第22章 图形的旋转

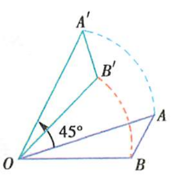
22.1 图形的旋转

知识清单

知识1 旋转的相关概念

1.定义:把一个平面图形绕平面内某一点O转动一个角度,叫做图形的旋转,这个定点O叫做旋转中心,转动的角叫做旋转角.

2.示例:如图所示,$\triangle A'OB'$是$\triangle AOB$绕定点O按逆时针方向旋转$45°$得到的,其中点A与点A'是对应点,线段OB与线段OB'是对应线段,$\angle A$与$\angle A'$是对应角,点O是旋转中心,$\angle AOA'$(或$\angle BOB'$)是旋转角.图形的旋转由旋转中心、旋转方向与旋转角决定.

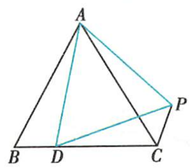


温馨提示

①旋转中心可以在图形上,也可以在图形外.

②确定旋转中心的方法:分别作两组对应点所连线段的垂直平分线,其交点即为旋转中心.

例1 如图所示,$\triangle ABC$为等边三角形,D为BC边上一点,$\triangle ABD$经过旋转后到达$\triangle ACP$的位置,连接DP.



(1)旋转中心是点________;

(2)旋转角度数是________;

(3)$\triangle ADP$是________三角形.

解析 在图形中,A点在旋转过程中始终保持不动,AB转到了AC处,AD转到了AP处,则点A是旋转中心,AB的对应线段是AC,AD的对应线段是AP,而旋转角是对应线段的夹角,所以$\angle BAC$与$\angle DAP$都是旋转角,又$\triangle ABC$为等边三角形,所以$\angle BAC=\angle DAP=60°$,又$AD=AP$,所以$\triangle ADP$是等边三角形.

答案 (1)A (2)$60°$ (3)等边

知识2 旋转的性质

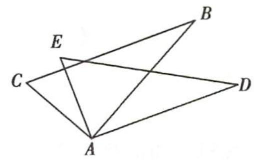
旋转的性质	(1)对应点到旋转中心的距离相等; (2)对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; (3)旋转前后的图形全等
解读	(1)对应点到旋转中心的距离相等,对应线段相等,对应角相等; (2)图形中的每一个点都绕旋转中心旋转了同样大小的角度; (3)图形的大小和形状都没有发生改变,只改变了图形的位置

温馨提示

旋转后的图形与原来图形的形状、大小都相同,但形状、大小都相同的两个图形不一定能通过旋转得到.

例2 如图所示,$\triangle ABC$绕着点A旋转能与$\triangle ADE$完全重合,则下列结论成立的有 ( )

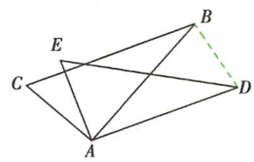
①$AE=AC$;②$\angle EAC=\angle BAD$;③$BC\parallel AD$;④若连接BD,则$\triangle ABD$为等腰三角形.



A.1个 B.2个

C.3个 D.4个

解析 $\because$ $\triangle ABC$绕着点A旋转能与$\triangle ADE$完全重合,$\therefore AE=AC$,$\angle EAD=\angle CAB$,$\therefore$ $\angle EAD-\angle EAB=\angle CAB-\angle EAB$,即$\angle EAC=\angle BAD$,故①②成立;如图,连接$BD$,$\because AB=AD$,$\therefore$ $\triangle ABD$为等腰三角形,故④成立;由旋转无法得到$\angle ABC$与$\angle BAD$一定相等,故无法得到$BC\parallel AD$.故选C.

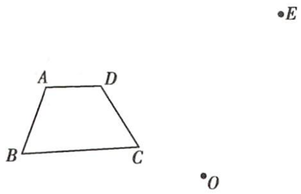


答案 C

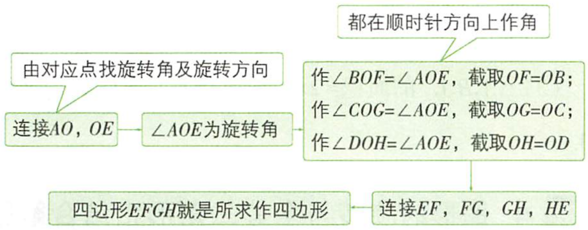
知识3 作旋转图形的一般步骤

作图依据	(1)任意一对对应点与旋转中心所连线段的夹角等于旋转角; (2)对应点到旋转中心的距离相等
作图要素	(1)原图;(2)旋转中心;(3)旋转方向;(4)旋转角;(5)一对对应点
作图步骤	(1)连:连接原图形中一个关键点与旋转中心. (2)转:根据旋转方向与旋转角度,以(1)中关键点与旋转中心的连线为一边作一个旋转角. (3)截:在该旋转角的另一边上,从旋转中心开始截取一段,使其长度等于关键点到旋转中心的长度,得到该点的对应点. 重复上述操作,作出所有关键点的对应点. (4)接:即按原图形连接所得到的各点. 注意:为了避免作图时的混乱,以上连、转、截这三步每个点独立完成后,再进行下一个点的旋转

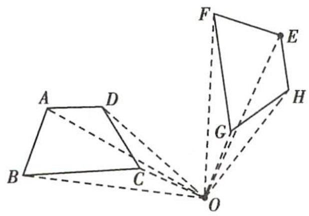
例 3 如图，四边形 $ABCD$ 绕点 O 旋转后，点 A 的对应点为点 E，画出点 B,C,D 旋转后的位置以及旋转后的四边形 $EFGH$.



思路分析



解析 如图.



知识 4 平移、旋转与轴对称的区别与联系

1. 平移、旋转、轴对称的区别

(1)变换方式不同：平移是将一个图形沿某个方向移动一定的距离；旋转是将一个图形绕一个定点沿某个方向转动一个角度；轴对称是将一个图形沿着某一条直线折叠.

(2)对应线段、对应角之间的关系不同：平移变换前后图形的对应线段平行（或在同一条直线上），对应点的连线平行（或在同一条直线上），对应角的两边分别平行（或有一边在同一条直线上）、方向一致；轴对称的对应线段或其延长线如果相交，那么交点在对称轴上，成轴对称的两个图形对应点的连线被对称轴垂直平分；旋转变换前后图形的任意一对对应点与旋转中心的连线所成的角都是旋转角.

(3)确定条件不同：平移变换要确定平移的距离和方向；旋转变换要确定旋转中心、旋转方向和旋转角；轴对称要确定对称轴.

2. 平移、旋转、轴对称的联系

平移、旋转、轴对称都不改变图形的形状和大小，变换前后对应线段相等，对应角相等.

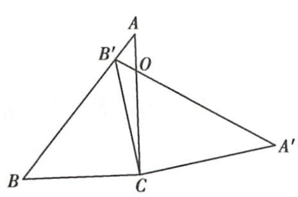
方法清单

- 方法1 图形旋转的概念与性质的应用方法
- 方法2 旋转中心的确定方法
- 方法3 与图形旋转相关的作图方法
- 方法4 图形的旋转与全等三角形相结合解题的方法
- 方法5 利用图形的平移、旋转、轴对称进行方案设计的方法
- 方法6 图形旋转在探索开放性问题中的应用

方法 1 图形旋转的概念与性质的应用方法

由于旋转前后的两个图形的大小、形状未发生改变，所以我们在利用旋转来解决问题时要注意抓住以下几点：(1)找准旋转中的“变”与“不变”；(2)找准旋转前后的“对应关系”；(3)充分挖掘旋转过程中线段之间的关系.

例 1 如图，在三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=50°$，将此三角形绕点 C 沿顺时针方向旋转后得到三角形 $A'B'C$，若点 B' 恰好落在线段 AB 上，AC、$A'B'$ 交于点 O，则 $\angle COA'$ 的度数是 ( )



A. $50°$ B. $60°$ C. $70°$ D. $80°$

解析 ∵在三角形 ABC 中，$\angle ACB=90°$，$\angle B=50°$，

∴ $\angle A=180°-\angle ACB-\angle B=40°$.

由旋转的性质可知 $BC=B'C$，

∴ $\angle B=\angle BB'C=50°$.

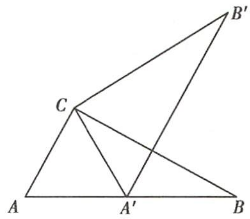
又∵ $\angle BB'C=\angle A+\angle ACB'=40°+\angle ACB'$，

∴ $\angle ACB'=10°$，

∴ $\angle COA'=\angle AOB'=\angle OB'C+\angle ACB'=\angle B+\angle ACB'=60°$. 故选 B.

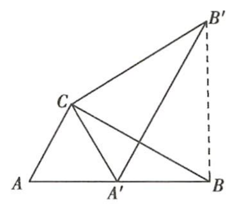
答案 B

例 2 如图，在 Rt$\triangle ABC$ 中，$\angle ACB=90°$，$\angle A=60°$，$AC=6$. 将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C$，此时点 A' 恰好在 AB 边上，则点 B' 与点 B 之间的距离为 ( )



A. 12 B. 6 C. $6\sqrt{2}$ D. $6\sqrt{3}$

解析 连接 $B'B$.



∵将 $\triangle ABC$ 绕点 C 按逆时针方向旋转得到 $\triangle A'B'C$，

∴ $AC=A'C$，$AB=A'B'$，$\angle ACA'=\angle BCB'$，$BC=B'C$.

∵ $\angle A=60°$，

∴ $\triangle AA'C$ 是等边三角形，

∴ $\angle ACA'=\angle BCB'=60°$，

∴ $\triangle BCB'$ 是等边三角形.

∵ $\angle ACB=90°$，$\angle A=60°$，$AC=6$，

$\therefore \angle CBA'=30°, AB=12, \therefore BC=\sqrt{12^2-6^2}=6\sqrt{3}$,

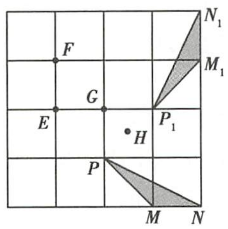
$\therefore B'B=BC=6\sqrt{3}$,故选 D.

答案 **D**

方法 2 旋转中心的确定方法

确定旋转中心时,要看旋转中心是在图形上还是在图形外.若在图形上,哪一点在旋转过程中位置没有改变,哪一点就是旋转中心;若在图形外,对应点连线的中垂线的交点就是旋转中心.

例 3 如图,在 4×4 的正方形网格中,$\triangle MNP$ 绕某点旋转一定的角度后,得到$\triangle M_1N_1P_1$,则其旋转中心一定是 (　　)



A.点 E　　B.点 F　　C.点 G　　D.点 H

解析 由旋转的性质可知,对应点到旋转中心的距离相等,所以旋转中心在每一对对应点所连线段的垂直平分线上,连接 PP_1,作线段 PP_1、NN_1 的垂直平分线,交点即为所求点.由作图知,旋转中心为点 G.

答案 **C**

方法 3 与图形旋转相关的作图方法

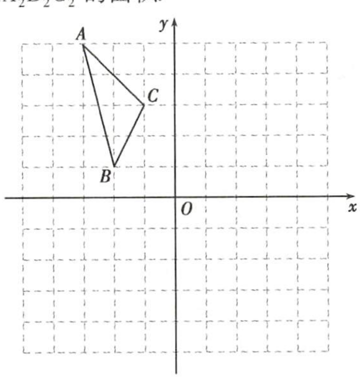
旋转作图的关键在"转线",即找出各个关键点的对应点."转线"这一步要弄清旋转中心和旋转角,"转线"的实质是"转化",即将要求的旋转作图问题转化为线段的旋转作图问题.

例 4 如图,在平面直角坐标系中,已知$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(-3,5)$,$B(-2,1)$,$C(-1,3)$.

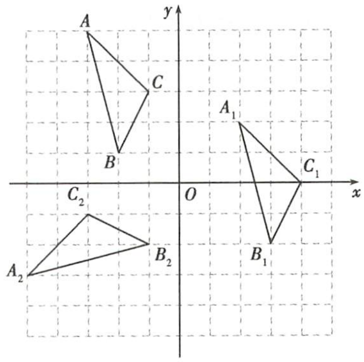
(1)若$\triangle ABC$ 经过平移后得到$\triangle A_1B_1C_1$,已知点 C_1 的坐标为$(4,0)$,画出$\triangle A_1B_1C_1$ 并写出顶点 A_1,B_1 的坐标;

(2)将$\triangle ABC$ 绕着点 O 按逆时针方向旋转 90°得到$\triangle A_2B_2C_2$,画出$\triangle A_2B_2C_2$;

(3)求$\triangle A_2B_2C_2$ 的面积.



解析 (1)如图所示,$\triangle A_1B_1C_1$ 即为所求,其中 A_1 的坐标为$(2,2)$,B_1 的坐标为$(3,-2)$.



(2)如图所示,$\triangle A_2B_2C_2$ 即为所求.

(3)$\triangle A_2B_2C_2$ 的面积$=2\times4-\frac{1}{2}\times2\times2-\frac{1}{2}\times1\times2-\frac{1}{2}\times1\times4=3$.

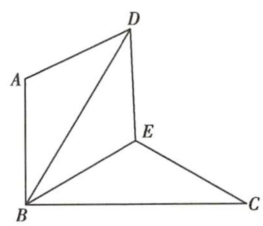
方法 4 图形的旋转与全等三角形相结合解题的方法

由旋转的性质可知任意一对对应点与旋转中心的连线所成的角都等于旋转角,对应点到旋转中心的距离相等,当解决以图形的旋转为背景的几何问题时,常常借助这些性质,并结合全等三角形的知识把已知条件和未知条件联系起来,使问题得以解决.

例 5 如图,$\triangle BAD$ 由$\triangle BEC$ 在平面内绕点 B 逆时针旋转 60°而得,且 $AB\perp BC$,$BE=CE$,连接 DE.

(1)求证:$\triangle BDE\cong\triangle BCE$;

(2)试判断四边形 $ABED$ 的形状,并说明理由.



解析 (1)证明:由旋转可知,$AB=EB$,$AD=EC$,$BD=BC$,$\angle ABD=\angle EBC$,$\angle ABE=\angle DBC=60°$,

$\because AB\perp BC$,$\therefore \angle ABC=90°$,

$\therefore \angle ABD=\angle EBC=\angle DBE=30°$.

在$\triangle BDE$ 和$\triangle BCE$ 中,$\begin{cases} BD=BC, \\ \angle DBE=\angle CBE, \\ BE=BE, \end{cases}$

$\therefore \triangle BDE\cong\triangle BCE$(SAS).

(2)四边形 $ABED$ 是菱形.

理由:$\because \triangle BDE\cong\triangle BCE$,$\therefore DE=CE$,

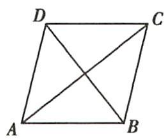
$\because BE=CE$,$AB=EB$,$AD=EC$,$\therefore AB=EB=DE=AD$,

$\therefore$ 四边形 $ABED$ 是菱形.

方法 5 利用图形的平移、旋转、轴对称进行方案设计的方法

根据旋转的特征,结合平移、轴对称的性质可以进行一些图案的设计.这要求学生在学好旋转知识的情况下,善于动脑思考,动手操作.

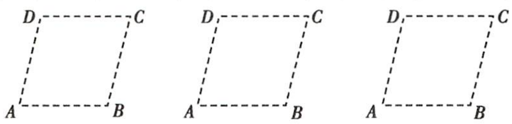
例6 如图,有一张菱形纸片$ABCD$,$AC=8$,$BD=6$.



(1)请沿着AC剪一刀,把它分成两部分,把剪开的两部分拼成一个平行四边形,在图①中用实线画出你所拼成的平行四边形;若沿着BD剪开,请在图②中用实线画出你所拼成的平行四边形,并直接写出这两个平行四边形的周长;

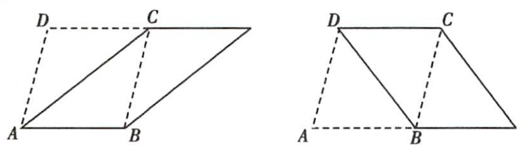
(2)沿着一条直线剪开,拼成与上述两种都不全等的平行四边形,请在图③中用实线画出你所拼成的平行四边形.

(注:上述所画的平行四边形都不能与原菱形全等)



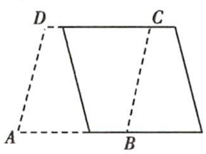
图①　　图②　　图③

解析 (1)如图.



周长为26　　周长为22

(2)(答案不唯一)如图.



方法6 图形旋转在探索开放性问题中的应用

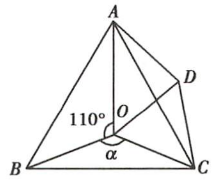
与旋转有关的综合性问题是近几年中考考查的热点,主要与平面直角坐标系、勾股定理、相似、全等、圆等知识综合考查.题目常以熟悉的图形为背景,设计旋转变换,由此引出对图形变换前后的线段、面积的有关探究.因此我们要在旋转的过程中去感受动与静、变与不变、由特殊到一般再由一般到特殊的辩证统一关系,有利于培养学生的想象能力.

例7 如图,点O是等边$\triangle ABC$内一点,$\angle AOB=110°$,$\angle BOC=\alpha$,将$\triangle BOC$绕点C按顺时针方向旋转$60°$得$\triangle ADC$,连接OD.

(1)求证:$\triangle COD$是等边三角形;

(2)当$\alpha=150°$时,试判断$\triangle AOD$的形状,并说明理由;

(3)当α为多少度时,$\triangle OAD$是等腰三角形?



解析 (1)证明:$\because CO=CD$,$\angle OCD=60°$,

$\therefore \triangle COD$是等边三角形.

(2)当$\alpha=150°$时,$\triangle AOD$是直角三角形.

理由:由旋转得$\triangle BOC\cong\triangle ADC$,

$\therefore \angle ADC=\angle BOC=150°$,

又$\because \triangle COD$是等边三角形,$\therefore \angle ODC=60°$,

$\therefore \angle ADO=90°$,$\therefore \triangle AOD$是直角三角形.

(3)①若$OA=AD$,则$\angle AOD=\angle ADO$,

$\because \angle AOD=360°-110°-60°-\alpha=190°-\alpha$,$\angle ADO=\alpha-60°$,

$\therefore 190°-\alpha=\alpha-60°$,$\therefore \alpha=125°$.

②若$OA=OD$,则$\angle OAD=\angle ODA$,

$\because \angle OAD=180°-(\angle AOD+\angle ADO)=180°-(190°-\alpha+\alpha-60°)=180°-130°=50°$,$\therefore \alpha-60°=50°$,$\therefore \alpha=110°$.

③若$OD=AD$,则$\angle AOD=\angle OAD$,$\therefore 190°-\alpha=50°$,

$\therefore \alpha=140°$.

综上,当α的度数为$125°$或$110°$或$140°$时,$\triangle AOD$是等腰三角形.

22.2 中心对称

知识清单

- 知识1 中心对称
- 知识2 中心对称图形
- 知识3 中心对称的基本性质
- 知识4 作与已知图形成中心对称的图形的一般步骤
- 知识5 关于原点对称的点的坐标
- 知识6 中心对称与中心对称图形的区别与联系

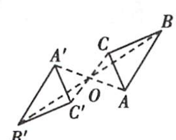
知识1 中心对称

把一个图形绕着某一点旋转180°,如果它能够与另一个图形重合,那么就说这两个图形关于这个点对称或中心对称,这个点叫做对称中心,这两个图形在旋转后能重合的对应点叫做关于对称中心的对称点.

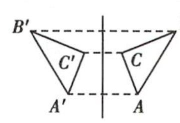
温馨提示

对称中心是旋转中心,但旋转中心不一定是对称中心.

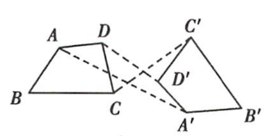
例1 下列图形中,$\triangle A'B'C'$与$\triangle ABC$成中心对称的是 (　　)



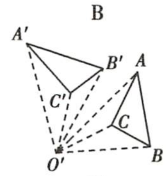
A



B



C



D

解析 只有选项A中的图形满足把一个图形绕着某一点旋转180°,它能够与另一个图形重合,所以$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$成中心对称;选项B中,$\triangle ABC$与$\triangle A'B'C'$成轴对称,选项C、D属于图形的旋转,故选A.

答案 A

知识 2 中心对称图形

把一个图形绕着某一个点旋转 180°，如果旋转后的图形能够与原来的图形重合，那么这个图形称为中心对称图形，这个点就是它的对称中心．中心对称图形是一种特殊的旋转对称图形．

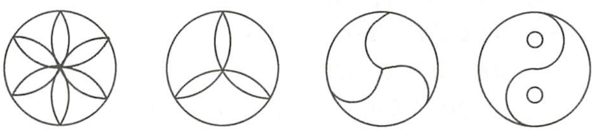
旋转对称图形$\xrightarrow{\text{旋转角为 }180°}$中心对称图形．

温馨提示

①中心对称图形只有一个对称中心，而轴对称图形可以有几条不同的对称轴；如果一个图形既是轴对称图形，又是中心对称图形，那么对称中心一定在对称轴上，不同对称轴的交点必是对称中心．

②常见的中心对称图形：平行四边形、矩形、菱形、正方形、圆、线段、相交直线等．

例 2 下列四个图形中，既是轴对称图形又是中心对称图形的是（　　）



A　　B　　C　　D

解析 选项 A 中的图形是轴对称图形，也是中心对称图形；选项 B 中的图形是轴对称图形，但不是中心对称图形；选项 C 中的图形既不是轴对称图形，也不是中心对称图形；选项 D 中的图形不是轴对称图形，是中心对称图形．故选 A．

答案 A

知识 3 中心对称的基本性质

1. 中心对称的两个图形是全等图形；
2. 中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心所平分；
3. 中心对称的两个图形，对应线段平行（或在同一条直线上）且相等．

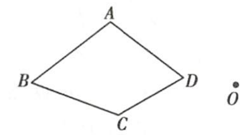
温馨提示

如果两个图形的对应点连线都经过某一点，并且都被该点平分，那么这两个图形一定关于这一点中心对称．

知识 4 作与已知图形成中心对称的图形的一般步骤

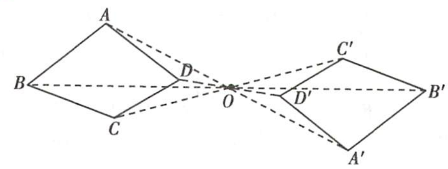
作图关键	作出原图形上关键点关于对称中心的对称点
作图步骤	（1）连接原图形上的所有关键点与对称中心； （2）再将以上连线延长找对称点，使得关键点与其对称点到对称中心的距离相等； （3）将对称点按原图形的形状顺次连接起来，即可得出与原图形成中心对称的图形

例 3 如图，已知四边形 $ABCD$ 和点 O，画出四边形 $A'B'C'D'$，使四边形 $A'B'C'D'$ 和四边形 $ABCD$ 关于点 O 中心对称．



思路分析 连接 AO 并延长，在延长线上截取 $OA'=OA$，则点 A' 是点 A 关于点 O 的对称点．用同样的方法作出 B,C,D 三点关于 O 的对称点 B',C',D'，然后顺次连接 $A'B',B'C',C'D',D'A'$，即可得到四边形 $A'B'C'D'$．

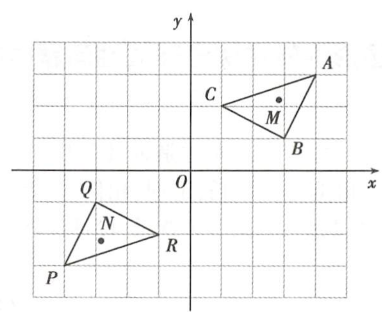
解析 作出的四边形 $A'B'C'D'$ 如图所示．



知识 5 关于原点对称的点的坐标

在平面直角坐标系中，如果两个点关于原点对称，那么它们的坐标符号相反，即点 $P(x,y)$ 关于原点的对称点 P' 的坐标为 $(-x,-y)$．

例 4 如图，在平面直角坐标系中，$\triangle PQR$ 是 $\triangle ABC$ 经过某种变换后得到的图形，观察点 A 与点 P，点 B 与点 Q，点 C 与点 R 的坐标之间的关系．在这种变换下，如果 $\triangle ABC$ 中任意一点 M 的坐标为 (x,y)，那么它的对应点 N 的坐标是________．



解析 由图可知两三角形关于点 O 成中心对称，关于原点成中心对称的点的横纵坐标均互为相反数，故点 N 的坐标是 $(-x,-y)$．

答案 $(-x,-y)$

知识 6 中心对称与中心对称图形的区别与联系

	区别	联系
中心对称	中心对称是指两个图形的关系	把成中心对称的两个图形看成一个“整体”，则这个“整体”是中心对称图形；
中心对称图形	中心对称图形是指具有某种特性的一个图形	把中心对称图形的两个部分看成“两个图形”，则它们成中心对称

方法清单

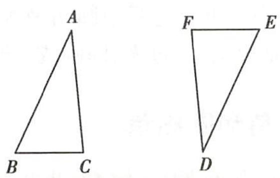
方法1 对称中心的确定方法

确定成中心对称的两个图形的对称中心的方法：

(1)连接任意一对对称点，取这条线段的中点，则该点为对称中心.

(2)任意连接两对对称点，这两条线段的交点即是对称中心.

例1 如图，$\triangle ABC$ 和 $\triangle DEF$ 关于某点对称.



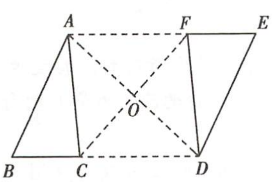
(1)在图中画出对称中心 O；

(2)连接 AF、CD，判断四边形 $ACDF$ 的形状，并说明理由.

思路分析 (1)根据中心对称的性质，连接 AD、CF，交点即为对称中心；

(2)根据对称的性质可得 $AC\parallel FD$，$AC=FD$，再根据一组对边平行且相等的四边形是平行四边形证明.

解析 (1)对称中心 O 如图所示.



(2)四边形 $ACDF$ 是平行四边形.理由如下：

$\because$ A 与 D，C 与 F 是对应点，$\therefore$ $AC\parallel FD$，$AC=FD$，

$\therefore$ 四边形 $ACDF$ 是平行四边形.

方法2 中心对称的性质的应用方法

关于某点成中心对称的两个图形，对称点所连线段都经过对称中心，而且被对称中心平分.在直角坐标系中，若两个点关于原点对称，那么这两个点的坐标符号相反.

例2 (1)在平面直角坐标系中，点 $P(2,-3)$ 关于原点的对称点 P' 的坐标是________；

(2)点 $P(2,n)$ 与点 $Q(m,-3)$ 关于原点对称，则 $(m+n)^{2\,019}=$________；

(3)已知点 $M(-1,3m)$ 关于原点对称的点在第一象限，那么 m 的取值范围是________.

解析 (1)因为关于原点对称的两个点的坐标符号相反，所以点 $P(2,-3)$ 关于原点的对称点 P' 的坐标是 $(-2,3)$.

(2)因为关于原点对称的两个点的坐标符号相反，点 $P(2,n)$ 与点 $Q(m,-3)$ 关于原点对称，所以 $m=-2$，$n=3$，则 $(m+n)^{2\,019}=(-2+3)^{2\,019}=1$.

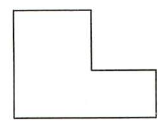
(3)因为点 $(-1,3m)$ 关于原点对称的点的坐标是 $(1,-3m)$，所以 $-3m>0$，解得 $m<0$.

答案 (1)$(-2,3)$ (2)1 (3)$m<0$

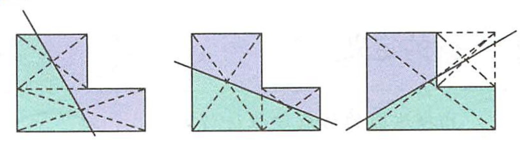
方法3 利用中心对称等分面积的方法

过中心对称图形的对称中心的任意一条直线，将该图形分成完全相同的两部分，当然其面积也相等.

例3 有一块方角形钢板如图所示，如何用一条直线将其分为面积相等的两部分？



解析 如图，有下面三种分法：



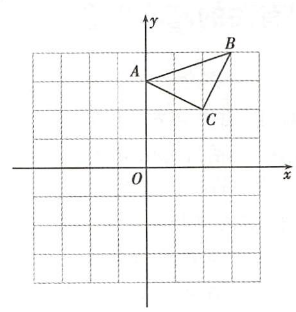
方法4 在平面直角坐标系中利用中心对称作图的方法

在平面直角坐标系中作一个图形关于原点对称的图形，一般先求出这个图形上关键点的对称点的坐标，然后描出对称点，再按原图形上关键点的顺序连接即可.

例4 如图，已知：在坐标平面内，$\triangle ABC$ 的三个顶点的坐标分别为 $A(0,3)$，$B(3,4)$，$C(2,2)$(正方形网格中，每个小正方形的边长是1个单位长度).

(1)作出 $\triangle ABC$ 绕点 A 顺时针旋转 $90°$ 后得到的 $\triangle AB_1C_1$，并直接写出点 C_1 的坐标；

(2)作出 $\triangle ABC$ 关于原点 O 对称的 $\triangle A_2B_2C_2$，并直接写出点 B_2 的坐标.



解析 (1)$\triangle AB_1C_1$ 如图所示，点 C_1 的坐标是 $(-1,1)$.

(2)$\triangle A_2B_2C_2$ 如图所示，点 B_2 的坐标是 $(-3,-4)$.