第10章 二次根式

10.1 二次根式的有关概念和性质

知识清单

- 知识1 二次根式
- 知识2 使二次根式有意义的条件
- 知识3 二次根式的性质

知识1 二次根式

形如$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$的式子叫做二次根式,其中符号“$\sqrt{\ }$”叫做二次根号,二次根号下的数叫做被开方数.

温馨提示

①二次根式$\sqrt{a}$中,被开方数a可以是一个具体的数,也可以是代数式.

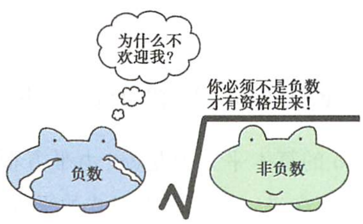
②二次根式定义中$a\geqslant 0$是定义的一个组成部分,不能省略.

③二次根式$\sqrt{a}$是一个非负数.

④二次根式与算术平方根有着内在的联系,$\sqrt{a}(a\geqslant 0)$就表示a的算术平方根.

知识2 使二次根式有意义的条件

在二次根式$\sqrt{a}$中,要求字母a必须满足条件$a\geqslant 0$,即被开方数是非负的,所以当$a\geqslant 0$时,二次根式$\sqrt{a}$有意义,当$a<0$时,二次根式$\sqrt{a}$无意义.



温馨提示

在关于代数式有意义的问题中,要注意二次根式、分式等有意义的综合运用.

例1 求使下列式子有意义的x的取值范围.

(1)$\dfrac{1}{\sqrt{4-3x}}$;(2)$\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-2}$;

(3)$\sqrt{2x^2+1}$;(4)$\sqrt{3x}+\sqrt{-x}$.

解析 (1)式子$\dfrac{1}{\sqrt{4-3x}}$有意义,则必有$\begin{cases}4-3x\geqslant 0,\\4-3x\neq 0,\end{cases}$

$\therefore x<\dfrac{4}{3}$,即$x$的取值范围为$x<\dfrac{4}{3}$.

(2)式子$\dfrac{\sqrt{3-x}}{x-2}$有意义,则必有$\begin{cases}3-x\geqslant 0,\\x-2\neq 0,\end{cases}$

$\therefore x\leqslant 3$且$x\neq 2$,即x的取值范围是$x\leqslant 3$且$x\neq 2$.

(3)$\because 2x^2+1>0$,$\therefore \sqrt{2x^2+1}$总有意义,

$\therefore x$的取值范围是全体实数.

(4)式子$\sqrt{3x}+\sqrt{-x}$有意义,则必有$\begin{cases}3x\geqslant 0,\\-x\geqslant 0,\end{cases}$

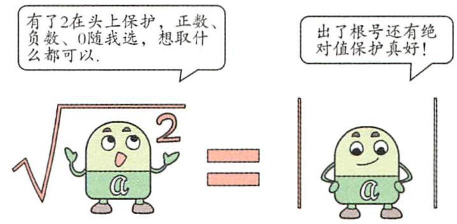
$\therefore x=0$,即x的取值范围是$x=0$.

知识3 二次根式的性质

一般地,二次根式有如下性质:

(1)$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$;

(2)$\sqrt{a^2}=|a|=\begin{cases}a & (a>0),\\0 & (a=0),\\-a & (a<0).\end{cases}$



$(\sqrt{a})^2$与$\sqrt{a^2}$的区别与联系

		$(\sqrt{a})^2$	$\sqrt{a^2}$
区别	意义不同	$(\sqrt{a})^2$表示$a(a\geqslant 0)$的算术平方根的平方	$\sqrt{a^2}$表示a^2的算术平方根
	读法不同	$(\sqrt{a})^2$读作“根号a的平方”或“a的算术平方根的平方”	$\sqrt{a^2}$读作“根号a^2”或“a的平方的算术平方根”
	被开方数不同	$(\sqrt{a})^2$的被开方数是a	$\sqrt{a^2}$的被开方数是a^2
	运算顺序不同	$(\sqrt{a})^2$是先开方后平方	$\sqrt{a^2}$是先平方后开方
	运算依据、结果不同	$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$是根据开平方与平方互为逆运算得到的	$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0)\end{cases}$是根据算术平方根的定义得到的
	作用不同	$(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant 0)$,正向运用可化简二次根式,逆向运用可以将任意一个非负数写成一个数的平方的形式	$\sqrt{a^2}=\begin{cases}a(a>0),\\0(a=0),\\-a(a<0),\end{cases}$正向运用可以将根号内能开得尽方的因数(或因式)移到根号外,逆向运用可以将根号外的非负因数(或因式)移到根号内

续表

	$(\sqrt{a})^2$	$\sqrt{a^2}$
联系	①含有两种相同的运算,两者都要进行平方和开方; ②结果的取值范围相同,两者的结果都是非负数; ③当 $a\geqslant0$ 时,两者"合二为一",即 $(\sqrt{a})^2=\sqrt{a^2}=a$	

例2 化简:$\sqrt{(x+2)^2}+(\sqrt{x-2})^2=$________.

解析 根据被开方数为非负数可得 $x-2\geqslant0$,所以 $x+2>0$,所以 $\sqrt{(x+2)^2}+(\sqrt{x-2})^2=|x+2|+x-2=x+2+x-2=2x$.

答案 $2x$

方法清单

方法1 二次根式的辨别方法

判断一个根式是二次根式,一定要满足被开方数大于或等于零,根指数是2,当被开方数是字母时,要根据字母的取值进行讨论.

例1 下列各式:①$\sqrt{\frac{1}{2}}$,②$\sqrt{2x}$,③$\sqrt{x^2+y^2}$,④$\sqrt{-5}$,⑤$\sqrt[3]{5}$.其中是二次根式的有 ( )

A.1个 B.2个 C.3个 D.4个

解析 因为 $\frac{1}{2}>0$,$x^2+y^2\geqslant0$,$2x$ 的值不能确定,$-5<0$,$\sqrt[3]{5}$ 的根指数不是2,所以 $\sqrt{\frac{1}{2}}$,$\sqrt{x^2+y^2}$ 是二次根式,$\sqrt{2x}$,$\sqrt{-5}$,$\sqrt[3]{5}$ 都不是二次根式,故选B.

答案 B

方法2 利用二次根式的非负性解题的方法

因为二次根式 $\sqrt{a}(a\geqslant0)$ 表示 a 的算术平方根,所以 $\sqrt{a}\geqslant0$ 这个性质也是非负数的算术平方根的性质.对于二次根式非负性的应用,常见题型是"几个非负数之和等于0,则每个非负数都等于0",这一性质在解题中应用广泛.

例2 已知 x,y 为实数,且 $\sqrt{x-2}+3(y-1)^2=0$,则 $x-y$ 的值为 ( )

A.3 B.-3 C.-1 D.1

解析 $\because$ $\sqrt{x-2}+3(y-1)^2=0$,且 $\sqrt{x-2}\geqslant0$,$(y-1)^2\geqslant0$,

$\therefore$ $\sqrt{x-2}=0$,$(y-1)^2=0$,

$\therefore$ $x-2=0$,$y-1=0$,

解得 $x=2$,$y=1$,

$\therefore$ $x-y=2-1=1$,故选D.

答案 D

例3 已知 x、y 为实数,且满足 $y=\sqrt{x-2}+\sqrt{2-x}$,求 $\sqrt{x+y}$ 的值.

解析 根据二次根式有意义的条件可知 $\sqrt{x-2}$ 与 $\sqrt{2-x}$ 的被开方数 $x-2$ 与 $2-x$ 均为非负数,

即 $\begin{cases}x-2\geqslant0,\\2-x\geqslant0,\end{cases}$ 解得 $x=2$.

$\therefore$ $y=\sqrt{2-2}+\sqrt{2-2}=0$,$\therefore$ $\sqrt{x+y}=\sqrt{2+0}=\sqrt{2}$.

方法3 二次根式 $\sqrt{a^2}$ 的化简方法

在化简二次根式时,能直接利用 $\sqrt{a^2}=|a|$ 这一性质的,利用性质去掉根号及绝对值符号,不能直接利用性质的,则需转化成能利用性质的形式,然后去掉根号及绝对值符号,注意"a"的取值范围.

例4 化简:(1) $\sqrt{16}$;(2) $\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2}$;

(3) $-\sqrt{(-6)^2}$;(4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}$.

解析 (1) $\sqrt{16}=\sqrt{4^2}=4$.

(2) $\sqrt{\left(-\frac{5}{4}\right)^2}=\sqrt{\left(\frac{5}{4}\right)^2}=\frac{5}{4}$.

(3) $-\sqrt{(-6)^2}=-\sqrt{6^2}=-6$.

(4) $\sqrt{(\sqrt{3}-2)^2}=|\sqrt{3}-2|=2-\sqrt{3}$.

方法4 二次根式 $(\sqrt{a})^2$ 的计算方法

一个正数 a 的算术平方根是 $\sqrt{a}$,由平方根的定义可知 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$.在进行含有二次根式的平方运算时,常常直接利用 $(\sqrt{a})^2=a(a\geqslant0)$ 这一性质去掉根号,在计算过程中要时刻注意"a"的非负性.

例5 计算:

(1) $2\times(\sqrt{5})^2$;(2) $(2\sqrt{5})^2$;

(3) $\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2$;(4) $(\sqrt{a^2+2})^2$.

解析 (1) $2\times(\sqrt{5})^2=2\times5=10$.

(2) $(2\sqrt{5})^2=2^2\times(\sqrt{5})^2=4\times5=20$.

(3) $\left(-2\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=(-2)^2\times\left(\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2=4\times\frac{2}{3}=\frac{8}{3}$.

(4) $(\sqrt{a^2+2})^2=a^2+2$.

10.2　二次根式的运算

知识清单

- 知识1 二次根式的乘法 ★★★
- 知识2 二次根式的除法 ★★
- 知识3 积的算术平方根 ★★
- 知识4 商的算术平方根 ★★
- 知识5 最简二次根式 ★★
- 知识6 二次根式的加减 ★★★
- 知识7 二次根式的混合运算 ★

知识 1　二次根式的乘法 ★★★

一般地，二次根式的乘法法则是$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant0,b\geqslant0)$.

温馨提示

①要注意$a\geqslant0,b\geqslant0$这个条件，只有a,b都是非负数时法则才成立.

②$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}=\sqrt{ab}\,(a\geqslant0,b\geqslant0)$还可以推广为$\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\cdot\sqrt{c}\cdot\sqrt{d}\cdots=\sqrt{abcd\cdots}\,(a\geqslant0,b\geqslant0,c\geqslant0,d\geqslant0,\cdots)$.

例1 计算：(1)$3\sqrt{2}\times2\sqrt{7}$；(2)$6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})$；

(3)$\sqrt{\frac{3}{4}}\times\left(-\sqrt{\frac{1}{12}}\right)$；(4)$\sqrt{14a}\cdot\sqrt{7ab}\,(a>0,b>0)$.

解析 (1)$3\sqrt{2}\times2\sqrt{7}=3\times2\times\sqrt{2\times7}=6\sqrt{14}$.

(2)$6\sqrt{27}\times(-2\sqrt{3})=6\times(-2)\times\sqrt{27\times3}=-12\sqrt{81}=-12\times9=-108$.

(3)$\sqrt{\frac{3}{4}}\times\left(-\sqrt{\frac{1}{12}}\right)=-\sqrt{\frac{3}{4}\times\frac{1}{12}}=-\sqrt{\frac{1}{16}}=-\frac{1}{4}$.

(4)$\sqrt{14a}\cdot\sqrt{7ab}=\sqrt{7^2\times2\cdot a^2b}=7a\sqrt{2b}$.

知识 2　二次根式的除法 ★★

一般地，二次根式的除法法则是$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a}{b}}\,(a\geqslant0,b>0)$.

温馨提示

①要注意$a\geqslant0,b>0$这个条件，因为$b=0$时，分母为0，没有意义.

②在实际解题时，若不考虑a、b的正负性，直接得$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$是错误的.

如：$\sqrt{\frac{-4}{-9}}=\frac{\sqrt{-4}}{\sqrt{-9}}$在实数范围内无意义.

例2 计算：(1)$\sqrt{40}\div\sqrt{5}$；(2)$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}$；

(3)$-\sqrt{90}\div\sqrt{3\frac{3}{5}}$；(4)$\frac{2\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab}}\,(a>0,b>0)$.

解析 (1)$\sqrt{40}\div\sqrt{5}=\sqrt{40\div5}=\sqrt{8}=2\sqrt{2}$.

(2)$\frac{\sqrt{32}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{32}{2}}=\sqrt{16}=4$.

(3)$-\sqrt{90}\div\sqrt{3\frac{3}{5}}=-\sqrt{90\div\frac{18}{5}}=-\sqrt{90\times\frac{5}{18}}=-\sqrt{25}=-5$.

(4)$\frac{2\sqrt{a^3b}}{\sqrt{ab}}=2\sqrt{\frac{a^3b}{ab}}=2\sqrt{a^2}=2a$.

知识 3　积的算术平方根 ★★

文字语言	积的算术平方根等于积中各个因式的算术平方根的乘积
符号语言	$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geqslant0,b\geqslant0)$
温馨提示	(1)逆用二次根式的乘法法则可以对二次根式进行化简，在运用时要特别注意符号. (2)公式中的a、b可以是数，也可以是代数式，但必须满足$a\geqslant0,b\geqslant0$. (3)运用积的算术平方根的性质化简时，要将能开得尽方的因式或因数开方后移到根号外

例3 化简：(1)$\sqrt{(-5)^2\times3}$；(2)$\sqrt{(-16)\times(-9)}$；

(3)$\sqrt{32ab^2c^3}\,(a>0,b>0,c>0)$.

思路分析 利用$\sqrt{ab}=\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}\,(a\geqslant0,b\geqslant0)$与$\sqrt{a^2}=a\,(a\geqslant0)$进行化简.

解析 (1)$\sqrt{(-5)^2\times3}=\sqrt{(-5)^2}\times\sqrt{3}=5\sqrt{3}$.

(2)$\sqrt{(-16)\times(-9)}=\sqrt{16\times9}$

$=\sqrt{4^2\times3^2}=\sqrt{4^2}\times\sqrt{3^2}$

$=4\times3=12$.

(3)$\sqrt{32ab^2c^3}$

$=\sqrt{2\times4^2\cdot a\cdot b^2\cdot c^2\cdot c}$

$=\sqrt{2}\times\sqrt{4^2}\cdot\sqrt{a}\cdot\sqrt{b^2}\cdot\sqrt{c^2}\cdot\sqrt{c}$

$=4bc\sqrt{2ac}$.

知识 4　商的算术平方根 ★★

商的算术平方根等于被除式的算术平方根除以除式的算术平方根，即$\sqrt{\frac{a}{b}}=\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}\,(a\geqslant0,b>0)$.

温馨提示

运用商的算术平方根的性质将二次根式化简时，如果被开方数是一个带分数，一定要先化成假分数，再化简.

例4 化简：

(1)$\sqrt{\frac{5}{16}}$；(2)$\sqrt{2\frac{7}{9}}$；(3)$\sqrt{\frac{8x}{49y^2}}\,(x\geqslant0,y>0)$.

解析 (1)$\sqrt{\frac{5}{16}}=\frac{\sqrt{5}}{\sqrt{16}}=\frac{\sqrt{5}}{4}$.

(2)$\sqrt{2\frac{7}{9}}=\sqrt{\frac{25}{9}}=\frac{\sqrt{25}}{\sqrt{9}}=\frac{5}{3}$.

(3)$\sqrt{\frac{8x}{49y^2}}=\frac{\sqrt{8x}}{\sqrt{49y^2}}=\frac{\sqrt{4}\cdot\sqrt{2x}}{\sqrt{49}\cdot\sqrt{y^2}}=\frac{2\sqrt{2x}}{7y}$.

知识 5 最简二次根式

	内容		举例
最简二次根式满足两个条件	1.被开方数的因数是整数,字母因式是整式. 2.被开方数不含能开得尽方的因数或因式		$2\sqrt{2}, \frac{\sqrt{30}}{10}, \frac{2}{a}\sqrt{2}$
化成最简二次根式的一般方法	将被开方数中能开得尽方的因数或因式进行开方		$\sqrt{8}=\sqrt{4\times2}=2\sqrt{2}$, $\sqrt{x^2y}=x\sqrt{y}(x\geqslant0,y\geqslant0)$
	化去根号下的分母	若被开方数中含有带分数,应先将带分数化成假分数	$\sqrt{1\frac{1}{3}}=\sqrt{\frac{4}{3}}=\sqrt{\frac{4\times3}{3\times3}}=\frac{2}{3}\sqrt{3}$
		若被开方数中含有小数,应先将小数化成分数	$\sqrt{0.9}=\sqrt{\frac{9}{10}}=\sqrt{\frac{90}{100}}=\frac{3}{10}\sqrt{10}$
	被开方数是多项式时要先进行因式分解		$\sqrt{2a^3+4a^2b+2ab^2}$ $=\sqrt{2a(a^2+2ab+b^2)}$ $=\sqrt{2a(a+b)^2}$ $=\sqrt{2a}\cdot\lvert a+b\rvert$

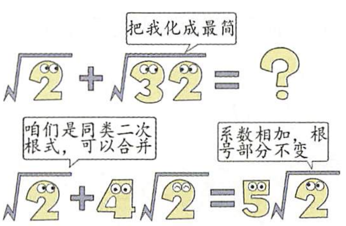
例 5 二次根式 $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{30}$, $\sqrt{x+2}$, $\sqrt{40x^3}$ $(x>0)$, $\sqrt{x^2+y^2}$ 中,最简二次根式是________.

解析 $\sqrt{\frac{1}{2}}$ 的被开方数是分数, $\sqrt{12}=\sqrt{2^2\times3}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{40x^3}=\sqrt{2^2\times10\cdot x^2\cdot x}=2x\sqrt{10x}$,由最简二次根式的定义知, $\sqrt{30}$, $\sqrt{x+2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$ 为最简二次根式.

答案 $\sqrt{30}$, $\sqrt{x+2}$, $\sqrt{x^2+y^2}$

知识 6 二次根式的加减

一般地,二次根式进行加减运算时,可以先将二次根式化成最简二次根式,再将被开方数相同的二次根式进行合并.



温馨提示

①合并被开方数相同的二次根式与合并同类项类似,将被开方数相同的二次根式的"系数"相加减,被开方数和根指数不变.

②二次根式加减混合运算的实质就是合并被开方数相同的二次根式,被开方数不同的二次根式不能合并.如 $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ $(a\geqslant0, b\geqslant0$,且 $a\neq b)$ 是最简结果,不能再合并.

③二次根式进行加减运算时,根号外的系数因式必须为假分数形式,如 $\frac{40}{7}\sqrt{3}$,不能写成 $5\frac{5}{7}\sqrt{3}$ 的形式.

④合并被开方数相同的二次根式后,若系数为多项式,需添加括号.

例 6 计算:(1) $2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}$;(2) $\sqrt{16x}+\sqrt{64x}$ $(x\geqslant0)$;

(3) $\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}$.

解析 (1) $2\sqrt{3}-\frac{\sqrt{3}}{2}=\left(2-\frac{1}{2}\right)\times\sqrt{3}=\frac{3\sqrt{3}}{2}$.

(2) $\sqrt{16x}+\sqrt{64x}=4\sqrt{x}+8\sqrt{x}=12\sqrt{x}$.

(3) $\sqrt{6}-\sqrt{\frac{3}{2}}-\sqrt{\frac{2}{3}}=\sqrt{6}-\frac{\sqrt{6}}{2}-\frac{\sqrt{6}}{3}=\left(1-\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)\times\sqrt{6}=\frac{\sqrt{6}}{6}$.

知识拓展 同类二次根式

把几个二次根式化为最简二次根式以后,如果被开方数相同,那么这几个二次根式叫做同类二次根式.

(1)同类二次根式类似于整式中的同类项,如 $3\sqrt{2}$ 和 $-\frac{1}{2}\sqrt{2}$ 是同类二次根式.

(2)几个同类二次根式在没有化简之前,被开方数完全可以互不相同,如 $\sqrt{\frac{1}{2}}$, $\sqrt{8}$, $\sqrt{18}$ 都是同类二次根式.

(3)判断两个根式是不是同类二次根式,首先要把它们化为最简二次根式,然后看被开方数是否相同.

例 试判断下列各式中哪些是同类二次根式.

$\sqrt{75}$, $\sqrt{\frac{1}{27}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{50}}$, $\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{10}}$.

解析 因为 $\sqrt{75}=5\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{27}}=\frac{1}{9}\sqrt{3}$, $\sqrt{12}=2\sqrt{3}$, $\sqrt{\frac{1}{50}}=\frac{1}{10}\sqrt{2}$, $\sqrt{\frac{1}{10}}=\frac{1}{10}\sqrt{10}$,

所以 $\sqrt{75}$, $\sqrt{\frac{1}{27}}$, $\sqrt{12}$, $\sqrt{3}$ 是同类二次根式, $\sqrt{2}$ 与 $\sqrt{\frac{1}{50}}$ 是同类二次根式.

知识 7 二次根式的混合运算

	内容	运算顺序
二次根式的混合运算	二次根式的混合运算是指二次根式的加、减、乘、除、乘方的混合运算	二次根式的混合运算顺序与实数的混合运算顺序一样,先乘方、再乘除,最后加减,有括号的先算括号里的(或先去掉括号)
重点解读	(1)二次根式混合运算的结果应写成最简二次根式的形式. (2)在二次根式的混合运算中,乘法公式和实数的运算律仍然适用	
口诀	二次根式混合算,弄清顺序是关键, 先乘方来后乘除,最后再去算加减	

温馨提示

①在运算过程中,每个根式可以看作是一个"单项式",多个不同类的二次根式的和可以看作"多项式".

②运算结果是根式的,一般应表示为最简二次根式.

方法清单

方法 1 二次根式化简的方法

把二次根式化简为最简二次根式的过程叫做二次根式的化简.

1. 二次根式化简的结果一定是被开方数不含分母,被开方数中的每一个因式或因数都开不尽.

2. 如果被开方数是分式或分数(包括小数),先利用商的算术平方根的性质把它写成分式或分数的形式,然后利用分母有理化化简.

3. 如果被开方数是整式或整数,先将它分解因式或分解因数,然后把开方开得尽的因式或因数开方,从而将式子化简.

例 1 化简:(1) $\sqrt{200}$;(2) $\sqrt{1.4}$;

(3) $\sqrt{\frac{3}{x}}(x>0)$;(4) $-\sqrt{6\frac{2}{3}}$.

解析 (1) $\sqrt{200}=\sqrt{10^2\times2}=10\sqrt{2}$.

(2) $\sqrt{1.4}=\sqrt{\frac{7}{5}}=\sqrt{\frac{7\times5}{5\times5}}=\frac{\sqrt{35}}{5}$.

(3) $\sqrt{\frac{3}{x}}=\sqrt{\frac{3x}{x^2}}=\frac{\sqrt{3x}}{x}$.

(4) $-\sqrt{6\frac{2}{3}}=-\sqrt{\frac{20}{3}}=-\sqrt{\frac{60}{3^2}}=-\sqrt{\frac{2^2\times15}{3^2}}=-\frac{2\sqrt{15}}{3}$.

方法 2 二次根式乘除运算的方法

二次根式乘除混合运算的方法与整式乘除混合运算的方法相同,整式乘除法的一些法则、公式在二次根式乘除法中仍然适用.在运算时要明确运算符号和运算顺序.若被开方数是带分数,则要先将其化为假分数.

例 2 计算:(1) $\frac{\sqrt{6}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}$;

(2) $\sqrt{45}\div3\sqrt{5}\times\frac{3}{2}\sqrt{2\frac{2}{3}}$.

解析 (1)解法一:原式 $=\frac{\sqrt{18}}{\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{18}{2}}=\sqrt{9}=3$.

解法二:原式 $=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{3}\times\sqrt{3}}{\sqrt{2}}=(\sqrt{3})^2=3$.

(2)原式 $=\left(1\div3\times\frac{3}{2}\right)\times\sqrt{45\div5\times\frac{8}{3}}$

$=\frac{1}{2}\times\sqrt{24}=\frac{1}{2}\times2\sqrt{6}=\sqrt{6}$.

方法 3 二次根式加减运算的方法

二次根式的加减与整式的加减相比,可将被开方数相同的二次根式看作整式加减中的同类项进行合并.另外,有理数的加法交换律、结合律都适用于二次根式的运算.

例 3 计算:(1) $3\sqrt{18}+\frac{1}{5}\sqrt{50}-4\sqrt{\frac{1}{2}}$;

(2) $\frac{1}{2}\sqrt{32}-2\sqrt{75}+\sqrt{0.5}-3\sqrt{\frac{1}{27}}$.

思路分析 先将二次根式化成最简二次根式,再将被开方数相同的二次根式进行合并.

解析 (1) $3\sqrt{18}+\frac{1}{5}\sqrt{50}-4\sqrt{\frac{1}{2}}$

$=9\sqrt{2}+\sqrt{2}-2\sqrt{2}$

$=(9+1-2)\times\sqrt{2}$

$=8\sqrt{2}$.

(2)原式 $=2\sqrt{2}-10\sqrt{3}+\frac{1}{2}\sqrt{2}-\frac{1}{3}\sqrt{3}$

$=\frac{5}{2}\sqrt{2}-\frac{31}{3}\sqrt{3}$.

方法 4 分母有理化的方法

在二次根式的运算中,最后结果一般要求分母中不含二次根式.把分母中的根号化去的过程称为分母有理化,具体做法如下:

(1) $\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{a}\cdot\sqrt{b}}{\sqrt{b}\cdot\sqrt{b}}=\frac{\sqrt{ab}}{b}(a\geqslant0,b>0)$;

(2)可通过类比分式中的"约分"进行分母有理化,如 $\frac{ab}{\sqrt{b}}=\frac{a(\sqrt{b})^2}{\sqrt{b}}=a\sqrt{b}(b>0)$.

例 4 把下列各式分母有理化:

(1) $\frac{5}{\sqrt{3}}$;(2) $\frac{2}{\sqrt{2ab}}$;(3) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}$;(4) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}$.

解析 (1) $\frac{5}{\sqrt{3}}=\frac{5\times\sqrt{3}}{\sqrt{3}\times\sqrt{3}}=\frac{5\sqrt{3}}{3}$.

(2) $\frac{2}{\sqrt{2ab}}=\frac{2\sqrt{2ab}}{\sqrt{2ab}\cdot\sqrt{2ab}}=\frac{2\sqrt{2ab}}{2ab}=\frac{\sqrt{2ab}}{ab}$.

(3) $\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{2}\times\sqrt{5}}{2\sqrt{5}\times\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{10}}{2\times5}=\frac{\sqrt{10}}{10}$.

(4) $\frac{1}{\sqrt{7}-\sqrt{5}}=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7}-\sqrt{5})\times(\sqrt{7}+\sqrt{5})}$

$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{(\sqrt{7})^2-(\sqrt{5})^2}$

$=\frac{\sqrt{7}+\sqrt{5}}{2}$.

方法 5 因式的外移和内移的方法

(1)如果被开方数中的因式能够开得尽方,那么就可以用它的算术平方根代替移到根号外面;(2)如果被开方数是代数式和的形式,那么先分解因式,变形为积的形式,再将因式开方后移到根号外面,也可以将根号外面的正因式,平方后移到根号里面.

例 5 若 $\sqrt{a^2b}=-a\sqrt{b}$ 成立,则 a、b 满足的条件是 ( )

A.$a<0$ 且 $b>0$　　B.$a\leqslant0$ 且 $b\geqslant0$

C.$a<0$ 且 $b\geqslant0$　　D.a、b 异号

解析 因为 $\sqrt{a^2b}=\sqrt{a^2}\cdot\sqrt{b}=-a\sqrt{b}$,

所以 $-a\geqslant0$,$b\geqslant0$,

所以 $a\leqslant0$,$b\geqslant0$,故选 B.

答案 **B**

例 6 不改变原式的值,将根号外的因式移到根号内.

(1)$3\sqrt{\frac{1}{3}}$;(2)$x\sqrt{-\frac{1}{x}}$;(3)$(a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$.

解析 (1)$3\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3^2}\times\sqrt{\frac{1}{3}}=\sqrt{3^2\times\frac{1}{3}}=\sqrt{3}$.

(2)由 $-\frac{1}{x}>0$,得 $x<0$,$\therefore x\sqrt{-\frac{1}{x}}=-(-x)\sqrt{-\frac{1}{x}}=-\sqrt{(-x)^2}\cdot\sqrt{-\frac{1}{x}}=-\sqrt{(-x)^2\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)}=-\sqrt{-x}$.

(3)由 $\frac{1}{1-a}>0$,得 $1-a>0$,$\therefore a-1<0$.

$\therefore (a-1)\sqrt{\frac{1}{1-a}}=-(1-a)\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

$=-\sqrt{(1-a)^2}\cdot\sqrt{\frac{1}{1-a}}$

$=-\sqrt{(1-a)^2\cdot\frac{1}{1-a}}=-\sqrt{1-a}$.

方法 6 与二次根式相关的混合运算的方法

二次根式的运算顺序同实数的运算顺序一样,都是从高级到低级进行运算,有括号的先算括号里的.有时可用一些方法技巧简化运算.

例 7 计算:(1)$(\sqrt{12}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}-2\sqrt{\frac{1}{2}}$;

(2)$(3\sqrt{48}-2\sqrt{27})\div\sqrt{3}$;

(3)$\sqrt{18}+(\sqrt{2}-1)^2-\sqrt{9}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}$;

(4)$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})$.

解析 (1)$(\sqrt{12}+\sqrt{3})\times\sqrt{6}-2\sqrt{\frac{1}{2}}=\sqrt{72}+\sqrt{18}-\sqrt{2}=6\sqrt{2}+3\sqrt{2}-\sqrt{2}=8\sqrt{2}$.

(2)$(3\sqrt{48}-2\sqrt{27})\div\sqrt{3}=3\sqrt{16}-2\sqrt{9}=12-6=6$.

(3)$\sqrt{18}+(\sqrt{2}-1)^2-\sqrt{9}+\left(\frac{1}{2}\right)^{-1}=3\sqrt{2}+(2-2\sqrt{2}+1)-3+2=\sqrt{2}+2$.

(4)$(\sqrt{2}+\sqrt{3})^2-(\sqrt{2}+\sqrt{3})\times(\sqrt{2}-\sqrt{3})=(2+2\sqrt{6}+3)-(2-3)=6+2\sqrt{6}$.

方法 7 二次根式化简求值的方法

解决二次根式化简求值的问题一般采用的是直接代入的方法,也常采用整体代入的方法.

例 8 (1)已知 $x=\sqrt{5}+1$,求代数式 x^2-2x-4 的值;

(2)已知 $a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$,$b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,求代数式 a^2-ab+b^2 的值.

解析 (1)$\because x=\sqrt{5}+1$,

$\therefore x^2-2x-4=(x-1)^2-5=(\sqrt{5}+1-1)^2-5=5-5=0$.

(2)$\because a=\sqrt{5}+\sqrt{3}$,$b=\sqrt{5}-\sqrt{3}$,

$\therefore a-b=2\sqrt{3}$,$ab=(\sqrt{5}+\sqrt{3})\times(\sqrt{5}-\sqrt{3})=5-3=2$,

$\therefore a^2-ab+b^2=(a-b)^2+ab=(2\sqrt{3})^2+2=12+2=14$.

方法 8 二次根式比较大小的方法

比较两个二次根式的大小,可以转化成比较两个被开方数的大小,即可以将根号外的正因数平方后移到根号内,计算出被开方数后,再比较被开方数的大小,被开方数大的,其算术平方根也大.也可以将两个数分别平方,计算出结果,再比较大小,依据:当 $a>0$,$b>0$ 时,若 $a^2>b^2$,则 $a>b$.

例 9 比较大小:(1)$7\sqrt{2}$ 与 $3\sqrt{11}$;(2)$-2\sqrt{11}$ 与 $-3\sqrt{5}$.

解析 (1)解法一:$\because 7\sqrt{2}=\sqrt{7^2\times2}=\sqrt{98}$,$3\sqrt{11}=\sqrt{3^2\times11}=\sqrt{99}$,$98<99$,

$\therefore \sqrt{98}<\sqrt{99}$,$\therefore 7\sqrt{2}<3\sqrt{11}$.

解法二:$\because 7\sqrt{2}>0$,$3\sqrt{11}>0$,且 $(7\sqrt{2})^2=7^2\times(\sqrt{2})^2=49\times2=98$,$(3\sqrt{11})^2=3^2\times(\sqrt{11})^2=9\times11=99$,$98<99$,

$\therefore (7\sqrt{2})^2<(3\sqrt{11})^2$,

$\therefore 7\sqrt{2}<3\sqrt{11}$.

(2)$\because -2\sqrt{11}=-\sqrt{44}$,$-3\sqrt{5}=-\sqrt{45}$,$44<45$,

$\therefore -\sqrt{44}>-\sqrt{45}$,

$\therefore -2\sqrt{11}>-3\sqrt{5}$.