המכללה האקדמית תל אביב יפו
בית הספר למדעי המחשב

מבני נתונים, 121111
ד"ר שראל כהן, ד"ר מור פרי
תשפ''ד, סמסטר ב', מועד ב', 26/07/2024

מספר זהות:

משך הבחינה: 3 שעות
ללא חומר עזר למעט דפי העזר המצורפים לטופס הבחינה ומחשבון.

לפניך בחינה בחלקים:
חלק א - שאלות סגורות - 48 נקודות
חלק ב - שאלות פתוחות - 52 נקודות
הנחיות למענה מופיעות בתחילת כל חלק.

בהצלחה!

חלק א - שאלות סגורות - 48 נקודות

- חלק זה מורכב משש שאלות רב-ברירה, 8 נק' לכל שאלה.

שאלה מס' 1 (8 נק')

נתונות 5 טענות, (הניחו שכל הלוגריתמים הם בבסיס 2) :

טענה 1: $n^{\mathrm{n}\log n} = \Omega(\ 2^{n!})$

טענה 2: $(n)^{\frac{1}{10}} = O(\log n)$

טענה 3: $\dfrac{\log n}{\log\log n} = \Omega\left(\dfrac{\sqrt{n}}{\log n}\right)$

טענה 4: $2^{2n} = O(3^{\mathrm{n}\log n})$

טענה 5: $2^{2n} = O(3^{\mathrm{n}})$

מה מההיגדים הבאים נכון:

א. יש טענה נכונה אחת והיתר שגויות.

ב. יש שתי טענות נכונות והיתר שגויות.

ג. יש שלוש טענות נכונות והיתר שגויות.

ד. יש ארבע טענות נכונות והיתר שגויות.

ה. כל חמש הטענות נכונות.

ו. כל חמש הטענות שגויות.

שאלה מס' 2 (8 נק')

נתונה הפונקציה הבאה שעושה שימוש בפונקציה calc שתוגדר בהמשך:

```
int func (int A[ ], int n)
{
    int  i,j,k,sum;
    if (n<=1)
          return 1;
    sum=0
    for (i = 2 ; i ≤ n ; i = i * i)
          for (j = 2 ; j ≤ 2^i ; j = j * j)
                sum ++
    k = calc(n)
    for (j = 1; j <= k; j++)
          sum += func(A, n/2);
    return sum
}
```

הפונקציה נקראת עם מערך A וגודלו n.
הניחו שעלות חישוב הפונקציה calc היא O(1).

הדר טוענת: אם calc(n)=1, אז עלות func היא $\theta(n \log n)$

ליאור טוענת: אם calc(n)=1, אז עלות func היא $\theta(\log^2 n)$

יוליה טוענת: אם calc(n)=1, אז עלות func היא $\theta(\log \log n)$

מיטל טוענת: אם calc(n)=2, אז עלות func היא $\theta(n \log n)$

מאיה טוענת: אם calc(n)=2, אז עלות func היא $\theta(n \log^2 n)$

מה מההיגדים הבאים נכון:

א. ליאור צודקת והשאר טועות.

ב. מיטל צודקת והשאר טועות.

ג. ליאור ומיטל צודקות והשאר טועות.

ד. הדר ומיטל צודקות והשאר טועות.

ה. הדר ומאיה צודקות והשאר טועות.

ו. אף היגד מההיגדים האחרים אינו נכון.

שאלה מס' 3 (8 נק')

נתונים שני עצי 2-3 T_2 ו T_3, שכל אחד מהם מחזיק n מפתחות.

בעץ T_2 הדרגה של כל קדקוד פנימי היא 2, ובעץ T_3 הדרגה של כל קדקוד פנימי היא 3.

מבצעים הכנסה של מפתח חדש לכל אחד מהעצים באמצעות הפעולה Insert של עץ 2-3 כפי שנלמדה בכיתה.
נסמן ב x_2 את מספר הקדקודים הפנימיים שעברו פיצול במהלך ההכנסה ל T_2,

ונסמן ב x_3 את מספר הקדקודים הפנימיים שעברו פיצול במהלך ההכנסה ל T_3.

מה ניתן להגיד על סדרי הגודל של x_2 ושל x_3?

א. בטוח ש $x_2 = O(1)$ וגם $x_3 = \theta(\log n)$.

ב. יכול להיות ש $x_2 = O(1)$ וגם $x_3 = O(1)$.

ג. יכול להיות ש $x_2 = \theta(\log n)$ וגם $x_3 = \theta(\log n)$.

ד. בטוח ש $x_2 = \theta(\log n)$ וגם $x_3 = O(1)$.

ה. יש יותר מתשובה נכונה אחת מבין התשובות א-ד.

ו. אף אחת מהתשובות א-ד אינה נכונה.

שאלה מס' 4 (8 נק')

נתון אלגוריתם שזמן הריצה הממוצע שלו הוא $\theta((n \log n)^2)$

טענה 1: בטוח שזמן הריצה של האלגוריתם במקרה הגרוע הוא $O(n^4)$ (נקרא: או גדול)

טענה 2: בטוח שזמן הריצה של האלגוריתם במקרה הטוב הוא $O(n^2)$ (נקרא: או גדול)

טענה 3: ייתכן שזמן הריצה של האלגוריתם במקרה הגרוע הוא $O(n^2)$ (נקרא: או גדול)

טענה 4: ייתכן שזמן הריצה של האלגוריתם במקרה הטוב הוא $o(n \log n)$ (נקרא: או קטן)

טענה 5: ייתכן שזמן הריצה של האלגוריתם במקרה הטוב הוא $\omega(n \log n)$

מה מההיגדים הבאים נכון:

א. 4,5 נכונות והיתר שגויות.

ב. 3,4,5 נכונות והיתר שגויות.

ג. 1,3,4 נכונות והיתר שגויות.

ד. 2,5 נכונות והיתר שגויות.

ה. יש רק טענה נכונה אחת והיתר שגויות.

ו. אף היגד מההיגדים האחרים אינו נכון.

שאלה מס' 5 (8 נק')

נתון האלגוריתם הבא הנקרא SortTogether, המקבל בקלט מערך A[] ואת גודלו n. המערך מכיל את כל המספרים השלמים מ1 עד n באיזשהו סדר (מופע אחד של כל מספר).

תיאור האלגוריתם SortTogether(A[ ],n):

- **על $\sqrt{n}$ האיברים השמאליים מריצים את אלגוריתם Quick Sort (מיון מהיר)**
- **על יתר האיברים ($n-\sqrt{n}$ האיברים הימניים) מריצים את אלגוריתם Merge Sort (מיון מיזוג)**
- **ממזגים את שני החלקים הממוינים ($\sqrt{n}$ האיברים השמאליים ו $n-\sqrt{n}$ האיברים הימניים) באמצעות הפעולה Merge.**

בהנחת התפלגות אחידה על הקלט (כלומר, כל פרמוטציה של המספרים 1 עד n יכולה להופיע בקלט באותה ההסתברות), מה זמן הריצה של אלגוריתם SortTogether במקרה הגרוע, ומה זמן הריצה במקרה הממוצע?

א. במקרה הגרוע $\theta(n \log n)$ ובמקרה הממוצע $\theta(n \log n)$.

ב. במקרה הגרוע $\theta(n^2)$ ובמקרה הממוצע $\theta(n \log n)$.

ג. במקרה הגרוע $\theta(n \log n)$ ובמקרה הממוצע $\theta(n)$.

ד. במקרה הגרוע $\theta(n^2)$ ובמקרה הממוצע $\theta(n)$.

ה. לא ניתן לקבוע במדויק את סדרי הגודל של זמני הריצה לפי נתוני השאלה.

ו. אף אחת מהתשובות א-ה אינה נכונה.

שאלה מס' 6 (8 נק')

נתונה טבלת ערבול עם שרשור בגודל m=4.
המפתחות המגיעים למבנה נבחרים באופן אקראי מהתחום $\{0,\ldots,399\}$ בהתפלגות הבאה:

כל איבר מהתחום $\{0,\ldots,99\}$ בהסתברות $\frac{1}{200}$

וכל איבר מהתחום $\{100,\ldots,399\}$ בהסתברות $\frac{1}{600}$

(שימו לב שההתפלגות בשאלה זו אינה אחידה. לשם השוואה, בהתפלגות אחידה, כל איבר מהתחום $\{0,\ldots,399\}$ נבחר בהסתברות $\frac{1}{400}$)

איזו מהפונקציות הבאות היא פונקציית ערבול אחידה לפי נתוני השאלה?

א. $h(k)=k \bmod 4$.

ב. $h(k)=k \bmod 400$.

ג. $h(k)=\left\lfloor \frac{k}{100} \right\rfloor$.

ד. $h(k)=\left\lfloor \frac{k}{100} \right\rfloor \bmod 4$.

ה. יש יותר מתשובה נכונה אחת מבין התשובות א-ד.

ו. אף אחת מהתשובות א-ד אינה נכונה.

חלק ב - שאלות פתוחות - 52 נקודות

- בחלק זה יש שתי שאלות, יש לענות עליהן על גבי טופס המבחן במקום המוקצה לכך. לא תיבדקנה תשובות שתרשמנה במחברות הטיוטה.
- נסחו במפורש ובמדויק כל תוצאה שהוכחנו בכיתה ואתם משתמשים בה.

שאלה מס' 7 (26 נק')

ברצוננו לממש את טיפוס הנתונים המופשט תור. כלומר, את הפעולות:
MakeEmpty()
IsEmpty()
EnQueue(x)
DeQueue()

ברשותכם רק 2 מחסניות S_1, S_2 כטיפוס נתונים מופשט (ADT), עם הפעולות הבאות:

MakeEmpty()
IsEmpty()
Push(x)
Pop()

זמן הריצה של כל סדרה של n פעולות של התור במימוש שלכם נדרש להיות θ(n), בהינתן שכל פעולת מחסנית מבוצעת ב θ(1).
בפתרון שלכם אין להשתמש בתוצאות שראינו בכיתה בהקשר של שאלה זו.

תיאור MakeEmpty()

תיאור IsEmpty()

תיאור EnQueue(x)

תיאור DeQueue()

הוכחה שזמן הריצה של כל סדרה של n פעולות תור הוא $O(n)$

הוכחה שזמן הריצה של כל סדרה של n פעולות תור הוא $\Omega(n)$

שאלה מס' 8

שאלה זו עוסקת במבנה הנתונים ערימה.

שאלה מס' 8.1 (13 נק')

נתון האלגוריתם של פלויד לבניית ערימת מקסימום ממערך בגודל n.

```
for (i = n/2-1; i >= 0; i--)
    FixHeap(i);
```

נתחו את זמן הריצה של האלגוריתם של פלויד על ערימה שהיא עץ שלם.
חשבו והסבירו את כל שלבי החישוב.
בסעיף זה אין להשתמש בתוצאות שראינו בכיתה בהקשר של ניתוח זה.
מותר להשתמש בטענה: $\sum_{i=1}^{\infty}\frac{i}{2^i}=2$

זמן הריצה של האלגוריתם של פלויד

T(n) = θ(   )

הוכחה:

T(n) = Ω(   )

$T(n) = O(\qquad\qquad)$

<u>שאלה מס' 8.2 (13 נק')</u>

ראינו כיצד מתבצעת הפעולה deleteMax בערימת מקסימום, ושזמן הריצה של הפעולה במקרה הגרוע הוא $\theta(\log n)$ כאשר מתבצעת על ערימה בגודל n.
בסעיף זה נתייחס לבעיית ה deleteMax ולא לאלגוריתם הספציפי שראינו עבורה, ונבחן האם קיים אלגוריתם טוב יותר.
בעיית ה deleteMax מוגדרת כך:
קלט: ערימת מקסימום H בגודל n
פלט: ערימת מקסימום H' בגודל n-1 המכילה את כל אברי H פרט לאחד בעל ערך מקסימלי.

הוכיחו או הפריכו: קיים אלגוריתם לבעיית ה deleteMax שזמן הריצה שלו במקרה הגרוע הוא $o(\log n)$ (נקרא: או קטן).

<u>הוכחה/הפרכה</u>