

26.1 投 影

知识清单

- 知识1 投影
 知识2 平行投影
 知识3 平行投影的变化规律
 知识4 中心投影
 知识5 平行投影与中心投影的区别与联系
 知识6 正投影

知识 1 投影

一般地,用光线照射物体,在某个平面(地面、墙壁等)上得到的影子叫做物体的投影.其中,照射光线叫做投影线,投影所在的平面叫做投影面.

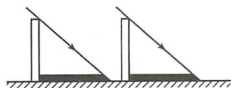
知识 2 平行投影

1.定义:

太阳光线可以看成平行光线,像这样的光线所形成的投影称为平行投影.

2.平行投影的特征:

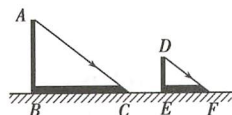
(1)如图,等高的物体垂直于地面放置时,同一时刻,它们在太阳光下的影子一样长



(2)如图,等长的物体平行于地面放置时,同一时刻,它们在太阳光下的影子一样长,并且都等于物体本身的长度



(3)如图,不等高的物体垂直于地面放置时,同一时刻,它们在太阳光下的物高与影长成比例,即 $\frac{AB}{BC} = \frac{DE}{EF}$ (其理论依据是相似三角形对应边成比例, AB, DE 分别是物体的高, BC, EF 是相应的影长)



知识 3 平行投影的变化规律

1.太阳光线下物体影子的长短不仅与物体的高度有关,而且与时间有关.同一时刻,高物体的影子较长;同一时刻,所有物体的影子与其高度成正比.

2.太阳光线下物体影子的方向和长度变化规律(北半球)如下:

一天之中,由于太阳东升西落,所以早晨人的影子向

西,傍晚人的影子向东.例如一天之中,影子的方向变化为正西—西北—正北—东北—正东;一天之中影子的长度变化为长—短—长.

例1 下面四幅图是两个物体不同时刻在太阳光下的影子,按照时间的先后顺序正确的是 ()



- A. ①→②→③→④
 B. ④→②→③→①
 C. ③→④→①→②
 D. ①→③→②→④

解析 根据平行投影的特点和规律可知,图①的影子指向东北,说明是下午;图②的影子指向正东,说明是傍晚;图③的影子指向正西,说明是早晨;图④的影子指向西北,说明是上午.所以按时间顺序排列为③④①②.故选 C.

答案 C

知识 4 中心投影

1.定义:若一束光线是从一点发出的,这样的光线形成的投影称为中心投影,这个“点”就是中心,相当于物理上学习的“点光源”.生活中的点光源主要有探照灯、手电筒、路灯、台灯、投影仪、放映机的灯光等.

2.中心投影的特征:

(1)等高的物体垂直于地面放置时,如图1,离点光源近的物体的影子短;离点光源远的物体的影子长.

(2)等长的物体平行于地面放置时,如图2,一般情况下,离点光源越近,影子越长;离点光源越远,影子越短,但不会小于物体本身的长度.

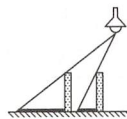


图1

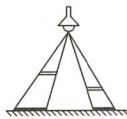
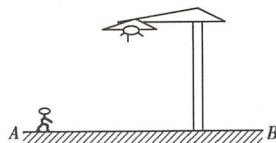


图2

(3)点光源、物体边缘的点以及它的影子上的对应点在同一条直线上,根据其中两个点,就可以得到第三个点的位置.

例2 如图所示,晚上小亮在路灯下散步,在小亮由A处走到B处的过程中,他在地上的影子 ()



- A. 逐渐变短
 B. 逐渐变长
 C. 先变短后变长
 D. 先变长后变短

解析

| 过程 | 影子的变化 | 依据或理由 |
|-------------|-------|------------------------------------|
| 由 A 处到路灯正下方 | 变短 | 物体垂直于地面放置时, 离点光源越近影子越短, 离点光源越远影子越长 |
| 由路灯正下方到 B 处 | 变长 | |

答案 C

知识 5 平行投影与中心投影的区别与联系

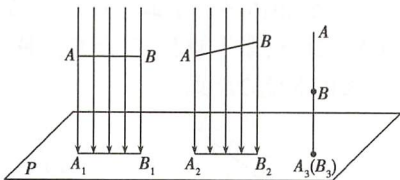
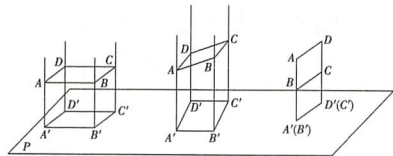
| | 区别 | 联系 |
|------|---|--|
| 平行投影 | 平行投影下, 同一时刻所有物体的影子朝同一方向, 且物高与影长之比皆相等 | ①影子都随投影面的变化而发生变化. ②都可以根据物体与影子的对应点判断光线的来源与方向 |
| 中心投影 | 中心投影下, 同一时刻, 物体的影子方向及大小跟它与点光源的位置及距离密切相关 | |



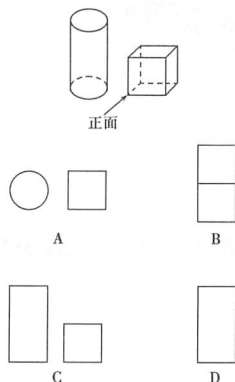
易混对比

在平行投影中, 同一时刻改变物体的方向和位置, 其投影也跟着发生变化; 在中心投影中, 同一灯光下, 改变物体的位置和方向, 其投影也跟着发生变化. 在中心投影中, 固定物体的位置和方向, 改变灯光的位置, 物体投影的方向和位置也要发生变化.

知识 6 正投影

| | |
|----------|--|
| 正投影 | 在平行投影中, 如果投影线与投影面互相垂直, 就称为正投影 |
| 线段的正投影 | <p>(1) 当木棒 AB 平行于投影面 P 时, 它的正投影是线段 A_1B_1, 木棒与它的投影的大小关系为 $AB=A_1B_1$;</p> <p>(2) 当木棒 AB 倾斜于投影面 P 时, 它的正投影是线段 A_2B_2, 木棒与它的投影的大小关系为 $AB>A_2B_2$;</p> <p>(3) 当木棒 AB 垂直于投影面 P 时, 它的正投影是一个点 $A_3(B_3)$</p>  |
| 平面图形的正投影 | <p>(1) 当纸板 $ABCD$ 平行于投影面 P 时, $ABCD$ 的正投影与 $ABCD$ 的形状、大小一样;</p> <p>(2) 当纸板 $ABCD$ 倾斜于投影面 P 时, $ABCD$ 的正投影与 $ABCD$ 的形状、大小不一样;</p> <p>(3) 当纸板 $ABCD$ 垂直于投影面 P 时, $ABCD$ 的正投影为一条线段</p>  |

例 3 观察如图所示的物体, 若投影线的方向如箭头所示, 则它们的正投影是下列选项中的 ()



解析 圆柱的正投影是长方形, 其中短边等于圆柱底面的直径, 长边等于圆柱的高; 正方体的正投影是与它一个面全等的正方形, 且长方形在正方形的左边. 故选 C.

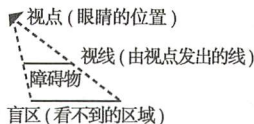
答案 C

知识拓展 视点、视线、视角与盲区

观测点的位置叫做视点, 由视点发出的观测线叫做视线, 两条视线的夹角叫做视角.

视点常常指眼睛的位置, 视线并不是太阳光线或灯光光线等实际存在的线, 常用虚线表示.

视线遇到障碍物, 会有看不到的地方, 称为盲区.



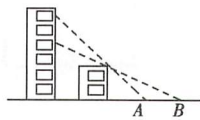
①人离障碍物越近, 盲区越大.

②将视点与障碍物的顶点连接并延长, 交地面于一点, 此点即是盲区与非盲区的分界点.

例 小明与小刚分别住在同一幢楼的四层和六层, 他们楼前有一供热中心, 准备去他们家家访的王老师在下面喊他们, 小明说: “王老师在哪儿呢?” 小刚则说: “我看到王老师啦!” 请问此时王老师在什么位置? (王老师的身高忽略不计)

解析 王老师在小区的盲区内, 所以小明看不到, 王老师在小区的盲区外, 所以小刚能看到, 由此题可以得出结论: 楼层越高盲区越小.

如图所示, 此时王老师在点 A 上 (不包括 B 点, 包括 A 点).



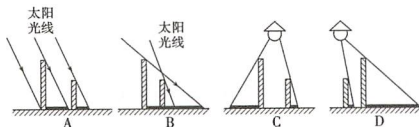
方法清单

- 方法1 平行投影与中心投影的识别方法 ★★
 方法2 确定平行投影下物体的影子的方法 ★★
 方法3 中心投影的应用方法 ★★
 方法4 利用平行投影确定影长的方法 ★★
 方法5 利用相似图形解决投影问题的方法 ★★

方法1 平行投影与中心投影的识别方法

根据两物体的影子判断其是在灯光下还是在阳光下的投影,关键是看这两个物体的顶端和其影子的顶端的连线是平行还是相交,若平行则是在阳光下的投影,若相交则是在灯光下的投影.

例1 下列物体的影子,不正确的是 ()



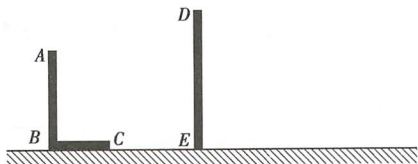
解析 太阳光线是平行的,故影长与物体高度成正比,所以 A 中的影子正确;太阳光线是平行的,故 B 中的影子错误;因为物体在光源两侧,所以影子方向不同,故 C 中的影子正确;因为灯光是发散的,所以影长与物体高度不成比例且物体在光源同侧,影子方向相同,故 D 中的影子正确.

答案 B

方法2 确定平行投影下物体的影子的方法

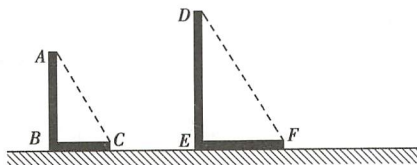
同一时刻太阳光线是平行的,所以物体的影子都是在和确定的平行光线形成的,过所求物体顶端作太阳光线或已知平行投影线的平行线,便可画出同一时刻物体的影子.

例2 如图,已知 AB 和 DE 是直立在地面上的两根立柱,AB=5 cm,某一时刻 AB 在阳光下的投影 BC=3 cm,请在图中画出此时 DE 在阳光下的投影.



解析 连接 AC, AC 所在的直线就是太阳光线.因为平行投影的投影线是平行的,所以只要从点 D 处作太阳光线的平行线即可得 DE 在阳光下的投影.

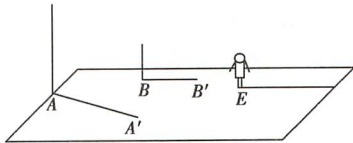
如图,EF 就是 DE 在阳光下的投影.



方法3 中心投影的应用方法

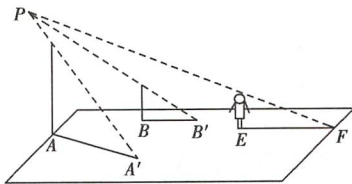
光源和物体所处的位置及方向影响物体的中心投影,光源或物体的方向改变,则该物体的影子的方向也发生变化,但光源、物体的影子始终在物体的两侧.

例3 如图是两根标杆及它们在灯光下的影子,请在图中画出点光源的位置(用点 P 表示),并在图中画出人在这个点光源下的影子(用线段 EF 表示).



思路分析 分别过标杆的顶端及其影子的顶端作直线,两条直线的交点即为点光源的位置,从而可画出人在该点光源下的影子.

解析 如图,点 P 是点光源,EF 是人在点光源 P 下的影子.



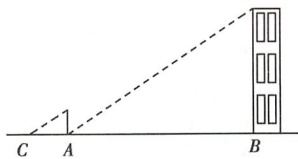
方法4 利用平行投影确定影长的方法

1. 同一时刻太阳光下:

$$\frac{\text{物体的高度}}{\text{物体的影长}} = \frac{\text{另一物体的高度}}{\text{另一物体的影长}}$$

2. 落在墙上的影长即为对应的此部分物体的高度.

例4 小明在测量楼高时,先测出楼房落在地面上的影长 BA 为 15 米(如图),然后在 A 处竖立一根高 2 米的标杆,测得标杆的影长 AC 为 3 米,则楼高为 ()



- A. 10 米 B. 12 米 C. 15 米 D. 22.5 米

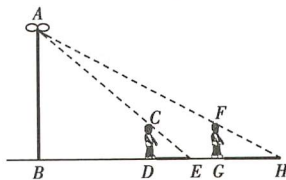
解析 \because 在同一时刻物高和影长成正比, $\therefore \frac{\text{标杆的高}}{\text{标杆的影长}} = \frac{\text{楼高}}{\text{楼影长}}$, 即 $\frac{2}{3} = \frac{\text{楼高}}{15}$, \therefore 楼高为 10 米. 故选 A.

答案 A

方法5 利用相似图形解决投影问题的方法

物体的投影分为中心投影和平行投影.一般来说,中心投影中,物体影子的长短主要取决于物体所处的位置,而平行投影中,影子的长短主要取决于物体的高度.投影中难度较大的题目往往是与相似三角形、解直角三角形等知识相结合而形成的综合题.其主要解题思路是由投影的特点构造相似三角形,并利用相似三角形、直角三角形的性质求解相关问题.

例5 如图,有一路灯杆 AB,在灯光下,大华在 D 点处的影长 DE=3 米,沿 BD 方向行走到达 G 点, DG=5 米,这时大华的影长 GH=5 米.如果大华的身高为 2 米,求路灯杆 AB 的高度.



解析 $\because CD \parallel AB$,
 $\therefore \triangle EAB \sim \triangle ECD$,
 $\therefore \frac{CD}{AB} = \frac{DE}{BE}$, 即 $\frac{2}{AB} = \frac{3}{3+BD}$ ①.
 $\because FG \parallel AB$, $\therefore \triangle HFG \sim \triangle HAB$,
 $\therefore \frac{FG}{AB} = \frac{HG}{HB}$, 即 $\frac{2}{AB} = \frac{5}{BD+5+5}$ ②,

由①②得 $\frac{3}{3+BD} = \frac{5}{BD+5+5}$,
 $\therefore BD = 7.5$ 米,
 $\therefore \frac{2}{AB} = \frac{3}{7.5+3}$,
 $\therefore AB = 7$ 米.
 答:路灯杆 AB 的高度为 7 米.

26.2 三视图

知识清单

- 知识 1 几何体的三视图
- 知识 2 常见几何体的三视图
- 知识 3 几何体三视图的画法
- 知识 4 组合体的三视图

知识 1 几何体的三视图

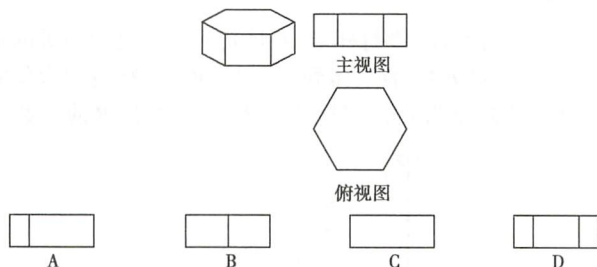
| | 内容 |
|-----|---|
| 视图 | 当我们从某一角度观察一个物体时,所看到的图形叫做物体的一个视图 |
| 三视图 | 用三个互相垂直的平面作为投影面,其中正对着我们的叫做正面,正面上方的叫做水平面,右边的叫做侧面.一个物体在三个投影面内同时进行正投影,在正面内得到的由前向后观察物体的视图叫做主视图;在水平面内得到的由上向下观察物体的视图叫做俯视图;在侧面内得到的由左向右观察物体的视图叫做左视图 |
| 图例 | |



温馨提示

主视图、俯视图和左视图都是相对于观察者而言的,位于物体不同方向的观察者,他们所画出的三种视图可能是不一样的.

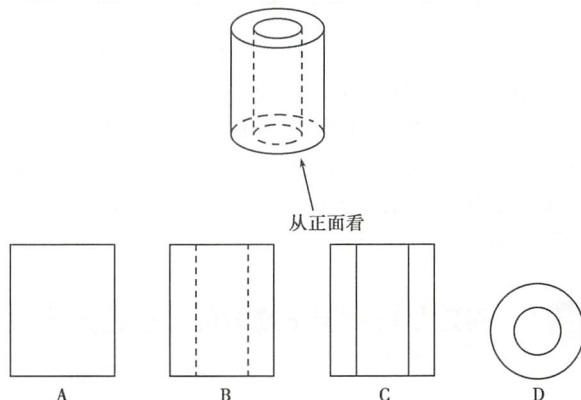
例 1 一个几何体及其主视图和俯视图如图所示,那么它的左视图正确的是 ()



解析 由几何体的主视图和俯视图可知该几何体为正六棱柱,则从左面看应该是两个并列并且大小相同的矩形,故 B 正确.

答案 B

例 2 如图,空心圆柱体的主视图是 ()











解析 因为该几何体为空心圆柱体,所以它的主视图的轮廓应为矩形,但中间的轮廓线是看不见的,应用虚线表示,故选 B.

答案 B

知识 2 常见几何体的三视图

| 几何体 | 主视图 | 左视图 | 俯视图 |
|---------|-----|-----|-----|
| 正方体 | | | |
| 长方体 | | | |
| 圆柱 | | | |

续表

| 几何体 | 主视图 | 左视图 | 俯视图 |
|---|---|---|---|
|  圆锥 |  |  |  |
|  球 |  |  |  |

知识 3 几何体三视图的画法

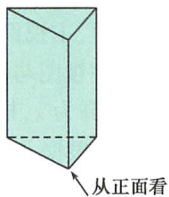
| | 内容 |
|--------|---|
| 摆放位置关系 | 俯视图在主视图的下方,左视图在主视图的右边 |
| 实虚关系 | 看得见的部分的轮廓线画成实线,被其他部分遮挡而看不见的部分的轮廓线画成虚线 |
| 画法 | (1)确定主视图的位置,画出主视图; (2)在主视图的正下方画出俯视图,注意与主视图“ 长对正 ”; (3)在主视图正右方画出左视图,注意与主视图“ 高平齐 ”,与俯视图“ 宽相等 ” |



温馨提示

主视图反映物体的长与高,左视图反映物体的宽与高,俯视图反映物体的长与宽.在画各种视图时,要对物体的长、宽、高进行度量,不要求百分之百与物体等大,但要控制误差.

例 3 画出图中的正三棱柱的三视图.



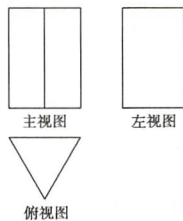
方法清单

- 方法1 几何体的三视图的识别方法
- 方法2 由三视图还原几何体的方法
- 方法3 由三视图确定小正方体的个数的方法
- 方法4 根据三视图求几何体的体积或表面积的方法

方法 1 几何体的三视图的识别方法

掌握几种简单几何体的三视图是识别几何体的三视图的基础.日常生活中看到的很多物体,它们的形状不规则,但是它们一般可以看作由一些基本几何体(棱柱、棱台、棱锥、圆柱、圆台、圆锥、球等)组合成的或切割而成的.

解析 画正三棱柱的三视图,关键是确定从正面、左面、上面三个方向看到的平面图形.如图.



知识 4 组合体的三视图

1.将具体实物合理地抽象成简单几何体的组合体,再将简单几何体的组合体分解成单个几何体,然后画出三视图.

2.画一个非常规的组合体的三视图的方法:

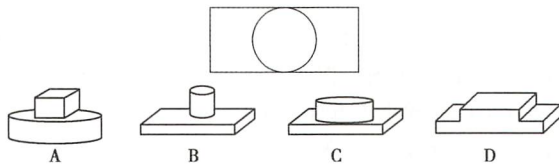
首先要认真观察,判断组合体的组成部分,然后按照画几何体三视图的方法正确画出它的三视图.





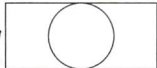

温馨提示

组合体是由几种基本几何体“改造”而成的,它的三视图也可以根据基本几何体的三种视图进行绘制,但要注意虚线、实线的区别,尺寸需尽可能地反映物体的原貌.

例 4 下列四个物体的俯视图与所给出的视图一致的是 ()

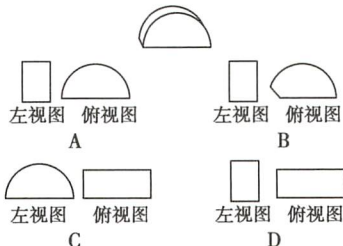


解析 A 选项中的组合体的俯视图为 , B 选项

中的组合体的俯视图为 , C 选项中的组合体的俯视图为 , D 选项中的组合体的俯视图为 .故选 C.

答案 C

例 1 如图所示的几何体,它的左视图与俯视图都正确的是 ()



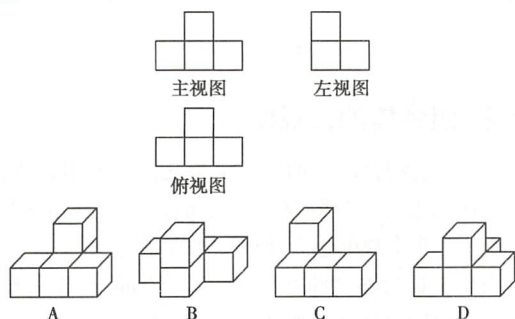
解析 该几何体的左视图是长、宽分别等于圆的半径和几何体厚度的矩形,俯视图是长、宽分别等于圆的直径和几何体厚度的矩形,故选 D.

答案 D

方法 2 由三视图还原几何体的方法

由三视图描述几何体,一般先根据各视图想象从各个方向看到的几何体形状,然后综合起来确定几何体的形状,再根据三个视图“长对正、高平齐、宽相等”的关系,确定轮廓线的位置以及各个面的尺寸.

例 2 如图,三视图对应的几何体是 ()



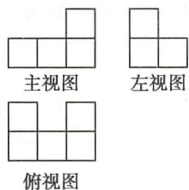
解析 观察三视图和各选项中的立体图形,从主视图看排除选项 C;从左视图看排除选项 B 和 D;选项 A 符合三视图的要求,故选 A.

答案 A

方法 3 由三视图确定小正方体的个数的方法

已知一个几何体的两种视图(含俯视图),其形状不能确定时,可先由俯视图把握几何体的堆叠方式,再结合另一个视图确定可能的小正方体的个数.

例 3 下面是几个一样的小正方体摆出的立体图形的三视图,由三视图可知小正方体的个数为 ()



A. 3 B. 4 C. 5 D. 6

解析 根据题中三视图,在俯视图中标出该位置处小正方体的个数,如图所示.

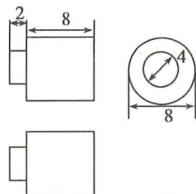
| | | |
|---|---|---|
| 1 | | 2 |
| 1 | 1 | 1 |

答案 D

方法 4 根据三视图求几何体的体积或表面积的方法

由三视图求几何体的体积或表面积时,首先要根据三视图描述几何体,再根据三视图“长对正、高平齐、宽相等”的关系和轮廓线的位置确定各个面的尺寸,然后求表面积或体积.

例 4 如图是某几何体的三视图,根据图中标的数据求得该几何体的体积为 ()

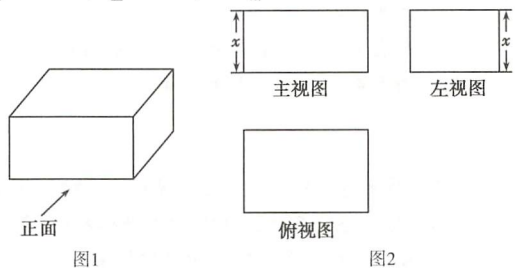


A. 236π B. 136π
C. 132π D. 120π

解析 由三视图可知,几何体是由两个圆柱组成的,故该几何体的体积为 $\pi \times 2^2 \times 2 + \pi \times 4^2 \times 8 = 8\pi + 128\pi = 136\pi$. 故选 B.

答案 B

例 5 图 2 是图 1 中长方体的三视图,若用 S 表示面积,且 $S_{\text{主}} = x^2 + 2x$, $S_{\text{左}} = x^2 + x$,则 $S_{\text{俯}} =$ ()



A. $x^2 + 3x + 2$ B. $x^2 + 2$
C. $x^2 + 2x + 1$ D. $2x^2 + 3x$

解析 画物体的三视图时,主视图与俯视图“长对正”、主视图与左视图“高平齐”、左视图与俯视图“宽相等”.由长方体的三视图可知长方体的高为 x ,根据 $S_{\text{主}} = x^2 + 2x$ 可得长方体底面长方形的长为 $x+2$;根据 $S_{\text{左}} = x^2 + x$ 可得长方体底面长方形的宽为 $x+1$,所以 $S_{\text{俯}} = (x+2)(x+1) = x^2 + 3x + 2$,故选 A.

答案 A