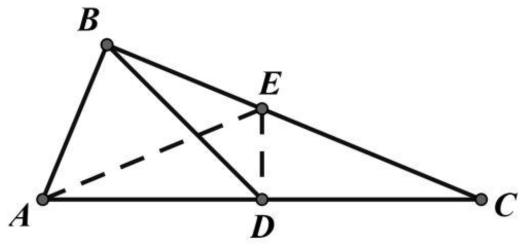
由已知得 $AE=EC$，$\angle EAD=\angle C$

又$\angle A=3\angle C$，$\therefore \angle BAE=\angle BEA$

$BA=BE$，由$\angle ADB=45°$ 得$\angle EDB=45°$

$\therefore A$、D、E、B 四点共圆，$\angle ABE=\angle ADE=90°$

即 $AB \perp BC$。



第五题：

如图，四边形 $ABCD$ 的两条对角线 AC、BD 交于点 E，$\angle BAC = 50°$，$\angle ABD = 60°$，$\angle CBD = 20°$，$\angle CAD = 30°$，$\angle ADB = 40°$。求 $\angle ACD$。

解：设 AD、BC 交于点 F，过 D 作 $DG \parallel AB$ 交 BF 于点 G，AG 交 BD 于 H。则$\triangle ABF$ 是等腰三角形，A、B、G、D 四点共圆。

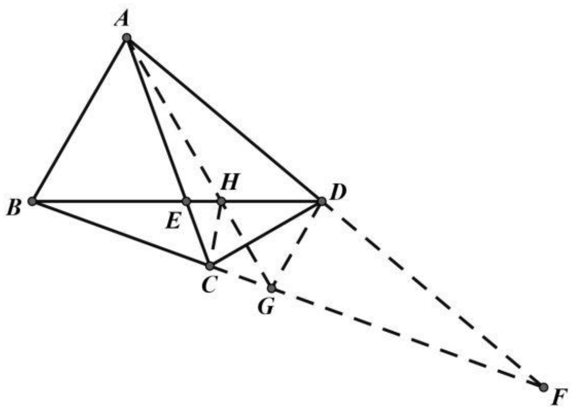
$\angle DAG=\angle DBG=20°$，$\therefore \angle BAG=60°$

$\angle BDG=\angle BAG=60°$，$\angle AGD=\angle ABD=60°$ $\therefore \triangle GHD$ 是等边三角形。$\triangle ABH$ 是等边三角形

$BH=AB=BC$，$\therefore \angle BHC=80°$，$\therefore \angle CHG=40°$

$\therefore \angle HGC=40°$，$\therefore HC=GC$，$\therefore \triangle HCD \cong \triangle GCD$

$\therefore \angle HDC=30°$，$\therefore \angle ACD=80°$。



第六题：

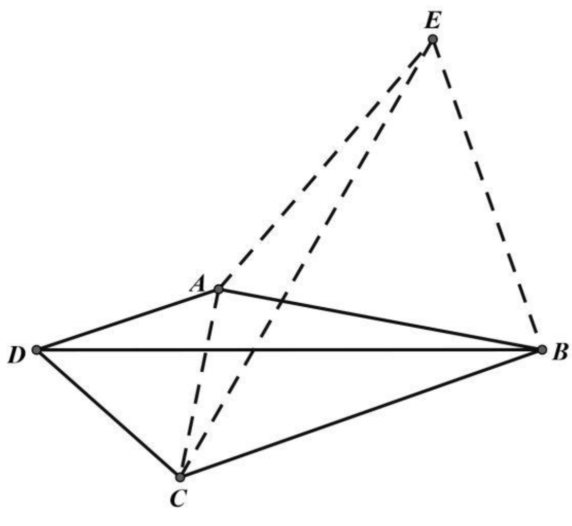
已知，$\angle ABC = 30°$，$\angle ADC = 60°$，$AD = DC$。求证：$AB^2 + BC^2 = BD^2$

简证：以 AB 为边向外作正三角形 ABE

则 $BC \perp BE$，$BE^2+BC^2=CE^2$

易证$\triangle DAB \cong \triangle CAE$，$BD=CE$

于是$AB^2+BC^2=BD^2$。



第七题：

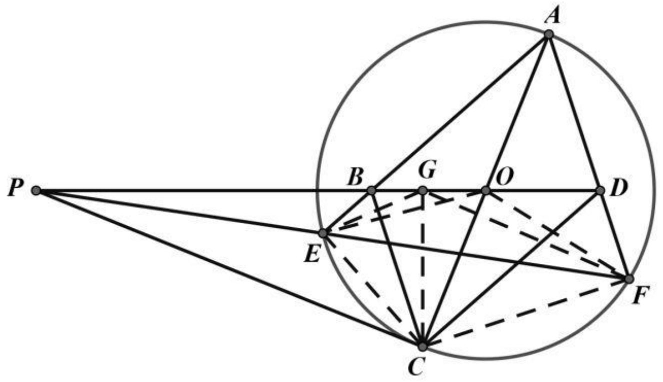
如图，PC 切⊙O 于 C，AC 为圆的直径，PEF 为⊙O 的割线，AE、AF 与直线 PO 相交于 B、D。求证：四边形 $ABCD$ 为平行四边形

证明：过 C 作 $CG\perp PO$ 于 G，

则由 $\angle AEC=\angle PGC=90°$ 得

E、B、G、C 四点共圆

同理 F、D、G、C 四点共圆



PC 是⊙O 切线，$PC^2=PE\cdot PF$

在 $RT\triangle PCO$ 中，$PC^2=PG\cdot PO$

$\therefore PE\cdot PF=PG\cdot PO$，

$\therefore E$、G、O、F 四点共圆。$\therefore\angle OGF=\angle OEF$，$\angle BGE=\angle OEF$，$\therefore\angle OGF=\angle BGE$

又 $CG\perp PO$ 得 $\angle EGC=\angle FGC$，$\angle EGF=\angle EOF=2\angle EAF$，$\therefore\angle EGC=\angle FGC=\angle EAF$

又 $\angle EGC=\angle EBC$，$\angle FGC=\angle FDC$，$\therefore\angle EBC=\angle FDC=\angle EAF$

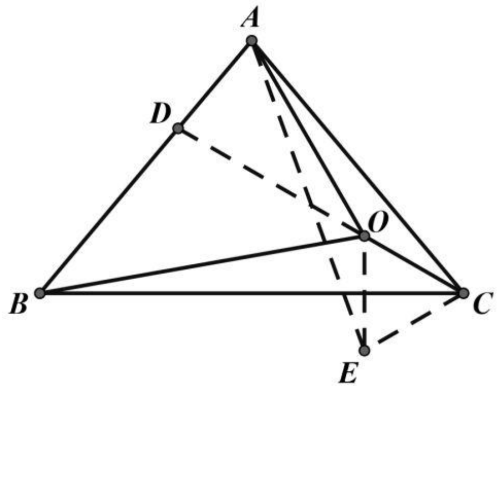
$\therefore AF\parallel BC$，$AE\parallel CD$，$\therefore$ 四边形 $ABCD$ 是平行四边形。

第八题：

已知：在 ΔABC 中，$AB=AC$，$\angle A=80°$，$\angle OBC=10°$，$\angle OCA=20°$。

求证：$AB=OB$

简证：延长 CO 交 AB 于 D，以 OC 为边作正三角形 OCE（如图）



易知 $AC=DC$，$BD=OD$，$OC=AD$

$\triangle ACE\cong\triangle CAD$，$\triangle ACO\cong\triangle AEO$，

$\angle CAO=\dfrac{1}{2}\angle CAE=10°$

$\therefore\angle BAO=70°$，$\angle ABO=40°$

$\therefore\angle BOA=70°$，$\therefore AB=OB$。

第九题：

已知：正方形 $ABCD$ 中，$\angle OAD=\angle ODA=15°$，求证：$\Delta OBC$ 为正三角形。

简证：以 BC 为边作正三角形 BCO'（如图），

则 $AB=O'B$，$\angle ABO'=30°$，

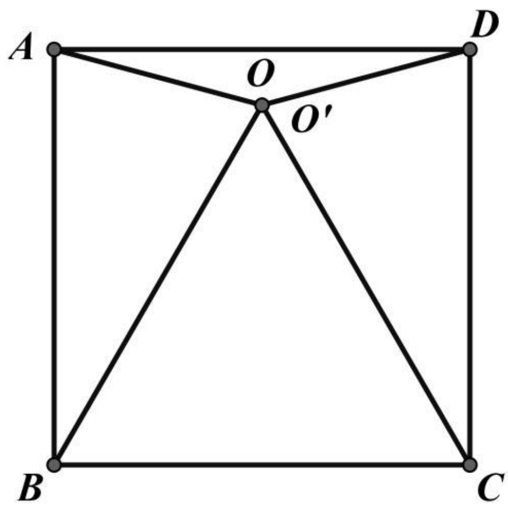
$\therefore \angle BAO'=75°$，$\angle DAO'=15°$

同理 $\angle ADO'=15°$

于是 $\triangle ADO' \cong \triangle ADO$

$\therefore O$ 与 O' 重合

$\therefore \triangle OBC$ 是正三角形。



第十题：

已知：正方形 $ABCD$ 中，E、F 为 AD、DC 的中点，连接 BE、AF，相交于点 P，连接 PC。求证：$PC=BC$

简证：易知 $\triangle ABE \cong \triangle DAF$

$BE \perp AF$，$\therefore B$、C、F、P 四点共圆

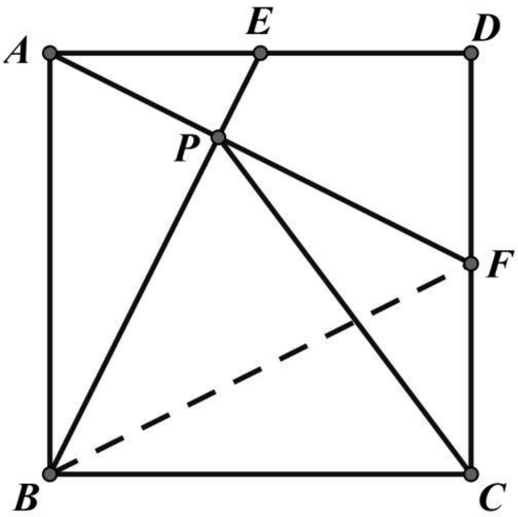
$\angle BPC=\angle BFC$

$\angle PBC=\angle BEA$

而 $\angle BEA=\angle BFC$

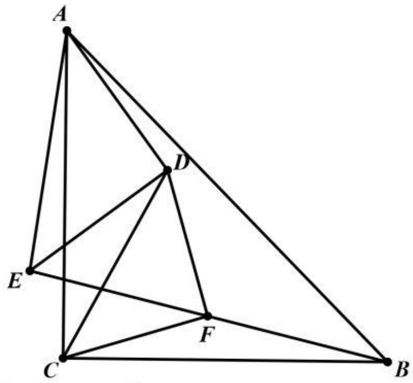
$\therefore \angle BPC=\angle PBC$

$\therefore PC=BC$。



第十一题：

如图，ΔACB 与 ΔADE 都是等腰直角三角形，$\angle ADE=\angle ACB=90°$，$\angle CDF=45°$，$DF$ 交 BE 于 F，求证：$\angle CFD=90°$



证明：只要证明△CDF 是等腰直角三角形时，E、F、B 共线即可。

设$C=0$，$B=1$，$A=i$，$D=x+yi(x,y\in\mathbb{R})$，则

$\overrightarrow{AD}=D-A=x+(y-1)i$，

∴

$$\overrightarrow{AE}=\sqrt{2}\overrightarrow{AD}\cdot e^{-\frac{\pi}{4}i}=\sqrt{2}[x+(y-1)i]\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1-i)=x+y-1+(y-x-1)i$$

$$\therefore E=A+\overrightarrow{AE}=i+x+y-1+(y-x-1)i=x+y-1+(y-x)i$$

$$\therefore \overrightarrow{DF}=\frac{\sqrt{2}}{2}\overrightarrow{DC}\cdot e^{\frac{\pi}{4}i},$$

$$\therefore F=D+\overrightarrow{DF}=x+yi+\frac{\sqrt{2}}{2}(-x-yi)\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}(1+i)=\frac{1}{2}(x+y)+\frac{1}{2}(y-x)i$$

$$\because E+B=x+y+(y-x)i=2F$$

∴F 是 EB 中点，∴△CDF 是等腰直角三角形，$\angle CFD$＝90°。

第十二题：

已知：ΔABC 中，$\angle CBA=2\angle CAB$，$\angle CBA$ 的角平分线 BD 与 $\angle CAB$ 的角平分线 AD 相交于点 D，且 $BC=AD$。求证：$\angle ACB=60°$

简证：作∠ABD 的平分线 BE 交 AC 于 E，

易得四边形 $ABDE$ 是等腰梯形

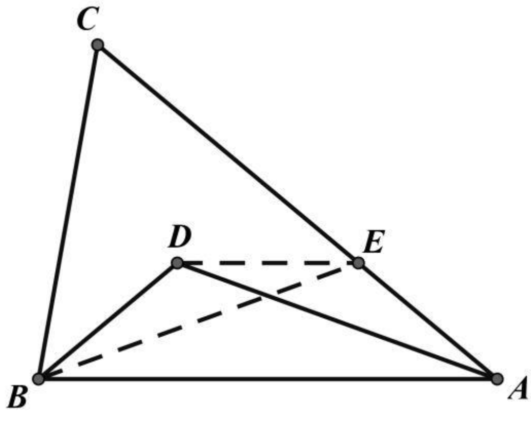
AD＝BE，BC＝BE

∠C＝∠CEB＝3∠ABE

∠CBE＝3∠ABE

∴△BCE 为等边三角形

∠ACB＝60°。



第十三题：

已知：在ΔABC中，$AC=BC$，$\angle C=100°$，AD平分$\angle CAB$。求证：$AD+CD=AB$

简证：作BE使得$\angle ABE=80°$交直线AC于E，AD延长线与BE交于点F

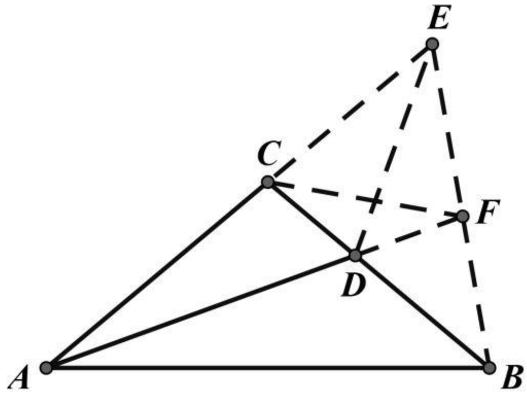
则BC是$\angle ABE$的平分线，$\angle CAB=40°$

$\angle AEB=60°$

$\angle CDF=120°$，C、D、F、E四点共圆

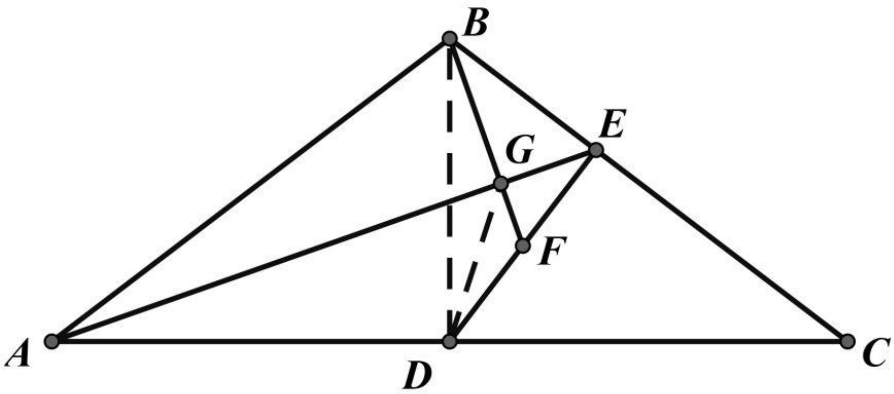
$\angle DFC=\angle DEC=\angle DEF=\angle DCF$

$CD=DF$，$AD+CD=AF=AB$。



第十四题：

已知：ΔABC中，$AB=BC$，D是AC的中点，过D作$DE\perp BC$于E，连接AE，取DE中点F，连接BF。求证：$AE\perp BF$



简证：$Rt\triangle BDE\backsim Rt\triangle DCE$，$\dfrac{BD}{DE}=\dfrac{DC}{CE}$

$\dfrac{BD}{DF}=2\dfrac{BD}{DE}=2\dfrac{DC}{CE}=\dfrac{AC}{CE}$，$\triangle BDF\backsim\triangle ACE$

$\angle DBF=\angle CAE$，$\therefore A$、D、G、B四点共圆。

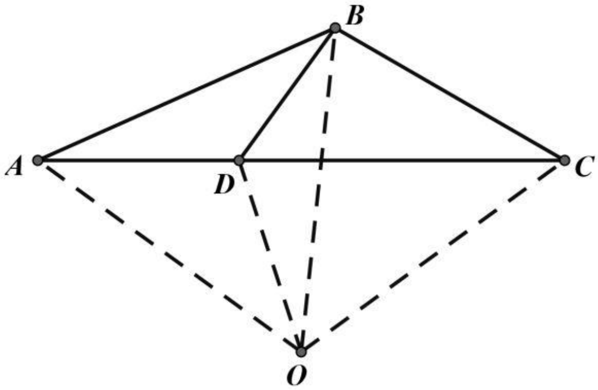
$\angle BGA=\angle BDA=90°$，$AE\perp BF$。

第十五题：

已知：ΔABC 中，$\angle A=24°$，$\angle C=30°$，D 为 AC 上一点，$AB=CD$，连接 BD。

求证：$AB\cdot BC=BD\cdot AC$

简证：以 AB 为边作正三角形（如图）



由$\angle C=30°$ 得 $OC=OB$

$\angle BOC=2\angle BAC=48°$

$\angle AOC=108°$，$\angle OCD=36°$

$OC=OD$，$\angle COD=72°$

$\angle BOD=24°$

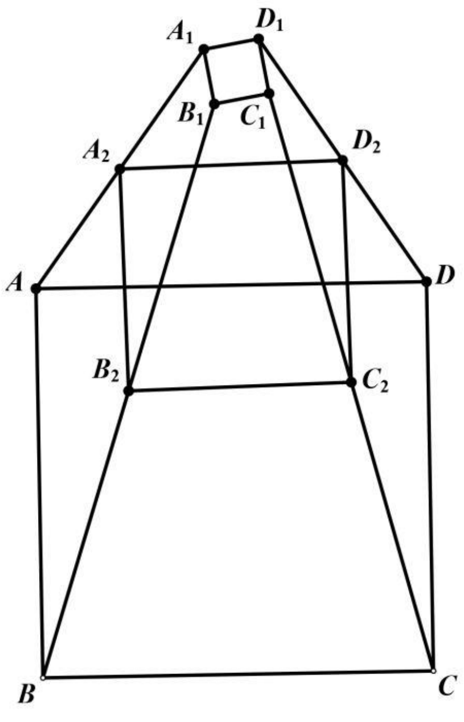
$\triangle ABD\cong\triangle OBD$，$\angle ABD=30°$

$\triangle ABD\backsim\triangle ACB$，$AB\cdot BC=BD\cdot AC$。

第十六题：

已知：$ABCD$ 与 $A_1B_1C_1D_1$ 均为正方形，A_2、B_2、C_2、D_2 分别为 AA_1、BB_1、CC_1、DD_1 的中点。求证：$A_2B_2C_2D_2$ 为正方形

简证：只要证明$\triangle A_2B_2C_2$是等腰直角三角形即可。



设 $B=0$，$C=1$，$A=i$，$B_1=b$，$C_1=c$（$b,c\in\mathbb{C}$），则

$$A_1=B_1+(C_1-B_1)i=b+(c-b)i$$

$$A_2=\frac{A+A_1}{2}=\frac{i+(c-b)i+b}{2}$$

$$B_2=\frac{B+B_1}{2}=\frac{b}{2}$$

$$C_2=\frac{C+C_1}{2}=\frac{c+1}{2}$$

$$\overrightarrow{B_2C_2}\cdot i=(C_2-B_2)i=\frac{c+1-b}{2}i$$

$$\overrightarrow{B_2A_2}=A_2-B_2=\frac{i+(c-b)i+b}{2}-\frac{b}{2}=\frac{c-b+1}{2}i$$

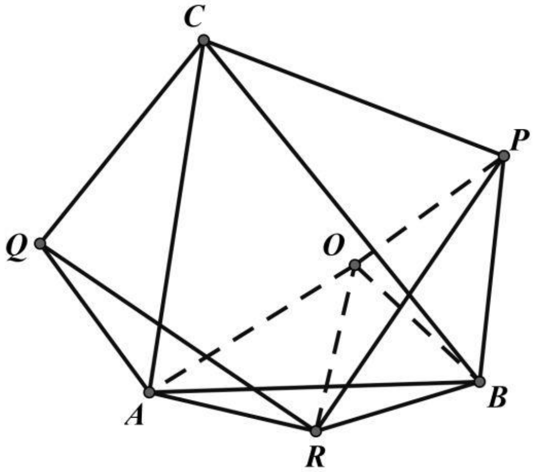
$\therefore B_2C_2\perp B_2A_2$，$|B_2C_2|=|B_2A_2|$

第十七题：

如图，在ΔABC三边上，向外做三角形ABR、BCP、CAQ，使$\angle CBP=\angle CAQ=45^\circ$，

$\angle BCP=\angle ACQ=30^\circ$，$\angle ABR=\angle BAR=15^\circ$。求证：$RQ$与$RP$垂直且相等。

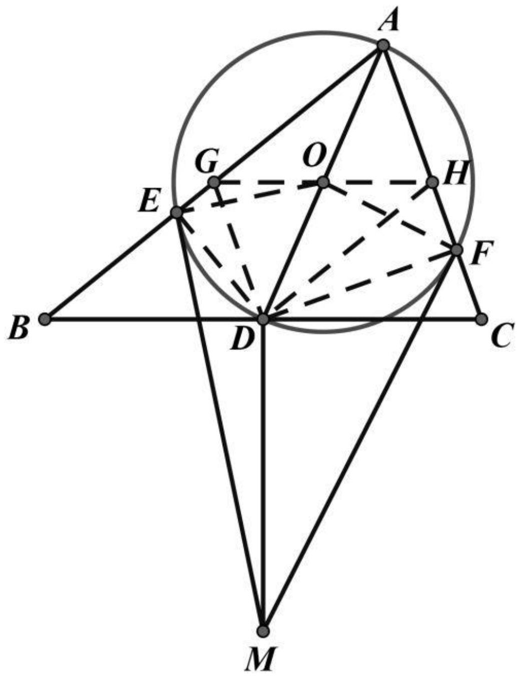
简证：以BR为边作正三角形（如图）
则$\triangle ORA$是等腰直角三角形，
$\triangle OAB\backsim\triangle PCB$，$\triangle OBP\backsim\triangle ABC$
$\triangle ORP\cong\triangle ARQ$
$\therefore RQ=RP$，$RQ\perp RP$。



第十八题：

如图，已知AD是$\odot O$的直径，D是BC中点，AB、AC交$\odot O$于点E、F，EM、FM是$\odot O$的切线，EM、FM相交于点M，连接DM。求证：$DM\perp BC$

简证：如图，过O作$GH\perp DM$，
$\triangle OGE\backsim\triangle MDE$，$\triangle OHF\backsim\triangle MDF$
$\therefore \dfrac{OG}{DM}=\dfrac{OE}{EM}=\dfrac{OF}{FM}=\dfrac{OH}{DM}$，$\therefore OG=OH$
$AGDH$是平行四边形，D是BC中点
$\therefore G$、H分别是AB、AC的中点
$\therefore GH\parallel BC$，$DM\perp BC$。



第十九题：

如图，三角形 ABC 内接于$\odot O$，两条高 AD、BE 交于点 H，连接 AO、OH。若 $AH=2$，$BD=3$，$CD=1$，求三角形 AOH 面积。

解：设 $HD=x$，F 是 BC 中点，$OF=d$

由 $Rt\triangle ACD\backsim Rt\triangle BHD$ 得

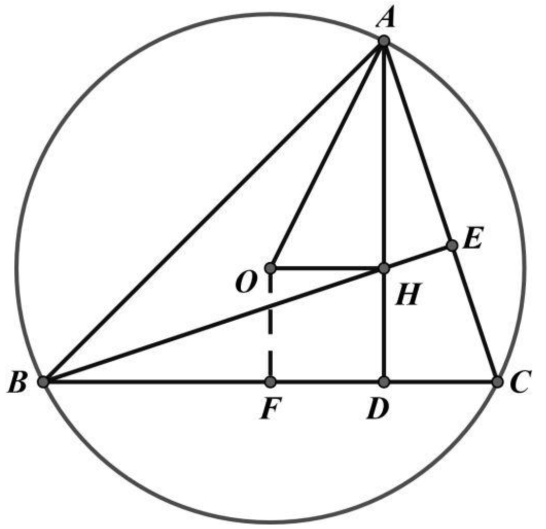
$\frac{2+x}{3}=\frac{1}{x}$，解得 $x=1$

$AD=3$，由 $OB=OA$ 得

$\sqrt{2^2+d^2}=\sqrt{(3-d)^2+1^2}$ 得 $d=1$

$\therefore OHDF$ 为正方形，$OH=1$

三角形 AOH 面积为 $\frac{1}{2}\times 2\times 1=1$。



第二十题：

如图，$\angle DAC=2x$，$\angle ACB=4x$，$\angle ABC=3x$，$AD=BC$，求$\angle BAD$。

解：延长 BC 至 E，使 $CE=BD$，则

$AD=DE$，设$\angle E=t$，则$\angle EAC=4x-t$，

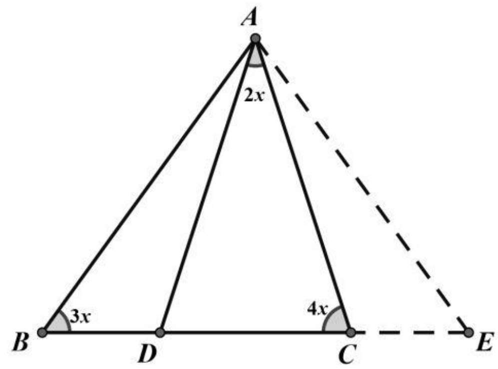
由 $AD=DE$ 得 $6x-t=t$，$t=3x$，

$\therefore AB=AE$，$\triangle ABD\cong\triangle AEC$

$\therefore AD=AC$，$\angle ADC=4x$，

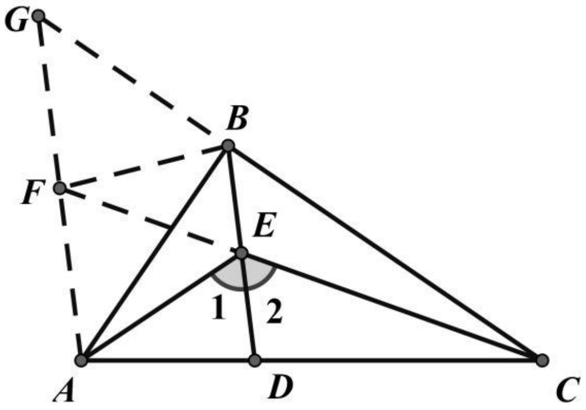
$\therefore 2x+4x+4x=180°$，$x=18°$

即$\angle BAD=18°$。



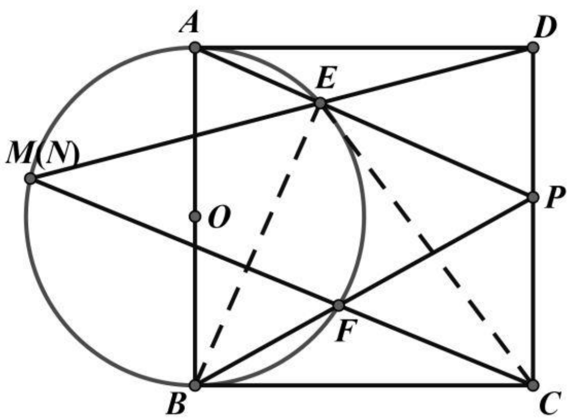
第二十一题：

已知：在$Rt\Delta ABC$中，$\angle ABC = 90°$，D为AC上一点，E是BD的中点，$\angle 1 = \angle 2$。
求证：$\angle ADB = 2\angle ABD$
简证：过A作BD平行线，交CE于F，
交CB于G，则
$FA=FG=FB$，
易得$\triangle ADE \cong \triangle FBE$
$\angle ADE=\angle FBE$
$\angle CBE=\angle BGF=\angle GBF$
$\angle FBA=\angle ABD$
$\therefore \angle ADB=2\angle ABD$。



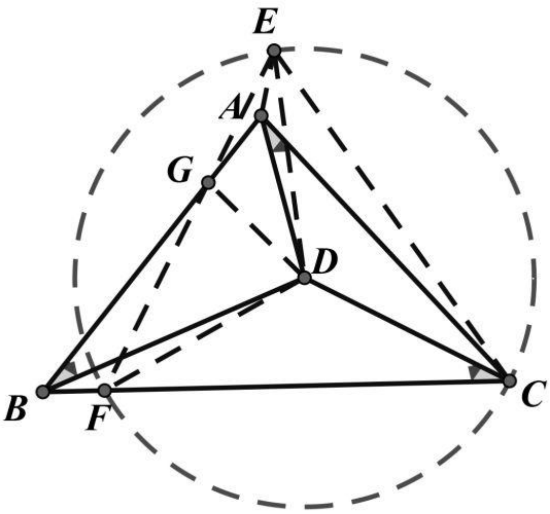
第二十二题：

已知正方形$ABCD$，P是CD上的一点，以AB为直径的圆$\odot O$交PA、PB于E、F，射线DE、CF交于点M。求证：点M在$\odot O$上。
证明：设DE与圆O交于N，
$DE \cdot DM = DA^2 = DC^2$
$\therefore \triangle DNC \backsim \triangle DCE$
$\therefore \angle DCE=\angle DNC$
B、C、P、E四点共圆，
$\therefore \angle DCE=\angle PBE=\angle FNE$
$\therefore \angle DNC=\angle FNE$
$\therefore N$、F、C三点共线，即DE、CF的交点为N，M与N重合。
故点M在$\odot O$上。



第二十三题：

已知，点 D 是 ΔABC 内一定点，且有 $\angle DAC=\angle DCB=\angle DBA=30°$ 。
求证：ΔABC 是正三角形。



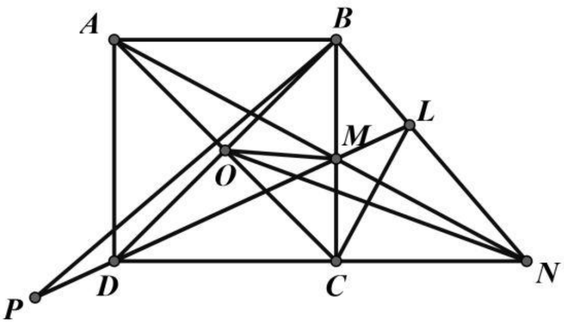
证明：显然当△ABC 中 $DA=DB=DC$ 时，△ABC 是正三角形。
当△ABC 中 DA、DB、DC 有两个相等时，易证△ABC 是正三角形。
下面证明△ABC 中 DA、DB、DC 互不相等是不可能的。
DA、DB、DC 互不相等，不妨设 DA 最小，DB 最大。以 D 为圆心，DC 为半径作圆，则 A 在圆 D 内部，B 在圆 D 外部。
圆 D 上取点 E，使得$\angle CDE=120°$，BC 与圆 D 交于点 F。则△CEF 是正三角形。
$\angle DAC=\angle DEC=30°$，有 D、A、E、C 四点共圆。
$\angle AED=\angle ACD<30°$，有点 A 在△FED 内部。
设 AB 与 EF 交于点 G，由$\angle GBD=\angle GFD=30°$ 知 D、G、B、F 四点共圆。
$\therefore\angle FGD=\angle FBD<\angle CFD=30°$，而$\angle FGD>\angle FED=30°$ 这是矛盾的。
故△ABC 是正三角形。

第二十四题：

如图，过正方形的顶点 A 的直线交 BC 、CD 于 M 、N ，DM 与 BN 交于点 L ，$BP \perp BN$ ，交 DM 于点 P 。求证：（1）$CL \perp MN$；（2）$\angle MON = \angle BPM$

证明：（1）设 C＝0，D＝－1，B＝i，

A＝－1＋i，M＝ai，N＝b（a，b∈□）



A、M、 N 共线，有 $\dfrac{A-M}{N-M}$∈□ ，

即 $\dfrac{-1+i-ai}{b-ai}$∈□ 得 $b=\dfrac{a}{1-a}$

$\overrightarrow{DM}=1+ai$ ，$\overrightarrow{BN}=\dfrac{a}{1-a}-i$ ，求得

L $=$

$\dfrac{-a^2+a}{a^2-a+1}+\dfrac{a}{a^2-a+1}i=\dfrac{a}{a^2-a+1}\left(1-a+i\right)$

，$\overrightarrow{AN}=\dfrac{a}{1-a}+1-i=\dfrac{1}{1-a}-i$ ，

$\dfrac{\overrightarrow{AN}}{\overrightarrow{CL}}=\dfrac{\dfrac{1}{1-a}-i}{\dfrac{a}{a^2-a+1}\left(1-a+i\right)}=\dfrac{a^2-a+1}{a^2-a}i$ ，$\dfrac{a^2-a+1}{a^2-a}$∈□ ∴$CL \perp MN$。

（2）$\overrightarrow{BN}\cdot i=1+\dfrac{a}{1-a}i$ ，O＝$-\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}i$ ，$\overrightarrow{ON}=\dfrac{a}{1-a}+\dfrac{1}{2}-\dfrac{1}{2}i=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1+a}{1-a}-i\right)$，

$$\overrightarrow{OM}=ai+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}i=\frac{1}{2}+\left(a-\frac{1}{2}\right)i$$

$$\overrightarrow{BN}\cdot i\cdot\overrightarrow{ON}=\left(1+\frac{a}{1-a}i\right)\frac{1}{2}\left(\frac{1+a}{1-a}-i\right)=\frac{1+a-2a^2+\left(3a-1\right)i}{2\left(1-a\right)^2}$$

$$\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{OM}=\left(1+ai\right)\left[\frac{1}{2}+\left(a-\frac{1}{2}\right)i\right]=\frac{1+a-2a^2+\left(3a-1\right)i}{2}$$

∴ $\dfrac{\overrightarrow{BN}\cdot i\cdot\overrightarrow{ON}}{\overrightarrow{DM}\cdot\overrightarrow{OM}}=\dfrac{1}{\left(1-a\right)^2}$ ，$\dfrac{\overrightarrow{BN}\cdot i}{\overrightarrow{DM}}=\dfrac{1}{\left(1-a\right)^2}\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{ON}}$ ，且 $\dfrac{1}{\left(1-a\right)^2}>0$

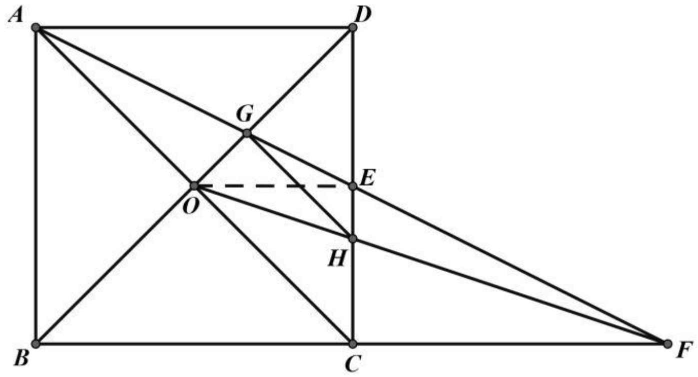
由 $BP \perp MN$ 得 $\angle MON$＝$\arg\left(\dfrac{\overrightarrow{BN}\cdot i}{\overrightarrow{DM}}\right)$，$\angle BPM$＝$\arg\left(\dfrac{\overrightarrow{OM}}{\overrightarrow{ON}}\right)$

∴$\angle MON$＝$\angle BPM$。

第二十五题：

已知：在正方形 $ABCD$ 中边长为 1，E 是 CD 上一点，AE 交 BD 于点 G，交 BC 的延长线于点 F，连接 OF，交 CD 于点 H，连接 GH。

求证：（1）当且仅当 E 为 CD 中点时，$OG+GH=AO$；（2）$S_{\Delta HCF}=\dfrac{CF-CH}{4}$。



证明：（1）E 为 CD 中点

$\Leftrightarrow OE /\!/ BC$，$AD=CF$

$\Leftrightarrow \dfrac{EH}{CH}=\dfrac{OE}{FC}=\dfrac{1}{2}$

$\Leftrightarrow \dfrac{DH}{CH}=\dfrac{2}{1}=\dfrac{AD}{FB}=\dfrac{DG}{BG}$

$\Leftrightarrow \dfrac{DH}{CH}=\dfrac{DG}{GO}$（$O$ 是 BD 中点）

$\Leftrightarrow GH /\!/ OC$

$\Leftrightarrow GH=GD$

$\Leftrightarrow OG+GH=OD=AO$

（2）取 BC 中点 K，则由 $Rt\triangle FCH \backsim Rt\triangle FKO$

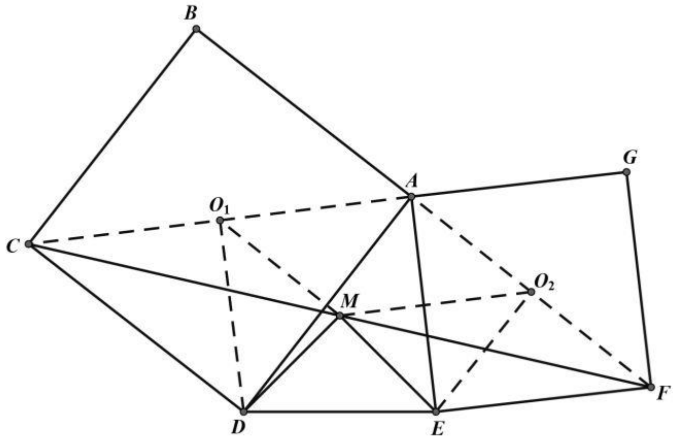
$\dfrac{CH}{KO}=\dfrac{CF}{KF}$，即 $\dfrac{CH}{\frac{1}{2}}=\dfrac{CF}{CF+\frac{1}{2}}$，展开得 $CF\cdot CH=\dfrac{CF-CH}{2}$

所以 $S_{\triangle HCF}=\dfrac{1}{2}CF\cdot CH=\dfrac{CF-CH}{4}$。

第二十六题：

已知：$ABCD$ 与 $AEFG$ 均为正方形，连接 CF，取 CF 的中点 M，连接 DM、ME。

求证：ΔMDE 为等腰直角三角形



证明：设 O_1、O_2 分别是正方形 $ABCD$、$AEFG$ 的中心，则

$O_1M /\!/ AF$，$O_2M /\!/ AC$

$O_1M=AO_2=O_2E$，

$O_2M=AO_1=O_1D$，

$\angle DO_1M=90^\circ-\angle AO_1M=90^\circ-\angle AO_2M=\angle MO_2E$，

$\therefore \triangle DO_1M\cong\triangle MO_2E$，$MD=EM$

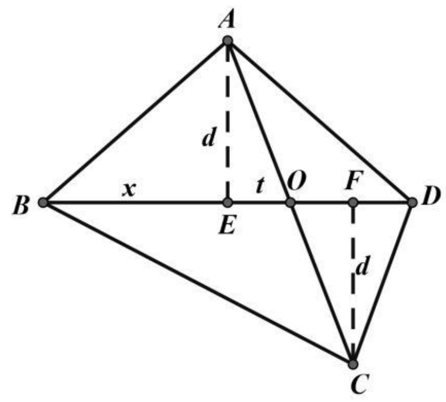
又 $O_1M\perp O_2E$，$O_2M\perp O_1D$，$\therefore MD\perp EM$

故 $\triangle MDE$ 为等腰三角形。

第二十七题：

四边形$ABCD$中，对角线AC、BD交于点O，且$AB=AD$，$AO=OC$。请你猜想$AB+BO$与$BC+OD$的数量关系，并证明你的结论。

解：过A作$AE\perp BD$于E，过C作$CF\perp BD$于F，



由$AO=OC$得$AECF$是平行四边形

又$AB=AD$得E是BD中点

设$BE=x$，$AE=d$，$OE=t$

$AB=\sqrt{x^2+d^2}$，$BC=\sqrt{(x+2t)^2+d^2}$

$BO=x+t$，$OD=x-t$（$x>t$）

当 $BO>OD$ 时，$t>0$，$AB+BO>BC+OD\Leftrightarrow \sqrt{x^2+d^2}+x+t>\sqrt{(x+2t)^2+d^2}+x-t$

$\Leftrightarrow \left(\sqrt{x^2+d^2}+2t\right)^2>\left(\sqrt{(x+2t)^2+d^2}\right)^2\Leftrightarrow 4t\sqrt{x^2+d^2}>4tx\Leftrightarrow d^2>0$

当$BO=OD$时$t=0$，$AB+BO=BC+OD$

由对称性，当$BO<OD$时$AB+BO<BC+OD$

综上，当$BO>OD$时，$AB+BO>BC+OD$；

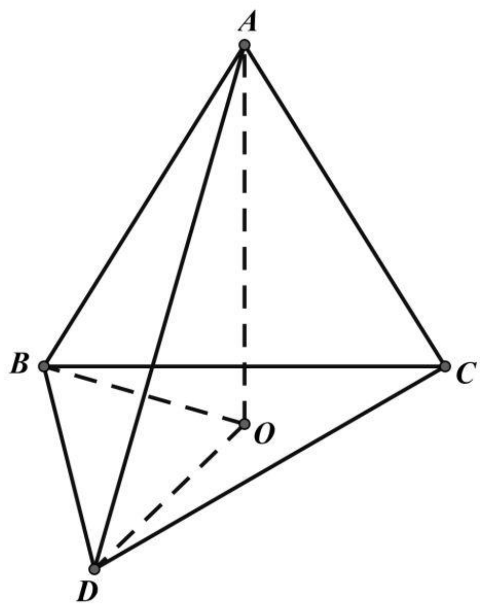
当$BO=OD$时，$AB+BO=BC+OD$；

当$BO<OD$时，$AB+BO<BC+OD$。

第二十八题：

已知：四边形$ABDC$中，$\angle ABC=\angle ACB=58°$，$\angle CAD=48°$，$\angle BCD=30°$，求$\angle BDA$的度数。

解：作$\triangle BCD$的外心O，则由$\angle BCD=30°$得$\triangle BDO$是等边三角形，



$\angle ABC=\angle ACB$，$OB=OC$

$\therefore \triangle ABO\cong\triangle ACO$，

AO平分$\angle BAC$，

$\therefore \angle BAO=\dfrac{1}{2}\angle BAC=32°$

而$\angle BAD=64°-48°=16°$

AD平分$\angle BAO$，又$BD=BO$

$\therefore \triangle ABD\cong\triangle AOD$（否则$\angle BDO>60°$），

$\therefore \angle BDA=30°$。

第二十九题：

在ΔABC中，D是AB的中点，$\angle DAC = 2\angle DCA$，$\angle DCB = 30°$，求$\angle B$的度数。

解：作CD的垂直平分线交AC于E

作$\triangle BCD$的外心O，则

$\angle DEA = 2\angle DCE = \angle DAE$，

$\therefore AD = DE$，又D是AB中点

$\therefore BE \perp AE$，又$\angle DCB = 30°$

$\triangle BDO$是等边三角形，于是$DO = BD$

$\angle BOA = 90°$，$\therefore A$、B、O、E四点共圆

若O与E重合（如上图），则$\angle ABC = 105°$；

若O与E不重合（如下图），则四边形$DOCE$是菱形，

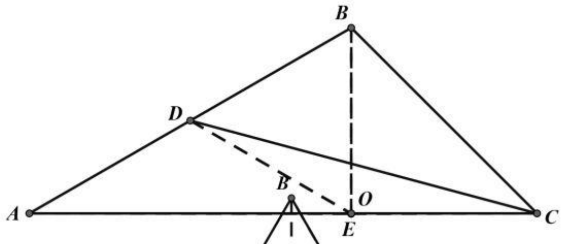
$\therefore DO // AC$，且$\angle DOA = 30°$

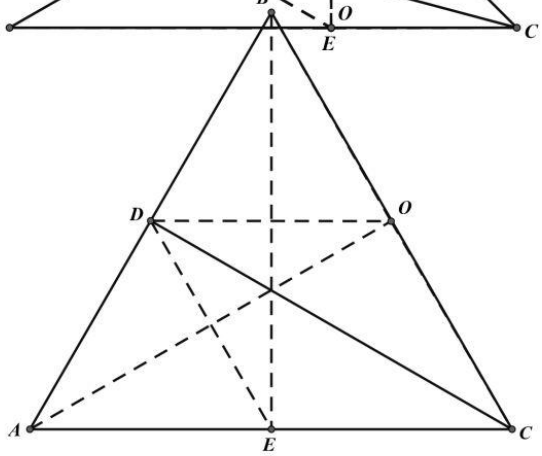
$\angle DAE = 60°$，$\triangle ADE$是等边三角形

$\therefore E$是AC中点，$\therefore \triangle ABC$是等边三角形

$\therefore \angle ABC = 60°$

故所求$\angle B = 105°$或$60°$。





第三十题：

在四边形$ABCD$中，$AD = CD$，$AC = BD$，$AB \perp AC$，求$\angle BEC$的度数。

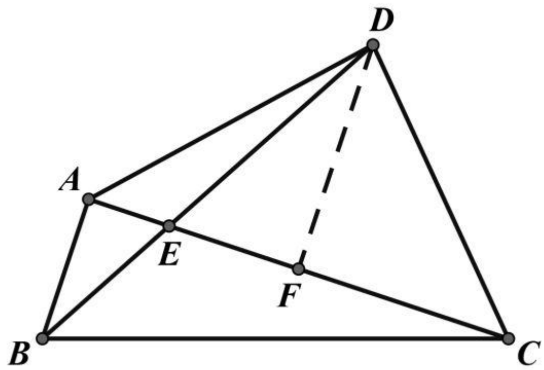
解：取AC中点F，则由$AD = CD$得

$DF \perp AC$，又$AB \perp AC$得

$Rt\triangle ABE \backsim Rt\triangle FDE$，$\therefore \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{FE}{DE}$

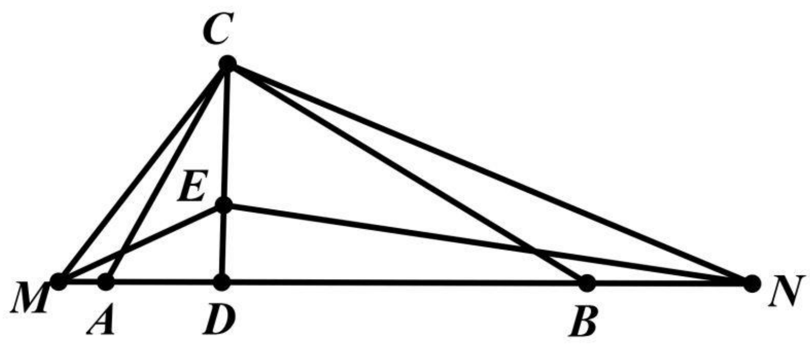
$\therefore \dfrac{AE}{BE} = \dfrac{FE}{DE} = \dfrac{AE+FE}{BE+DE} = \dfrac{AF}{BD} = \dfrac{1}{2}$

$\therefore \angle AEB = 60°$，$\angle BEC = 120°$。



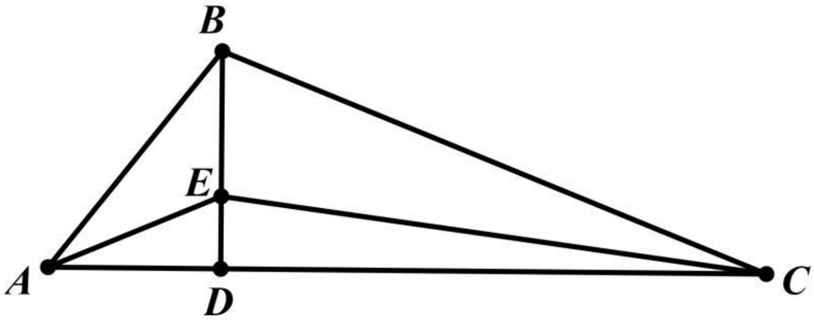
第三十一题：

在 $Rt\Delta ABC$ 中，$\angle ACB=90^\circ$，$\angle CAB=60^\circ$，$CD\perp AB$，M 、N 为直线 AB 上的两点，且 $\angle MCA=\angle NCB=8^\circ$，求 $\angle EMD$ 的度数。



第三十二题：

如图，ΔABC 中，$BD\perp AC$ 于 D，E 为 BD 上一点，且 $\angle ABD=38^\circ$，$\angle CBD=68^\circ$，$\angle BCE=14^\circ$，求 $\angle DAE$ 的度数。



解：$\tan 52^\circ=\dfrac{BD}{AD}$，$\tan\angle EAD=\dfrac{ED}{AD}$

$\tan 22^\circ=\dfrac{BD}{CD}$，$\tan 8^\circ=\dfrac{ED}{CD}$

$\therefore \tan\angle EAD=\dfrac{\tan 8^\circ\tan 52^\circ}{\tan 22^\circ}=\tan 24^\circ$

$\therefore \angle DEA=24^\circ$ 。

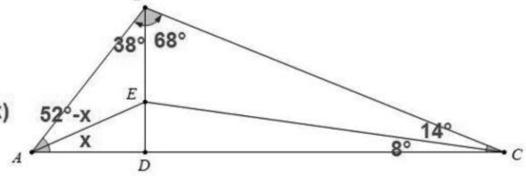
已知BD是△ABD边AC上高，∠ABD=38°,∠CBD=68°,∠BCE=14°,∠DCE=8°,
求∠CAE

证明　设∠DAE=x,

因为$\dfrac{BE}{DE}=\dfrac{AB\sin(52^\circ-x)}{AD\sin x}=\dfrac{BC\sin 14^\circ}{DC\sin 8^\circ}$,得到

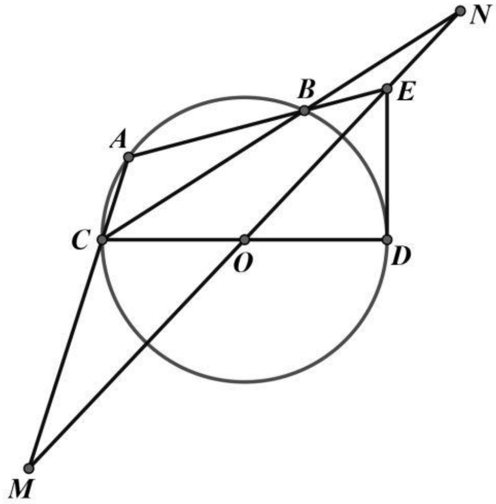
$\dfrac{\sin(52^\circ-x)}{\sin 38^\circ\sin x}=\dfrac{\sin 14^\circ}{\sin 68^\circ\sin 8^\circ}$,可知$\sin 68^\circ\sin 8^\circ\sin(52^\circ-x)$
$=\sin 38^\circ\sin x\sin 14^\circ$，进而$\sin 24^\circ\sin(52^\circ-x)$
$=4\sin 52^\circ\sin 38^\circ\sin x\sin 14^\circ=\sin 28^\circ\sin x$,于是

$\tan x=\dfrac{\sin 24^\circ\sin 52^\circ}{\sin 24^\circ\cos 52^\circ+\sin 28^\circ}=\tan 24^\circ$,所以∠DAE=x=24°



第三十三题：

CD为$\odot O$的直径，A、B为半圆上两点，DE为过点D的切线，AB交DE于E，连接OE，交CB于M，交AC于N。求证：$ON=OM$



证明：设 $O=0$，$D=1$，$C=-1$，$A=e^{i\alpha}$，$B=e^{i\beta}$

（$\alpha,\beta\in\mathbb{R}$），$E=1+ai$，由 A、B、E 共线得

$\dfrac{B-A}{E-A}\in\mathbb{R}$，即$\dfrac{\cos\beta+i\sin\beta-\cos\alpha-i\sin\alpha}{1+ai-\cos\alpha-i\sin\alpha}\in\mathbb{R}$

解得$a=\dfrac{\sin\alpha-\sin\beta-\sin(\alpha-\beta)}{\cos\alpha-\cos\beta}=\dfrac{2}{\cot\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\beta}{2}}$

令 $M=\lambda_1E$， $N=\lambda_2E$

由 A、C、M 共线得$\dfrac{A-C}{M-C}\in\mathbb{R}$，即

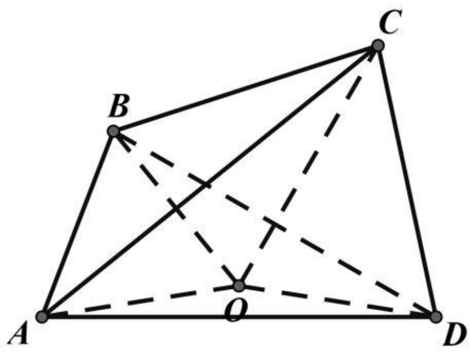
$\dfrac{\cos\alpha+1+i\sin\beta}{\lambda_1+1+\lambda_1ai}\in\mathbb{R}$，解得

$$\lambda_1=\frac{\sin\alpha}{a(1+\cos\alpha)-\sin\alpha}=\frac{1}{a\cot\dfrac{\alpha}{2}-1}=\frac{\cot\dfrac{\alpha}{2}+\cot\dfrac{\beta}{2}}{\cot\dfrac{\alpha}{2}-\cot\dfrac{\beta}{2}}$$

同理$\lambda_2=\dfrac{\cot\dfrac{\beta}{2}+\cot\dfrac{\alpha}{2}}{\cot\dfrac{\beta}{2}-\cot\dfrac{\alpha}{2}}$，故 $M+N=0$，$|M|=|N|$，即 $ON=OM$。

第三十四题：

如图，四边形$ABCD$中，$BC=CD$，$\angle BCA=21°$，$\angle CAD=39°$，$\angle CDA=78°$，求$\angle BAC$的度数。



解：作$\triangle ABD$的外心 O，则由 $BC=CD$，$OB=OD$ 知$\triangle CBO\cong\triangle CDO$，

易知$\angle BCD=84°$ 得$\angle CDB=48°$，$\angle BCO=42°$，

$\angle BDA=30°$

$\angle BOA=60°$，$\triangle BOA$ 是等边三角形，

$\angle ACO=\angle BCO-\angle BCA=21°$，

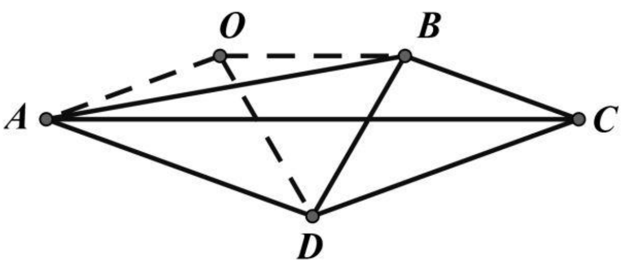
AC 平分$\angle BCO$，又 $AB=AO$

$\therefore\triangle ABC\cong\triangle AOC$（否则$\angle BAO>60°$），

$\therefore\angle BDA=30°$。

第三十五题：

如图，四边形 $ABCD$ 中，$AD=CD$，$\angle BAC=10^\circ$，$\angle ABD=50^\circ$，$\angle ACD=20^\circ$，求 $\angle CBD$ 的度数。



解：作△ABD 的外心 O，由∠BDA＝30°得∠BOD＝60°，△BOD 是等边三角形，

∠OBA＝10°，又∠BAC＝10°

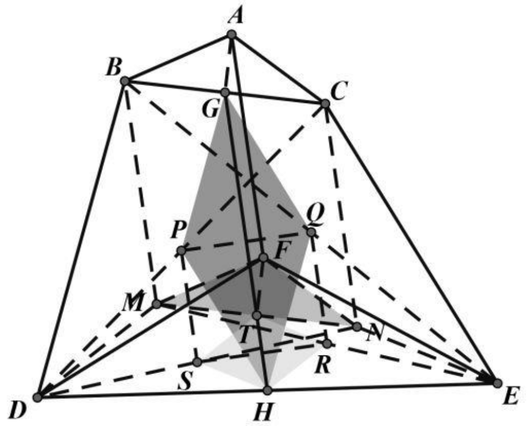
∴OB∥AC，又 AD＝DC，DO＝DB 知△DAO≌△DBC，

$AOBC$ 是等腰梯形，∠BCA＝∠OAC＝20°，∠CBD＝160°－60°＝100°

第三十六题：

如图，$BD=CE$，G、H 为 BC、DE 中点，$AB=AC$，$FD=FE$，$\angle BAC=\angle DFE$。

求证：$AF\,/\!/\,GH$



证明：将△ABC 平移至△FMN，T 是 MN 中点，P、Q、R、S 分别是 CD、BE、EM、DN 中点，则四边形 $ABMF$、$ACNF$、$AGTF$、$BCNM$ 都是平行四边形。

易得△FMD≌△FNE，MD＝NE

$$PH \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}CE \mathrel{\underset{=}{\parallel}} GQ,\quad PG \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}BD \mathrel{\underset{=}{\parallel}} HQ$$

又 BD＝CE 得四边形 $PHQG$ 是菱形，PQ⊥GH

同理 SR⊥TH，

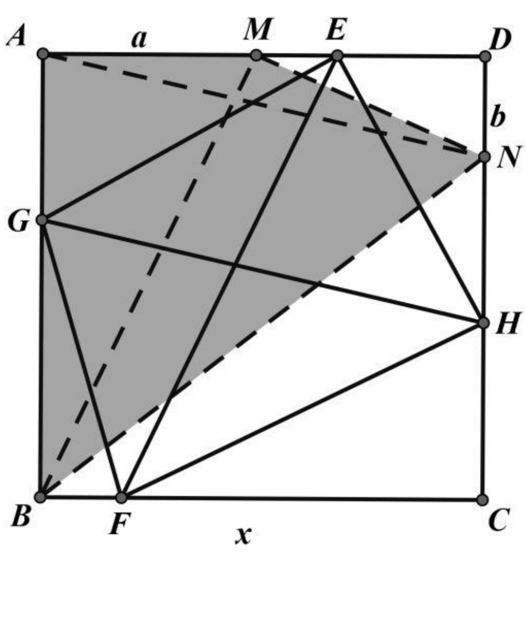
$$PS \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}CN \mathrel{\underset{=}{\parallel}} \frac{1}{2}BM \mathrel{\underset{=}{\parallel}} QR,\quad \therefore PQ\,/\!/\,SR,$$

∴T 在 GH 上，又 GT∥AF

∴AF∥GH。

第三十七题：

如图，在正方形 $ABCD$ 中，有任意四点 E、F、G、H，且 $EF=4$、$GH=3$，四边形 $EGFH$ 的面积为 5，求正方形 $ABCD$ 的面积。



解：如图，作 BM∥EF 交 AD 于 M，AN∥GH 交 CD 于 N，则 BM＝EF，AN＝GH

易知四边形 $EGFH$ 的面积等于四边形 $AMNB$ 的面积

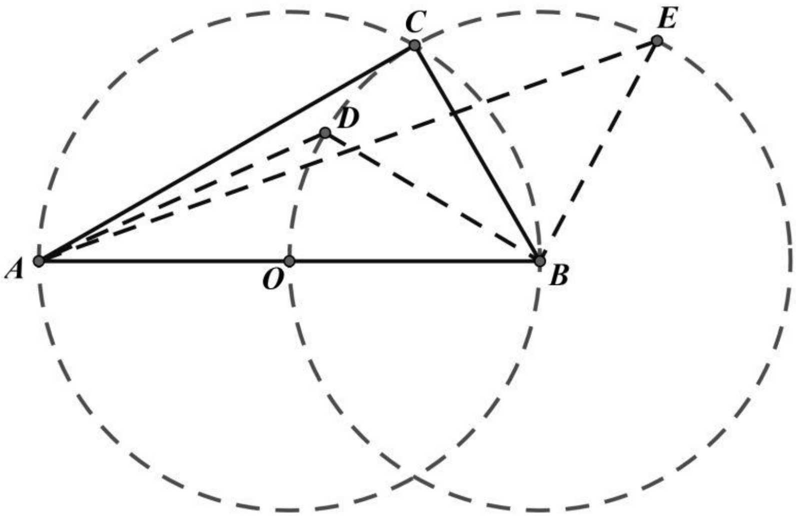
设 AM＝a，DN＝b，正方形边长为 x，则

$$\begin{cases} x^2-\dfrac{1}{2}b(x-a)-\dfrac{1}{2}x(x-b)=5 \\ \sqrt{x^2+a^2}=4 \\ \sqrt{x^2+b^2}=3 \end{cases}$$

解得 $x^2=\dfrac{44}{5}$。即正方形 ABCD 的面积是 $\dfrac{44}{5}$。

第三十八题：

已知$2\angle C = 3\angle B$，$2BC = AB$，求$\angle A$。



解：$\angle A=30°$。$\angle B=60°$，$\angle C=90°$ 显然符合已知条件。

由 $2BC=AB$，则 C 点在 B 为圆心，$\dfrac{1}{2}AB$ 为半径的圆上

$\angle C=90°$ 有 C 在以 AB 为直径的圆 O 上

取圆 B 上异于 C 的点，

若点在圆 O 内部（如点 D），则$\angle D>90°$，$\angle ABD<60°$，$2\angle D>3\angle ABD$ 不合题意；

若点在圆 O 外部（如点 E），则$\angle E<90°$，$\angle ABE>60°$，$2\angle E<3\angle ABE$ 不合题意。

故只有$\angle A=30°$。

第三十九题：

在ΔABC中，$\angle ABC=46°$，D是BC边上一点，$DC = AB$，$\angle DAB = 21°$，求$\angle C$。

解：如图，做平行四边形 $ABED$，

$\angle EDC=\angle BAC=46°$，

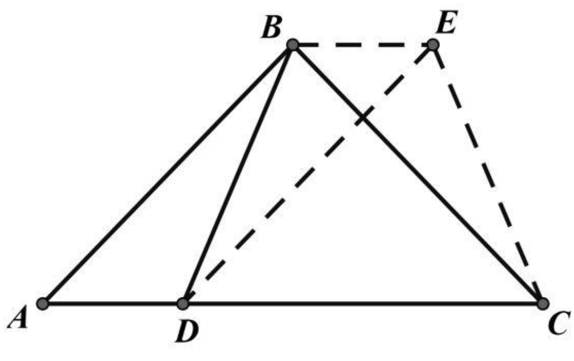
$\angle BDC=46°+21°=67°$

$DE=AB=DC$，$\therefore \angle DCE=67°$

$BECD$ 是等腰梯形

$\angle BCD=\angle EDC=46°$

即$\angle C=46°$。



第四十题：

在ΔABC中，$AB=AC$，D为BC边上一点，E为AD上一点，且满足$\angle BED=2\angle CED=\angle BAC$。求证：$BD=2CD$。

证明：在BE上作$BF=AE$，过F作$FG/\!/AD$与$\angle BED$的平分线交于点G，交BD于H。

由$\angle BED=\angle BAC$，得$\angle ABE=\angle CAE$，又$AB=AC$

$\triangle ABF\cong\triangle CAE$，$\therefore\angle AFE=\angle CED$，

$\angle BED=2\angle CED$，$\therefore\angle AFE=\angle FAE$，$AE=FE$

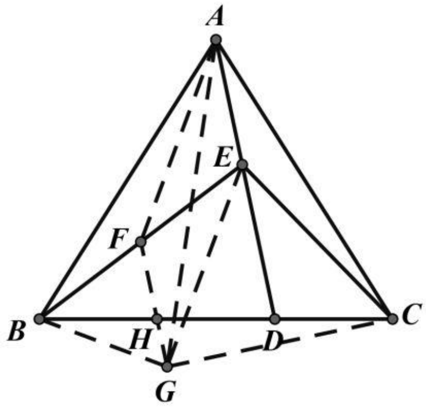
故F是BE中点。EG平分$\angle BED$，$\angle GED=\angle FAE$

$\therefore EG/\!/AF$，四边形$AFGE$是平行四边形。$EG=AF=CE$，

$\therefore\triangle CAE\cong\triangle GAE$。

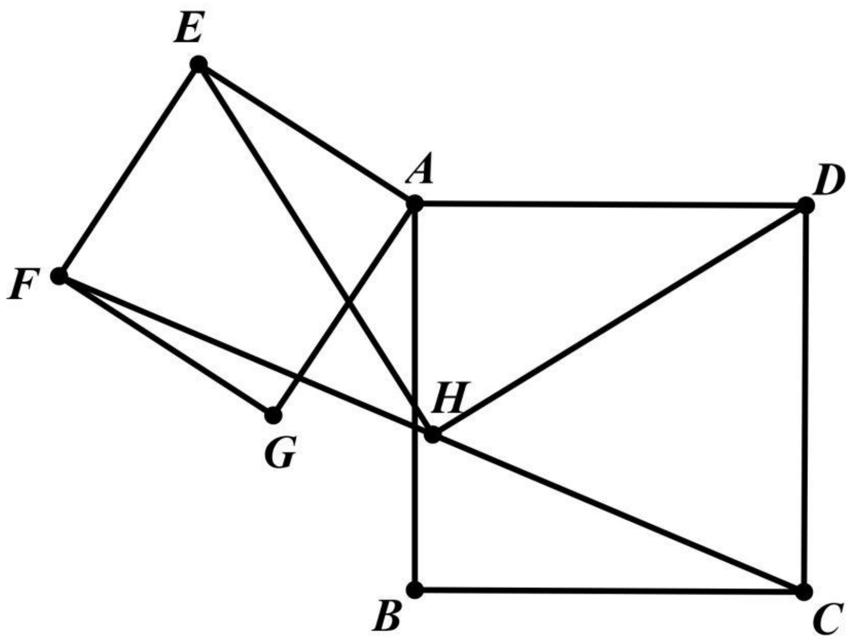
$\therefore AD$平分GC，又$FG/\!/AD$，D是HC中点。

又F是BE中点，得H是BD中点。故$BD=2DC$。



第四十一题：

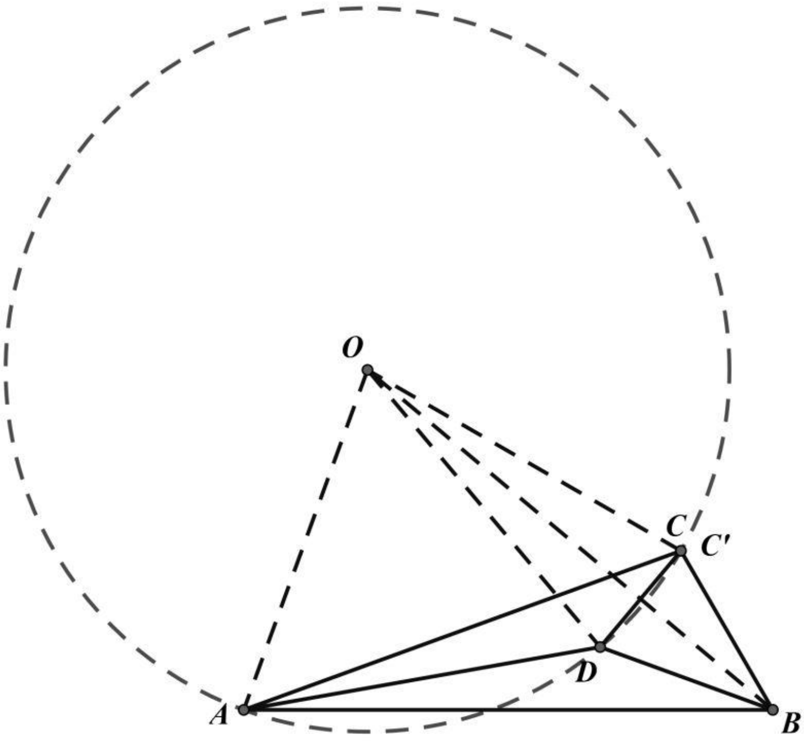
已知，FC是正方形$ABCD$和正方形$AEFG$上的点F、C的连线，点H是FC的中点，连接EH、DH。求证：$EH=DH$且$EH\perp DH$。



同二十六题

第四十二题：

已知：$\angle CAD = \angle DAB = 10°$，$\angle CBD = 40°$，$\angle DBA = 20°$，求证：$\angle CDB = 70°$



简证：作点 A 关于直线 BD 对称点 O，则$\triangle ADB \cong \triangle ODB$，$\angle ADB = 150°$

$\triangle AOD$ 是等边三角形，$\angle OBD = 20°$，$\angle DOB = 10°$，$\angle OBC = 40° - 20° = 20°$

以 O 为圆心 OA 为半径的圆 O 与直线 AC 交于点 C'，

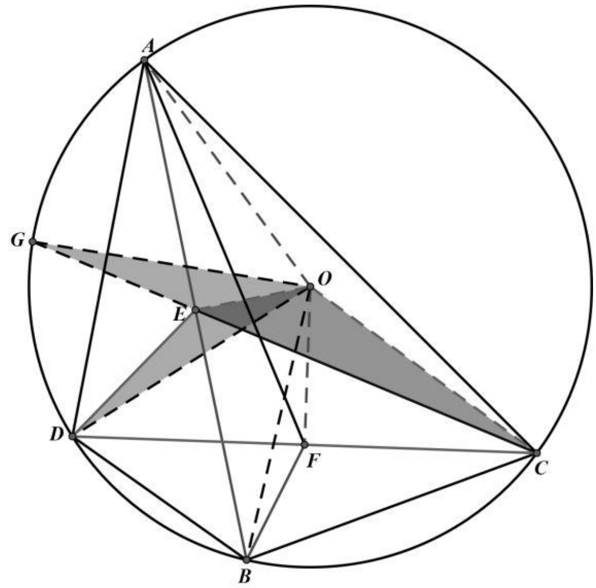
由$\angle CAD = 10°$，得$\angle DOC' = 20°$，$\angle BOC' = 10°$

$\therefore \triangle DOB \cong \triangle C'OB$，$\angle OBC' = \angle OBD = 20° = \angle OBC$

所以 C 与 C' 重合。$BC = BD$，$\angle CDB = 70°$。

第四十三题：

如图，E、F 分别是圆内接四边形 $ADBC$ 的对角线 AB、CD 的中点，若 $\angle DEB=\angle CEB$。



求证：$\angle AFD=\angle BFD$

证明：延长 CE 交圆 O 于 G 点，

由已知得 $OE\perp AB$，

$\angle DEB=\angle CEB$

$\Leftrightarrow \angle DEO=\angle GEO$

$\Leftrightarrow \triangle DOE\cong\triangle GOE$

$\Leftrightarrow \angle EDO=\angle EGO=\angle ECO$

$\Leftrightarrow$ D、E、O、C 四点共圆

$\Leftrightarrow \angle DCB=\frac{1}{2}\angle DOB=\frac{1}{2}(\angle BOE-\angle DOE)$

$=\frac{1}{2}(\angle AOE-\angle DOE)=\frac{1}{2}(\angle AOD-2\angle DOE)=\frac{1}{2}(2\angle ACD-2\angle DOE)=\angle ACD-\angle DCE=\angle ACE$

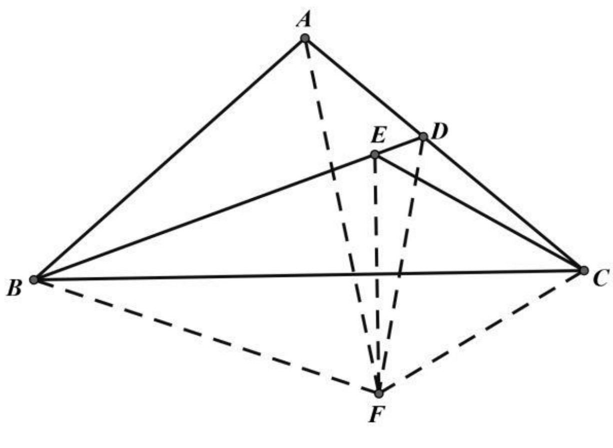
$\Leftrightarrow \angle ACD=\angle BCE\Leftrightarrow \frac{\sin\angle DCB}{\sin\angle ACD}=\frac{\sin\angle ACE}{\sin\angle BCE}$（易证）

$\Leftrightarrow \frac{BD}{AD}=\frac{BC}{AC}\Leftrightarrow BD\cdot AC=AD\cdot BC$

同理 $BD\cdot AC=AD\cdot BC\Leftrightarrow \angle AFD=\angle BFD$。

第四十四题：

已知：$AB=AC$，$\angle ADB=60°$，$\angle BCE=30°$。求证：$BA=BE$



证明：作点 E 关于 BC 对称点 F，则

$\triangle ECF$ 是等边三角形，又 $\angle ADB=60°$

$\therefore$ E、D、C、F 四点共圆，

$\angle ECD=\angle EFD$，$\angle FDB=60°$

$\angle BAC=180°-2\angle ACB$

$=180°-2(\angle ECD+30°)$

$=180°-(\angle EFD+\angle ECD+60°)$

$=180°-\angle EFD-\angle DCF=180°-\angle EFD-\angle BEF=180°-\angle BFD$

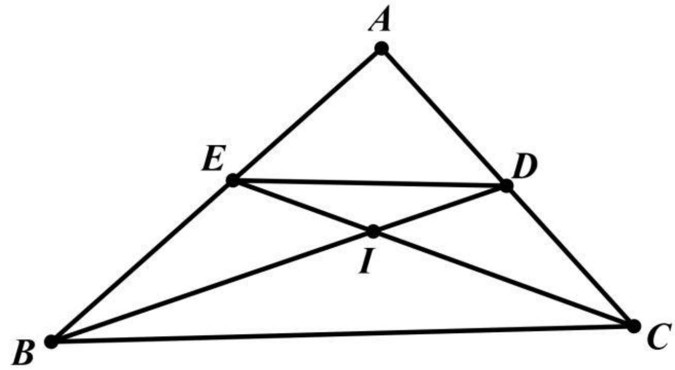
$\therefore$ A、D、F、B 四点共圆，

$\therefore \angle AFB=\angle ADB=60°$，$\angle FAB=\angle FDB=60°$

$\therefore \triangle ABF$ 是等边三角形，$BA=BF=BE$。

第四十五题：

已知：直角三角形 ABC，$\angle A$ 为直角，I 为内心，BD、CE 分别为两内角平分线。ΔIBC 的面积为 S。求四边形 $BCDE$ 的面积。



解：设△ABC 三边分别为 a、b、c，其中 $a^2=b^2+c^2$。

$$\frac{S_{\triangle DIC}}{S_{\triangle BIC}}=\frac{DI}{BI},\quad \frac{S_{\triangle BIE}}{S_{\triangle BIC}}=\frac{EI}{CI},\quad \frac{S_{\triangle DIE}}{S_{\triangle BIC}}=\frac{DI\cdot EI}{BI\cdot CI},$$

$$S_{\triangle DIC}=\frac{DI}{BI}S,\quad S_{\triangle BIE}=\frac{EI}{CI}S,\quad S_{\triangle DIE}=\frac{DI\cdot EI}{BI\cdot CI}S,$$

$$CD=\frac{ab}{a+c},\quad BE=\frac{ac}{a+b},\quad \frac{DI}{BI}=\frac{CD}{CB}=\frac{b}{a+c},\quad \frac{EI}{CI}=\frac{BE}{BC}=\frac{c}{a+b}$$

$$S_{\triangle DIC}+S_{\triangle BIE}+S_{\triangle DIE}=\left(\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}+\frac{b}{a+c}\cdot\frac{c}{a+b}\right)S$$

$$=\frac{b^2+c^2+ab+ac+bc}{(a+c)(a+b)}S=\frac{a^2+ab+ac+bc}{a^2+ab+ac+bc}S=S$$

∴四边形 $BCDE$ 的面积为 $2S$。

第四十六题：

$AB=AC=CD=DE$，且 $BE=BD$，求 $\angle EBD$ 的度数。

解：设 $\angle D=x$，则 $\angle ACB=2x$，

作平行四边形 $DEFC$，则 $DEFC$ 是菱形

由 $DC=AB$，$BD=BE$，得 $BC=AE$

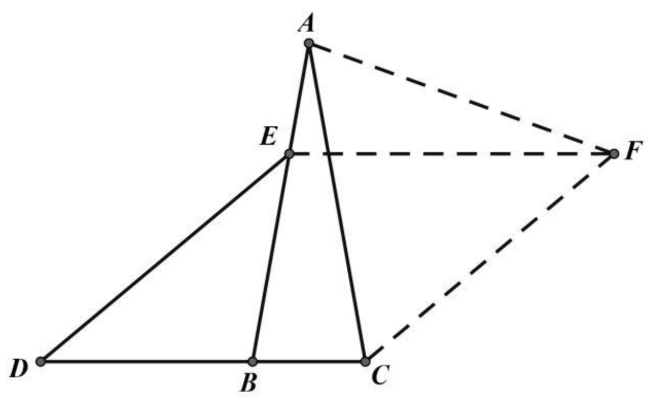
又 $\angle ABC=\angle AEF$，得△ABC≌△FEA

∴$FA=AC$，△ABC 是等边三角形

$\angle ACF=60^\circ$

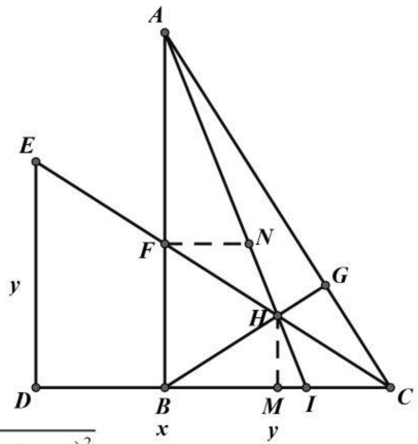
∴$x+x+60^\circ=180^\circ$，$x=40^\circ$，

∴$\angle EBD=180^\circ-2x=100^\circ$。



第四十七题：

如图，$\Delta ABC \cong \Delta CDE$，$\angle D=\angle ABC=90°$，点 B 在 CD 上，AB、CE 交于 F，过 B 作 $BG\perp AC$ 于 G，交 CE 于 H，连接 AH 并延长，交 CD 于 I，设 $AB=x$，$BC=y$。（$x>y$）求：（1）AH 的长（用 x，y 表示）；（2）$\dfrac{BC}{IC}$ 的值。



解：（1）取 BC 中点 M，易得∠CBG=∠ECD，HB=HC，

$$CG=\frac{BC^2}{CA}=\frac{y^2}{\sqrt{x^2+y^2}}，AG=\frac{AB^2}{AC}=\frac{x^2}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$CM=\frac{y}{2}，HM=\frac{y^2}{2x}$$

$$CH=\sqrt{CM^2+HM^2}=\sqrt{\left(\frac{y}{2}\right)^2+\left(\frac{y^2}{2x}\right)^2}=\frac{y}{2x}\sqrt{x^2+y^2}$$

$$HG=\sqrt{CH^2-CG^2}=\sqrt{\frac{y^2(x^2+y^2)}{4x^2}-\frac{y^4}{x^2+y^2}}=\frac{y\left(x^2-y^2\right)}{2x\sqrt{x^2+y^2}}$$

$$AH=\sqrt{AG^2+HG^2}=\sqrt{\frac{x^4}{x^2+y^2}+\frac{y^2\left(x^2-y^2\right)^2}{4x^2(x^2+y^2)}}=\frac{\sqrt{4x^6+y^2\left(x^2-y^2\right)^2}}{2x\sqrt{x^2+y^2}}$$

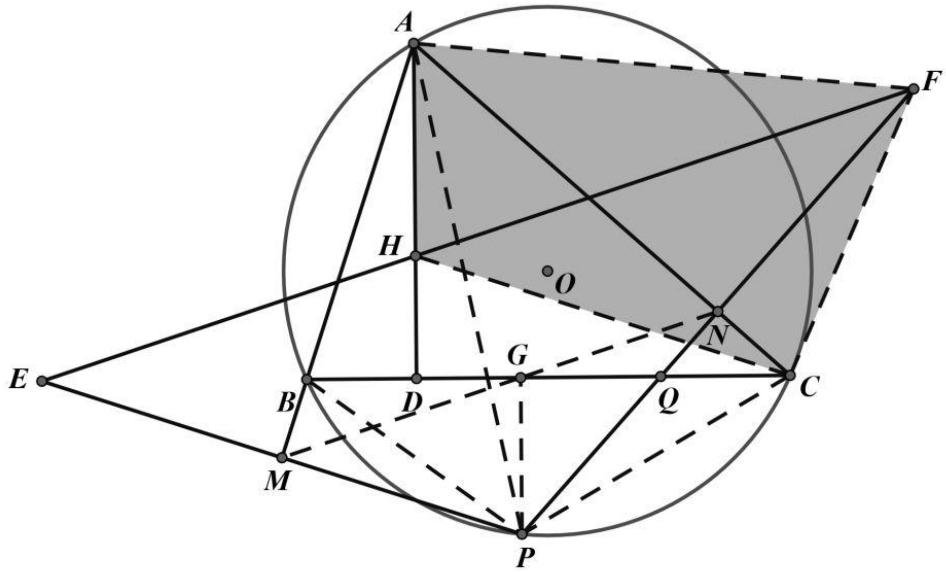
（2）作 $FN/\!/BC$，交 AI 于点 N，易得 H 是 FC 中点，$\dfrac{BF}{DE}=\dfrac{BC}{DC}$，$BF=\dfrac{y^2}{x}$

$\triangle FNH\cong\triangle CIH$，$\dfrac{FN}{BI}=\dfrac{AF}{AB}$，$\dfrac{IC}{BC-IC}=\dfrac{AF}{AB}$

$$\therefore \frac{BC}{IC}=\frac{AB+AF}{AF}=\frac{AB}{AB-BF}+1=\frac{x}{x-\frac{y^2}{x}}+1=\frac{2x^2-y^2}{x^2-y^2}。$$

第四十八题：

在ΔABC中，$AD\perp BC$，P是ΔABC外接圆O上一点，点P关于AB、AC的对称点为点E、F，连接EF与AD交于点H，求证：H是ΔABC的垂心。

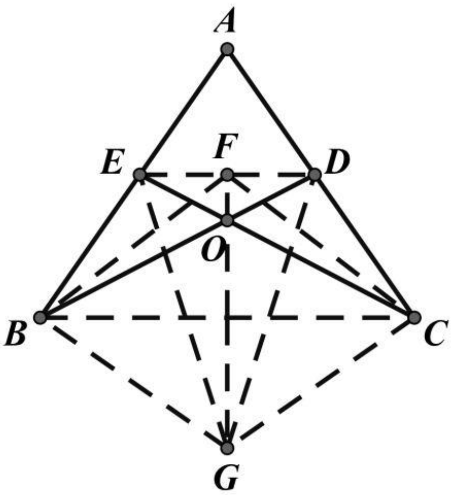


证明：作 $PG\perp BC$ 于 G，AB 交 PE 于 M，AC 交 PF 于 N，PF 交 BC 于 Q，则
M、B、G、P 四点共圆，N、C、G、P 四点共圆，
$\angle MBP=\angle ACP$，$\angle MGB=\angle MPB=\angle NPC=\angle NGC$，
$\therefore M$、G、N 三点共线。$MN/\!/EF$，A、D、Q、N 四点共圆，
$\angle DAC=\angle NQC=\angle NPC+\angle PCQ=\angle NFC+\angle PNG=\angle NFC+\angle HFP=\angle HFC$
$\therefore H$、A、F、C 四点共圆，$\angle DHC=\angle AFC=\angle APC=\angle ABC$
$\therefore \angle ABC+\angle BCH=\angle DHC+\angle BCH=90^{\circ}$
$\therefore CH\perp AB$，H 是 $\triangle ABC$ 的垂心。

第四十九题：

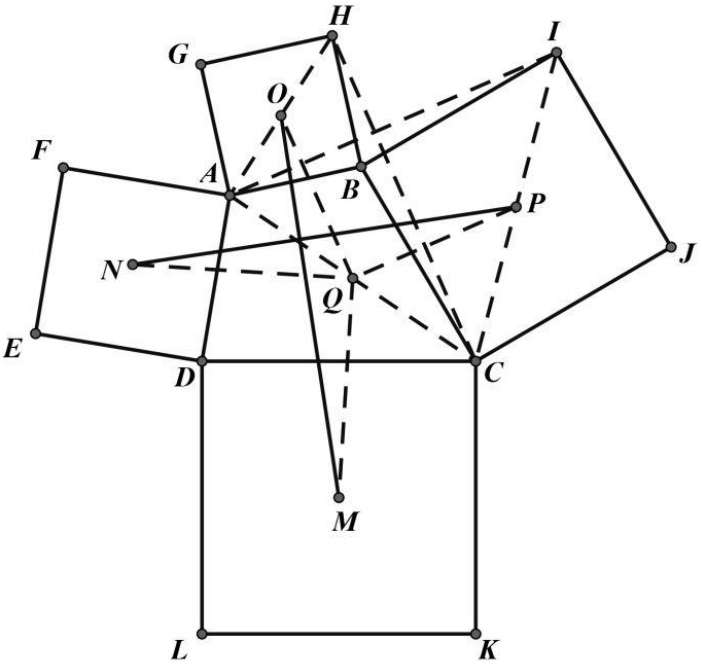
如图，点D、E分别在AC、AB上，BD与CE交于点O，$AD=AE$，$OC=OB$。
求证：$AC=AB$。（寻求直接证法）

证明：作 BC 的中垂线交 DE 于 F，交 $\triangle BEF$ 的外接圆于 G，则
$\angle ADE=\angle AED=\angle BGF=\angle CGF$
$\therefore C$、D、F、G 四点共圆
又 $\triangle BFG\cong\triangle CFG$，$\therefore$ 两圆为等圆
$\therefore \angle FEG=\angle FDG$，$\therefore GE=GD$
$\therefore \angle EBG=\angle DCG$，而 $\angle CBG=\angle BCG$，
$\therefore \angle EBC=\angle DCB$，
$\therefore AC=AB$。



第五十题：

以任意四边形四条边为基础向外做正方形，连接相对两正方形的中心。求证：这两条线段垂直且相等。



证明：如图。取 AC 中点 Q，易得$\triangle BHC$绕点 B 逆时针旋转 90° 即得$\triangle BAI$

因此$\triangle BHC\cong\triangle BAI$，且 $HC\perp AI$

所以 $OQ=QP$，且 $OQ\perp QP$，同理 $NQ=QM$，且 $NQ\perp QM$，

$\therefore\triangle OQM\cong\triangle PQN$，且 $OM\perp PN$

$OM=PN$，得证。

END

> *来源：文章内容源自网络，版权归作者所有，如有侵权请联系删除谢谢。*