

Федеральное государственное автономное образовательное учреждение высшего  
образования

Санкт-Петербургский Политехнический университет Петра Великого  
Физико-Механический институт

# Лабораторная 1

Выполнил студент гр. 5030102/20101:  
Преподаватель:  
Работа принята:

Бугайцев М.В.  
Баженов А. Н.  
Дата

\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_  
\_\_\_\_\_

# Содержание

<b>1</b>	<b>Введение</b>	<b>2</b>
<b>2</b>	<b>Теоретическая часть</b>	<b>3</b>
2.1	Нормальное распределение $N(x, 0, 1)$ . . . . .	3
2.2	Распределение Коши $C(x, 0, 1)$ . . . . .	3
2.3	Распределение Пуассона $P(k, 10)$ . . . . .	3
2.4	Равномерное распределение $U(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$ . . . . .	3
2.5	Статистические характеристики . . . . .	3
<b>3</b>	<b>Практическая часть</b>	<b>4</b>
3.1	Нормальное распределение . . . . .	4
3.2	Распределение Коши . . . . .	5
3.3	Равномерное распределение . . . . .	6
3.4	Распределение Пуассона . . . . .	7
<b>4</b>	<b>Заключение</b>	<b>8</b>

# 1 Введение

## Задание 1

Для 4 распределений:

- Нормальное распределение  $N(x, 0, 1)$
- Распределение Коши  $C(x, 0, 1)$
- Распределение Пуассона  $P(k, 10)$
- Равномерное распределение  $U(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$

### 1. Гистограммы и плотности распределений

Сгенерировать выборки размером 10, 50 и 1000 элементов. Построить на одном рисунке гистограмму и график плотности распределения.

### 2. Статистические характеристики положения данных

Сгенерировать выборки размером 10, 100 и 1000 элементов. Для каждой выборки вычислить следующие статистические характеристики положения данных:

- Среднее значение  $\bar{x}$
- Медиана  $medx$
- Полусумма квартилей  $z_Q = \frac{z_{1/4} + z_{3/4}}{2}$

Повторить такие вычисления 1000 раз для каждой выборки и найти среднее характеристик положения и их квадратов:

$$E(z) = \bar{z}$$

Вычислить оценку дисперсии по формуле:

$$D(z) = \overline{z^2} - \bar{z}^2$$

Представить полученные данные в виде таблиц.

## 2 Теоретическая часть

### 2.1 Нормальное распределение $N(x, 0, 1)$

Нормальное распределение, также известное как гауссово распределение, является непрерывным распределением, которое описывается своей плотностью вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

### 2.2 Распределение Коши $C(x, 0, 1)$

Распределение Коши — это непрерывное распределение, которое имеет плотность вероятности:

$$f(x) = \frac{1}{\pi(1+x^2)}$$

### 2.3 Распределение Пуассона $P(k, 10)$

Плотность вероятности распределения Пуассона задается формулой:

$$P(k; \lambda) = \frac{\lambda^k e^{-\lambda}}{k!}$$

где  $\lambda = 10$

### 2.4 Равномерное распределение $U(x, -\sqrt{3}, \sqrt{3})$

Равномерное распределение — это распределение, в котором все значения в заданном интервале имеют одинаковую вероятность. Плотность вероятности равномерного распределения задается следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{если } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{иначе} \end{cases}$$

где  $a = -\sqrt{3}$  и  $b = \sqrt{3}$ . В данном случае, равномерное распределение имеет фиксированную ширину интервала, и его среднее значение равно  $\frac{a+b}{2} = 0$ , а дисперсия равна  $\frac{(b-a)^2}{12} = 1$ .

### 2.5 Статистические характеристики

Для каждой выборки, сгенерированной из указанных распределений, будут вычислены следующие статистические характеристики положения данных:

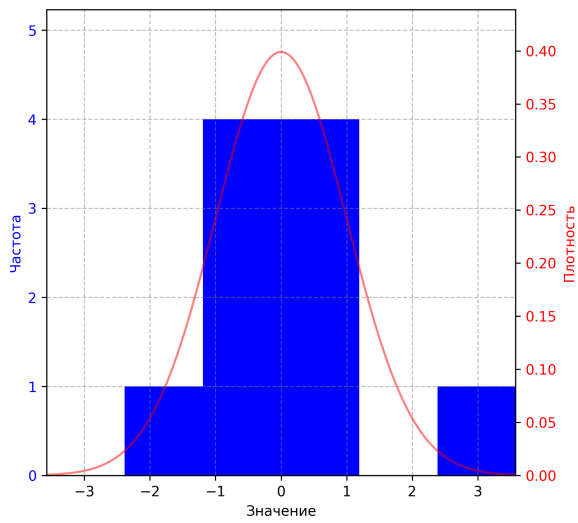
- Среднее значение ( $\bar{x}$ ) — сумма всех элементов выборки, деленная на их количество.
- Медиана ( $med_x$ ) — значение, делящее выборку на две равные части.
- Квартильный показатель ( $z_Q$ ), рассчитываемый по формуле:

$$z_Q = \frac{z_{1/4} + z_{3/4}}{2}$$

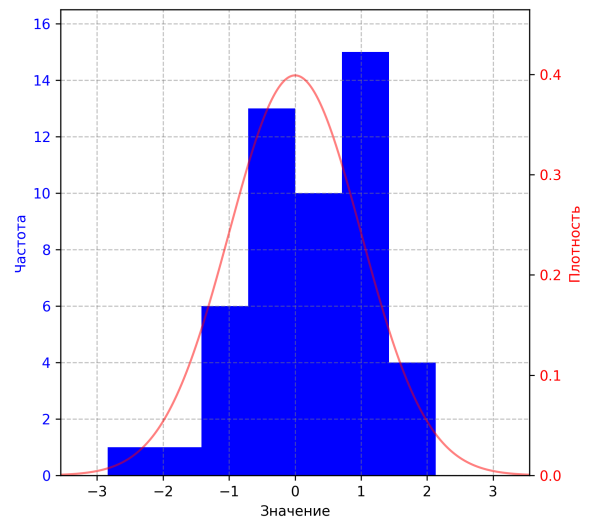
где  $z_{1/4}$  и  $z_{3/4}$  — первый и третий квартиль выборки.

### 3 Практическая часть

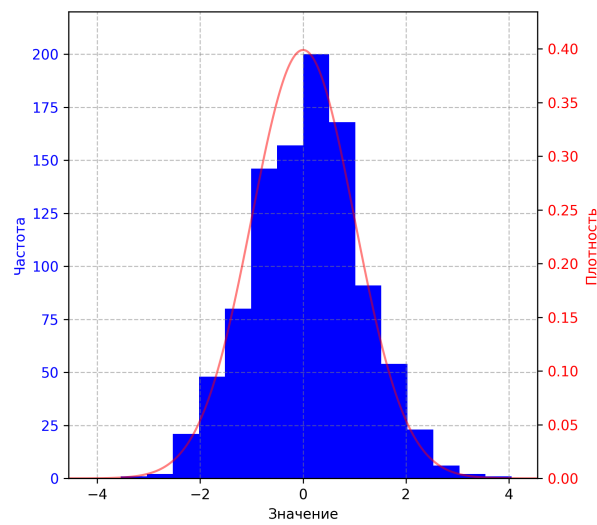
#### 3.1 Нормальное распределение



(a) Гистограмма и график плотности при  $n = 10$



(b) Гистограмма и график плотности при  $n = 50$



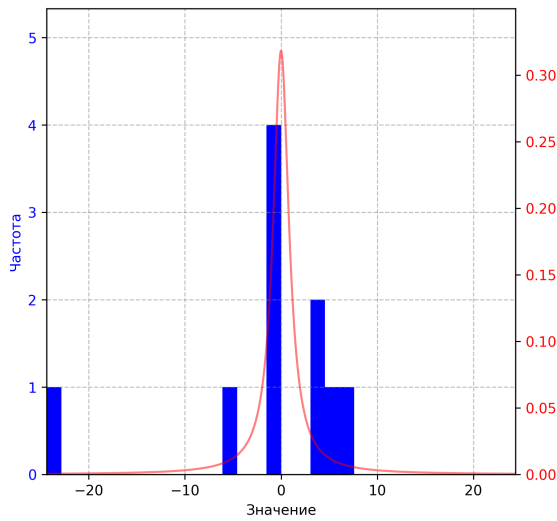
(c) Гистограмма и график плотности при  $n = 1000$

Рис. 1: Гистограммы и графики плотности для нормального распределения

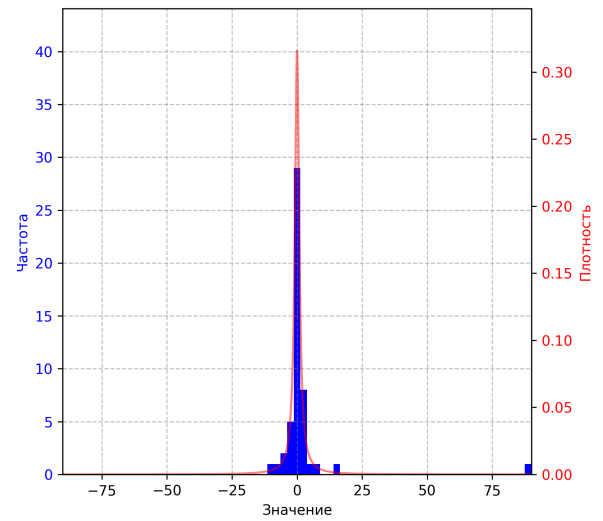
Таблица 1: Результаты для нормального распределения

	$E(\text{mean}x)$	$D(\text{mean}x)$	$E(\text{med}x)$	$D(\text{med}x)$	$E(z_Q)$	$D(z_Q)$
Размер выборки: 10	0	$10 \cdot 10^{-2}$	0	$1 \cdot 10^{-1}$	0	$1 \cdot 10^{-1}$
Размер выборки: 100	0	$10 \cdot 10^{-3}$	0	$2 \cdot 10^{-2}$	0	$1 \cdot 10^{-2}$
Размер выборки: 1000	0	$1 \cdot 10^{-3}$	0	$2 \cdot 10^{-3}$	0	$1 \cdot 10^{-3}$

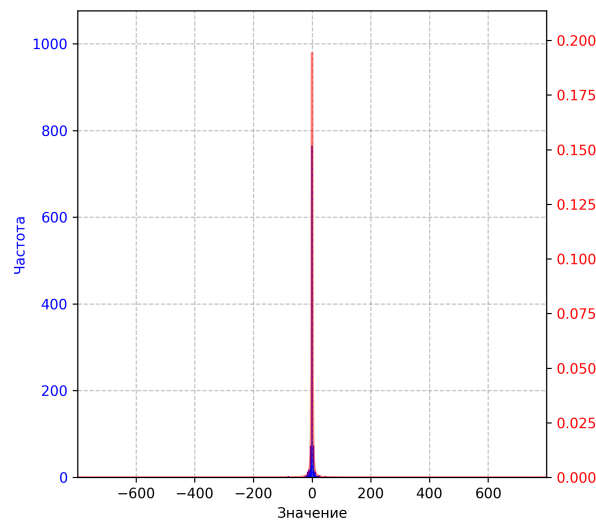
### 3.2 Распределение Коши



(a) Гистограмма и график плотности при  $n = 10$



(b) Гистограмма и график плотности при  $n = 50$



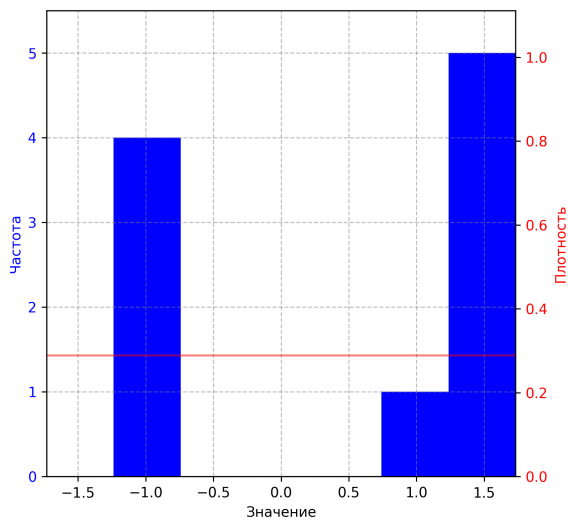
(c) Гистограмма и график плотности при  $n = 1000$

Рис. 2: Гистограммы и графики плотности для распределения Коши

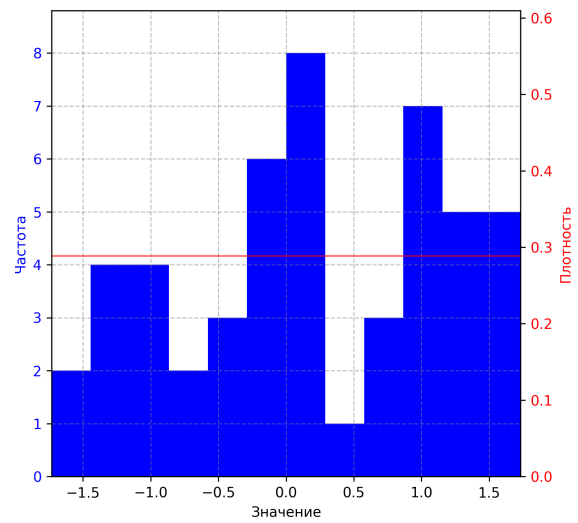
Таблица 2: Результаты для распределения Коши

	$E(\text{mean}x)$	$D(\text{mean}x)$	$E(\text{med}x)$	$D(\text{med}x)$	$E(z_Q)$	$D(z_Q)$
Размер выборки: 10	0	$1 \cdot 10^3$	0	$3 \cdot 10^{-1}$	0	$8 \cdot 10^{-1}$
Размер выборки: 100	0	$10 \cdot 10^3$	0	$2 \cdot 10^{-2}$	0	$5 \cdot 10^{-2}$
Размер выборки: 1000	0	$9 \cdot 10^3$	0	$2 \cdot 10^{-3}$	0	$5 \cdot 10^{-3}$

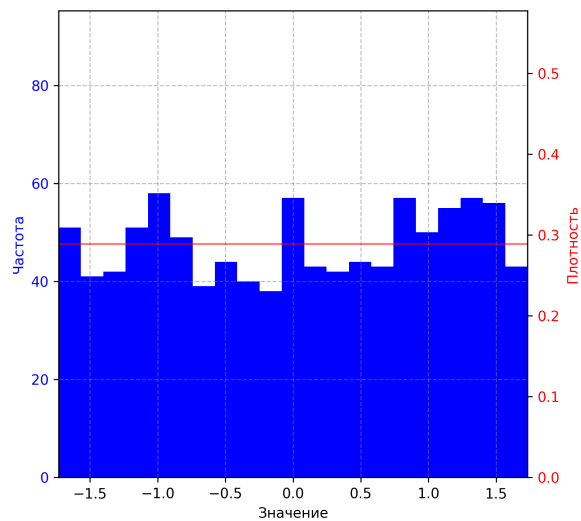
### 3.3 Равномерное распределение



(a) Гистограмма и график плотности при  $n = 10$



(b) Гистограмма и график плотности при  $n = 50$



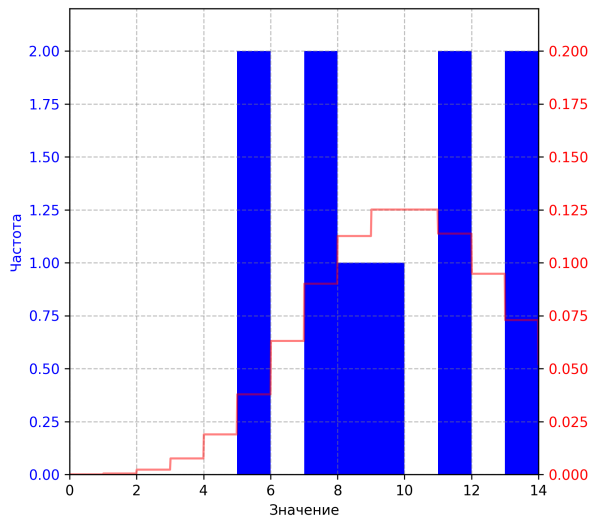
(c) Гистограмма и график плотности при  $n = 1000$

Рис. 3: Гистограммы и графики плотности для равномерного распределения

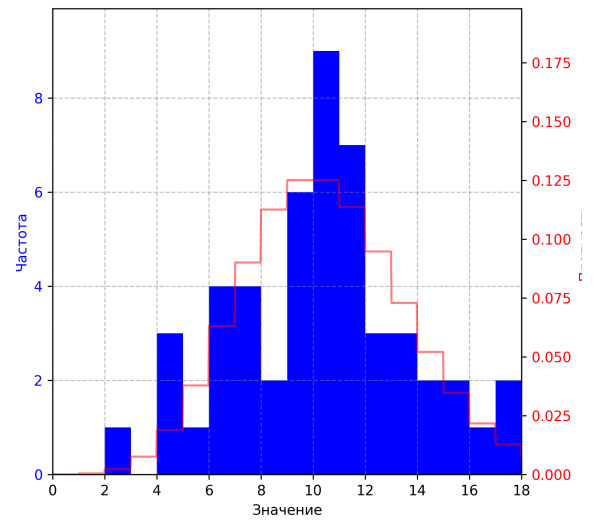
Таблица 3: Результаты для равномерного распределения

	$E(\text{mean}x)$	$D(\text{mean}x)$	$E(\text{med}x)$	$D(\text{med}x)$	$E(z_Q)$	$D(z_Q)$
Размер выборки: 10	0	$10 \cdot 10^{-2}$	0	$2 \cdot 10^{-1}$	0	$1 \cdot 10^{-1}$
Размер выборки: 100	0	$1 \cdot 10^{-2}$	0	$3 \cdot 10^{-2}$	0	$2 \cdot 10^{-2}$
Размер выборки: 1000	0	$10 \cdot 10^{-4}$	0	$3 \cdot 10^{-3}$	0	$2 \cdot 10^{-3}$

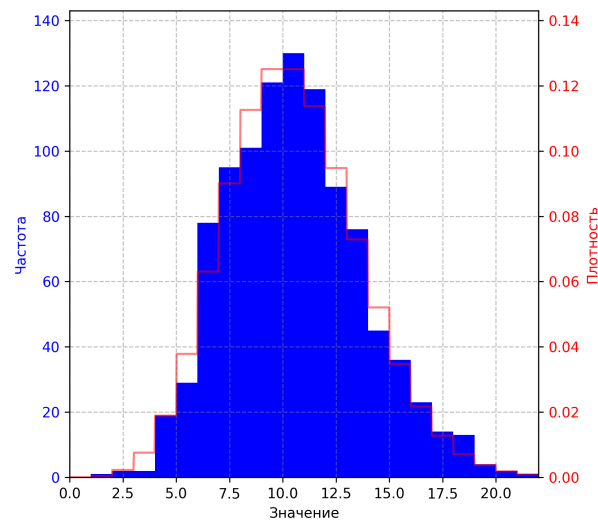
### 3.4 Распределение Пуассона



(a) Гистограмма и график плотности при  $n = 10$



(b) Гистограмма и график плотности при  $n = 50$



(c) Гистограмма и график плотности при  $n = 1000$

Рис. 4: Гистограммы и графики плотности для распределения Пуассона

Таблица 4: Результаты для распределения Пуассона

	$E(\text{mean}x)$	$D(\text{mean}x)$	$E(\text{med}x)$	$D(\text{med}x)$	$E(z_Q)$	$D(z_Q)$
Размер выборки: 10	10	$10 \cdot 10^{-1}$	9	1	9	1
Размер выборки: 100	10	$1 \cdot 10^{-1}$	10	$2 \cdot 10^{-1}$	10	$2 \cdot 10^{-1}$
Размер выборки: 1000	10	$10 \cdot 10^{-3}$	10	$4 \cdot 10^{-3}$	10	$2 \cdot 10^{-3}$



## 4 Заключение

В ходе работы были исследованы четыре распределения: нормальное, Коши, Пуассона и равномерное. Сгенерированы выборки размером 10, 50 и 1000 элементов для анализа их характеристик.

В первой части построены гистограммы и графики плотности, что позволило визуально оценить формы распределений. Во второй части вычислены математическое ожидание и дисперсию для среднего значения, медианы и полусуммаыквартелей для каждой выборки, а результаты представлены в таблицах.

Анализ показал следующее:

- **Нормальное распределение:** С увеличением размера выборки наблюдается уменьшение дисперсии для всех величин, а математическое ожидание стремится к теоретическому значению.
- **Распределение Коши:** Не имеет определённого математического ожидания и дисперсии для среднего, однако для медианы и полусуммы квартилей значения стремятся к теоретическим.
- **Равномерное распределение:** С увеличением размера выборки наблюдается снижение дисперсии, а математическое ожидание также стремится к теоретическому значению.
- **Распределение Пуассона:** С увеличением размера выборки уменьшается дисперсия для всех величин, а математическое ожидание приближается к теоретическому.