از سری کتابهای کمک آموزشی گام

همراه با آزمونهای سالهای قبل

کاملترین راهنما و بانک سؤالات

مدارهای الکتریکی (۱)

ویژهٔ دانشجویان دانشگاه پیام نور

براساس کتاب

دکتر عبدالمحمد شهبانی

دکتر رحمت الله هوشمند

تألیف: گروه مؤلفان انتشارات ملکان

کاملترین راهنما و بانک سؤالات مدارهای الکتریکی (۱) تألیف گروه مؤلفان انتشارات ملکان

نشر ملکان

انتشارات ملکان

از کلیهٔ اساتید، صاحبنظران و علاقه مندان به تألیف و ترجمهٔ کتب در زمینه های گوناگون برای ثبت سرمایهٔ معنوی ایشان دعوت به همکاری می کند.

انتشارات ملکان عرضه کنندهٔ کلیهٔ کتب درسی و کمک آموزشی دانشگاه پیام نور (کارشناسی، کارشناسی ارشد و دکترا)

انتشارات ملکان
مرکز نشر، توزیع و فروش کتابهای کمک آموزشی پیام نور
تهران، خیابان انقلاب، خیابان ۱۲ فروردین، پلاک ۱۳
فروشگاه: ۶۶۴۶۰۹۳۴ انتشارات: ۶۶۴۶۹۹۱۸ نمابر: ۶۶۹۶۱۳۴۴
Email:nashr_malekan@yahoo.com

مرکز پخش و فروشگاه گام
نماینده رسمی فروش کتب دانشگاه پیام نور
تهران، خیابان انقلاب، بین اردیبهشت و ۱۲ فروردین ساختمان ۳۱۰ طبقه اول

ISBN 978-600-5390-50-6

فهرست مطالب

۹۰/۲/۷

فصل اول

مقدمه

۱-۱ مدارات مقاومتی

جریان: جریان یک نقطه خاص در یک جهت خاص، آهنگ زمانی عبور بار مثبت از آن نقطه، در آن جهت است و جریان را با i یا I نشان می‌دهند:

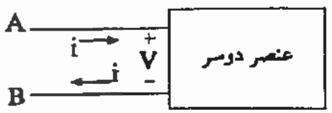
$$i=\frac{dq}{dt} \qquad (۱-۱)$$

واحد جریان آمپر (A) می‌باشد، q میزان بار متغیر با زمان می‌باشد که مقدار لحظه‌ای بار می‌نامیم که واحد بار کولن می‌باشد. برای بدست آوردن باری که در فاصله t_0 یا t منتقل می‌شود از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$q\Big|_{t_0}^{t}=\int_{t_0}^{t} i\,dt \Rightarrow q=\int_{t_0}^{t} i\,dt+q(t_0) \qquad (۲-۱)$$

انواع جریان در مدارهای الکتریکی عبارتند از: جریان مستقیم (dc)، جریان سینوسی (ac)، جریان نمایی، جریان سینوسی میرا و لازم به ذکر است که جهت جریان در مدارهای الکتریکی، یک جهت دلخواه می‌باشد.

ولتاژ: با v یا V نمایش داده شده و واحد آن «ولت» می‌باشد. اگر به یک عنصر الکتریکی که جریان پایانه A وارد می‌شود و از پایانه B خارج می‌شود دو سر پایانه مربوطه (A,B) یک اختلاف پتانسیل ایجاد می‌شود که ولتاژ دو سر عنصر می‌گویند جهت قراردادی ولتاژ در مدارات الکتریکی به صورت زیر می‌باشد:

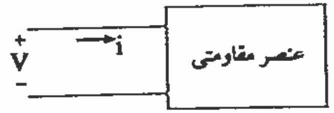


شکل ۱-۱ جهت قراردادی ولتاژ جریان در یک عنصر دوسر

با توجه به جهت جریان، در پایانه ورودی جریان، جهت مثبت ولتاژ و در پایانه خروجی جریان، جهت منفی ولتاژ در نظر می‌گیرند.

توان: توان مصرفی در یک عنصر مقاومتی برحسب ولتاژ و جریان آن عنصر تعیین می‌شود که مقدار توان مصرفی در یک عنصر مقاومتی به صورت زیر محاسبه می‌شود (با توجه به جهت قراردادی)

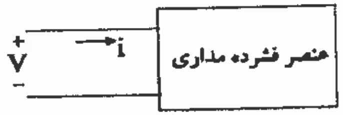
$$p = vi \tag{۱-۳}$$



شکل ۱-۲ عنصر مقاومتی

و واحد توان مصرفی بر حسب وات می‌باشد.

در هر عنصر مداری با توجه به جهت قراردادی زیر می‌توان مقدار توان جذب شده یا تولید شده را مشخص نمود (ولتاژ برحسب ولت و جریان برحسب آمپر می‌باشد).



$$p = vi$$

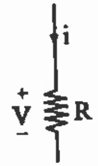
اگر $p > 0$، عنصر مربوطه، p وات توان مصرف می کند، اگر $p < 0$ باشد عنصر مورد نظر p وات توان تولید می‌کند.

if $p>0$ — توان مصرف می‌کند

if $p<0$ — توان تولید می‌کند

برای یک عنصر مقاومتی، بین ولتاژ و جریان رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$V = Ri \tag{۱-۴}$$



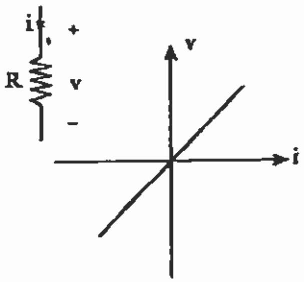
شکل ۱-۳ مقاومت

R اندازه مقاومت موردنظر بر حسب اهم می‌باشد.

۱-۲ مقاومت

مقاومت خطی تغییر ناپذیر با زمان

در این مقاومت رابطه ولتاژ و جریان به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۱-۴

$$v(t) = Ri(t) \Rightarrow i = \frac{v}{R}$$

$$i(t) = Gv(t) \quad ; \quad G = \frac{1}{R} \tag{۱-۵}$$

که در آن R اندازهٔ مقاومت و G رسانایی است.

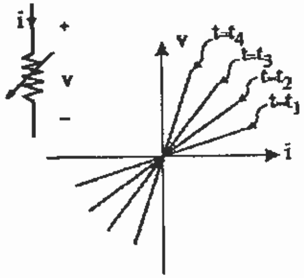
v برحسب ولت (V)، i برحسب آمپر (A)، R برحسب اهم (Ω) و G برحسب مهو (℧) می‌باشند.

مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان

در این مقاومت مقادیر R و یا G با زمان تغییر می‌نمایند.

$$v(t) = R(t)i(t) \tag{۱-۶}$$

$$i(t) = G(t)v(t) \; ; \quad G(t) = \frac{1}{R(t)} \tag{۱-۷}$$



شکل ۱-۵ مشخصهٔ مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان

اگر v تابعی از i باشد و معکوس‌پذیر نباشد (یک به یک نباشد):

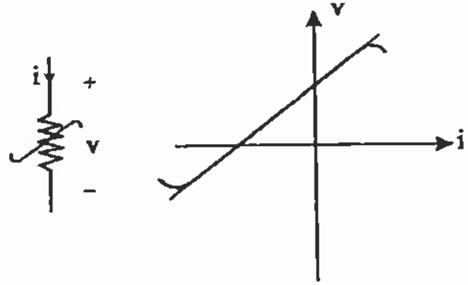
(۱-۸) (کنترل شده به وسیلهٔ جریان) $$v(t)=f(i(t))$$

اگر i تابعی از v بوده و معکوس‌پذیر نباشد:

(۱-۹) (کنترل شده بوسیلهٔ ولتاژ) $$i(t)=g(v(t))$$

اگر v تابعی از i و معکوس‌پذیر نیز باشد:

(۱-۱۰) (کنترل شده به وسیلهٔ جریان ولتاژ) $$i(t)=f^{-1}(v(t)) \quad ; \quad v(t)=f(i(t))$$



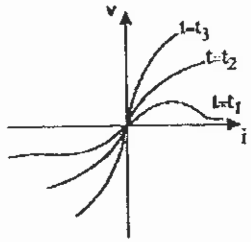
شکل ۱-۶ مشخصهٔ مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان

مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان

در این حالت رابطه بین ولتاژ و جریان با زمان تغییر می‌کند.

(۱-۱۱) $$i(t)=g_t(v(t)) \quad ; \quad v(t)=f_t(i(t))$$

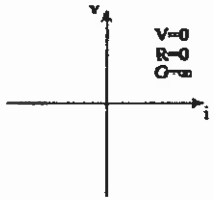
g_t و f_t تابعی هستند که در زمانهای مختلف تغییر می‌کنند.



شکل ۱-۷ مشخصهٔ مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر زمان

اتصال کوتاه: اتصال کوتاه، حالت خاصی از مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با مقاومت صفر می‌باشد.

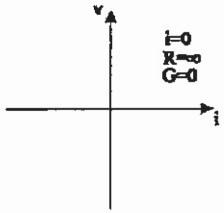
V = ۰
R = ۰
G = ∞



شکل ۱-۸ مشخصهٔ اتصال کوتاه

مدار باز: مدار باز حالت خاصی از مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان با رسانایی صفر است.

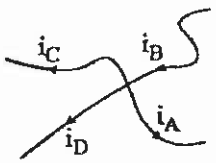
i = ۰
R = ۰
G = ∞



شکل ۱-۹ مشخصهٔ مدار باز

۱-۳ قوانین کیرشف

قانون جریان کیرشف (KCL): جمع جبری جریانهایی که به یک گره وارد می‌شود، صفر است. گره زیر در نظر بگیرید، جهت جریان برای هر شاخه به طور دلخواه انتخاب می‌کنیم، پس رابطه KCL برای آن می‌نویسیم:

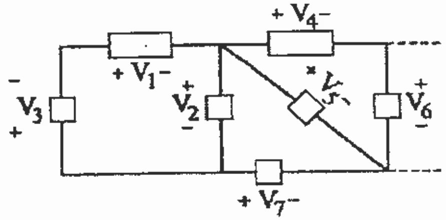


شکل ۱-۱۰ قانون جریان کیرشف

اگر فرض کنیم جهت مثبت جریان به سمت داخل گره باشد برای شکل ۱-۱۰ رابطهٔ KCL را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$i_B - i_A - i_C - i_D = 0$$

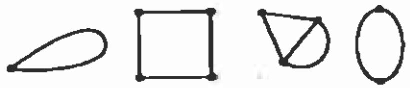
قانون ولتاژ کیرشف (KVL): جمع جبری ولتاژها در هر مسیر بسته‌ای از مدار صفر می‌باشد:



شکل ۱-۱۱ قانون ولتاژ کیرشف

۴-۱ گراف و تعاریف مربوط به آن

گراف: مجموعه‌ای از شاخه‌ها و گره‌ها است، بطوری که هر شاخه در هر سر به یک گره ختم می‌شود. شکلهای زیر تماماً حالتهایی از گراف هستند.



شکل ۱-۱۲ حالتهای مختلف گراف

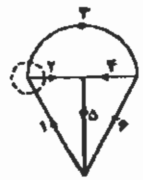
گراف جهت دار: گرافی که دارای جهت‌های قراردادی برای شاخه‌ها است، گراف جهت‌دار گویند.

کات ست: تعمیم یافته مفهوم گره است که به جای گره، یک سطح بستهٔ گوسی در نظر گرفته شده است. کات ست دسته‌ای از شاخه‌های گراف را گویند که:

اولاً حذف تمام این شاخه‌ها، گراف را فقط به دو جزء جدا از هم تبدیل کند.

ثانیاً با حذف تمام شاخه‌ها به جز یک شاخه، گراف پیوسته باقی بماند.

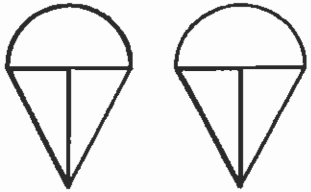
مثال ۱: در شکل مقابل شاخه‌های ۱ و ۲ و ۳ یک کات ست تشکیل می‌دهند.



شکل ۱-۱۳ یک گراف و کات ست مشخص شده در آن

حلقه: تعمیم یافته مفهوم مش (یا تک حلقه) می‌باشد. زیرا گرافی را حلقه گویند که اولاً متصل بهم باشند. ثانیاً به هر گره در حلقه تنها دو شاخه متصل باشد.

مثال ۲: در شکل مقابل، شکل سمت راست تشکیل حلقه می‌دهد، در حالیٔ که شکل سمت چپ حلقه نیست.



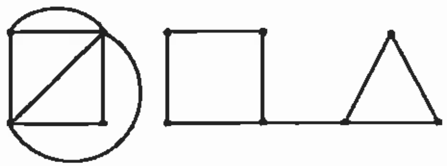
(b) (a)

شکل ۱-۱۴ (a) شکل گراف با حلقهٔ مشخص شده در آن

(b) شکل گراف که شاخه‌های پررنگ در آن تشکیل حلقه نمی‌دهند

گراف لولادار: گرافی را گویند که بتوان آن را به دو زیرگراف تبدیل کرد که تنها در یک گره مشترک باشند. گرافی که لولادار نباشد، بی لولا گویند.

مثال ۳: شکل سمت راست در مقابل، گراف لولادار و در شکل سمت چپ گراف بی لولا است.

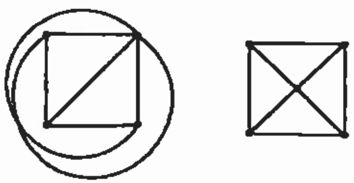


(b) (a)

شکل ۱-۱۵ (a) گراف لولادار (b) گراف بی‌لولا

گراف مسطح: گرافی است که روی یک صفحه قابل نمایش است بطوری که هیچ دو شاخه‌ای همدیگر را قطع نکنند. در غیر اینصورت گراف را غیرمسطح گویند.

مثال ۴: شکل سمت راست در مقابل، گراف مسطح و شکل سمت چپ گراف غیرمسطح است.



(b) (a)

شکل ۱-۱۶ (a) گراف مسطح و (b) گراف غیرمسطح

درخت: زیرگرافی (از یک گراف متصل بهم) را درخت گویند که:

اولاً تمام گره‌های گراف اصلی را در برگیرد.

ثانیاً: هیچ حلقه ای نداشته باشد.

اتصال: شاخه‌هایی از گراف را که در درخت نباشد، اتصال گویند. با اضافه کردن هر اتصال به یک درخت در آن حلقه تشکیل می‌شود.

در یک گراف اگر تعداد گره‌ها $(n+۱)$، تعداد شاخه‌ها (b) باشد آنگاه:

تعداد شاخه‌های درخت $= n$ (۱-۱۲)

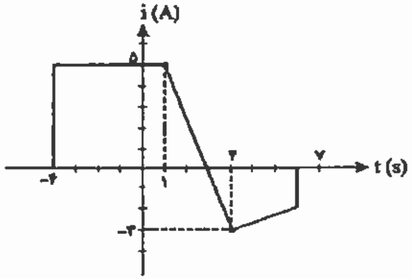
تعداد اتصالات $= b - n$ (۱-۱۳)

تعداد گره‌ها } $= n$

تعداد شاخه‌ها } $= b$

حل مسائل فصل اول

۱- منحنی تغییرات جریان الکتریکی یک عنصری را به صورت شکل (۱-۲۰) در نظر بگیرید. کل بار عبوری از این عنصر را بیابید.



شکل (۱-۲۰): تغییرات جریان یک عنصر

حل:

با توجه به رابطه (۱-۲) کتاب کل بار عبوری تا زمان t برابر است با $q(t)=\int_{-\infty}^{t} i(\tau)d\tau$ حال برای محاسبه کل بارالکتریکی عبوری از هر عنصر فقط کافی است که در رابطه (۱-۲) به جای t، $+\infty$ را قرار دهیم پس با توجه به این توضیحات خواهیم داشت:

$$q(\infty)\ \text{کل بار الکتریکی عبوری از عنصر} = \int_{-\infty}^{\infty} i(\tau)d\tau$$

$$= \int_{-\infty}^{-۴} \circ\, d\tau + \int_{-۴}^{۱} ۵\, d\tau + \int_{۱}^{۴}\left(\frac{-۸}{۳}\tau+\frac{۲۳}{۳}\right)d\tau + \int_{۴}^{۷}(-۳)\,d\tau = \circ + ۵\tau\Big|_{-۴}^{۱}$$

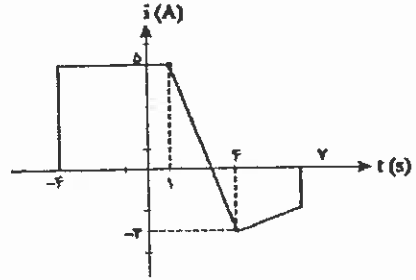
$$+\left(-\frac{۸}{۳}\frac{\tau^{۲}}{۲}+\frac{۲۳}{۳}\tau\right)\Bigg|_{۱}^{۴} - ۳\tau\Big|_{۴}^{۷} = ۵(۱+۴) - \frac{۸}{۳}.\frac{۴^{۲}}{۲} + \frac{۲۳}{۳}\times ۴ + \frac{۸}{۳}.\frac{۱}{۲} - \frac{۲۳}{۳}\times ۱$$

$$-۳(۷-۴) = ۱۹^{c}$$

راه حل دوم:

با استفاده از مفهوم انتگرال و اینکه انتگرال هر تابع برابر است با مساحت سطح زیر نمودار می‌توان این مثال را حل نمود.

از روی شکل مساحت قسمتهای A و B را حساب می‌کنیم قبل از این کار باید ضخامت نقطه برخورد را مشخص کنیم. از روی معادله خط که در بالا نوشته شد می‌توان با صفر قراردادن آن نقطه برخورد بـا محـور t را مشخص کرد.



$$-\frac{8}{3}t+\frac{23}{3}=0 \Rightarrow t=\frac{23}{8}$$

مساحت قسمت A:

$$\left(\frac{55}{8}+5\right)\times 5\times\frac{1}{2}=\frac{475}{16}$$

مساحت قسمت B:

$$\left(3+\frac{33}{8}\right)\times 3\times\frac{1}{2}=\frac{171}{16}$$

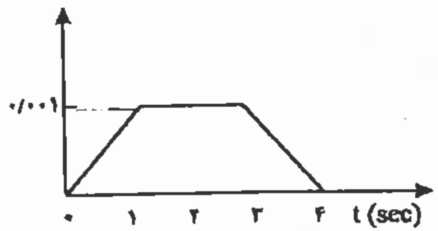
مساحت کل زیر نمودار که برابر کل بارالکتریکی می‌باشد.

کل بار الکتریکی عبوری از عنصر = مساحت زیر نمودار $\Rightarrow \frac{475}{16}-\frac{171}{16}=\frac{304}{16}=19^{C}$

۲- تغییرات بار الکتریکی عبوری از یک عنصر دو سر از یک شبکه الکتریکی به صورت شکل (۱-۲۱) می‌باشد:

الف) شکل موج جریان عبوری از این عنصر را بیابید. ب) با استفاده از جریان عبوری قسمت.

(الف)، آیا می‌توان شکل بار الکتریکی عبوری را متفاوت از شکل (۱-۲۱) به دست آورد؛ به گونه‌ای که جریان عبوری از عنصر، همان شکل موج محاسبه شده در قسمت (الف) باشد؟



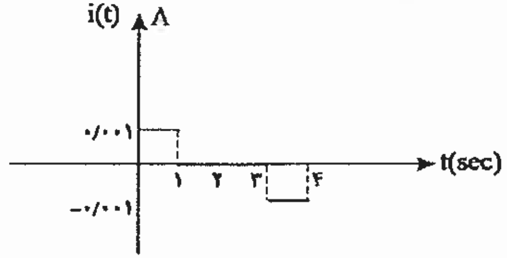
حل:

با توجه به رابطه (۱-۱) کتاب که $i(t)=\frac{dq(t)}{dt}$ می‌باشد. برای بدست آوردن شکل موج جریان از روی شکل موج بارالکتریکی فقط کافی است که از شکل موج بار الکتریکی در هر بازه مشتق بگیریم.

برای اینکه معادله تابعه $q(t)$ را از روی شکل (۱-۲۱) می‌نویسیم.

$$q(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \,, \\ 0.001t & 0\le t<1 \\ 0.001 & 1\le t<2 \\ -0.001(t-4) & 2\le t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases} \Rightarrow i(t)=\frac{dq(t)}{dt}\Rightarrow i(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ 0.001 & 0\le t<1 \\ 0 & 1\le t<2 \\ -0.001 & 2\le t<4 \\ 0 & t>4 \end{cases}$$

حال شکل جریان عباری از این عنصر:



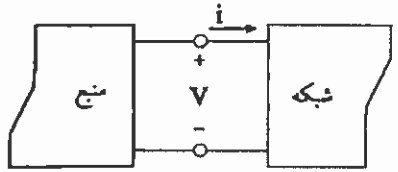
ب) خیر.

۳- شبکه ای مطابق با شکل (۱-۲۲) از طریق دو ترمینال به یک منبع، متصل شده است. فرض کنید کـه شـبکه مورد نظر، بدون انرژی اولیه باشد. حال اگر در مدت زمان $0\le t\le 3^{msec}$، ولتاژ دو سر ترمینـال شـبکه بـه صورت $v(t)=10-200t$ و جریان آن به صورت $i(t)=10t^{2}$ تغییر کند، آنگاه مطلوب است محاسبه:

الف) نحوه تغییرات قدرت انتقالی $p(t)$ از منبع به شکل موردنظر؛

ب) انرژی ارسالی $w(t)$ به سمت شبکه؛

ج) کل انرژی ذخیره شده در مدت msec ۳ در شبکه.



شکل ۱-۲۲ اتصال یک شبکه به منبع الکتریکی

حل:

الـف) بـا توجـه بـه رابطه $p(t)=v(t).i(t)=(10-200t)^{V}\left(10t^{2}\right)^{mA}=\left(100t^{2}-2000t^{3}\right)^{mw}$ کتاب داریم: (۱-۱۱)

حال باید معادله روبرو را رسم نماید تا بتوان در مورد تغییرات قدرت $p(t)$ دو سر شبکه صحبت کرد. البته بدون رسم هم می‌توان در مورد علامت $p(t)$ در بازه‌های آن اظهارنظر کرد.

$$p(t)=0 \Rightarrow (10-200t)(10t^2)=0 \Rightarrow t=0\ ,\ \ t=0.05$$

می‌توان با گذاشتن یک عدد انتخابی در بازه‌های $(0,0/05)$, $(0/05,2)$ علامت $p(t)$ را مشخص کرد.

$$0<t<0.05 \Rightarrow if\ \ t=0.01 \Rightarrow p(+0.01)=(10-200\times0.01)(10\times0.01^2)>0\{=8\times10^{-3MW}>0\}$$

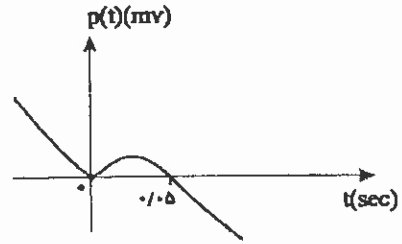
در این بازه هم شبکه توان مصرف می‌کند چون علامت $p(t)$ مثبت است.

$$0.05<t<+2 \Rightarrow if\ \ t=1 \Rightarrow p(1)=(10-200\times1)(10\times1^2)=-1900^{mw}=-1.9^{W}<0$$

در این بازه با توجه به علامت منفی توان، شبکه توان تولید می‌کند یا شبکه به منبع توان می‌دهد.

روش دوم رسم نمودار:

از روی شکل پیداست که توان در بازه $[0,0/05]$ مثبت و در بازه $[0/05,2]$ منفی می‌باشد.



(شکل ترسیم شده در بازه $[0,0/05]$ در مقیاس واقعی نمی‌باشد و بزرگنمایی شده است.)

ب) با توجه به اینکه رابطه انرژی الکتریکی و توان الکتریکی به شکل $w(t)=\int_{-\infty}^{t}p(\tau)d\tau$ می‌باشد پس برای محاسبه انرژی الکتریکی در این قسمت فقط کافیست از شکل توان انتگرال بگیریم.

$$w(t)=\begin{cases} 0 & t<0 \\ \int_0^t(100\tau^2-2000\tau^3)d\tau=100\frac{\tau^3}{3}-2000\frac{\tau^4}{4}\Big|_0^t & \\ =100\frac{t^3}{3}-2000\frac{t^4}{4}=100t^3\left(\frac{1}{3}-20\frac{t}{4}\right) & 0\le t\le 2 \\ 0 & t>2 \end{cases}$$

از روی معادله $w(t)$ معلوم است که در بازه $\left[0,\frac{1}{15}\right]$ انرژی ارسالی از منبع به شبکه مثبت است یعنی در این بازه شبکه انرژی ذخیره می‌کند ولی در بازه $\left[\frac{1}{15},+2\right]$ علامت انرژی $w(t)$، منفی خواهد شد پس انرژی در این بازه در شبکه ذخیره نمی‌شود.

در این بازه انرژی از شبکه کم می‌شود و از شبکه انرژی گرفته می‌شود.

ج) برای این کار در معادله انرژی محاسبه شده در قسمت (ب) به جای t مقدار 3^{msec} را قرار می‌دهیم.

یعنی شبکه در مدت 3^{msec} به اندازه 39.6^{j} انرژی تولید می‌کند.

$$w(3)=100\cdot3^3\left(\frac{1}{3}-20\cdot\frac{3}{4}\right)=100\times27\left(\frac{1}{3}-15\right)=-39.6^{j}$$

۴- در شبکه ارائه شده در شکل (۱-۱۹)، موارد زیر محاسبه کنید:

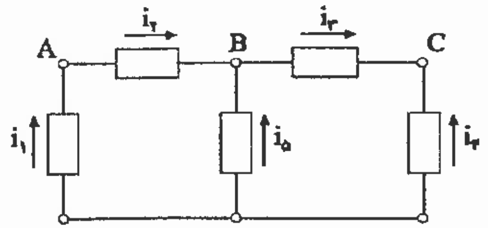
الف) در صورتی که $i_2(t)=2+2t$ و $i_3(t)=2+Sin(t)$ باشد، جریانهای $i_1(t)$، $i_4(t)$ و $i_0(t)$ را بیابید؛

ب) سه معادله KVL ارائه شده در شکل مذکور را با یکدیگر جمع کنید. چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟

ج) در شکل مذکور، اگر $v_1(t)=2+7t$, $v_4(t)=-4+Sin(t)$, $v_0(t)=2+e^{-t}$ باشد مطلوب است محاسبه $v_2(t),v_3(t)$.

حل:

الف) با استفاده از معادلات KCL در گره‌های مدار می‌توان پارامترهای مجهول جریانهای مدار را محاسبه کرد. (خطوط به گره‌ها وصل شود و منقطع نباشد).



در گره A $\ KCL:-i_1(t)+i_2(t)=0 \Rightarrow i_1(t)=i_2(t)=2+2t$

در گره B $\ KCL:-i_2(t)+i_3(t)-i_0(t)=0 \Rightarrow i_0(t)=-i_2(t)+i_3(t) \Rightarrow$

$\quad i_0(t)-(2+2t)+2+\sin t=-2t+\sin t$

در گره C $\ KCL:-i_3(t)+i_4(t)=0 \Rightarrow i_4(t)=-(2+\sin t)=-\sin t$

ب) معادله سوم از جمع دو معادله اول حاصل شده است بنابراین جمع کردن هر سه معادله یعنی اینکه معادله سوم را در عدد ۲ ضرب کنیم.

$$\begin{array}{rl} & v_۱ + v_۲ - v_۵ = ۰ \\ + & v_۵ + v_۳ - v_۴ = ۰ \\ & v_۱ + v_۲ + v_۳ - v_۴ = ۰ \\ \hline \end{array}$$

$$(v_۱ + v_۲ - v_۵) + (v_۵ + v_۳ - v_۴) + (v_۱ + v_۲ + v_۳ - v_۴) = ۲(v_۱ + v_۲ + v_۳ - v_۴) = ۰$$

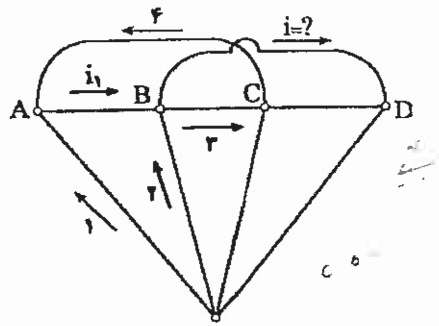
ج) از معادله اول KVL می‌توان $v_۲(t)$ را محاسبه کرد.

$$v_۲(t) = -v_۱(t) + v_۵(t) = -(۲ + ۷t) + ۳ + e^{-t} = ۱ - ۷te^{-t}$$

از معادله دوم KVL می‌توان $v_۳(t)$ را محاسبه کرد:

$$v_۳(t) = v_۴(t) - v_۵(t) = -۴ + \sin t - (۳ + e^{-t}) = -۷ + \sin t - e^{-t}$$

۵- شبکه‌ای دارای گراف به صورت شکل (۱-۲۳) می‌باشد. در این شبکه، جهت و مقدار جریان ۴ شاخه، مشخص شده است. جریان شاخه مورد نظر را تعیین کنید.



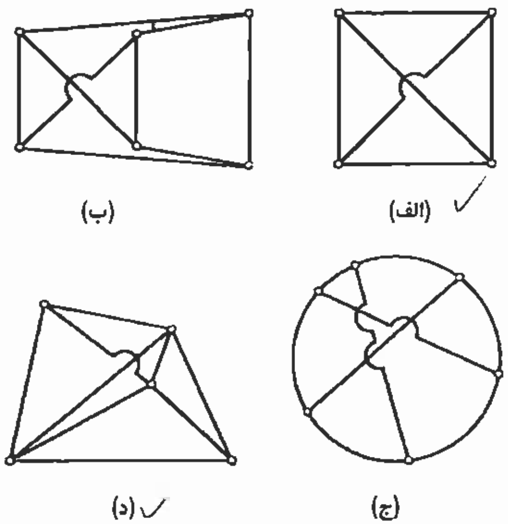
شکل ۱-۲۳ گراف یک شبکه الکتریکی نمون

حل:

$$\text{در گره A} \quad KCL: -i_۱ - ۱ - ۴ = ۰ \Rightarrow i_۱ = ۵$$

$$\text{در گره B} \quad KCL: -i_۱ - ۲ + ۳ + i = ۰ \Rightarrow i = i_۱ - ۱ = ۴$$

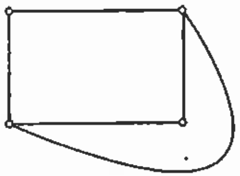
۶- کدام یک از گرافهای ارائه شده در شکل (۱-۲۴) را می‌توان به صورت یک گراف مسطح رسم نمود. این گرافها را رسم کنید.



شکل ۱-۲۴ چند گراف نمونه

حل:

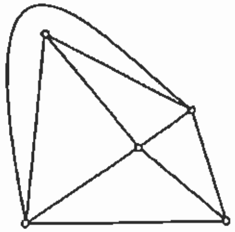
الف)



ب) این گراف را نمی‌توان مسطح رسم کرد.

ج) این گراف را نمی‌توان مسطح رسم کرد.

د)



یادداشت

فصل دوم

منابع الکتریکی، مقاومت‌ها و مدارهای ساده مقاومتی

۲-۱ مقاومت‌های خطی و غیرخطی (تغییرپذیر با زمان - تغییرناپذیر با زمان)

مقاومت خطی: مقاومتی می‌باشد که هر لحظه از زمان مشخصه مربوطه در صفحه iv خط مستقیمی می‌باشد که از مبدأ می گذرد. اگر مشخصه مربوطه با زمان تغییر کند، آن را مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان گویند، در غیر این صورت مقاومت مربوطه، یک مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان می‌گویند و رابطه بین جریان و ولتاژ این عنصر مقاومتی (خطی) با چنین مشخصه‌ای بصورت زیر می‌باشد:

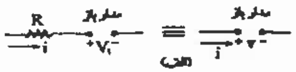
$i(t)=Gv(t)$ یا $v(t)=Ri(t)$, $\left(G=\frac{۱}{R}\right)$: مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

$v(t)=R(t)i(t)$ یا $i(t)=G(t)v(t)$, $\left(G(t)=\frac{۱}{R(t)}\right)$: مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان

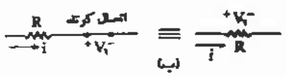
نکته: مدار باز $(R=\infty)$ و مدار اتصال کوتاه $(R=۰)$ دو نمونه از مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان خاص می‌باشند.

نکته: در مدار باز جریان صفر می باشد، در اتصال کوتاه ولتاژ صفر می‌باشد.

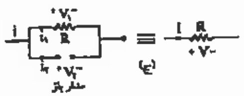
نکته: الف) اتصال سری یک مقاومت R و یک مدار باز، مدار باز می‌باشد. ب) اتصال سری یک مقاومت R و یک مدار اتصال کوتاه، یک مدار با مشخصه R بوده، ج) یک اتصال موازی مقاومت R با یک مدار باز، یک مشخصه با مقاومت R می‌باشد. د) اتصال موازی یک مقاومت R و یک مدار اتصال کوتاه، یک مدار با مشخصه اتصال کوتاه می‌باشد.



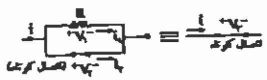
$\left(i=۰\ ,V_۱\neq ۰\Rightarrow V\neq ۰\right)$



$\left(i\neq ۰\ ,\ V_۲\neq ۰\ ,\ V_۱=۰\right)$



$(i=i_1 \ , \ i_2=0 \ , \ V_1 \ , \ V_2 \neq 0)$

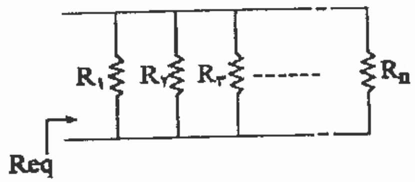


$(i=i_2 \ , \ i_1=0 \ , \ V_1 \ , \ V_2 \ , \ V_3=0)$

نکته: یک پتانسیومتر با اتصال لغزنده، نمونه‌ای از یک مقاومت خطی تغییرپذیر با زمان می‌باشد.

$R(t)=R_1\cos 2t+2$

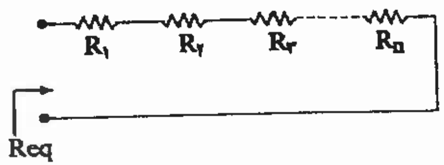
مقاومتهای موازی:



شکل ۲-۱ مقاومتهای موازی

$$\frac{1}{R_{eq}}=\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}+\frac{1}{R_3}+\ldots+\frac{1}{R_n}=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{R_i}$$

مقاومتهای سری:



شکل ۲-۲ مقاومتهای سری

$$R_{eq}=R_1+R_2+R_3+\ldots+R_n\cancel{=\sum_{i=1}^{n}G_i=\frac{1}{R_{eq}}}$$

$\sum_{i=1}^{n} R_{eq} = \frac{1}{G_i}$

نکته: در مدارهای با مقاومت موازی رابطه زیر برقرار می‌باشد:

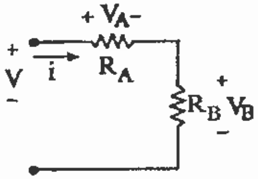
$$G_{eq}=G_1+G_2+G_3+\ldots+G_n=\sum_{i=1}^{n}G_i=\frac{1}{R_{eq}}$$

Gi: هدایت (رسانایی) می‌گویند که برابر است با $\frac{1}{R_i}$

تقسیم ولتاژ و تقسیم جریان در یک مدار مقاومت (خطی):

تقسیم ولتاژ:

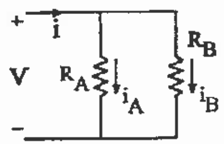
$$V_A=\frac{R_A}{R_A+R_B}V \ ; \ V_B=\frac{R_B}{R_A+R_B}V$$



شکل ۲-۳ تقسیم ولتاژ

این دو رابطه برای حالتی که دو عنصر مقاومتی سری می‌باشند برقرار بوده و وقتی که موازی باشند ولتاژ دو سر هر دو عنصر برابر می‌باشد.

تقسیم جریان:



شکل ۲-۴ تقسیم جریان

$$i_A=\frac{R_B}{R_A+R_B}i=\frac{G_A}{G_A+G_B}i \ ; \ i_B=\frac{R_A}{R_A+R_B}i=\frac{G_B}{G_A+G_B}i$$

$$\left(G_A=\frac{1}{R_A} \ , \ G_B=\frac{1}{R_s}\right)$$

نکته: دو رابطه فوق برای حالتی که دو عنصر مقاومتی با هم موازی باشند برقرار می‌باشد.

۲-۲ انواع منابع:

منابع از چند طریق به دسته بندی‌های مختلف تقسیم‌بندی می‌شوند:

گروه ۱: منبع ولتاژ، منبع جریان

گروه ۲: منبع مستقل، منبع وابسته

* در منبع ولتاژ مستقل، ولتاژ منبع مستقل از جریان و ولتاژهای شبکه است و در منبع جریان مستقل، جریان منبع مستقل از ولتاژ و جریانهای شبکه است. در حالی که در منابع وابسته، این استقلال وجود ندارد.

گروه ۳: منبع ac، منبع dc

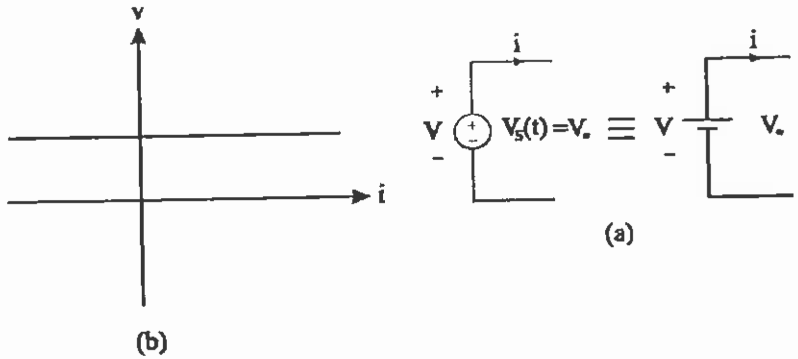
* در منبع dc، ولتاژ یا جریان با زمان تغییر نمی‌کند و ثابت است. در حالی که در منبع ac، ولتاژ یا جریان با زمان تغییر نمی‌کند.

منابع نابسته

این منابع دو دستهٔ «منبع ولتاژ نابسته» و «منبع جریان نابسته» تقسیم می‌شوند، که هر کدام از این دو دسته، خود شامل منابع ثابت و متغیر می‌باشند.

منبع ولتاژ نابسته ثابت (مستقل)

این منبع ولتاژ، حالت خاصی از مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

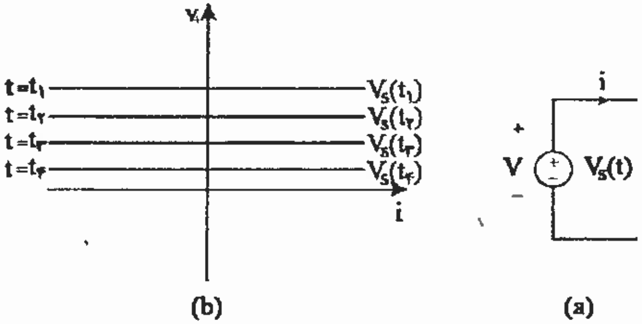


شکل ۲-۵ (a) منبع ولتاژ نابستهٔ ثابت

(b) مشخصهٔ منبع ولتاژ نابستهٔ ثابت

منبع ولتاژ نابسته متغیر

این منبع ولتاژ حالت خاصی از مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان می‌باشد.

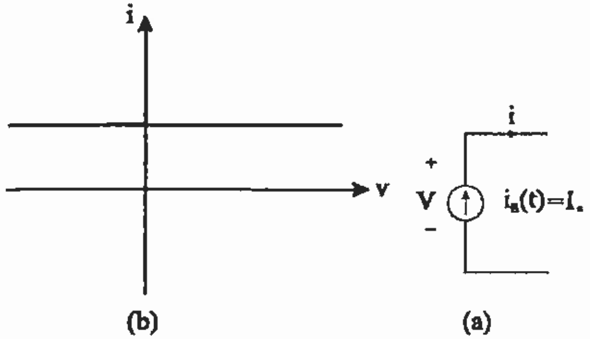


شکل ۲-۶ (a) منبع ولتاژ نابستهٔ متغیر

(b) مشخصهٔ ولتاژ – جریان منبع ولتاژ نابستهٔ متغیر

منبع جریان نابسته ثابت

این منبع جریان، حالت خاصی از مقاومت غیرخطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

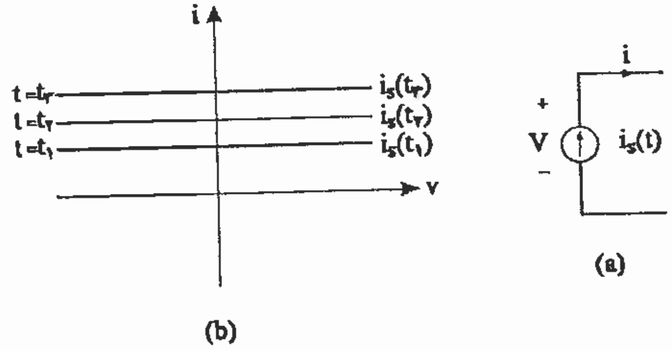


شکل ۲-۷ (a) منبع جریان نابسته ثابت و

(b) مشخصهٔ جریان – ولتاژ منبع جریان نابسته ثابت

منبع جریان نابسته متغیر

این منبع جریان، حالت خاصی از مقاومت غیرخطی تغییرپذیر با زمان می‌باشد.



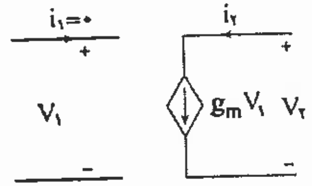
شکل ۲-۸ (a) منبع جریان نابستهٔ متغیر و

(b) مشخصه جریان – ولتاژ منبع جریان نابسته متغیر

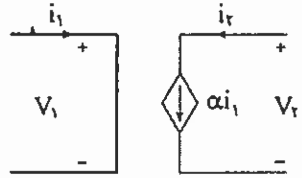
جهات قراردادی منظور شده برای منابع نابسته عکس جهات قراردادی متناظر می‌باشند این مسأله سبب می‌شود تا مثبت بودن $p(t) = v(t)\ i(t)$، بیانگر گرفتن توان از آن شاخه باشد.

منابع وابسته خطی تغییرناپذیر با زمان

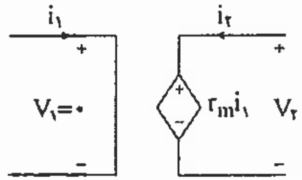
این منابع نیز به دو دسته منابع ولتاژ و منابع جریان تقسیم می‌شوند، که هر کدام می‌توانند توسط جریان و یا ولتاژ بخشی از مدار کنترل شوند. شکلهای (۲-۹) ، (۲-۱۰) ، (۲-۱۱) و (۲-۱۲) منابع وابسته را در چهار حالت نشان می‌دهند.



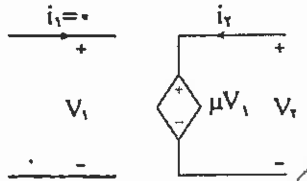
شکل ۲-۹ منبع جریان کنترل شده با ولتاژ



شکل ۲-۱۰ منبع جریان کنترل شده با جریان



شکل ۲-۱۱ منبع ولتاژ کنترل شده با جریان



شکل ۲-۱۲ منبع ولتاژ کنترل شده با ولتاژ

۲-۳ مشخصات المانها، توان و انرژی

المانهای مدار را در یک تقسیم‌بندی کلی به دو گروه مولد انرژی و غیرمولد انرژی طبقه‌بندی می‌کنیم المانهای غیرمولد انرژی یا غیرفعال یا پسیو به سه دسته تقسیم می‌شوند که شامل مقاومت (R)، خازن (C) و سلف (L) هستند و فرض می‌کنیم که این عناصر خطی و تغییرناپذیر با زمان هستند، مگر آن که خلاف آن ذکر شود.

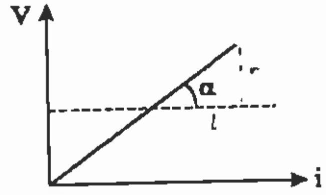
از این سه گروه، مقاومتها تلف کننده انرژی هستند، بنابراین بحث تلف توان و روابط مربوط به آن مطرح می‌شود. خازنها و سلفها، ذخیره کننده انرژی هستند و بحث انرژی ذخیره شده و روابط انرژی را برای آنها بیان می‌کنیم.

المانهای مولد انرژی یا به عبارتی فعال یا اکتیو شامل منابع مستقل جریان و ولتاژ هستند. منابع وابسته و همچنین برخی از المانهای غیرخطی مثلاً مقاومت غیرخطی در برخی از شرایط سیگنال کوچک (که توضیح آن داده خواهد شد)، می‌توانند نقش مولد انرژی را داشته باشند، مثلاً مقاومت منفی ایجاد کنند.

مشخصه عناصر توصیف شده خطی و تغییرناپذیر با زمان در شکل مقابل آنها است:

$$R=\frac{v}{i}=tg\alpha$$

$$R=\frac{1}{G}\quad (\text{هدایت } G)$$



شکل ۲-۱۳ مشخصه مقاومت خطی تغییرناپذیر با زمان

$R=0$ و $R=\infty$ دو حالت خاص از منحنی مشخصه مقاومت هستند که بازای آن زاویه a بترتیب صفر و ۹۰ درجه می‌شود، که اصطلاحاً حالتهای اتصال کوتاه و مدار باز نامیده می‌شوند.

توان: توان لحظه‌ای تحویل داده شده به یک المان برابر است با:

$$P(t)=v(t)\ i(t)$$

طبق جهت‌های قراردادی، اگر حاصلضرب $v(t)i(t)$ مثبت باشد، المان مربوطه، توان جذب می‌کند که المان را غیرفعال یا پسیو گویند و اگر $v(t)i(t)$ منفی باشد، المان مربوطه توان تحویل می‌دهد که المان را فعال یا اکتیو گویند.

طبق رابطه فوق توان تلف شده در یک مقاومت برابر است با:

$$P=vi=Ri^2=\frac{v^2}{R}=Gv^2$$

انرژی داده شده به همین المان در طول زمان T برابر است با:

$$W(T)=\int_0^T P(t)dt=\int_0^T v(t)i(t)dt$$

* مهم

انرژی مغناطیسی ذخیره شده در یک سلف L که مشخصه دو سر آن $V_L=L\frac{di}{dt}$ می‌باشد، عبارت است از:

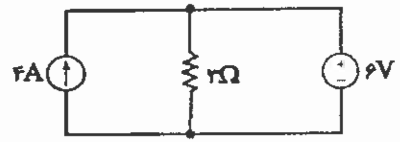
$$E_L=\frac{1}{2}Li^2=\frac{1}{2}\frac{\phi^2}{L}$$

انرژی الکتریکی ذخیره شده در یک خازن C که مشخصه دو سر آن $i_c=C\frac{dv_c}{dt}$ می‌باشد، عبارت است از:

$$E_c=\frac{1}{2}cv^2=\frac{1}{2}\frac{q^2}{c}$$

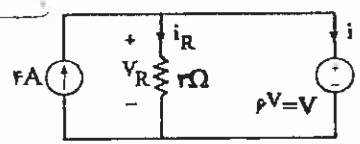
حل مسائل فصل دوم

۱- شکل (۲-۲۶) مداری را نشان می‌دهد که در ارتباط با مفاهیم منابع ولتاژ و جریان است. در این مدار، توانی را که منبع ولتاژ تولید می‌کند، محاسبه کنید.



شکل ۲-۲۶ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

حل:



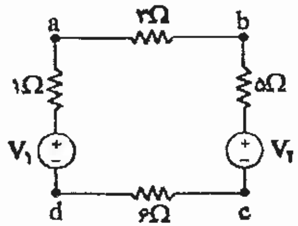
$$i_R=\frac{V_R}{3\Omega}=\frac{6^V}{3\Omega}=2^A$$

$$i(t)=4-i_R=2$$

پس منبع ولتاژ 12^W توان مصرف می‌کند.

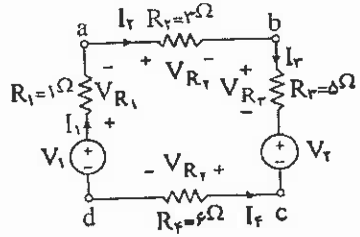
توان منبع ولتاژ $p=v\times i=6\times 2=+12^W$

۲- یک مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۲۷) مفروض می‌باشد. با استفاده از قانون KVL مقدار توان الکتریکی مصرفی روی هر مقاومت را بیابید.



شکل ۲-۲۷ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

با توجه به این که تمام عناصر مدار با هم سری می‌باشند پس جریان در تمام عناصر مدار با هم برابر می‌باشند. بنابراین با نوشتن یک KVL در حلقه می‌توان جریان حلقه را بدست آورد.



به دلیل سری بودن عناصر داریم:

$$I_1=I_2=I_3=I_4=I$$

$$KVL:-V_1+1^\Omega\times I_1+3^\Omega\times I_2+5^\Omega\times I_3+V_2+6^\Omega\times I_4=0$$

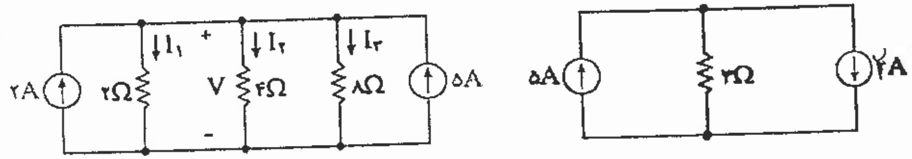
$$(1+3+5+6)I=V_1-V_2$$

$$\Rightarrow I=\frac{V_1-V_2}{15}$$

$$P_{R_1}=V_{R_1}\times I=R_1I^2=1\times\left(\frac{V_1-V_2}{15}\right)^2=\left(\frac{V_1-V_2}{15}\right)^2 \qquad P_{R_2}=R_2I^2=3\times\left(\frac{V_1-V_2}{15}\right)^2$$

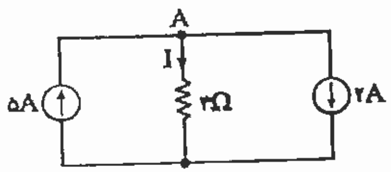
$$P_{R_3}=R_3I^2=5\times\left(\frac{V_1-V_2}{15}\right)^2 \qquad P_{R_4}=R_4I^2=6\times\left(\frac{V_1-V_2}{15}\right)^2$$

۳- شکل (۲-۲۸) دو مدار الکتریکی را نشان می‌دهد. در هریک از این مدارها، توان مصرفی هر مقاومت را با استفاده از قانون KCL بیابید.



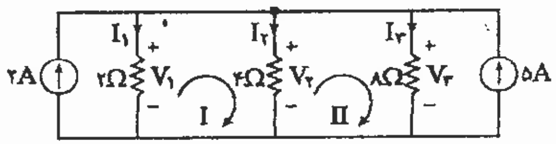
شکل ۲-۲۸ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

حل:



در گره A $KCL:-5+I+2=0\Rightarrow I=3$

$P=3I^2=3\times3^2=27^W$



در گره A $KCL:-2+I_1+I_2+I_3-5=0\Rightarrow I_1+I_2+I_3=7$

در مش (I) $KVL:-V_1+V_2=0\Rightarrow\quad -2I_1+4I_2=0\Rightarrow I_1=+2I_2$

در مش (II) $KVL:-V_2+V_3=0\Rightarrow\quad -4I_2+8I_3=0\Rightarrow I_2=+2I_3$

از KVL در مش (I) و KVL در مش (II) می‌توان نتیجه گرفت که:

$$\Rightarrow I_1=2I_2=2(2I_3)=4I_3$$

$$\Rightarrow I_1=4I_3$$

با جایگذاری در معادله KCL خواهیم داشت:

$$4I_3+2I_3+I_3=7\Rightarrow I_3=1$$

$$\Rightarrow I_1=4I_3=4 \qquad I_2=2I_3=2$$

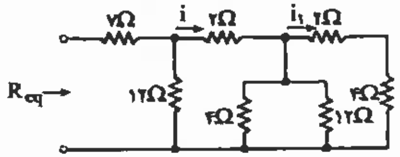
محاسبه توانها:

مقاومت 2^Ω $\quad p=2^\Omega\times I_1^2=2\times4^2=32^W$

مقاومت 4^Ω $\quad p=4\times I_2^2=4\times2^2=16^W$

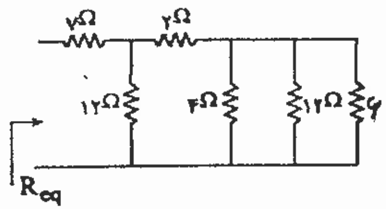
مقاومت 2^Ω $\quad p=^\Omega\times I_1^2=2\times4^2=32^W$

۴- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۲۹)، مقدار مقاومت معادل R_{eq} را بیابید. همچنین اگر $i=6^A$ باشد مقدار i_1 را بیابید.



شکل ۲-۲۹ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (٤)

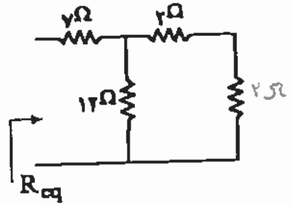
حل:



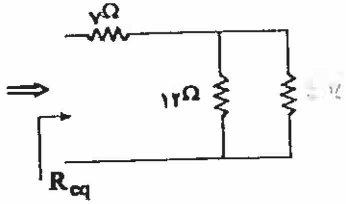
با توجه به شکل می‌توان متوجه شد که مقاومت 2^Ω و 4^Ω سمت راست با هم سری می‌باشند و حاصل آنها با مقاومت

12^Ω و 4^Ω موازی می‌باشند و همین‌طور حاصل آنها با مقاومت 2^Ω سری شده و حاصل با مقاومت 12^Ω موازی و سپس با مقاومت 7^Ω سری می‌شود پس:

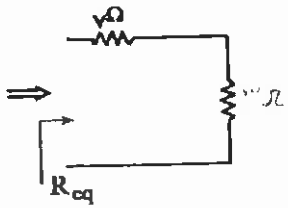
$$6^\Omega = 4^\Omega + 2^\Omega \; R_{2,4} \Rightarrow$$



$$4\|12\|6 = 2^\Omega = R_{6,4,12}$$

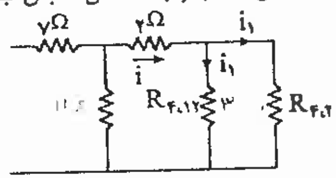


$$R_{2,2} = 2 + 2 = 4^\Omega$$



$$R_{4,12} = \frac{12 \times 4}{12 + 4} = 3^\Omega \Rightarrow R_{eq} = 7^\Omega + R_{4,12} = 7 + 3^\Omega = 10^\Omega$$

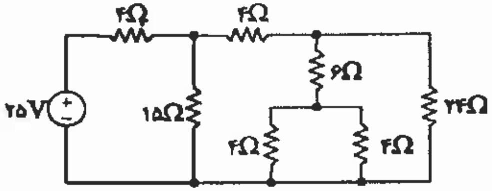
برای محاسبه i_1 از رابطه تقسیم جریان (۲-۴۳) استفاده می‌کنیم ابتدا شکل کتاب را به شکل مقابل تبدیل می‌کنیم تا مقاومتهای موازی در رابطه تقسیم جریان ظاهر شود.



$$R_{4,12} = \frac{4 \times 12}{16} = 3^\Omega \qquad R_{4,2} = 4 + 2 = 6^\Omega$$

$$i_1 = \frac{R_{4,12}}{R_{4,12} + R_{4,2}} \times i = \frac{3}{3+6} \times 6 = \frac{18}{9} = 2^A$$

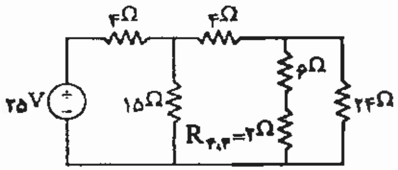
۵- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۳۰) توان الکتریکی مصرفی در مقاومت ۱۵Ω را بیابید.



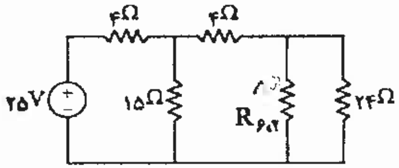
شکل (۲-۳۰): مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

حل:

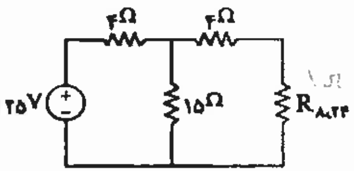
ابتدا با استفاده از ساده کردن مدار که در حل مسائل مدار یک اصل بسیار مهمی می‌باشد مدار را به شکل ساده رسم می‌کنیم. و این امر در این مدار به دلیل سری و موازی بودن بعضی از مقاومتها به راحتی ممکن است.



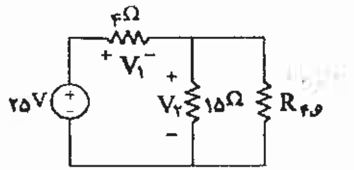
$$R_{4,4} = \frac{4 \times 4}{4 + 4} = 2^\Omega$$



$$R_{6,2} = 6 + 2 = 8$$

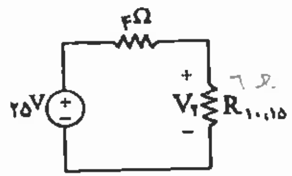


$$R_{8,24} = \frac{8 \times 24}{8 + 24} = 6 \Rightarrow$$



$$R_{4,6} = 4 + 6 = 10^\Omega$$

با توجه به اینکه ولتاژ V_2 ولتاژ دو سر مقاومت 15^Ω موازی با 10^Ω است پس با توجه به رابطه تقسیم ولتاژ (۲-۴۰) مقدار V_2 را حساب می‌کنیم. ابتدا به جای مقاومت 10^Ω موازی با 15^Ω معادل آن را قرار می‌دهیم.



$$R_{10,15} = \frac{10\times 15}{10+15} = 6$$

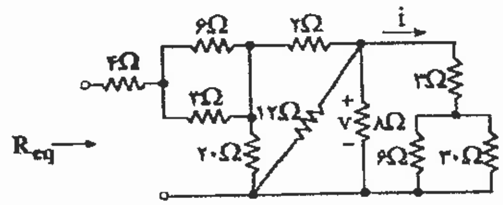
حال رابطه تقسیم ولتاژ را می‌نویسیم:

$$V_2 = \frac{6}{6+4}\times 25 = 15^V$$

حال با استفاده از رابطه توان الکتریکی $P = \frac{V^2}{R}$ مقدار توان مقاومت 15^Ω را حساب می‌کنیم چون در رابطه بالا V_2 که همان ولتاژ دو سر مقاومت 15^Ω را حساب کردیم پس به راحتی با جایگذاری در رابطه توان داریم:

$$P = \frac{15^2}{15} = 15^W$$

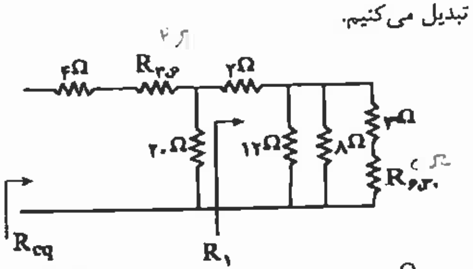
۶- در شکل (۲-۳۱) مدار الکتریکی نشان داده شده است. در این مدار، R_{eq} را بیابید. همچنین اگر یک منبع با ولتاژ ثابت ۵۰ V به دو سر پایانه ورودی متصل شوند، ولتاژ v و جریان i مشخص شده در مدار را بیابید.



شکل ۲-۳۱ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

حل:

دوباره مدار را ساده می‌کنیم و به شکل مقابل تبدیل می‌کنیم.



$$R_{3,6} = \frac{3\times 6}{9} = 2^\Omega$$

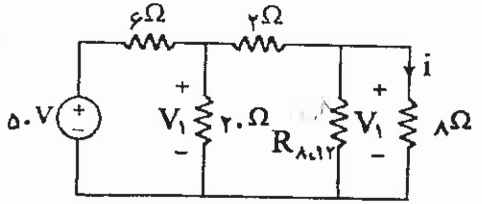
$$R_{6,30} = \frac{6\times 30}{6+30} = 5^\Omega$$

حال از روی شکل می‌توان متوجه شد که

$$R_1 = (3+5)\|8\|12+2 = 8\|8\|12+2 = 3+2 = 5^\Omega$$

$$R_{eq} = 4+R_{3,6}+20\|R_1 = 4+2+20\|5 = 6+4 = 10^\Omega$$

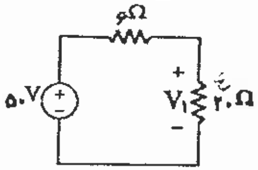
برای محاسبه جریان ولتاژ خواسته شده در مسئله ابتدا مدار ساده شده‌را رسم می‌کنیم و معادلات را روی این مدار می‌نویسیم تا تحلیل راحت‌تر شود.



$$R_{8,12} = \frac{8\times 12}{8+12} = 4/8^\Omega$$

شکل ۱

برای محاسبه V ابتدا V_1 را محاسبه می‌کنیم چون به راحتی می‌توان مدار را ساده کرد تا با استفاده از رابطه تقسیم ولتاژ مقدار V_1 را محاسبه کرد بنابراین با ساده کردن مدار داریم:



$$20\|(2+R_{8,12}\|8) = 4^\Omega \qquad V_1 = \frac{4}{4+6}\times 50 = 20^V$$

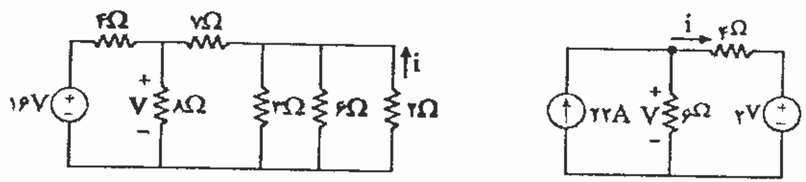
حال با توجه به شکل (۱) با تقسیم ولتاژ می‌توان V را محاسبه نمود.

$$V = \frac{8\|4/8}{8\|4/8+2}\times V_1 = \frac{3}{3+2}\times 20 = 12^V$$

i را به راحتی می‌توان محاسبه کرد.

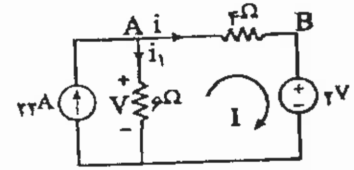
$$i = \frac{V}{8} = \frac{12}{8} = \frac{3}{2} = 1/5^A$$

۷- در مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۲-۳۲)، مقادیر ولتاژ و جریان v و i را بیابید.



شکل ۲-۳۲ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

حل:



ابتدا شکل سمت راست

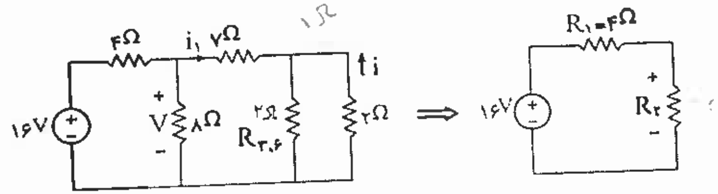
$$\left.\begin{array}{l} KCL: -22 + i_1 + i = 0 \\ i_1 = \dfrac{v}{6} \end{array}\right\} \Rightarrow v + 6i = 132 \qquad (I)$$
در گره A

$$KVL: -v + 4i + 2 = 0 \qquad (II)$$

از حل معادلات (I) و (II) حاصل می‌شود:

$$i = 13^A \quad , \quad v = 54^V$$

برای حل شکل دوم آن را ابتدا ساده می‌کنیم.



شکل ۱

$$R_{3,6} = \frac{3 \times 6}{9} = 2^\Omega \qquad R_2 = 8 \| \left(7 + \left(2 \| R_{3,6}\right)\right) = 8 \| (7+1) = 4^\Omega$$

$$V = \frac{R_2}{R_2 + R_1} \times 16^V = \frac{4}{4+4} \times 16 = 8^V$$

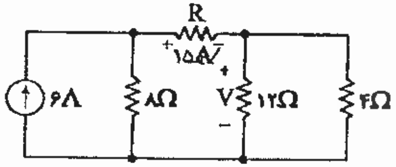
محاسبه i: برای محاسبه i در شکل (۱) مقدار جریان i_1 را به راحتی با داشتن V از بالا می‌توان حساب کرد.

$$i_1 = \frac{V}{7 + \left(2 \| R_{3,6}\right)} = \frac{8}{7+1} = 1^A$$

حال با داشتن i_1 به راحتی از رابطه تقسیم جریان می‌توان i را به دست آورد.

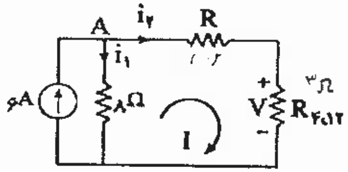
$$i = -\frac{R_{3,6}}{R_{3,6} + 2} \times i_1 = -\frac{2}{2+2} \times 1 = -\frac{1}{2}^A$$

۸- شکل (۲-۳۳) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که مقادیر R و V به عنوان مقادیر مجهول می‌باشند. این مقادیر را تعیین کنید.



شکل ۲-۳۳ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

حل:



$$R_{4/12} = \frac{4 \times 12}{4 + 12} = 3$$

$$\left.\begin{array}{l} KCL: -6 + i_1 + i_2 = 0 \\ i_2 = \dfrac{V}{3} \end{array}\right\} \Rightarrow V + 3i_1 = 18 \qquad (I)$$
در گره A

$$KVL: -8i_1 + 15 + V = 0 \Rightarrow V - 8i_1 = -15 \qquad (II)$$
در مش (I)

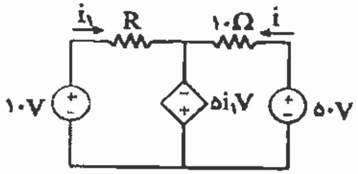
از حل دستگاه معادلات (I) و (II) حاصل می‌شود:

$$i_1 = 3^A \;,\; V = 9^V \Rightarrow i_2 = \frac{V}{3} = 3^A$$

از طرف دیگر $i_2 = \frac{15}{R}$ پس بنابراین:

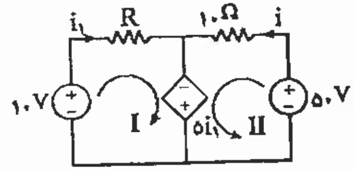
$$i_2 = \frac{15}{R} = 3^A \Rightarrow R = \frac{15}{3} = 5^\Omega$$

۹- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۲-۳۴)، در صورتی که $R = 10\Omega$ باشد، مقدارهای i و i_1 را بیابید.



شکل ۲-۳۴ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

حل:



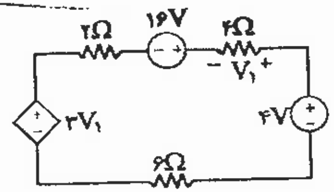
(I) در مش KVL: $-10 + Ri_1 - 5i_1 = 0$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow (R-5)i_1 = 10\\ &R = 10\end{aligned}\right\} \Rightarrow i_1 = 2^A$$

(II) در مش KVL: $-50 + 10i - 5i_1 = 0 \Rightarrow 10i_g - 5\times 2 = 50$

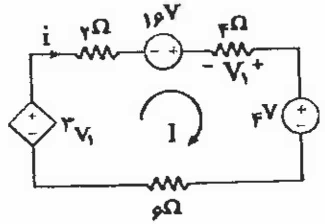
$$\Rightarrow i_g = 6^A$$

۱۰- در مدار الکتریکی نشان داده شده در شکل (۲-۳۵)، با تعیین جریان مدار، توان تلفاتی روی مقاومت 6Ω را بیابید.



شکل ۲-۳۵ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۰)

حل:



(I) در مش KVL: $-3V_1 + 2i - 16^V - V_1 + 4^V + 6i = 0 \Rightarrow 8i - 4V_1 = 12$

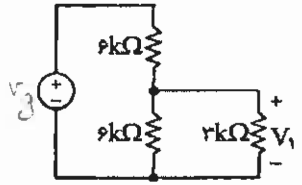
$V_1 = -4i$

با جایگذاری و حل دستگاه حاصل می‌شود:

$i = \frac{1}{2}^A \quad , \quad V_1 = -2^V$

توان مقاومت 6^Ω $\quad p = 6i^2 = 6\times\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{6}{4} = \frac{3}{2}^W$

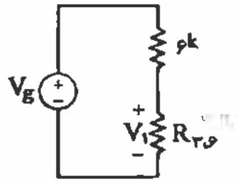
۱۱- در شکل (۲-۳۶) که یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد، مقدار ولتاژ V_1 را برحسب مقدار ولتاژ منبع V_g بیابید.



شکل ۲-۳۶ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۱)

حل:

ابتدا مدار را ساده می‌کنیم.



$$R_{3,6} = \frac{3\times 6}{3+9} = 2^K$$

$$V_1 = \frac{R_{3,6}}{R_{3,6}+6}\times V_g = \frac{2}{2+6}\times V_g = \frac{1}{4}V_g$$

«سؤالات چهارگزینه‌ای فصل دوم»

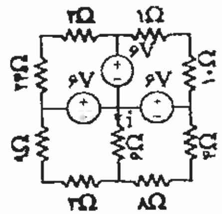
۱- در مدار شکل مقابل جریان i چقدر است؟

الف) ۱A

ب) ۰/۵A

ج) ۱/۵ A

د) ۲ A



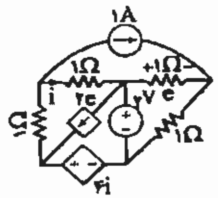
۲- در مدار مقابل شدت جریان i برابر است با:

الف) ۱/۵ آمپر

ب) ۲ آمپر

ج) ۲/۵ آمپر

د) ۰/۵- آمپر



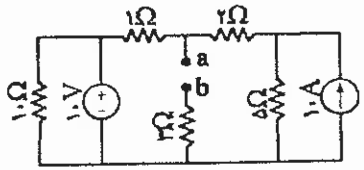
۳- در شکل زیر، ولتاژ مدار باز در دو سر ab کدام است؟

الف) ۷V

ب) $\frac{59}{7}$ V

ج) ۱۰ V

د) $\frac{75}{8}$ V



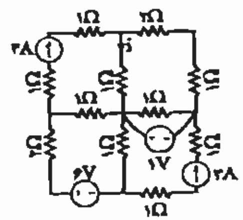
۴- در مدار مقابل، جریان I چند آمپر است؟

الف)۲

ب)۴

ج)۳

د)۱



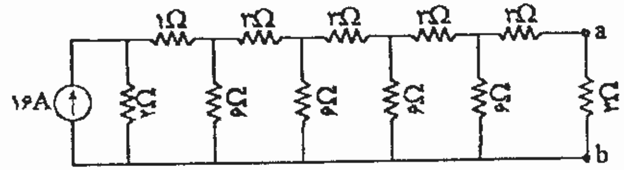
۵- در مدار زیر، ولتاژ دو سر مقاومت ab چند ولت است؟

الف)۳

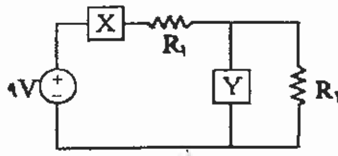
ب)۱

ج)۲

د)۴



۶- المان الکتریکی X در مدار شکل زیر با ولتاژ ۴v و جریان ۱/۵ mA کار می‌کند، در حالی که المان Y با ولتاژ ۲v و جریان ۱ mA کار می‌کند. در این شرایط مقدار مقاومتهای R_1 و R_2 به ترتیب برابرند با:



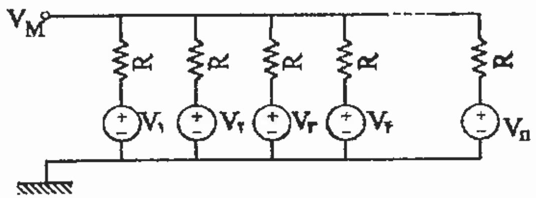
الف) ۲kΩ و ۲kΩ

ب) ۱Ω و ۲kΩ

ج) ۴kΩ و ۲kΩ

د) ۲kΩ و ۱kΩ

۷- در شکل زیر ولتاژ VM برابر است با:



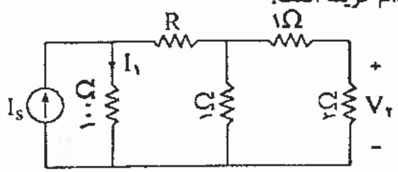
الف) $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$

ب) $\sum_{i=1}^{n} v_i$

ج) $\frac{1}{2n}\sum_{i=1}^{n} v_i$

د) $\frac{2}{n}\sum_{i=1}^{n} v_i$

۸- در مدار شکل زیر $V_2 = 2V$ و $I_1 = 2A$ است. مقدار I_S کدام گزینه است؟



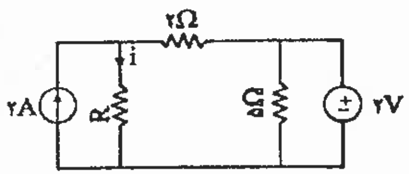
الف) ۲A

ب) ۳A

ج) ۶A

د) بستگی به مقاومت R دارد.

۹- در شکل زیر جریان عبوری از مقاومت R برابر $i = 1A$ است. مقدار مقاومت R کدام است؟



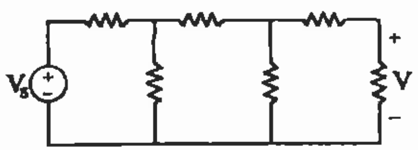
الف) ۰Ω

ب) ۲Ω

ج) ۴Ω

د) ۸Ω

۱۰- در مدار مقابل، تمام مقاومتهای یک اهم هستند. ولتاژ دو سر مقاومت سمت راستی برابر v است. پس ولتاژ منبع V_s برابر است با:



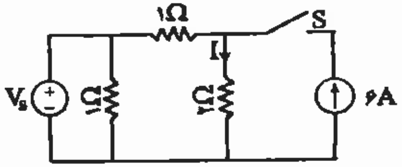
الف) ۱۳v

ب) ۸v

ج) ۴v

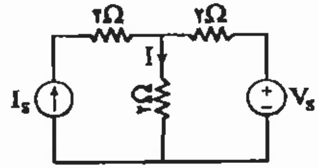
د) ۷v

۱۱- در مدار مقابل هنگامی که کلید S باز است، $I = -1A$ است. وقتی در $t = 0$ کلید S را ببندیم، مقدار I چقدر می‌شود؟



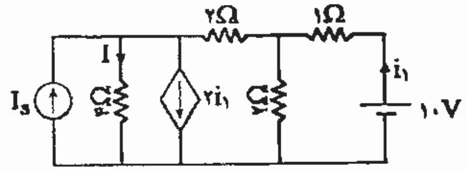
الف) ۱A
ب) ۲A
ج) ۳A
د) ۴A

۱۲- در مدار شکل مقابل، بازای $V_S = 0V$ جریان $I = 3A$ است. وقتی $V_S = 12V$ باشد، مقدار I چقدر است؟



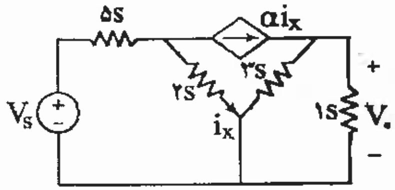
الف) ۳A
ب) ۶A
ج) ۷A
د) ۹A

۱۳-در مدار شکل زیر مقدار منبع is (برحسب آمپر) در صورتی که $I = 0$ باشد کدام است؟



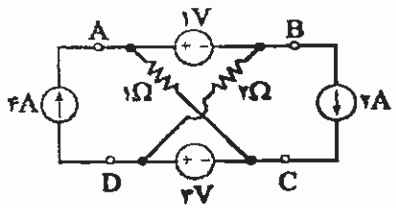
الف) ۲/۵
ب) ۷/۵
ج) ۲۲/۵
د) ۲۷/۵

۱۴- در مدار شکل زیر، حداقل مقداری a که بازای آن مدار برای خروجی V_o مانند یک تقویت کننده عمل می‌کند، چیست؟



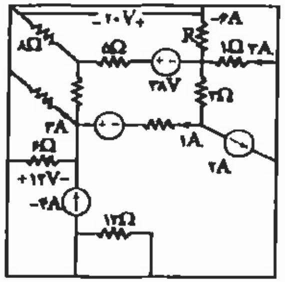
الف) ۱۰
ب) ۱۲
ج) ۱۴
د) با وجود منبع وابسته مدار همیشه یک تقویت کننده است.

۱۵- ولتاژ V_{AC} در مدار شکل زیر چیست؟



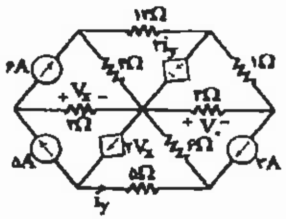
الف) ۲ ولت
ب) $\frac{16}{3}$ ولت
ج) $\frac{8}{3}$ ولت
د) $\frac{14}{3}$ ولت

۱۶- قسمتی از یک شبکه در شکل مقابل نشان داده شده است. مقاومت R چقدر است؟



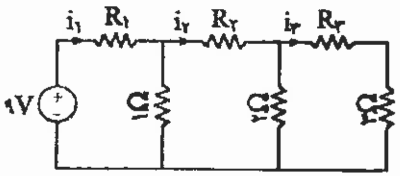
الف) ۲Ω
ب) ۱۲Ω
ج) ۲۸Ω
د) ۱۸Ω

۱۷- در شبکه شکل مقابل V_o چقدر است؟



الف) ۱۲/۵ ولت
ب) ۴/۵ ولت
ج) ۲۲/۵ ولت
د) ۱۸ ولت

۱۸- در مدار شکل زیر مقادیر R_3, R_2, R_1 کدام باشد تا اینکه داشته باشیم: $\frac{i_1}{9} = \frac{i_2}{3} = \frac{i_3}{1} = 1$

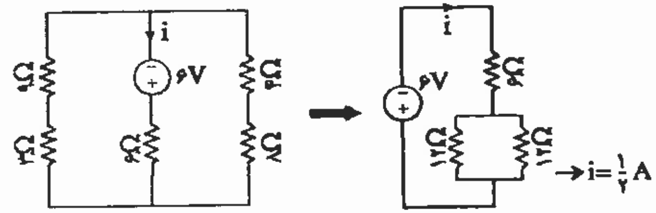


الف) ۱و۲و۳
ب) ۳و۲و۱
ج) $\frac{1}{2}$ و ۱ و $\frac{2}{3}$
د) $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{3}$ و ۱

«پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای فصل دوم»

۱- گزینه « ب » صحیح است.

از تبدیل منابع استفاده می‌کنیم. معادل سه منبع ۶ ولتی برابر با یک منبع ۶ ولتی در شاخه‌ای که مقاومت ۶Ω دارد است و مقاومتهای حلقه‌های فوقانی تأثیری در جواب مسئله ندارد. پس مدار ساده شده به شکل مقابل است:



۲- گزینه « الف » صحیح است.

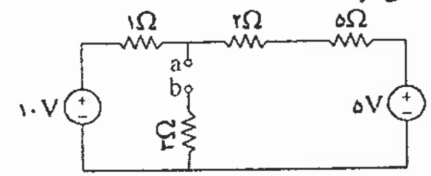
ساده ترین راه حل مسئله این است که تعداد حلقه‌های مستقل مدار را با باز کردن منابع جریان و اتصال کوتاه کردن منابع ولتاژ بدست آوریم. این تعداد ۲ تا است و KCL را برای این حلقه‌ها می‌نویسیم. (احتیاجی به نوشتن KCL برای حلقه دوم نداریم):

$$i\times۱-۲٤i+(i+۱)\times۱=۰\Rightarrow i=۱/۵A$$

۳- گزینه « د » صحیح است.

چون از مقاومت ۳Ω جریانی نمی‌گذرد پس: $v_{ab}=v_a-v_b=v_a$

همچنین معادل منبع ولتاژ با مقاومت ۱۰Ω همان منبع ولتاژ است. از طرفی معادل تونن منبع جریان $۱A$ با مقاومت ۵Ω را نیز رسم می‌کنیم شکل بصورت زیر ساده می‌شود.



$$v_a=۵+(۱۰-۵)\times\frac{(۵+۲)}{(۵+۲)+۱}$$

$$v_a=\frac{۷۵}{۸}$$

۴- گزینه « الف » صحیح است.

برای بدست آوردن i از این خاصیت که منبع ولتاژ موازی با یک المان، معادل همان منبع ولتاژ است و منبع جریان سری با یک المان معادل همان منبع جریان است، استفاده نموده، و KCL را برای حلقه‌ای که شامل منبع ولتاژ $۱V$ و دو مقاومت ۱Ω و یک مقاومت ۲Ω است، می‌نویسیم:

$$i=(۲-i)(۲+۱)-۱\Rightarrow i=۲A$$

۵- گزینه « ب » صحیح است.

اگر مدار معادل تونن برای منبع ۱۶ آمپری و مقاومت ۲Ω بنویسیم، آنگاه مشاهده می‌شود که مقاومت معادل در دو سر هر مقاومت ۶Ω برابر ۳Ω است و ولتاژ در هر گروه نصف می‌شود، پس داریم:

$$v_{ab}=۳۲\left(\frac{۱}{۲}\right)^۵=۱V$$

۶- گزینه « الف » صحیح است.

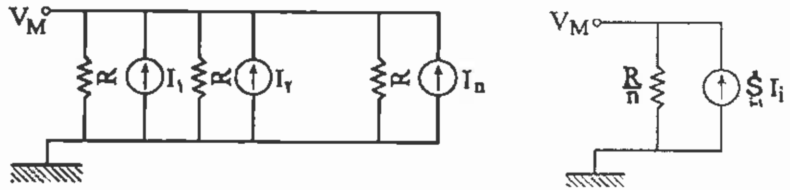
با توجه به داده‌های مسئله داریم:

$$R_۲=\frac{v_y}{I_x-I_y}=\frac{۲}{۱/۵-۱}=٤k\Omega$$

$$۹=v_x+R_۱I_x+v_y\Rightarrow R_۱=\frac{۹-٤-۲}{۱/۵}=۲k\Omega$$

۷- گزینه « الف » صحیح است.

مدار معادل نورتن هر شاخه را رسم می‌کنیم، شکل بصورت زیر ساده می‌شود.



$$I_i=\frac{v_i}{R}\qquad v_M=\frac{R}{n}\sum_{i=۱}^{n}I_i=\frac{R}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{v_i}{R}=\frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}v_i$$

۸- گزینه « ج » صحیح است.

اگر ولتاژ دو سر مقاومت موازی را $V۱$ فرض کنیم، داریم:

$$v_۱=(۲+۱)\frac{v_۲}{۲}\Rightarrow v_۱=۳v$$

$$I_R=\frac{v_۱}{۱}+\frac{v_۲}{۲}=٤\ A$$

(IR جریان مقاومت R است)

$$I_S=I_۱+I_R\Rightarrow I_S=٦A$$

۹- گزینه « ج » صحیح است.

معادلهٔ KVL را برای تنها حلقه موجود می‌نویسیم:

$$R_i=۲(۲-i)+۲\Rightarrow R=۲+۲\Rightarrow R=٤\Omega$$

۱۰- گزینه « الف » صحیح است.

اگر ولتاژ مقاومت ۱Ω موازی دوم (در سمت راست) $V_۱$ ولتاژ مقاومت ۱Ω موازی سوم (در سمت چپ) $V_۲$ باشد، از قانون تقسیم ولتاژ استفاده می‌کنیم در این صورت خواهیم داشت:

$$\frac{v}{v_۱}=\frac{۱}{۱+۱}=\frac{۱}{۲} \qquad \frac{v_۱}{v_۲}=\frac{(۱+۱)\|۱}{(۱+۱)\|۱+۱}=\frac{\frac{۲}{۳}}{\frac{۲}{۳}+۱}=\frac{۲}{۵}$$

$$\frac{v_۲}{v_s}=\frac{\left[(۱+۱)\|۱+۱\right]\|۱}{\left[(۱+۱)\|۱+۱\right]\|۱+۱}=\frac{\left(\frac{۵}{۳}\|۱\right)}{\left(\frac{۵}{۳}\|۱\right)+۱}=\frac{\frac{۵}{۸}}{\frac{۵}{۸}+۱}=\frac{۵}{۱۳}$$

$$\frac{v}{v_s}=\frac{v}{v_۱}\frac{v_۱}{v_۲}\frac{v_۲}{v_s}=\frac{۱}{۲}\frac{۲}{۵}\frac{۵}{۱۳}=\frac{۱}{۱۳}\Rightarrow v_s=۱۳v$$

۱۱- گزینه « الف » صحیح است.

ابتدا هنگامی که کلید باز است، در نظر می‌گیریم و V_s را محاسبه می‌کنیم:

$$I=\frac{v_s}{۱+۲}\Rightarrow v_s=-۳v \qquad \text{(البته محاسبهٔ } V_s \text{ لازم نیست)}$$

حال کلید را بسته در نظر می‌گیریم. از قانون جمع آثار استفاده کنیم، در این صورت جریان ناشی از منبع جریان $۶A$ در I $(I_۱)$ برابر است با:

$$I_۱=\frac{۱}{۱+۲}\times۶=۲A$$

جریان کل $I = I_۱+I=۲+(-۱)=۱A$

۱۲- گزینه « ب » صحیح است.

ابتدا در حالت $v_s=۰$، جریان I_s را بدست می‌آوریم: (البته محاسبه I_s لازم نیست)

$I=\frac{۲}{۲+۲}I_s=\frac{۱}{۲}I_s\Rightarrow I_s=۶A$ در حالت $v_s=۱۲v$، از قانون جمع آثار استفاده می‌کنیم، در این صورت جریان ناشی از منبع ولتاژ V_s در I $(I_۱)$ برابر است با:

$$I_۱=\frac{v_s}{۲+۲}=\frac{۱۲}{۴}=۳A$$

جریان کل I $I_۱+I=۳+۳=۶A$

۱۳- گزینه « ب » صحیح است.

اگر I صفر باشد، مقاومتهای ۲ اهمی با هم موازی می‌شوند و جریان $i_۱$ بطور مساوی بین آنها تقسیم می‌شود، بنابراین داریم:

$$۱۰=i_۱+۲\times\frac{i_۱}{۲}\Rightarrow i_۱=۵A$$

حال معادلهٔ KCL را در گروه I_S می‌نویسیم:

$$I_S+\frac{i_۱}{۲}=I+۲i_۱\Rightarrow I_S=۱/۵i_۱\Rightarrow I_S=۷/۵A$$

۱۴- گزینه « ج » صحیح است.

با نوشتن KCL در گره‌های دو طرف منبع جریان وابسته داریم:

$$\begin{cases} v_۱=۲i_x \\ ۵(v_۱-v_s)+i_x+\alpha i_x=۰\Rightarrow \dfrac{v_۰}{v_s}=\dfrac{۵\alpha}{۱۴+۴\alpha} \\ v_۰+۳v_۰-\alpha i_x=۰ \end{cases}$$

برای آنکه مدار مانند یک تقویت کننده عمل کند، لازم است ضریب بهره $\left(\frac{v_۰}{v_s}\right)$ بزرگتر از یک باشد:

$$\frac{۵\alpha}{۱۴+۴\alpha}>۱\Rightarrow ۵\alpha>۴\alpha+۱۴\Rightarrow\alpha>۱۴$$

پس حداقل a، ۱۴ است.

۱۵- گزینه « الف » صحیح است.

با استفاده از قانون جمع آثار می توان V_{AC} را سریعتر بدست آورد. اگر ولتاژ ناشی از منابع $۴A$ و $۲A$ و $۱V$ و $۳V$ به ترتیب $V_۱, V_۲, V_۳, V_۴$ باشد خواهیم داشت:

$$v_۱=۴\times(۱\|۲)=-\frac{۸}{۳}v$$

$$v_۲=(-۲)\times(۱\|۲)=-\frac{۴}{۳}v$$

$$v_۳=(-۱)\times\frac{۱}{۱+۲}=\frac{-۱}{۳}v$$

$$v_۴=۳\times\frac{۱}{۱+۲}=۱v$$

$$V_{AC}=v_۱+v_۲+v_۳+v_۴\Rightarrow V_{AC}=۲v$$

۱۶- گزینه « الف » صحیح است.

جریان مقاومت ۳Ω سمت راست $۳A$ است پس:

$I+۳=۳+۶\Rightarrow I=۶A$ (جریان منبع ۳۸V)

$I_۱+۳=-۴+\frac{۱۲}{۶}+۱\Rightarrow I_۱=-۴A$ جریان مقاومت مجهول سمت چپ

$I_۲=I_۱+I\Rightarrow I_۲=۲A$ جریان مقاومت ۸Ω

$$۲۰=۲R-۳۸+۵I+۸I_۲\Rightarrow۱۲=۶R\Rightarrow R=۲\Omega$$

۱۷- گزینه « ج » صحیح است.

برای محاسبهٔ V_x، ابتدا جریان مقاومت 2Ω را محاسبه می‌کنیم:

جریان مقاومت 2Ω

$$I_1 = 5 - 6 \Rightarrow I_1 = -1A$$

$$v_x = 2I_1 \Rightarrow v_x = -2V$$

برای محاسبه i_y، معادلهٔ KCL لازم را می‌نویسیم:

$$2v_x = i_y + 5 \Rightarrow i_y = -9A$$

معادل KCL برای حلقه شامل مقاومت 1Ω و منبع ولتاژ وابسته $2i_y$ و مقاومت 3Ω را می‌نویسیم:

$$2i_y = 1\left(3 - \frac{v_o}{3}\right) - v_o \Rightarrow -27 = 3 - \frac{4}{3}v_o$$

$$-30 = -\frac{4}{3}v_o = \frac{90}{4} = 22/5V$$

۱۸- گزینه « ب » صحیح است.

از قانون تقسیم جریان استفاده می‌کنیم:

$$i_2 = \frac{2}{2 + R_3 + 3} i_3 \Rightarrow \frac{2}{5 + R_3} = \frac{1}{3} \Rightarrow R_3 = 1\Omega$$

$$i_3 = \frac{1}{1 + R_2 + \left(2 \| (R_3 + 3)\right)} i_1 \Rightarrow \frac{1}{1 + R_2 + \left(2 \| (R_3 + 3)\right)} = \frac{1}{3}$$

$$\Rightarrow R_2 + (2 \| 4) = 2 \Rightarrow R_2 = \frac{2}{3}\Omega$$

$$i_1 = \frac{9}{R_1 + \left[1 \| \left(R_2 + \left(2 \| (R_3 + 3)\right)\right)\right]} = 9$$

$$R_1 + \left[1 \| \left(R_2 + \left(2 \| (R_3 + 3)\right)\right)\right] = 1 \Rightarrow R_1 + \left[1 \| \left(R_2 + (2 \| 4)\right)\right] = 1$$

$$R_1 + \left[1 \| \left(R_2 + \frac{4}{3}\right)\right] = 1 \Rightarrow R_1 + \frac{2}{3} = 1 \Rightarrow R_1 = \frac{1}{3}\Omega$$

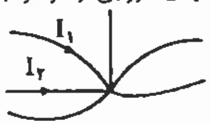
فصل سوم

روشهای تحلیل شبکه‌های مقاومتی

۳-۱ قوانین کیرشف

مبنای درس مدارهای الکتریکی، دو قانون ارزشمند کیرشف می‌باشد.

۱- قانون جریان یا KCL: جمع جبری جریانهای خروجی از هر گره برابر صفر است.

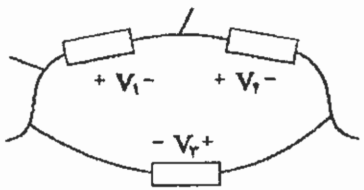


شکل ۳-۱ قانون جریان KCL

در هر گره یا سوپر گره یا کات ست داریم:

$$\sum_i I_i = 0 \qquad (3\text{-}1)$$

۲- قانون ولتاژ یا KVL: جمع جبری ولتاژهای عناصر در هر مسیر بسته صفر است.



شکل ۳-۲ قانون ولتاژ KVL

در هر مش یا سوپر مش یا حلقه داریم:

$$\sum_i v_i = 0 \qquad (۳-۲)$$

۳-۲ مدارهای مقاومتی و روشهای تحلیل

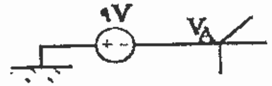
در کتابهای مدار، دو روش استاندارد برای تحلیل مدار معرفی می‌گردد، به نامهای روش گره و روش مش؛ که ما ابتدا به دقت این دو روش را مورد بررسی قرار می‌دهیم و سپس روش سوم را (که روش بهینه خصوصاً در حل مسایل تستی است) مورد کنکاش قرار می‌دهیم.

الف) روش تحلیل گره:

هدف: پیدا کردن ولتاژ گره‌ها (به جز گرهٔ مبنا یا زمین که در آن $v = 0$)

روش: KCL را در همهٔ گره‌ها (به جز گرهٔ زمین و گرهٔ با ولتاژ معلوم) می‌نویسیم.

اگر ولتاژ یک سر منبع ولتاژی معلوم باشد، ولتاژ سر دیگرش هم معلوم است دیگر!



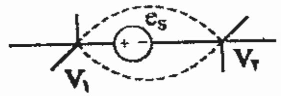
شکل ۳-۳ یک منبع ولتاژ با یک سرزمین

مثلاً در شکل (۳) $V_A = -9^V$ می‌باشد.

KCL را حتی المقدور برحسب ولتاژ گره‌ها می‌نویسیم.

اگر گره زمین مشخص نبود، آن را یک سر منبع ولتاژ می‌گذاریم.

اگر بین دو گره با ولتاژ مجهول، منبع ولتاژ بود، برای راحتی، از نوشتن KCL در گرهٔ مرکب یا سوپر گره استفاده می‌کنیم. باز یک معادله از معادلات ما کاسته می‌شود.

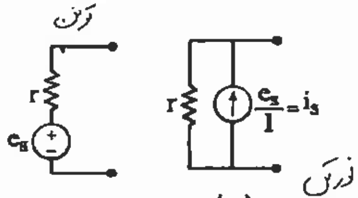


شکل ۳-۴ یک منبع ولتاژ با دو گره مجهول

در شکل (۴) ملاحظه می‌گردد که:

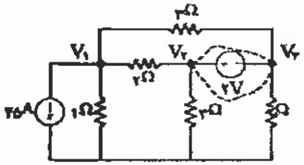
$$V_1 - V_2 = e_s$$

در روش گره که مبنای آن KCL است، به منبع جریان علاقه‌مندیم، چرا که کار کردن با منبع جریان در KCL راحت است. برای همین، ترکیبهای بصورت شکل ۳-۵ (الف) به صورت ۳-۵ (ب) تبدیل می‌کنیم.



شکل ۳-۵ مدارهای معادل (الف) تونن و (ب) نورتن

مثال ۱: در مدار زیر پس از تحلیل مقادیر V_1, V_2, V_3 را پیدا کنید.



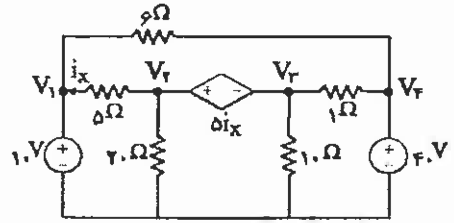
برای حل، در نگاه اول سه معادله سه مجهول داریم ولی بین گره‌های V_2, V_3 منبع ولتاژ ملاحظه می‌شود، پس:

$$V_3 - V_2 = 2^V$$

$$\begin{cases} \text{KCL در گره‌ی I} \quad , \quad V_1 + \dfrac{V_1 - V_3 - 2}{2} + \dfrac{V_1 - V_2}{3} + 45 = 0 \\ \text{KCL در گره‌ی مرکب} \quad , \quad \dfrac{V_2 + 2 - V_1}{2} + \dfrac{V_2 + 2}{3} + V_2 + \dfrac{V_2 - V_1}{3} = 0 \end{cases}$$

و از حل این، ۲ معادله ۲ مجهول، مقادیر حاصل می‌شوند!

مثال ۲: ولتاژهای V_1, V_2, V_3, V_4 را پیدا کنید.



حل:

ابتدا باید i_x را برحسب متغیرهای مطلوبمان (مثلاً در این مسئله ولتاژها) بنویسیم:

$$i_s = \frac{V_2 - V_1}{5} \quad , \quad \boxed{V_1 = 10^V}, \boxed{V_4 = 40^V}$$

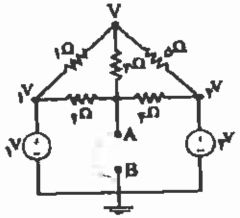
حالا در گرهٔ مرکب V_2, V_3 یک KCL می‌زنیم. مثال ۲:

$$V_2 - V_3 = 5i_x = 5 \times \frac{V_2 - V_1}{5} = V_3 - V_1$$

$$\boxed{V_3 = V_1 = 10^V}$$

در کره‌ی مرکب $KCL: \frac{V_2 - 10}{5} + \frac{V_2}{20} + \frac{10}{10} + \frac{10-40}{1} = 0 \Rightarrow \boxed{V_2 = 124^V}$

مثال ۲: در صورتی که شاخهٔ AB را اتصال کوتاه کنیم، چه جریانی از آن می‌گذرد؟



اگر شاخه AB را اتصال کوتاه کنیم، و نقطه B را زمین در نظر بگیریم؛ فقط یک گره با ولتاژ مجهول باقی می‌ماند. (گره بالایی مدار)
در آن گره KCL می‌زنیم:

$$KCL: V - 1 + \frac{V}{3} + \frac{V-2}{5} = 0 \Rightarrow \boxed{V = \frac{21}{23}V}$$

حال برای جریان شاخه AB باید سه جریان را حساب نموده و سپس جمع کنیم:

$$i_{AB} = \frac{1-0}{2} + \frac{2-0}{4} + \frac{\frac{21}{23}-0}{3} = \frac{20}{23}A$$

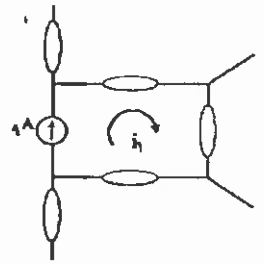
تا این جا فعلاً برای روش گره کافی است؛ به سراغ روش دوم می‌رویم.

ب) روش تحلیل مش:

هدف: پیدا کردن جریان مشها

روش: KVL را در همهٔ مشها (به جز مش بیرونی و مشهای با جریان معلوم) می‌نویسیم.

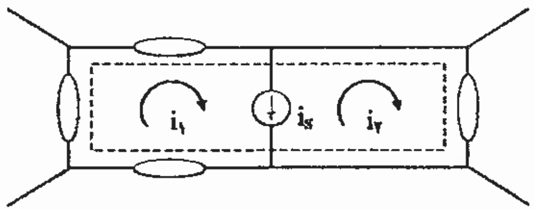
یعنی هرگاه در یک مش منبع جریان مستقل وجود داشته باشد. البته به گونه‌ای که بتوان مقدار جریان مش را با یک نگاه بدست آورد.



شکل ۳-۶ مش با جریان معلوم

مثلاً در شکل ۳-۶ جریان مش i_1 مشخص است و دیگر نیازی به KVL زدن در آن حلقه نمی‌باشد، هرچند این KVL غلط نیست ولی کاری بیهوده است.

(وقتی بین دو مش با جریان مجهول، یک منبع جریان باشد.
جریان یکی از مشها را بر حسب جریان مش همسایه می‌نویسیم؛ و سپس کل دو مش همسایه را در حکم یک مش در نظر می‌گیریم و برایش KVL می‌زنیم.)



شکل ۳-۷ مش مرکب

$$i_1 - i_2 = i_s$$

مش: ساده‌ترین حلقه‌ای که شاخه‌ای درونش نباشد.

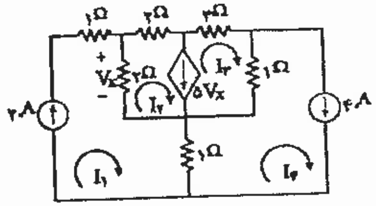
جریان مش: یک جریان فرضی با جهت دلخواه – مثلاً در جهت عقربه‌های ساعت – است که از همه شاخه‌های درون مش می‌گذرد.

(در شاخه‌ای که بین دو مش مشترک باشد، جریان واقعی برابر تفاضل جریان مشهاست.)

در این روش دو جهت داریم، یکی جهت جریان و یکی جهت حرکت در حلقه‌ها، اگر هنگام حرکت در مش از سر منفی منبع ولتاژ وارد شویم، مقدار $-E_0$ منظور می‌کنیم و اگر از سر مثبت منبع ولتاژ وارد شویم، $+E_0$ قرار می‌دهیم.و اما در مورد مقاومتها (و به عبارتی امپدانسها):

اگر هنگام حرکت، هم جهت جریان بودیم مقدار $+RI$ را در نظر می‌گیریم و اگر در خلاف جهت جریان در حال حرکت بودیم، $-RI$ قرار می‌دهیم.

مثال ۳: جریانهای I_1 تا I_4 را محاسبه کنید.



V = RI

ظاهراً این مدار چهار مش دارد، یعنی ۴ معادله، ۴ مجهول، اما با نگاهی ساده داریم:

$I_4 = 40A$, $I_1 = 20A$

$V_x = 2(20 - I_2)$

و برای رابطه مستطیلیه!:

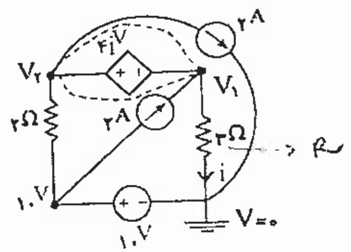
$$I_2 - I_3 = 5V_x \Rightarrow \boxed{I_3 = 11I_2 - 200}$$

حالا در مش مرکب (۲و۳) KVL می‌زنیم:

$$KVL: 2I_2 + 2(11I_2 - 200) + 11I_2 - 2000 - 40 + 2(I_2 - 20) = 0$$

یعنی یک معادله یک مجهول... پس I_2 و در نتیجه I_3 معلوم شد...

مثال ۴: جریان i چند آمپر است؟



گرهٔ زمین را سمت راست منبع ولتاژ می‌گیریم، ولتاژ سمت چپ برابر ۱۰ ولت شده، حالا ۲ گره با ولتاژ مجهول داریم (V_1 و V_2) که بین آنها منبع ولتاژ است، پس به کمک KCL در گرهٔ مرکب داریم:

ابتدا

$$i = \frac{V_1}{3} \qquad I = \frac{V}{R}$$

و رابطه مستطیلیه!:

$$V_2 - V_1 = 4i = 4\frac{V_1}{3} \Rightarrow \boxed{V_2 = \frac{7}{3}V_1}$$

و نهایتاً KCL در گره مرکب:

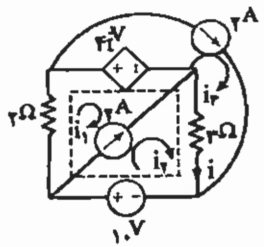
$$KCL \rightarrow \frac{\frac{7}{3}V_1 - 10}{2} + 8 - 2 + \frac{V_1}{3} = 0$$

$$\Rightarrow 7V_1 - 30 + 36 + 2V_1 = 0 \rightarrow 9V_1 = -6 \rightarrow V_1 = -\frac{2}{3}V$$

و بالاخره برای i داریم:

$$i = \frac{V_1}{3} = -\frac{2}{9}A$$

حال به روش مش:



جریان i_3 که معلوم است و برای مشهای ۱ و۲ از KVL در مش مرکب بهره می‌گیریم.

ابتدا:

$$i_3 = 8A$$
$$i = i_2 - 8$$
$$i_2 - i_1 = 2 \Rightarrow \boxed{i_1 = i_2 - 2}$$

و حالا KVL در مش مرکب:

$$KVL: 4(i_2 - 8) + 3(i_2 - 8) - 10 + 2(i_2 - 2) = 0$$

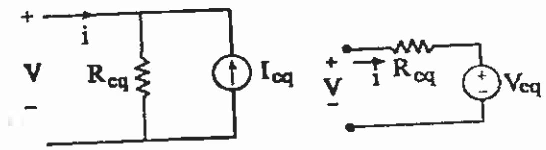
$$\Rightarrow 4i_2 - 32 + 3i_2 - 24 - 10 + 2i_2 - 4 = 0 \Rightarrow 9i_2 = 70 \rightarrow i_2 = \frac{70}{9}$$

و سرانجام برای i داریم:

$$i = i_2 - 8 = -\frac{2}{9}A$$

۳-۳ قضیه تونن و نورتن

قضیه تونن و نورتن: تمام مدار بجز مقاومت بار موردنظر، با یک مدار معادل، ترکیب سری یک منبع مستقل و یک مقاومت عوض کنیم در این صورت پاسخی که روی بار اندازه می‌گیریم همان پاسخ قبلی خواهد بود. و مدار معادل نورتن، یک منبع جریان مستقل و موازی با یک مقاومت است.



(ب) (الف)

شکل ۳-۸ (الف) مدار معادل (ب) مدار معادل نورتن

نکته: در مدارهای مقاومتی دارای منابع وابسته و منابع مستقل، غالباً برای تعیین معادل تونن و نورتن، ولتاژ مدار باز و جریان اتصال کوتاه بدست می‌آوریم و سپس R_{eq} از تقسیم ولتاژ مدار باز بر جریان اتصال کوتاه بدست می‌آید.

SC ← اتصال کوتاه

OS ← مدار باز

$$R_{eq} = \frac{V_{oc}}{I_{sc}}$$

ولتاژ مدار باز

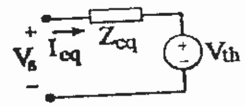
جریان اتصال کوتاه

نکته: قضیه تونن و نورتن برای مدارهای خطی بکار می‌رود (مداراتی که تمام عناصر آن خطی باشد- مقاومت خازن و سلف).

نکته: برای بدست آوردن مدار معادل تونن و نورتن دو روش دیگر وجود دارد.

الف) برای بدست آوردن مدار معادل تونن دو سر یک مدار یک منبع ولتاژ V_s قرار داده و جریانی که از پایانه مثبت آن خارج می‌شود I_{eq} باشد، بین این دو کمیت یک رابطه بصورت زیر بدست می‌آید:

$$V_S = Z_{eq}I_{eq} + V_{th}$$

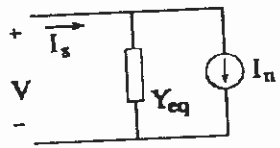


شکل ۳-۹ مدار معادل تونن

حالتی که مدار کاملاً مقاومتی باشد $Z_{eq} = R_{eq}$

ب) برای بدست آوردن مدار معادل نورتن از دو سر یک مدار، یک منبع جریان Is اعمال کرده و ولتاژ روی آن را V می‌نامیم آنگاه رابطه بین این دو پارامتر عبارتست از:

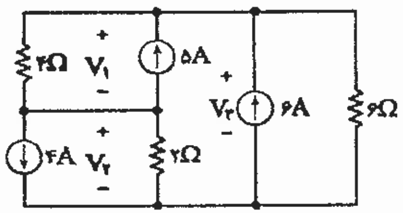
$$I_s = I_n + VY_{eq}$$



شکل ۳-۱۰ مدار معادل نورتن

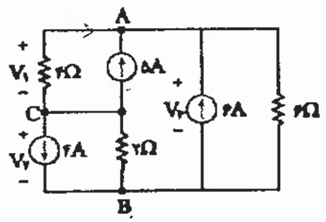
حل مسائل فصل سوم

۱- با استفاده از روش تحلیل گره، متغیرهای V_3, V_2, V_1 را در مدار الکتریکی شکل (۳-۳۱) بیابید.



شکل ۳-۳۱ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

حل:



گره C را به عنوان گره مرجع در نظر می‌گیریم.

KCL در گره A: $\frac{V_A}{4} + \frac{V_A - V_B}{6} - 5 - 6 = 0$

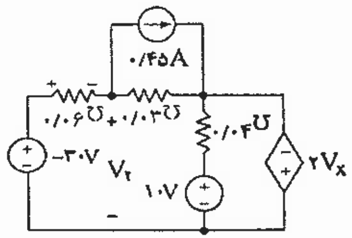
KCL در گره B: $\frac{V_B}{2} + \frac{V_B - V_A}{6} + 6 - 4 = 0$

با مرتب کردن معادلات KCL $\Rightarrow \begin{cases} 5V_A - 5V_B = 132 \\ -V_A + 4V_B = -12 \end{cases} \Rightarrow V_A = 28^V \quad , \quad V_B = 4^V$

حال با توجه به شکل و مقدار ولتاژ گره‌ها، مقدار ولتاژهای V_3, V_2, V_1 را به V_B , V_A ارتباط می‌دهیم.

$V_1 = V_A = 28^V \quad , \quad V_2 = V_B = -4^V \quad , \quad V_3 = V_A - V_B = 28 - 4 = 24^V$

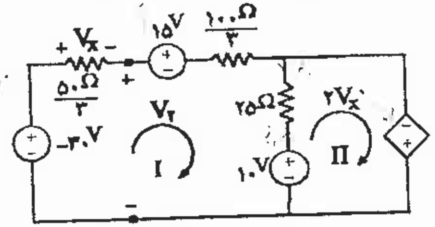
۲- با استفاده از روش تحلیل مش، ولتاژ V_2 را در مدار شکل (۳-۳۲) تعیین کنید.



شکل ۳-۳۲ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

حل:

ابتدا مدار را به صورت مقابل تبدیل می‌کنیم که در آن به جای مقاومت $0/02^{V}$ و منبع جریان $0/45^{A}$ معادل تونن آن رسم شده است. همچنین مقدار مقاومتها را به شکل اهم می‌نویسیم چون در روابط مش‌ها مقدار مقاومتها برحسب اهم باشد در نوشتن روابط با معادلات راحت‌تر است.



$$\text{در مش (I)}\quad KVL: +30 + V_X - 15 + \frac{100}{3} i_1 + 25(i_1 - i_2) + 10 = 0$$

$$\text{در مش (II)}\quad KVL: -10 + 25(i_2 - i_1) - 2V_X = 0$$

رابطه زیر را در معادلات مش‌ها جایگذاری کرده و معادلات را مرتب می‌کنیم.

$$V_X = \frac{50}{3} i_1$$

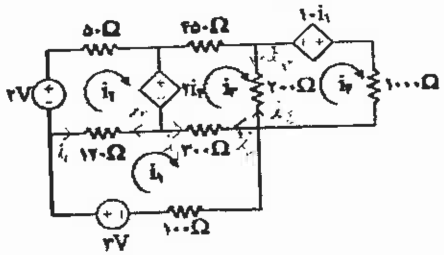
حاصل به صورت زیر خواهد بود:

$$\begin{cases} 2i_1 - i_2 = -1 \\ -25i_1 + 15i_2 = 6 \end{cases} \Rightarrow i_1 = 0/9^{A} \quad , \quad i_2 = 2/7^{A}$$

حال V_2 را بر حسب جریان مش‌ها می‌نویسیم برای این کار در سمت چپ مدار یک معادله با حلقه یا KVL می‌نویسیم:

$$+30 + \frac{50}{3} i_1 + V_2 = 0 \Rightarrow V_2 = -30 - \frac{50}{3} i_1 = -30 - \frac{50}{3} \times 0/9 = 45^{V}$$

۳- مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۳۳) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل مش، جریانهای i_1 تا i_4 را بیابید.



شکل ۳-۳۳ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

حل:

با توجه به شکل مسئله معادلات مش را می‌نویسیم:

$$\text{در مش (I)}\quad KVL: 100i_1 - 3 + 120(i_1 - i_2) + 300(i_1 - i_3) = 0$$

$$\text{۲} \leftarrow \text{در مش (II)}\quad KVL: 200(i_4 - i_3) - 10i_1 + 1000i_4 = 0$$

$$\text{در مش (III)}\quad KVL: 450i_3 + 200(i_3 - i_4) + 300(i_3 - i_1) - 2i_4 = 0$$

$$\text{در مش (IV)}\quad KVL: 200(i_4 - i_3) - 10i_1 + 1000i_4 = 0$$

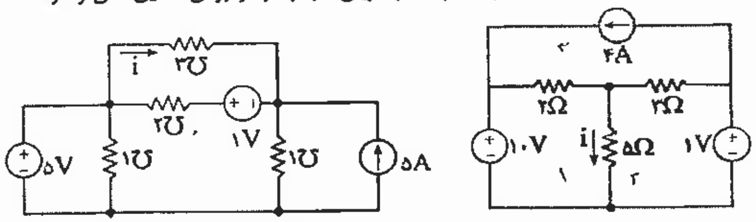
حال معادلات مش‌ها را مرتب می‌کنیم.

$$\begin{cases} 620i_1 - 120i_2 - 300i_3 = 3 \\ -120i_1 + 170i_2 + 2i_4 = 2 \\ -300i_1 + 950i_3 - 202i_4 = 0 \\ -i_1 - 20i_3 + 120i_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} 620 & -120 & -300 & 0 \\ -120 & 170 & 0 & 2 \\ -300 & 0 & 950 & -202 \\ -1 & 0 & -20 & 120 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$i_1 = 0/013^{A} \quad , \quad i_2 = 0/021^{A}$$

$$i_3 = 0/0043^{A} \quad , \quad i_4 = 0/0008^{A}$$

۴- در دو مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۳۴) مقدار جریان i را از هر دو روش تحلیل مش و گره مشخص کنید.

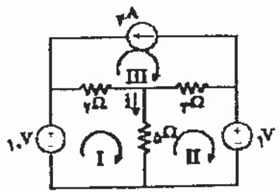


شکل ۳-۳۴ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۴)

حل:

شکل اول سمت راست

(ابتدا تحلیل به روش مش)



$$\text{در مش (I)}\quad KVL: 2(i_1 - i_3) + 5(i_1 - i_2) - 10 = 0$$

$$\text{در مش (II)}\quad KVL: 5(i_2 - i_1) + 3(i_2 - i_3) + 1 = 0$$

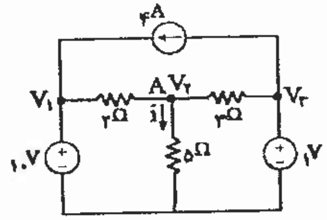
$$\text{در مش (III)}\quad KVL: i_3 = -4^{A}$$

با جایگذاری $i_3=-4$ را در معادلات مش‌های I , II خواهیم داشت:

$$\begin{cases}7i_1-5i_2=2\\-5i_1+8i_2=-12\end{cases}\Rightarrow i_1=-\frac{49}{31}^{A}\ ,\ i_2=\frac{-81}{31}^{A}\qquad i=i_1-i_2=\frac{32}{31}^{A}$$

حال مقدار i را برحسب جریان مشها می‌نویسیم.

روش گره:



$$V_1=10^{V}$$

$$\text{در گره A}\ KCL:\frac{V_2-V_1}{2}+\frac{V_2}{5}+\frac{V_2-V_3}{3}=0$$

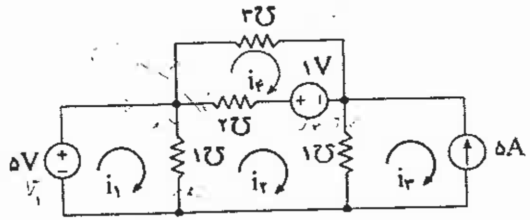
$$V_3=1^{V}$$

با جایگذاری V_1,V_3 در معادله KCL در گره (۲) پاسخ V_2 را به راحتی می‌توان محاسبه کرد.

$$V_2=V=\frac{160}{31}^{V}\qquad i=\frac{V}{5}=\frac{160}{31\times5}=\frac{32}{31}^{V}$$

حل شکل دوم:

ابتدا حل از طریق روش مش:



$$\text{(I) در مش}\ KVL:-5+(i_1-i_2)=0$$

$$\text{(II) در مش}\ KVL:(i_2-i_1)+\frac{1}{2}(i_2-i_4)+1^{V}+(i_2-i_3)=0$$

$$\text{(III) در مش}\ KVL:i_3=-5^{A}$$

$$\text{(IV) در مش}\ KVL:\frac{1}{3}i_4-1+\frac{1}{2}(i_4-i_2)=0$$

بعد از جایگذاری i_3 و مرتب کردن معادلات داریم:

$$\begin{cases}i_1-i_2=5\\2i_1-5i_2+i_4=12\\-3i_1+5i_4=6\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}i_1=\frac{14}{3}^{A}\\i_2=-\frac{1}{3}^{A}\\i_4=1^{A}\end{cases}$$

روش گره:

$$\text{در گره A}\ KCL:V_1=5^{V}$$

$$KCL(B)+KCL(C):2(V_2-V_1)+3(V_3-V_1)+V_3=0\qquad,\qquad V_2-V_3=1^{V}$$

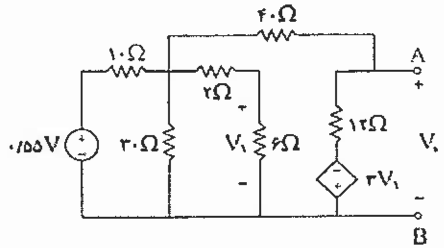
با مرتب کردن و جایگذاری مقداری $V_1=5V$ در دو رابطه بالا خواهیم داشت:

$$V_2+2V_3=15^{V}$$

$$V_2-V_3=1^{V}\qquad\Rightarrow V_2=\frac{17}{3}^{A}\ ,\ V_3=\frac{14}{3}^{V}$$

$$i=3(V_1-V_3)=3\left(5-\frac{14}{3}\right)=1^{A}$$

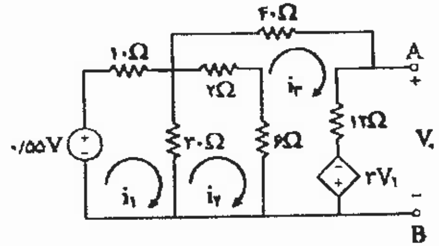
۵- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۳-۳۵) با استفاده از روش تحلیل مش و گره ولتاژ V_0 را تعیین کنید.



شکل ۳-۳۵ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

حل:

ابتدا تحلیل مش:



$$\text{(I)}\ \text{در مش}\quad KVL: 10i_1 + 30(i_1 - i_2) = 0/55$$

$$\text{(II)}\ \text{در مش}\quad KVL: 30(i_2 - i_1) + 2(i_2 - i_3) + 6(i_2 - i_3) = 0$$

$$\text{(III)}\ \text{در مش}\quad KVL: 40i_3 + 12i_3 - 2V_1 + 6(i_3 - i_2) + 2(i_3 - i_2) = 0$$

$$V_1 = 6(i_2 - i_3)$$

با ساده کردن معادلات داریم:

$$40i_1 - 30i_2 = 0/55$$
$$-30i_1 + 38i_2 - 8i_3 = 0$$
$$-26i_2 + 78i_3 = 0 \Rightarrow i_2 = 3i_3$$

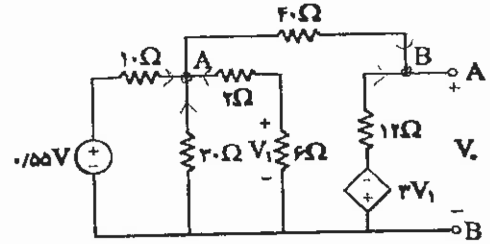
از حل دستگاه حاصل می‌شود:

$$i_1 = \frac{29/15^A}{770} \quad , \quad i_2 = \frac{9 \times 29/15^A}{52 \times 154} \quad , \quad i_3 = \frac{87/45^A}{8162}$$

$$V_o = 12i_3 - 2V_1 = 12i_3 - 2(6(i_2 - i_3)) = 30i_3 - 18i_2 = 30i_3 - 18(3i_3) = -24i_3$$

$$V_o = -\frac{1049/4}{4081} = -0/25^V$$

روش تحلیل گره:

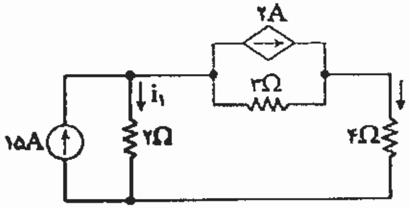


$$\text{A در گره}\quad KCL: \frac{V_k - 0/55}{10} + \frac{V_K}{30} + \frac{V_K}{8} + \frac{V_K - V_o}{40} = 0$$

$$\text{B در گره}\quad KCL: \frac{V_o + 2V_1}{12} + \frac{V_o - {}'V_K}{40} = 0$$

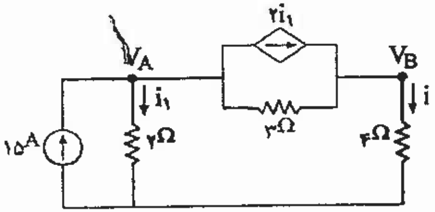
$$V_1 = \frac{6}{6+2} V_K = \frac{3}{4} V_K$$

۷- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۳۷) جریان I را از روش تحلیل گره بیابید.



شکل ۳-۳۷ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

حل:



$$\text{A در گره}\quad KCL: \frac{V_A}{2} + \frac{V_A - V_B}{3} + 2i_1 = 15$$

$$\text{B در گره}\quad KCL: \frac{V_B}{4} + \frac{V_B - V_A}{3} - 2i_1 = 0$$

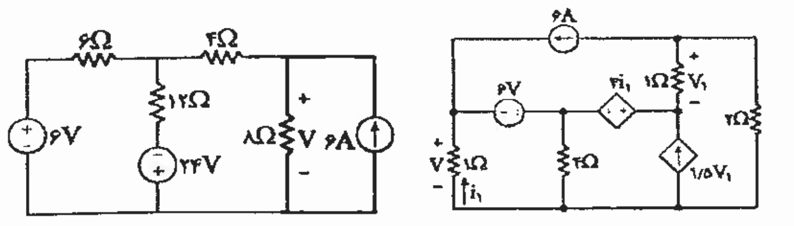
$$i_1 = \frac{V_A}{2} \qquad \text{(I)}$$

با جایگذاری رابطه (I) در روابط KCLها به راحتی به دستگاه مقابل خواهیم رسید.

$$\begin{cases} 3V_A + 2(V_A - V_B) + 12i_1 = 90 \\ 3V_B + 4(V_B - V_A) - 24i_1 = 0 \end{cases}$$

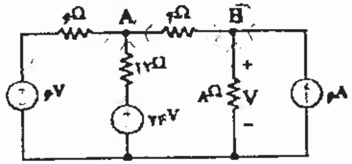
$$\begin{cases} 11V_A - 2V_B = 90 \\ -16V_A + 7V_B = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_A = 14^V \\ V_B = 32^V \end{cases} \Rightarrow \quad i = \frac{V_B}{4} = \frac{32}{4} = 8^A$$

۸- مدارهای الکتریکی در شکل (۳-۳۸) مفروض است. با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ v را در هر دو مدار بیابید.



شکل ۳-۳۸ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

حل:



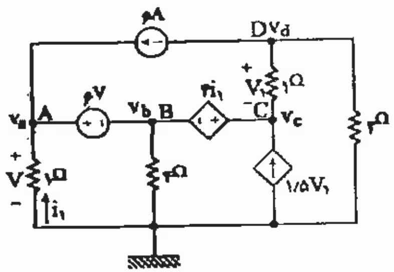
در گره A $KCL:\frac{V_A-۶}{۶}+\frac{V_A-۲۴}{۱۲}+\frac{V_A-V}{۴}=۰$

در گره B $KCL:\frac{V-V_A}{۴}+\frac{V}{۸}=۶$

$$\begin{cases}۲(V_A-۶)+(V_A+۲۴)+۲(V_A+V)=۰\\ ۲(V-V_A)+V=۴۸\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}۶V_A-۲V=-۱۲\\ -۲V_A+۳V=۴۸\end{cases}\Rightarrow V=۲۲^V$$

در گره A KCL + در گره B KCL + در گره C KCL $kcl:\frac{V_A}{۱}-۶+\frac{V_B}{۴}+\frac{V_C-V_d}{۱}-۱/۵V_۱=۰$

در گره D KCL $kcl:\frac{V_d-V_c}{۱}+\frac{V_d}{۱}+۶=۰$

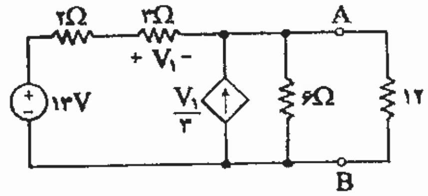


$$\begin{cases}V_۱=V_d-V_c\\ ۴i_۱=V_C-V_B\\ i_۱=-\frac{V_A}{۱}\Rightarrow i_۱=-V_A\\ V_A-V_B=۶\end{cases}$$

با ساده کردن معادلات بالا خواهیم داشت:

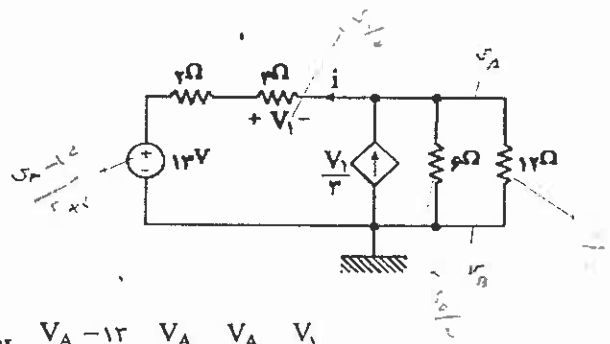
$$\begin{cases}۱۷۰V_K-۱۵V_۰=۳۲\\ ۲۶V_۰+۳۹V_K=۰\end{cases}\Rightarrow\begin{matrix}V_۰=-۰/۲۵\\ V_۰=-\frac{۳۹}{۲۶}V_K\end{matrix}$$

۶- شکل (۳-۳۶) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، با استفاده از روش تحلیل گره، ولتاژ دو سر مقاومت ۱۲Ω را بیابید.



شکل ۳-۳۶ مدار الکتریکی مربوط به سؤال

حل:



در گره A $KCL:\frac{V_A-۱۲}{۲+۳}+\frac{V_A}{۶}+\frac{V_A}{۱۲}-\frac{V_۱}{۳}=۰$

حال از رابطه $v-i$ روی مقاومت ۳^Ω می‌توان یک رابطه بین $V_A, V_۱$ ایجاد کرد.

$$-V_۱=۳^\Omega\times i=۳\times\frac{V_A-۱۲}{۵}$$

با مرتب کردن دو معادله خواهیم داشت:

$$\begin{cases}۲۷V_A-۲۰V_۱=۱۵۶\\ ۳V_A+۵V_۱=۳۹\end{cases}\Rightarrow V_A=۸^V$$

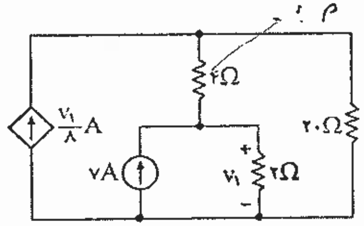
حال $v_۱$ و $i_۱$ را در معادلات KCL جایگذاری می‌کنیم تا پارامترهای ولتاژهای گره‌ها را محاسبه کنیم.

$$\begin{matrix}۴v_a+v_b-۴v_c-۴v_d-۶v_۱=۲۴\\ -۲v_c+۲v_d=-۱۲\\ v_۱=v_d-v_c\\ i_۱=\frac{v_c-v_b}{۴}\\ i_۱=-v_a\\ v_a-v_b=۶\end{matrix}\Rightarrow\begin{matrix}۴v_a+v_b+۱۰v_a-۱۰v_d=۲۴\\ -۲v_c+۲v_d=-۱۲\\ ۴v_a-v_b-v_c=۰\\ v_a-v_b=۶\end{matrix}$$

حال باید از دستگاه بالا مقدار ولتاژ v_a که همان V است را حساب کنیم پس از انجام حل دستگاه مقدار V بدست می‌آید.

$$v=v_a=-۲$$

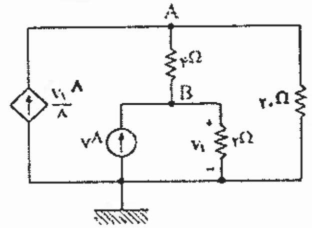
۹- با استفاده از روش تحلیل گره مش، توان تلف شده در مقاومت ۴Ω را در مدار الکتریکی شکل (۳-۳۹) تعیین کنید.



شکل ۳-۳۹ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

حل:

به دلیل وجود منابع جریان کنترل شده و مستقل تحلیل از روش گره راحت‌تر است.



در گره A $\quad KCL: \frac{V_A - V_B}{4} + \frac{V_A}{20} - \frac{V_1}{8} = 0$

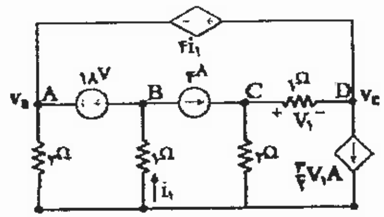
در گره B $\quad KCL: \frac{V_B - V_A}{4} + \frac{V_B}{2} - 7 = 0$

$$V_1 = V_B$$

$$\begin{cases} V_A = 20^V \\ V_B = 16^V \end{cases}$$

توان مقاومت 4^{Ω} $\quad P = \frac{V^2}{R} = \frac{(V_A - V_B)^2}{4} = \frac{(20-16)^2}{4} = 4^W$

۱۰- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۴۰) ولتاژ V_1 را از روش تحلیل گره بیابید.



شکل ۳-۴۰ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۰)

حل:

با نوشتن KCL در گره‌های A,B,C داریم:

$$KCL: \frac{v_A}{2} + \frac{v_B}{1} + 4 + \frac{v_d - v_c}{1} + \frac{3}{2}v_1 = 0$$

$$KCL: \frac{v_c}{2} - 4 + \frac{v_d - v_c}{1} = 0$$

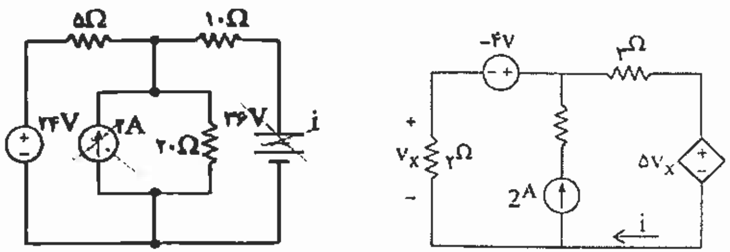
$$\begin{cases} v_b - v_a = 18 \\ v_d - v_a = 4i_1 \\ v_1 = v_c - v_d \\ i_1 = -v_b \end{cases}$$

با مرتب کردن معادلات بالا به دستگاه زیر می‌رسیم:

$$\begin{cases} v_a + 2v_b + 8 + v_d - v_c + 3v_1 = 0 \\ v_c + 2(v_c - v_d) = 8 \\ v_b - v_c = 18 \\ v_d - v_a = -4v_b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} v_a + 2v_b + 2v_c - 2v_d = -8 \\ 3v_c + 2v_d = 8 \\ v_b - v_c = 18 \\ v_d - v_a + 4v_b = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} v_c = -58^V \\ v_d = -91^V \end{cases} \Rightarrow v_1 = v_c - v_d = 33^V$$

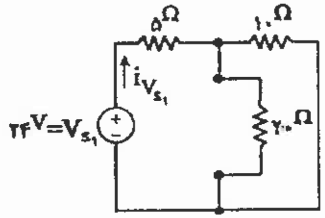
۱۱- در دو مدار ارائه شده در شکل (۳-۴۱) با استفاده از روش جمع آثار، جریان i را بیابید.



شکل ۳-۴۱ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۱)

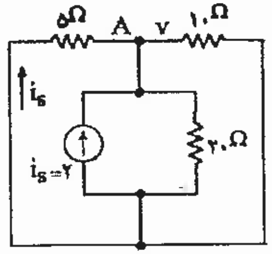
حل:

ابتدا منبع ولتاژ 36^V و منبع جریان 2^A را حذف می‌کنیم و اثر منبع ولتاژ 24^V را روی I حساب می‌کنیم.

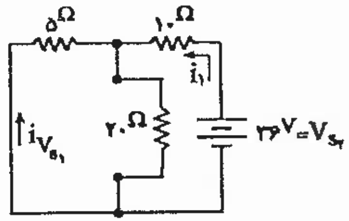


$i_{V_{s۱}} = \frac{۲۴}{۵+۲۰\|۱۰} = \frac{۷۲}{۳۵}$ مقدار جریان i ناشی از $V_{s۱}$ به تنهایی

حال اثر منبع جریان ۲^A را به تنهایی روی I حساب می‌کنیم.



در گره A $\quad KCL\ \frac{V}{۵}+\frac{V}{۲۰}+\frac{V}{۱۰}=۲ \Rightarrow V=\frac{۴۰}{۷}^V$



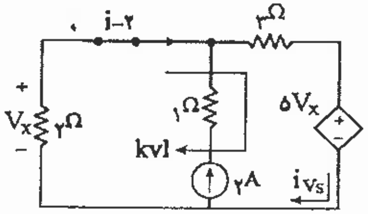
$i_{i_s} = -\frac{V}{۵} = -\frac{۸}{۷}^A$ مقدار جریان I ناشی از i_s به تنهایی

$$i_۱ = \frac{V_{S_۲}}{۱۰+۲۰\|۵} = \frac{۳۶}{۱۰+۴} = \frac{۱۸}{۷}^A$$

$i_{V_{s۲}} = -\frac{۲۰}{۲۰+۵}i_۱ = -\frac{۲۰}{۲۵}\times\frac{۱۸}{۷} = -\frac{۷۲}{۳۵}$ مقدار جریان i ناشی از V_s به تنهایی

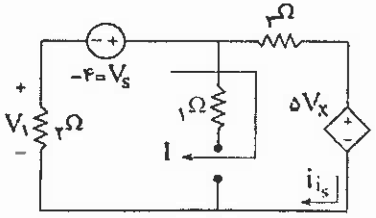
کل $\quad i = i_{V_{s۱}} + i_{i_s} + i_{V_{s۲}} = \frac{۷۲}{۳۵} - \frac{۸}{۷} - \frac{۷۲}{۳۵} = -\frac{۸}{۷}^A$

ابتدا اثر منبع ولتاژ به تنهایی را روی i محاسبه می‌کنیم. پس منبع جریان را مدار باز می‌کنیم. بنابراین شاخه وسط حذف می‌شود.



در حلقه (I)
$$\left.\begin{array}{l} KVL: +۲i_{V_s} +۴ + ۲i_{V_s} + ۵V_X = ۰ \\ V_X = -۲i_{V_s} \end{array}\right\} \Rightarrow i_{V_s} = +\frac{۴}{۵}$$

حال اثر منبع جریان به تنهایی را روی i حساب می‌کنیم. پس منبع ولتاژ -۴^V را اتصال کوتاه می‌کنیم.



$$\left\{\begin{array}{l} KVL: ۲(i_{i_s}-۲)۲i_{i_s}+۵V_X=۰ \\ V_X=-۲(i-۲)=-۲i+۴ \end{array}\right. \Rightarrow i_{i_s} = \frac{۱۶}{۵}^A$$

$$i = i_{i_s} + i_{v_s} = ۴$$

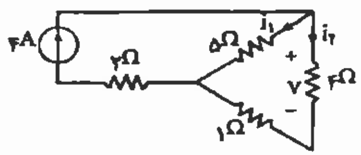
۱۲- با استفاده از روش جمع آثار، مقدار ولتاژ V را در مدار الکتریکی شکل (۳-۴۲) بیابید.

شکل ۳-۴۲ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۲)

حل:

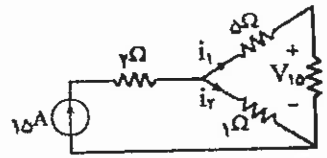
ابتدا مقدار V را ناشی از منبع جریان بدست ۴^V می‌آوریم:

پس دو منبع دیگر را مدار باز می‌کنیم.



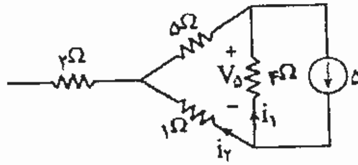
$i_۲ = \frac{۵}{۵+(۴+۱)}\left(۴^A\right) = ۲$ رابطه تقسیم جریان

$V_۴ = ۴\times۲ = ۸^V$ ولتاژ V ناشی از منبع ۴^V



رابطه تقسیم جریان $i_1 = \frac{1}{1+(5+4)}(10) = 1/5^A$

ولتاژ V ناشی از منبع 10^A $V_{10} = 4 \times 1/5 = 6^V$

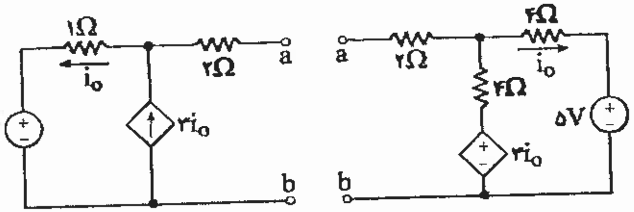


رابطه تقسیم جریان $i_1 = \frac{1+5}{(1+5)+4} \times 5 = 3^A$

$V_5 = -3 \times 4 = -12^V$

$$V = V_4 + V_{10} + V_5 = 8 + 6 - 12 = 2^V$$

۱۳- در شکل (۳-۴۳) دو مدار الکتریکی مشخص شده است. در این دو مدار، مدار هم ارز تونن را از دو سر a و b بیابید.

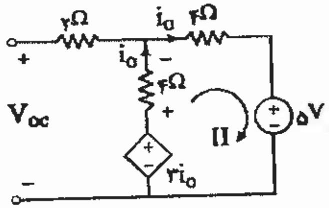


شکل ۳-۴۳ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۱۳)

حل:

حل شکل اول از سمت راست:

ابتدا V_{oc} را محاسبه می‌کنیم.

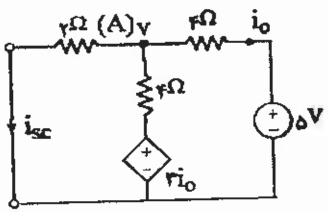


(I) در مش $KVL: V_{oc} = -4i_{oc} + 3i_{oc} = -i_o$

(II) در مش $KVL: 4i_o + 4i_o + 5 - 3i_o = 0 \Rightarrow i_o = -1$

$\Rightarrow V_{oc} = +1^V$

حال محاسبه i_{sc}: برای این کار دو سر a و b را اتصال کوتاه می‌کنیم و جریان گذرنده از آن را محاسبه می‌کنیم.



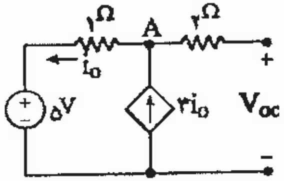
در گره A $KCL: \frac{V}{2} + \frac{V - 3i_o}{4} + \frac{V - 5}{4} = 0$

$i_o = \frac{V-5}{4}$ $\Rightarrow V = \frac{5}{12} \Rightarrow i_{sc} = \frac{V}{2} = \frac{5}{12 \times 2} = \frac{5}{26}^A$

$R_{th} = \frac{V_{oc}}{i_{SC}} = \frac{1}{5/26} = \frac{26}{5}^{\Omega}$

حل شکل دوم:

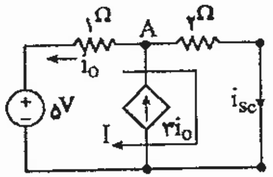
ابتدا محاسبه V_{oc}:



در گره A $KCL: i_o - 3i_o = 0 \Rightarrow$

$V_{oc} = 5^V$

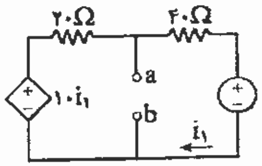
محاسبه i_{sc}:

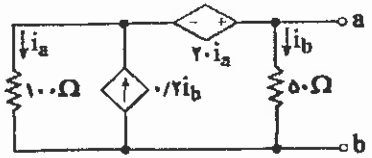


در گره A
$$\left.\begin{array}{l} KCL: +i_o - 3i_o + i_{sc} = 0 \Rightarrow i_{sc} = 2i_o \\ KVL: -5 - i_o + 2i_{sc} = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow i_{sc} = \frac{10}{3}^A$$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = \frac{5}{\frac{10}{3}} = \frac{3}{2}^{\Omega}$$

۱۴- در دو مدار ارائه شده در شکل (۳-۴۴) مدار هم ارز تونن را از دو سر a و b بیابید.



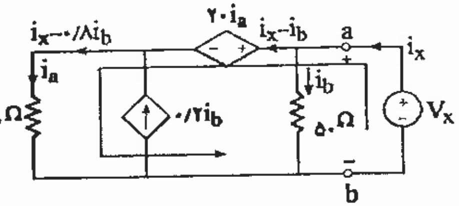


شکل ۳-۴۴ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۱٤)

حل:

مدار شکل سمت راست:

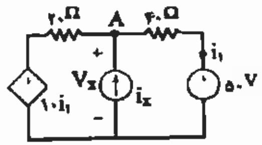
در این تمرین از روش کلی مدار تونن را محاسبه می‌کنیم یعنی ولتاژ V_x را به مدار اعمال می‌کنیم و مقدار جریان عبوری از آن را حساب می‌کنیم و یا می‌توان منبع جریان i_x را به مدار اعمال کرد و مقدار ولتاژ دو سر آن را حساب کرد. هر دو با توجه به نوع مدار و نوع تحلیل مورد استفاده در مدار قابل استفاده هستند.



$$\begin{cases} i_b = \frac{V_x}{50} & (1) \\ i_a = i_x - 0/8 i_b & (2) \\ KVL: -V_x + 20 i_a + 100 i_a = & (3) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} i_a = i_x - 0/8 \frac{V_x}{50} \\ V_x = 120 i \end{cases} \Rightarrow V_x = \frac{2000}{72} V_x$$

$$R_{th} = \frac{2000}{72} \quad , \quad V_{th} = 0$$

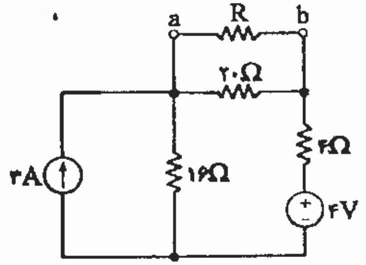


$$\begin{cases} KCL: \frac{V_x - 10 i_1}{20} + \frac{V_x - 50}{40} = i_x \\ i_1 = \frac{V_x - 50}{40} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2V_x - 20 i_1 = 50 + 40 i_x \\ V_x - 40 i_1 = 50 \end{cases}$$

$V_x = 16 i_x + 10$

$R_{th} = 16^{\Omega}$, $V_{th} = 10^{V}$

۱۵- در شکل (۳-۴۵) یک مدار الکتریکی نشان داده شده است. با استفاده از مدار هم ارز تونن از دو سر a و b، مقدار R را به گونه‌ای تعیین کنید که حداکثر توان در مقاومت R تلف گردد. مقدار حداکثر توان تلفاتی چقدر خواهد بود.



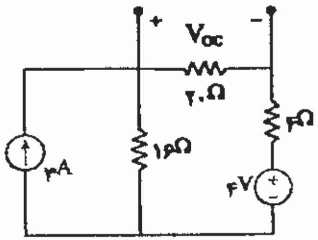
شکل ۳-۴۵ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۵)

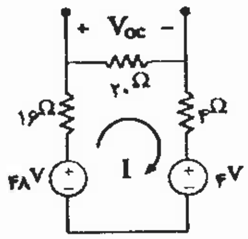
$R_{th} = \frac{V_{os}}{I_{sc}}$

حل:

ابتدا مدار معادل تونن را از دو سر R حساب می‌کنیم.

معادل تونن شاخه موازی مقاومت 16^{Ω} و منبع جریان 3^{A} را قرار می‌دهیم.



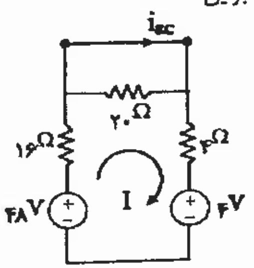


در مش (I) $KVL: -48 + 16i + 20i + 4i + 4^{V} = 0 \Rightarrow i = \frac{11}{10}^{A}$

$$V_{oc} = 20 \times \frac{11}{10} = \frac{220}{10} = 22^{V}$$

حال i_{sc} را حساب می کنیم.

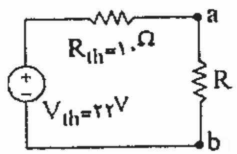
چون دو سر مقاومت 20^{Ω} اتصال کوتاه می‌شود هیچ جریانی از آن نخواهد گذشت بنابراین:



در مش (I) $KVL: -48 + 16 i_{sc} + 4 i_{sc} + 4 = 0 \Rightarrow i_{sc} = \frac{11}{10}^{A}$

$$R_{th} = \frac{V_{oc}}{i_{sc}} = \frac{22}{\frac{11}{5}} = 10^{\Omega}$$

حال مدار به شکل مقابل تبدیل می‌شود:

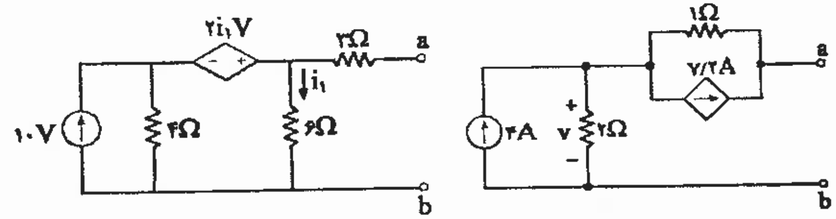


$$P_R = RI^2 = R\left(\frac{22}{10+R}\right)^2 = \frac{484R}{(10+R)^2}$$

$$\frac{dP_R}{dR} = \frac{484(10+R)^2 - 2(10+R)(484R)}{(10+R)^4} = 0 \Rightarrow R = 10$$

$$P_{R,max} = RI^2_{max} = 10\times\left(\frac{22}{10+10}\right)^2 = 12.1^W$$

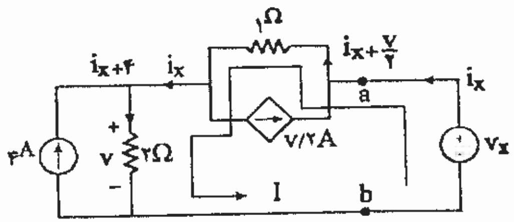
۱۶- در مدارهای الکتریکی شکل (۳-۴۶) مدار هم ارز نورتن را از دو سر a و b بیابید.



شکل ۳-٤٦ مدارهای الکتریکی مربوط به سؤال (۱٦)

حل:

شکل سمت راست:

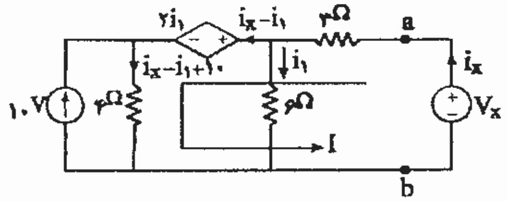


$$KVL: -V_X + \left(i_X + \frac{V}{2}\right)\times 1 + V = 0$$

$$V_X = 2(i_X + 4) = 2i_X + 8$$

$$\Rightarrow V_X = 4i_X + 12 \quad R_{th} = 4^V \quad i_{sc} = \frac{12}{4} = 3^A$$

شکل دوم:

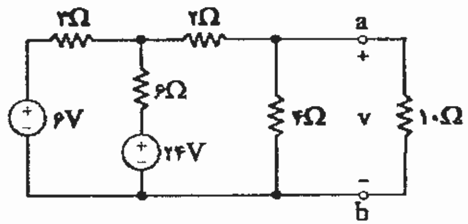


$$KVL: -V_X + 3i_X + 2i_1 + 4(i_X - i_1 + 10) = 0$$

$$KCL: -6i_1 + 2i_1 + 4(i_X - i_1 - 10) = 0$$

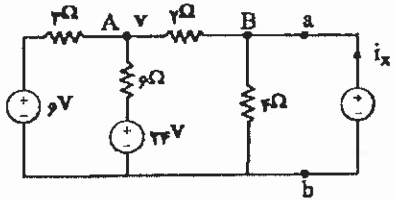
$$\Rightarrow \begin{cases} V_X + 7i_X - 2i_1 = -40 \\ i_X - 2i_1 = 10 \end{cases} \Rightarrow V_X = 6i_X + 50 \Rightarrow R_{th} = 6^\Omega \quad , \quad i_{sc} = \frac{50}{6} = \frac{25}{3}^A$$

۱۷- مدار هم ارز تونن از دو سر a و b را برای مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۳-۴۷) تعیین کنید. سپس ولتاژ v را بیابید.



شکل ۳-٤٧ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۷)

حل:



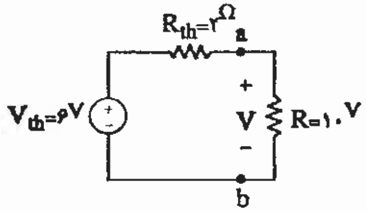
در گره A $\quad KCL: \frac{V-6}{3} + \frac{V-24}{6} + \frac{V-V_X}{2} = 0$

$$KCL: \frac{V_X - V}{2} + \frac{V_X}{4} = i_X$$

با حذف V از بین روابط بالا رابطه بین V_x , i_x ظاهر می‌شود.

$$V_X = 2i_X + 6 \Rightarrow R_{th} = 2 \quad , \quad V_{th} = 6^V$$

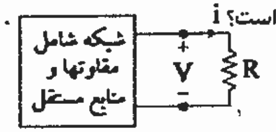
حال به جای مدار سمت چپ یا از دو سر a و b معادل تونن را قرار می‌دهیم.



$$V=\frac{۱۰}{۱۰+۲}\times ۶=\frac{۱۰}{۱۲}\times ۶=۵^{V}$$

«سؤالات چهارگزینه‌ای فصل سوم»

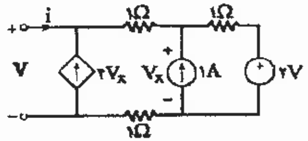
۱- در مدار شکل مقابل وقتی $R=\infty$ است، ولتاژ v برابر ۳ ولت و وقتی $R=۰$ است، جریـان عبـوری از آن برابر ۳ آمپر است بازای $R=۲$ اهم جریان عبوری از مقاومت کدام گزینه است؟



الف) ۱ ب) ۱/۵

ج) ۲ د) ۲/۵

۲- رابطه v-i شبکه یک قطبی زیر عبارت است از؟



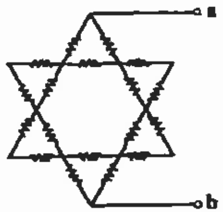
الف) $v=-3i-15$

ب) $v=2i+10$

ج) $v=3i+10$

د) $v=-2i+10$

۳- مقاومت معادل مدار شکل زیر را از دو سر ab کدام است؟ (تمام مقاومتهای شاخه‌ها ۳ اهمی هستند).



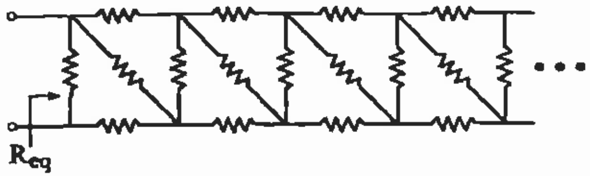
الف) ۱

ب) ۷

ج) ۵

د) ۳

۴- در مدار شکل زیر، مقاومتها از سمت راست تا بی‌نهایت امتداد دارند و تمام مقاومتها دو اهمی هستند مقاومت معادل R_{eq} برابر کدام گزینه است؟



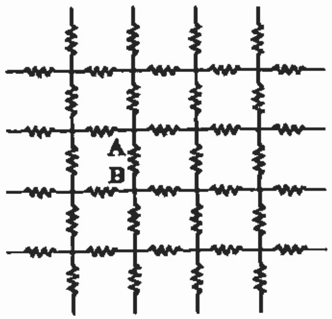
الف) $\sqrt{۵}-۱$

ب) $\sqrt{۲/۵}-۱$

ج) $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۴}$

د) $\frac{۱+\sqrt{۲/۵}}{۳}$

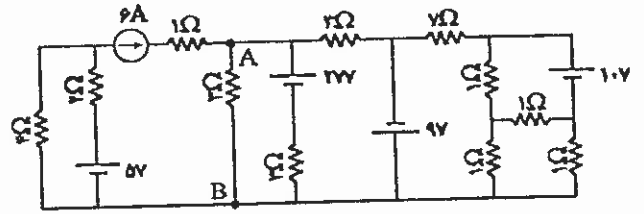
۵- در مدار شکل مقابل تمام مقاومتها یک اهم هستند و از هر طـرف به بی‌نهایت می رود. مقاومـت دیـده شـده در سـرهای A و B چیست؟

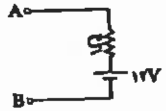


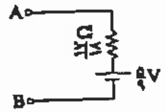
الف) ۱Ω ب) $\frac{۱}{۲}\Omega$

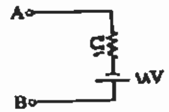
ج) $\frac{۱}{۴}\Omega$ د) $\frac{۱}{۸}\Omega$

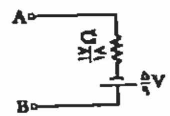
۶- مدار معادل تونن از دید دو سر AB در مدار شکل زیر کدام است؟



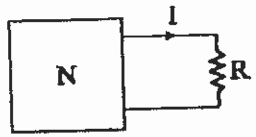
الف)


ب)


ج)


د)


۷- شبکه N در شکل مقابل شامل مقاومتها و منابع مستقل است. بازای $R = 2\Omega$ مقدار جریان I برابر یک آمپر و بازای $R = 1\Omega$ مقدار جریان I برابر $\frac{3}{2}A$ است. جریان I بازای اتصال کوتاه کردن دو سر R چقدر است؟



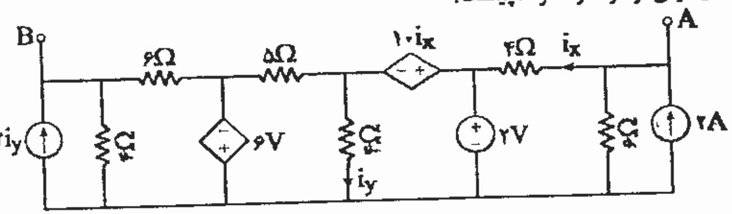
الف) $0A$

ب) $\frac{1}{2}A$

ج) $2A$

د) $3A$

۸- مدار معادل تونن از دو سر A و Bچیست؟



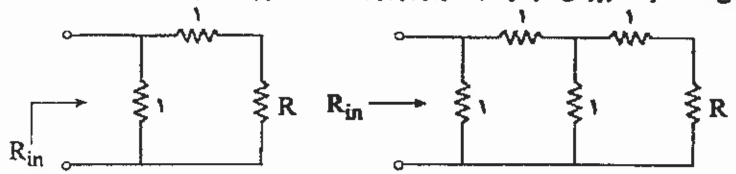
الف) $R_{th} = -1/5, V_{oc} = -6$

ب) $R_{th} = 1/5, V_{oC} = 6$

ج) $R_{th} = 9\ ,\ V_{oc} = 18$

د) $R_{th} = 12\ ,\ V_{oc} = 18$

۹- در صورتی که مقاومت ورودی هر دو شبکهٔ زیر برابر باشند، مقدار R کدام است؟



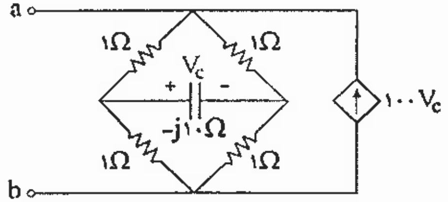
الف) $\frac{\sqrt{3}-1}{4}$

ب) $\frac{\sqrt{3}-1}{2}$

ج) $\frac{\sqrt{5}-1}{2}$

د) $\frac{\sqrt{5}-1}{4}$

۱۰- معادل تونن مدار شکل زیر از دو سر ab کدام است؟



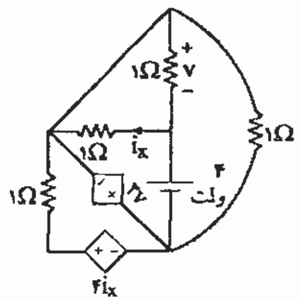
الف) $R_{th} = 99 - J$, $I_{sc} = 1$

ب) $R_{th} = 99 - J$, $I_{sc} = 0$

ج) $R_{th} = 1 - J10$, $I_{sc} = 0$

د) $R_{th} = 1$, $I_{sc} = 0$

۱۱- جریان در شکل مقابل چند آمپر است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۳)



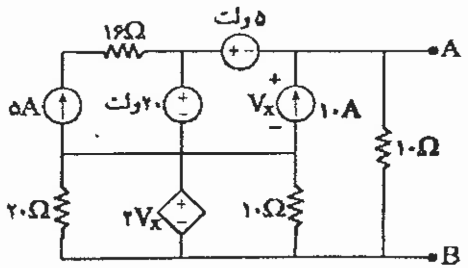
الف) ۱

ب) ۲

ج) ۳

د) ۲-

۱۲- مدار معادل تونن در سرهای A و B مدار شکل مقابل کدام است؟(مهندسی کامپیوتر ۸۳)



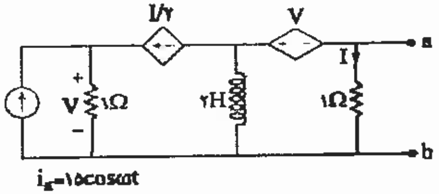
الف) $e_{oc} = 40\ ,\ R_{th} = 0$

ب) $e_{oc} = 40\ ,\ R_{th} = 10$

ج) $e_{oc} = 15\ ,\ R_{th} = 10$

د) $e_{oc} = 30\ ,\ R_{th} = 0$

۱۳- مدار معادل تونن در سرهای a , b مدار شکل مقابل در حالت دائمی در فرکانس منبع $\omega = \frac{1}{2}$ رادیان بر ثانیه چیست؟ V , I مقادیر فازورهای جریان و ولتاژ هستند. (مهندسی کامپیوتر ۸۲)



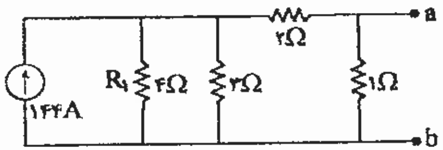
الف) $E_{oc} = 0 - 0j \ , \ Z_{th} = \frac{1}{2}(1+j)$

ب) $E_{oc} = 0j - 0 \ , \ Z_{th} = \frac{1}{2}(1+j)$

ج) $E_{oc} = 0 + 0j \ , \ Z_{th} = \frac{1}{2}(1-j)$

د) $E_{oc} = 0j - 0 \ , \ Z_{th} = \frac{1}{2}(1-j)$

۱۴- می خواهیم مقاومت $R_1 = 4$ اهمی در شکل مقابل را با یک منبع نابسته جانشین سازیم. مقدار این منبع در جهت نشان داده شده چند آمپر باشد تا ولتاژ مدار باز e_{oc} و جریان اتصال کوتاه i_{sc} در سرهای a , b تغییر نکند. (مهندسی کامپیوتر ۸۳)



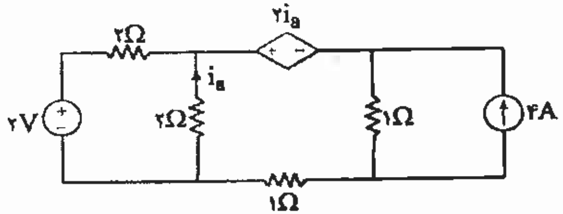
الف) ۱۸

ب) ۶۳

ج) ۱۲۶

د) چنین چیزی امکان‌پذیر نیست.

۱۵- در مدار زیر جریان i_a کدام است؟ (برحسب آمپر) (مهندسی کامپیوتر ۸۰)



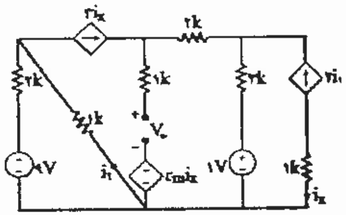
الف) $\frac{1}{2}$

ب) ۱

ج) ۲

د) $\frac{3}{2}$

۱۶- در مدار زیر با فرض $r_m = 2000 \frac{V}{A}$ ولتاژ V_o کدام است؟ (برحسب ولت) (مهندسی کامپیوتر ۸۰)



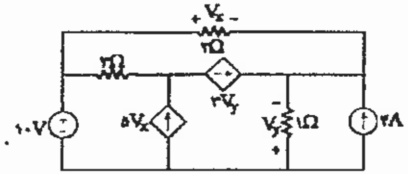
الف) ۱۷

ب) ۲۰

ج) ۲۲

د) ۲۴

۱۷- مقادیر V_x , V_y در مدار شکل مقابل کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ۷۹)



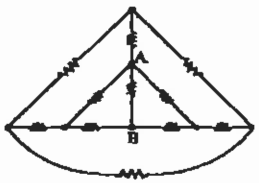
الف) $V_y = 2 \ , \ V_x = 8$

ب) $V_y = 2 \ , \ V_x = -8$

ج) $V_y = -2 \ , \ V_x = 8$

د) $V_y = -2 \ , \ V_x = -8$

۱۸- در مدار متقارن شکل مقابل تمام مقاومتها یک اهم هستند. مقاومت دیده شده بین نقاط A , B برابر چند اهم است؟ (مهندسی کامپیوتر ۷۷)



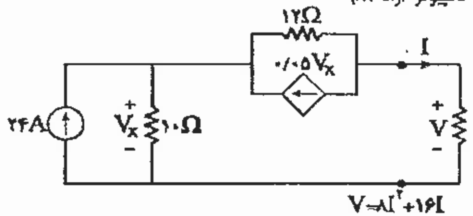
الف) $\frac{9}{19}$

ب) $\frac{10}{19}$

ج) $\frac{11}{19}$

د) $\frac{12}{19}$

۱۹- در مدار مقابل جریان I را بدست آورید؟ (مهندسی کامپیوتر آزاد ۸۲)



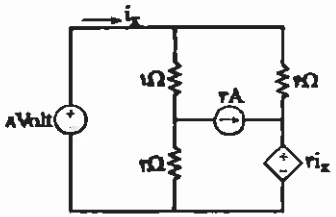
الف) ۶A-

ب) ۲A-

ج) ۲A

د) ۶A

۲۰- در مدار شکل زیر نزدیکترین مقدار i_x کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر آزاد ۸۰)



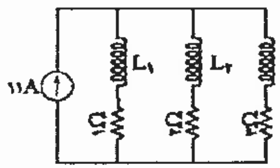
الف) ۴/۵

ب) ۳

ج) ۳/۵

ج) ۴

۲۱- در شکل زیر، مدار در حالت پایدار است، سلفهای L_1 ، L_2 ، L_3 دارای القای متقابل هستند و ماتریس اندوکتانس آنها بصورت زیر می‌باشد؟



$$L = \begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

انرژی ذخیره شده در میدان مغناطیسی مدار چند ژول است؟

الف) 69j

ب) 83j

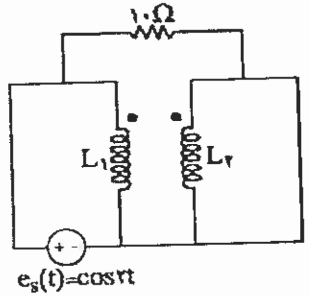
ج) 54j

د) 72j

۲۲- در مدار نشان داده شده در شکل، ماتریس ضرایب القای سلفها برابر:

$$L=\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

می‌باشد. توان مختلط تحویلی توسط منبع به شبکه، با فرض حالت دائمی سینوسی برابر است با:



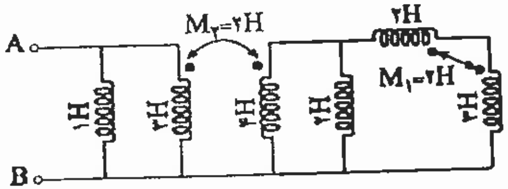
الف) $0/5-0/15j$

ب) $0/2+0/6j$

ج) $0/05+0/15j$

د) هیچکدام

۲۳- اندوکتانس دیده شده در سرهای B , A در مدار شکل زیر چیست؟



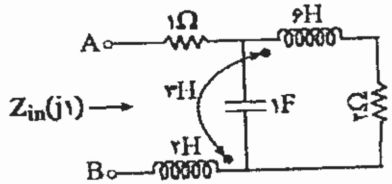
الف) $\frac{22}{5}$

ب) $\frac{15}{22}$

ج) $\frac{94}{21}$

د) $\frac{94}{115}$

۲۴- امپدانس ورودی مختلف $Z_{in}(j1)$ در مدار شکل زیر، کدام است؟



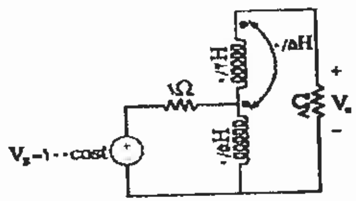
الف) $\frac{69-2j}{53}$

ب) $\frac{27+49j}{29}$

ج) $\frac{2-69j}{53}$

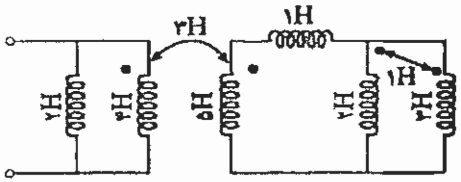
د) $\frac{49+27j}{29}$

۲۵- در مدار شکل زیر، اندازهٔ فازور ولتاژ V_o در دو سر مقاومت ۸ اهمی چند ولت است؟



الف) ۹۰ ولت
ب) ۸۰ ولت
ج) ۱۰۰ ولت
د) ۷۰ ولت

۲۶- اندوکتانس معادل برای مدار شکل زیر چیست؟



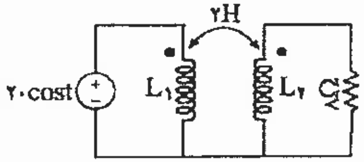
الف) $\frac{106}{93}$

ب) $\frac{111}{130}$

ج) $\frac{93}{106}$

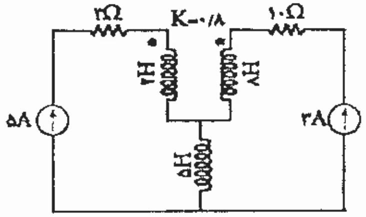
د) $\frac{130}{111}$

۲۷- در مدار شکل زیر، بازای چه مقدار L_2، توان تحویلی به مقاومت ۸ اهمی برابر با ۲ وات می‌شود؟ $(L_1=5H)$



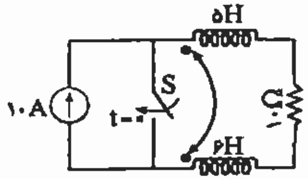
الف) ۸/۸۸ H
ب) ۱۴/۶۶ H
ج) ۳/۳ H
د) ۶/۶ H

۲۸- مجموع انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلفهای موجود در شکل زیر چقدر است؟



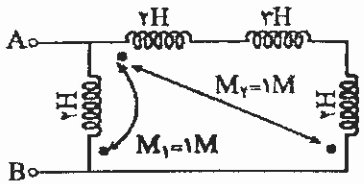
الف) ۲۶۹j
ب) ۲۷۰j
ج) ۲۷۱j
د) ۲۷۲j

۲۹- در مدار شکل زیر کلید S باز است و مدار به حالت دائمی رسیده است. در $t=0$ کلید S را می‌بندیم پس از چه مدت زمانی، نصف انرژی ذخیره شده در لحظهٔ $t=0$ در مقاومت ۱۰ اهمی تلف می‌شود؟



الف) ۰/۷۳۲ S
ب) ۰/۵۲۰ S
ج) ۰/۲۴۳ S
د) ۰/۶۱۹ S

۳۰- در مدار شکل زیر اندوکتانس دیده شده در سرهای B , A چیست؟



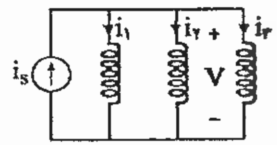
الف) ۲H

ب) $\frac{1}{2}$H

ج) ۱H

د) ۰

۳۱- در مدار شکل زیر ماتریس اندوکتانس سه سلف در ذیل داده شده است. در صورتی که $i_s = \sin t$ باشد، ولتاژ دائمی $V(t)$ را تعیین کنید؟

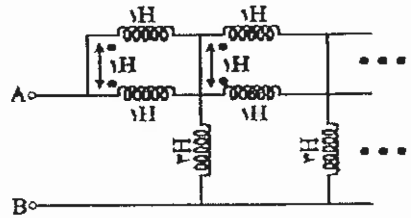


$$L = \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۰ \\ -۱ & ۱ & ۱ \\ ۰ & ۱ & ۱ \end{bmatrix}$$

الف) $\cos t$ ب) $\sin t$

ج) $\frac{۱}{۲}\cos t$ د) $\frac{۱}{۲}\sin t$

۳۲- سلف معادل دو سر AB چقدر است؟



الف)۱

ب)۳

ج)۲

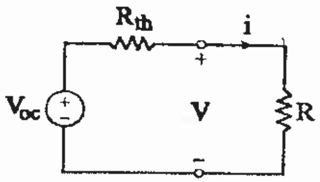
د)۴

«پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای فصل سوم»

۱- گزینه « الف » صحیح است.

وقتی $R = \infty$ است، ولتاژ v، ولتاژ تونن شبکه است پس: $V_{oc} = ۲V$ وقتی $R = ۰$ است، جریان i، جریان نورتن شبکه است، پس: $I_{sc} = ۲A$

$$V_{oc} = R_{th}\ I_{sc} \Rightarrow R_{th} = ۱\Omega$$



پس مدار معادل تونن شبکه به همراه مقاومت R چنین است:

$$i = \frac{V_{oc}}{R_{th} + R} = \frac{۳}{۱+۲} = ۱A$$

۲- گزینه « الف » صحیح است.

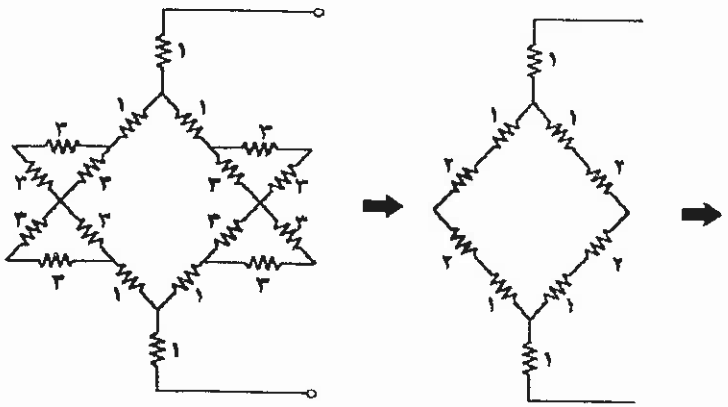
با نوشتن KVL برای حلقه مستقل مدار به ازای ولتاژ v , V_x داریم:

$$\begin{cases} v = (i + ۲v_x) + (i + ۲v_x + ۱) + ۲ + (i + ۲v_x) \\ v_x = (i + ۲v_x + ۱) + ۲ \end{cases}$$

$$\begin{cases} v = ۳i + ۶v_x + ۳ \Rightarrow v = ۳i + ۶(-i-۳) + ۳ \\ v_x = -i - ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} v = ۳i + ۶(-i-۳) + ۳ \\ v = -۳i - ۱۵ \end{matrix}$$

۳- گزینه « ج » صحیح است.

برای سهولت در بدست آوردن مقاومت معادل بایستی معادل ستاره برای دو مثلث بالایی و پایینی مدار بنویسیم. ضمناً مقاومت معادل شاخه‌های جانبی را حساب می‌کنیم. در این صورت شکل مدار بصورت زیر ساده می‌شود:



$$R_{eq} = ۱ + ۱ + ۶ \| ۶$$
$$R_{eq} = ۵\Omega$$

۴- گزینه « الف » صحیح است.

با توجه به شکل مدار می‌توان نوشت:

$$R_{eq} = \left(\left(R_{eq} + 2\right) \| 2 + 2\right) \| 2$$

$$R_{eq} = \frac{4R_{eq} + 12}{R_{eq} + 4} \| 2$$

$$R_{eq} = \frac{2\left(4R_{eq} + 12\right)}{6R_{eq} + 20} \Rightarrow 6R_{eq}^2 + 20R_{eq} = 8R_{eq} + 24$$

$$R_{eq}^2 + 2R_{eq} - 4 = 0 \Rightarrow R_{eq} = -1 + \sqrt{5}$$

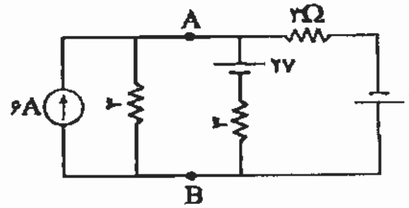
۵- گزینه « ب » صحیح است.

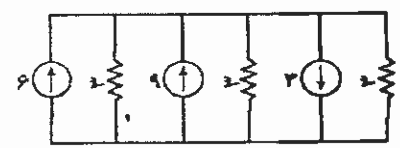
منبع جریان یک آمپری را بین A,B وصل کنیم. بقسمی که از B خارج و به A وارد شود، می‌توان این منبع جریان را به دو منبع جریان تبدیل کرد، یکی از B خارج شده و به یک نقطه‌ای در بینهایت (دوردست) وصل شود و دیگری از آن نقطه در بی‌نهایت به A وصل شود. با توجه به تقارن مدار چون منبع جریان ۱ آمپری از B خارج می‌شود، پس $\frac{1}{4}$ آن از شاخه AB می‌گذرد بطریق مشابقه چون منبع جریـان ۱ آمپـری بـه A وارد می‌شود، پس $\frac{1}{4}$ آن از شاخه AB می‌گذرد. بنابراین جریان گذرنده از شاخه AB برابـر $\frac{1}{2}$ آمپـر اسـت و در نتیجه $v_{AB} = \frac{1}{2}$ پس مقاومت دیده شـده $\frac{v_{AB}}{i} = 0/5$ اهم خواهد بود.

۶- گزینه « الف » صحیح است.

اگر به شکل مسئله دقت کنیم، ملاحظه خواهیم کرد که منبع جریان ۶ آمپری در قسـمت سـمت چـپ بطـور سری وصل شده است، پس تمامی قسمت چپ مدار را می‌توان با یک منبع جریان ۶ آمپری جـایگزین کـرد. همچنین دیده می‌شود که منبع ولتاژ ۹ ولتی را نادیده گرفت و نهایتاً مدار به صورت ذیل در می‌آیـد. در مـدار ساده شده تمام منابع ولتاژ را به منابع جریان تبدیل می‌کنیم.

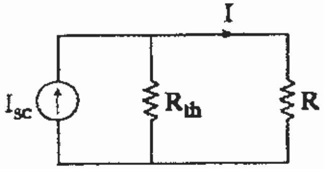
بدیهی است مدار معادل دیده شـده در دو سر A , B متشکل از مقاومت یک اهمی موازی با منبع جریان ۱۲ آمپری است لذا مدار معادل تونن گزینه ۱ صحیح است.





۷- گزینه « الف » صحیح است.

اگر مدار معادل نورتن شبکه را به همراه مقاومت R مطابق شکل زیر در نظر بگیریم، آنگاه خواهیم داشت:



$$R = 2 \Rightarrow I = \frac{R_{th}}{R_{th} + R} I_{sc} = \frac{R_{th}}{R_{th} + 2} I_{sc} = 1$$

$$R = 1 \Rightarrow I = \frac{R_{th}}{R_{th} + R} I_{sc} = \frac{R_{th}}{R_{th} + 1} I_{sc} = 1/5$$

با تقسیم روابط فوق به یکدیگر داریم:

$$\frac{R_{th} + 1}{R_{th} + 2} = \frac{1}{1/5} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3R_{th} + 3 = 2R_{th} + 4$$

$$R_{th} = 1\Omega \Rightarrow \frac{1}{1 + 2} I_{sc} = 1 \Rightarrow I_{sc} = 3A$$

جریان I اگر R اتصال کوتاه شود صفراست و جریان I_{sc} از اتصال کوتاه می‌گذرد.

۸- گزینه « ج » صحیح است.

با نوشـتن KVL در دو حلقه سـمت چپ و وسط شکل، i_x , i_y بدست می‌آیند:

$$6\left(2 - i_x\right) = 4i_x + 2 \Rightarrow 10 = 10 i_x \Rightarrow i_x = 1A$$

$$4i_y = -10 i_x + 2 \Rightarrow 4i_y = -8 \Rightarrow i_y = -2A$$

اگر جریان مقاومت 4Ω سـمت چپ را I فرض کنیم، داریم:

$$4(I) = 6\left(2i_y - I\right) - 6 \Rightarrow 10 I = -24 - 6 \Rightarrow I = -3A$$

$$V_{oc} = 4i_x + 10 i_x + \left(4i_y + 6\right) - 6\left(2i_y - I\right)$$

$$V_{oc} = 14 + 16 - 18 + 6 \Rightarrow V_{oc} = 18V$$

(ولتاژ معادل تونن)

برای محاسبهٔ R_{th} منابع مستقل را صفر می‌کنیم و یک منبع ولتاژ فرضی v با جریان i در دو سر AB در نظر می‌گیریم.

طبق شکل ساده شده زیر روابط ذیل را داریم:

$$i_x = 0/6i, 4i_y = -10 i_x = -6i \Rightarrow i_y = -1/5i$$

اگر جریان مقاومت 6Ω I فرض کنیم، داریم:

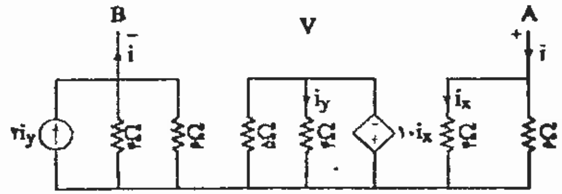
$$I = 0/4\left(2i_y - i\right) = 0/4\left(-3i - i\right) \Rightarrow I = -1/6i$$

از شکل اصلی V را محاسبه می‌کنیم:

$$v = 4i_x + 10 i_x - 10 i_x - 6I$$

$$v = 4i_x - 6I \Rightarrow v = 2/4i + 9/6i \Rightarrow v = 12i$$

$$R_{th} = 12\Omega$$



۹- گزینه « ج » صحیح است.

R_{in} را در هر دو شکل محاسبه می‌کنیم:

$$R_{in} = ۱\|(۱+R) = \frac{۱+R}{۲+R}$$

$$R_{in} = \{[۱\|(۱+R)]+۱\}\|۱ = \left(\frac{۱+R}{۲+R}+۱\right)\|۱ = \frac{۲R+۳}{R+۲}\|۱$$

$$R_{in} = \frac{۲R+۳}{۳R+۵}$$

بنابراین خواهیم داشت:

$$\frac{۱+R}{۲+R} = \frac{۲R+۳}{۳R+۵}$$

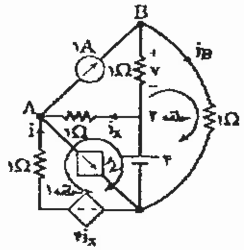
$$(۱+R)(۳R+۵) = (۲+R)(۲R+۳) \Rightarrow R^{۲}+R-۱=۰ \Rightarrow R=\frac{-۱+\sqrt{۵}}{۲}$$

۱۰- گزینه « د » صحیح است.

در مدار منبع مستقل وجود ندارد پس $I_{sc}=۰$ است. از طرفی مقاومتهای ۱Ω با هم تشکیل پل می‌دهند لذا از خازن جریانی نمی‌گذرد و $V_c=۰$ است پس $۱۰۰V_c=۰$ و خواهیم داشت:

$$R_{th} = ۲\|۲ = ۱\Omega$$

۱۱- گزینه « الف » صحیح است.



با نوشتن KCL در نقطه A داریم:

$i = ۲V + i_x + ۱$ (۱)

$KVL \Rightarrow i + i_x + ۴ - ۴i_x = ۰ \Rightarrow i - ۲i_x + ۴ = ۰$ در حلقه ۱ (۲)

$(۱),(۲) \Rightarrow ۲V + i_x + ۱ - ۲i_x + ۴ = ۰ \Rightarrow ۲V - ۲i_x + ۵ = ۰$ (۳)

$KVL \Rightarrow i_B - ۴ - V = ۰ \Rightarrow i_B = ۴ + V$ در حلقه ۲ (۴)

$KCL \Rightarrow ۱ = \frac{V}{۱} + i_B \Rightarrow ۱ = V + i_B$ در نقطه B (۵)

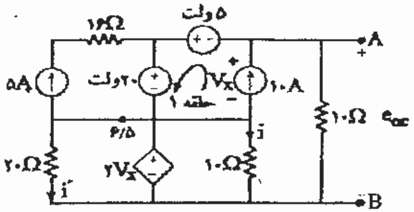
$(۴),(۵) \Rightarrow ۱ = V + ۴ + V \Rightarrow ۲V = -۳ \Rightarrow V = -۱/۵V$ (۶)

$(۳),(۶) \Rightarrow ۲(-۱/۵) - ۲i_x + ۵ = ۰ \Rightarrow -۳ - ۲i_x + ۵ = ۰ \Rightarrow ۲i_x = ۲$

$\Rightarrow i_x = ۱A$

۱۲- گزینه « الف » صحیح است.

راه حل اول:



برای بدست آوردن e_{oc} از روابط زیر استفاده می‌کنیم:

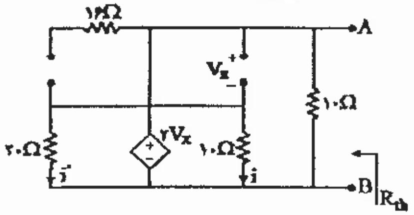
$KVL \Rightarrow -V_x - ۵ + ۲۰ = ۰ \Rightarrow V_x = ۱۵V$ در حلقه ۱

$$i = \frac{۲V_x}{۱۰} = \frac{۳۰}{۱۰} \Rightarrow i = ۳A$$

$$i' = \frac{۲V_x}{۲۰} = \frac{۳۰}{۲۰} \Rightarrow i' = ۱/۵A$$

$$e_{oc} = V_x + ۱۰\cdot i = ۱۵ + ۳۰ \Rightarrow e_{oc} = ۴۵V$$

برای بدست آوردن R_{th} تمامی منابع ولتاژ و جریان نابسته را مساوی صفر قرار می‌دهیم:



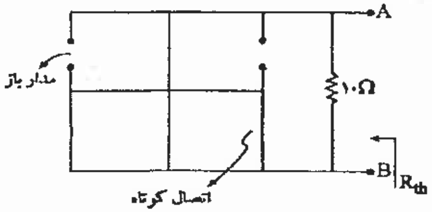
(۱)

$KVL \Rightarrow -V_x + ۰ + ۰ = ۰ \Rightarrow V_x = ۰V$

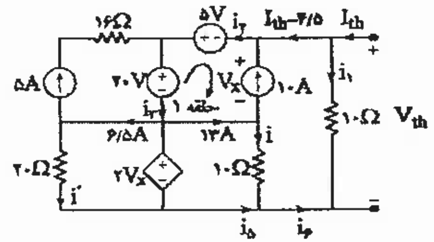
$$(۱) \Rightarrow ۲V_x = ۰ \Rightarrow i = \frac{۲V_x}{۱۰} \Rightarrow i = ۰A$$

$$(۱) \Rightarrow ۲V_x = ۰ \Rightarrow i' = \frac{۲V_x}{۲۰} \Rightarrow i' = ۰A$$

در نتیجه با توجه به نتایج بدست آمده فوق مدار فوق به صورت زیر می‌باشد:



راه حل دوم:



KVL در حلقه ۱ $\Rightarrow -V_x - 5 + 20 = 0 \Rightarrow V_x = 15V$

$i = \frac{2V_x}{10} \Rightarrow i = 3A$

$i = \frac{2V_x}{20} = i' = 1/5A$

$V_{th} = V_x + 10i = 15 + 30 \Rightarrow V_{th} = 45V$

$i_1 = \frac{V_{th}}{10} = \frac{45}{10} = 4/5A$

$i_2 = I_{th} + 0/5 \;\; ; \;\; i_3 = 5 + i_2 \Rightarrow i_3 = 5 + i_{th} + 0/5 \Rightarrow i_3 = 10/5 + I_{th}$

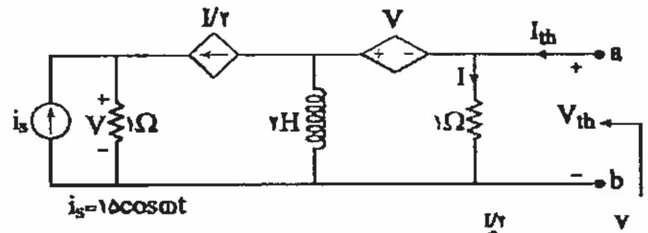
$i_4 = i_3 - 12 - 6/5 = 10/5 + I_{th} - 19/5 = -9 + I_{th}$

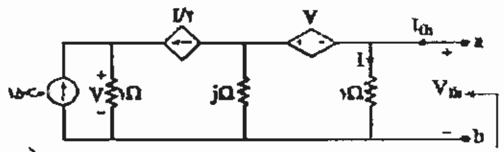
$i_5 = i_4 + i' = I_{th} - 9 + 1/5 = I_{th} - 7/5$

$i_6 = i + i_5 = 3 + I_{th} - 7/5 \Rightarrow i_6 = -4/5 + I_{th}$

$\Rightarrow V_{th} = 45 = R_{th} I_{th} + V_{oc} \Rightarrow R_{th} = 10\Omega$

۱۳- گزینه « ب » صحیح است.





$Z(L-2H) = jL\omega = j\Omega$

$V_{th} = I \quad (1)$

$V_{th} = -V + \left(I_{th} - I - \frac{I}{2}\right)j = -V + \left(I_{th} - \frac{3}{2}I\right)j \qquad (2)$

$V = \left(10 + \frac{I}{2}\right) \qquad (3)$

$(1),(2),(3) \Rightarrow V_{Th} = -\left(10 + \frac{V_{th}}{2}\right) + I_{th}j - \frac{3}{2}jV_{th} \Rightarrow \left(\frac{3}{2} + \frac{3}{2}j\right)V_{th} = -10 + jI_{th}$

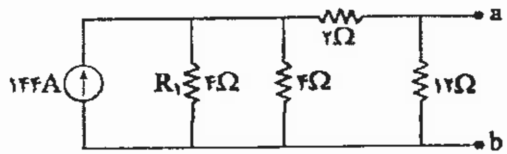
$\Rightarrow 3(1+j)V_{th} = -20 + 2jI_{th} \Rightarrow V_{th} = \frac{-10}{1+j} + \frac{2j}{3(1+j)}I_{th}$

$V_{th} = -5(1-j) + \frac{1}{2}j(1-j)I_{th} \Rightarrow V_{th} = -5 + 5j + \frac{1}{2}(1+j)I_{th}$

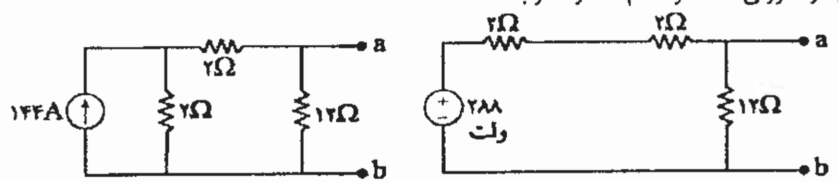
$\Rightarrow V_{th} = -5 + 5j + \frac{1}{2}(1+j)I_{th} = Z_{th}I_{th} + E_{oc}$

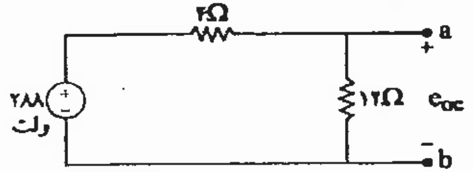
$\Rightarrow Z_{th} = \frac{1}{2}(1+j) \quad , \quad E_{oc} = 5j - 5$

۱۴- گزینه « د » صحیح است.

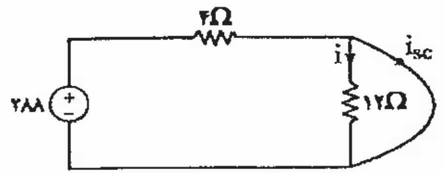


الف) در صورتی که مقاومت R_1 در مدار باشد.



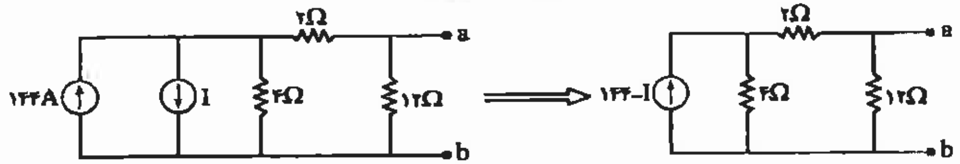


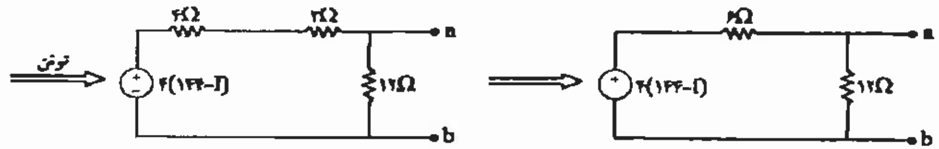
$\Rightarrow e_{oc} = \frac{12}{12+4}(288) = 216V$



$V(R = 12\Omega) = 0 \Rightarrow i = 0 \Rightarrow i_{sc} = \frac{288}{4} = 72A$

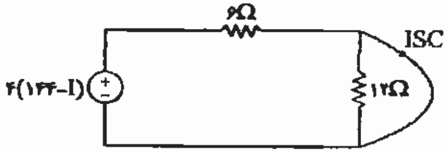
ب) در حالت بعدی به جای مقاومت R_1 منبع جریان قرار می‌دهیم.





$$E_{oc} = \frac{12}{18} \times 4(144 - I) = \frac{8}{3}(144 - I) = 216 \Rightarrow I = 63A$$

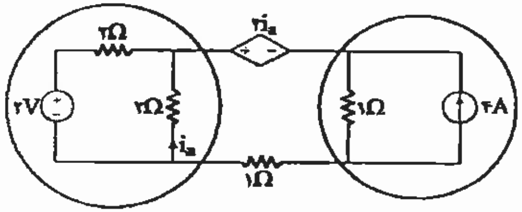
$$\Rightarrow I_{sc} = \frac{4}{6}(144 - I) = \frac{2}{3}(144 - I) = 72 \Rightarrow I = 36A$$



چون دو مقدار I برای منبع جریان نابسته برابر نمی‌باشد، در نتیجه چنین چیزی غیرممکن می‌باشد.

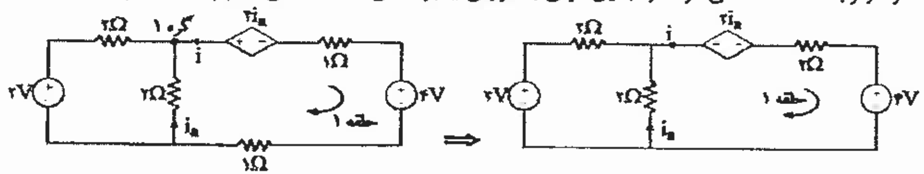
۱۵- گزینه «د» صحیح است.

شکل مقابل در نظر بگیرید:



معادل تونن قسمت مشخص شده در مدار مربوطه قرار می‌دهیم (قسمت الف)

نکته: در قسمتهایی از مدار که جریان یا ولتاژ یک عنصر آن برای یک منبع جریان وابسته یا برای یک منبع ولتاژ وابسته استفاده می‌شود، از تبدیل تونن به نورتن یا برعکس استفاده نمی‌کنیم (قسمت ب).



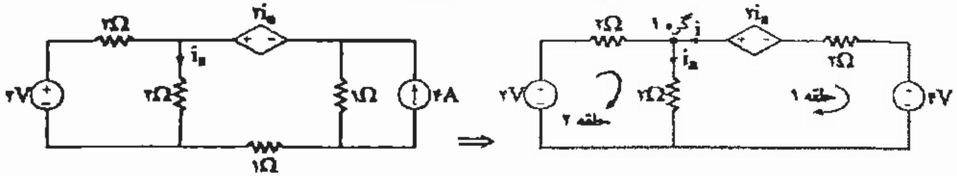
حلقه ۱ : $-4 + 2i - 2i_a - 2i_a = 0 \Rightarrow 2i = 4 + 4i_a \Rightarrow i = 2 + 2i_a \quad (1)$

گره ۱ : $i + i_a = \dfrac{-2i_a - 2}{2} \Rightarrow 2i + 4i_a = -2 \quad (2)$

$(1),(2) \Rightarrow 2(2 + 2i_a) + 4i_a = -2 \Rightarrow 8i_a + 4 = -2 \Rightarrow 8i_a = -6 \Rightarrow i_a = \dfrac{-3}{4}$

جواب در هیچکدام از گزینه‌ها نمی‌باشد.

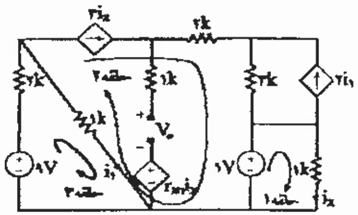
اگر جهت i_a در جهت عکس در نظر گرفته شود، جواب بصورت زیر می‌باشد.



حلقه ۱: $-4 + 2i - 2i_a + 2i_a = 0 \Rightarrow i = 2$

حلقه ۲: $2i - 2i_a + 2 - 2i_a = 0 \Rightarrow 4i_a = 6 \Rightarrow i_a = \dfrac{3}{2}$

۱۶- گزینه «ب» صحیح است.



بدلیل اینکه ولتاژ یک ولت، دو سر مقاومت $1k\Omega$ قرار می‌گیرد:

حلقه ۱ : $i_x = 1mA$

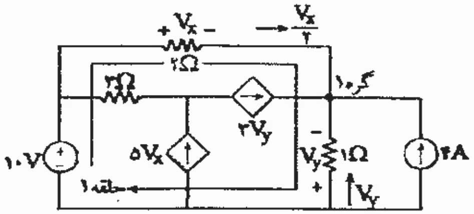
در حلقه ۲ داریم $kvl: 2i_x + 2i_x + 2(2i_x + 2i_1) + 1 - i_1 = 0 \Rightarrow 14i_x + 5i_1 + 1 = 0$

در حلقه ۳ داریم $kvl: 2(i_1 + 2i_x) + i_1 = 9 \Rightarrow 3i_1 + 6i_x = 9 \Rightarrow i_1 + 2i_x = 3$

$\Rightarrow i_1 = 3 - 2i_x \Rightarrow i_1 = 1mA$

$-v_o + 2(3i_x) + 3(2i_x + 2i_1) + 1 - 2i_x = 0 \Rightarrow -v_o + 6 + 15 + 1 - 2 = 0 \Rightarrow v_o = 20$ ولت

۱۷- گزینه «ج» صحیح است.



اگر معادله KCL در گره ۱ بنویسیم:

$$\frac{v_x}{2} + 2v_y + v_y + 4 = 0 \Rightarrow 4v_y + \frac{v_x}{2} = -4 \quad (1)$$

معادله KVL در حلقه ۱ می‌نویسیم:

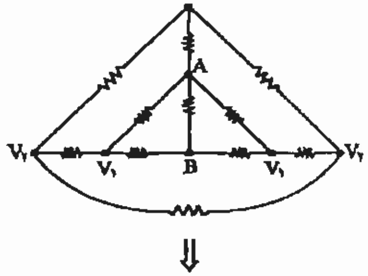
$$-10+v_x-v_y=0 \Rightarrow v_x-v_y=10 \qquad (2)$$

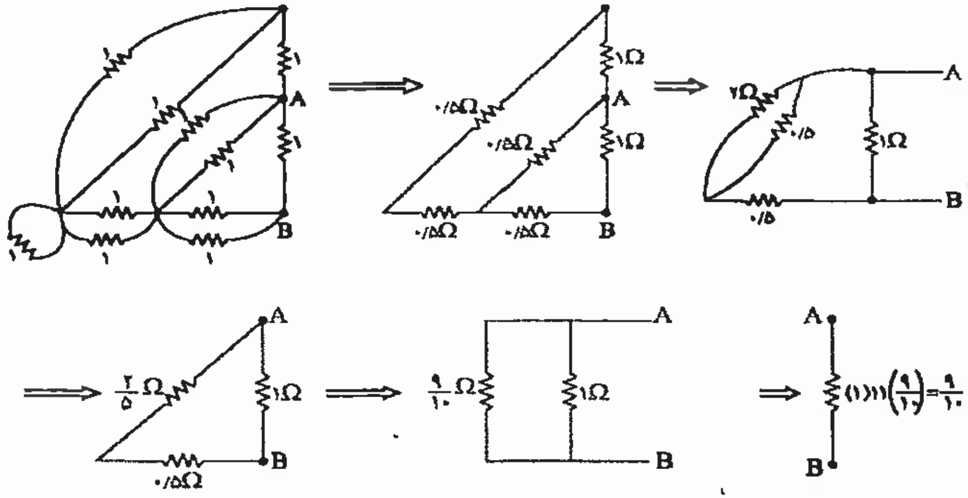
$$(1),(2) \Rightarrow \begin{cases} v_x=8 \\ v_y=-2 \end{cases}$$

۱۸- گزینه « الف » صحیح است.

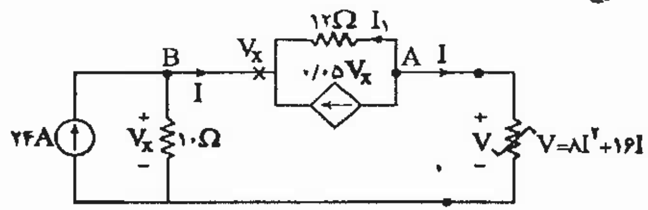
شبکه مقاومتی زیر، یک شبکه مقاومتی متقارن می‌باشد چون تمام مقاومتها برابر و متناظر با یکدیگر می‌باشند در نتیجه نقاط متناظر در مدار مربوطه، هم پتانسیل بوده، در نتیجه ولتاژ نقاط مربوطه برابر می‌باشد.

در یک مدار الکتریکی تمامی نقاط هم پتانسیل بوسیله یک سیم می‌توان اتصال کوتاه نمود (دو نقطه هم پتانسیل مستقیماً به هم وصل می‌شوند):





۱۹- گزینه « ج » صحیح است.



$$I_1=\frac{V-V_x}{12}$$

با نوشتن kcl در گره A $\Rightarrow I=-I_1-0/05V_x=\frac{V_x-V}{12}-0/05V_x \Rightarrow 12I=V_x-V-0/6V_x$

$$\Rightarrow 12I=0/4V_x-V \qquad (1)$$

با نوشتن kcl در گره B $\Rightarrow 24=\frac{V_x}{10}+I \Rightarrow 240=V_x+10I \Rightarrow V_x=240-10I \qquad (2)$

$$(1),(2) \Rightarrow 12I=0/4(240-10I)-V \Rightarrow 16I+V=96 \qquad (3)$$

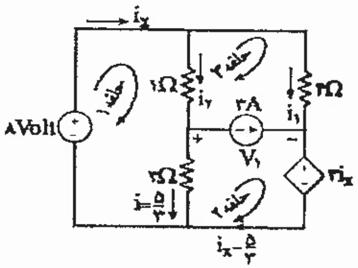
با ترکیب رابطه ۳ و معادله مشخصه مقاومت غیرخطی جریان I بدست می‌آید:

$$\begin{cases} V=8I^2+16I \\ V=96-16I \end{cases} \Rightarrow 8I^2+32I-96=0 \quad \Rightarrow \quad I^2+4I-12=0$$

$$I=\begin{cases} -6A \\ 2A \end{cases}$$

چون مقاومت غیرخطی یک بار مصرفی فرض شده است در نتیجه دارای خاصیت پسیو بوده و توان مصرف نموده در نتیجه $p=vi>0 \Leftarrow I=2A$ قابل قبول می‌باشد.

۲۰- گزینه « د » صحیح است.



$$i_1=\frac{8-2i_x}{4}$$

در حلقه ۱ $kvl: 8=i_2(i_2-2) \Rightarrow i_2=\frac{14}{3}A$

در حلقه۲ $kvl: V_1+2i_x=\frac{10}{3} \Rightarrow V_1=\frac{10}{3}-2i_x$

در گره A $kcl \Rightarrow 2+\frac{8-2i_x}{4}=i_x-\frac{5}{3} \Rightarrow i_x=2/8A$

۲۱- گزینه « د » صحیح است.

چون مدار در حالت پایدار است، سلفها اتصال کوتاه بوده و جریان هر سلف بصورت زیر محاسبه می‌شود:

$$i_{L_1}=\frac{3\|2}{3\|2+1}\times 11=6A \qquad i_{L_2}=\frac{1\|2}{1\|2+3}\times 11=2A$$

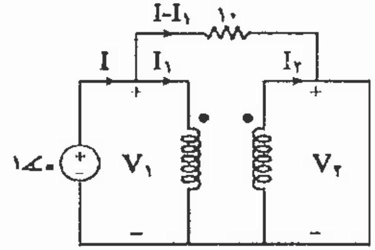
$$i_{L_3}=\frac{1\|3}{1\|3+2}\times 11=3A$$

$$W=\frac{1}{2}I'LI=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}6 & 2 & 3\end{bmatrix}\begin{bmatrix}3 & -1 & 1\\ -1 & 0 & -1\\ 1 & -1 & 2\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\2\\3\end{bmatrix}$$

$$W=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}19 & 1 & 10\end{bmatrix}\begin{bmatrix}6\\2\\3\end{bmatrix}=73j$$

۲۲- گزینه « ج » صحیح است.

جهت محاسبهٔ توان مختلط، ابتدا باید جریان I ورودی را بدست آوریم. با توجه به شکل زیر می‌توان نوشت:
در فرکانس $\omega = 2$ داریم:



$$V_1 = 4jI_1 - 2jI_2 = 1$$

$$V_2 = -2jI_1 + 6jI_2 = 0 \Rightarrow I_1 = 3I_2 \Rightarrow 1 = 4jI_1 - 2j\frac{I_1}{3}$$

$$I_1 = \frac{3}{10j} \quad V_1 = 1 = 10\left[I - I_1\right] \Rightarrow I = \frac{1}{10} + I_1 = \frac{1}{10} + \frac{3}{10j}$$

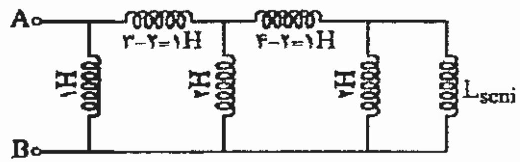
$$I = \frac{1}{10} - \frac{3}{10}j \qquad S = \frac{1}{2}V\bar{I} \Rightarrow S = \frac{1}{2}1 < 0\left[0.1 + 0.3j\right]$$

$$s = \frac{1}{20}\left(1 + 3j\right)$$

۲۳- گزینه « ب » صحیح است.

ابتدا مدار معادل سلفهای $2H, 2H$ در سمت راست را طبق شکل زیر جایگزین می‌کنیم:

$$L_{seri} = 2 + 3 - 2 \times 2 = 1H$$



همچنین برای سلفهای $4H, 2H$ با القای متقابل $M = 2$ از مدار معادل T آن استفاده می‌کنیم.

$$L_{AB} = \left(\left(\left(\left(2 \| L_{seri}\right) + 2\right) \| 2\right) + 1\right) \| 1 = \left(\left(\left(\frac{2}{3} + 2\right) \| 2\right) + 1\right) \| 1$$

$$L_{AB} = \left(\frac{8}{7} + 1\right) \| 1 \Rightarrow L_{AB} = \frac{15}{22}H$$

۲۴- گزینه « الف » صحیح است.

اگر جریان خارج شده از گره A را I و جریان سلف $6H$ را I_1 فرض کنیم، خواهیم داشت:
(V همان ولتاژ AB است)

$$V = I(1) + \frac{1}{j}\left(I - I_1\right) + 2jI + 3jI_1$$

$$6jI_1 + 3jI + 2I_1 = \frac{1}{j}\left[I - I_1\right] \Rightarrow I_1 = \frac{-4j}{7j+2}I$$

$$V = \left(j+1\right)I + 2jI_1 = \frac{\left(j+1\right)\left(7j+2\right)+8}{7j2}I$$

$$Z_{in} = \frac{9j+3}{7j+2} \Rightarrow Z_{in} = \frac{69-3j}{53}$$

۲۵- گزینه « ب » صحیح است.

فرض کنید جریان I، جریان منبع V_s باشد که از سر مثبت خارج شده و بین دو سلف $0/2\ H$ و $0/5\ H$ بترتیب بصورت I_1, I_2 تقسیم می‌شود. با توجه به اینکه $V_o = 8I_1$ است، کافی است I_1 را تعیین کنیم.
روابط KVL در دو حلقه موجود بشرح ذیل است:

$$\begin{cases} V_s = I + 0.5jI_2 - 0.5jI_1 = I_1 + I_2 + 0.5jI_1 & (1) \\ 0.5jI_2 - 0.5jI_1 = 0.5jI_2 + 0.2jI_1 + 8I_1 & (2) \end{cases}$$

از (۲) داریم:

$$jI_2 = \left(0.7j + 8\right)I_1 \Rightarrow I_2 = \left(0.7 - 8j\right)I_1$$

رابطهٔ اخیر را در رابطهٔ (۱) می‌گذاریم.

$$V_s = \left(1 - 0.5\right)I_1 + \left(1 + 0.5j\right)I_2 = \left(1 - 0.5j\right)I_1 + \left(1 + 0.5j\right)\left(0.7 - 8j\right)I_1$$

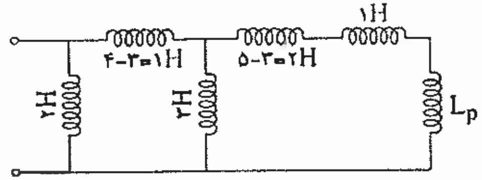
$$V_s = \left(1 - 0.5j + 0.7 + 4 + 0.35j - 8j\right)I_1$$

$$V_s = \left(5.7 - 8.15j\right)I_1 \Rightarrow I_1 = \frac{V_s}{5.7 - 8.15j}$$

$$\left|I_1\right| = \frac{100}{\sqrt{5.7^2 + 8.15^2}} = 10.05 \Rightarrow \left|V_o\right| = 8\left|I_1\right| = 80.44$$ ولت

۲۶- گزینه « د » صحیح است.

ابتدا سلف معادل دو سلف موازی ۲H، ۳H را بدست می‌آوریم.



$$L=\begin{bmatrix}2 & 1\\ 1 & 3\end{bmatrix}\Rightarrow \Gamma=L^{-1}=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}3 & -1\\ -1 & 2\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{eq}=\frac{1}{5}(3+2-2\times 1)=\frac{3}{5}\Rightarrow L_p=\frac{5}{3}H$$

برای دو سلف ۵H، ۴H با القای متقابل از مدار معادل T آن استفاده می‌کنیم، در این صورت مدار بصورت فوق مدل می‌شود:

$$L_{eq}=\left(\left(\left(\left(L_p+1+2\right)\|3\right)+1\right)\|2=\left(\frac{42}{22}+1\right)\|2\Rightarrow L_{eq}=\frac{130}{111}$$

۲۷- گزینه « ب » صحیح است.

اگر جریان L_1 و L_2 را I_1 و I_2 بنامیم خواهیم داشت:

$$P=R\left|I_2\right|^2\Rightarrow 2=8\left|I_2\right|^2\Rightarrow\left|I_2\right|=0/5$$

$$\begin{cases}20\angle 0=5jI_1+2jI_2\\ 8I_2+jL_2I_2+2jI_1=0\ \Rightarrow\ I_1=-\dfrac{8+jL_2}{2j}I_2\end{cases}$$

$$20\angle 0=\frac{5}{2}\left(-8-jL_2\right)+2jI_2=\left(-20-2/5jL_2+2j\right)I_2$$

$$I_2=\frac{20}{-20+\left(2-2/5L_2\right)j}\Rightarrow\left|I_2\right|=\frac{20}{\sqrt{20^2+\left(2-2/5L_2\right)^2}}$$

$$0/5=\frac{-20}{\sqrt{20^2+\left(2-2/5L_2\right)^2}}\Rightarrow 40^2-20^2=\left(2-2/5L_2\right)^2$$

$$200=\left(2-2/5L_2\right)^2\Rightarrow 2-2/5L_2=\pm 20\sqrt{3}$$

$$L_2=\frac{2+20\sqrt{3}}{2/5}\Rightarrow L_2=14/66H$$

۲۸- گزینه « الف» صحیح است.

داریم:

$$M=k\sqrt{L_1L_2}=3/2H$$

در حالت پایدار سلفها اتصال کوتاه هستند ولی در هر صورت جریان سلف ۲H، ۵A، سلف ۸H، ۳A و سلف ۵H، ۸A است و ماتریس اندوکتانس بشرح ذیل است.

$$i_1=5A\ ,\qquad i_2=3A\ ,i_3=8A$$

$$L=\begin{bmatrix}2 & 3/2 & 0\\ 3/2 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}$$

$$W=\frac{1}{2}I'LI\Rightarrow W=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}5 & 3 & 8\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2 & 3/2 & 0\\ 3/2 & 8 & 0\\ 0 & 0 & 5\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 8\end{bmatrix}$$

$$W=\frac{1}{2}\begin{bmatrix}19/6 & 40 & 40\end{bmatrix}\begin{bmatrix}5\\ 3\\ 8\end{bmatrix}\Rightarrow W=269j$$

۲۹- گزینه « ج » صحیح است.

ابتدا انرژی ذخیره شده در سلفها را بدست می‌آوریم. سلف معادل دو سلف چنین است:

$$L_{eq}=5+6-2\times 2\times 2=7H$$

$$W=\frac{1}{2}L_{eq}i^2\Rightarrow W=350j$$

$$i(t)=10e^{-\frac{t}{\tau}}\ t\geq 0\quad \tau=\frac{L_{eq}}{R}=0/7\sec$$

$$W_R=\int_0^{t_1}10i^2dt=350\left(1-e^{-\frac{2t_1}{\tau}}\right)=\frac{350}{2}\Rightarrow t_1=\frac{\tau}{2}\ln 2$$

$$t_1=243m\sec$$

۳۰- گزینه « ج » صحیح است.

اگر جریان سلف ۲H موازی AB را I_1 و جریان خارج شده از گره A را I و ولتاژ AB را V فرض کنیم خواهیم داشت: (از رابطه ϕ استفاده می‌کنیم)

$$2I_1-M_1\left(I-I_1\right)=2\left(I-I_1\right)-M_1I_1+3\left(I-I_1\right)+2\left(I-I_1\right)-2M_2\left(I-I_1\right)$$

$$\left(2+1\right)I_1-I=\left(2+3+2-2\right)I+\left(-2-1-3-2+2\right)I_1$$

$$3I_1 - I = 5I - 6I_1 \Rightarrow 9I_1 = 6I \Rightarrow I_1 = \frac{2}{3}I$$

$$\phi = 3I_1 - M(I - I_1) = 3I_1 - I = 2I - I \Rightarrow \phi = I \Rightarrow L_{eq} = 1H$$

۳۱-گزینه « الف » صحیح است.

داریم:

$$V = V_1 = V_2 = V_3 \quad , \quad \omega = 1$$

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = j\omega L \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} L^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \end{bmatrix} = \frac{1}{j\omega} \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V \\ V \\ V \end{bmatrix} \Rightarrow I_1 = 0 \quad I_2 = jV \quad I_3 = -2jV$$

$$I_s = I_1 + I_2 + I_3 \Rightarrow 1\angle 0 = 0 + jV - 2jV \Rightarrow V = j = 1 < 90^\circ$$

$$v(t) = \sin(t + 90^\circ) \Rightarrow v(t) = \cos t$$

۳۲- گزینه « ب » صحیح است.

ابتدا سلف معادل دو سلف موازی ۱ H با القا متقابل را بدست می‌آوریم:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma = \frac{-1}{3}\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{eq} = \frac{-1}{3}(1 + 1 - 2 \times 2) \Rightarrow \Gamma_{eq} = \frac{+2}{3} \Rightarrow L_{eq} = \frac{3}{2}H$$

بنابراین می‌توان نوشت:

$$L_{AB} = L_{eq} + (L_{AB} \| 3) = 1/5 + \frac{3L_{AB}}{3 + L_{AB}}$$

$$(L_{AB} - 1/5)(3 + L_{AB}) = 3L_{AB} \Rightarrow L_{AB}^2 - 1/5 L_{AB} - 4/5 = 0$$

$$L_{AB} = \frac{1/5 \pm 4/5}{2} \Rightarrow L_{AB} = 3H$$

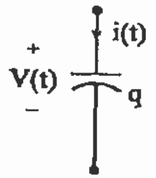
فصل چهارم

خازنها و سلفها

۴-۱ خازن

خازنی را که مشخصهٔ آن در هر لحظه از زمان خط مستقیمی باشد که از مبدا صفحه vq می‌گذرد خازن خطی گویند، اگر در لحظه‌ای از زمان مشخصه آن خط مستقیمی که از مبدأ صفحه vq می‌گذرد، نباشد آنرا غیرخطی گویند. خازنی را که مشخصه آن با زمان تغییر نکند خازن تغییر ناپذیر با زمان، و اگر مشخصه آن با زمان تغییر کند خازن تغییر پذیر با زمان گویند.

نکته: برای یک خازن با مشخصه زیر رابطه زیر برقرار می‌باشد:



$$i(t) = \frac{dq}{dt} \qquad (۴-۱)$$

شکل ۴-۱ نمایش یک خازن

نکته: برای یک خازن خطی تغییر ناپذیر با زمان روابط زیر برقرار می‌باشد:

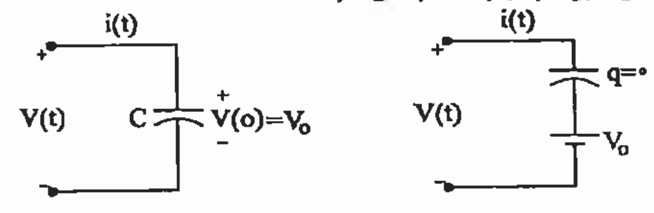
$q(t) = Cv(t)$, C (ظرفیت خازن) مقدار ثابتی می‌باشد (۴-۲)

$$i(t) = \frac{dq}{dt} = C\frac{dv(t)}{dt} = \frac{1}{S}\frac{dv}{dt} \ , \ S = \text{Elastance} = \frac{1}{C} \qquad (۴-۳)$$

$v(t) = \frac{1}{C}\int_0^t i(t')dt' + v(0)$, $v(0)$ ولتاژ اولیه خازن می‌باشد (۴-۴)

نکته: خازن یک عنصر با حافظه می‌باشد بدلیل اینکه، مقدار ولتاژ دو سر آن در لحظه t، به مقدار اولیه ولتاژ دو سر آن و همه مقادیر جریان از لحظه صفر تا لحظه t بستگی دارد.

نکته: هر خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه $v(0)$ می‌توان بصورت اتصال سری یک منبع ولتاژ dc برابر با $v(0)$ و همان خازن با ولتاژ اولیه صفر مدل نمود.

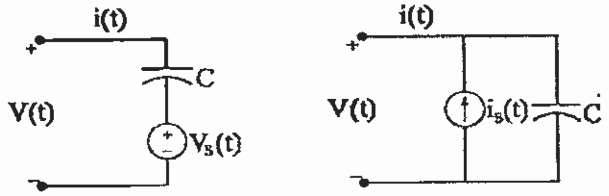


(ب) (الف)

شکل ۴-۲ (الف) معادل اتصال سری خازن (بدون بار اولیه) و یک منبع ولتاژ ثابت V_0

(ب) خازن با بار اولیه $V(0)=V_0$

نکته: یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ولتاژ اولیه صفر، سری با منبع ولتاژ نابسته V_s معادل یک منبع جریان موازی با یک خازن به صورت زیر می‌باشد:



(ب) (الف)

شکل ۴-۳ مدارهای تونن و نورتن برای یک خازن با منبع نابسته

$$v_s(t)=\frac{1}{C}\int_0^t i_s(t')\,dt' \qquad (۴-۵)$$

$$i_s(t)=C\frac{dv_s}{dt} \qquad (۴-۶)$$

نکته: برای یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان، مادامیکه جریان آن کراندار بماند ولتاژ شاخه نمی‌تواند بطور لحظه‌ای از یک مقدار به مقدار متفاوت دیگری پرش کند.

نکته: اگر خازنی خطی اما تغییرپذیر با زمان باشد مشخصه آن در هر لحظه خط مستقیمی است که از مبدأ می‌گذرد ولی شیب آن به زمان بستگی دارد که برای آن روابط زیر برقرار می‌شود:

$$q(t)=C(t)v(t) \qquad (۴-۷)$$

$$i(t)=\frac{dq}{dt}=C(t)\frac{dv(t)}{dt}+v(t)\frac{dC(t)}{dt} \qquad (۴-۸)$$

نکته: مشخصه یک خازن غیرخطی بصورت $q=f(v)$ می‌باشد، که مدل دقیق ترانزیستور، یک خازن غیرخطی می‌باشد.

نکته: باری ثابت بودن ولتاژ روی خازن جریان آن باید صفر باشد، بنابراین خازن برای dc، مدار باز عمل می‌کند.

نکته: برای یک خازن خطی تغییرناپذیر با زمان روابط زیر برقرار می‌باشد:

(۴-۹) توان داده شده به خازن $=p=vi=Cv\frac{dv}{dt}$

(۴-۱۰) انرژی ذخیره شده در خازن از لحظه t_0 تا t $=\int_{t_0}^{t} p\,dt=\frac{1}{2}C\left[v^2(t)-v^2(t_0)\right]=w(t)-w(t_0)$ ، $w(t_0)$ انرژی ذخیره شده در لحظه t_0 می‌باشد.

نکته: می‌توان مقدار محدودی انرژی در خازن ذخیره کرد، حتی اگر جریان آن صفر باشد (وقتی ولتاژ دو سر خازن ثابت می‌باشد) و خازن انرژی مصرف نمی‌کند بلکه انرژی در خود ذخیره می‌کند.

نکته: اتصال n خازن بطور سری، خازن معادل برابر است با:

$$C_{eq}=\left[\frac{1}{C_1}+\frac{1}{C_2}+\dots+\frac{1}{C_n}\right]^{-1} \qquad (۴-۱۱)$$

و اتصال n خازن بطور موازی خازن معادل برابر است با:

$$C_{eq}=C_1+C_2+\dots+C_n=\sum_{i=1}^{n}C_i \qquad (۴-۱۲)$$

نکته: انرژی ذخیره شده برای خازن خطی تغییرناپذیر با زمان از روابط زیر بدست می‌آید:

(۴-۱۳) انرژی ذخیره شده در لحظه t $=w(t)=\frac{1}{2}Cv^2(t)=\frac{1}{2}\frac{q^2(t)}{C}=\frac{1}{C}\int_0^{q(t)}q\,dq$

نکته: در اتصال سری خازنها درحالیکه جریانها در هر کدام از آنها برابر می‌باشد اما نمی‌توان لزوماً بار آنها با هم برابر باشد.

$$i(t)=\frac{dq}{dt}\ ,\ q_1(t)=\int_0^t i(t')\,dt'+q_1(0) \qquad (۴-۱۴)$$

نکته: اگر n خازن با ولتاژهای اولیه متفاوت با هم موازی شوند، پس از موازی شدن روابط زیر برقرار می‌باشد:

ولتاژ اولیه خازن i ام قبل از موازی شدن = $V_i(0^-)$ $\qquad V_1(0)=V_2(0)=\dots=V_n(0)=V$

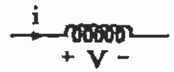
ولتاژ معادل بعد از موازی شدن = V

$$V=\frac{\sum_{i=1}^{n} C_i V_i\left(0^-\right)}{\sum_{i=1}^{n} C_i} \qquad (۱۵-۴)$$

نکته: در حالت دائمی اگر تمام منابع موجود در مدار، منبع ثابت باشند، خازنها مدار باز عمل کرده و جریان و ولتاژهای تمامی خازنهای موجود در مدار در حالت دائمی می‌توان بدست آورد.

۴-۲ سلف

یک عنصر دو سر سلف گویند اگر در هر لحظه t از زمان، شار $\phi(t)$ و جریان $i(t)$ آن در رابطه‌ای که توسط یک منحنی در صفحه $i\phi$ تعریف می‌شود، صدق کند. برای یک سلف رابطه بین ولتاژ دو سر آن و شار مربوطه بصورت زیر می‌باشد:



$$v(t)=L\frac{di}{dt} \qquad (۱۶-۴)$$

v برحسب ولت و ϕ برحسب وبر می‌باشد.

اگر یک سلف مشخصه آن با زمان تغییر نکند، یک سلف تغییرناپذیر با زمان گویند و یک سلف را خطی گویند که در هر لحظه از زمان مشخصه آن خط مستقیمی باشد که از مبدأ صفحه $i\phi$ بگذرد.

نکته: مشخصه یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان بصورت $\phi(t)=Li(t)$ می باشد که L را اندوکتانس گویند و دارای مقدار ثابتی می‌باشد که این مشخصه یک خط مستقیمی به شیب L می‌باشد که از مبدأ می‌گذرد و واحد L هانری می‌باشد و معادله‌ای که ولتاژ دو سر سلف و جریان مربوطه به هم ارتباط می‌دهد بصورت زیر می‌باشد:

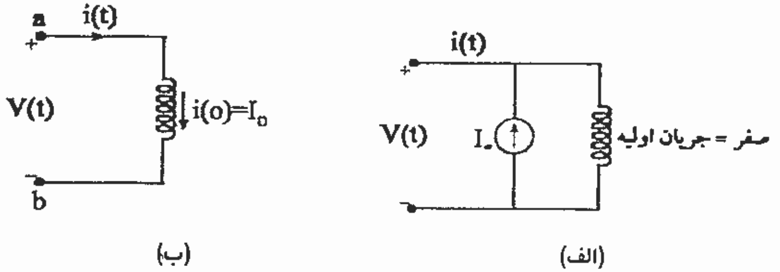
$$v(t)=L\frac{di}{dt} \qquad (۱۷-۴)$$

$$i(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v(t')dt'+i(0) \qquad (۱۸-۴)$$

معادلات بالا نشان دهنده با حافظه بودن سلف می‌باشد.

لازم به ذکر است یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان بعنوان یک عنصر مدار، فقط وقتی کاملاً مشخص می‌شود که جریان اولیه $i(0)$ و اندوکتانس L مشخص باشد.

نکته: هر سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه $i(0)$ را می‌توان بصورت اتصال موازی یک منبع جریان ثابت $(i(0))$ و همان سلف با جریان اولیه صفر در نظر گرفت:



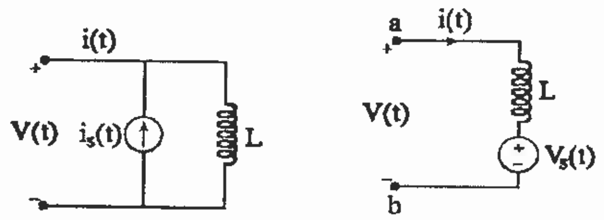
شکل ۴-۴ (الف) سلف با جریان اولیه صفر و منبع جریان ثابت I_0 و

(ب) سلف با جریان اولیه $i(0)=I_0$

نکته: یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با جریان اولیه صفر، $i(0)=0$، موازی با یک منبع جریان دلخواه $i_s(t)$، معادل یک مدار با همان سلف سری با منبع ولتاژ $v_s(t)$ می‌باشد که $v_s(t)$ برابر است با:

$$v_s(t)=L\frac{di_s}{dt} \qquad (۱۹-۴)$$

$$i_s(t)=\frac{1}{L}\int_0^t v_s(t')dt' \qquad (۲۰-۴)$$



شکل ۴-۵ مدارهای معادل تونن و نرتن برای سلف با یک منبع

نکته: برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان، مادامیکه ولتاژ دو سر آن کراندار بماند، جریان داخل آن سلف نمی‌تواند بطور لحظه‌ای از یک مقدار به مقدار متفاوتی بجهد.

نکته: یک سلف خطی تغییرپذیر با زمان دارای یک مشخصه‌ای خواهد بود که در هر لحظه خط مستقیمی است که از مبدأ گذشته و شیب آن تابعی از زمان می‌باشد و رابطه زیر برقرار خواهد بود.

$$\phi(t)=L(t)i(t) \qquad (۲۱-۴)$$

$$v(t)=L(t)\frac{di}{dt}+i(t)\frac{dL}{dt} \qquad (۲۲-۴)$$

نکته: اغلب سلفهای فیزیکی دارای مشخصه‌های غیرخطی هستند و فقط برای دامنه تغییرات خاصی از جریان، می‌توان سلفهای خطی تغییرناپذیر با زمان را برای سلفها مدل قرار داد. یک سلف با مشخصه $\phi = tgi$، یک سلف غیرخطی تغییرناپذیر با زمان می‌باشد.

نکته: برای یک سلف غیرخطی تغییرناپذیر با زمان رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\phi(t) = f(i(t)) \qquad (۲۳-۴)$$

$$v(t) = \frac{df}{di}\bigg|_{i(t)} \frac{di}{dt} \qquad (۲۴-۴)$$

نکته: برای یک سلف غیرخطی تغییرپذیر با زمان رابطه زیر برقرار می‌باشد:

$$\phi(t) = f(i(t), t) \qquad (۲۵-۴)$$

$$v(t) = \frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial f}{\partial i}\bigg|_{i(t)} \frac{di}{dt} \qquad (۲۶-۴)$$

نکته: در یک سلف تغییرناپذیر با زمان، مقدار انرژی تحویل داده شده از زمان t_0 تا t برابر است با:

$$w(t_0, t) = \int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt' = \int_{\phi(t_0)}^{\phi(t)} i(\phi')d\phi'$$

نکته: اگر انرژی ذخیره شده در یک سلف همیشه نامنفی باشد آنرا پسیو گویند.

$$\varepsilon_M(t) = \int_{0}^{\phi(t)} i(\phi')d\phi' \qquad (۲۷-۴)$$

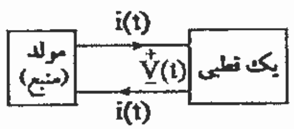
: انرژی ذخیره شده در سلف

که این مقدار (انرژی ذخیره شده) برای یک سلف خطی تغییرناپذیر با زمان از روابط زیر محاسبه می‌شود:

$$\varepsilon_M(t) = \frac{1}{2}\frac{\phi^2(t)}{L} = \frac{1}{2}Li^2(t) \qquad (۲۸-۴)$$

نکته: اگر $p(t)$ نشان دهنده توان لحظه‌ای باشد که در زمان t توسط مولد به یک قطبی تحویل داده می‌شود مقدار انرژی تحویل داده شده به یک قطبی از زمان t_0 تا t از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$p(t) = v(t)i(t) \;,\; w(t_0, t) \triangleq \int_{t_0}^{t} p(t')dt' = \int_{t_0}^{t} v(t')i(t')dt' \qquad (۲۹-۴)$$



شکل ٤-٦ نمایش یک قطبی

نکته: عنصری را پسیو گویند که هرگز انرژی خالص به دنیای خارج تحویل ندهد و عنصری که پسیو نباشد اکتیو گویند.

نکته: مقاومتها، خازنها و سلفهای خطی تغییرناپذیر با زمان پسیو هستند، اگر و تنها اگر، روابط زیر برقرار باشد.

$$L \geq 0 \,,\, C \geq 0 \,,\, R \geq 0 \qquad (۳۰-۴)$$

نکته: منابع ایده‌آل عناصر فعال هستند (منابع ولتاژ و جریان مستقل و وابسته فعال می‌باشند) در واقع عنصر فعال، عنصری می‌باشد که به عنصر دیگری توان بدهد و متوسط این توان بیشتر از صفر باشد.

نکته: اگر جریان القاگر (سلف) با زمان تغییر نکند ولتاژ روی آن صفر خواهد بود، بنابراین سلف برای dc اتصال کوتاه است.

نکته: در یک سلف می‌توان مقدار محدودی انرژی ذخیره کرد، حتی اگر ولتاژ روی آن صفر باشد؛ مثلاً وقتی جریان آن ثابت است.

نکته: اگر n سلف با جریانهای اولیه مختلف با هم سری شوند بلافاصله پس از سری شدن جریانهای تمامی سلفها با هم برابر شده و برابر با I که $i = 1, 2, \dots, n, i_j(0^+) = I$ برابر است با:

$$I = \frac{\sum_{i=1}^{n} L_i i_i(0^0)}{\sum_{i=1}^{n} L_i} \qquad (۳۱-۴)$$

نکته: اتصال موازی سلفهای خطی تغییرناپذیر با زمان برابر است با:

$$\frac{1}{L} = \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{L_i} \qquad (۳۲-۴)$$

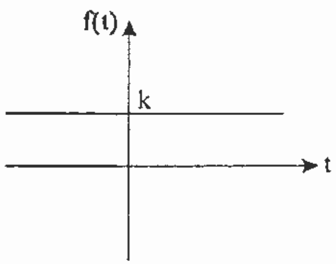
٤-٣ توابع مفید در تحلیل مدارهای الکتریکی

برخی از توابع و شکل موجهای مفید عبارتند از:

مقدار ثابت

این تابع برای همهٔ مقادیر t، مقدار ثابت دارد.

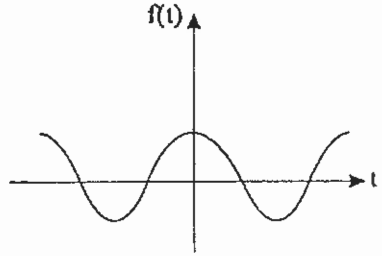
$$f(t) = k \qquad (۳۳-۴)$$



شکل ٤-٧ تابع با مقدار ثابت K

سینوسوئید

ایـن تـابع بـصورت $f(t)=A\cos(\omega t+\varphi)$ نمـایش داده مـی‌شـود کـه در آن A، «دامنـه» و ω «فرکانس زاویه‌ای» و φ «فاز» نامیده می‌شود.

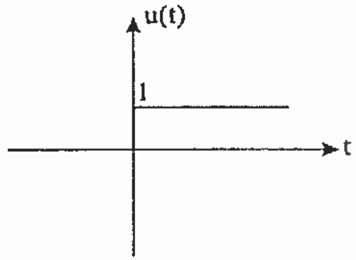


شکل ٤-٨ تابع سینوسوئید

پله واحد

تابع پله واحد بصورت زیر تعریف می‌گردد:

$$u(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ 1 & t\geq 0\end{cases} \qquad (۳۴-۴)$$

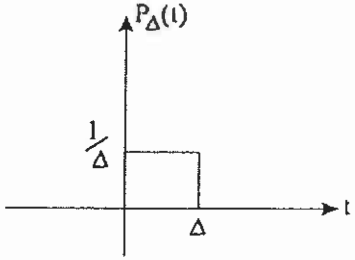


شکل ٤-٩ تابع پله واحد

پالس

تابع پالس بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$P_\Delta(t)=\begin{cases}0 & t<0\\ \frac{1}{\Delta} & 0\leq t<\Delta\\ 0 & t\geq\Delta\end{cases} \qquad (۳۵-۴)$$



شکل ٤-٩ تابع پالس

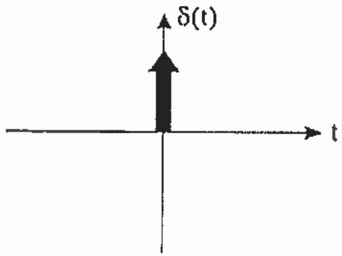
و می‌توان نوشت $\int_{-\infty}^{+\infty} P_\Delta(\tau)d\tau=1$ و در مقایسه با تابع پله واحد نتیجه می‌شود:

$$P_\Delta(t)=\frac{u(t)-u(t-\Delta)}{\Delta} \qquad (۳۶-۴)$$

ضربهٔ واحد

این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\delta(t)=\begin{cases}\text{مقدار نامحدود} & t=0\\ 0 & t\neq 0\end{cases} \qquad (۳۷-۴)$$



شکل ٤-١٠ تابع ضربهٔ واحد

که در مقایسه با توابع دیگر می‌توان نوشت:

$$\int_{0^-}^{0^+}\delta(t)dt=1 \quad ; \quad \delta(t)=\lim_{\Delta\to 0} p_\Delta(t) \qquad (۳۸-۴)$$

$$\delta(t)=\frac{du(t)}{dt} \quad ; \quad u(t)=\int_{-\infty}^{t}\delta(\tau)d\tau \qquad (۳۹-۴)$$

خاصیت غربالی: تابع ضربه واحد دارای این خاصیت است که اگر تابع f یک تابع پیوسته باشد آنگاه:

$$\int_{0^-}^{0^+} f(t)\delta(t)dt = \int_{0^-}^{0^+} f(0)\delta(t)dt = f(0)\int_{0^-}^{0^+} \delta(t)dt$$

$$\Rightarrow \int_{0^-}^{0^+} f(t)\delta(t)dt = f(0) \qquad (۴۰-۴)$$

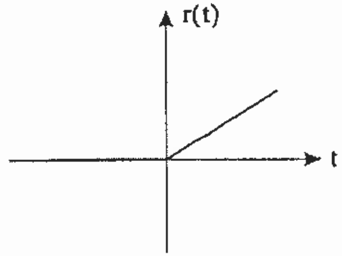
و یا بطور کلی‌تر:

$$\int_{t_1^-}^{t_1^+} f(\tau)\delta(\tau - t_1)d\tau = f(t_1) \qquad (۴۱-۴)$$

شیب واحد

این تابع بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$r(t) = \begin{cases} t & t \geq 0 \\ 0 & t < 0 \end{cases} \qquad (۴۲-۴)$$



شکل ۴-۱۱ تابع شیب واحد

و روابط آن بصورت زیر می‌باشد:

$$r(t) = tu(t) \qquad (۴۳-۴)$$

$$u(t) = \frac{dr(t)}{dt} \qquad (۴۴-۴)$$

$$r(t) = \int_{-\infty}^{t} u(\tau)d\tau \qquad (۴۵-۴)$$

نکته: به مشتقات تابع ضربهٔ واحد «توابع ویژه» گفته می‌شود.

نکته: تنها تابعی که سطح زیرمنحنی آن در یک بازهٔ محدود زمانی (از 0^- تا 0^+) برابر مقداری به غیر از صفر است تابع «ضربهٔ واحد» می‌باشد.

۴-۴ القای متقابل و ترانسفورماتور ایده‌آل

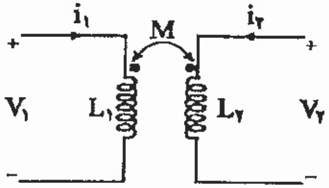
القای متقابل

وقتی دو سیم پیچ با سلفهای L_1, L_2 طوری در مجاورت هم قرار بگیرند که فلوی مغناطیسی یکی از آنها از دیگری عبور کند، بین دو سیم پیچ، القای متقابل بوجود می‌آید. با روابط انرژی می‌توان ثابت نمود که القاهای متقابل یک سیم پیچ نسبت به دیگری (M_{12}, M_{21}) معمولاً برابر با M هستند. برای سیم پیچ‌ها تزویج شده روابط ولتاژ و جریانهای القای متقابل از قرارداد زیر بدست می‌آید:

۱- جهت ولتاژ و جریان قراردادی مطابق قانون اهم است.

۲- برای تعیین جهت ولتاژ القایی از یک سیم‌پیچ به سیم‌پیچ دیگر بدین صورت عمل می‌کنیم.اگر جریان از سر نقطه‌دار (علامت‌دار) سیم پیچ وارد شود، علامت مثبت ولتاژ القا شده، در طرف نقطه‌دار (علامت‌دار) سیم‌پیچ دوم خواهد بود. این علامت را با علامت قراردادی قانون اهم مقایسه نموده در صورت هم جهت بودن، ولتاژ بصورت مثبت القا شده است. در غیر این صورت ولتاژ منفی القا خواهد شد.

مثال ۱: روابط ولتاژ و جریان را در مدار مقابل بنویسید.

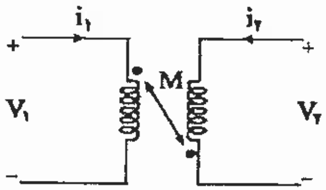


حل:

در این مثال ولتاژهای القا شده مثبت است و داریم:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt}$$

مثال ۲: روابط ولتاژ و جریان را در مدار مقابل بنویسید:



حل:

در این مثال ولتاژهای القا شده منفی است و داریم:

$$v_1 = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_2}{dt} \qquad v_2 = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_1}{dt}$$

گاهی اوقات به M ضریب ترویج گویند ولی ضریب ترویج را بصورت دیگر نیز تعریف می‌کنند:

ضریب تزویج k: نسبت قدرمطلق ضریب القای متقابل به واسطه هندسی در ضریب خود القا را ضریب تزویج گویند و طبق رابطهٔ زیر بیان می‌گردد:

$$k=\frac{|M|}{\sqrt{L_1L_2}}\ge 0 \qquad (۴۶-۴)$$

k به جهت قرارداد انتخابی برای جریان سلفها بستگی ندارد و علت استفاده از قدرمطلق این است که گاهی اوقات علامت ولتاژ القاء شده را به M نسبت می‌دهند.

ماتریس ضرایب القا: این ماتریس برای n سیم‌پیچ $(n\times n)$ است که در ذیل برای دو سیم‌پیچ و سه سیم‌پیچ ارائه شده است.

$$L=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix} \qquad (۴۷-۴)$$

$$L=\begin{bmatrix} L_1 & M_{12} & M_{13} \\ M_{21} & L_2 & M_{23} \\ M_{31} & M_{32} & L_3 \end{bmatrix} \qquad (۴۸-۴)$$

در واقع بعنوان مثال برای دو سیم پیچ می‌توان نوشت:

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}(j\omega)\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix} \qquad (۴۹-۴)$$

بطوری که ولتاژها و جریانها در رابطهٔ فوق بصورت فازوری نمایش داده شده‌اند.

ماتریس ضرایب القای معکوس: در واقع برای n سیم‌پیچ بصورت زیر تعریف می‌شود:

$$\Gamma=L^{-1} \qquad (۵۰-۴)$$

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} L_1 & M \\ M & L_2 \end{bmatrix}^{-1}\frac{1}{j\omega}\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \end{bmatrix} \qquad (۵۱-۴)\ \text{برای (۲ سیم‌پیچ)}$$

سلف معادل: در اتصال سری دو سیم‌پیچ تزویج شده سلف معادل برابر است با:

$$L_{eq}=L_1+L_2\pm 2M \qquad (۵۲-۴)$$

در اتصال موازی دو سیم‌پیچ تزویج شده سلف معادل از روابط ذیل بدست می‌آید.

$$\Gamma eq=\Gamma_1+\Gamma_2\pm 2|\Gamma_{12}| \qquad (۵۳-۴)$$

$$L_{eq}=\Gamma_{eq}^{-1} \qquad (۵۴-۴)$$

علائم در روابط فوق بستگی به جهتهای قراردادی نقاط تزویج در القای متقابل سلفها دارد. در حالت کلی برای محاسبهٔ اندوکتانس معادل سه روش وجود دارد:

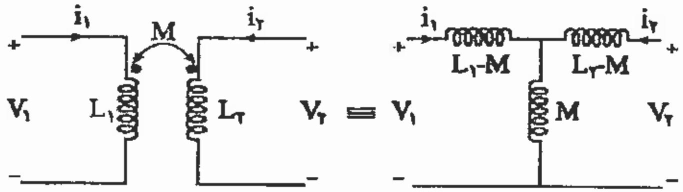
۱- روش اول: استفاده از رابطه $\phi=L_{eq}i$

۲- روش دوم: استفاده از رابطه $v=L_{eq}\frac{di}{dt}$

۳- روش سوم: استفاده از روابط فرکانس مختلط و تبدیل لاپلاس

روش سوم در فصلهای بعدی بررسی خواهد شد.

قبل از ارائه چند مثال به این نکته نیز بایستی اشاره شود که برای دو سیم‌پیچ با القای متقابل، مدار معادلهای زیادی ارائه شده است که از معروفترین آنها مدار معادل T در شکل زیر می‌باشد.

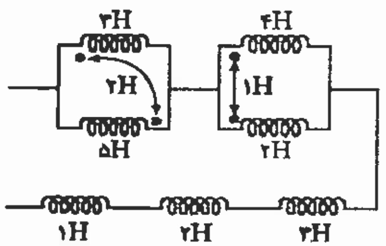


شکل ٤-۱۲ مدار معادل T سلفهای تزویج شده

مثال ۳: در شکل زیر، هر سه سلف سری دارای القای متقابل 1H نسبت به یکدیگر هستند. اندوکتانس معادل مشاهده شده از دو سر ab کدام است؟

حل:

از رابطهٔ $\Gamma=L^{-1}$ برایم اتریس اندوکتانس، ابتدا معادل سلفهای موازی با القای متقابل را حساب می‌کنیم:



$$L_1=\begin{bmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\Gamma_1=\frac{1}{11}\begin{bmatrix} 5 & +2 \\ +2 & 3 \end{bmatrix}\Rightarrow \Gamma_{eq_1}=\frac{1}{11}(5+3+2\times 2)=\frac{12}{11}$$

$$L_{eq_1}=\frac{11}{12}H$$

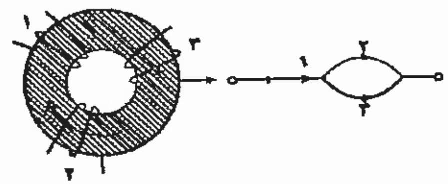
$$L_2 = \begin{bmatrix} 4 & +1 \\ +1 & 2 \end{bmatrix} \quad \Gamma_2 = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma_{eq_2} = \frac{1}{7}(2+4-2\times 1) = \frac{4}{7}$$

در مورد سه سلف سری داریم:

$$L_3 = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{bmatrix} \quad L_{eq_3} = (1+1+1)+(1+2+1)+(1+1+3) = 12H$$

$$L_{eq} = L_{eq_1} + L_{eq_2} + L_{eq_3} = \frac{11}{12} + \frac{4}{7} + 12 \Rightarrow L_{eq} = \frac{1133}{84} \simeq 13/5H$$

مثال ۴: در شکل مقابل مقدار هر ضریب خود القا ۲هانری و قدرمطلق ضـریب القـا متقابـل ۱هـانری اسـت. اگـر سیم‌پیچها را به صورت مقابل بهم ببندیم، ضریب القا خالص مدار چند هانری است؟



حل:

با توجه به جهت سیم‌پیچها و جهت جریـان گذرنـده از آنهـا براحتـی دیـده مـی‌شـود کـه $M_{12} = M_{21} = 1$ و $M_{13} = M_{31} = -1$ و $M_{23} = M_{32} = -1$ پس ماتریس اندوکتانس بصورت زیر است:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$$

نحوه بهم پیوسـتن سـیمها ایجاب می‌کند که داشته باشیم:

$$v = v_1 + v_2 = v_1 + v_3 \quad \Rightarrow \quad v_2 = v_3$$

$$i = i_1 = i_2 + i_3$$

از رابطه ماتریسی $\phi = Li$ روابط زیر حاصل می‌شود (i بردار جریانهای سه سیم‌پیچ است):

$$\phi_1 = 2i_1 + i_2 - i_3 \quad \phi_2 = i_1 + 2i_2 - i_3 \quad \phi_3 = -i_1 - i_2 + 2i_3$$

$$v_2 = v_3 \Rightarrow \frac{d\phi_2}{dt} = \frac{d\phi_3}{dt} \Rightarrow \phi_2 = \phi_3$$

$$i_1 + 2i_2 - i_3 = -i_1 - i_2 + 2i_3 \Rightarrow -3i_2 + 3i_3 = 2i_1$$

$$\begin{cases} i_1 = \frac{-3}{2}(i_2 - i_3) \\ i_1 = i_2 + i_3 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{1}{6}i \,,\, i_3 = \frac{5}{6}i$$

$$\phi = \phi_1 + \phi_2 \Rightarrow \phi = 2i_1 + i_2 - i_3 + i_1 + 2i_2 - i_3$$

$$\phi = 3i_1 + 3i_2 - 2i_3 = 3i + \frac{1}{2}i - \frac{5}{3}i = \frac{11}{6}i \Rightarrow L_{eq} = \frac{11}{6}H$$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده: می‌دانیم این انرژی در یک سلف به تنهایی از رابطهٔ زیر بدست می‌آید:

$$W = \frac{1}{2}Li^2 \tag{۵۵-۴}$$

این انرژی در یک سلف با مقدار L_1 و جریان i_1 با خودالقایی M_{ij} از سلف زام با جریان i_j برابر است با:

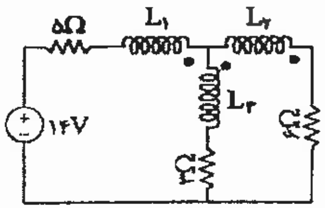
$$W_1 = \frac{1}{2}L_1 i_1^2 + \sum_{j=2}^{n} M_{ij} i_1 i_j \tag{۵۶-۴}$$

n تعداد سیم‌پیچها است و ضریب M_{1j} با علامت درنظر گرفته شده است. کل انرژی ذخیره شده در n سیم‌پیچ با خودالقایی M_{ij} می‌توان بصورت ماتریسی چنین نمایش داد:

$$W = \frac{1}{2}I'LI \tag{۵۷-۴}$$

بطوری که در آن L ماتریس اندوکتانس و I بردار جریان که یک ماتریس $n \times 1$ بـوده و I' ، بـردار جریـان بـه صورت ماتریس $1 \times n$ که ترانهادهٔ ماتریس I می‌باشد.

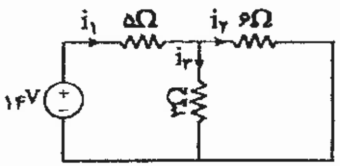
مثال۴: در مدار شکل مقابل سلفهای بکار رفته دارای ماتریس اندوکتانس ذیل هستند:



$$L = \begin{bmatrix} 8 & 3 & -2 \\ 3 & 4 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$

و مدار در حالت پایدار می‌باشد. انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلف ۴ هانری چند ژول است؟

حل:



ابتدا جریان سلفها را در حالت پایدار بدست مـی‌آوریـم. در ایـن حالـت سـلفها اتصال کوتاه بوده و مدار معادل بصورت زیر ساده می‌شود.

$$i_1 = \frac{14}{5 + (3 \| 6)} = 2A \qquad i_2 = \frac{3}{3+6}i_1 = \frac{2}{3}A$$

$$i_3 = i_1 - i_2 = \frac{4}{3}A$$

$$W_2 = \frac{1}{2}L_2 i_2^2 + M_{21} i_2 i_1 + M_{23} i_2 i_3$$

$$W_2 = 2\left(\frac{2}{3}\right)^2 + 3\left(\frac{2}{3}\right)(2) + (-2)\left(\frac{4}{3}\right)\left(\frac{2}{3}\right) = \frac{8}{9} + 4 - \frac{16}{9} \Rightarrow W_2 = \frac{28}{9}J$$

مثال ۵: ماتریس اندوکتانس سه سیم‌پیچ تزویج شده به صورت زیر است:

$$L = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}$$

و جریانهای گذرنده از آنها برابر $i_1 = 2A$ و $i_2 = 1A$ و $i_3 = 2A$ می‌باشد. انرژی ذخیره شده در سیم‌پیچها چقدر است؟

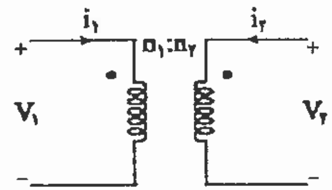
حل:

$$W = \frac{1}{2}I'LI = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 4 & -1 \\ -1 & -1 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$W = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \Rightarrow W = 12J$$

۴-۵ ترانسفورماتور ایده‌آل

در یک ترانسفورماتور که ضریب خودالقایی بی‌نهایت است، نسبت ترانس از روابط ذیل پیروی می‌کند در ترانسفورماتور ایده‌آل از مقاومت اهمی سیم‌پیچها صرف‌نظر شده است.



شکل ۴-۱۳ ترانسفورماتور ایده‌آل

$$\frac{v_1}{v_2} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (۴-۵۸)$$

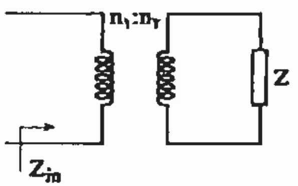
$$\frac{i_2}{i_1} = \frac{n_1}{n_2} \qquad (۴-۵۹)$$

به عبارت دیگر قدرمطلق نسبت ولتاژ، عکس قدرمطلق نسبت جریانها است. اگر جهت مثبت ولتاژ را در هر طرف همان محل نقطه (با علامت) قرار گیرد. نسبت ولتاژها مثبت بیان می‌شود و اگر جهت جریان در یک طرف ابتدا وارد نقطه (با علامت) خود شود و جهت جریان در طرف دیگر از نقطه خارج شود (ابتدا وارد سیم‌پیچ شود) نسبت جریانها نیز مثبت نوشته می‌شود.

خاصیت تغییر امپدانس در ترانسفورماتور ایده‌آل:

اگر مطابق شکل بار Z به دو سر ترانسفورماتور ایده‌آل وصل شود، امپدانس Z_{in} از دو سر دیگر ترانس برابر است با:

$$Z_{in} = \left(\frac{n_1}{n_2}\right)^2 Z$$



شکل ۴-۱۴ امپدانس ورودی یک ترانسفورماتور ختم شده با Z_L

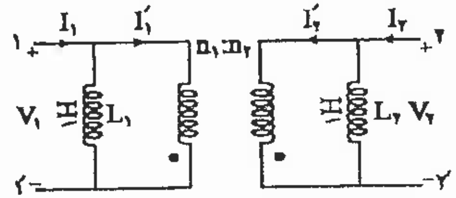
رابطه فوق به جهت نقطه (با علامت) ترانسفورماتور بستگی ندارد. از این‌رو در شکل زیر علائم حذف شده است. از این خاصیت برای تطبیق امپدانس استفاده می‌شود.

ترانسفورماتور ایده‌آل و منابع وابسته:

ترانسفورماتور ایده‌آل را می‌توان با منابع وابسته هم مدل کرد. یک ترانسفورماتور با ضریب تبدیل a و نسبت دور $\left[\frac{n_1}{n_2} = N = \frac{1}{a}\right]N$ معادل شبکه‌های زیر است:

شکل ٤-١٥ مدل ترانسفورماتور به صورت منابع وابسته

مثال ۶: ماتریس اندوکتانس در مدار شکل مقابل چیست؟



حل:

طبق شکل فوق، با نوشتن روابط ولتاژها و جریانها داریم:

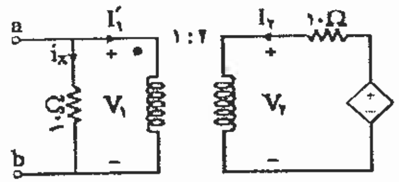
$$\frac{V_1}{V_2}=\frac{n_1}{n_2}=1=\frac{-I'_2}{I'_1}\Rightarrow I'_1=-I'_2\ ,\ V_1=V_2$$

$$V_1=L_1\frac{d}{dt}(I_1-I'_2)=\frac{dI_1}{dt}-\frac{dI'_1}{dt}\qquad V_2=L_2\frac{d}{dt}[I_2-I'_2]=\frac{dI_2}{dt}-\frac{dI'_2}{dt}$$

$$V_1+V_2=\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI'_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}-\frac{dI'_2}{dt}\Rightarrow V_1+V_2=\frac{dI_1}{dt}+\frac{dI_2}{dt}$$

$$V_1=V_2\Rightarrow V_1=V_2=\frac{1}{2}\frac{dI_1}{dt}+\frac{1}{2}\frac{dI_2}{dt}\Rightarrow L=\begin{bmatrix}0/5 & 0/5\\ 0/5 & 0/5\end{bmatrix}$$

مثال ۷: مقاومت معادل تونن برای مدار شکل زیر از دو سر ab را تعیین کنید؟



حل:

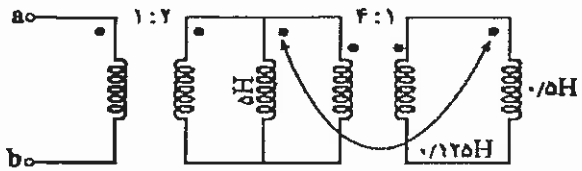
$$I=I_1+i_x=I_1+\frac{V_1}{10}\qquad \frac{V_1}{V_2}=\frac{1}{2}=\frac{-I_2}{I_1}$$

$$V_2=-10I_2+10i_x\Rightarrow 2V_1=-10\left(\frac{-I_1}{2}\right)+10i_x\Rightarrow 2V_1=5I_1+i_x$$

$$I_1=\frac{2V_1-10j_x}{5}=\frac{2V_1-V_1}{5}=\frac{V_1}{5}\qquad I=I_1+\frac{V_1}{10}=\frac{V_1}{5}+\frac{V_1}{10}=0/3V_1$$

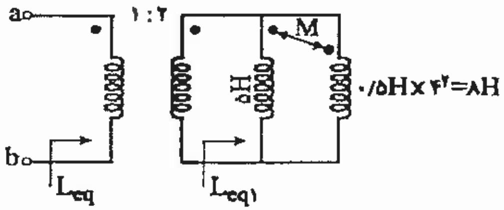
$$R_{th}=\frac{V_1}{I}=\frac{10}{3}\Omega$$

مثال ۸: در مدار شکل مقابل اندوکتانس معادل از دو سر ab چیست؟



حل:

ابتدا سلف 0/5 H را با ترانس منتقل می‌کنیم و مدار به شکل زیر در می‌آید:



$$M=0/125\times4^2=2H$$

$$L=\begin{bmatrix}5 & 2\\ 2 & 8\end{bmatrix}\quad \Gamma=L^{-1}=\frac{1}{36}\begin{bmatrix}8 & -2\\ -2 & 5\end{bmatrix}$$

$$\Gamma_{eq1}=\frac{1}{36}[8+5-2\times2]\Rightarrow\Gamma_{eq1}=\frac{9}{36}=\frac{1}{4}\Rightarrow L_{eq1}=4H$$

$$L_{eq}=L_{eq1}\left(\frac{1}{2}\right)^2\Rightarrow L_{eq1}=1H$$

حل مسائل فصل چهارم

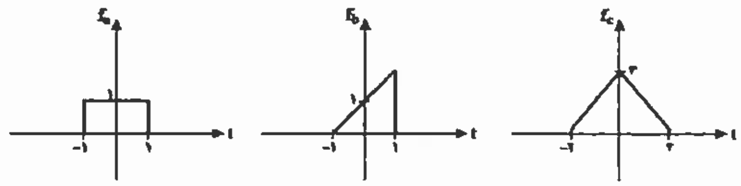
۱- با استفاده از رابطه انرژی الکتریکی که به صورت $w(t)=\int_{-\infty}^{t}v(t)i(t)dt$ می‌باشد، ثابت کنید که انرژی ذخیره شده در یک خازن خطی برابر $w(t)=\frac{1}{2}q^{2}(t)/c$ خواهد بود.

حل:

در یک خازن خطی رابطه $q(t)=cv(t)$ برقرار است. بنابراین با توجه به رابطه $i(t)=\frac{dq}{dt}$ و جایگذاری این دو رابطه در داخل انتگرال خواهیم داشت:

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t}\frac{q}{c}\frac{dq}{dt}dt=\int_{-\infty}^{q(t)}\frac{q}{c}dq=\frac{1}{c}\int_{-\infty}^{q(t)}q\,dq=\frac{1}{2}\frac{q^{2}(t)}{c}$$

۲- بیان ریاضی شکل موج‌های ارائه شده در شکل (۴-۴۰) را مشخص نمایید.



شکل (۴-۴۰): بعضی توابع ریاضی

حل:

$$f_a(t)=u(t+1)-u(t-1)$$
$$f_b(t)=r(t+1)-r(t-1)-2u(t-1)$$
$$f_c(t)=\frac{3}{2}r(t+2)-3r(t)+\frac{3}{2}r(t-2)$$

۳- با استفاده از رابطه انرژی الکتریکی $w(t)=\int_{-\infty}^{t}v(t)i(t)dt$ اثبات کنید که انرژی ذخیره شده در یک سلف خطی برابر $w(t)=\frac{1}{2}\frac{\varphi^{2}}{L}$ خواهد بود.

حل:

رابطه بین جریان و شار یک سلف خطی به صورت $\phi(t)=Li(t)$ می باشد همچنین رابطه بین ولتاژ و شار یک سلف خطی نیز به صورت $V_L(t)=\frac{d\varphi(t)}{dt}$ می‌باشد.

$$w(t)=\int_{-\infty}^{t}v(\tau)i(\tau)d\tau=\int_{-\infty}^{t}\frac{d\varphi(\tau)}{d\tau}\frac{\varphi(\tau)}{L}d\tau=\frac{1}{L}\int_{-\infty}^{\varphi(t)}\varphi(c)d\varphi(c)=\frac{1}{2}\frac{\varphi^{2}(t)}{L}$$

۴- فرض کنید که سه خازن خطی تغییرناپذیر با زمان با ظرفیتهای ۱ و۲ و۳ میکروفاراد، به طور جداگانه دارای ولتاژهای اولیه‌ای به ترتیب برابر ۱ و ۲ و ۳ ولت می‌باشند. حال اگر این سه خازن با هم و به طور همزمان به صورت موازی وصل شوند، ولتاژ حاصل دو سر اتصال موازی چقدر خواهد بود؟ انرژی ذخیره شده در خازنها را قبل و بعد از اتصال موازی به دست می‌آورید.

حل:

بار ذخیره شده در خازنها قبل از اتصال کلید و موازی شدن خازنها برابر است با:

$$Q(0^-)=Q_1(0^-)+Q_2(0^-)+Q_3(0^-)$$
$$=C_1V_1+C_2V_2+C_3V_3=1\times1+2\times2+3\times3=14$$

بنابر اصل بقای بارالکتریکی که یک اصل اساسی فیزیکی است در لحظه $t=0^+$ (بلافاصله پس از بسته شدن کلید و موازی شدن خازنها) داریم:

$Q(0^+)$: بار ذخیره شده در خازنها در لحظه $t=0^+$

V: ولتاژ دو سر خازنها یا ولتاژ اتصال موازی خازنها

C: ظرفیت خازن معادل پس از موازی شدن خازنها

$$Q(0^+)=Q(0^-)$$
$$CV=C_1V_1+C_2V_2+C_3V_3$$

$$C=C_1+C_2+C_3=1+2+3=6$$
$$6V=14\Rightarrow V=\frac{14}{6}=\frac{7}{3}$$

انرژی ذخیره شده در خازنها قبل از اتصال:

$$\left.\begin{aligned}w_1&=\frac{1}{2}C_1V_1^2=\frac{1}{2}1\times1=0.5^{j}\\w_2&=\frac{1}{2}C_2V_2^2=\frac{1}{2}2\times2^2=4^{j}\\w_3&=\frac{1}{2}C_3V_3^2=\frac{1}{2}3\times3^2=13.5^{j}\end{aligned}\right\}\Rightarrow\quad w_{\text{کل}}=\sum_{i=1}^{3}w_i=w_1+w_2+w_3=18^{j}$$

انرژی ذخیره شده در خازنها بعد از اتصال موازی:

$$w=\frac{1}{2}CV^2=\frac{1}{2}6\times\left(\frac{7}{3}\right)^2=16.3j$$

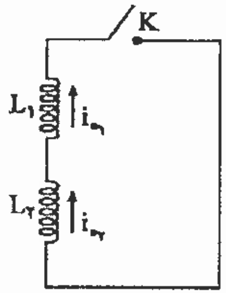
با مقایسه مقدار انرژیهای قبل و بعد از اتصال موازی خازنها می‌توان متوجه شد که انرژی خازنها پس از اتصال موازی آنها کم می‌شود. علت این است که ولتاژ دو سر خازنها بعد از اتصال موازی شدن آنها به‌طور ناگهانی تغییر

می‌کند و ولتاژ هر سه خازن برابر می‌شود. اما می‌دانیم که تغییر ناگهانی و آنی ولتاژ خازن ممکن نیست مگر اینکه جریان خیلی زیادی از آن عبور کند (جریان ضربه) که باعث از دست رفتن مقدار انرژی می‌شود. لذا انرژی خازن معادل موازی کمتر از مجموع انرژی تک تک خازنها قبل از اتصال خواهد بود.

۵- فرض کنید که دو سلف خطی تغییرناپذیر با زمان با اندوکتانسهای ۱ و ۲هانری، به‌طور جداگانه‌ای دارای جریانهای اولیه‌ای به ترتیب برابر ۲ و ۱ آمپر می‌باشند. حال اگر این سلفها با هم و به‌طور همزمان به‌طور سری وصل شوند، جریان منتجه عبوری از اتصال سری آنها چقدر است؟ انرژی مغناطیسی در این دو سلف را قبل و بعد از سری شدن محاسبه کنید.

حل:

شار هریک از سلفها قبل از اتصال سری سلفها برابر است با:



$$L_1 = 1^H,\ I_{o_1} = 2^A,\ L_2 = 2^H,\ I_{o_2} = 1^A$$

$$\phi_1(0^-) = L_1 I_{o_1} = 1\times 2 = 2$$

$$\phi_2(0^-) = L_2 I_{o_2} = 2\times 1 = 2$$

$$\text{کل}\quad \phi(0^-) = \phi_1(0^-) + \phi_2(0^-) = 4$$

پس بسته شدن کلید k و سری شدن سلفها، سلف معادل L، جریان سلف معادل I و انرژی سلف معادل یا انرژی کل باربر $\phi(0^+)$ خواهد بود. بنابر اصل بقای شار می‌توان گفت که شار سلفها در حالت قبل از سری شدن یا بسته شدن کلید برابر با شار سلفها بعد از سری شدن و یا بسته شدن کلید است. پس می‌توان گفت که:

$$\phi(0^+) \Rightarrow LI = L_1 I_o + L_2 I_o = 1\times 2 + 2\times 1 \qquad (1)$$

از طرفی سل معادل در اتصال سری برابر مجموع اندوکتانسها خواهد بود یعنی:

$$L = L_1 + L_2 = 1 + 2 = 3$$

با جایگذاری در رابطه (۱)، داریم:

انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلفها قبل از اتصال:

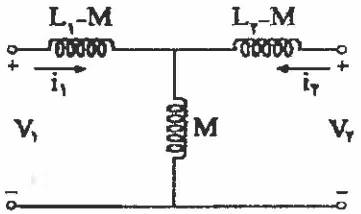
$$\left.\begin{aligned} w_1 &= \frac{1}{2}L_1 I_1^2 = \frac{1}{2}1\times 2^2 = 2^j \\ w_2 &= \frac{1}{2}L_2 I_2^2 = \frac{1}{2}2\times 1^2 = 1^j \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad w_{\text{کل}} = w_1 + w_2 = 3^j$$

انرژی مغناطیسی ذخیره شده در سلف معادل بعد از اتصال:

$$w = \frac{1}{2}LI^2 = \frac{1}{2}3\times\left(\frac{4}{3}\right)^2 = \frac{8}{3} = 2/66^j$$

اختلاف انرژی ذخیره شده در حالت قبل از بسته شدن کلید و بعد از بسته شدن کلید و سری شدن سلفها به این دلیل است که جریان سلفها بعد از زدن کلید باید با هم برابر شوند (بنابر قانون KCL) پس تغییر ناگهانی در جریان سلفها ناشی از ولتاژ خیلی زیادی است که دو سر آنها بعد از زدن کلید القا می‌شود و موجب تغییر ناگهانی جریان سلفها می‌شود. این تغییر ناگهانی جریان سلف موجب تلف شدن مقداری از انرژی مغناطیسی می‌شود که در مسئله‌ای که حل کردیم به وضوح این مورد دیده می‌شود.

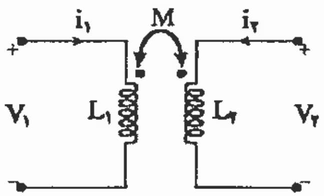
۶- در صورتی که دو سلف تزویج شده داشته باشیم که اندوکتانس خودی سیم‌پیچهای اول و دوم برابر L_1, L_2 و اندوکتانس متقابل آنها برابر M باشد، ثابت کنید که مدار معادل الکتریکی این دو سلف تزویج شده به صورت شکل (۴-۴۱) خواهد بود.



شکل ٤-٤١ مدار معادل الکتریکی دو سلف تزویج شده

حل:

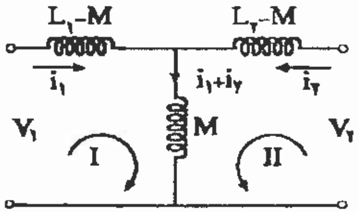
می‌دانیم که معادلات توصیف کننده سلفهای تزویج شده در سرهای آن چنین است:



$$V_1 = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

$$V_2 = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

حال با توجه به شکل رسم شده در صورت مسئله معادلات KVL را در مشهای آن می‌نویسیم. و سپس با معادل کردن و مقایسه معادلات می‌بینیم که معادلات توصیف کننده سلفهای تزویج شده با معادلات KVL مدل سلفهای داده شده در صورت مسئله یکی است.



در مش (I)

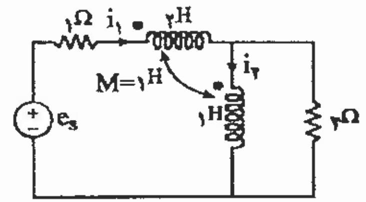
$$KVL: V_1 = (L_1 - M)\frac{di_1}{dt} + M\frac{d(i_1+i_2)}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} - M\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt} = L_1\frac{di_1}{dt} + M\frac{di_2}{dt}$$

در مش (II)

$$KVL: V_2 = (L_2 - M)\frac{di_2}{dt} + M\frac{d(i_1+i_2)}{dt} = L_2\frac{di_2}{dt} - M\frac{di_2}{dt} + M\frac{di_1}{dt} = M\frac{di_1}{dt} + L_2\frac{di_2}{dt}$$

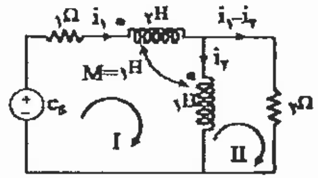
می‌توان دید که معادلات KVL در مشها عیناً مثل معادلات توصیف کننده سلفهای تزویج شده است.

۷- در مدار ارائه شده در شکل (۴-۴۲)، معادلات حلقه را با استفاده از قانون KVL بیابید.



شکل ۴-۴۲ مدار الکتریکی با سلفهای تزویج

حل:



(I) در مش $KVL: -e_s + i_1 + v_{L_1}(t) + v_{L_2}(t) = 0$

(II) در مش $KVL: -v_{L_2}(t) + 2(i_1 - i_2) = 0$

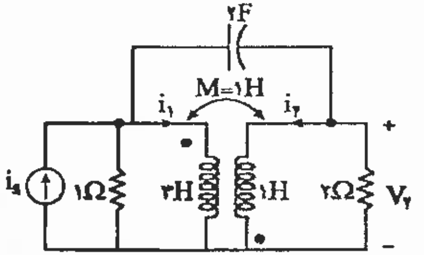
$$v_{L_1}(t) = 2\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

$$v_{L_2}(t) = \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}$$

با مرتب کردن معادلات خواهیم داشت:

$$\begin{cases} -e_s - i_1 + \left(2\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + \left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) = 0 \\ -\left(\frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt}\right) + 2(i_1 - i_2) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3\frac{di_1}{dt} + 2\frac{di_2}{dt} + i_1 = e \\ \frac{di_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} - 2i_1 + 2i_2 = 0 \end{cases}$$

۸- در مدار ارائه شده در شکل (۴-۴۳)، معادلات گره را با استفاده از قانون KCL بیابید.



شکل ۴-۴۳ مدار الکتریکی با سلفهای تزویج

حل:

قبل از حل این مسئله باید گفت که سلفهای تزویج شده در کتاب با معادلات دیفرانسیل که در آن ولتاژهای سلفها براساس جریانهای سلف‌ها توصیف شده‌اند. ما می‌توان سلفهای تزویج شده را با معادلات انتگرالی هم توصیف کرد که در آن جریانهای سلفها براساس معادلات انتگرالی از ولتاژهای سلفها بیان می‌شوند.

در ضمن ماتریس ضرایب القای معکوس که Γ نامیده می‌شود برابر است با:

$$\Gamma = L^{-1} \Rightarrow \begin{bmatrix} \Gamma_{11} & \Gamma_{12} \\ \Gamma_{21} & \Gamma_{22} \end{bmatrix} = \frac{1}{\det L}\begin{bmatrix} L_{22} & -M \\ -M & L_{11} \end{bmatrix}$$

$$\det(L) = L_{11}L_{22} - M^2$$

$$i_{L_1}(t) = \Gamma_{11}\int_0^t v_{L_1}(\tau)d\tau + \Gamma_{12}\int_0^t v_{L_2}(\tau)d\tau + i_{L_1}(0)$$

$$i_{L_2}(t) = \Gamma_{21}\int_0^t v_{L_1}(\tau)d\tau + \Gamma_{22}\int_0^t v_{L_2}(\tau)d\tau + i_{L_2}(0)$$

حال با استفاده از نکته بالا و فرض اینکه سلفهای صورت مسئله جریان اولیه ندارند مسئله را حل می‌کنیم.

A در گره $KCL: \frac{v_1(t)}{1} + 2\frac{d(v_1(t) - v_2(t))}{dt} + i_1(t) = i_s(t)$

B در گره $KCL: \frac{v_2(t)}{1} + 2\frac{d(v_2(t) - v_1(t))}{dt} - i_2(t) = 0$

$$i_1(t) = \Gamma_{11}\int_0^t v_{L_1}(\tau)d\tau + \Gamma_{12}\int_0^t v_{L_2}(\tau)d\tau = \Gamma_{11}\int_0^t v_1(\tau)d\tau + \Gamma_{12}\int_0^t v_2(\tau)d\tau$$

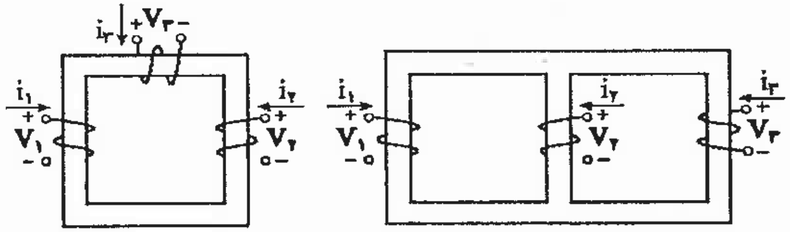
$$i_2(t) = \Gamma_{21}\int_0^t v_{L_1}(\tau)d\tau + \Gamma_{22}\int_0^t v_{L_2}(\tau)d\tau = \Gamma_{11}\int_0^t v_1(\tau)d\tau + \Gamma_{12}\int_0^t v_2(\tau)d\tau$$

$$L=\begin{bmatrix} ۲ & ۱ \\ ۱ & ۱ \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma = L^{-۱} = \frac{۱}{۲-۱}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ \\ -۱ & ۲ \end{bmatrix} \Rightarrow \Gamma = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & \frac{۲}{۲} \end{bmatrix}$$

$$۲\frac{dv_۱(t)}{dt} - ۲\frac{dv_۲(t)}{dt} + v_۱ + \frac{۱}{۲}\int_۰^t v_۱(\tau)d\tau + \frac{۱}{۲}\int_۰^t v_۲(\tau)d\tau = i_s(t)$$

$$-۲\frac{dv_۱(t)}{dt} + ۲\frac{dv_۲(t)}{dt} + \frac{v_۲}{۲} + \frac{۱}{۲}\int_۰^t v_۱(\tau)d\tau + \frac{۲}{۲}\int_۰^t v_۲(\tau)d\tau = ۰$$

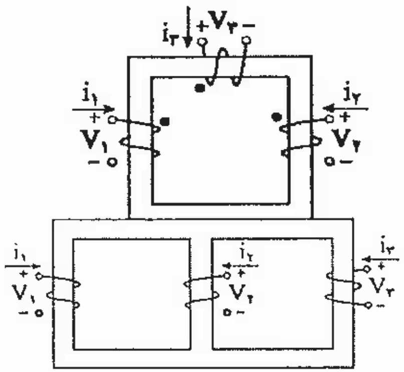
۹- در سلفهای تزویج ارائه شده در شکل (۴-۴۴) ابتدا نقطه‌های توپر را روی سیم‌پیچها، مشخص نموده، سپس معادلات ولتاژ را برای هریک از سیم‌پیچها بنویسید.



(الف) (ب)

شکل ٤-٤٤ سلفهای تزویج سه‌گانه

حل:



(ب)

$$V_۱ = L_{۱۱}\frac{di_۱}{dt} + L_{۱۲}\frac{di_۲}{dt} + L_{۱۳}\frac{di_۳}{dt}$$

$$V_۲ = L_{۲۱}\frac{di_۱}{dt} + L_{۲۲}\frac{di_۲}{dt} + L_{۲۳}\frac{di_۳}{dt}$$

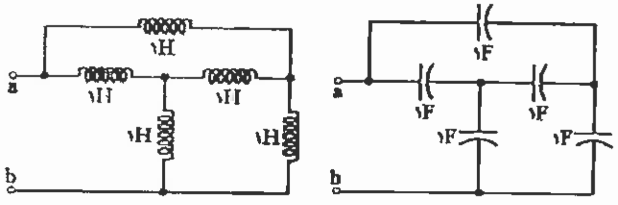
$$V_۳ = L_{۳۱}\frac{di_۱}{dt} + L_{۳۲}\frac{di_۲}{dt} + L_{۳۳}\frac{di_۳}{dt}$$

$$V_۱ = L_{۱۱}\frac{di_۱}{dt} + L_{۱۲}\frac{di_۲}{dt} - L_{۱۳}\frac{di_۳}{dt}$$

$$V_۲ = L_{۲۱}\frac{di_۱}{dt} + L_{۲۲}\frac{di_۲}{dt} - L_{۲۳}\frac{di_۳}{dt}$$

$$V_۳ = -L_{۳۱}\frac{di_۱}{dt} - L_{۳۲}\frac{di_۲}{dt} + L_{۳۳}\frac{di_۳}{dt}$$

۱۰- با استفاده از خاصیت تبدیل ستاره به مثلث و بالعکس، دو مدار سلفی و خازنی ارائه شده در شکل (۴-۴۵) را ساده کنید.



(الف) (ب)

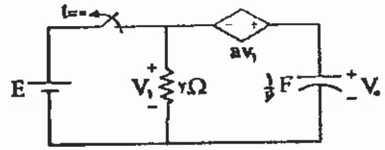
شکل ٤-٤٥ دو مدار الکتریکی سلفی و خازنی

حل:

پاسخ این سؤال با توجه به مطالب کتاب در این فصل امکان‌پذیر نیست. در پایان فصل (۱۰) این سؤال را بطور مفصل حل خواهیم کرد.

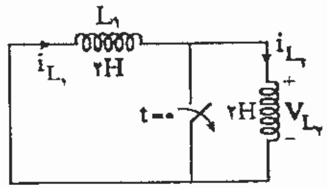
«سؤالات چهارگزینه‌ای فصل چهارم»

۱- در مدار نشان داده شده کلید را در $t=0$ باز می‌کنیم α عددی ثابت است. مقدار $\left.\frac{dv_C}{dt}\right|_{t=0^+}$ است با: (مهندسی کامپیوتر ۸۳)



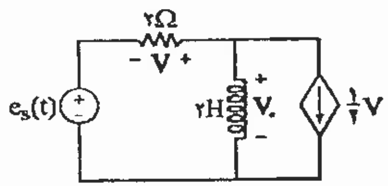
الف) صفر
ب) $-2E$
ج) $-6E$
د) $-2\alpha E$

۲- قبل از باز کردن کلید، سلف L_1 دارای جریان اولیه I_0 است. در $t=0$ کلید را باز می‌کنیم. ولتاژ سلف L_2، $V_{L_2}(t)$ پس از باز کردن کلید برابر است با: (مهندسی کامپیوتر ۸۳)



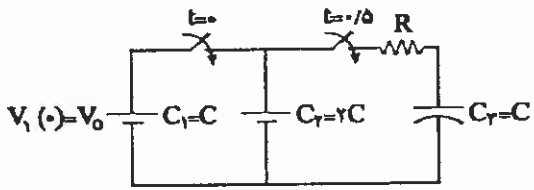
الف) $-I_0\delta(t)$
ب) $\frac{I_0}{2}\delta$
ج) $2I_0\delta(t)$
د) $I_0\delta(t)$

۳- پاس ضربه ولتاژ V_0 خروجی دو سر سلف کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۳)



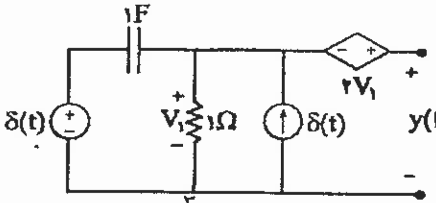
الف) $-e^{-\frac{t}{2}}u(t)$
ب) $-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$
ج) $\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$
د) $\frac{1}{2}\delta(t)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$

۴- در مدار شکل مقابل تنها خازن C_1 دارای ولتاژ اولیه $V_1(0^-)=V_0$ است پس از گذشت مدت زمان طولانی نهایتاً چقدر انرژی در مدار باقی می‌ماند. (مهندسی کامپیوتر ۸۲)



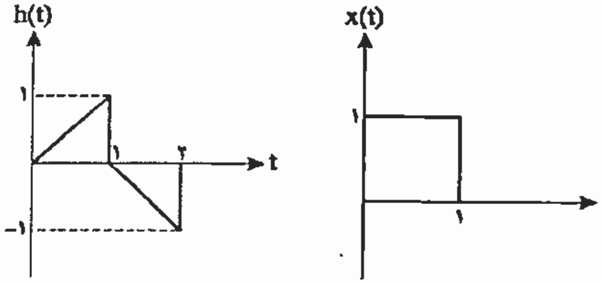
الف) $\frac{1}{8}CV_0^2$
ب) $\frac{1}{2}CV_0^2$
ج) $\frac{1}{4}CV_0^2$
د) صفر

۵- پاسخ $y(t)$ در مدار مقابل از کدام رابطه محاسبه می‌شود؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۱)



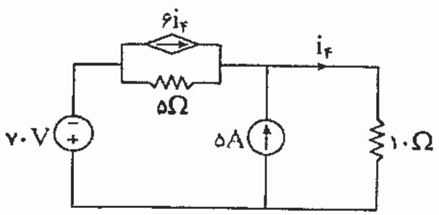
الف) $2\delta(t)$
ب) $2u(t)$
ج) $2e^{-t}u(t)$
د) $2e^{-t}u(t)+\delta(t)$

۶- پاسخ ضربه سیستمی، $h(t)$، بصورت مقابل است، پاسخ آنها به ورودی $x(t)$ در فاصله $1<t<\frac{3}{2}$ چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۱)



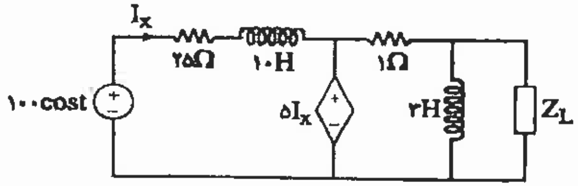
الف) $y(t)=-t^2-2t+\frac{1}{2}$
ب) $y(t)=-t^2+2t-\frac{1}{2}$
ج) $y(t)=-t^2-2t-\frac{1}{2}$
د) $y(t)=t^2+2t-\frac{1}{2}$

۷- با توجه به شکل مقابل توان منبع 5A چند وات (W) است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۱)



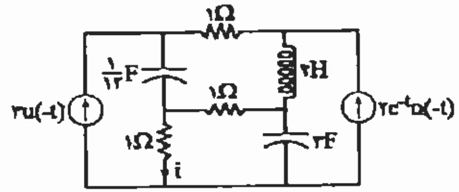
الف) ۲۰
ب) ۳۰-
ج) ۱۲۰-
د) ۱۵۰-

۸- در مدار شکل مقابل امپدانس Z_L را چگونه انتخاب کنیم، تا توان متوسط انتقالی به آن حداکثر گردد؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۰)



الف) $1-j3$
ب) $0/9-j0/3$
ج) $0/9+j3$
د) $0/27-j2/86$

۹- در مدار زیر جریان $i(t)$ در لحظه $t=0^+$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۰)



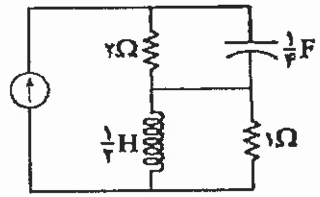
الف) ۳

ب) $\frac{7}{2}$

ج) ۵

د) $\frac{5}{2}$

۱۰- پاسخ پله مدار شکل مقابل برای خروجی $V_o(t)$ کدام گزینه است؟ (مهندسی کامپیوتر ۷۹)



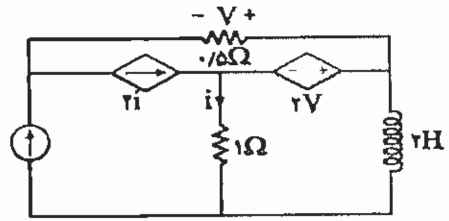
الف) $\left(2-e^{-2t}\right)u(t)$

ب) $\left(\frac{3}{2}-\frac{1}{2}e^{-2t}\right)u(t)$

ج) $\left(2-\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$

د) $\left(1+\frac{1}{2}e^{-2t}-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}\right)u(t)$

۱۱- در مدار شکل مقابل پاسخ پله خروجی $v(t)$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ۷۸)



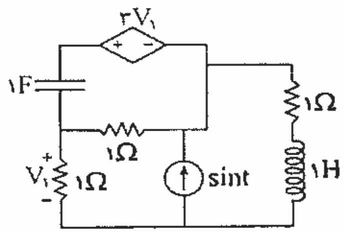
الف) $\frac{1}{3}\left(4e^{-1.5t}-1\right)u(t)$

ب) $\frac{1}{3}\left(1+2e^{-1.5t}\right)u(t)$

ج) $\frac{1}{6}\left(1-4e^{-1.5t}\right)u(t)$

د) $\frac{1}{6}\left(4e^{-1.5t}-1\right)u(t)$

۱۲- منبع وابسته در مدار شکل مقابل، به طور متوسط چقدر توان تولید می‌کند. (مهندسی کامپیوتر ۷۸)



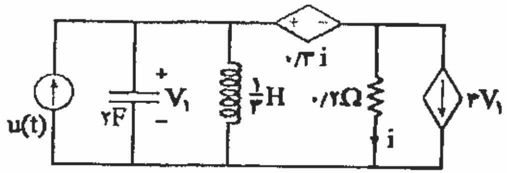
الف) $2W$

ب) $2\sqrt{2}W$

ج) $6W$

د) $6\sqrt{2}W$

۱۳- پاسخ پله ولتاژ V_1 دو سر خازن در مدار شکل مقابل چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ۷۷)



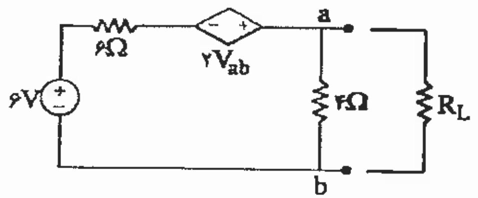
الف) $\frac{1}{2}\left(e^{-t}-e^{-1.5t}\right)u(t)$

ب) $\frac{1}{2}\left(e^{-1.5t}-e^{-t}\right)u(t)$

ج) $\left(e^{-1.5t}-e^{-t}\right)u(t)$

د) $\left(e^{-t}-e^{-1.5t}\right)u(t)$

۱۴- در شکل زیر R_L چقدر بایستی باشد تا ماکزیمم توان به آن منتقل شود. (نزدیکترین مقدار را علامت بزنید.) (مهندسی کامپیوتر آزاد ۸۰)



الف) $R_L=6\Omega$

ب) $R_L=18\Omega$

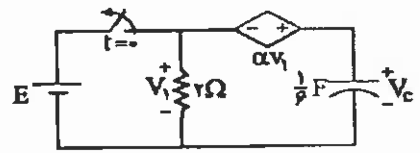
ج) $R_L=12\Omega$

د) $R_L=8\Omega$

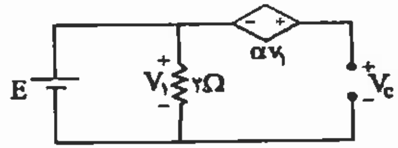
«پاسخ سؤالات چهار گزینه‌ای فصل چهارم»

۱- گزینه « ب» صحیح است.

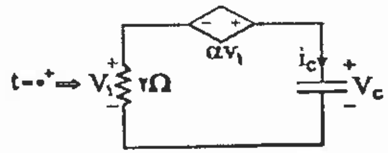
چون مدار به حالت دائمی رسیده است، مدار به صورت زیر می‌باشد.



خازن در مدار فوق در حالت دائمی مدار باز عمل نموده و ولتاژ دو سر خازن بصورت زیر می‌باشد:



در لحظه $t=0^+$ کلید باز می‌شود، درحالیکه ولتاژ دو سر خازن نمی‌تواند به‌طور ناگهانی پرش داشته باشد:



$$V_C(0^-)=(1+\alpha)V_1=(1+\alpha)E=V_C(0^+)$$

با نوشتن KVL در مدار فوق در لحظه $t=0^+$ داریم:

$$V_C-V_1-\alpha V_1=0 \Rightarrow V_1=\frac{V_C}{1+\alpha} \Rightarrow V_1(0^+)=\frac{V_C(0^+)}{1+\alpha}=E \quad (1)$$

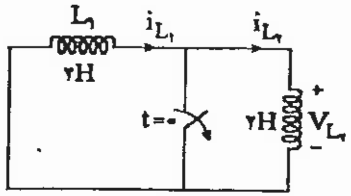
از طرفی داریم:

$$V_1=-2i_C \Rightarrow i_C=\frac{V_1}{-2} \Rightarrow C\frac{dV_C}{dt}=\frac{V_1}{-2} \Rightarrow \frac{1}{6}\frac{dV_C}{dt}=-\frac{1}{2}V_1$$

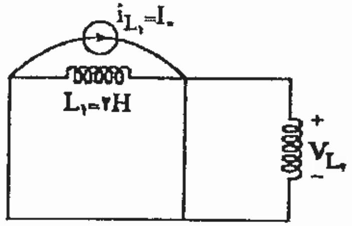
$$\Rightarrow \frac{dV_C}{dt}=-3V_1 \Rightarrow \frac{dV_C(0^+)}{dt}=\frac{dV_C}{dt}\Big|_{t=0^+}=-3V_1(0^+)$$

$$(1),(2) \Rightarrow \frac{dV_C}{dt}\Big|_{t=0^+}=-3(E)$$

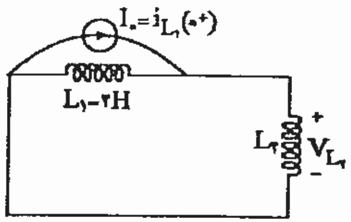
۲- گزینه « د » صحیح است.



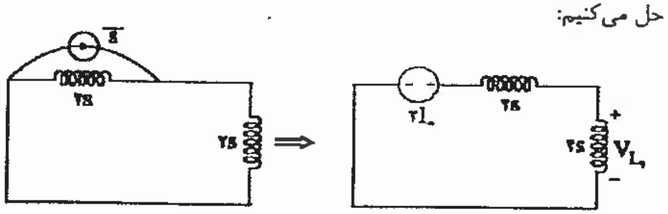
در لحظه $t=0^-$ مدار به صورت زیر می‌باشد:



از لحظه $t=0^+$ به بعد مدار به صورت زیر می‌باشد:



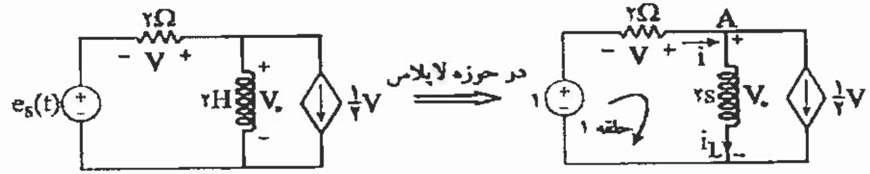
چون جریان سلف نمی‌تواند به‌طور ناگهانی پرش داشته باشد پس: $i_{L_1}(0^+)=i_L(0^-)=I_0$ مدار فوق در حوزه لاپلاس حل می‌کنیم:



$$V_{L_2}=\frac{2s}{2s+2s}(2I_0) \Rightarrow V_{L_2}=\frac{2s}{4s}(2I_0)=I_0$$

$$V_{L_2}(s)=I_0 \Rightarrow V_{L_2}(t)=I_0\delta(t)$$

۳- گزینه «ج» صحیح است.



(۱) $\Rightarrow -1 - V + V_o = 0 \Rightarrow V_o = 1 + V$ با نوشتن KVL در حلقه ۱

(۲) $i = -\frac{V}{2}$

(۳) $i_L = \frac{V_o}{2s}$

(۴) $\Rightarrow i = i_L + \frac{1}{2}V$ با نوشتن KCL در نقطه A

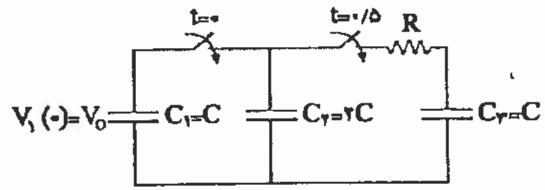
(۵) $(2),(3),(4) \Rightarrow -\frac{V}{2} = \frac{V_o}{2s} + \frac{1}{2}V \Rightarrow -V = \frac{V_o}{2s}$

$$(1),(5) \Rightarrow V_o = -1 - \frac{V_o}{2s} \Rightarrow V_o\left(1+\frac{1}{2s}\right) = 1 \Rightarrow V_o = \frac{2s}{1+2s}$$

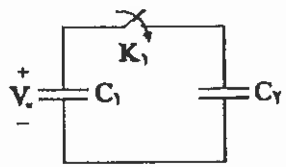
$$V_o(s) = \frac{2s+1-1}{1+2s} = 1 - \frac{1}{1+2s} = 1 - \frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{1}{2}}$$

$$\Rightarrow V_o(t) = \delta(t) - \frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$$

۴- گزینه «الف» صحیح است.



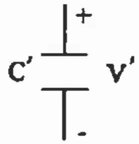
در لحظه $t = 0$ کلید شماره ۱ بسته می‌شود:



$V_1(0^-) = V_o \qquad C_1 = C$

$V_2(0^-) = 0 \qquad C_2 = 2C$

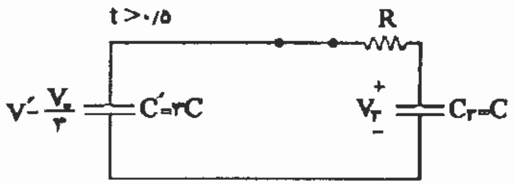
مدار معادل، در فاصله زمانی $0 < t < 0/5$ بصورت زیر می‌باشد:



$$V' = \frac{C_1V_1(0^-) + C_2V_2(0^-)}{C'} \quad , \quad C' = C_1 + C_2 = 3C$$

$$V' = \frac{CV_o + 2C \times 0}{3C} = \frac{V_o}{3}$$

در لحظه $t = 0/5$ کلید شماره ۲ بسته می‌شود: به دلیل اینکه مدار مدت زیادی کار می‌کند، مدار به حالت دائمی می‌رسد در نتیجه تخلیه کامل صورت می‌گیرد (جریان در مدار صفر می‌شود). اما با وجود تخلیه کامل هنوز خازنها به دلیل وجود بار (اصل بقای بار) دارای انرژی می‌باشند.



$$\left.\begin{array}{l} C' = 3C \ , \ C_3 = C \\ V'(0/5) = \frac{V_o}{3} \ , \ V_3(0/5) = 0 \end{array}\right\} \Rightarrow t = 0 \quad \text{مبدأ زمان} \left\{\begin{array}{l} V'(0^-) = \frac{V_o}{3} \\ V_3(0^-) = 0 \end{array}\right.$$

$$C'' = C_3 + C' = 4C$$

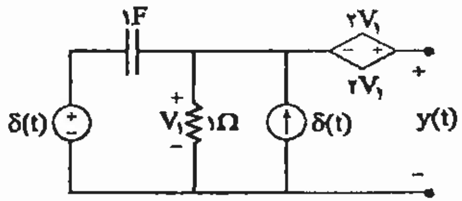
$$V'' = \frac{C'V'(0^-) + C_3V_3(0^-)}{C''} = \frac{3C\left(\frac{V_o}{3}\right) + C(0)}{4C} = \frac{V_o}{4}$$

$$W = \frac{1}{2}C''V''^2 = \frac{1}{2}(4C)\left(\frac{V_o}{4}\right)^2 = \frac{CV_o^2}{8}$$

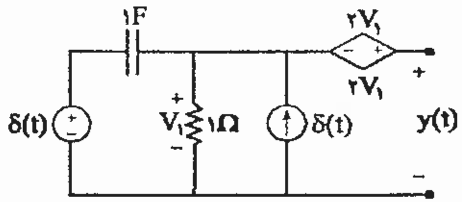
مقدار نهایی انرژی در خازن معادل به $\frac{CV_o^2}{8}$ می‌رسد و انرژی اولیه سیستم برابر است با:

$$W_1 = \frac{1}{2}C_1V_1^2(0^-) + \frac{1}{2}C_2V_2^2(0^-) + \frac{1}{2}C_3V_3^2(0^-) = \frac{CV_o^2}{2}$$

۵- گزینه « الف» صحیح است.



برای حل چنین مداراتی که دارای منبع ضربه هستند بهتر است از تبدیل لاپلاس استفاده شود:



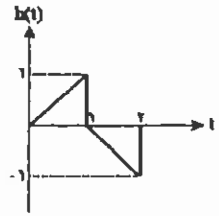
در حلقه ۱ $KVL: y(s) = 2V_1 + V_1 = 3V_1$

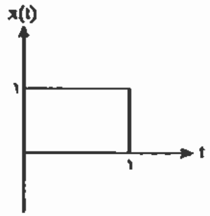
$$i = \frac{1-V_1}{\frac{1}{s}} = s(1-V_1)$$

با نوشتن معادلهٔ ولتاژ برای مقاومت ۱ اهمی $V_1 = (1+i) = 1+s-sV_1 \Rightarrow (1+s)V_1 = 1+s \Rightarrow V_1 = 1$

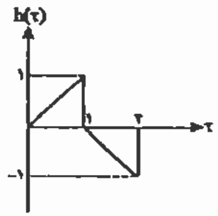
$\Rightarrow y(s) = 3V_1 = 3 \Rightarrow y(t) = 3\delta(t)$

۶- گزینه « ب » صحیح است.

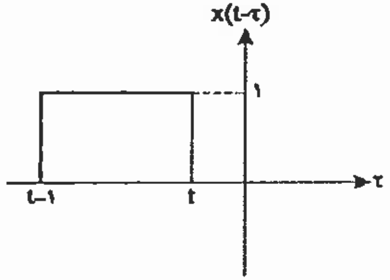




$$y(t) = x(t)*h(t) = h(t)*x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$



$$h(\tau) = \begin{cases} \tau & 0<\tau<1 \\ -\tau+1 & 1<\tau<2 \\ 0 & \tau<2 \end{cases}$$

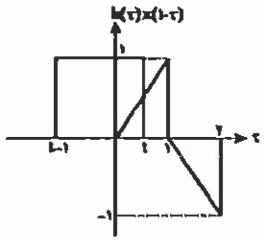


برای $t \le 0$ داریم:

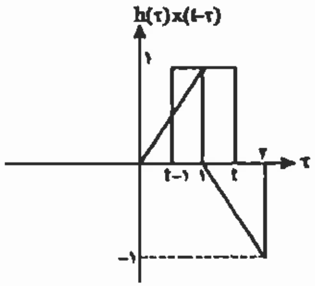
$y(t) = 0$

برای $0 < t \le 1$ داریم:

$$y(t) = \int_0^t x(t-\tau)h(\tau)d\tau$$
$$= \int_0^t 1(\tau)d\tau = \int_0^t \tau d\tau = \frac{\tau^2}{2}\Big|_0^t = \frac{t^2}{2}$$

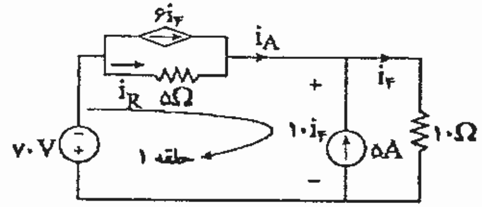


برای $1 < t \le 2$ داریم:



$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-\tau)h(\tau)d\tau = \int_{t-1}^{1} 1(\tau)d\tau + \int_1^t 1(-\tau+1)d\tau = \int_{t-1}^{1}\tau d\tau + \int_1^t(-\tau+1)d\tau$$
$$= \frac{\tau^2}{2}\Big|_{t-1}^{1} + \left(-\frac{\tau^2}{2}+\tau\right)\Big|_1^t = \frac{1}{2} - \frac{1}{2}(t-1)^2 + \left[-\frac{t^2}{2}+t\right] - \left[-\frac{1}{2}+1\right]$$
$$= -t^2 + 2t - \frac{1}{2}$$
$$\Rightarrow 1<t<2; y(t) = -t^2+2t-\frac{1}{2} \Rightarrow 1<t<\frac{3}{2}; y(t) = -t^2+2t-\frac{1}{2}$$

۷- گزینه « د » صحیح است.



$$i_A = i_4 - 5 \qquad i_R = i_A - 6i_4 = i_4 - 5 - 6i_4 = -5(i_4+1)$$

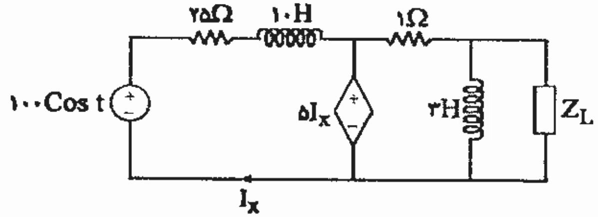
kvl در حلقه ۱: $70 + 5\left[-5(i_4+1)\right] + 10i_4 = 0 \Rightarrow 70 - 25i_4 - 25 + 10i_4 = 0$

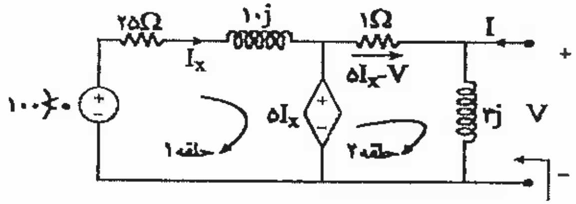
$$\Rightarrow 15i_4 = 45 \Rightarrow i_4 = 3A$$

ولتاژ دو سر منبع جریان ۵ آمپری $= 10i_4 = 20V$

$$p = +30(-5) = -150W$$

۸- گزینه « ب » صحیح است.





در حلقه ۱: $I_x = \dfrac{100\angle 0 - 5I_x}{25 + j10} \Rightarrow (25 + j10)I_x = 100\angle 0 - 5I_x$

$$\Rightarrow (25 + j10 + 5)I_x = 100\angle 0 \Rightarrow (30 + j10)I_x = 100\angle 0 \Rightarrow I_x = \frac{10\angle 0}{3+j}$$

$$\Rightarrow I_x = \frac{10}{9+1}(3-j) = 3 - j$$

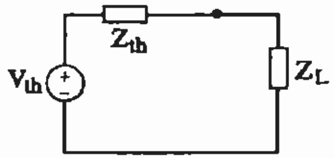
در حلقه ۲ $V = 3j(5I_x - V + I) = 15jI_x - 3jV + 3jI \Rightarrow V(1+3j) = 15jI_x + 3jI$

$$V(1+3j) = 15j(3-j) + 3jI \Rightarrow V(1+3j) = 45j + 15 + 3jI = 3jI + 15(1+3j)$$

$$V = 15 + \frac{3j}{1+3j}I \Rightarrow V = 15 + \frac{3j(1-3j)I}{1+9} = 15\frac{3j}{10}(1-3j)I = 15 + 0/3j(1-3j)I$$

$$= 15 + (j0/3 + 0/9)I$$

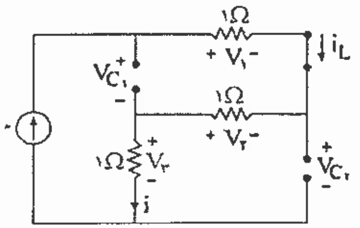
$$V = (0/9 + j0/3)I + 15$$



$$\left.\begin{array}{l} V_{th} = 15V \\ Z_{th} = (0/9 + j0/3) \end{array}\right\} \xrightarrow{\text{طبق انتقال ماکزیمم توان}} Z_L = Z_{th}^* = (0/9 + j0/3)^* = 0/9 - j0/3$$

۹- گزینه « د » صحیح است.

از لحظه $-\infty$ تا 0^- مدار کار کرده و در لحظه $t = 0^-$ به حالت تعادل رسیده، در نتیجه داریم: (در حالت دائمی خازنها مدار باز و سلفها اتصال کوتاه می‌باشند)



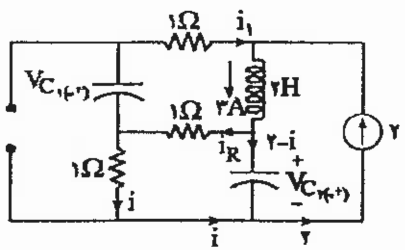
$$V_1 = V_2 = V_3 = 3^{volt}$$

$$V_{c2} = V_2 + V_3 = 6V \quad , \quad i = 3A \Rightarrow V_{c2}(0^-) = 6^V$$

$$i_L(0^-) = 3A \quad , \quad V_{c1} = V_1 + V_2 \Rightarrow V_{c1}(0^-) = 6^V$$

در لحظه $t = 0^+$ مدار به شکل زیر درمی‌آید: (منبع $3u(-t)$ مدار باز می‌شود چون مقدار جریان برای $t > 0$ صفر می‌باشد).

جریان سلف و ولتاژ خازن نمی‌تواند پرش داشته باشد:



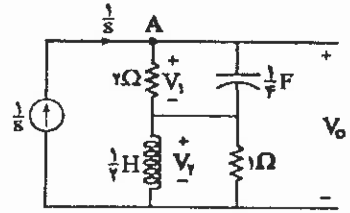
$$i_L(0^-) = i_L(0^+) = 3A \Rightarrow i_1 = 1A$$

$$V_{c1}(0^+) = V_{c2}(0^+) = 6volt$$

$$i_{c1}(0^+) = 1A \ , \ i_R = 3 - 2 + i = 1 + i$$

$$V_{c2}(0^+) = (1+i) + i = 2i + 1 = 6 \Rightarrow i(0^+) = \frac{5}{2}A$$

۱۰- گزینه « الف » صحیح است.



$$V_1 + V_2 = V_o \qquad (1)$$

جریان در مقاومت ۲ اهمی $= \frac{V_1}{2}$، جریان در مقاومت ۶ اهمی $= V_2$

$$i_C = \frac{1}{s} - \frac{V_1}{2}, i_L = \frac{1}{s} - V_2 \quad (2)$$

$$\left(\frac{1}{s} - \frac{V_1}{2}\right)\left(\frac{4}{s}\right) + \left(\frac{1}{s} - V_2\right)\frac{s}{2} = V_o$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 = V_o \\ \left(\frac{4}{s^2} + \frac{1}{2}\right) - \frac{2}{s}V_1 - \frac{s}{2}V_2 = V_o \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} V_1 + V_2 = V_o \\ -\frac{2}{s}V_1 - \frac{s}{2}V_2 = V_o - \left(\frac{4}{s^2} + \frac{1}{2}\right) \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} V_1 = \frac{s}{s-2}V_o + \frac{8+s^2}{s\left(4-s^2\right)} \\ V_2 = \frac{2}{2-s}V_o - \frac{\left(8+s^2\right)}{s\left(4-s^2\right)} \quad (3) \end{cases}$$

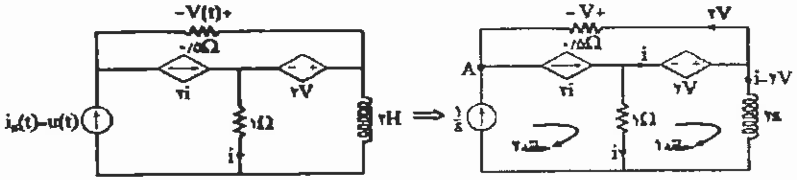
$$\left.\begin{aligned} &A \text{ در } kcl: \frac{1}{s} = \frac{V_1}{2} + V_1\frac{s}{4} = V_1\left(\frac{2+s}{4}\right) \Rightarrow V_1 = \frac{4}{s(s+2)} \\ &\frac{1}{s} = V_2 + 2\frac{V_2}{s} = \left(\frac{s+2}{2}\right)V_2 \Rightarrow \frac{1}{s+2} \end{aligned}\right\} (4)$$

$$(3),(4)\frac{1}{s+2} = \frac{2}{2-s}V_o - \frac{8+s^2}{s\left(4-s^2\right)} \Rightarrow V_o = \frac{2-s}{s(2+s)} + \frac{8+s^2}{2s(2+s)} =$$

$$\frac{2s - s^2 + 8 + s^2}{2s(s+2)} = \frac{2s+8}{2s(s+2)}$$

$$V_o = \frac{s+4}{s(s+2)} = \frac{2}{s} - \frac{1}{s+2} \Rightarrow V_o(t) = \left(2 - e^{-2t}\right)u(t)$$

۱۱- گزینه « د » صحیح است.



درگره A kcl می‌نویسیم $\Rightarrow 2v + \frac{1}{s} = 2i \quad (1)$

در حلقه ۱ $kvl \Rightarrow -i - 2v + (i - 2v)2s = 0 \Rightarrow (2s-1)i = 2v(2s+1) \quad (2)$

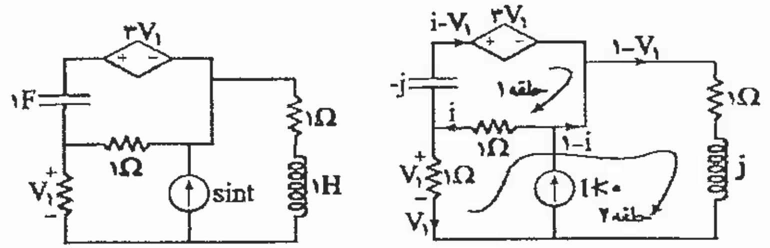
$$(1),(2)\ 2v + \frac{1}{s} = \frac{4v(2s+1)}{2s-1} \Rightarrow 2v(2s-1) + \frac{(2s-1)}{s} = 4v(2s+1)$$

$$\Rightarrow 2v(4s+1-2s+1) = \frac{2s-1}{s} \Rightarrow 2v(2s+3) = \frac{2s-1}{s}$$

$$\Rightarrow v = \frac{2s-1}{2s(2s+3)} = -\frac{1}{6}\left(\frac{1}{s}\right) + \frac{2}{3}\left(\frac{1}{s+\frac{3}{2}}\right) \Rightarrow v(t) = \left(\frac{-1}{6} + \frac{2}{3}e^{-\frac{3}{2}t}\right)u(t)$$

$$\Rightarrow v(t) = \frac{1}{6}\left[4e^{-\frac{3}{2}t} - 1\right]u(t) = \frac{1}{6}\left[4e^{-1/5t} - 1\right]u(t)$$

۱۲- گزینه « الف » صحیح است.



در حلقه ۱ می‌نویسیم $kvl \Rightarrow i - j(i - v_1) + 3v_1 = 0 \Rightarrow i(1-j) + v_1(3+j) = 0 \Rightarrow i = \frac{3+j}{j-1}v_1 \ (1)$

در حلقه ۲ $kvl \Rightarrow -v_1 - i + (1+j)(1-v_1) = 0 \Rightarrow -v_1(1+1+j) - i + 1 + j = 0$

$$v_1(2+j) = (1+j) - i \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow v_1(2+j) = (1+j) - \frac{2+j}{j-1}v_1 \Rightarrow v_1\left(2+j+\frac{2+j}{j-1}\right) = 1+j$$

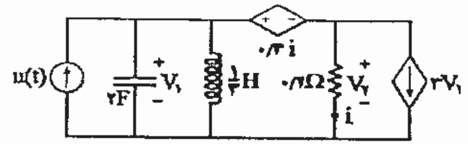
$$v_1 = -j \qquad (3)$$

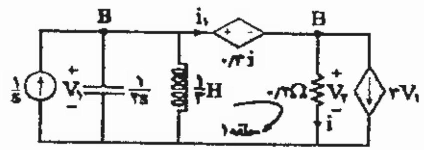
$$(3),(1) \Rightarrow i = \frac{2+j}{j-1}\times(-j) = \frac{1-2j}{j-1}$$

توان مختلط $= s = vi = (2v_2)(i^*) = (-2j)\left(\frac{1+2j}{-1-j}\right) = \frac{9-j3}{-1-j} = \frac{-9+3j}{1+j} = -3+j6 = P+jQ$

$\Rightarrow P = -3W$, $Q = 6VAR$ $\Rightarrow$ متوسط توان تولیدی $= |P_{av}| = 3W$

۱۳- گزینه « د » صحیح است.





$$v_2 = 0/2i$$

A در گره kcl: $i_1 + 3v_1 \qquad (1)$

B در گره kcl: $\frac{1}{s} = 2sv_1 + \frac{3v_1}{s} + i_1 = v_1\left(2s+\frac{3}{s}\right) + i_1 = v_1\left(\frac{2s^2+3}{s}\right)i_1 \quad (2)$

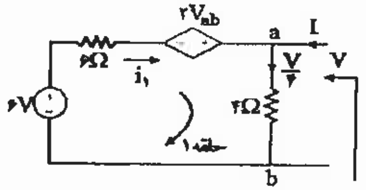
در حلقه ۱ kvl: $0/3i + 0/2i = v_1 \Rightarrow v_1 = 0/5j$

$$(1),(3) \Rightarrow i_1 = 2v_1 + 3v_1 = 5v_1 \qquad (4)$$

$$(2),(4) \Rightarrow \frac{1}{s} = v_1\left(\frac{2s^2+3}{s}\right) + 5v_1 = \frac{2s^2+3+5s}{s}v_1$$

$$v_1 = \frac{1}{2s^2+5s+3} = \frac{1}{s+1} - \frac{1}{s+\frac{3}{2}} \Rightarrow v_1(t) = \left(e^{-t} - e^{-\frac{3}{2}t}\right)u(t)$$

۱۴- گزینه « ج » صحیح است.



kvl در حلقه ۱:

$$6i_1 - 2v_{ab} + v - 6 = 0$$

$$6i_1 - 2v + v - 6 = 0 \Rightarrow v = 6i_1 - 6 \quad (1)$$

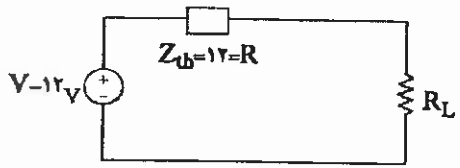
kcl در نقطه a:

$$i_1 + I = \frac{v}{4} \Rightarrow i_1 = \frac{v}{4} - I \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow v = 6\left(\frac{v}{4} - I\right) - 6 = \frac{3}{2}v - 6I - 6$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2}v = 6I + 6 \Rightarrow v = 12I + 12$$

$$Z_{th} = Z_L^* \Rightarrow R_L = 12\Omega$$



یادداشت

فصل پنجم

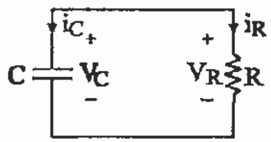
مدارهای الکتریکی مرتبه اول

۵-۱ مدارات مرتبه اول

مدارات مرتبه اول شامل مقاومت و خازن یا مقاومت و سلف می‌باشد.

الف) پاسخ ورودی صفر

مدار RC مرتبه اول بصورت زیر در نظر بگیرید:



شکل ۵-۱ مدار مرتبه اول RC

با فرض اینکه ولتاژ اولیه خازن v_0 باشد معادله ولتاژ و جریان در خازن و مقاومت بصورت زیر می‌باشد:

$$v_R(t)=v_0 e^{-\frac{t}{RC}} \quad t\geq 0 \qquad (۱-۵)$$

$$i_R(t)=\frac{v_0}{R}e^{-\frac{t}{RC}} \quad t\geq 0 \qquad (۲-۵)$$

لازم به ذکر است معادلات بالا از حل معادلات زیر بدست می‌آیند:

$$C\frac{dv_c}{dt}+\frac{v_c}{R}=0 \quad , \quad v_c(0)=v_0 \qquad (۳-۵)$$

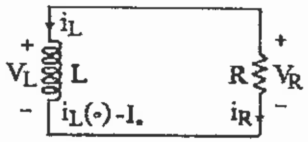
$$i_c=-i_R=-\frac{v_R}{R}=-\frac{v_c}{R}=C\frac{dv_c}{dt} \quad , \quad v_c(0)=v_0 \qquad (۴-۵)$$

در مدارات مرتبه اول منحنیهای مربوط به ولتاژ و جریان مقاومت و خازن مربوطه بصورت نمایی بوده، که این منحنیها با دو عدد مشخص می‌شوند: عرض منحنی در زمان مشخص $(t=t_1)$ و ثابت زمانی (τ) که رابطه کلی این منحنی بصورت $y(t)=y(0)e^{-\frac{t}{\tau}}$ می‌باشد.

لازم به ذکر است برای چنین منحنیهای نمایی با مشخصه $y(t)$، در لحظه $t=\tau$ (در زمان یک ثابت زمانی) منحنی نمایی تقریباً به ۳۸ درصد مقدار اولیه خود و در زمان ۴ برابر ثابت زمانی به مقدار ۲ درصد مقدار اولیه خود می‌رسد و واحد ثابت زمانی $\tau=RC$، ثانیه می‌باشد.

پاسخ ورودی صفر، به پاسخ شبکه‌ای برمی‌گردد که در آن شبکه هیچگونه ورودی نداشته باشد و پاسخ ورودی صفر به شرایط اولیه عناصر مدار و مشخصات مدار بستگی دارد و نتایج بدست آمده برای جریان و ولتاژ خازن و مقاومت در مدار بالایی، پاسخ ورودی صفر می‌باشد به دلیل اینکه هیچگونه ورودی وجود ندارد، تنها شرط اولیه روی خازن (v_0) باعث تحریک مدار می‌شود.

نوع دیگر مدار مرتبطه اول مدار RL می‌باشد که پاسخ ورودی صفر این مدار بصورت زیر می‌باشد. (شرط اولیه سلف $i_L(0)=I_0$ می‌باشد).



شکل ۵-۲ مدار مرتبه اول RL

معادلات مربوط به این مدار بصورت زیر می‌باشد:

$$L\frac{di_L}{dt}+Ri_L=0 \qquad t\ge 0 \quad , \quad i_L(0)=I_0 \tag{۵-۵}$$

$$v_l=L\frac{di}{dt} \tag{۶-۵}$$

$$v_R=Ri_R \tag{۷-۵}$$

$$\Rightarrow i_L(t)=I_0e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t\ge 0 \tag{۸-۵}$$

$$\text{ثابت زمانی مدار}=\tau=\frac{L}{R} \tag{۹-۵}$$

$$i_R=-i_L(t)=-I_0e^{-\frac{R}{L}t} \qquad t\ge 0 \tag{۱۰-۵}$$

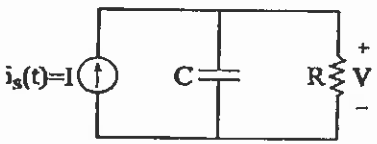
$$v_R=-I_0Re^{-\frac{R}{L}t} \tag{۱۱-۵}$$

نکته: برای مدارهای مرتبه اول خطی تغییرناپذیر با زمان، پاسخ ورودی صفر که در فاصله زمانی $0\le t<\infty$ تعریف می‌شود یک تابع خطی از حالت اولیه می‌باشد.

نکته: برای مدارهای مرتبه اول خطی تغییرناپذیر با زمان، پاسخ ورودی صفر دارای خاصیت همگنی و جمع‌پذیری می‌باشد. اما این خاصیت برای مدارهای مرتبه اول غیرخطی تغییرناپذیر با زمان برقرار نمی‌باشد. (برای مدارهای غیرخطی پاسخ ورودی صفر تابع خطی حالت اولیه نیست).

ب) پاسخ حالت صفر

برای مدار زیر با منبع جریان ثابت I (با شرایط اولیه صفر = پاسخ حالت صفر) معادلات مربوطه بصورت زیر می‌باشد:



شکل ۵-۳ مدار خطی تغییرناپذیر با زمان با ورودی I و پاسخ V

$$C\frac{dv}{dt}+\frac{v}{R}=I\,(t\ge 0) \tag{۱۲-۵}$$

$$v_c(0)=0 \tag{۱۳-۵}$$

$$v(0^+)=v(0^-)=0 \tag{۱۴-۵}$$

$$\left.\frac{dv}{dt}\right|_{t=0^+}=\frac{I}{C} \tag{۱۵-۵}$$

زمانی که مدار به حالت دائمی می‌رسد، خازن مدار باز عمل کرده و ولتاژ دو سر خازن به مقدار ثابتی می‌رسد:

$$v_c(\infty)=RI=\text{ثابت} \tag{۱۶-۵}$$

جواب کلی یک مدار برای مداری که دارای یک معادله دیفرانسیل خطی و ناهمگن می‌باشد، می‌توان بصورت زیر نوشت:

$$v=v_h+v_p \tag{۱۷-۵}$$

v_h، جواب معادله دیفرانسیل همگن و v_p جواب خاص معادله دیفرانسیل ناهمگن می‌باشد و v_p به ورودی مدار بستگی دارد که برای مدار فوق جواب همگن و خاص بصورت زیر می‌باشد:

$$v = v_h + v_p = ke^{-\frac{t}{RC}} + RI \qquad (۱۸-۵)$$

k به مقدار اولیه مدار و ورودی بستگی دارد.

اگر شرط اولیه مدار صفر باشد (پاسخ حالت صفر)، پاسخ مدار بصورت زیر می‌باشد:

$$v(t) = RI\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad t \ge 0 \qquad (۱۹-۵)$$

در مدار فوق اگر ورودی (منبع جریان) سینوسی باشد، v_p مدار، سینوسی با همان فرکانس می‌باشد که می‌تواند به صورت کلی تعریف شود:

$$i_s(t) = K\cos(\omega t+\theta) \qquad (۲۰-۵)$$

$$v_p(t) = A\cos(\omega t+\phi) \qquad (۲۱-۵)$$

$$A = \frac{K}{\sqrt{\left(\frac{1}{R}\right)^2+(\omega C)^2}} \ , \quad \phi = \theta - tg^{-1}\omega RC \ , \quad 0^\circ < tg^{-1}\omega RC < 90^\circ \qquad (۲۲-۵)$$

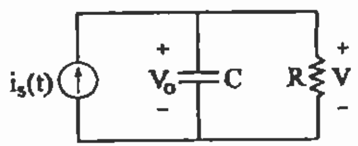
$$\Rightarrow v(t) = -A\cos\phi \, e^{-\frac{t}{RC}} + A\cos(\omega t+\phi) \quad t \ge 0 \qquad (۲۳-۵)$$

نکته: در حالت کلی اگر همه شرط‌های اولیه در مدار صفر باشند، مدار در حالت صفر می‌باشد و در محاسبه پاسخ حالت صفر هدف اصلی، رفتار پاسخ برای $t \ge t_0$ می‌باشد (t_0 زمان اعمال ورودی به مدار می‌باشد).

تبصره: اگر ولتاژ دو سر همه خازنها و جریان اولیه داخل همه سلفهای یک مدار خطی تغییرناپذیر با زمان برابر صفر باشد، مدار در حالت صفر خواهد بود.

ج) پاسخ کامل

پاسخ کامل یک مدار شامل پاسخ ورودی صفر (حالت اولیه مخالف صفر) و پاسخ حالت صفر (شرایط اولیه صفر)، می‌شود، که پاسخ ورودی صفر و پاسخ حالت صفر حالتهای خاص پاسخ کامل هستند، برای مدار زیر پاسخ کامل v(t) بصورت زیر می‌باشد:



شکل ۵-۴ مدار خطی تغییرناپذیر با زمان مرتبه اول با ورودی $i_s(t) = I$ و شرط اولیه ولتاژ خازن V_0 و پاسخ V

$$v(t) = V_0 e^{-\frac{t}{RC}} + RI\left(1-e^{-\frac{t}{RC}}\right) \quad t \ge 0$$

پاسخ حالت صفر + پاسخ ورودی صفر =

$$= (V_0 - RI)e^{-\frac{t}{RC}} + RI \quad t \ge 0 \qquad (۲۴-۵)$$

نکته: حالت گذرا ناشی از شرایط اولیه در مدار و ورودی به مدار می‌باشد و حالت دائمی ناشی از ورودی می‌باشد.

نکته: اگر ورودی ثابت باشد پاسخ حالت دائم مقدار ثابت خواهد بود اما ورودی یک سینوسی با فرکانس ω باشد پاسخ حالت دائمی نیز یک سینوسی با همان فرکانس خواهد بود.

نکته: پاس حالت صفر هر مدار خطی یک تابع خطی تحریک ورودی است و پاسخ حالت صفر (ورودی مخالف صفر) به شکل موج ورودی بستگی داشته و دارای خاصیتهای همگن و جمع‌پذیر می‌باشد.

نکته: اگر مدار خطی و دارای عناصر تغییرپذیر با زمان باشد، پاسخ حالت صفر یک تابع خطی تحریک ورودی می‌باشد، اما پاسخ کامل یک تابع خطی تحریک ورودی نمی‌باشد.

نکته: اگر پاسخ مدار به ورودی x(t) , y(t) باشد برای یک مدار خطی خواهیم داشت:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1(t)\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1}(t)\frac{dy}{dt} + b_n(t)y = x(t) \qquad (۲۵-۵)$$

در نتیجه برای یک مدار خطی و تغییرناپذیر با زمان معادله فوق به شکل زیر تبدیل می‌شود:

$$\frac{d^n y}{dt^n} + b_1\frac{d^{n-1}y}{dt^{n-1}} + \dots + b_{n-1}\frac{dy}{dt} + b_n y = x(t) \qquad (۲۶-۵)$$

لازم به ذکر است، برای حالتهای خاص از مدارهای فوق، مشتقات ورودی یعنی $\frac{dx}{dt}, \frac{dx^2}{dt^2}$ و... در طرف دوم معادله ظاهر می‌شوند.

نکته: پاسخ ورودی صفر در آن ورودی صفر می‌باشد و پاسخ مربوطه، ناشی از شرایط اولیه می‌باشد که در حالت کلی پاسخ مدار به ورودی صفر به صورت زیر است:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{s_k t} \qquad (۲۷-۵)$$

نکته: پاسخ حالت صفر، ناشی از ورودی می‌باشد که در یک لحظه مانند t_1 به مدار اعمال شده و قبل از t_1 مدار در حالت صفر می‌باشد که در حالت کلی پاسخ حالت صفر یک مدار خطی بصورت زیر می‌باشد:

$$y(t) = \sum_{k=1}^{n} A_k e^{s_k t} + y_p(t) \ , \quad y_p : \text{جواب خاص} \qquad (۲۸-۵)$$

نکته: پاسخ کامل مدار به صورت پاسخ خصوصی و همگن می‌باشد که:
پاسخ خصوصی به ورودی بستگی داشته که برای سه نوع ورودی مختلف بصورت زیر می‌باشد.
الف) اگر ورودی ثابت دارای مقدار K باشد جواب مخصوص برابر است با عدد ثابتی مانند A
ب) اگر ورودی نمایی و بصورت فرم کلی Ke^{at} باشد در نتیجه جواب مخصوص به صورت Ae^{at} (در صورتی که a ریشه معادله مشخصه فوق نباشد) و یا بصورت $At^{m}e^{at}$ (اگر a ریشه مرتبه m‌ام معادله مشخصه فوق باشد) می‌باشد.
ج) اگر ورودی به فرم کلی $x(t)=A_1\cos(\omega t+\phi_1)$ باشد در این صورت جواب مخصوص مدار بصورت زیر خواهد بود.
- اگر $s=j\omega$ ریشه مرتبه m‌ام معادله مشخصه باشد جواب مخصوص برابر است با:

$$A_2t^{m}\cos(\omega t+\phi_2)$$

- اگر $s=j\omega$ ریشه معادله مشخصه فوق نباشد جواب مخصوص برابر است با:

$$A_3\cos\omega t+A_4\sin\omega t=A\cos(\omega t+\theta) \qquad (۲۹-۵)$$

۲-۵ پاسخ همگن

اگر در معادله فوق (معادله دیفرانسیل با ضرایب ثابت) ورودی مربوطه صفر باشد $(x(t)=0)$ معادله به یک معادله همگن تبدیل شده و پاسخ مربوطه، پاسخ همگن معادله فوق می‌گویند.
معادله مشخصه مربوط به معادله فوق به صورت زیر می‌باشد:

$$s^{n}+b_1s^{n-1}+\dots b_{n-1}s+b_n=0 \qquad (۳۰-۵)$$

اگر ریشه‌های معادله مشخصه فوق از مرتبه اول باشند جواب همگن معادله به صورت زیر می‌باشد:

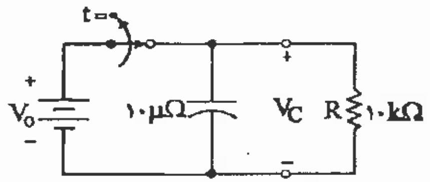
$$y_h=\sum_{k=1}^{n}A_k e^{s_k t} \qquad (۳۱-۵)$$

نکته: در مدارات مرتبه اول خطی و تغییرناپذیر با زمان، پاسخ مدار مربوطه با یک معادله خطی مرتبه اول با ضرایب ثابت بدست می‌آید.

نکته: در حالت دائمی در صورتی خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه عمل می‌کند که تمام منابع مستقل (نابسته) موجود در مدار، مقدار ثابتی داشته باشند.

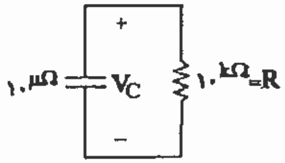
حل مسائل فصل پنجم

۱- در صورتی که در مدار ارائه شده در شکل (۵-۱۹) کلید مورد نظر به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $(t=0)$ باز گردد، ولتاژ دو سر خازن را برای زمان $(t\ge 0)$ بیابید.



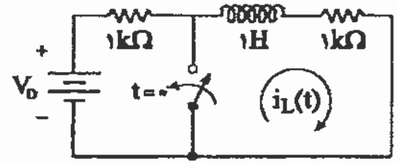
شکل ۵-۱۹ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

حل:
قبل از باز شدن کلید چون مدار به مدت طولانی به منبع ولتاژ ثابت وصل بوده است خازن به حالت دایمی (مدار باز) رسیده است پس ولتاژ خازن در لحظه $t=0^-$ برابر با V_0 بوده است. حال از زمان $t=0$ به بعد مدار به شکل مقابل خواهد بود:



$$\begin{cases} C\dfrac{dv_c(t)}{dt}+\dfrac{V_c}{R}=0 \\ C=10\mu F \end{cases} \Rightarrow \left.\begin{matrix} V_c(t)=ke^{-t/RC} \\ V_c(0)=V_0 \end{matrix}\right\} \Rightarrow V_c(t)=V_0e^{\frac{-t}{10\times10^{3}\times10\times10^{-6}}}=V_0e^{-10t}$$

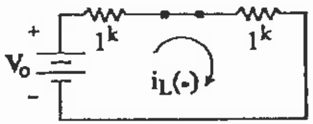
۲- مدار الکتریکی مطابق با شکل (۵-۲۰) موردنظر می‌باشد. در این مدار، کلید موردنظر به مدت طولانی باز بوده و در زمان $t=0$ بسته می‌شود. تغییرات جریان $i_L(t)$ را برای $t\ge 0$ بیابید.



شکل ۵-۲۰ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

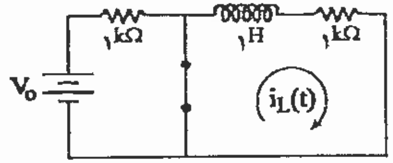
حل:

قبل از بسته شدن کلید مدار به حالت دایمی رسیده است یعنی سلف اتصال کوتاه بوده و مدار به شکل مقابل خواهد بود.



$$i_L(۰)=\frac{V_۰}{(۱+۱)\times ۱۰^{+۳}}=\frac{V_۰}{۲}\times ۱۰^{-۳}$$

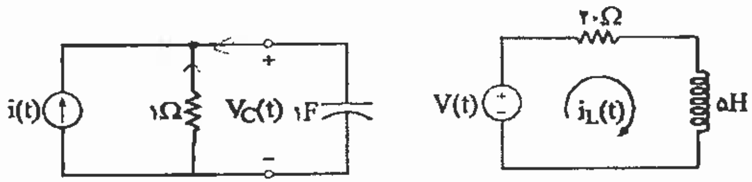
بعد از بسته شدن کلید مقاومت 1^k و منبع $V_۰$ روی مدار $i_L(t)$ باز زمان $t=۰$ به بعد بی تاثیر خواهند بود پس:



$$KVL:\frac{di_L(t)}{dt}+۱۰^{+۳}i_L(t)=۰\Rightarrow i_L(t)=ke^{-۱۰۰۰t}$$

$$i_L(۰)=\frac{V_۰}{۲}\times ۱۰^{+۳}\qquad\Rightarrow\qquad i_L(t)=\frac{V_۰}{۲}\times ۱۰^{+۳}e^{-۱۰۰۰t}$$

۳- در دو مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۱)، فرض کنید که در مدار (الف) $i=۵^A$ و $v_C(۰)=۰$ در مدار (ب) $v=۵^V$ ، $i(۰)=1^A$ باشد. در مدار (الف) $v_c(t)$ در مدار (ب) $i_L(t)$ را برای $t\ge ۰$ بیابید.



(الف) (ب)

شکل ۵-۲۱ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

حل:

الف)

$$\begin{cases}\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{v_c(t)}{۱}=i(t)\\ V_c(۰)=۰^V\\ i(t)=۵^A\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\frac{dv_h(t)}{dt}+v_h(t)=۰\Rightarrow v_h(t)=Ke^{-t}\\ v_p(t)=۵^A\end{cases}$$

$$\Rightarrow v_c(t)=v_h(t)+v_p(t)=Ke^{-t}+۵$$

$$v_c(۰)=۰=Ke^{۰}+۵\Rightarrow K=-۵$$

$$\Rightarrow v_c(t)=-۵e^{-t}+۵=۵\left(۱-e^{-t}\right)$$

ب)

$$KVL:-v(t)+۲۰\cdot i_L(t)+۵\frac{di_L(t)}{dt}=۰\Rightarrow\frac{di_L(t)}{dt}+۴i_L(t)=\frac{۱}{۵}v(t)=\frac{۱}{۵}\times ۵=۱\quad(I)$$

$$\frac{di_h(t)}{dt}+۴i_h(t)=۰\Rightarrow i_h(t)=Ke^{-۴t}$$

برای محاسبه پاسخ خصوصی چون طرف دوم معادله دیفرانسیل عدد ثابت است پس شکل پاسخ خصوصی $\Rightarrow ۰+۴A=۱\Rightarrow A=\frac{۱}{۴}$ عدد ثابت A فرض می‌کنیم. بنابراین با فرض $i_p(t)=A$ و جایگذاری آن در معادله (I) و برابر قرار دادن دو طرف معادله پارامتر A را بدست می‌آوریم.

با جاگذاری $i_p(t)=A$ در معادله (I) داریم:

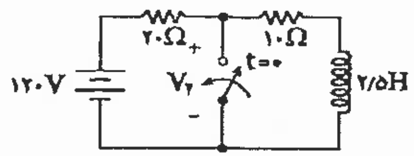
$$\Rightarrow ۰+۴A=۱\Rightarrow A=\frac{۱}{۴}$$

$$i_L(t)=i_h(t)+i_p(t)=ke^{-۴t}+\frac{۱}{۴}(II)$$

حال پارامتر k را از روی شرط اولیه در $t=۰$ لحظه بدست می‌آوریم چون در $i_۱(۰)=۰$ ، $t=۰$ می‌شود بنابراین با جایگذاری در معادله (II) خواهیم داشت:

$$t=۰\quad\Rightarrow\quad ۰=K+\frac{۱}{۴}\Rightarrow K=-\frac{۱}{۴}\Rightarrow i_L(t)=-\frac{۱}{۴}e^{-۴t}+\frac{۱}{۴}$$

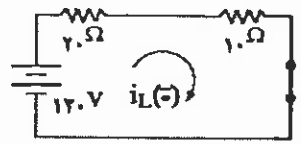
۴- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۲)، کلید موردنظر که به مدت طولانی باز بوده است در زمان $t=۰$ بسته می‌شود. در این مدار، جریان سلف را برای $t>۰$ تعیین نمایید.



شکل ۵-۲۲ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۴)

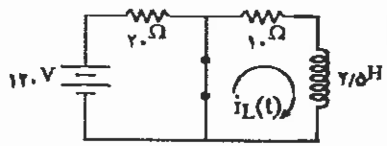
حل:

قبل از بسته شدن کلید مدار به شکل مقابل می‌باشد.



$$KVL: -۱۲۰+۳۰i_L(۰)=۰\Rightarrow i_L(۰)=۴^A$$

حال بعد از بسته شدن کلید مقاومت ۲۰^Ω و منبع ۱۲۰^V در جریان سلف تأثیری ندارد چون اتصال کوتاه می‌شوند و مدار به شکل مقابل تبدیل می‌شود:



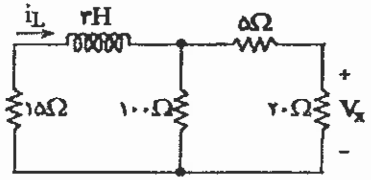
$$\begin{cases} ۲/۵\dfrac{di_L(t)}{dt}+۱۰i_L(t)=۰ \\ i_L(۰)=۴ \end{cases} \Rightarrow i_h(t)=Ke^{st}$$

با جایگذاری $i_L(t)$ در معادله اصلی S را مشخص می‌کنیم.

$$۲/۵Se^{st}+۱۰e^{st}=۰\Rightarrow(۲/۵S+۱۰)e^{st}=۰$$
$$\Rightarrow S=-۴$$

$$\begin{cases} i_L(t)=Ke^{-۴t} \\ i_L(۰)=۴ \end{cases}\Rightarrow i_L(۰)=K=۴\Rightarrow i_L(t)=۴e^{-۴t}$$

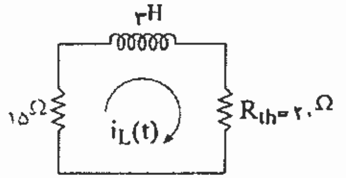
۵- شکل (۵-۲۳) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در زمان $t=۰$ ، $i_L(۰)=۱۰^A$ می‌باشد برای $i_L(t)$ و $v_x(t)$ را بیابید.



شکل ۵-۲۳ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

حل:

مقاومت معادل طرف راست مدار یعنی مقاومتهای ۵^Ω و ۲۰^Ω و ۱۰۰^Ω را قرار می‌دهیم.



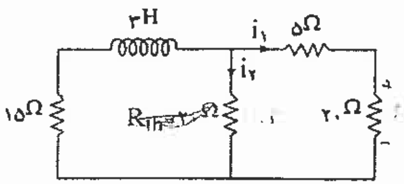
$$R_{th}=(۵+۲۰)\|۱۰۰=۲۰^\Omega$$

$$KVL: ۳\frac{di_L(t)}{dt}+(۱۵+۲۰)i_L(t)=۰ \Rightarrow \begin{cases} ۳s+۳۵=۰\Rightarrow s=-\dfrac{۳۵}{۳} \\ i_L(t)=Ke^{-\frac{۳۵}{۳}t} \end{cases}$$

$$i_L(۰)=K=۱۰\Rightarrow i_L(t)=۱۰e^{-\frac{۳۵}{۳}t}$$
$$i_L(۰)=۱۰^A$$

محاسبه $v_x(t)$: برای محاسبه $v_x(t)$ مدار را رسم می‌کنیم.

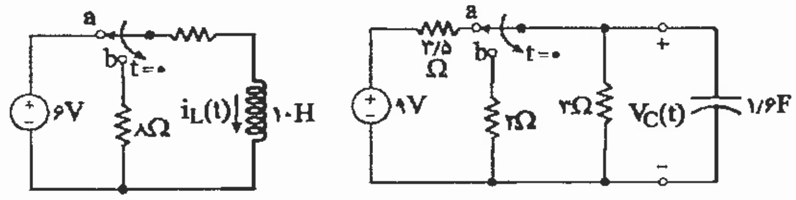
با استفاده از تقسیم جریان:



$$i_1=\frac{۱۰۰}{۱۰۰+(۵+۲۰)}i_L(t)$$
$$i_1=\frac{۴}{۵}\times۱۰e^{-\frac{۳۵}{۳}t}=۸e^{-\frac{۳۵}{۳}t}$$

$$V_x(t)=۲۰i_1=۲۰\times۸e^{-\frac{۳۵}{۳}t}=۱۶۰e^{-\frac{۳۵}{۳}t}$$

۶- در مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۴) در زمان $t=۰$، کلید از وضعیت a (که به مدت طولانی در این وضعیت قرار داشته است) به وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در مدار (الف)، جریان $i_L(t)$ و در مدار (ب)، ولتاژ $V_c(t)$ را بیابید.

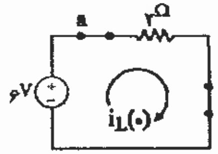


(الف) (ب)

شکل ۵-۲۴ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (٦)

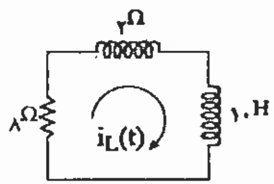
حل:

شکل الف) در این مدار قبل از لحظه وصل کلید مدار به مدت طولانی در این وضعیت بوده تپس می‌توان سلف را اتصال کوتاه فرض کرد. بنابراین برای $t < 0$ می‌توان مدار را به شکل مقابل رسم کرد.



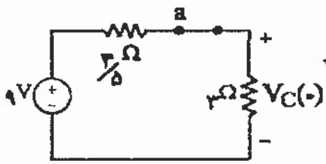
$$KVL: -6+2i_L(0)=0 \Rightarrow i_L(0)=3^A$$

برای $t > 0$ مدار را به شکل مقابل خواهد بود:



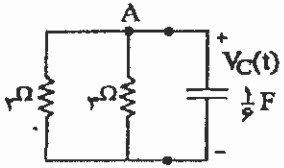
$$\begin{cases}10\dfrac{di_L(t)}{dt}+10\,i_L(t)=0\\ i_L(0)=3^A\end{cases} \Rightarrow \begin{cases} i_L(t)=Ke^{-t}\\ i_L(0)=K=3\end{cases} \Rightarrow i_L(t)=3e^{-t}$$

شکل ب) مدار در وضعیت a به حالت دایمی رسیده پس خازن مدار باز بوده است بنابراین شکل مدار در وضعیت a یعنی $t < 0$ به شکل مقابل خواهد بود:



$$V_C(0)=\frac{3}{3\times \frac{3}{5}}\times 9=\frac{15}{2}^V$$

برای $t < 0$ مدار به شکل مقابل تبدیل می‌شود:

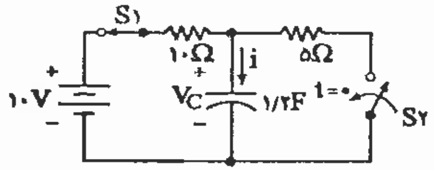


$$KCL: \frac{1}{6}\frac{dV_C(t)}{dt}+\frac{V_C(t)}{2\|3}=0 \quad \text{در گره A}$$

$$\left.\begin{array}{l}\Rightarrow \dfrac{dV_C(t)}{dt}+5V_C(t)=0 \Rightarrow V_C(t)=Ke^{-5t}\\ V_C(0)=\dfrac{7}{2}=K\end{array}\right\} \Rightarrow V_C(t)=\frac{7}{2}e^{-5t}$$

۷- شکل (۵-۲۵) یک مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که در آن، کلید S_1، به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$، S_2 و کلید نیز بسته می‌شود. در این حالت، ولتاژ $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.

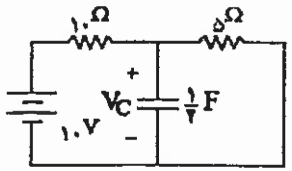
راهنمایی: از تبدیل مدار معادل تونن به نورتن استفاده کنید.



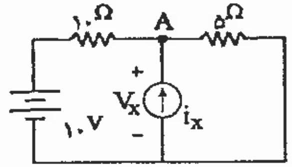
شکل ۵-۲۵ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

حل:

زمانی که کلید S_1 بسته است و S_2 باز است مدار به حالت دایمی رسیده است. بنابراین $V_C(0)=10^V$ اما بعد از بسته شدن S_2 مدار به شکل مقابل می‌باشد.



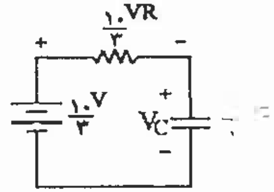
می‌توان مدار را با روش گره و بدون تبدیل تونن و نورتن حل کرد. ولی با راهنمایی صورت مسئله مدار را حل می‌کنیم. پس مدار معادل تونن را از دو سر خازن محاسبه می‌کنیم.



$$KCL(A): \frac{V_X}{5}+\frac{V_X-10}{10}=i_X \Rightarrow V_X=\frac{10}{3}i_X+\frac{10}{3}$$

$$R_{th}=\frac{10}{3}^{\Omega}\ ,\ V_{th}=\frac{10}{3}^{V}$$

پس معادل تونن مدار را جایگذاری کرده و مدار به صورت مقابل خواهد بود:



$$KVL: -\frac{10}{3}+v_R(t)+v_C(t)=0$$

$$-\frac{10}{3}+\frac{10}{3}\times\frac{1}{2}\frac{dv_C(t)}{dt}+v_C(t)=0 \Rightarrow \frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{3}{5}v_C(t)=2$$

$$\begin{cases}\dfrac{dv_h(t)}{dt}+\dfrac{3}{5}v_h(t)=0 \\ v_C(0)=10^{A}\end{cases} \Rightarrow v_h(t)=Ke^{-\frac{3}{5}t}$$

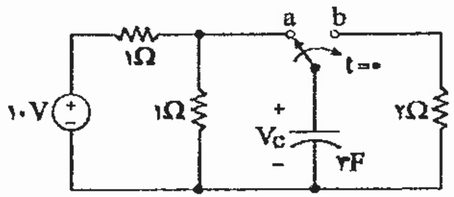
$$\begin{cases}\dfrac{dv_p(t)}{dt}+\dfrac{3}{5}v_p(t)=2 \\ V_C(t)=A\end{cases} \Rightarrow 0+\frac{3}{5}A=2 \Rightarrow A=\frac{10}{3} \Rightarrow v_p(t)=\frac{10}{3}$$

$$\Rightarrow v_C(t), v_h(t), v_p(t)=Ke^{-\frac{3}{5}t}+\frac{10}{3}$$

$$v_c(0)=10=K+\frac{10}{3} \Rightarrow K'=\frac{20}{3}$$

$$v_c(t)=\frac{20}{3}e^{-\frac{3}{5}t}+\frac{10}{3}$$

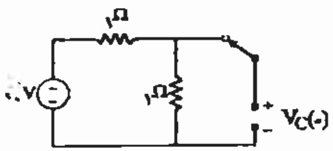
۸- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۵-۲۶) کلید موردنظر به مدت طولانی در وضعیت a قرار داشته در زمان $t=0$ در وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت، ولتاژ $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل ۵-۲۶ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

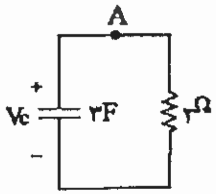
حل:

ابتدا مدار را در وضعیت a یعنی $t<0$ رسم می‌کنیم.



$$V_c(0)=\frac{1}{1+1}\times 10=5^{V}$$

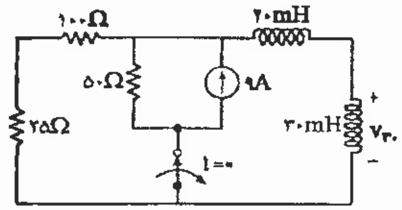
مدار در وضعیت (b):



$$KCL: 3\frac{dV_c(t)}{dt}+\frac{V_c}{2}=0$$

$$\left.\begin{aligned}&\Rightarrow V_c(t)=Ke^{-\frac{1}{6}t}\\ &V_c(0)=K=0\end{aligned}\right\} \Rightarrow V_c(t)=0e^{-\frac{1}{6}t}$$

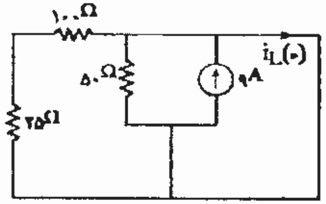
۹- کلید موردنظر در مدار الکتریکی شکل (۵-۲۷) به مدت طولانی بسته بوده و در زمینه $t=0$، باز می‌شود برای زمان $t \geq 0$, $v_{30}(t)$ را بیابید.



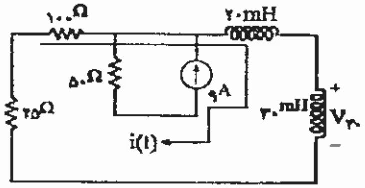
شکل ۵-۲۷ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

حل:

در لحظات $t<0$ مدار به حالت دایمی رسیده پس دو تا سلف اتصال کوتاه می‌شود. و مدار به شکل مقابل خواهد بود. بنابراین تمام جریان 9^A وارد شاخهٔ اتصال کوتاه خواهد شد و $i_L(0)=9^A$



با باز شدن کلید مدار به شکل مقابل خواهد بود مقاومت 50^Ω موازی با منبع جریان 9^A هیچ تأثیری در مدار ندارند چون هر دو سر آن به یک گره وصل شده است.



$$KVL:(25+100)i_L(t)+(20+30)\times10^{-3}\frac{di_L(t)}{dt}=0$$

$$\Rightarrow\frac{di_L(t)}{dt}+2500\,i_L(t)=0\Rightarrow i_L(t)=Ke^{-2500t}$$

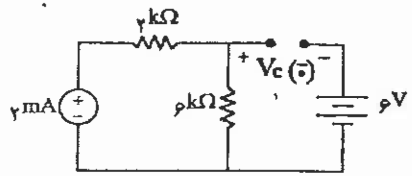
$$\Rightarrow\begin{cases}i_L(t)=9e^{-2500t}\\ i_L(0)=9^A\end{cases}$$

$$V_{30}(t)=30\times10^{-3}\frac{di_L(t)}{dt}=-30\times10^{-3}\times9\times2500e^{-2500t}=-675e^{-2500t}$$

۱۰- در مدار الکتریکی شکل (۵-۲۸) کلید سمت چپ در لحظه $t=0$ بسته می‌شود و همزمان با آن، کلید سمت راست از وضعیت a , b تغییر حالت می‌دهد. در این حالت $v_c(t)$, $i(t)$ را برای $t\geq0$ بیابید.

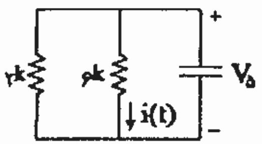
حل:

ابتدا مدار را در وضعیت کلید سمت چپ باز و وضعیت a رسم می‌کنیم یعنی $t<0$.



$$V_c=(0)6^{k\Omega}\times2\times10^{-3}-6=6^V$$

مدار در وضعیت $t>0$:



$$\frac{cdv_c(t)}{dt}+\frac{v_c(t)}{2\|6}=0\Rightarrow2\times10^{-9}\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{2}{3}\times10^{-3}v_c(t)=0$$

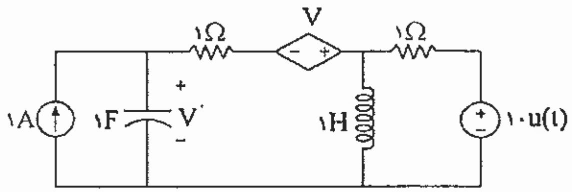
$$\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{1}{3}\times10^{+6}v_c(t)=0\Rightarrow v_c(t)=Ke^{-\frac{1}{3}\times10^{+6}t}\qquad\Rightarrow v_c(t)=6e^{-\frac{1}{3}\times10^{+6}t}$$

$$v_c(0)=6^V=K$$

$$i(t)=\frac{v_c(t)}{6^k}=\frac{6}{6\times10^3}e^{-\frac{1}{3}\times10^{+6}t}=10^{-3}e^{-\frac{1}{3}10^{+6}t}$$

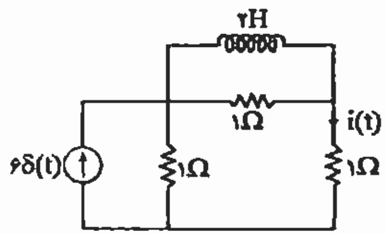
«سؤالات چهار گزینه‌ای فصل پنجم»

۱- در مدار شکل مقابل مقدار $\frac{dv(0^+)}{dt}$ کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۳)



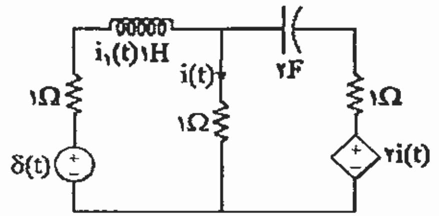
الف) -۷
ب) -۵
ج) ۷
د) ۵

۲- جریان $i(t)$ در مدار شکل مقابل کدام است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۲)



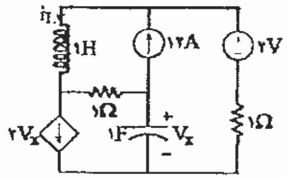
الف) صفر
ب) $2\delta(t)$
ج) $\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)$
د) $\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}u(t)+2\delta(t)$

۳- مطلوب است محاسبه $i_1(t)$ در صورتی که $v_C(0^-)=0$, $i_1(0^-)=0$ باشد: (مهندسی کامپیوتر ۸۲)



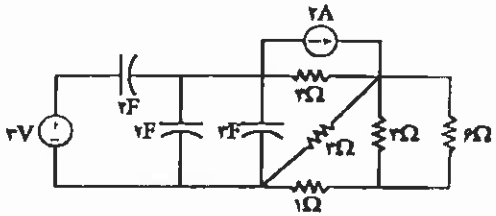
الف) $\frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}$
ب) $\Sigma\delta(t)$
ج) $\left(k_1e^{-\frac{2}{3}t}+k_2e^{-\frac{1}{3}t}\right)u(t)$
د) $\left(k_1e^{-\frac{t}{2}}+k_2e^{-t}\right)u(t)$

٤- با توجه به شکل مقدار نهایی ولتاژ خازن و مقدار نهایی جریان سلف را حساب کنید. (مهندسی کامپیوتر ۸۲)



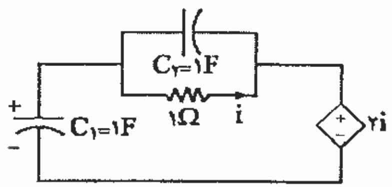
الف) $i_L=12A$, $V_c=-10v$
ب) $i_L=12A$, $V_c=-12v$
ج) $i_L=\frac{16}{3}A$, $V_c=-\frac{10}{3}v$
د) $i_L=\frac{16}{3}A$, $V_c=-12v$

۵- ثابت زمانی مدار RC در شکل مقابل چیست؟ (برحسب ثانیه) (مهندسی کامپیوتر ۸۲)



الف) ۱۴/۵
ب) ۱۵/۵
ج) ۳۱/۵
د) ۳۳/۵

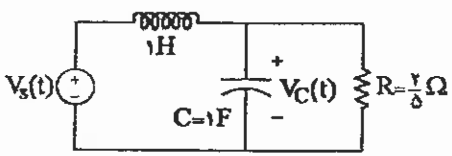
٦- در مدار شکل مقابل ولتاژ اولیه خازن C_1 با پلاریته مشخص شده ۳ ولت است. جریان i برای زمانهای $t\ge 0$ کدام یک از شکل موجهای زیر است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۲)



الف) $i(t)=e^{-\frac{t}{4}}\ ,\ t>0$
ب) $i(t)=3e^{-\frac{t}{4}}\ ,\ t>0$
ج) $i(t)=e^{-4t}\ ,\ t>0$
د) $i(t)=3e^{-4t}\ ,\ t>0$

۷- در مدار زیر پاسخ کامل $v_C(t)$ برای ورودی پله کدام است؟ داریم

$v_C(0^-)=1V$, $i_L(0^-)=2A$ (مهندسی کامپیوتر ۸۱)



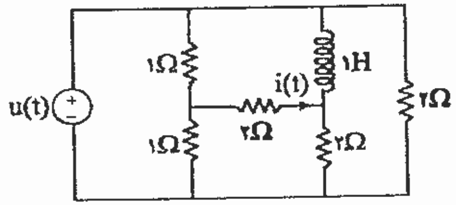
الف) $1+\frac{1}{2}\left(e^{-2t}-e^{-\frac{t}{2}}\right)$

ب) $1+2\left(e^{-2t}-e^{-\frac{t}{2}}\right)$

ج) $1+\frac{1}{2}\left(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-2t}\right)$

د) $1+2\left(e^{-\frac{t}{2}}-e^{-2t}\right)$

۸- در مدار شکل مقابل با شرایط اولیه صفر، i(t) با کدام گزینه برابر است؟ (مهندسی کامپیوتر ۸۱)



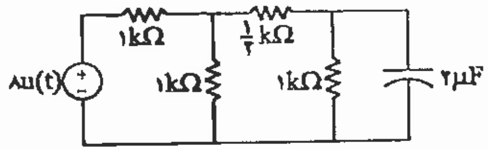
الف) $i(t)=\left(\frac{1}{5}+\frac{14}{45}e^{-\frac{10}{9}t}\right)u(t)$

ب) $i(t)=\left(\frac{1}{5}-\frac{14}{45}e^{-\frac{10}{9}t}\right)u(t)$

ج) $i(t)=\left(-\frac{1}{5}+\frac{14}{45}e^{-\frac{10}{9}t}\right)u(t)$

د) $i(t)=\left(-\frac{1}{5}-\frac{14}{45}e^{-\frac{10}{9}t}\right)u(t)$

۹- در مدار زیر ولتاژ خازن صفر است. بعد از گذشت 1ms، مقدار ولتاژ خازن چه مقدار می باشد؟(مهندسی کامپیوتر ۸۱)



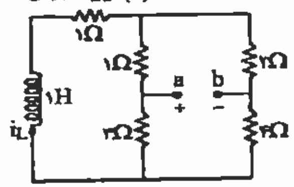
الف) $2\left(1+e^{-1}\right)$

ب) $2\left(1-e^{-1}\right)$

ج) $3\left(1+e^{-1}\right)$

د) $3\left(1-e^{-1}\right)$

۱۰- در مدار شکل مقابل $i_L(0)=1A$ می‌باشد. مقدار $v_{ab}(t)$ برای $t>0$ چقدر است؟(مهندسی کامپیوتر ۸۱)



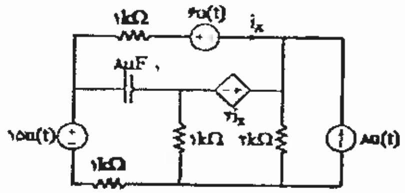
الف) $-\frac{1}{2}e^{-\frac{3}{4}t}$

ب) $0/2e^{-\frac{3}{4}t}$

ج) $-0/2e^{-\frac{3}{4}t}$

د) $\frac{3}{4}e^{-\frac{3}{4}t}$

۱۱- ثابت زمانی مدار شکل مقابل چیست؟ (مهندسی کامپیوتر ۷۷)



الف) 8msec

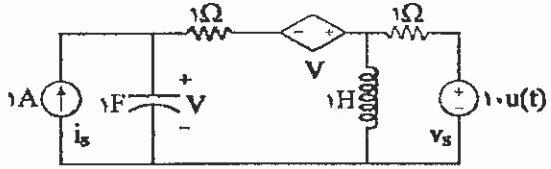
ب) 12msec

ج) 17msec

د) 20msec

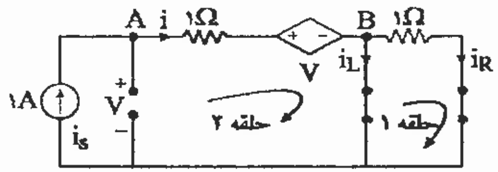
«پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای فصل پنجم»

۱- گزینه « د» صحیح است.

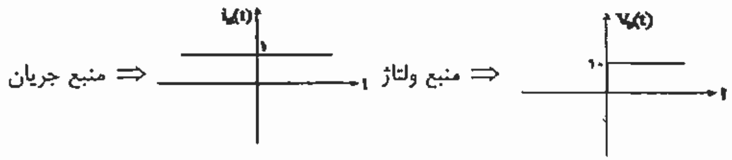


با توجه به مدار فوق، منبع جریان ۱ آمپری از لحظه $t=-\infty$ در مدار می‌باشد. مدار از لحظه $t=-\infty$ تا $t=0^-$ فقط با منبع جریان ثابت یک آمپری کار می‌کند و در این فاصله زمانی منبع ولتاژ $10u(t)$ در مدار نمی‌باشد یعنی در این فاصله زمانی به جای این منبع ولتاژ، اتصال کوتاه قرار می‌دهیم. پس مدار در این فاصله زمانی $\left(t=-\infty \to 0^-\right)$ کار کرده و مدار در لحظه $t=0^-$ به حالت دائمی رسیده است. که

شکل مدار فوق در لحظه $t=0^-$ به صورت زیر می‌باشد:



لازم به ذکر است لحظات اعمالی منابع جریان و ولتاژ به صورت زیر می‌باشد:



درحالیکه در حالت دائمی، خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می‌باشد:

$$\text{KVL} \Rightarrow (1)(i_R)=0 \Rightarrow i_R=0 \quad \text{در حلقه ۱} \qquad (1)$$

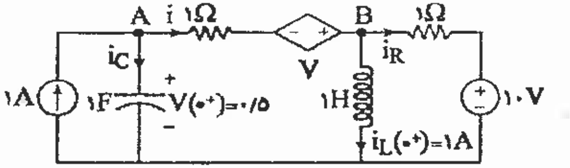
$$\text{KCL} \Rightarrow i = 1A = i_s \quad \text{در نقطه A} \qquad (2)$$

$$\text{KVL} \Rightarrow -V+i-V=0 \Rightarrow 2V=i \Rightarrow V=\frac{i}{2} \qquad (3)$$

$$(2),(3) \Rightarrow V=\frac{1}{2}\text{Volt} \Rightarrow V_C\left(0^-\right)=0.5V \qquad (4)$$

$$\text{KCL} \Rightarrow i=i_L+i_R \Rightarrow 1=i_L+0 \Rightarrow i_L\left(0^-\right)=1A \qquad (5)$$

برای حل مدار از لحظه $t=0^+$ به بعد به صورت زیر می‌باشد:



در لحظه $t=0^+$ داریم:

ولتاژ خازن و جریان سلف به طور ناگهانی نمی‌تواند پرش داشته باشد:

$$i_L\left(0^+\right)=i_L\left(0^-\right)=1A$$

$$V_C\left(0^+\right)=V_C\left(0^-\right)=0.5V=V\left(0^+\right)$$

$$\text{در نقطه A} \quad \text{KCL} \Rightarrow 1=i_C+i \Rightarrow 1=\frac{c\,dV}{dt}+i \Rightarrow 1=\frac{dV}{dt}+i \quad \text{در نقطه A} \qquad (6)$$

$$\text{KVL} \Rightarrow -V+i-V+i_R+10=0 \Rightarrow 2V=10+i+i_R \quad \text{در حلقه بزرگ}$$

$$\Rightarrow 2V\left(0^+\right)=10+i\left(0^+\right)+i_R\left(0^+\right) \Rightarrow 1=10+i\left(0^+\right)+i_R\left(0^+\right)$$

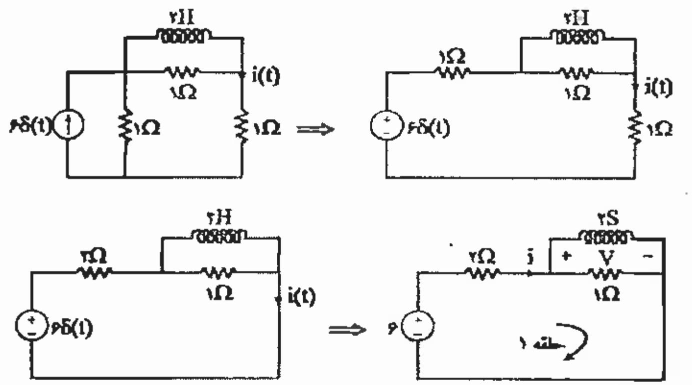
$$\Rightarrow i\left(0^+\right)+i_R\left(0^+\right)=-9 \qquad (7)$$

$$\text{درنقطه B} \quad \text{KCL} \Rightarrow i=i_R+i_L\left(0^+\right) \Rightarrow i=i_R\left(0^+\right)+1 \qquad (8)$$

$$(7),(8) \Rightarrow \begin{cases} i\left(0^+\right)+i_R\left(0^+\right)=-9 \\ i\left(0^+\right)-i_R\left(0^+\right)=1 \end{cases} \Rightarrow i\left(0^+\right)=-4 \;,\; i_R\left(0^+\right)=-5 \qquad (9)$$

$$(6),(9) \Rightarrow 1=\frac{dV}{dt}\left(0^+\right)+i\left(0^+\right) \Rightarrow 1=\frac{dV}{dt}\left(0^+\right)-4 \Rightarrow \frac{dV}{dt}\left(0^+\right)=5A$$

۲- گزینه « د » صحیح است.



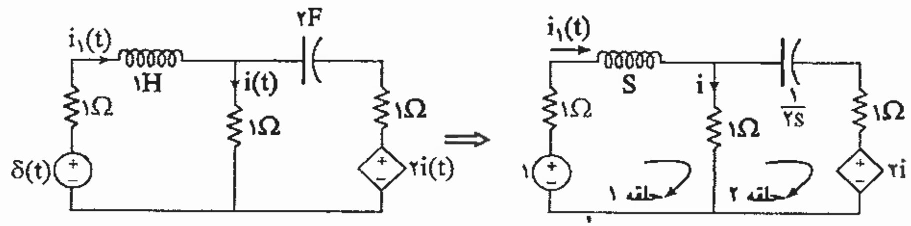
در حلقه ۱ $kvl: 6 = 2i + \frac{v}{1} = 2i + v$ (۱)

در حلقه کوچک $kvl: v = (i - v)2s \Rightarrow v = \frac{2s}{1+2s}i$ (۲)

$$(1),(2) \Rightarrow 6 = 2i + \frac{2s}{1+2s}i = i\left(\frac{2+6s}{1+2s}\right) \Rightarrow i = \frac{6(1+2s)}{2(1+3s)} = 3\frac{1+2s}{1+3s}$$

$$i = \frac{2s+1}{s+\frac{1}{3}} = 2 + \frac{\frac{1}{3}}{s+\frac{1}{3}} \Rightarrow i(t) = 2\delta(t) + \frac{1}{3}e^{-\frac{t}{3}}$$

۳- گزینه « الف » صحیح است.



در حلقه ۱ $kvl: 1(s+1)i_1 + i$ (۱)

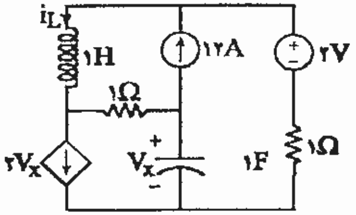
در حلقه ۲ $kvl: i = \left(\frac{1}{2s}+1\right)(i_1 - i) + 2i \Rightarrow i = \left(\frac{1}{2s}+1\right)i_1 + i\left(1 - \frac{1}{2s}\right)$

$\Rightarrow \frac{1}{2s}i = \frac{1+2s}{2s}i_1 \Rightarrow i = (1+2s)i_1$ (۲)

$$(1)(2) \Rightarrow 1-(s+1)i_1 = (1+2s)i_1 \Rightarrow 1 = i_1(3s+2) \Rightarrow i_1 = \frac{1}{3s+2} \Rightarrow i_1(t) = \frac{1}{3}e^{-\frac{2}{3}t}u(t)$$

۴- گزینه « ج» صحیح است.

اگر در یک مدار تمام منابع نابسته، ثابت باشند و مدار به حالت دائمی برسد $(t=\infty)$ خازن مدار باز و سلف اتصال کوتاه می‌باشد. در نتیجه برای این مدار مقادیر نهایی ولتاژ خازن و جریان سلف می‌توان بدست آورد:



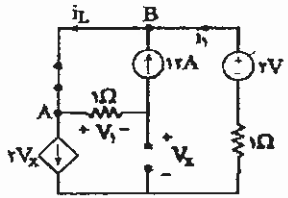
$$\Rightarrow v_1 = 1 \times 12 = 12v$$

در گره A $kcl: i_L = 12 + 2v_x$

در گره B $kcl: i_1 = i_L - 12$

$kvl: v_1 + v_x + i_1 - 2 = 0$

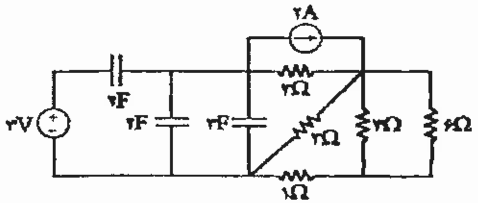
$\Rightarrow 12 + v_x + 12 + 2v_x - 12 - 2 = 0$



$$\Rightarrow v_x = \frac{-10}{3}v = v_C(\infty)$$

$$i_L = 12 + 2v_x \Rightarrow i_L = \frac{16}{3}A$$

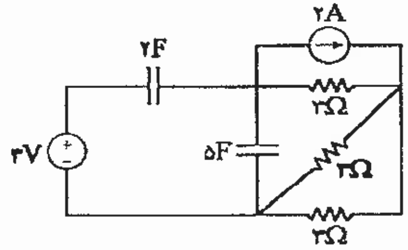
۵- گزینه « ج » صحیح است.



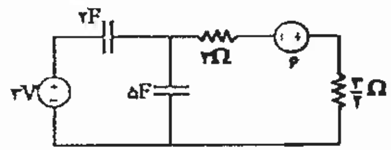
$$(6\Omega)\|(3\Omega) = 2\Omega$$

$$\Rightarrow 2\Omega + 1\Omega = 3\Omega$$

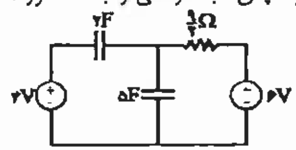
$$\Rightarrow (2F)\|(3F) = 5F$$



$$(2\Omega)\|(2\Omega)=1/5\Omega=\frac{3}{2}\Omega$$



می‌توان منابع ولتاژ نابسته اتصال کوتاه و منابع جریان نابسته مدار باز نمود و سپس ثابت زمانی را بدست آورد.



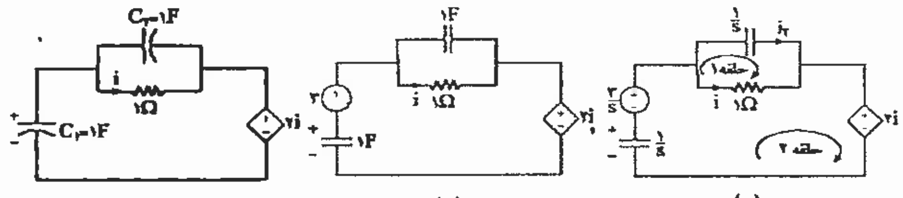
$$\tau=RC=\frac{9}{2}\times 7=\frac{63}{2}=31/5 \text{ ثانیه}$$

۶- گزینه صحیح وجود ندارد.

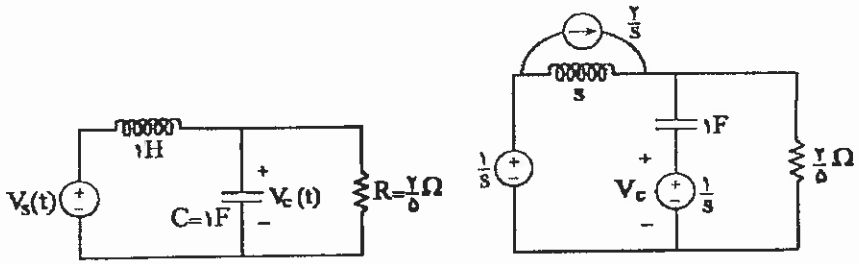
(۱)   در حلقه ۱ (ج) $kvl: i=\frac{1}{s}i_2$

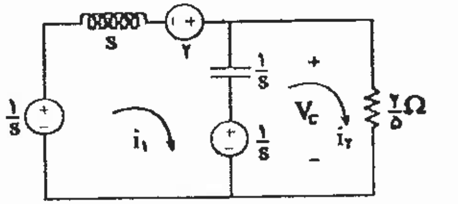
(۲)   در حلقه ۲ (ج) $kvl: 2i+\frac{1}{s}(i+i_2)-\frac{3}{s}+i=0\Rightarrow\left(\frac{3s+1}{s}\right)i+\frac{1}{s}i_2=\frac{3}{s}\Rightarrow(3s+1)i+i_2=3$

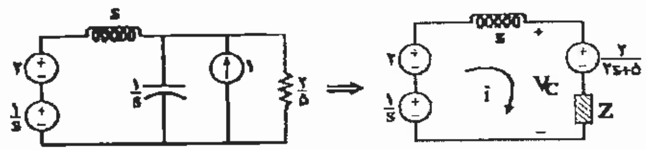
$$(1)(2)\Rightarrow(3s+1)i+si=3\Rightarrow i=\frac{3}{4s+1}\Rightarrow i(t)=\frac{3}{4}e^{-\frac{t}{4}}u(t)$$



۷- گزینه «الف» صحیح است.







$$Z=\frac{2}{2s+5}$$

$$-\frac{1}{s}-2+\frac{2}{2s+5}+i\left(s+\frac{2}{2s+5}\right)=0$$

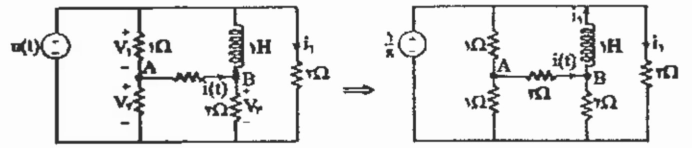
$$i=\frac{4s^2+10s+5}{s\left(2s^2+5s+2\right)}\quad,\quad-\frac{1}{s}-2+si+V_C=0$$

$$V_C=\frac{1}{s}+2-si=\frac{1}{s}+2-\frac{4s^2+10s+5}{2s^2+5s+2}\Rightarrow V_C=\frac{2s^2+4s+2}{s\left(2s^2+5s+2\right)}$$

$$\Rightarrow V_C=\frac{1}{s}-\frac{1}{2}\frac{1}{s+\frac{1}{2}}+\frac{1}{3}\frac{1}{s+2}\Rightarrow V_C(t)=u(t)-\frac{1}{2}e^{-\frac{t}{2}}+\frac{1}{3}e^{-2t}$$

$$\Rightarrow V_c(t)=\left[1+\frac{1}{2}\left(e^{-2t}-e^{-\frac{t}{2}}\right)\right]u(t)$$

۸- گزینه « ج » صحیح است.



$$i_1=\frac{\frac{1}{s}}{2}\Rightarrow i_1=\frac{1}{2s}$$

در حلقه ۱ kvl: $\frac{1}{s}=v_1+v_2\ ;\quad (1)$

در گره A kvl: $\frac{v_1}{1}=\frac{v_2}{1}+i\Rightarrow v_1=v_2+i\quad (2)$

$$\Rightarrow v_2=v_1-i=\frac{1}{s}-v_2-i\Rightarrow v_2=\frac{1}{2s}-\frac{i}{2}\quad (4)$$

در حلقه ۲ kvl: $V_2=2i+V_3\quad (3)$

با نوشتن kcl در گره B داریم:

$$i=\frac{v_3}{2}+\left(v_3-\frac{1}{s}\right)\times\frac{1}{s}=\frac{v_3}{2}+\frac{v_3}{s}-\frac{1}{s^2}=v_3\left(\frac{s+2}{2s}\right)-\frac{1}{s^2}\Rightarrow i=v_3\left(\frac{s+2}{2s}\right)-\frac{1}{s^2}\quad (5)$$

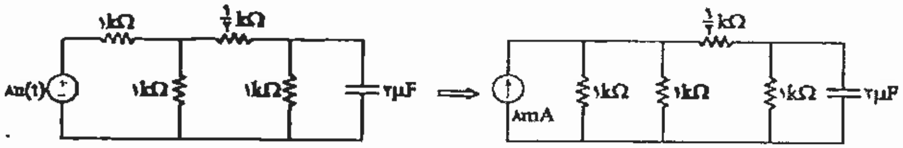
$$(5),(4),(3)\Rightarrow i=\left(\frac{s+2}{2s}\right)(V_2-2i)-\frac{1}{s^2}=\left(\frac{s+2}{2s}\right)\left(\frac{1}{2s}-\frac{i}{2}-2i\right)-\frac{1}{s^2}$$

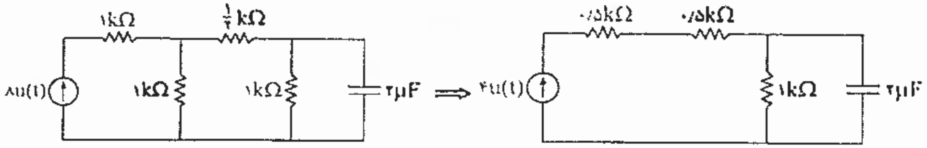
$$\Rightarrow i=\frac{s+2}{4s^2}-\frac{5(s+2)}{4s}i-\frac{1}{s^2}\Rightarrow i\left(1+\frac{5}{4s}(s+2)\right)=-\frac{1}{s^2}+\frac{s+2}{4s^2}$$

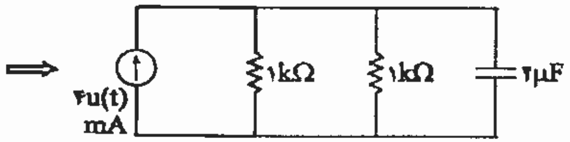
$$\Rightarrow i\left(\frac{9s+10}{4s}\right)=\frac{s-2}{4s^2}\Rightarrow i=\frac{s-2}{s(9s+10)}=-\frac{1}{5}\left(\frac{1}{s}\right)+\frac{14}{5}\left(\frac{1}{9s+10}\right)$$

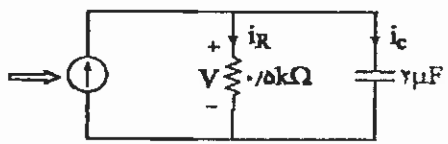
$$i(t)=-\frac{1}{5}u(t)\frac{14}{5\times 9}e^{-\frac{10}{9}t}u(t)=\left(-\frac{1}{5}+\frac{14}{45}e^{-\frac{10}{9}t}\right)u(t)$$

۹- گزینه « ب » صحیح است.









$$i=i_R+i_C=\frac{V}{R}+C\frac{dv}{dt}=\frac{v}{0/5k\Omega}+2\mu f\frac{dv}{dt}=4u(t)mA$$

$$\Rightarrow\left(2\times10^{-3}\right)v+\left(2\times10^{-6}\right)\frac{dv}{dt}=4\times10^{-3}u(t)\Rightarrow10^{-3}\frac{dv}{dt}+v=2u(t)$$

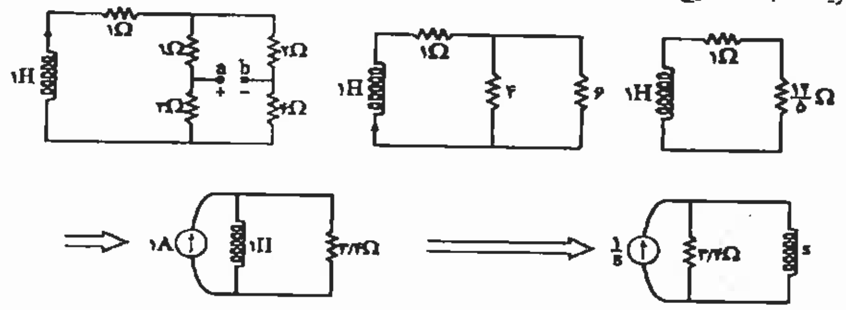
تبدیل لاپلاس $\Rightarrow 10^{-3}sv+v=\frac{2}{s}\Rightarrow v=\frac{2}{s\left(10^{-3}s+1\right)}=\frac{2}{10^{-3}}\cdot\frac{1}{s\left(s+10^{3}\right)}=\frac{2\times10^{3}}{s}\left(\frac{1}{s+10^{3}}\right)$

$$\Rightarrow v(t)=2\times10^{3}\left(10^{-3}u(t)-10^{-3}e^{-10^{3}t}u(t)\right)$$

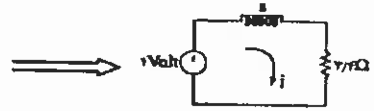
$$=2\times10^{3}\left(10^{-3}-10^{-3}e^{-10^{3}t}\right)u(t)$$

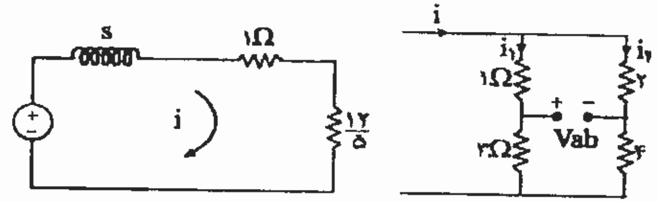
$$\Rightarrow V(1ms)=2\left(1-e^{-10^{3}\left(10^{-3}\right)}\right)=2\left(1-e^{-1}\right)$$

۱۰- گزینه « ب » صحیح است.



$$\Rightarrow 1 = si + 2.4i \Rightarrow i = \frac{1}{s+2.4} \Rightarrow i(t) = e^{-2.4t}$$



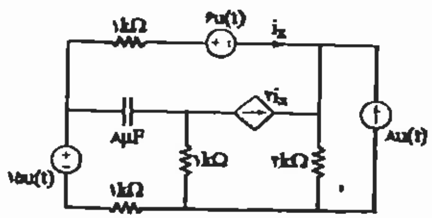


$$\left.\begin{array}{l} i_1 = \frac{6}{10}i = \frac{3}{5}i \Rightarrow i_1 = \frac{3}{5}\times\frac{1}{s+2.4} \\ i_2 = \frac{4}{10}i = \frac{2}{5}i \Rightarrow i_2 = \frac{2}{5}\times\frac{1}{s+2.4} \end{array}\right\} \Rightarrow V_{ab} - 2i_2 + i_1 = 0 \Rightarrow V_{ab} = 2i_2 - i_1$$

$$\Rightarrow V_{ab} = \left(\frac{4}{5} - \frac{3}{5}\right)\frac{1}{s+2.4} = \frac{0.2}{s+2.4}$$

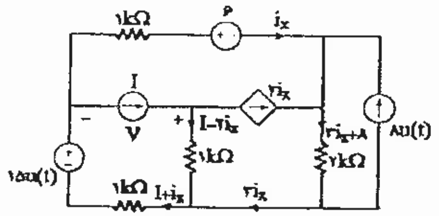
$$\Rightarrow V_{ab}(t) = 0.2e^{-2.4t}$$

۱۱- گزینه « ج » صحیح است.



مقاومت دیده شده از دو سر خازن بدست می‌آوریم:

به جای خازن یک منبع جریان I قرار می‌دهیم



$$\left.\begin{array}{l} kvl: -10 - v + I - 2i_x + I + i_x = 0 \Rightarrow 2I - i_x = 10 + v \\ kvl: i_x + 6 + 6i_x + 16 + I + i_x = 10 \Rightarrow 8i_x + I = -7 \end{array}\right\}$$

$$\Rightarrow v = \frac{17}{8}I - \frac{112}{8}$$

یادداشت

فصل ششم

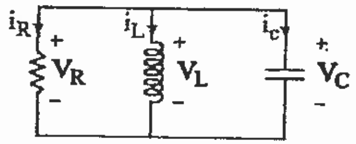
مدارهای الکتریکی مرتبه دوم

۶-۱ تابع مدارات مرتبه دوم و استفاده از معادلات دیفرانسیل

مدار RCL موازی خطی تغییرناپذیر با زمان

الف) ورودی صفر

شکل زیر اتصال موازی سه عنصر خطی، مقاومت، خازن و سلف نشان می‌دهد که همگی تغییرناپذیر با زمان می‌باشند، اگر فرض کنیم مدار در حالت ورودی صفر باشد (مدار با شرایط اولیه کار می‌کند).



شکل ۶-۱ مدار RLC موازی ورودی صفر و شرایط اولیه $v_c(0)=V_0$ ، $i_L(0)=I_0$

معادلات مربوط به مدار فوق بصورت زیر می‌باشد:

$$\left.\begin{array}{l} v_C=v_R=v_L \\ i_C+i_R+i_L=0 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases} C\dfrac{dv_c}{dt}+\dfrac{v_c}{R}+\dfrac{1}{L}\int_0^t v_c(\tau)\,d\tau+I_0=0 & (۶-۱)\\ C\dfrac{dv_L}{dt}+\dfrac{v_L}{R}+\dfrac{1}{L}\int_0^t v_L(\tau)\,d\tau+I_0=0 & (۶-۲)\end{cases}$$

$$\Rightarrow LC\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{1}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L=0 \qquad (۶-۳)$$

$$\frac{di_L(0)}{dt}=\frac{v_L(0)}{L}=\frac{v_c(0)}{L}=\frac{V_0}{L} \qquad (۶-۴)$$

برای مدار فوق که یک مدار مرتبه دوم می‌باشد دو پارامتر α (ثابت میرایی)، ω_0(فرکانس تشدید) تعریف می‌کنیم:

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\left(\frac{rad}{sec}\right), \ \alpha = \frac{1}{2RC} \qquad (۵-۶)$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 i_L}{dt^2} + 2\alpha \frac{di_L}{dt} + \omega_0^2 i_L = 0 \qquad (۶-۶)$$

که چند جمله‌ای مشخصه معادله فوق بصورت زیر می‌باشد:

$$F(s) = s^2 + 2\alpha s + \omega_0^2 \qquad (۷-۶)$$

نقاطی که به ازای s، مقدار $F(s)$ صفر می‌باشد، فرکانس طبیعی مدار مربوطه می‌نامند.

$$F(s) = 0 \Rightarrow s_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \frac{-1}{2RC} + \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (۸-۶)$$

$$s_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} = \frac{-1}{2RC} - \sqrt{\left(\frac{1}{2RC}\right)^2 - \frac{1}{LC}} \qquad (۹-۶)$$

$$\omega_d = \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \qquad (۱۰-۶)$$

یک مدار مرتبه ۲، شامل چهار حالت مختلف می‌باشد:

۱- بی‌اتلاف (نوسانی):

تحت چنین شرایطی مقدار مقاومت بی‌نهایت بوده $(R = \infty)$ درنتیجه خواهیم داشت:

$\alpha = 0 \Rightarrow$ هر دو فرکانس طبیعی مدار مربوطه مختلط می‌باشد

$$\Rightarrow s_1 = j\omega_0 \ , \ s_2 = -\omega_0 \qquad (۱۱-۶)$$

تحت چنین شرایطی، مقدار $i_L(t)$ از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$i_L(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi) \qquad (۱۲-۶)$$

که مقادیر ثابت A و ϕ (فاز) به شرایط اولیه روی عناصر مدار، بستگی دارند.

۲- میرایی $(\alpha \neq 0)$

اگر مقدار α مخالف با صفر باشد، مدار در حالت میرایی بوده، که انواع مختلف میرایی عبارتند از:

- **میرایی ضعیف:** در چنین میرایی $\alpha < \omega_0$ بوده و مقادیر فرکانس طبیعی، مزدوج مختلط بوده که مقدار آنها S_1, S_2 می‌باشد:

$$\begin{matrix} s_1 = -\alpha + j\omega_d \\ s_2 = -\alpha - j\omega_d \end{matrix} \ , \ \omega_d = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} \qquad (۱۳-۶)$$

و جریان سلف در چنین مداری از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$i_L(t) = Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_\alpha t + \phi) \qquad (۱۴-۶)$$

مقادیر A و ϕ ثابت می‌باشد و به شرایط اولیه بستگی دارد.

- **میرایی بحرانی (Critical damped):** تحت چنین شرایطی $\alpha = \omega_0$ بوده و هر دو فرکانسهای طبیعی S_1, S_2 حقیقی و مساوی می‌باشند.

و جریان در سلف در مدار مربوطه از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$i_L(t) = (A + Bt)e^{-\alpha t} \qquad (۱۵-۶)$$

مقادیر A , B ثابت بوده و به شرایط اولیه موجود در مدار بستگی دارد.

- **میرایی شدید (Over damped):** در چنین وضعیتی $\alpha > \omega_0$ بوده و فرکانسهای طبیعی S_1, S_2 هر دو حقیقی و منفی می‌باشند و جریان موجود در سلف (i_L) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$i_L(t) = A_1 e^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \qquad (۱۶-۶)$$

نکته: در میرایی شدید مقادیر A , B از روابط زیر می‌توان بدست آورد.

$$\begin{cases} A + B = i_L(0) & (۱۷-۶) \\ As_1 + Bs_2 = \dfrac{V_0}{L} = \dfrac{di_L(0)}{dt} & (۱۸-۶) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} A = \left(\dfrac{V_0}{L} - s_2 I_0\right) \cdot \left(\dfrac{1}{s_1 - s_2}\right) & (۱۹-۶) \\ B = \left(\dfrac{V_0}{L} - s_1 I_0\right)\left(\dfrac{1}{s_2 - s_1}\right) & (۲۰-۶) \end{cases}$$

$$\begin{cases} V_c(t) = \dfrac{V_0}{s_1 - s_2}\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_2 t}\right) + \dfrac{LI_0 s_1 s_2}{s_1 - s_2}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right) & (۲۱-۶) \\ i_L(t) = \dfrac{V_0}{(s_1 - s_2)L}\left(e^{s_1 t} - e^{s_2 t}\right) + \dfrac{I_0}{s_1 - s_2}\left(s_1 e^{s_1 t} - s_2 e^{s_1 t}\right) & (۲۲-۶) \end{cases}$$

نکته: تحت شرایط بی‌اتلاف $(R = \infty)$ جریان سلف و ولتاژ خازن از روابط زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} V_c(t) = \dfrac{V_0}{L\omega_0}\sin\omega_0 t + I_0\cos\omega_0 t & (۶-۲۳) \\ i_L(t) = V_0\cos\omega_0 t - \omega_0 L I_0 \sin\omega_0 t & (۶-۲۴) \end{cases}$$

نکته: تحت شرایط میرایی ضعیف، جریان سلف و ولتاژ خازن از روابط زیر بدست می‌آید.

$$\begin{cases} V_c(t) = V_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_\alpha t - \dfrac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_\alpha t\right) - \dfrac{L\omega_0^2}{\omega_d} I_0 e^{-\alpha t}\sin\omega_\alpha t \\ i_L(t) = I_0 e^{-\alpha t}\left(\cos\omega_\alpha t + \dfrac{\alpha}{\omega_d}\sin\omega_\alpha t\right) + \dfrac{V_0}{\omega_d L} e^{-\alpha t}\sin\omega_d t \end{cases}$$

نکته: در میرایی ضعیف اگر R به سمت بینهایت میل کند. $(\alpha \to 0)$ مدار از حالت میرایی به حالت نوسانی سینوسی تبدیل می‌شود که فرکانس آن ω_0 می‌باشد. (ω_0 فرکانس نوسان (تشدید) و ω_d فرکانس نوسان میرایی یا فرکانس تشدید طبیعی می‌نامند).

نکته: ضریب کیفیت برای یک مدار درجه ۲، (مدار صفحه اول) از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$Q = \frac{R}{L\omega_0} = RC\omega_0 = \frac{\omega_0}{2\alpha} = \sqrt{\frac{C}{L}}R \qquad (۶-۲۵)$$

هر چه میرایی شدیدتر می‌شود، ضریب کیفیت (Q) کاهش می‌یابد، (برای کاهش میرایی، در یک مدار RLC بایستی مقدار R افزایش دهیم).

نکته: مقادیر Q برحسب درجه میرایی به صورت زیر تعریف می‌شود:

- میرایی شدید $Q < \frac{1}{2}$
- میرایی بحرانی $Q = \frac{1}{2}$
- میرایی ضعیف $Q > \frac{1}{2}$
- بی‌اتلاف $Q = \infty$

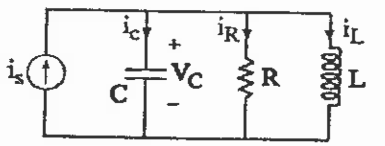
نکته: در مدارهای پسیو عملی $Q = \infty$ وجود ندارد این بدان معنی است که نوسان سینوسی ناشی از شرایط اولیه غیرممکن است.

نکته: با فرض $Q \gg 1$، دامنه نوسان میرایی، پس از Q پریود زمانی به ۴/۳ درصد مقدار اولیه نوسان می‌رسد.

نکته: اگر در یک مدار RLC موازی مقادیر CL ثابت و R تغییر کند، فرکانس تشدید (رزونانس) ثابت می‌ماند اما ضریب کیفیت مدار تغییر می‌کند.

ب) شرایط اولیه صفر

پاسخ مدار با شرایط اولیه صفر و ورودی غیرصفر، پاسخ حالت صفر مدار می‌گویند. که این ورودی در یک زمان دلخواه مانند t_1 به مدار اعمال می‌شود در حالیکه مدار برای $t = t_1^-$ در حالت صفر می‌باشد و این بدین معناست که جریان داخل سلف و ولتاژ دو سر خازن درست قبل از اعمال ورودی (در لحظه $t = t_1^-$) صفر می‌باشند و شکل مدار مربوطه به صورت زیر می‌باشد:



شکل ۶-۲ مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان

روابط مربوط به این مدار بصورت زیر می‌باشد:

$$LC\frac{d^2 i_L}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{di_L}{dt} + i_L = i_s(t)\ ,\ t \geq t_1^+ \qquad (۶-۲۶)$$

$$i_L(t_1^-) = 0\ ,\ \frac{di_L(t_1^-)}{dt} = \frac{v_c(t_1^-)}{L} = 0 \qquad (۶-۲۷)$$

با توجه به معادله فوق، یک معادله دیفرانسیلی خطی و ناهمگن بوده و ضرایب مربوطه ثابت می‌باشند، جواب آن شامل دو قسمت مختلف می‌باشد:

۱- جواب همگن، یعنی جواب معادله $i_s(t) = 0$ می‌باشد $(i_h) \equiv$ پاسخ ورودی صفر

۲- جواب خاص، یعنی جواب معادله دیفرانسیل ناهمگن که $i_s(t) \neq 0$ می‌باشد (i_p)

در حالت اول (۱) جواب معادله بصورت حالتهای قبلی که برای شرایط ورودی صفر (حالت الف) بررسی شده می‌باشد.

حالت میرایی شدید (overdamped):

$$i_h = Ae^{s_1 t} + Be^{s_2 t} \qquad (۶-۲۸)$$

$$B = A^* \qquad (۶-۲۹)$$

$$i_h = 2|A|e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t + \hat{A}) \qquad (۶-۳۰)$$

$$\hat{A} = |A|\angle A \qquad (۶-۳۱)$$

حالت میرایی بحرانی:

$$i_h=(A+Bt)e^{-\alpha t} \qquad (۶-۳۲)$$

حالت میرایی ضعیف:

$$i_h=Ae^{-\alpha t}\cos(\omega_\alpha t+\phi) \qquad (۶-۳۳)$$

حالت بی‌اتلاف:

$$i_h=A\cos(\omega_\circ t+\phi) \qquad (۶-۳۴)$$

$$\omega_\circ=\frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad (۶-۳۵)$$

$$\omega_d=\sqrt{\alpha^2-\omega_\circ^2} \qquad (۶-۳۶)$$

اما جواب خاص (۲) معادله فوق (i_p) به ورودی‌های مدار بستگی دارد که می‌تواند به شکل‌های مختلفی وجود داشته باشد:

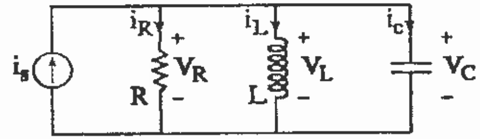
۱- ورودی پله باشد، جواب خاص(i_p) بصورت یک ثابت در نظر می‌گیرند.

۲- ورودی سینوسی باشد، جواب خاص بصورت یک سینوسی در نظر گرفته می‌شود.

تبصره: پاسخ حالت صفر یک مدار خطی، تابع خطی از ورودی می‌باشد.

برای بدست آوردن پاسخ حالت صفر یک RLC موازی با ورودی پله در زیر توضیح داده شده است:

«مدار RLC موازی زیر در نظر بگیرید»



شکل ۶-۳ مدار RLC موازی

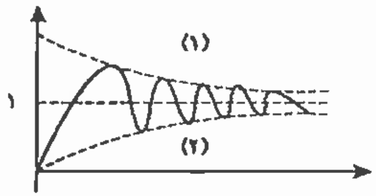
$$\left.\begin{aligned}&LC\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L=u(t)\\&i_L(0^-)=0\ ,\ \frac{di_L}{dt}(0^-)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow i_L(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t}+1 \text{ یا } i_L(t)=(A+Bt)e^{-\alpha t}+1 \qquad (۶-۳۷)$$

$$\Rightarrow i_L(t)=\left[\frac{1}{s_1-s_2}\left(s_2e^{s_1t}-s_1e^{s_2t}\right)+1\right]u(t)=\left[1-\frac{\omega_\circ}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_\alpha t-\phi)\right]u(t) \qquad (۶-۳۸)$$

در مدارات مرتبه دوم، مانند مرتبه اول پاسخ کامل شامل دو قسمت، حالت گذرا و حالت دائم می‌شود که حالت گذرا می‌تواند یک نمایی میرا یا سینوسی میرا باشد در حالی که پاسخ حالت دائم شبیه به ورودی بوده و به ورودی اعمالی به مدار بستگی دارد.

نکته: برای یک مدار RLC موازی تحت شرایط میرایی شدید، ضعیف، پاسخ مدار (شکل موج جریان سلف)، i_L به ورودی پله به صورت زیر می‌باشد:

الف) میرایی ضعیف



شکل ٦-٤ پاسخ پله موازی RLC موازی تحت شرایط میرایی ضعیف

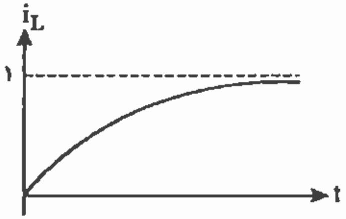
معادله پوش بالایی (۱) بصورت زیر می‌باشد:

$$i_{L_1}(t)=1+\frac{\omega_\circ}{\omega_d}e^{-\alpha t} \qquad (۶-۳۹)$$

و معادله پوش پایینی (۶-۴۰) $i_{L_2}(t)=1-\frac{\omega_\circ}{\omega_d}e^{-\alpha t}$ می‌باشد.

ب) میرایی شدید

تحت چنین شرایطی پاسخ مدار به ورودی پله مقابل شکل زیر می‌باشد:



شکل ٦-٥ پاسخ پله مدار RLC موازی تحت شرایط میرایی شدید

نکته: ولتاژ دو سر خازن برای دو حالت میرایی بصورت زیر می‌باشد:

الف) میرایی شدید:

$$V_c(t)=L_s\frac{s_1s_2}{s_1-s_2}\left(e^{s_1t}-e^{s_2t}\right)u(t) \qquad (۶-۴۱)$$

ب) میرایی ضعیف:

$$V_c(t)=\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\omega_0}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_\alpha t\,u(t) \qquad (۴۲-۶)$$

نکته: در لحظه $t=t_1^+$ برای ورودی پله، تمامی جریان (منبع جریان) از خازن می‌گذرد و این باعث افزایش تدریجی ولتاژ دو سر خازن و در نتیجه باعث افزایش ولتاژ دو سر مقاومت و سلف می‌شود (در لحظه $t=t_1^+$ خازن اتصال کوتاه می‌باشد).

نکته: پس از مدت زمان طولانی $(t=\infty)$ مدار به حالت دائمی می‌رسد در نتیجه داریم:

$$\frac{di_L}{dt}=0,\ \frac{di_L^2}{dt^2}=0 \qquad (۴۳-۶)$$

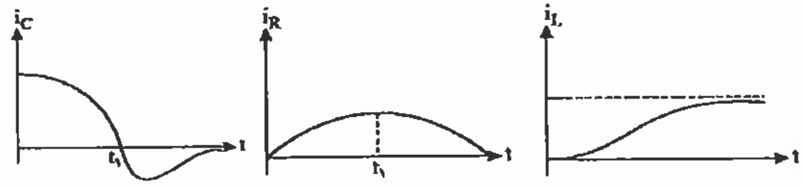
$$i_L=i_s \qquad (۴۴-۶)$$

$$i_R=0 \qquad (۴۵-۶)$$

$$V_c(\infty)=V_R(\infty)=V_L(\infty)=0 \qquad (۴۶-۶)$$

در نتیجه سلف برای یک منبع جریان ثابت در زمان $t=\infty$ مانند یک مدار اتصال کوتاه عمل می‌کند.

نکته: برای حالت میرایی شدید $\left(Q<\frac{1}{2}\right)$ شکل موج جریان در مقاومت، خازن و سلف به صورت زیر می‌باشد:



(ج) (ب) (الف)

شکل ۶-۶ (الف) شکل موج جریان در مقاومت (ب) خازن (ج) سلف

- اگر ورودی مدار ضربه باشد، تحلیل مدار RLC موازی به صورت زیر می‌باشد:

$$\left.\begin{aligned}&LC\frac{d^2i_L}{dt^2}+\frac{L}{R}\frac{di_L}{dt}+i_L=\delta(t)\\&i_L(0^-)=0\ ,\ \frac{di_L}{dt}(0^-)=0\end{aligned}\right\}\Rightarrow\frac{di_L(0^+)}{dt}=\frac{1}{LC} \qquad (۴۷-۶)$$

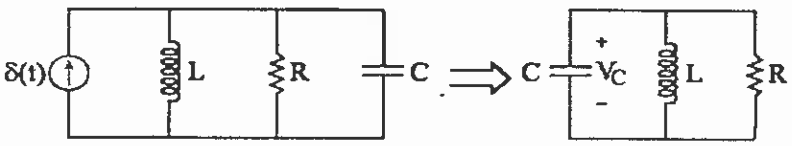
برای حالت میرایی ضعیف پاسخ ضربه مدار ($i_L(t)$) به صورت زیر می‌باشد:

$$i_L(t)=\frac{\omega_0^2}{\omega_d}e^{-\alpha t}\sin\omega_d t\,u(t) \qquad (۴۸-۶)$$

و ولتاژ دو سر خازن از رابطه زیر بدست می‌آید:

$$v_c(t)=\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{\omega_0^2}{\omega_d}e^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\phi)u(t) \qquad (۴۹-۶)$$

نکته: یک مدار RLC موازی با ورودی منبع جریان ضربه معادل مدار زیر می‌باشد:



(الف) (ب)

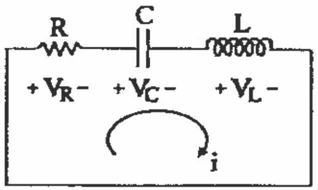
شکل ۶-۷ (الف) موازی RLC موازی با ورودی منبع جریان $\delta(t)$ و شرایط اولیه صفر

(ب) مدار RLC موازی با ورودی صفر و شرط اولیه $V_c(0)=\frac{1}{C}$

که ولتاژ اولیه خازن $V_c(0^+)$، $\frac{1}{C}$ می‌باشد.

نکته: وجود سلف و خازن در یک مدار حداقل یک سیستم درجه ۲ به وجود می‌آورد؛ یعنی مداری که با یک معادله دیفرانسیل خطی دارای مشتق دوم و یا با دو معادله دیفرانسیل خطی همزمان دارای مشتق اول، بیان می‌شود.

۶-۲ مدار RLC سری خطی و تغییرناپذیر با زمان



شکل ۶-۸ مدار RLC سری خطی و تغییرناپذیر با زمان

$$L\frac{di}{dt}+Ri+\frac{1}{C}\int_{t_1}^{t} i\,d(t)+v_c(t_1)=0 \quad (۵۰-۶)$$

$$L\frac{di^2}{dt}+R\frac{di}{dt}+\frac{1}{C}i=0 \quad (۵۱-۶)$$

تمام بحثهای راجع به مدار RLC موازی برای RLC سری صادق می‌باشد که شرایط اولیه ولتاژ خازن و جریان سلف معادل شرایط اولیه جریان سلف و ولتاژ خازن در حالت سری می‌باشد و پاسخ جریان برای مدار RLC موازی پاسخ ولتاژ سری می‌باشد در نتیجه برای مدار RLC سری در حالت فوق میرا، پاسخ مدار بصورت زیر می‌باشد:

$$i(t)=Ae^{s_1t}+Be^{s_2t} \quad (۵۲-۶)$$

$$s_1,s_2=-\frac{R}{2L}\pm\sqrt{\left(\frac{R}{2L}\right)^2-\frac{1}{LC}}=-\alpha\pm\sqrt{\alpha^2-\omega_0^2} \quad (۵۳-۶)$$

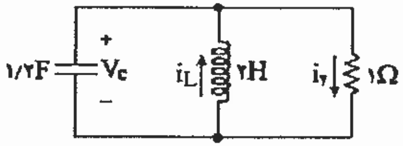
$$\alpha=\frac{R}{2L},\omega_0=\frac{1}{\sqrt{LC}},\omega_d=\sqrt{\omega_0^2-\alpha^2} \quad (۵۴-۶)$$

و پاسخ میرایی ضعیف به صورت $i(t)=e^{-\alpha t}\left(A\cos\omega_d+B\sin\omega_d t\right)=ke^{-\alpha t}\cos(\omega_d t+\phi)$ بوده در حالی که پاسخ میرایی بحرانی به صورت $i(t)=e^{-\alpha t}(At+B)$ می‌باشد.

نکته: اگر مقاومت یک مدار RLC موازی بی‌نهایت باشد و یا مقاومت یک مدار RLC سری صفر باشد یک حلقه LC ساده خواهیم داشت که پاسخ نوسانی آن برای همیشه برقرار می‌ماند.

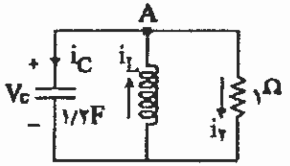
حل مسائل فصل ششم

۱- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۹) فرض کنید که $i_L(0)=\frac{3}{5}A$, $v_c(0)=0V$ باشد در این مدار جریان $i_2(t)$ را بیابید.



شکل ۶-۹ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱)

حل:



در گره A $KCL: i_c(0)-i_L(0)+i_2(0)=0$

$$i_c=c\frac{dv_c(t)}{dt}=1/2\frac{dv_c(t)}{dt}$$

$$i_L=I_0+\frac{1}{L}\int_0^t v_c(\tau)d\tau \Rightarrow 1/2\frac{dv_c(\tau)}{dt}-\left(I_0-\frac{1}{2}\int_0^t v_c(\tau)d\tau\right)+v_c(\tau)=0$$

$$v_L(t)=-v_c(t)$$

$$i_2(t)=\frac{v_c(\tau)}{1}=v_c(\tau)$$

با مشتق‌گیری در طرفین معادله بالا خواهیم داشت:

$$1/2\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+\frac{1}{2}v_c(t)+\frac{dv_c(t)}{dt}=0\Rightarrow\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+\frac{5}{6}\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{5}{12}v_c(t)=0 \quad (II)$$

$$v_c(0)=0$$

برای محاسبه شرط اولیه $\frac{dv_c(0)}{dt}$ با استفاده از معادله KCL در گره A با قرار دادن $t=0$ داریم:

$$KCL: i_C(0)-i_L(0)+i_2(0)=0$$

$$\Rightarrow 1/2\frac{dv_c(0)}{dt}-I_0+\frac{v_c(0)}{1}=0\Rightarrow\frac{dv_c(0)}{dt}=0/5$$

حال به راحتی می‌توان معادله (II) را با دو شرط اولیه حل کرد.

ابتدا معادله مشخصه را تشکیل می‌دهیم پس با فرض جواب کلی $v_C(t)=ke^{st}$ و جایگذاری در (II) داریم:

$$\left(s^2+\frac{5}{6}s+\frac{5}{12}\right)ke^{st}=0$$

$$\Rightarrow s^2+\frac{5}{6}s+\frac{5}{12}=0\Rightarrow s=-\frac{5}{12}\pm y\frac{\sqrt{35}}{12}\Rightarrow v_c(t)=ke^{-\frac{5}{12}t}\cos\left[\frac{\sqrt{35}}{12}t+\theta\right]$$

$$a=-\frac{5}{12}\quad,\quad\omega_0=\frac{\sqrt{35}}{12}$$

حال با استفاده از دو شرط اولیه بدست آمده در بالا (θ,k) را تعیین می‌کنیم.

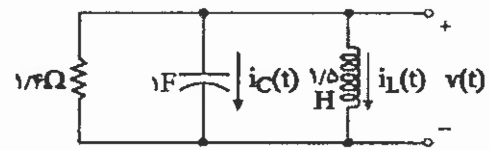
$$v_c(0)=0=k\cos\theta\Rightarrow\cos\theta=0\Rightarrow\theta=\frac{\pi}{2}$$

$$\frac{dv_c(0)}{dt}=0/5=-k\frac{5}{12}\cos\theta-\frac{\sqrt{35}}{12}k.\sin\theta=-k\frac{\sqrt{35}}{12}\Rightarrow k=-\frac{24}{\sqrt{35}}$$

$$v_c(t)=-\frac{24}{\sqrt{35}}e^{-\frac{5}{12}t}\cos\left(\frac{\sqrt{35}}{12}t+\frac{\pi}{2}\right)$$

۲- در مدار الکتریکی شکل (۶-۱۰) فرض کنید که $v'(0)=0^V$, $v(0)=1^V$ باشد در این مدار برای زمان $t\ge 0$ مطلوبست:

الف) ولتاژ $v(t)$ ؛ ب) جریان $i_L(t)$ ؛ ج) جریان $i_c(t)$.



شکل ۶-۱۰ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۲)

حل:

$$KCL:\frac{v(t)}{\frac{1}{4}}+\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\frac{1}{5}}\int v(t)dt=0\Rightarrow\begin{cases}\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv_c(t)}{dt}+5v(t)=0\\ v(0)=1\ ,\ v'(0)=0\end{cases}$$

$$s^2+4s+5=0\Rightarrow s=-2\pm j$$

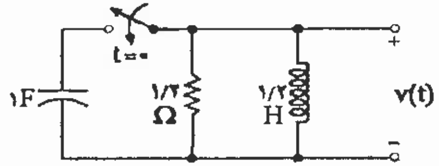
ابتدا تشکیل معادله مشخصه:

$$\alpha=1\ ,\ \omega_0=1\Rightarrow v(t)=ke^{-at}\cos(\omega_0t+\theta)=ke^{-2t}\cos(t+\theta)$$

$$v(0)=1=k\cos\theta$$

$$v(0)=0-2k\cos\theta-k\sin\theta\Rightarrow\begin{cases}k=-\sqrt{5}\\ \theta=180-tg^{-1}2=116/5\\ v(t)=-\sqrt{5}.e^{-2t}\cos\left(t+116/5^\circ\right)\end{cases}$$

۳- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۱۱)، قبل از بسته شدن کلید در زمان $t=0$، خازن به مقدار ۳۷ شارژ شده است. پس از بسته شدن کلید و برای زمان $t\ge 0$ ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



شکل ۶-۱۱ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۳)

حل:

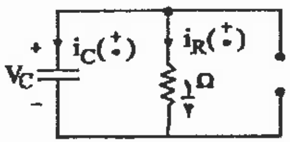
ابتدا تشکیل معادله درجه دوم

$$KCL:\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{2}}\int_0^t v(\tau)d\tau=0\Rightarrow\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\frac{dv(t)}{dt}+2v(t)=0$$

تعیین شرایط اولیه $v(t)$:

برای تعیین $v'(t)$ مدار را در لحظه $t=0^+$ رسم می‌کنیم:

در لحظه $t=0^\circ$ سلف مدار باز است.



$$KCL(A):i_c(0^+)+i_R(0^+)=0\Rightarrow\frac{dv(0^+)}{dt}+\frac{v(0^+)}{\frac{1}{2}}=0$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt}=-6$$

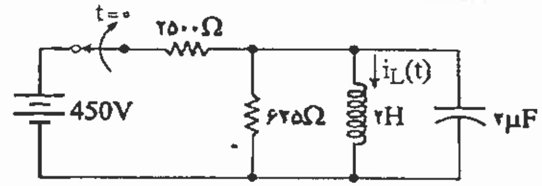
حال تشکیل معادله شاخصی برای حل:

$$s^2+2s+2=0 \Rightarrow S=-1\pm j\sqrt{3}$$
$$v(t)=ke^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t+\theta\right)$$
$$v(t)=3=k\cos\theta$$

تعیین ضرایب (θ, k):

$$v'(0)=-6=-k\cos\theta-\sqrt{3}k\sin\theta \Rightarrow \begin{cases} k=2\sqrt{3} \\ \theta=30^\circ \end{cases}$$
$$\Rightarrow v(t)=2\sqrt{3}e^{-t}\cos\left(\sqrt{3}t+30^\circ\right)$$

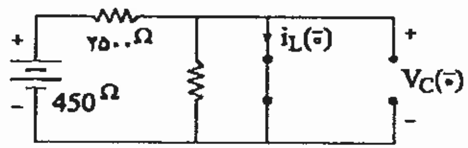
۴- در مدار الکتریکی شکل (۶-۱۲)، کلید موردنظر به مدت طولانی بسته بوده و در زمان $t=0$، باز می‌شود، نحوه تغییرات جریان $i(t)$ را برای $t \ge 0$ بیابید.



شکل ٦-۱۲ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (٤)

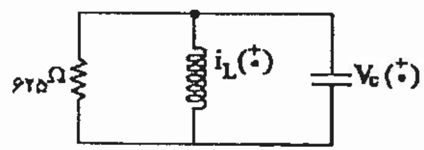
حل:

چون مدار در لحظهٔ $t=0^-$ به حالت دایمی رسیده است بنابراین در این لحظه سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. و شکل مدار به صورت مقابل می‌باشد.



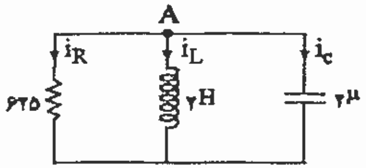
$$i_L\left(0^-\right)=i_L\left(0^+\right)=\frac{450}{2500}=\frac{\alpha}{50}$$
$$v_c\left(0^-\right)=v_c\left(0^+\right)=0$$

حال مدار را در لحظهٔ 0^+ رسم می‌کنیم:



$$v_L\left(0^+\right)=v_c\left(0^+\right) \Rightarrow L\frac{di_L\left(0^+\right)}{dt}=v_c\left(0^+\right)$$
$$2\frac{di_L\left(0^+\right)}{dt}=0 \Rightarrow \frac{di_L\left(0^+\right)}{dt}=0$$

حال معادله دیفرانسیل مدار را تشکیل می‌دهیم برای این کار مدار را برای $t>0$ رسم می‌کنیم.

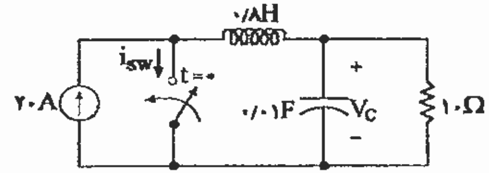


$$KCL: i_R(t)+i_L(t)+i_C(t)=0$$
$$v_L(t)=v_c(t)$$
$$v_L(t)=L\frac{di_L(t)}{dt}=2\frac{di_L(t)}{dt}$$
$$\Rightarrow \frac{v_L(t)}{625}+i_L(t)+2\times10^{-6}\frac{dv_L(t)}{dt}=0 \Rightarrow \frac{2}{625}\frac{di_L(t)}{dt}+i_L(t)\times4\times10^{-6}\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}=0$$
$$\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}+800\frac{di_L(t)}{dt}+25\times10^{4}i_L(t)=0 \Rightarrow s^2+800s+250000=0$$
$$s=-400\pm j300$$
$$i_L(t)=ke^{-400t}\cos(300t+\theta)$$

با استفاده از شرایط اولیه محاسبه شده در بالا مجهولهای θ, K را بدست می‌آوریم.

$$i_L\left(0^+\right)=\frac{9}{25}=k\cos\theta$$
$$\frac{di_L\left(0^+\right)}{dt}=0=-400k\cos\theta-300k\sin\theta \Rightarrow tg\theta=\frac{4}{3}, \theta=-tg\frac{4}{3}$$
$$\cos^2\theta=\frac{1}{1+tg^2\theta}=\frac{1}{1+\left(\frac{4}{3}\right)^2} \Rightarrow \cos\theta=\frac{3}{5}$$
$$k=\frac{\frac{9}{25}}{\cos\theta}=\frac{\frac{9}{25}}{\frac{3}{5}}=\frac{3}{5} \quad \Rightarrow \quad i(t)=\frac{3}{5}e^{-200t}\cos\left(300t-tg^{-1}\left(\frac{4}{3}\right)\right)$$

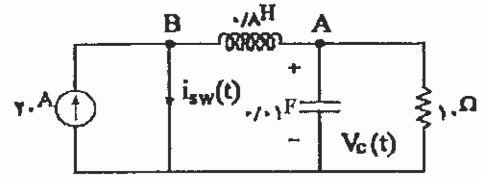
۵- مدار الکتریکی در شکل (۶-۱۳) موردنظر است. در این مدار، کلید به مدت طولانی باز بوده و در زمان $t=0$ بسته می‌گردد. برای زمان $t\ge 0$ و نحوه تغییرات $v_c(t)$, $i_{sw}(t)$ را بیابید.



شکل ۶-۱۳ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۵)

حل:

ابتدا شکل مدار را برای $t\ge 0$ رسم می‌کنیم تا معادلات دیفرانسیل $v_c(t)$, $i_{sw}(t)$ را بدست آوریم.

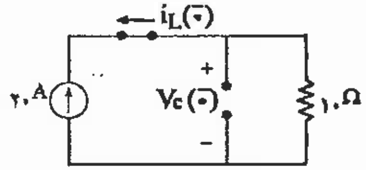


شکل (I)

$$\text{KCL در گره A}: 0.01\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{v_c(t)}{10}+\frac{1}{0.8}\int v_c(t)dt=0\Rightarrow$$

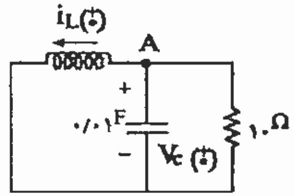
$$\frac{d^2v_c(t)}{dt}+10\frac{dv_c(t)}{dt}+125\;v_c(t)=0 \qquad (I)$$

تعیین شرایط اولیه: مدار در زمان $t=0^-$ به حالت دایمی رسیده یعنی سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز بوده است.



$$i_L(0^-)=-20^A \qquad v_c(0^-)=10\times 20=200^V$$

مدار را در لحظهٔ $t=0^+$ رسم می‌کنیم.



$$\text{KCL در گره A}: 0.01\frac{dv_c(0^+)}{dt}+\frac{v_c(0^+)}{10}+i_L(0^+)=0$$

$$0.01\frac{dv_c(0^+)}{dt}+\frac{200}{10}-20=0\Rightarrow\frac{dv_c(0^+)}{dt}=0$$

حال تشکیل معادلهٔ شاخصی برای حل معادله دیفرانسیل مرتبه دوم (۱)

$$s^2+10s+125=0$$

$$s=-5\pm 10j \quad\rightarrow v_c(t)=ke^{-5t}\cos(10t+\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_c(0)=200=k\cos\theta \\ v_c'(0)=0-5k\cos\theta-10k\sin\theta \end{array}\right\}\Rightarrow k=\frac{200}{\cos\left(tg^{-1}\left(\frac{1}{4}\right)\right)}\ ,\ \theta=-tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)$$

$$v_c(t)=\frac{200}{\cot g^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)}e^{-5t}\cos\left(10t-tg^{-1}\left(\frac{1}{2}\right)\right)$$

برای نوشتن معادله دیفرانسیل $i_{sw}(t)$، در شکل (I) طوری عمل می‌کنیم که بتوانیم $i_{sw}(t)$ را برحسب منبع 20^A و $v_c(t)$ بنویسیم. پس KCL مربوط به دو گره A , B را با هم جمع می‌کنیم.

$$\text{KCL در گره A} + \text{KCL در گره B}: -20+i_{sw}(t)0.01\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{v_c(t)}{10}=0$$

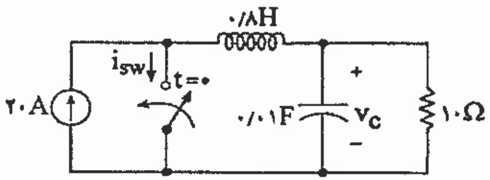
$$i_{sw}(t)=20-0.01\frac{dv_c(t)}{dt}-\frac{1}{10}v_c(t)=20-0.01$$

$$\left(-5ke^{-5t}\cos(10t+\theta)-10ke^{-5t}\sin(10t+\theta)\right)$$

$$-\frac{1}{10}ke^{-5t}\cos(10t+\theta)=20+ke^{-5t}\left(-0.05\cos(10t+\theta)+10\sin(10t+\theta)\right)$$

$$=20-\sqrt{10^2+0.05^2}\,ke^{-5t}\cos\left(10t+\theta+tg^{-1}20\right)$$

۶- کلید مدار ارائه شده در شکل (۶-۱۴) به مدت طولانی باز بوده و $t=0$ در بسته می‌شود. مقادیر $v_c(t)$, $i_L(t)$ برای $t\ge 0$ بیابید.



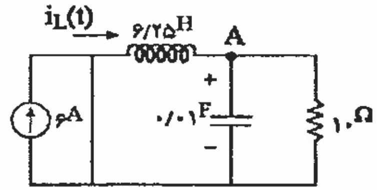
شکل ۶-۱۴ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۶)

حل:

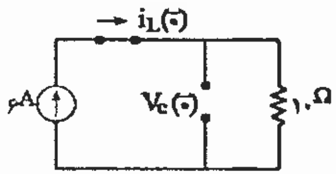
این مسئله شبیه مسئله قبل است، به مانند مسئله قبل عمل می‌کنیم.

KCL در گره A: $0/01\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{v_c(t)}{10}+\frac{1}{6/25}\int v_c(\tau)d\tau=0$

$$\frac{d^2v_c(t)}{dt^2}+10\frac{dv_c(t)}{dt}+16v_c(t)=0$$

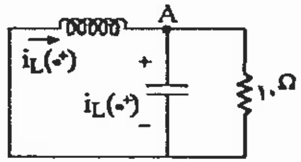


تعیین شرایط اولیه $v_c(0^-)$ ، $i_L(0^-)$:



$$i_L(0^-)=6^A=i_L(0^+)$$
$$v_c(0^-)=60^V=v_c(0^+)$$

حال تعیین $\frac{dv_c(0^+)}{dt}$:



KCL در گره A: $0/01\frac{dv_c(0^+)}{dt}+\frac{v_c(0^+)}{10}-i_L(0^+)=0\Rightarrow\frac{dv_c(0^+)}{dt}=0$

$$s^2+10s+16=0\Rightarrow s=-8,-2$$

$$\left.\begin{array}{l} v_c(t)=k_1e^{-8t}+k_2e^{-2t}\Rightarrow v_c(0)=60=k_1+k_2 \\ \frac{dv_c(0^+)}{dt}=0=-8k_1-2k_2 \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}k_1=-20\\k_2=80\end{cases}$$

تعیین $i_L(t)$: برای بدست آوردن $i_L(t)$ در مدار شکل (I) در حلقه شامل سلف و خازن معادله KVL می‌نویسیم.

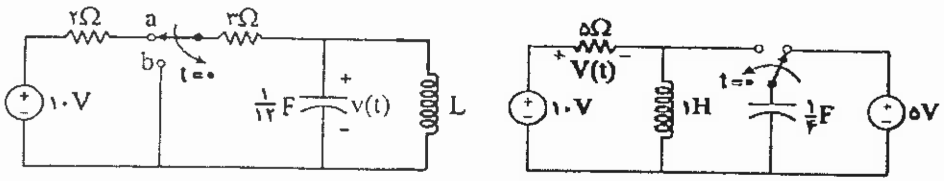
$$L\frac{di_L(t)}{dt}+v_c(t)=0\Rightarrow 6/25\frac{di_L(t)}{dt}=20e^{-8t}-80e^{-2t}$$

با انتگرال‌گیری از طرفین و توجه به اینکه $i_L(0)=6^A$ آنگاه خواهیم داشت:

$$i_L=\frac{1}{6/25}\left(-\frac{20}{8}e^{-8t}-\frac{80}{-2}e^{-2t}+k\right)$$

$$i_L(0)=6=\frac{1}{6/25}\left(-\frac{5}{2}+40+k\right)\to k=0\to i_L(t)=-0/4e^{-8t}+6/4e^{-2t}$$

۷- در مدارهای الکتریکی شکل (۶-۱۵) کلید پس از مدت زمان طولانی و در زمان $t=0$ تغییر وضعیت می‌دهند. در این دو مدار، $v(t)$ را بیابید.

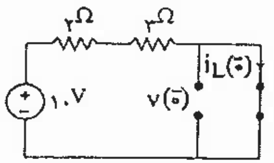


شکل ۶-۱۵ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۷)

حل:

شکل سمت راست:

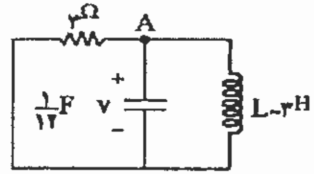
ابتدا مدار را در زمان $t=0^-$ رسم می‌کنیم و $v=(0^-)$ ، $i_L(0^-)$ را بدست می‌آوریم.



$$v_c(0^+)=v_c(0^-)=0\ ,\ i_L(0^-)=i_L(0^+)=\frac{10}{2+3}=2$$

حال مدار را در زمان $t\ge 0$ رسم می‌کنیم تا شرط اولیه $\frac{dv(0^+)}{dt}$ را تعیین کنیم.

ظاهراً صورت مسئله L را تعیین نکرده و به نظر می‌رسد. که اشتباه صورت گرفته است و وارد کردن L به شکل پارامتری در حل کمی به معنی به نظر می‌رسد. پس ما با فرض $L=2$ مسئله را حل می‌کنیم.



$$\text{KCL در گره A}: \frac{v(0^+)}{3} + \frac{1}{12}\frac{dv(0^+)}{dt} + i_L(0^+) = 0$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = -24$$

$$\text{KCL در گره A}: \frac{1}{12}\frac{dv(t)}{dt} + \frac{v(t)}{3} + \frac{1}{3}\int_0^t v(\tau)d\tau = 0$$

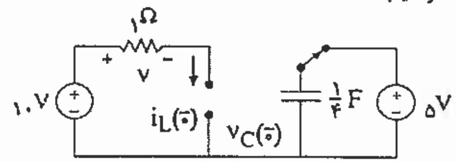
$$\frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = 0$$

$$s^2 + 4s + 4 = 0 \rightarrow s = -2, -2 \Rightarrow v(t) = (k + k't)e^{-2t}$$

$$v(0) = 0 \rightarrow k = 0$$

$$\frac{dv(0)}{dt} = -24 \Rightarrow k' - 2k \begin{Bmatrix} k = 0 \\ k' = -24 \end{Bmatrix} \rightarrow v(t) = -24te^{-2t}$$

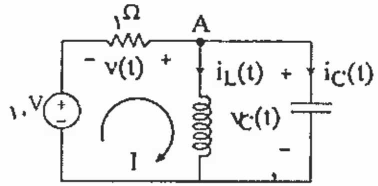
در این مدار در زمان $t = 0^-$ خواهیم داشت:



$$v_c(0^-) = 5^V$$

$$i_L(0^-) = \frac{10}{1} = 10 \quad , \quad v_c(0^-) = 10^V$$

به دو روش می‌توان مدار را حل کرد اول اینکه معادله دیفرانسیل را برحسب $v(t)$ بنویسیم و با تعیین شرایط اولیه $v(0^+)$, $\frac{dv(0^+)}{dt}$ معادلهٔ مربوط به آن را مستقیماً حل کنیم و روش دوم اینکه با توجه به kvl در حلقه (I) و $v_c(t)$ را تعیین کنیم و سپس $v(t)$ را از روی آن محاسبه کنیم.



$$\text{KVL}: -10 + v(t) + v_c(t) = 0$$

ما مدار را با روش اول حل می‌کنیم. پس ابتدا معادله دیفرانسیل را برحسب $v(t)$ بدست می‌آوریم.

$$\text{KCL در گره A}: \frac{1}{4}\frac{dv_c(t)}{dt} + \int_0^t v_c(\tau)d\tau + \frac{v_c(t) - 10}{1} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + v_c(t) + \frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{1}{4}\frac{d^2(10 - v_c(t))}{dt^2} + 10 - v_c(t) + \frac{d(10 - v_c(t))}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow -\frac{1}{4}\frac{d^2v_c(t)}{dt^2} + 10 - v_c(t) - \frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

$$\Rightarrow \frac{d^2v(t)}{dt^2} + 4\frac{dv(t)}{dt} + 4v(t) = 40 \qquad (I)$$

شرط اولیه $v(0^+)$: در معادله $\text{KVL}(I)$، $t = 0^+$ را قرار دهیم آنگاه خواهیم داشت:

$$\text{KVL در مش (I) در لحظه } t = 0^+ : v(0^+) + v_c(0^+) = 10 \Rightarrow v(0^+) = 10 - 5 = 5^V$$

شرط اولیه $v'(0^+)$: برای این کار در مدار شکل در لحظهٔ $t = 0^+$ معادله KCL در گره (A) می‌نویسیم.

$$\frac{1}{4}\frac{dv_c(0^+)}{dt} + i_L(0^+) + \frac{v_c(0^+) - 10}{1} = 0$$

$$\frac{dv_c(0^+)}{dt} = -20$$

$$\text{KVL در مش (I)}: -10 + v(t) + v_c(t) = 0 \Rightarrow \frac{dv(t)}{dt} + \frac{dv_c(t)}{dt} = 0$$

$$\frac{dv(0^+)}{dt} = 20$$

حال با گذاشتن $t = 0^+$ در معادله بالا $\frac{dv(0^+)}{dt}$ محاسبه می‌شود.

حالا معادله (I) را با داشتن دو شرط اولیه حل می‌کنیم.

$$\left.\begin{matrix} s^2 + 4s + 4 = 0 \\ s = -2 \ , \ -2 \end{matrix}\right\} \Rightarrow v_n(t) = (k + k't)e^{-2t}$$

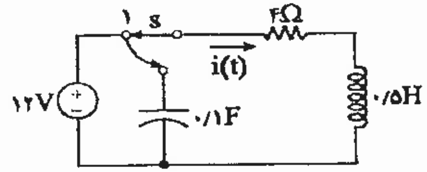
ابتدا معادله شاخصی را تشکیل می‌دهیم. و سپس جواب خصوصی را تعیین می‌کنیم. با فرض $v_p(t)=A$ و گذاشتن در (I) خواهیم داشت:

$$0+0+4A=40\Rightarrow A=10$$

$$v(t)=v_h(t)+v_p(t)=(k+k't)e^{-2t}+10$$

$$\begin{cases}v(0^+)=5=k+10\\ v'(0^+)=20=k'-2(k)\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}k=-5\\ k'=10\end{cases}\Rightarrow v(t)=(-5+10t).e^{-2t}+10$$

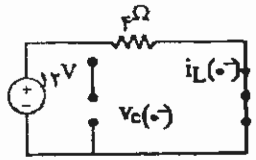
۸- در مدار الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۱۶)، کلید S به مدت طولانی در وضعیت ۱ بوده و در زمان $t=0$ به وضعیت ۲ قرار می‌گیرد. برای زمان $t\geq 0$ جریان $i(t)$ را بیابید.



شکل ۶-۱۶ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۸)

حل:

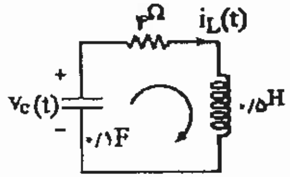
در $t=0^-$ مدار را رسم می‌کنیم تا $i(0^-)$ ، $v_c(0^-)$ را تعیین کنیم.



$$i_L(0^-)=3$$

$$v_c(0^-)=0$$

حال مدار را برای $t\geq 0$ رسم می‌کنیم تا شرط اولیه $\frac{di(0^-)}{dt}$ را تعیین کنیم و معادله دیفرانسیل $i_L(t)$ را هم تشکیل دهیم.



$$KVL: v_c(t)+4i_L(t)+0/5\frac{di_L(t)}{dt}=0$$

با جایگذاری $t=0^+$ در معادله بالا:

$$-v_c(0^-)+4i_L(0^+)+0/5\frac{di_L(0^+)}{dt}=0\Rightarrow\frac{di_L(0^+)}{dt}=-24$$

حالا تشکیل معادله دیفرانسیل:

$$KVL:\frac{1}{0/1}\int_0^t i_L(\tau)d\tau+4i_L(t)+0/5\frac{di_L(t)}{dt}=0$$

$$\frac{d^2i_L(t)}{dt^2}+8\frac{di_L(t)}{dt}+20i_L(t)=0\Rightarrow s^2+8s+20=0\Rightarrow s=-4\pm j2$$

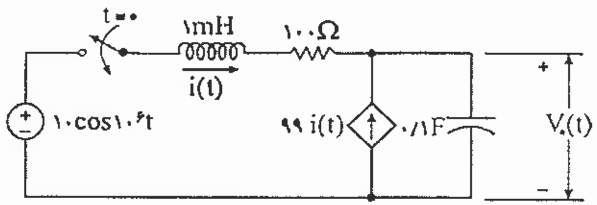
$$i_L(t)=ke^{-4t}\cos(2t+\theta)$$

$$i_L(0^+)=3=k\cos\theta$$

$$\frac{di_L(0^+)}{dt}=-24=-4k.\cos\theta-2k\sin\theta\Rightarrow\begin{cases}\theta=tg^{-1}2\\ k=3\sqrt{5}\end{cases}$$

$$i_L(t)=3\sqrt{5}e^{-4t}\cos(2t+tg^{-1}2)$$

۹- شکل (۶-۱۷) مدار الکتریکی را نشان می‌دهد که کلید S به مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می‌شود. مقدار $v_o(t)$, $i(t)$ را برای $t\geq 0$ بیابید.



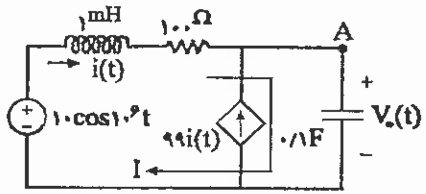
شکل ۶-۱۷ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۹)

حل:

در زمان $t=0^-$ کلید باز بوده بنابراین

$$v_o(0^-)=v_o(0^+)\Rightarrow i(0^-)=0=i(0^+)$$

حال اگر مدار را در $t>0$ رسم کنیم به شکل مقابل خواهد بود.



در گره A $KCL: -i(t)-99i(t)+0/1\frac{dv_0(t)}{dt}=0 \Rightarrow$ در $t=0^+ \Rightarrow \frac{dv_0(0^+)}{dt}=0$

$$KVL: -10\cos 10^6 t+10^{-3}\frac{di(t)}{dt}+100i(t)+v_0(t)=0$$

$$t=0^+ \Rightarrow -10+10^{-3}\frac{di(0^+)}{dt}+100i(0^+)+v_0(0^+)=0 \Rightarrow \frac{di(0^+)}{dt}=10^{+4}$$

حال معادلات دیفرانسیل را برحسب $i(t), v_0(t)$ تشکیل می‌دهیم و با شرایط اولیه بدست آمده در بالا هر کدام از آن معادلات را حل می‌کنیم. اما روش بهتر این است که معادله دیفرانسیل تنها برحسب i(t) را تشکیل دهیم و آن را حل کنیم سپس به معادله KVL به راحتی $v_0(t)$ را با داشتن i(t) و مشتق اول آن حساب کنیم و بدست آوریم.

برای تشکیل معادله برحسب i(t) تنها، به راحتی از دو طرف معادله KVL مشتق می‌گیریم آنگاه خواهیم داشت.

$$10^{-3}\frac{di^2(t)}{dt^2}+100\frac{di(t)}{dt}+\frac{dv_0(t)}{dt}=-10^7\sin 10^6 t \qquad (I)$$

حال باید $\frac{dv_0(t)}{dt}$ را در معادله (I) حذف کنیم برای این کار $\frac{dv_0(t)}{dt}$ را از معادله KCL پیدا می‌کنیم. و آن را در معادله (I) جایگزین می‌کنیم.

$$\frac{dv_0(t)}{dt}=1000i(t) \Rightarrow \frac{d^2i(t)}{dt^2}+2\times 10^5\frac{di(t)}{dt}=-10^{10}\sin 10^{+6}t \qquad (II)$$

معادله شاخصی:

$$s^2+2\times 10^{+5}s=0 \Rightarrow \begin{cases} s=0 \\ s=-2\times 10^{+5} \end{cases} \Rightarrow i_h(t)=k_1+k_2e^{-2\times 10^5 t}$$

$$i_p(t)=A\cos 10^{-6}t+B\sin 10^{-6}t$$

با قرار دادن $i_p(t)$ در معادله (II) و مساوی قرار دادن طرفین معادله A , B را می‌توان پیدا کرد.

$$i_p(t)=\frac{0/2}{104}\cos(10^{+6}t)+\frac{1}{104}\sin(10^{+6})=\frac{1}{520}\cos(10^{+6}t)+\frac{1}{104}\sin(10^{+6}t)$$

$$i(t)=k_1+k_2e^{-2\times 10^{+5}t}+\frac{1}{520}\cos(10^{+6}t)+\frac{1}{104}\sin(10^{+6}t)$$

$$\left.\begin{aligned} & i(0^-)=0=k_1+k_2+\frac{1}{520} \\ & \frac{di(0^-)}{dt}=10^{+4}=-k_2\times 2\times 10^{+5}+\frac{10^6}{104} \end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} k_1=0 \\ k_2=-\frac{1}{520} \end{cases} \Rightarrow i(t)=-\frac{1}{520}e^{-2\times 10^5 t}+\frac{1}{520}\cos(10^{+6}t)+\frac{1}{104}\sin(10^{+6}t)$$

حال محاسبه $v_0(t)$: از معادله KVL به راحتی $v_0(t)$ را برحسب i(t) می‌توان نوشت.

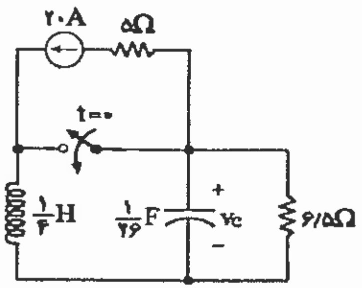
$$v_0(t)=-10^{-3}\frac{di(t)}{dt}-100i(t)+10\cos(10^6t)=-10^{-3}$$

$$\left(\frac{2\times 10^{+5}}{520}e^{-2\times 10^{+5}t}-\frac{1}{520}\times 10^{+6}\sin(10^{+6}t)+\frac{10^6}{104}\cos(10^{+6}t)\right)$$

$$-100\left(-\frac{1}{520}e^{-2\times 10^{+5}t}+\frac{1}{520}\cos(10^{+6}t)+\frac{1}{104}\sin(10^{+6}t)\right)+10\cos(10^6t)$$

$$=\frac{-1}{520}e^{-2\times 10^{+5}}-\left(\frac{10^3}{104}+\frac{10^2}{520}\right)\cos(10^{+6}t)+\left(\frac{10^{+3}}{520}-\frac{100}{104}\right)\sin(10^{+6}t)$$

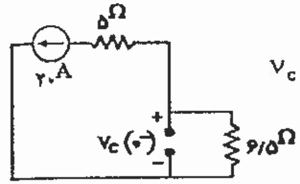
۱۰ – کلید مشخص شده در مدار ارائه شده در شکل (۶-۱۸) به مدت طولانی باز بوده و در $t=0$ بسته می‌شود. در این مدار، تغییرات ولتاژ $v_c(t)$ را برای $t \geq 0$ بیابید.



شکل ۶-۱۸ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۰)

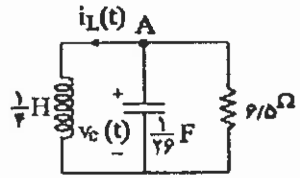
حل:

ابتدا مدار را در $t=۰^-$ رسم می‌کنیم تا شرایط اولیه را در $t=۰^-$ حساب کنیم:



$$v_c(۰^-)=v_c(۰^+)=-۶/۵\times ۲۰=-۱۳^V$$
$$i_L(۰^-)=i_L(۰^+)=۲۰^A$$

بعد از وصل کلید شاخه موازی کلید نقشی در ولتاژ $v_o(t)$ نخواهد داشت بنابراین مدار به شکل مقابل تبدیل می‌شود.



در گره A: $KCL: i_L(t)+\frac{۱}{۲۶}\frac{dv_c(t)}{dt}+\frac{v_c(t)}{۶/۵}=۰$

با جایگزینی $t=۰^+$ در معادله KCL در گره A می‌توانیم $\frac{dv_o(۰^+)}{dt}$ را بدست آوریم.

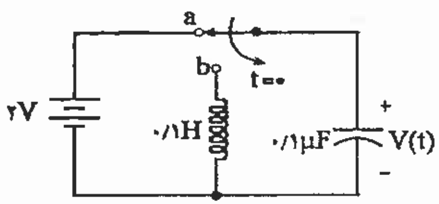
$$\frac{۱}{۲۶}\frac{dv_c(t)}{dt}-\frac{۱۳}{۶/۵}+۲۰=۰$$
$$\frac{dv_C(۰^+)}{dt}=-۴۶۸$$

حال معادله دیفرانسیل بر حسب $V_C(t)$ را بدست می‌آوریم.

$$\frac{۱}{۲۶}\frac{dv_C(t)}{dt}+\frac{v_C(t)}{۶/۵}+\frac{۱}{\frac{۱}{۴}}\int_۰^t v_C(\tau)d\tau=۰$$
$$\frac{d^۲v_C(t)}{dt^۲}+۴\frac{dv_C(t)}{dt}+۱۰۴v_C(t)=۰\Rightarrow s^۲+۴s+۱۰۴=۰\Rightarrow s=-۲\pm j۱۰$$
$$v_C(t)=Ke^{-۲t}\cos(۱۰t+\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l} v_C(۰^+)=-۱۳=k.\cos\theta \\ \frac{dv_C(۰^+)}{dt}=-۴۶۸=-۲k\cos\theta-۱۰k\sin\theta \end{array}\right\}\Rightarrow\begin{cases}\theta=-tg^{-۱}۳/۸\\ k=-۱۳\sqrt{۱۵/۴۴}\end{cases}\Rightarrow$$
$$v_C(t)=-۱۳\sqrt{۱۵/۴۴}e^{-۲t}\cos(۱۰t-tg^{-۱}۳/۸)$$

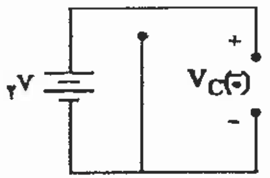
۱۱- در مدار الکتریکی ارائه شده در شکل (۶-۱۹)، کلید مدار به مدت طولانی در وضعیت نشان داده شده قرار دارد. سپس در زمان $t=۰$ کلید، تغییر وضعیت می‌دهد. در این حالت برای زمان $t\geq ۰$، ولتاژ v(t) را بیابید.



شکل ۶-۱۹ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۱)

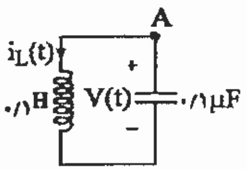
حل:

در وضعیت a در لحظه $t=۰^-$ مقادیر اولیه ولتاژ خازن و جریان سلف به شکل مقابل خواهد بود.



$$v_c(۰^+)=v_c(۰^-)=۲^V$$
$$i_L(۰^-)=i_L(۰^+)=۰$$

در وضعیت (b) مدار به شکل مقابل خواهد بود.



در گره A: $KCL: ۰/۱\times ۱۰^{-۶}\frac{dv(t)}{dt}+i_L(t)=۰$

با جایگزینی $t=۰^+$ در معادله KCL در نقطه (A)

$$\Rightarrow 0/1\times10^{-6}\frac{dv(0^+)}{dt}+i_L(0^+)=0\Rightarrow\frac{dv(0^+)}{dt}=0$$

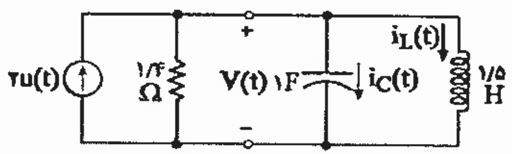
A در گره KCL: $0/1\times10^{-6}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{0/1}\int_0^t v(\tau)d\tau=0\Rightarrow\frac{d^2v(t)}{dt^2}+10^8v(t)=0$

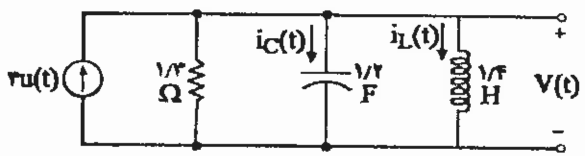
$$s^2+10^8=0\Rightarrow s=\pm j10^4$$

$$v(t)=k\cos(10^4t+\theta)$$

$$\left.\begin{array}{l}v(0^+)=2k\cos\theta\\ v'(0^+)=0=-10^4k\sin\theta\end{array}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{array}{l}k=2\\ \theta=0\end{array}\right.\Rightarrow v(t)=2\cos(10^4t)$$

۱۲- برای مدارهای الکتریکی مشخص شده در شکل (۶-۲۰)، فرض کنید که $v(0)=0$ و $i_L(0)=0^A$ باشد. در این دو مدار، متغیرهای $v(t)$, $i_L(t)$, $i_c(t)$ را برای زمان $t\ge0$ بیابید.

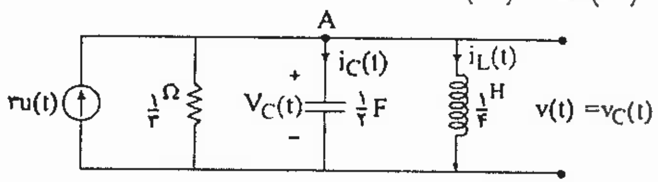




شکل ۶-۲۰ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۲)

حل:

تعیین شرایط اولیه $v_C(0^+)$, $i_L(0^+)$



$$v(0^-)=v_C(0^+)=0$$
$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=0$$

تعیین شرط اولیه $\frac{dv(0^+)}{dt}$:

A در گره KCL: $-3+\frac{v(0^+)}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\frac{dv(0^+)}{dt}+i_L(0^+)=0\Rightarrow$

$$\frac{dv(0^+)}{dt}=6$$

حال معادله دیفرانسیل برحسب $v(t)$ را تشکیل می‌دهیم.

$$KCL:\frac{v(t)}{\frac{1}{3}}+\frac{1}{2}\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{4}\int_0^t v(\tau)d\tau=3u(t)$$

$$\Rightarrow\frac{1}{2}\cdot\frac{d^2v(t)}{dt^2}+3\frac{dv(t)}{dt}+4v(t)=3\delta(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2v(t)}{dt^2}+6\frac{dv(t)}{dt}+8v(t)=6\delta(t)\quad(I)$$

ابتدا پاسخ همگن معادله:

$$s^2+6s+8=0\Rightarrow s=-2\ ,\ -4$$
$$v_h(t)=(k_1e^{-2t}+k_2e^{-4t}).u(t)$$

پاسخ خصوصی این معادله صفر است.

$$v_p(t)=0$$

پاسخ کل:

$$v(t)=v_h(t)+v_p(t)=(k_1e^{-2t}+k_2e^{-4t})u(t)$$

$$\left.\begin{array}{l}v'(0^+)=0\Rightarrow k_1+k_2=0\\ v(0)=6\Rightarrow-2k_1-4k_2=6\end{array}\right\}\Rightarrow k_1=3\ ,\ k_2=-3\Rightarrow v(t)=(3e^{-2t}-3e^{-4t})u(t)$$

حال محاسبه $i_c(t)$:

$$i_C(t)=\frac{dv(t)}{dt}=\frac{1}{2}\left(-6e^{-2t}+12e^{-4t}\right)u(t)=\left(-3e^{-2t}+6e^{-4t}\right)u(t)$$

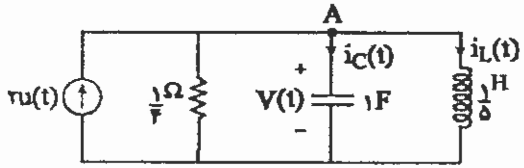
حال محاسبه $i_L(t)$:

$$L\frac{di_L(t)}{dt}=v(t)\Rightarrow i_L(t)=4\int_0^t v(\tau)d\tau=4\int_0^t\left(3e^{-2\tau}-3e^{-4\tau}\right)d\tau$$

$$=4\left(3\frac{e^{-2t}}{-2}-3\frac{e^{-4t}}{-4}\right)\Big|_0^t=4\left[-\frac{3}{2}e^{-2t}+\frac{3}{4}e^{-4t}-\left(-\frac{3}{2}+\frac{3}{2}\right)\right]=-6e^{-2t}+3e^{-4t}+3$$

$$i_L(t)=\left(-6e^{-2t}+3e^{-4t}+3\right).u(t)$$

مانند مدار قبلی ابتدا شرایط اولیه را پیدا می‌کنیم.



$$i_L(0^-)=i_L(0^+)=0$$

$$v(0^-)=v(0^+)=0$$

برای تعیین شرایط اولیه $v'(0^+)$ فقط کافی است که در گره A معادله KCL بنویسیم.

$$\text{در گره A}\quad KCL:\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{\frac{1}{4}}+i_L(t)=2u(t)\Rightarrow\frac{dv(0^+)}{dt}=2$$

حال معادله دیفرانسیل مدار را هم از طریق نوشتن KCL در نقطه (A) بدست می‌آوریم.

$$KCL(A):\frac{v(t)}{\frac{1}{4}}+\frac{dv(t)}{dt}+\frac{1}{\frac{1}{5}}\int_0^t v(\tau)d\tau=2u(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv(t)}{dt}+5v(t)=2\delta(t)\qquad(I)$$

$$s^2+4s+5=0\Rightarrow s=-2\pm i\Rightarrow v_h(t)=\left(ke^{-2t}\cos(t+\theta)\right)u(t)$$

$$v_p(t)=0$$

علت صفر بودن پاسخ خصوصی آن است که پاسخ خصوصی باید از لحاظ ریاضی هم شکل طرف دوم معادله یا ورودی مدار که در سمت راست معادله دیفرانسیل مدار است باشد. یعنی باید هم شکل $\delta(t)$ باشد. پس باید با یک ضریب مجهول مثلاً $a\delta(t)$ پاسخ خصوصی را فرض کنیم.

از طرفی اگر $v(t)$ شامل تابع ضربه باشد آنگاه با جایگذاری در معادله دیفرانسیل مدار یا معادله (I) در سمت چپ معادله $\delta'(t)$ و $\delta''(t)$ خواهیم داشت در حالی که در سمت راست هیچ یک از این توابع را نداریم. بنابراین پاسخ خصوصی صفر خواهد شد.

$$a\delta(t)\Rightarrow(I)\xrightarrow{\text{با جایگذاری در}}\Rightarrow\delta''(t)+4\left(a\delta'(t)+5\left(a\delta(t)\right)\right)=2\delta(t)\Rightarrow a=0$$

پس شکل پاسخ کل برابر است با:

$$\Rightarrow v(t)=v_h(t)+v_p(t)=\left(ke^{-2t}\cos(t+\theta)\right)u(t)$$

$$\left.\begin{aligned}&v(0^+)=0k\cos\theta=0\\&\frac{d}{dt}v(0^+)=0\Rightarrow-2k\cos\theta-k\sin\theta=2\end{aligned}\right\}$$

$$\Rightarrow k=-2\ ,\ \theta=\frac{\pi}{2}\ \Rightarrow\ v(t)=-\left(-2e^{-2t}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)u(t)$$

$$v(t)=\left(2e^{-2t}\sin t\right)u(t)$$

حال محاسبه $i_c(t)$:

$$i_C(t)=C\frac{dv(t)}{dt}=\left(4e^{-2t}\cos\left(t+\frac{\pi}{2}\right)+2e^{-2t}\sin\left(t+\frac{\pi}{2}\right)\right)u(t)$$

حال محاسبه $i_L(t)$:

$$L\frac{di_L}{dt}=v(t)\Rightarrow i_L(t)=5\int_0^t v(\tau)d\tau$$

$$=5\int_0^t 2e^{-2\tau}\sin(\tau)d\tau+10\int_0^t e^{-2\tau}\left(\frac{1}{2j}e^{-j\tau}-\frac{1}{2j}e^{-j\tau}\right)d\tau$$

$$=5\left[\int_0^t\frac{1}{j}e^{(j-2)}d\tau-\int_0^t\frac{1}{j}e^{-(2+j)\tau}d\tau\right]$$

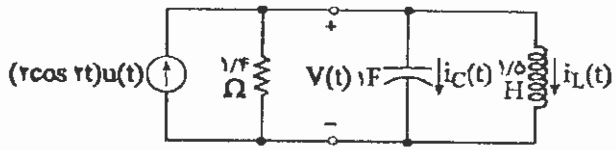
$$=+\frac{5}{j}\left[\frac{1}{(j-2)}e^{(j-2)\tau}\Big|_0^t+\frac{1}{2+j}e^{-(2+j)\tau}\Big|_0^t\right]$$

$$=\frac{5}{j}\left[\left(\frac{1}{j-2}\left(e^{(j-2)t}-1\right)+\frac{1}{2+j}\left(e^{-(2+j)t}-1\right)\right)\right]$$

پس از انجام محاسبات و ساده کردن:

$$i_L(t)=\left(2e^{-2t}\cos(t)-4e^{-2t}\sin(t)+2\right)u(t)$$

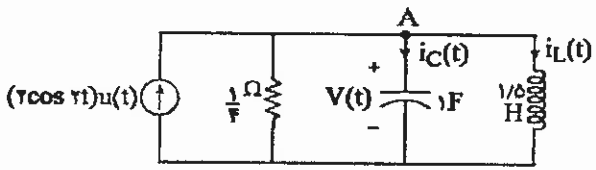
۱۳- در مدار الکتریکی شکلی (۶-۲۱)، فرض می‌شود $v(0)=0^V$ و $v'(0)=0$ باشد در این حالت، نحوه تغییرات $v(t)$, $i_L(t)$, $i_c(t)$ را بدست آورید.



شکل ۶-۲۱ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۳)

حل:

چون شرایط اولیه را خود طراح صفر داده نیاز به محاسبه نیست. پس فقط معادله دیفرانسیل $v(t)$ را برحسب ورودی بدست می‌آوریم.



KCL در گره A: $$\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{\frac{1}{4}}+\frac{1}{\frac{1}{5}}\int_0^t v(\tau)d\tau=2\cos(2t)u(t)$$

$$\Rightarrow\frac{d^2v(t)}{dt^2}+4\frac{dv(t)}{dt}+5v(t)=-4\sin(2t)u(t)+2\delta(t)\qquad(I)$$

در این مدار در سمت راست معادله دیفرانسیل مربوط به متغیر $v(t)$ دو تا ورودی داریم. یکی ورودی سینوسی و دومی ورودی ضربه. پس جواب خصوصی در این حالت دو تابع مختلف خواهد بود یکی تابع سینوسی یا مثلثاتی و دومی از نوع ضربه.

ابتدا پاسخ همگن را محاسبه می‌کنیم.

$$s^2+4s+5=0$$

$$s=-2\pm j\Rightarrow v_h(t)=ke^{-2t}\cos(t+\theta)$$

ابتدا پاسخ خصوصی مربوط به تابع مثلثاتی را تعیین می‌کنیم.

$$v_{p1}(t)=A\cos(2t)+B\sin(2t)$$

با جایگذاری در معادله I خواهیم داشت:

$$\left(-4A\cos(2t)-4B\sin(2t)\right)+4\left(-2A\sin(2t)+2B\cos(2t)\right)$$
$$+5\left(A\cos2t+B\sin2t\right)=-4\sin(2t)$$

با برابر قرار دادن ضرایب cos۲t و sin۲t در دو طرف رابطه تساوی بالا ضرایب A , B محاسبه می‌شوند.

$$A=\frac{32}{65}\ ,\ B=\frac{-4}{65}$$

$$v_{p2}(t)=0$$

بنا به دلیلی که در حل مسئله ۱۲ گفتیم پاسخ خصوصی به $2\delta(t)$ صفر خواهد بود.

$$v(t)=\left(ke^{-2t}\cos(t+\theta)+\frac{32}{65}\cos(2t)-\frac{4}{65}\sin(2t)\right)u(t)$$

محاسبه $i_C(t)$: چون عبارت $v(t)$ کمی پیچیده است از گذاشتن مقدار θ, k در عبارت $v(t)$ خودداری می‌کنیم.

$$i_C(t)=C\frac{dv(t)}{dt}=$$

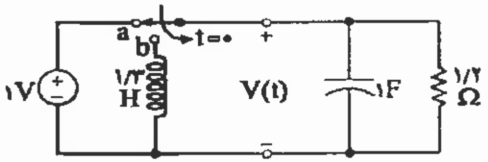
$$\left(-2ke^{-2t}\cos(t+\theta)-ke^{-2t}\sin(t+\theta)-\frac{64}{65}\sin(2t)-\frac{8}{65}\cos(2t)\right)u(t)$$

محاسبه $i_L(t)$:

$$L\frac{di_L(t)}{dt}=v(t)=i_L(t)=\frac{1}{1/5}\int_0^t v(\tau)d\tau=5\int_0^t v(\tau)d\tau$$

$$=5\int_0^t\left(ke^{-2\tau}\cos(\tau+\theta)+\frac{32}{65}\cos(2\tau)-\frac{4}{65}\sin(2\tau)\right)d\tau=...$$

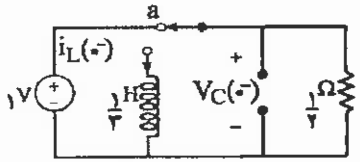
۱۴- کلید مشخص شده در مدار شکل (۶-۲۲) به مدت طولانی در وضعیت a قرار داشته است و در زمان $t=0$ به وضعیت b تغییر حالت می‌دهد. در این مدار و برای زمان $t=0$ ولتاژ $v(t)$ را بیابید.



شکل ۶-۲۲ مدار الکتریکی مربوط به سؤال (۱۴)

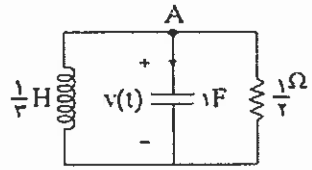
حل:

ابتدا وضعیت مدار را در زمان $t=0^-$ رسم می‌کنیم و $v_C(0^-)$ و $i_L(0^-)$ را مشخص می‌کنیم.



$$v_C(0^-)=1^V$$
$$i_L(0^-)=0$$

حال مدار را برای $t>0$ رسم می‌کنیم و شرط اولیه $\frac{dv(0^+)}{dt}$ را محاسبه می‌کنیم.



$$\text{KCL}:\frac{dv(0^+)}{dt}+i_L(0^+)+\frac{v(0^+)}{\frac{1}{2}}=0\Rightarrow\frac{dv(0^+)}{dt}=-2v(0^+)=-2$$ در گره A

حال معادله دیفرانسیل $v(t)$ را بدست می‌آوریم:

$$\text{KCL}:\frac{dv(t)}{dt}+\frac{v(t)}{\frac{1}{2}}+\frac{1}{\frac{1}{3}}\int_0^t v(\tau)d\tau=0$$

$$\frac{d^2v(t)}{dt^2}+2\frac{dv(t)}{dt}+3v(t)=0$$

$$s^2+2s+3=0\Rightarrow s=-1\pm j\sqrt{2}$$

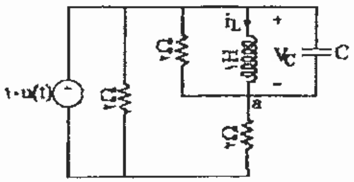
$$v(t)=ke^{-t}\cos\left(\sqrt{2}t+\theta\right)$$

$$\left.\begin{aligned}&v(0)=1=k\cos\theta\\&\frac{dv(0)}{dt}=-2=-k\cos\theta-\sqrt{2}k\sin\theta\end{aligned}\right\}\Rightarrow\left\{\begin{aligned}&k=\sqrt{3/2}\\&\theta=tg^{-1}\frac{\sqrt{2}}{2}\end{aligned}\right.$$

«سؤالات چهارگزینه‌ای فصل ششم»

۱- در مدار شکل مقابل داریم: $i_L(0^+)=0$ و $v_C(0^+)=0$ و $\frac{di_L}{dt}(0^+)=0$ و $\frac{dv_C(0^+)}{dt}=10$

مقدار C (ظرفیت خازن) برابر است با:



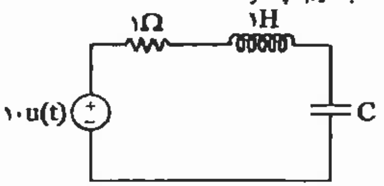
الف) $\frac{1}{4}$ F

ب) $\frac{1}{2}$ F

ج) ۱F

د) ۲F

۲- در مدار شکل مقابل، مقدار C که بازای آن میرایی بحرانی داشته باشیم، چقدر است؟



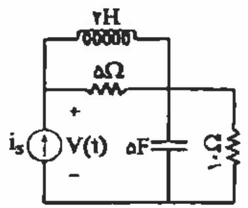
الف) ۴ F

ب) ۱ F

ج) ۲ F

د) هیچکدام

۳- در مدار شکل مقابل $i_s(t)=50u(-t)$ است و v(t) دو سر منبع است. این ولتاژ در لحظه $t=0^+$ چقدر است؟



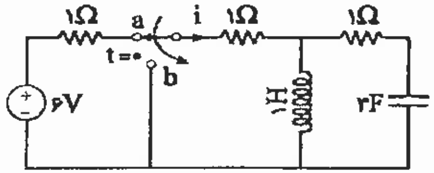
الف) ۵۰۰

ب) ۰

ج) ۲۵۰

د) ۵۰

۴- در مدار شکل مقابل، کلید S به مدت طولانی در وضعیت a بوده است. در $t=0$ به حالت b تغییر مکان می‌دهد. جریان I نشان داده شده در شکل در لحظه $t=0^+$ کدام است؟



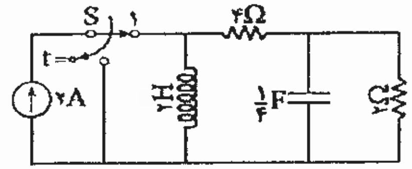
الف) ۰

ب) ۱/۵

ج) ۲

د) ۳

۵- در مدار شکل مقابل، کلید S برای مدت طولانی در حالت ۱ بوده است و سپس در لحظه $t=0$ به حالت ۲ سوئیچ می شود. v_C و $\frac{dv_c}{dt}$ در $t=0^+$ عبارتند از:



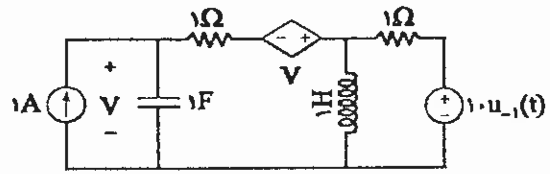
الف) ۰V/sec , ۱V

ب) −۸V/sec , ۰V

ج) ۴V/sec , ۰V

د) ۴V/sec , ۱V

۶- در مدار شکل مقابل $\frac{dv}{dt}(0^+)$ و $i_L(\infty)$ چقدر است؟



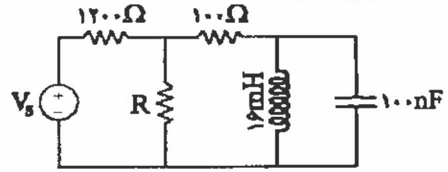
الف) ۱۱ A و ۵V/s

ب) ۱۰ A و ۵V/s

ج) ۱۱ A و ۷V/s

د) ۱۰ A و ۷V/s

۷- در مدار شکل مقابل R چقدر باشد تا مدار در شرایط نوسانی میرا قرار گیرد؟



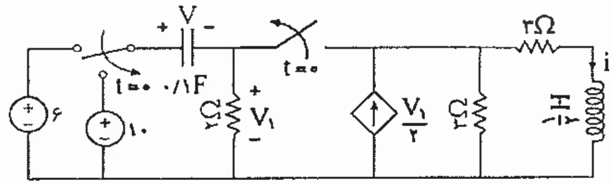
الف) $R > ۱۰۹\Omega$

ب) $R > ۱۶۸۰\Omega$

ج) $R < ۱۰۹\Omega$

د) $R < ۱۶۸۰\Omega$

۸- در مدار شکل زیر $\frac{di}{dt}$ و $\frac{dv}{dt}$ در $t=0^+$ چقدر است؟



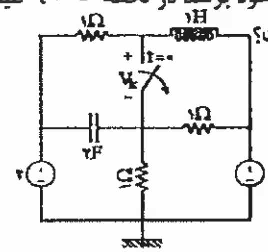
الف) ۴۰V/s , ۶A/s

ب) ۲۰V/s , ۶A/s

ج) ۲۰V/s , ۱۲A/s

د) ۴۰V/s , ۱۲A/s

۹- در مدار شکل زیر کلید k به مدت طولانی بسته بوده تا مدار به حالت دائمی خود برسد در لحظهٔ $t=0$ کلید باز می‌شود. ولتاژ V_k دو سر کلید در لحظه $t=1$ ثانیه برابر چند ولت است؟



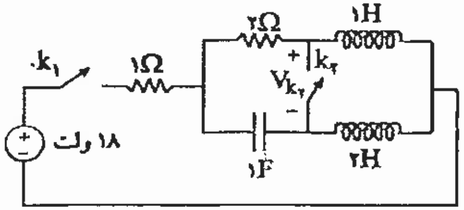
الف) ۲

ب) ۲/۳۷

ج) ۲/۷۴

د) ۳/۱

۱۰- در مدار شکل زیر درحالیکه سلفها و خازن بدون انرژی اولیه می‌باشند، کلیدهای K_1, K_2 بطور همزمان بسته می‌شوند. پس از آنکه مدار به حالت دائمی خود رسید، کلید K_2 را مجدداً باز می‌کنیم درست پس از باز شدن کلید K_2، ولتاژ دو سر آن V_{k2} کدام است؟



الف) ۰

ب) ۲

ج) ۴

د) ۸

«پاسخ سؤالات چهارگزینه‌ای فصل ششم»

۱- گزینه « ب » صحیح است.

می‌دانیم که در لحظهٔ وصل منبع ۱۰ ولتی یعنی در لحظه $t=0^+$ خازن مانند اتصال کوتاه $\left(v_c\left(0^+\right)=0\right)$ و سلف مانند مدار باز $\left(i_L\left(0^+\right)=0\right)$ عمل می‌کند، با نوشتن KCL در گره a طبق شکل، مقدار خازن محاسبه می‌شود.

$$i_C\left(0^+\right)=-i_L\left(0^+\right)-i_{R_1}\left(0^+\right)+i_{R_2}\left(0^+\right)$$

R_1 مقاومت ۲Ω موازی با سلف و R_2 مقاومت ۲Ω متصل به سلف و خازن است.

$$i_C\left(0^+\right)=0-\frac{v_C\left(0^+\right)}{2}+\frac{10}{2}=5\Rightarrow C\frac{dv_C\left(0^+\right)}{dt}=5$$

$$\Rightarrow 10C=5\Rightarrow=\frac{1}{2}F$$

۲- گزینه « الف » صحیح است.

می‌دانیم در یک مدار RLC سری در شرایط میرایی بحرانی $R=2\sqrt{\frac{L}{C}}$ پس داریم:

$$C=\frac{4L^2}{R}\Rightarrow C=4F$$

۳- گزینه « ج » صحیح است.

در $t<0$ و $t=0^-$ مدار به حالت تعادل خود رسیده است و سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است پس داریم:

$$i_L\left(0^-\right)=50A$$

$$v_C\left(0^-\right)=10\times50=500V$$

با قطع منبع جریان در $t>0$، جریان سلف و ولتاژ خازن تغییرات ناگهانی را تحمل نمی‌کنند. بنابراین جریان سلف از مقاومت ۵Ω می‌گذرد و یک افت ولتاژ ۲۵۰- ولتی را ایجاد می‌کند. از طرف دیگر ولتاژ دو سر خازن در $t=0^+$ برابر ۵۰۰+ ولت است که مجموع این دو ولتاژ ۲۵۰ ولت خواهد بود.

۴- گزینه « ب» صحیح است.

در $t=0^-$ مدار به حالت نهایی خود رسیده و سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است. پس خواهیم داشت:

$$i_L\left(0^-\right)=\frac{6}{1+1}=3A$$

$$v_C\left(0^-\right)=0$$

جریان سلف و ولتاژ خازن تغییرات ناگهانی را با وجود مقاومتهای مدار تحمل نمی‌کنند پس داریم:

$$i_L\left(0^+\right)=3A\ ,\ v_C\left(0^+\right)=0$$

یعنی خازن در $t=0^+$ بصورت منبع ولتاژ صفر ولتی (اتصال کوتاه) و سلف بصورت یک منبع جریان ۳A مدل می‌شود. با توجه به شکل در وضعیت b، جریان سلف بین دو مقاومت ۱Ω تقسیم می‌شود، یعنی خواهیم داشت:

$$i\left(0^+\right)=1.5A$$

۵- گزینه « ب » صحیح است.

در $t=0^-$، مدار به حالت نهایی خود رسیده و سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است پس داریم:

$$i_L\left(0^-\right)2A\ ,\ v_C\left(0^-\right)=0$$

جریان سلف و ولتاژ خازن تغییرات ناگهانی را تحمل نمی کنند یعنی داریم:

$$i_L\left(0^+\right)=2A\ ,\ v_C\left(0^+\right)=0$$

با توجه به شکل در وضعیت ۲، چون خازن در $t=0^+$ بصورت یک منبع ولتاژ صفر ولتی (اتصال کوتاه) مدل می‌شود، جریان سلف از آن می‌گذرد و داریم:

$$i_C\left(0^+\right)=-2A\Rightarrow C\frac{dv_c}{dt}\left(0^+\right)=-2\Rightarrow\frac{dv_C}{dt}\left(0^+\right)=-8$$

۶- گزینه « الف» صحیح است.

در $t=0^-$ مدار به حالت نهایی رسیده است و سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است و داریم

$$i_L\left(0^-\right)=1A$$

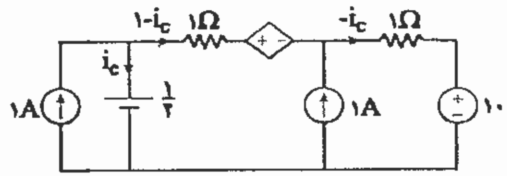
$$v\left(0^-\right)=1\times1-v\left(0^-\right)+0\Rightarrow 2v\left(0^-\right)=1\Rightarrow v\left(0^-\right)=\frac{1}{2}\ \text{ولت}$$

در $t=0^+$ مدل مدار بصورت ذیل است:

رابطهٔ KVL را در تنها حلقه مدار می‌نویسیم:

$$\frac{1}{2}=1\left(1-i_C\right)-\frac{1}{2}+1\left(-i_C\right)+10\Rightarrow i_C\left(0^+\right)=5$$

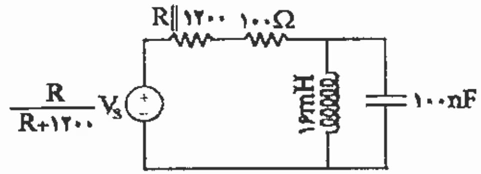
$$C\frac{dv}{dt}\left(0^+\right)=i_C\left(0^+\right)\Rightarrow\frac{dv}{dt}\left(0^+\right)=5$$



در $t=\infty$ سلف بصورت اتصال کوتاه عمل می‌کند و خازن مدار باز است. جریان $1\,A$ از سلف می‌گذرد و منبع ولتاژ ۱۰ ولت نیز، جریان $10\,A$ تولید و از سلف می‌گذرد پس جریان کل سلف $11\,A$ است.

۷- گزینه «الف» صحیح است.

مدار معادل تونن از دو سر مقاومت R را رسم می‌کنیم. مدار نهایی بصورت ذیل است. مدار اخیر یک مدار RLC موازی است شرط اینکه در وضعیت نوسانی میرا قرار گیرد چنین است:



$$\left(R\|1200+100\right)>\frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

$$R\|1200+100>200\Rightarrow R\|1200>100$$

$$\frac{1200R}{1200+R}>100\Rightarrow\frac{12R}{1200+R}>1\Rightarrow 11R>1200$$

$$R>\frac{1200}{11}=109\Omega$$

۸- گزینه «ج» صحیح است.

در $t=0^-$ مدار به حالت نهایی خود رسیده و سلف اتصال کوتاه و خازن مدار باز است.

$$v\left(0^-\right)=6\ ,\ i\left(0^-\right)=0$$

در $t=0^+$، جریان سلف و ولتاژ خازن ناگهانی تغییر نمی‌کند و داریم:

$$V_1\left(0^+\right)=10-v\left(0^+\right)=4\ \text{ولت}\ \Rightarrow i_C\left(0^+\right)=\frac{V_1\left(0^+\right)}{2}=2A$$

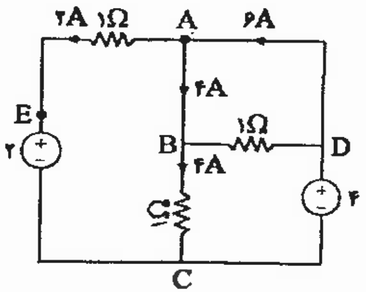
$$C\frac{dv}{dt}=i_C\Rightarrow\frac{dv}{dt}\left(0^+\right)=20$$

در $t=0^+$، جریان سلف صفر است و جریان منبع وابسته $(2A)$ که از مقاومت 3Ω موازی خود می‌گذرد و ولتاژ ۶ ولت را ایجاد می‌کند که همان ولتاژ دو سر سلف است.

$$v_L\left(0^+\right)=6\Rightarrow L\frac{di}{dt}\left(0^+\right)=6\Rightarrow\frac{di}{dt}\left(0^+\right)=12$$

۹- گزینه «ج» صحیح است.

چون مدار قبل از $t=0$ به حالت دائمی رسیده بود، پس سلف مانند اتصال کوتاه و خازن مانند مدار باز رفتار می‌کند و برای $t=0^-$ مدار مطابق ذیل است:



بدیهی است که $V_A=V_B=4$ و از مقاومت BC جریان ۴ آمپر می‌گذرد.

$$\frac{V_A-V_E}{1}=2A$$

چون از مقاومت AE جریان ۲A می‌گذرد، جریان اتصال کوتاه AD، 6A خواهد بود.

$$i_L\left(0^-\right)=6A\qquad V_{BE}\left(0^-\right)=V_C\left(0^-\right)=2V$$

پس از باز شدن کلید، روابط KCL را در گره A , B می‌نویسیم:

$$\frac{V_A-2}{1}-i_L\left(0^-\right)+\int_0^t\left(V_A-4\right)dt=0\ (I)$$

$$2\frac{d}{dt}\left(V_B-2\right)+V_B+V_B-4=0\quad(II)$$

با قرار دادن $t=0$ در معادله (I) داریم: $V_A\left(0^+\right)=8$ و پس از مشتق‌گیری از معادله (I) خواهیم داشت:

$$\begin{cases}\frac{dV_A}{dt}+V_A=4\\ V_A\left(0^+\right)=8\end{cases}\Rightarrow V_A\left(t\right)=4+4e^{-t}$$

از طرفی داریم:

$$\begin{cases} V_B\left(0^+\right) = V_C\left(0^+\right) + 2 = 4 \\ 2\dfrac{dV_B}{dt} + 2V_B = 4 \end{cases} \Rightarrow V_B\left(t\right) = 2 + 2e^{-t}$$

۱۰- گزینه « ج » صحیح است.

اگر گره متصل بین دو مقاومت را A و بین مقاومت و سلف را B و بین سلف و خازن را C فرض کنیم، خواهیم داشت:

در حالت هر دو کلید بسته، مدار به حالت دائمی خود رسیده، سلفها اتصال کوتاه و خازن مدار باز است و جریان منبع (i) برابر است با:

$$i\left(0^-\right) = \frac{18}{1+2} = 6A \quad V_{AC}\left(0^-\right) = V_C\left(0^-\right) = 2i\left(0^+\right) = 12V$$

جریان $6A$ به نسبت ۲ به ۱ بین سلفهای $1H$ و $2H$ تقسیم می‌شود یعنی:

$i_1\left(0^-\right) = 4A$ (جریان سلف $1H$)

$i_2\left(0^-\right) = 2A$ (جریان سلف $2H$)

پس از آنکه کلیه k_2 باز شود، جریان سلفها و ولتاژ خازن بدون تغییر می‌ماند، پس:

$I_{AB} = 4A \Rightarrow V_{AB} = 8$ ولت

$V_{AB} + V = V_{AC} \Rightarrow V_{BC} = 4 \Rightarrow V_{k_2} = 4$

فصل هفتم

تجزیه و تحلیل مدارها در حالت دائمی سینوسی

۷-۱ حالت دائمی سینوسی مدارات

با توجه به اینکه مشتق‌ها و انتگرال یک تابع سینوسی، سینوسی می‌باشد و از طرفی دیگر پاسخ مخصوص با ورود (تحریک) و مشتق و انتگرال ورودی مربوطه ارتباط در نتیجه پاسخ یک مدار خطی به یک ورودی (تحریک) سینوس، سینوسی می‌باشد.

حل کامل یک معادله برای یک مدار با ورودی سینوسی شامل دو قسمت می‌باشد: پاسخ همگن – پاسخ خاص، درحالیکه پاسخ همگن مستقل از شک ریاضی تابع تحریک می‌باشد و تنها به شکل مدار، مقدار عناصر و شرایط اولیه بستگی دارد و برای بدست آوردن پاسخ همگن تمام توابع تحریک را برابر صفر قرار می‌دهیم. اما پاسخ مخصوص به صورت ترکیبی از تابع تحریک، انتگرال و مشتق ورودی می‌باشد.

حالت ماندگار (دائمی) حالتی می‌باشد که مدار به مدت زیادی کار کرده و مدار در حالت دائمی سینوسی باشد. حالت ماندگار (دائمی) به معنای این نیست که مقدار خروجی، ثابت با زمان می‌باشد بلکه برای یک ورودی سینوسی پاسخ حالت دائمی، کاملاً سینوسی و متغیر با زمان است.

منظور از حالت ماندگار، حالتی است که پس از حالت گذرا بدست می‌آید.

لازم به ذکر است برای مدارات خطی دامنه پاسخ مدار متناسب با دامنه تابع تحریک می‌باشد و برای عناصر یک مدار خطی، امپدانس مختلط تعریف می‌کنیم که نام دیگر آن تبدیل فیزوری یا فیزور می‌باشد. فیزور چیزی نیست جز یک عدد که با مشخص کردن دامنه و زاویه فاز یک تابع سینوسی آن تابع را به طور کامل مشخص می‌کند. تحلیل مدارات در حالت ماندگار (دائمی) سینوسی با استفاده از توابع فیزوری خیلی راحت می‌باشد زیرا کار با حالت فیزوری فقط تحلیل مدار در حالت ماندگار می‌باشد.

یک مدار با تحریک مختلط دارای پاسخی می‌باشد که دارای قسمت حقیقی و مختلط بوده، که قسمت حقیقی پاسخ از قسمت تحریک ناشی می‌شود و قسمت موهومی آن از قسمت موهومی تحریک بدست می‌آید.

نکته: پاسخ خاص یک مدار خطی به ورودی سینوسی، دارای یک دامنه و فاز می‌باشد که دامنه و فاز به شکل مدار، شکل ورودی و... بستگی دارد در حالی که پاسخ مدار دارای پاسخی با فرکانس مساوی با فرکانس ورودی می‌باشد.