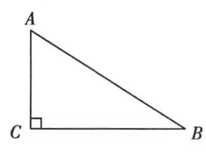
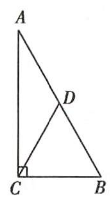
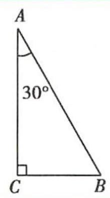
第20章 勾股定理

20.1 直角三角形与勾股定理

知识清单

- 知识1 直角三角形的性质 ★★★
- 知识2 勾股定理 ★★★
- 知识3 勾股定理的验证 ★★

知识1 直角三角形的性质 ★★★

表示方法	直角三角形可以用符号“Rt△”表示，如右图所示的直角三角形可以表示为“Rt△ABC”	
性质1	直角三角形的两个锐角互余，如右图所示，在△ABC中，$\angle C=90°$，则$\angle A+\angle B=90°$	
性质2	直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半	
	如右图所示，在△ABC中，$\angle ACB=90°$，CD为AB边上的中线，则$CD=\frac{1}{2}AB$	
性质3	在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半	
	如右图所示，在△ABC中，$\angle C=90°$，$\angle A=30°$，则$BC=\frac{1}{2}AB$	

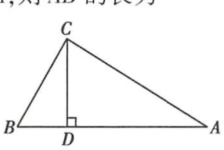
温馨提示

①由三角形内角和定理可推出性质1；由等腰三角形的判定(或矩形的性质)可推出性质2；由等边三角形的性质可推出性质3.

②性质2和3主要应用于计算和证明线段的倍分关系.

③不要认为有一个角等于30°，它所对的边就一定等于另一条边的一半，前提是在直角三角形中.

例1 如图，已知Rt△ABC中，$\angle ACB=90°$，CD是高，$\angle A=30°$，$BD=2$ cm，则AB的长为 ( )



A.4 cm　　B.6 cm　　C.8 cm　　D.10 cm

解析 ∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=30°$，

∴ $AB=2BC$，$\angle B=60°$，又CD是△ABC的高，

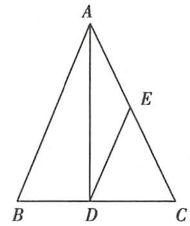
∴ $\angle BCD=30°$.

∵ $BD=2$ cm，∴ $BC=2BD=4$ cm，

∴ $AB=8$ cm，故选C.

答案 C

例2 如图，在△ABC中，$AB=AC=15$，AD平分$\angle BAC$，点E为AC的中点，连接DE，若△CDE的周长为21，则BC的长为 ( )



A.6　　B.9　　C.10　　D.12

解析 ∵ $AB=AC$，AD平分$\angle BAC$，

∴ $AD\perp BC$，$BD=DC$.

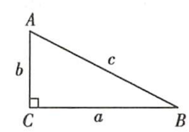
∵ 点E为AC的中点，∴ $DE=EC=\frac{1}{2}AC=7.5$.

∵ △CDE的周长为21，∴ $CD=21-7.5-7.5=6$，

∴ $BC=2CD=12$，故选D.

答案 D

知识2 勾股定理 ★★★

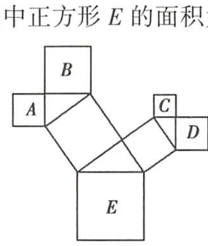
文字语言	符号语言	变式	图示
直角三角形两条直角边的平方和等于斜边的平方	如果直角三角形的两直角边长分别为a，b，斜边长为c，那么$a^2+b^2=c^2$	$a^2=c^2-b^2$，$b^2=c^2-a^2$	

温馨提示

①勾股定理应用的前提是这个三角形必须是直角三角形，解题时，只有在同一直角三角形中，才能利用勾股定理求第三边的长.

②在式子$a^2+b^2=c^2$中，a，b代表直角三角形的两条直角边的长，c代表斜边的长，它们之间的关系不能弄错.

例3 如图，图中所有的三角形都是直角三角形，所有的四边形都是正方形，已知正方形A，B，C，D的面积分别为12，16，9，12，那么图中正方形E的面积为 ( )



A.144　　B.147　　C.49　　D.148

解析 分别以直角三角形的三边为边向外作正方形，则以斜边为边的正方形的面积等于以直角边为边的两个正方形的面积之和，故 $S_E=S_A+S_B+S_C+S_D=12+16+9+12=49$.

答案 C

例 4 在△ABC 中，角 A,B,C 所对的边的长分别为 a,b,c，$\angle C=90°$.

(1)若 $a=6,b=8$，则 $c=$________；

(2)若 $a=5,c=13$，则 $b=$________；

(3)若 $c=34$，$a:b=8:15$，则 $a=$________，$b=$________.

解析 (1)已知直角三角形的两直角边长 a、b，则由 $c^2=a^2+b^2=6^2+8^2=100$，得 $c=10$.

(2)已知直角三角形的斜边长 c 和一条直角边长 a，则由 $b^2=c^2-a^2=13^2-5^2=144$，得 $b=12$.

(3)因为 $a:b=8:15$，

所以可设 $a=8k,b=15k(k>0)$.

又因为 $\angle C=90°,c=34$，

所以 $c^2=a^2+b^2$，

即 $34^2=(8k)^2+(15k)^2$.

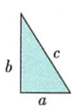
所以 $k=2$.

所以 $a=16,b=30$.

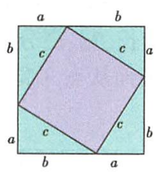
答案 (1)10 (2)12 (3)16;30

知识 3 勾股定理的验证

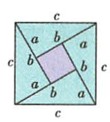
运用拼图的方式，即利用两种不同的方法计算同一个图形的面积来验证勾股定理.



图①



图②

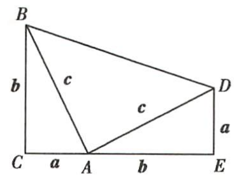


图③

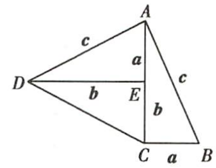
验证过程：图②是由 4 个全等的直角三角形(如图①)和 1 个以直角三角形的斜边 c 为边长的小正方形拼成的一个以$(a+b)$为边长的大正方形，则大正方形的面积可表示为$(a+b)^2$，又可表示为$\frac{1}{2}ab\cdot4+c^2$，所以$(a+b)^2=\frac{1}{2}ab\cdot4+c^2$，整理得 $a^2+b^2=c^2$.

用 4 个与图①完全相同的直角三角形，还可以拼成图③所示的图形，与上面的方法类似，也能证明勾股定理.

例 5 勾股定理神秘而美妙，它的证法多样，其巧妙各有不同，其中的“面积法”给了小聪灵感.他惊喜地发现：当两个全等的直角三角形如图①或图②所示的方式摆放时，都可以用“面积法”来证明勾股定理.请你利用图①或图②证明勾股定理(其中 $\angle DAB=90°$)，求证：$a^2+b^2=c^2$.



图①



图②

思路分析 证明勾股定理时，用几个全等的直角三角形拼成一个规则的图形，然后利用大图形的面积等于几个小图形的面积和，化简整理即可得到勾股定理表达式.

证明 利用图①进行证明：∵ $\angle DAB=90°$，点 C、A、E 在一条直线上，

$\therefore CE=a+b,S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}c^2$.

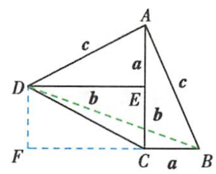
$\therefore S_{四边形BCED}=S_{\triangle ABC}+S_{\triangle ADE}+S_{\triangle ABD}=\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2$.

又 $S_{四边形BCED}=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$，

$\therefore \frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}ab+\frac{1}{2}c^2=\frac{1}{2}(a+b)(a+b)$，

$\therefore a^2+b^2=c^2$.

利用图②进行证明：如图，连接 DB，过点 D 作 BC 边上的高 DF，交 BC 的延长线于 F，则 $DF=EC=b-a$.



$\because S_{四边形ADCB}=S_{\triangle ACD}+S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab$，

$S_{四边形ADCB}=S_{\triangle ADB}+S_{\triangle DCB}=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$，

$\therefore \frac{1}{2}b^2+\frac{1}{2}ab=\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{2}a(b-a)$，

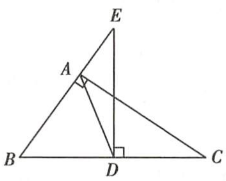
$\therefore a^2+b^2=c^2$.

方法清单

方法1 利用直角三角形的性质进行解题的方法

因为直角三角形斜边上的中线等于斜边的一半，所以我们在图形中至少可以找到三条相等的线段，进而可以运用等腰三角形的性质解决问题.在解决线段倍、分关系的问题时，我们要充分利用直角三角形的这一性质求解.

例1 如图，在 Rt△ABC 中，$\angle BAC=90°$，AD 是 BC 边上的中线，$ED\perp BC$，交 BA 的延长线于点 E，若 $\angle E=35°$，求 $\angle BDA$ 的度数.

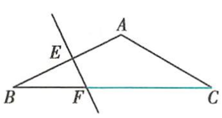


解析 $\because \angle E=35°$，$ED\perp BC$，$\therefore \angle B=55°$.$\because \angle BAC=90°$，AD 是 BC 边上的中线，$\therefore DA=DB$，$\therefore \angle DAB=\angle B=55°$，$\therefore \angle BDA=180°-55°-55°=70°$.

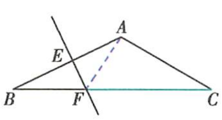
方法2 构造含30°角的直角三角形进行解题的方法

在直角三角形中，30°角所对的直角边等于斜边的一半.这个性质常常用于计算三角形的边长，也是证明一边(30°角所对的直角边)等于另一边(斜边)的一半的重要依据.当已知的条件或结论倾向于该性质时，我们可运用转化思想，将线段或角转化，构造直角三角形，从而将陌生的问题转化为熟悉的问题.

例2 如图，已知△ABC 中，$AB=AC$，$\angle BAC=120°$，E、F 分别在 AB、BC 上，且 EF 所在直线为 AB 的垂直平分线，$BF=5$ cm，求 CF 的长.



解析 连接 AF.



$\because AB=AC$，$\angle BAC=120°$，

$\therefore \angle B=\angle C=30°$.

$\because EF$ 所在直线为 AB 的垂直平分线，$\therefore AF=BF=5$ cm.

$\therefore \angle BAF=\angle B=30°$，$\therefore \angle FAC=90°$.

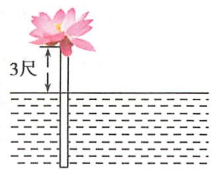
在 Rt△AFC 中，$\angle FAC=90°$，$\angle C=30°$，

$\therefore FC=2AF$，$\therefore CF=10$ cm.

方法3 构造直角三角形解决实际问题的方法

在用勾股定理解决实际问题时，首先应该由实际问题抽象出数学图形，即画出符合题意的几何图形——直角三角形，然后根据勾股定理求解.

例3 如图，在波平如镜的湖面上，有一朵盛开的美丽的莲花，它高出水面3尺，突然一阵大风吹过，莲花被吹至一边，花朵刚好齐及水面，若莲花(忽略莲花的大小)移动的水平距离为6尺，则水深是 ( )



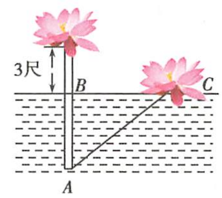
A.3.5尺 B.4尺 C.4.5尺 D.5尺

解析 设水深为 h 尺，在Rt△ABC中，$AB=h$，$AC=h+3$，$BC=6$.

由勾股定理得 $AC^2=AB^2+BC^2$，

即 $(h+3)^2=h^2+6^2$，

解得 $h=4.5$.所以水深为4.5尺.故选C.

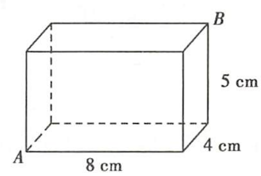


答案 C

方法4 利用勾股定理解决几何体表面最短距离的方法

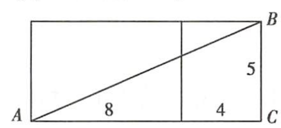
几何体表面最短距离的问题，通常都是将几何体表面展开，变为平面展开图中两点之间的最短距离问题，从中抽象出直角三角形，正确运用勾股定理进行解题.

例4 如图，长方体的长、宽、高分别为 8 cm，4 cm，5 cm.一只蚂蚁沿着长方体的表面从点 A 爬到点 B，则蚂蚁爬行的最短路径的长是 ( )



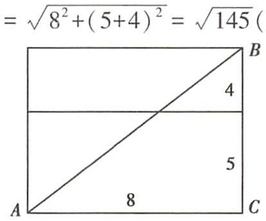
A.17 cm B.13 cm C. $\sqrt{145}$ cm D. $\sqrt{170}$ cm

解析 如图(1)，$AB=\sqrt{(8+4)^2+5^2}=13$(cm).



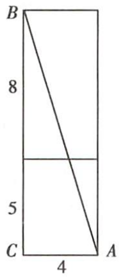
图(1)

如图(2)，$AB=\sqrt{8^2+(5+4)^2}=\sqrt{145}$(cm).



图(2)

如图(3),$AB=\sqrt{4^2+(5+8)^2}=\sqrt{185}$(cm).



图(3)

$\because\ \sqrt{145}<13<\sqrt{185}$,

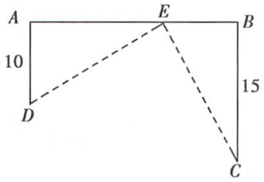
$\therefore$ 最短距离为 $\sqrt{145}$ cm.故选 C.

答案 C

方法 5 直接利用勾股定理解决实际问题的方法

对于实际问题,要分析问题的情境,从已知信息中提炼出几何图形,构造直角三角形,由勾股定理计算出所求线段的长.

例 5 如图,笔直的铁路上 A、B 两点相距 25 km,C、D 为两村庄,$DA=10$ km,$CB=15$ km,$DA\perp AB$ 于 A,$CB\perp AB$ 于 B,现要在 AB 上建一个中转站 E,使得 C、D 两村到 E 站的距离相等.求 E 应建在距 A 多远处.



解析 设 $AE=x$,则 $BE=25-x$.

在 Rt$\triangle ADE$ 中,由勾股定理得 $DE^2=AD^2+AE^2=10^2+x^2$.

在 Rt$\triangle BCE$ 中,由勾股定理得 $CE^2=BC^2+BE^2=15^2+(25-x)^2$.

由题意可知 $DE=CE$,

所以 $10^2+x^2=15^2+(25-x)^2$,

解得 $x=15$.

故 E 应建在距 A 点 15 km 处.

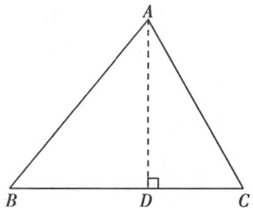
方法 6 "构造直角三角形"的方法

勾股定理是解决三角形中线段问题最有效的方法之一,若图中没有含特征线段的直角三角形,则需添加辅助线,构造满足条件的直角三角形.

例 6 在$\triangle ABC$ 中,$AB=15$,$BC=14$,$AC=13$,求$\triangle ABC$ 的面积.

某学习小组经过合作交流,给出了下面的解题思路,请你按照他们的解题思路完成解答过程.

作 $AD\perp BC$ 于 D,设 $BD=x$,用含 x 的代数式表示 $CD\to$根据勾股定理,将 AD 作为"桥梁",建立方程求出 $x\to$利用勾股定理求出 AD 的长,再计算三角形的面积.



解析 设 $BD=x$,则 $CD=14-x$.

由勾股定理得 $AD^2=AB^2-BD^2=15^2-x^2$,

$AD^2=AC^2-CD^2=13^2-(14-x)^2$,

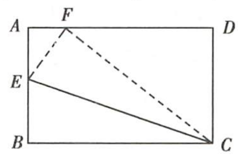
$\therefore 15^2-x^2=13^2-(14-x)^2$,解得 $x=9$,$\therefore AD=12$,

$\therefore S_{\triangle ABC}=\dfrac{1}{2}BC\cdot AD=\dfrac{1}{2}\times14\times12=84$.

方法 7 利用勾股定理和方程思想解决与"翻折"相关的问题的方法

解决"翻折"问题时,首先要弄清翻折前后的边、角的对应情况,将待求线段或角与已知线段、角归结到一起,尤其是求线段长度时,常常利用勾股定理直接求出未知线段的长或通过勾股定理列方程使问题得以解决.

例 7 如图所示,折叠长方形 $ABCD$ 的一边 BC,使点 B 落在 AD 边的 F 处,已知 $AB=3$,$BC=5$,求 EF 的长.



思路分析 由折叠知$\triangle BEC\cong\triangle FEC$,则 $FC=BC=5$,$EF=BE$.在 Rt$\triangle FDC$ 中,可求出 DF 的长,进而求得 AF 的长.设 $EF=x$,则 $AE=AB-BE=AB-EF=3-x$,在 Rt$\triangle AEF$ 中利用勾股定理列方程即可求解.

解析 由题意得 Rt$\triangle FEC\cong$Rt$\triangle BEC$,

$\therefore EF=BE$,$FC=BC=5$.

在 Rt$\triangle CDF$ 中,$CD=AB=3$,

$\therefore DF=\sqrt{CF^2-CD^2}=\sqrt{5^2-3^2}=4$,$\therefore AF=1$.

设 $EF=x$,则 $EB=x$,$AE=3-x$.

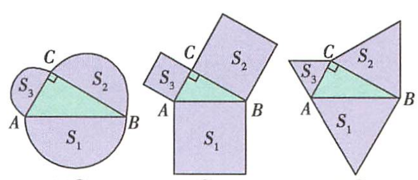
在 Rt$\triangle AEF$ 中,$EF^2=AE^2+AF^2$,

$\therefore x^2=(3-x)^2+1^2$,解得 $x=\dfrac{5}{3}$,即 EF 的长为$\dfrac{5}{3}$.

方法 8 利用勾股定理解决有关几何图形面积问题的方法

勾股定理是中学阶段的一个重要定理,迄今为止有多种证明勾股定理的方法,其中大部分是用面积作为桥梁来证明的.因此,勾股定理与面积有密切关系,勾股定理还是连接几何与代数的纽带.

例 8 如图①,分别以直角三角形 ABC 三边为直径向外作三个半圆,其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示,则不难证明 $S_1=S_2+S_3$.



图① 图② 图③

(1)如图②,分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个正方形,其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示,那么 S_1、S_2、S_3 之间有什么关系?(不必证明)

(2)如图③,分别以直角三角形 ABC 三边为边向外作三个正三角形,其面积分别用 S_1、S_2、S_3 表示,请你确定 S_1、S_2、S_3 之间的关系并加以证明.

解析 (1)$S_1=S_2+S_3$.

(2)$S_1=S_2+S_3$.证明如下:

设直角三角形 ABC 的三边 BC、CA、AB 的长分别为 a、b、c,则 $c^2=a^2+b^2$.

易得 $S_1=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2$,$S_2=\frac{\sqrt{3}}{4}a^2$,$S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}b^2$,

$\therefore S_2+S_3=\frac{\sqrt{3}}{4}(a^2+b^2)=\frac{\sqrt{3}}{4}c^2=S_1$.

20.2 勾股定理的逆定理

知识清单

知识1 勾股数

知识2 勾股定理的逆定理

知识3 勾股定理与勾股定理的逆定理的区别与联系

知识1 勾股数

	定义	举例
勾股数	能够构成直角三角形三条边长的三个正整数,称为勾股数	常见的勾股数有:3,4,5;5,12,13;8,15,17;7,24,25;9,40,41 等
判断方法	(1)确定是三个正整数 a,b,c; (2)确定最大数 c; (3)判断较小两数的平方和 a^2+b^2 是否等于 c^2	

温馨提示

①3、4、5 是勾股数,又是三个连续整数,但并不是所有三个连续整数都是勾股数.

②每组勾股数的相同整数倍也是勾股数.

③对于 $n^2-1,2n,n^2+1$(n 为大于 1 的正整数),任取一个合适的值,即可得到一组勾股数.

知识2 勾股定理的逆定理

如果三角形两边的平方和等于第三边的平方,那么该三角形是直角三角形.即△ABC 的三边长分别是 a,b,c,若 $a^2+b^2=c^2$,则△ABC 是直角三角形,∠C 为直角.

温馨提示

①勾股定理的逆定理是判定一个三角形是直角三角形的一种理论依据,它通过数形结合来确定三角形的形状.在运用这一定理时,可用两短边边长的平方和 a^2+b^2 与长边边长的平方 c^2 进行比较:若 $a^2+b^2=c^2$,则此三角形为直角三角形;若 $a^2+b^2>c^2$,则此三角形为锐角三角形;若 $a^2+b^2<c^2$,则此三角形为钝角三角形.

②定理中 a,b,c 及 $a^2+b^2=c^2$ 只是一种表达形式,若 $a^2+c^2=b^2$,则此三角形也是直角三角形,这时 b 为斜边长.

③勾股定理的逆定理在用文字叙述时不能说成"当斜边的平方等于两条直角边的平方和时,这个三角形是直角三角形".

例 已知一个三角形的三边长分别为$\sqrt{2}$,$\sqrt{6}$,2,则这个三角形的面积为 ( )

A.$2\sqrt{2}$ B.$2\sqrt{3}$

C.$\sqrt{2}$ D.$\sqrt{3}$

解析 $\because 2^2+(\sqrt{2})^2=6=(\sqrt{6})^2$,

∴ 该三角形是直角三角形,

∴ 这个三角形的面积是$\frac{1}{2}\times2\times\sqrt{2}=\sqrt{2}$.

故选 C.

答案 **C**

知识3 勾股定理与勾股定理的逆定理的区别与联系

	勾股定理	勾股定理的逆定理
	二者的条件和结论相反	
区别	1.勾股定理是以"一个直角三角形"为条件,进而得到这个直角三角形三边的数量关系,即 $a^2+b^2=c^2$; 2.勾股定理是直角三角形的性质	1.勾股定理的逆定理是以"一个三角形的三边满足 $a^2+b^2=c^2$"为条件,进而得到这个三角形是直角三角形; 2.勾股定理的逆定理是直角三角形的判定方法
联系	二者都与三角形的三边有关且都包含等式 $a^2+b^2=c^2$;二者都与直角三角形有关;二者是互逆定理	

方法1 运用勾股定理的逆定理判断三角形形状的方法

运用勾股定理的逆定理判定一个三角形是直角三角形的方法:(1)先确定最长边,算出最长边的平方;(2)计算另两边的平方和;(3)比较最长边的平方与另两边的平方和是否相等,若相等,则此三角形为直角三角形.

例1 判断满足下列条件的三角形是不是直角三角形.

(1)$\triangle ABC$ 中,$AB=12$,$BC=16$,$AC=20$;

(2)一个三角形三边长之比为 $5:12:13$;

(3)一个三角形三边长 a,b,c 满足 $a=3,b=7,c=9$.

思路分析 (1)(3)可直接利用勾股定理的逆定理判断;(2)中是三边长的比,可以设三边长分别是 $5x,12x,13x(x>0)$,再判断.

解析 (1)$\triangle ABC$ 中,$AC^2=20^2=400$,$AB^2+BC^2=12^2+16^2=144+256=400$,

所以 $AC^2=AB^2+BC^2$,所以$\triangle ABC$ 是直角三角形.

(2)根据题意可设三边长分别为 $5x,12x,13x(x>0)$.

因为$(13x)^2=169x^2$,

$(5x)^2+(12x)^2=25x^2+144x^2=169x^2$,

所以$(13x)^2=(5x)^2+(12x)^2$,

所以该三角形是直角三角形.

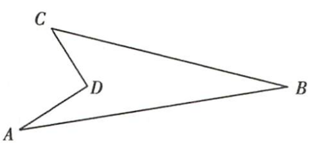
(3)因为 $3^2+7^2=58$,$9^2=81$,所以 $3^2+7^2\neq 9^2$,

所以该三角形不是直角三角形.

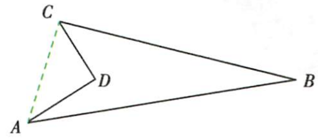
方法2 勾股定理的逆定理的应用

有时图形中并没有明确地给出直角三角形,但是其中一些已知的边长满足直角三角形的条件,故可考虑利用勾股定理的逆定理解决.

例2 如图,凹四边形 $ABCD$ 中,$CD\perp AD$,$AD=8$,$CD=6$,$AB=26$,$BC=24$,求凹四边形 $ABCD$ 的面积.



解析 连接 AC.在 $Rt\triangle ACD$ 中,$AD=8$,$CD=6$,



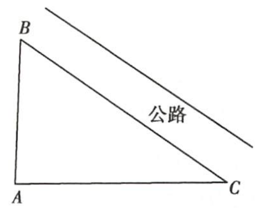
$\therefore AC=\sqrt{AD^2+CD^2}=\sqrt{8^2+6^2}=10$.

在$\triangle ABC$ 中,$\because AC^2+BC^2=10^2+24^2=26^2=AB^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 为直角三角形.

$\therefore$ 凹四边形 $ABCD$ 的面积 $S=S_{\triangle ABC}-S_{\triangle ACD}=\frac{1}{2}\times10\times24-\frac{1}{2}\times6\times8=96$.

例3 如图所示,某工厂 A 前面有一条笔直的公路,原来有两条路 AB,AC 可以从工厂 A 到达公路,经测量,$AB=6$ 千米,$AC=8$ 千米,$BC=10$ 千米,现需要修建一条公路,使工厂 A 到公路的距离最短.请你帮工厂 A 设计一种方案,并求出最短距离.



解析 过 A 作 $AD\perp BC$ 于 D,则修建公路 AD,可使工厂 A 到公路的距离最短.

$\because 6^2+8^2=10^2$,

即 $AB^2+AC^2=BC^2$,

$\therefore \triangle ABC$ 是直角三角形.

$\because S_{\triangle ABC}=\frac{1}{2}AC\cdot AB=\frac{1}{2}BC\cdot AD$,

$\therefore AD=\frac{AB\cdot AC}{BC}=\frac{6\times8}{10}=4.8$ 千米.