Escuela de Ingeniería Eléctrica
Sistemas de Control - Grupo #1
Tarea3

Royer Méndez Ramírez, A43333

11 de junio de 2021

Para el sistema de control realimentado mostrado en la figura:

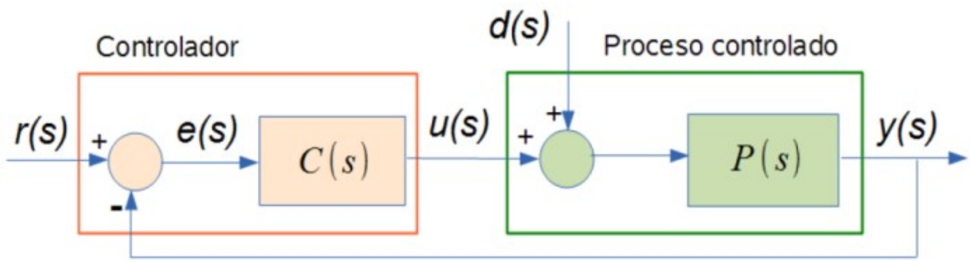


Figura 1: Sistema de control realimentado simple.

En ambos casos justifique la selección del controlador y las razones por la que descarta los controladores más simples. Indique los valores de las especificaciones únicamente para el controlador escogido.

1. Para el proceso representado por el modelo personalizado subamortiguado con un cero $P_{psubc}(s)$:

Debido a que mi número de carné es: A43333, la ecuación de la planta queda como se muestra a continuación:

$$P_{psubc}(s) = \frac{1{,}3 \cdot (s+2)}{(s+1+j0{,}3)(s+1-j0{,}3)} = \frac{1{,}3 \cdot (s+2)}{s^2+2s+1{,}09} \tag{1}$$

1.1. Determine los parámetros del controlador de la familia PID que sea más simple (P, PD, PI, PID), tal que la respuesta del sistema de control a un cambio tipo escalón en el valor deseado, tenga: tiempo de asentamiento al 2 % $t_{a2} \leq 4$ segundos, un error permanente $e_{pr0} \leq 20\,\%$ y el menor sobrepaso máximo posible.

Para determinar lo que se solicita en el enunciado, se hace uso de las siguientes ecuaciones:

$$M_{yr} = \frac{k_{yr} \cdot \omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} \tag{2}$$

$$P.C = s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2 \tag{3}$$

$$M_{pn} = e^{\frac{-\zeta \cdot \pi}{\sqrt{1-\zeta^2}}} \tag{4}$$

$$t_{a2\,\%} = \frac{4}{\zeta \cdot \omega_n} \tag{5}$$

$$e_{pr0} = \frac{1}{1 + k_o}; Lim_{s \to 0} k_o \tag{6}$$

A continuación se muestra el procedimiento que se tomó para obtener el resultado buscado:

Piden:

* t_{s} 2% : $\frac{4}{\xi \cdot \omega_n} \leq 4 \Rightarrow \xi \cdot \omega_n \geq 1$

* $e_{pro} \leq 20\%$

* M_{ps} : El menor posible.

Con base en los datos anteriores, se obtiene una aproximación del polinomio característico deseado:

$$PC_{deseado}: \quad s^2 + 2 \cdot 1 \cdot s + \omega_n^2$$

$\xi \cdot \omega_n$, puede ser más grande.

Modelando para un Controlador Proporcional:

Averiguando el P.C: $C_{(s)} = K_p$.

P.C: $1 + L_{(s)} = 0$

$$1 + \frac{1{,}3\,K_p(s+2)}{s^2+2s+1{,}09} = 0$$

PC obtenido $\Rightarrow s^2 + (2+1{,}3\,K_p)s + 1{,}09 + 2{,}6\,K_p$.

→ Averiguar K_p por medio del $e_{pro} \leq 20\%$:

epro: $\frac{1}{1+K_0}$; $K_0 = \lim_{s \to 0} L$. ; $L = \frac{1{,}3\,K_p(s+2)}{s^2+2s+1{,}09}$

$$K_0 = \lim_{s \to 0} \frac{1{,}3\,K_p(\cancel{s}+2)}{\cancel{s^2}+\cancel{2s}+1{,}09}$$

$$K_0 = \frac{2{,}6\,K_p}{1{,}09}$$

$$K_0 = 2{,}385\,K_p.$$

epro: $\frac{1}{1+2{,}385\,K_p} \leq 0{,}20$

$K_p \geq 1{,}677$

Comparar los polinomios característicos:

pC deseado = pC obtenido (factible).

$$s^2 + \underbrace{2\cdot\xi\cdot\omega_n}\, s + \omega_n^2 = s^2 + \underbrace{(2+1{,}3\,Kp)}\, s + 1{,}09 + 2{,}6\,Kp$$

modelar

para que

queden iguales

$$2\cdot\xi\cdot\omega_n = 2 + 1{,}3\,K_p$$

$$2\cdot\xi\cdot\omega_n = 2 + 1{,}3(1{,}677)$$

$$\xi\cdot\omega_n = 2{,}09005$$

Valor mínimo de $Kp = 1{,}677$ para que cumpla con el error.

mínimo $\xi\cdot\omega_n$ aceptable para que $t_{a\,2\%} \leq 4$ seg y que al mismo tiempo se cumpla el error requerido.

1.2. Determine los parámetros de un controlador de la familia PID (P, PD, PI, PID), tal que la respuesta del sistema de control a un cambio tipo escalón en el valor deseado, tenga: el menor sobrepaso máximo posible, tiempo de asentamiento al 2 % $t_{a2} \leq 4$ segundos y que la respuesta a un cambio escalón en la referencia y en la perturbación tenga error permanente cero.

Recordando la teoría de Lazo de control:

En **servocontrol:** *Para que el error permanente a un cambio escalón en valor deseado sea cero, se necesita que L_s tenga al menos un polo en el origen, provisto ya sea por el controlador o por el proceso controlado.*

En el **regulador:** *Para que el error permanente a un cambio escalón en la perturbación sea cero, es necesario que C_s tenga por lo menos un polo en el origen (PI o PID)*

Es por lo anterior que se omiten los controladores tipo P y Pd.

Si uno modela con un controlador de tipo PI, este lo que hará sera que agrega un polo en el origen, y al final el sistema queda de orden 3, por eso también se omite, ya que no se cuenta con formulas para sistemas de este orden.

Finalmente se procede a usar un controlador de tipo PID estandar, ya que este tipo de controladores agrega dos ceros complejos conjugados con los cuales se podrán cancelar los polos complejos conjugados que tiene la planta y trabajar en un sistema de un orden para el cual sí hay fórmulas.

Nota: Tampoco se utilizó el controlador de tipo PID serie porque este tipo de controladores agregan ceros reales, los cuales no hubieran podido cancelar los polos complejos de la planta.

A continuación se muestra el procedimiento realizado:

PID Estandar:

$$P_{(s)} = \frac{1,3\,(s+2)}{(s+1+j\,0,3)(s+1-j\,0,3)} = \frac{1,3\,(s+2)}{\underbrace{s^2+2s+1,09}_{*}}$$

$$C_{(s)} = K_p\left(1+\frac{1}{T_i s}+T_d s\right) = K_p\left(\frac{T_i s+1+T_i\cdot T_d s^2}{T_i s}\right) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{K_p}{T_i s}\cdot T_i\cdot T_d \underbrace{\left(s^2+\frac{s}{T_d}+\frac{1}{T_d\cdot T_i}\right)}_{**}$$

$* = **$

$$s^2+2s+1,09 = s^2+\frac{1}{T_d}s+\frac{1}{T_d T_i}$$

en donde: $* \; \frac{1}{T_d} = 2 \Rightarrow T_d = 0,5$

$$* \; \frac{1}{T_d\cdot T_i} = 1,09 \Rightarrow T_i = \frac{1}{(0,5)(1,09)} \Rightarrow T_i = 1,835$$

Entonces $L(s) = C(s) \cdot P(s)$

$$L(s) = \frac{Kp}{\cancel{Ti}\, s} \cdot \cancel{Ti}\, \overset{0,5}{Td} \left(s^2 + \frac{s}{Td} + \frac{1}{Td \cdot Ti} \right) \cdot \frac{1,3\,(s+2)}{\cancel{s^2 + 2s + 1,09}}$$

$$L(s) = \frac{Kp \cdot 0,65\,(s+2)}{s}$$

y el P.C obtenido: $1 + L(s) = 0$

$$PC_{obtenido} = 1 + \frac{0,65\,Kp\,(s+2)}{s} = 0$$

$$s + 0,65\,Kp\,(s+2) = 0$$

$$s + 0,65\,Kp \cdot s + 1,30\,Kp = 0$$

$$\underbrace{(1 + 0,65\,Kp)\,s + 1,30\,Kp}_{1^{er}\ orden} \Rightarrow \left(\frac{1 + 0,65\,Kp}{1,30\,Kp} \right) s + 1$$

se igualan Polinomios Característicos:

Polinomio Característico deseado debe ser de 1^{er} orden:

$$T_c s + 1$$

entonces: $t_{a\,2\%}$: $4T_c \leq 4$

$$\Rightarrow T_c \leq 1$$

$$\left(\frac{1+0{,}65\,Kp}{1{,}30\,Kp}\right)s + 1 = s + 1$$

$$\frac{1+0{,}65\,Kp}{1{,}30\,Kp} = 1$$

$$1+0{,}65\,Kp = 1{,}30\,Kp.$$

$$Kp = \frac{1}{0{,}65}$$

$$Kp = 1{,}538$$

El valor de $Kp = 1{,}538$ hace que se cumpla lo solicitado en el enunciado.

2. Para el proceso representado por el modelo personalizado inestable $P_{pi}(s)$:

$$P_{pi}(s) = \frac{1{,}3}{(s^2 - 0{,}3)} = \frac{1{,}3}{(s - 0{,}548)(s + 0{,}548)}$$

Se desea que la respuesta del sistema de control, a un cambio tipo escalón en el valor deseado, tenga las siguientes características: sobrepaso máximo $M_{pn}\,\% = 16.3\,\%$ y un tiempo de asentamiento al $2\,\%$ $t_{a2\,\%}$ 4,0s.

2.1. Determine los parámetros del controlador de la familia PID más simple posible (P, PD, PI, PID), que permite cumplir con las especificaciones deseadas. Indique y justifique claramente cuáles de las especificaciones se pueden cumplir y cuáles no, para cada tipo de controlador analizado. Indique claramente los valores de las especificaciones ($M_{pn}\,\%$, $t_{a2\,\%}$) obtenidas únicamente para el controlador seleccionado, además del valor del e_{pr0}.

Carné # A43333

$\alpha = 0,1 \cdot 3 = 0,3$

$\beta = 0,1 \cdot 3 + 1 = 1,3$

$$P_{pi}(s) = \frac{1,3}{(s^2 - 0,3)} = \frac{1,3}{(s^2 - \sqrt{0,3}^2)} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{1,3}{(s - \sqrt{0,3})(s + \sqrt{0,3})} =$$

$$P_{pi}(s) \Rightarrow \frac{1,3}{(s - 0,548)(s + 0,548)}$$

Loque solicitan que se cumpla: * $M_{p\,m\acute{a}x} = 16,3\%$

* $t_{s\,2\%} = \leq 4s$

Obtener ξ y ω_n:

$$16,3 = M_p = 100\, e^{\frac{-\xi \cdot \pi}{\sqrt{1-\xi^2}}} \Rightarrow \text{Resolviendo para } \xi: \; \xi = 0,50$$

$$t_{s\,2\%} = 4\,seg \geq \frac{4}{\xi \cdot \omega_n} \Rightarrow \omega_n \geq 2$$

$\rightarrow$ En $-\xi \cdot \omega_n = -1$ habrá una recta vertical.

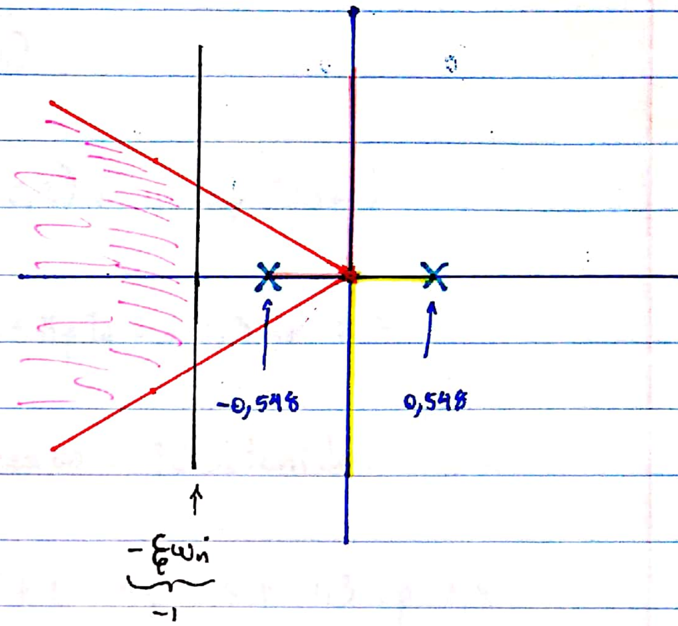
$\rightarrow \theta = \cos^{-1}(\xi) = \cos^{-1}(0,50) = 60°$.

Polinómio Característico Deseado: $s^2 + 2\xi \cdot \omega_n \cdot s + \omega_n^2$

$$PC_{Deseado} = s^2 + 2s + 4$$

Analizando el controlador tipo Proporcional:

Analizando el LGR:



* Los polos nunca van a llegar al area sombreada. Por lo tanto NO pueden cumplir con ninguna de las especificaciones.

Analizando el controlador proporcional Derivativo (PD.)

$C(s) = K_p(T_d s + 1)$

$L(s) = K_p(T_d s + 1) \cdot \dfrac{1,3}{(s^2 - 0,3)}$

P.C obtenido: $1 + L(s) = 0 \Rightarrow (s^2 - 0,3) + 1,3\,K_p(T_d s + 1)$

$$\Rightarrow s^2 + 1,3\,K_p T_d\, s + 1,3\,K_p - 0,3$$

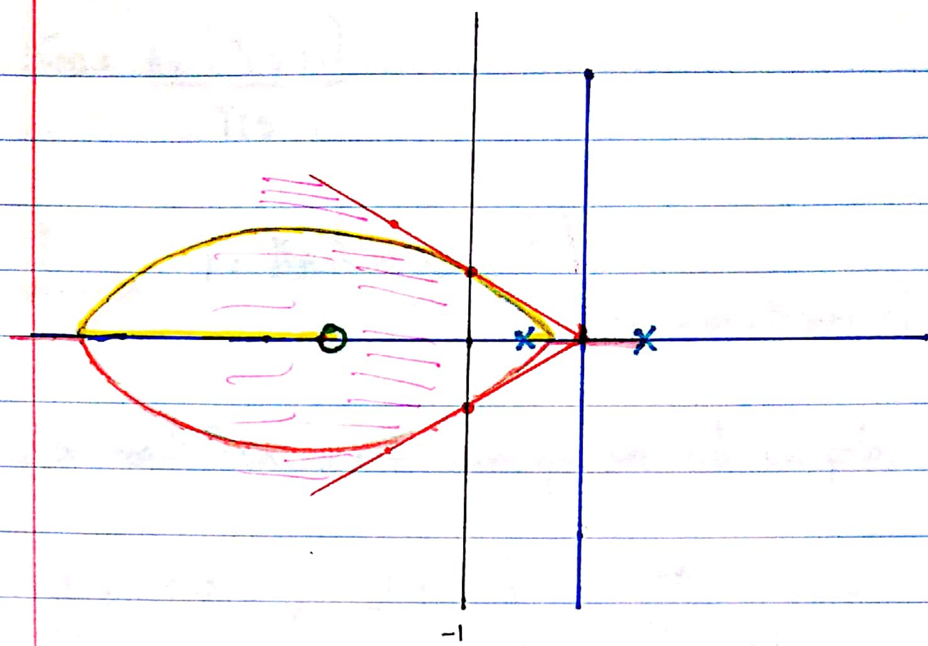
Se comparan: PC deseado = PC obtenido.

$$s^2 + 2s + 4 = s^2 + 1,3\,K_p T_d\, s + 1,3\,K_p - 0,3$$

comparar términos: $4 = 1,3\,K_p - 0,3 \Rightarrow K_p = 3,308$

$$2 = 1,3(3,308) \cdot T_d \Rightarrow T_d = 0,465$$

$$\underbrace{-\frac{1}{T_d} = -2,1505}_{\text{La posición del polo.}}$$



Con base en el análisis anterior, es posible determinar que un controlador tipo PD cumple con los requerimientos solicitados. Cumple con el $t_{a2\%} \geq 4s$, así como el sobrepaso $M_{pmax} = 16,3\%$. Por ser un controlador PD no habrá un error permanente igual a cero.

$$e_{prox\%} = \frac{1}{1+K_0}$$

$$= \frac{1}{1+(-14,334)}$$

$$e_{prox\%} = -7,5\%$$

$$K_0 = \lim_{s \to 0} \frac{1,3 \cdot K_p (T_d \cancel{s} + 1)}{(\cancel{s^2} - 0,3)}$$

$$\frac{1,3 \cdot K_p}{-0,3}$$

$$K_0 = -4,333 \cdot K_p$$

$$(-4,333)(3,308)$$

$$K_0 = -14,334$$

2.2. **Considerando que ahora se desea un $e_{pr0} = 0\,\%$, determine los parámetros del controlador de la familia PID más simple posible (P, PD, PI, PID), que permite cumplir con todas las especificaciones. Indique y justifique claramente cuáles de las especificaciones se pueden cumplir y cuáles no, para cada tipo de controlador analizado. Indique claramente los valores de las especificaciones ($M_{pn}\,\%$, $t_{a2}\,\%$, y e_{pr0}) únicamente para el controlador seleccionado.**

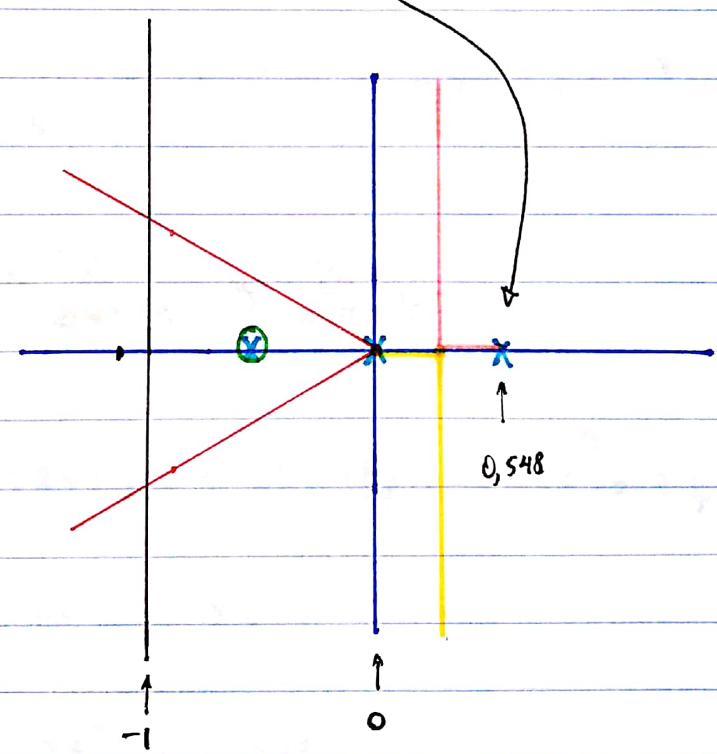
Analizando el controlador tipo P.I.

$$C(s) = \frac{K_p(T_i s + 1)}{T_i s}$$

$$P_{c\,\text{obtenido}} = 1 + \frac{K_p \cancel{T_i}\left(s + \frac{1}{T_i}\right)}{\cancel{T_i} s} \cdot \frac{1{,}3}{(s-0{,}548)(s+0{,}548)}$$

se modifica $s + \frac{1}{T_i}$ para que cancele un polo:

$$\frac{1}{T_i} = 0{,}548 \quad , \quad \frac{1{,}3K_p \cdot \cancel{(s+0{,}548)}}{s(s-0{,}548)\cancel{(s+0{,}548)}}$$



Este controlador no satisface ninguno de los requerimientos. Es totalmente inestable.

Analizando el controlador tipo PID

$$C(s) = \frac{K_p \cdot T_i \left(s + \frac{1}{T_i}\right)(T_d s + 1)}{T_i s}$$

$PC_{obtenido}$: $$1 + \frac{K_p\left(s+\frac{1}{T_i}\right)(T_d s+1)}{s} \cdot \frac{1,3}{(s-0,548)(s+0,548)}$$

$$= 1 + \frac{K_p(s+\cancel{0,548})(T_d s+1)\cdot 1,3}{s(s-0,548)(s+\cancel{0,548})} \qquad -\frac{1}{T_i} = -0,548$$

$$= s(s-0,548) + 1,3\,K_p(T_d s+1) \leftarrow T_d\left(s+\frac{1}{T_d}\right)$$

cero

Desarrollando la se llega a: $PC_{obtenido}$: $s^2 + (1,3\,K_p T_d - 0,548)s + 1,3\,K_p$

se igualan $PC_{deseado}$ y $PC_{obtenido}$

$$s^2 + 2s + 4 = s^2 + (1,3\,K_p T_d - 0,548)s + 1,3\,K_p$$

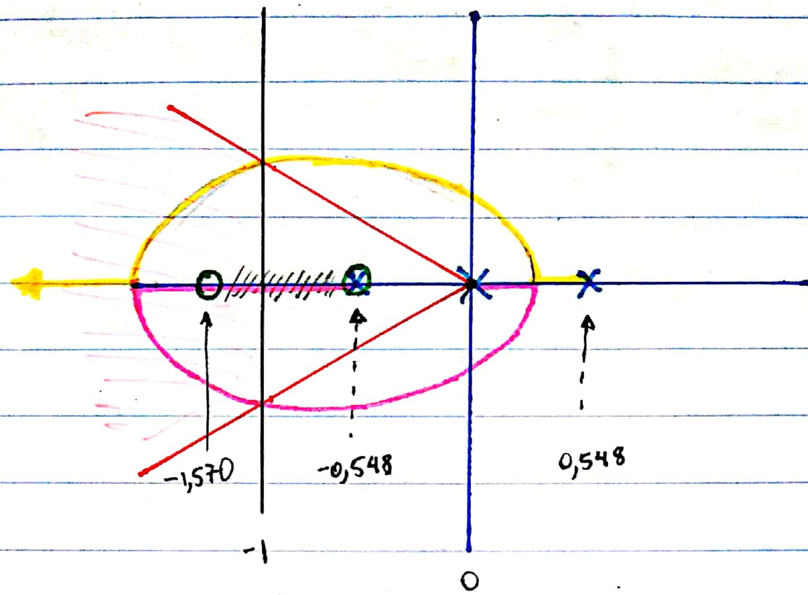
$$4 = 1,3\,K_p \Rightarrow K_p = 3,077$$

$$2 = 1,3\cdot(3,077)\cdot T_d - 0,548$$

$$\downarrow$$

$$T_d = 0,637 \leftarrow -\frac{1}{T_d} = -1,570$$

habrá un cero.



Este controlador (PID) sí cumple con lo especificado: $M_{p\%}$ 16,3%, $t_{a2\%} \leq 4$ seg y $e_{pro} = 0\%$, a partir de una ganancia $K_p \geq 3{,}077$

para sisotool: $\dfrac{K_p}{T_i} = \dfrac{3{,}077}{0{,}548} = 5{,}61496.$

3. Compruebe el diseño final seleccionado para cada uno de los puntos anteriores utilizando la herramienta sisotool de Matlab de acuerdo a la explicación dada en la clase. Muestre el LGR con los respectivos límites del sobrepaso y tiempo de asentamiento solicitados (según se solicite en cada enunciado), así como la medición de las especificaciones en la figura de respuesta temporal ante una entrada escalón unitario ($M_{pn}\%$, $t_{a2}\%$, y e_{pr0}). Agregue además una figura en cada caso donde se muestren los parámetros introducidos en el sisotool para cada controlador diseñado. Explique y justifique las diferencias que puedan encontrarse entre las especificaciones obtenidas con el diseño algebraico y las medidas en la respuesta al escalón generada con sisotool.

Controlador tipo P:

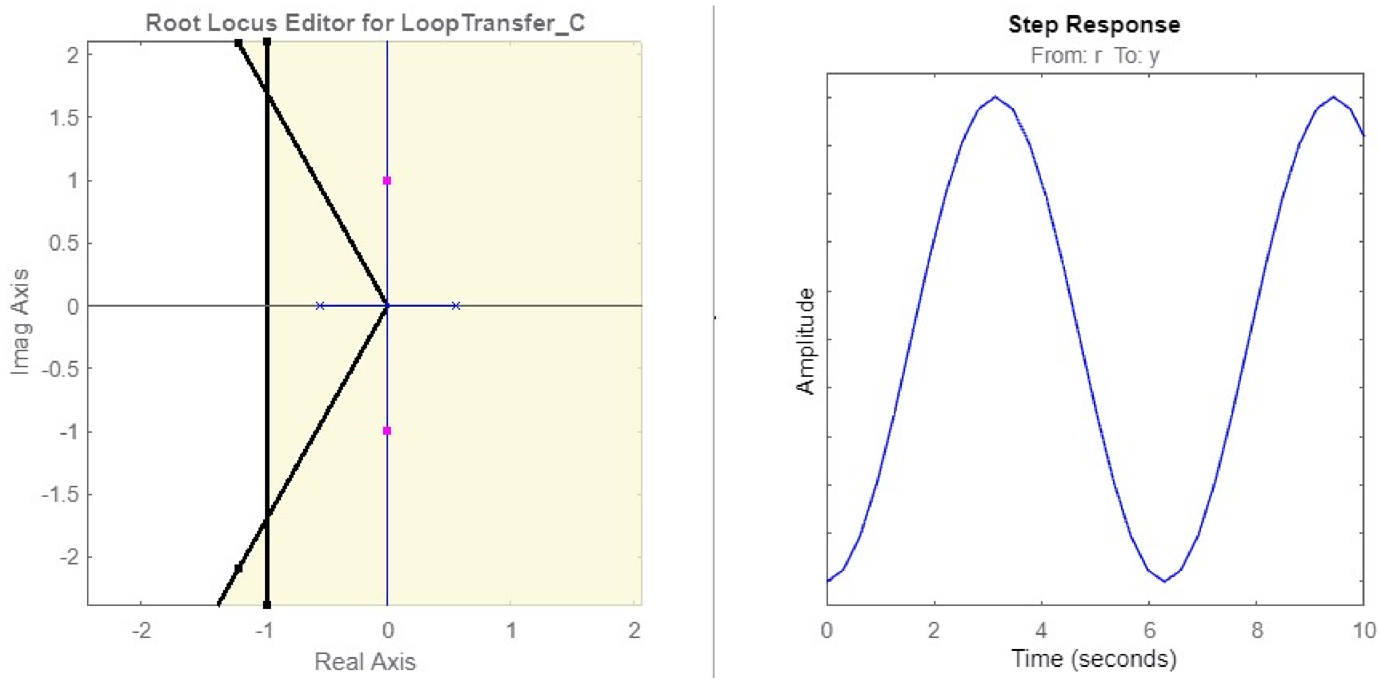


Figura 2: Imagen del LGR y de la salida. Controlador tipo P

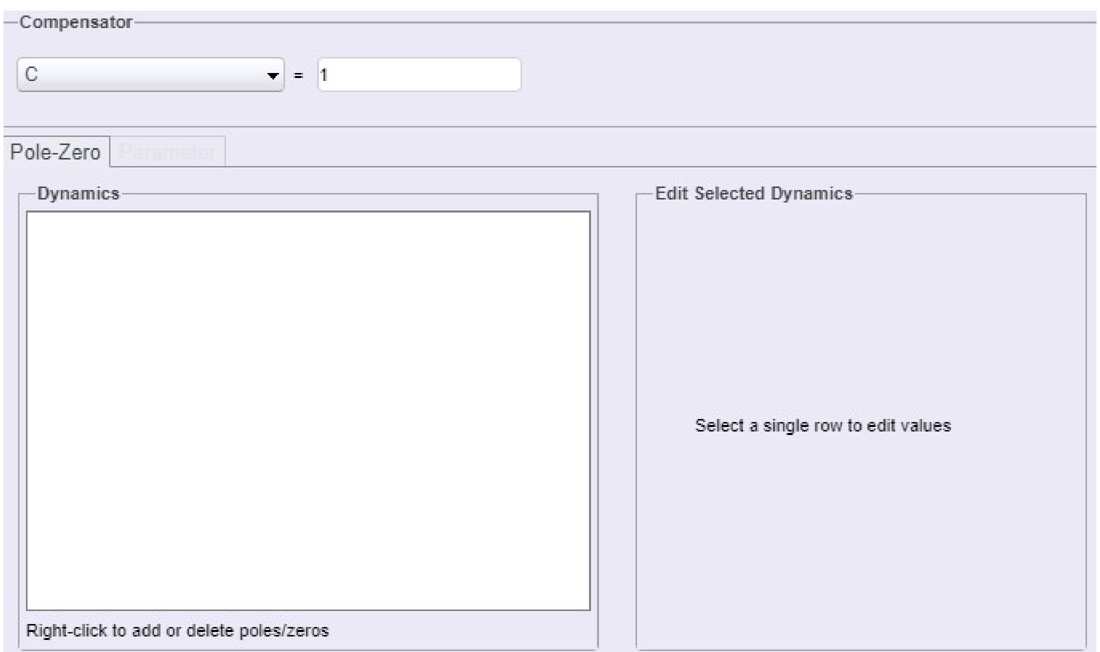


Figura 3: Imagen de los requerimientos para el controlador tipo P

Controlador tipo PD:

Según sisotool el sobrepaso fue mayor que el mínimo esperado (20 %). La razón puede estar en que para comenzar el valor de ganancia puesto en sisotool es la mínima ganancia para la cual se debería cumplir el sobrepaso y debido a que sisotool es una herramienta elaborada por personas y es muy compleja, es muy probable que deba existir cierto margen de error con respecto a la teoría. Se probó para este mismo controlador con ganancias mayores y con la ganancia de Kp=7 el sobrepaso ya era inferior a 20 % y el tiempo de asentamiento también fué inferior al 2 %.

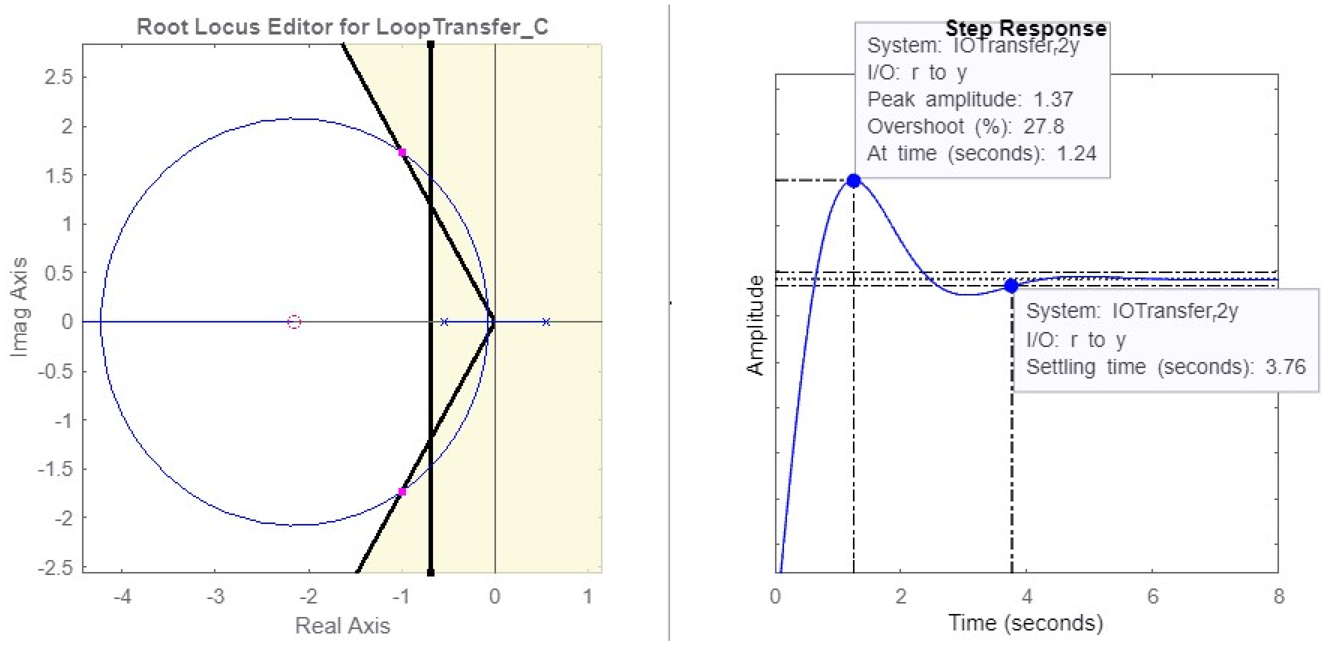


Figura 4: Imagen del LGR y de la salida. Controlador tipo PD.

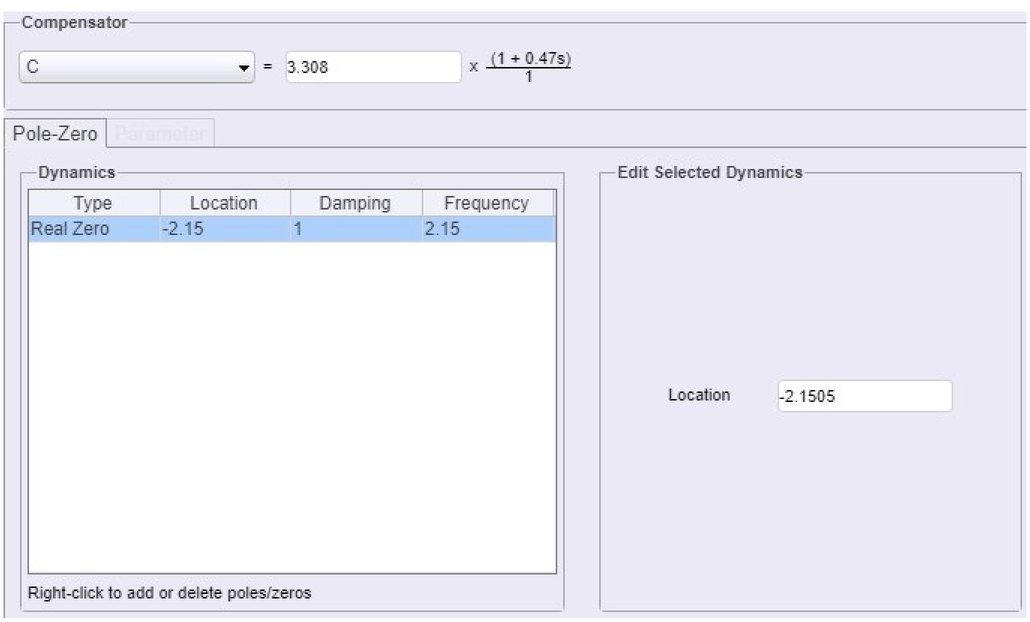


Figura 5: Imagen de los requerimientos para el controlador tipo PD.

Controlador tipo PI:

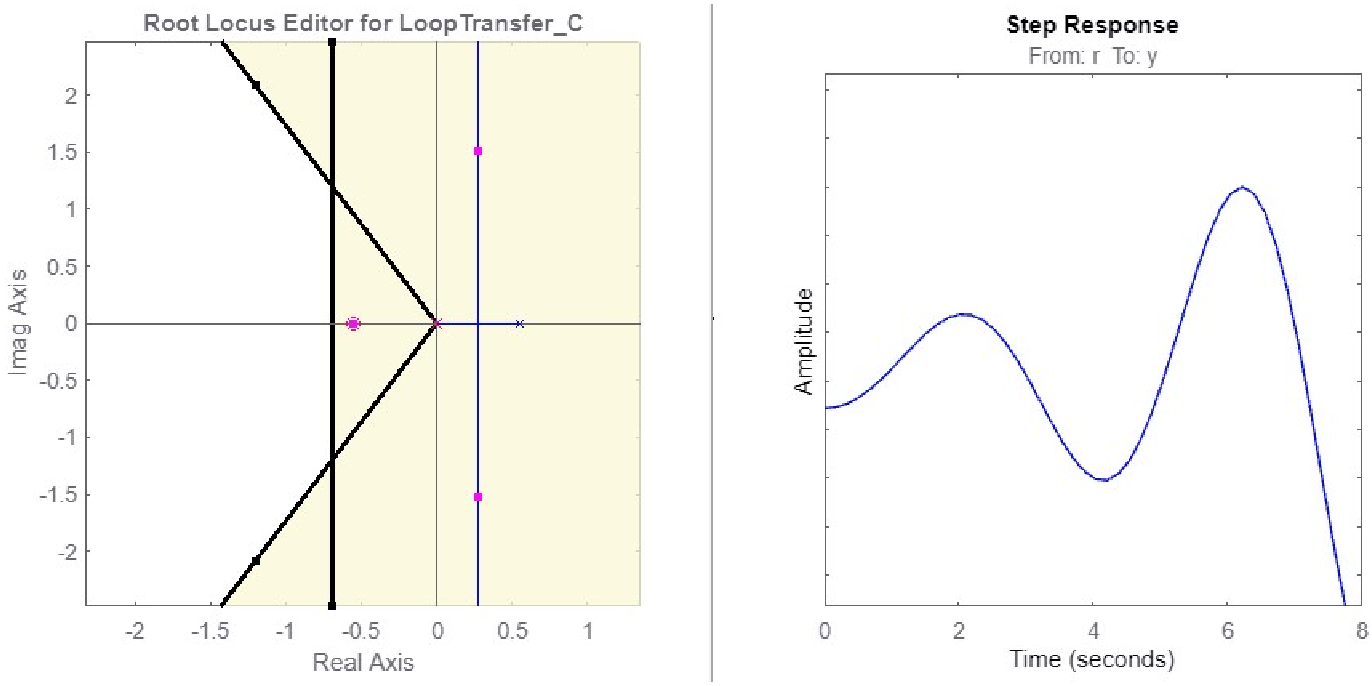


Figura 6: Imagen del LGR y de la salida. Controlador tipo PI

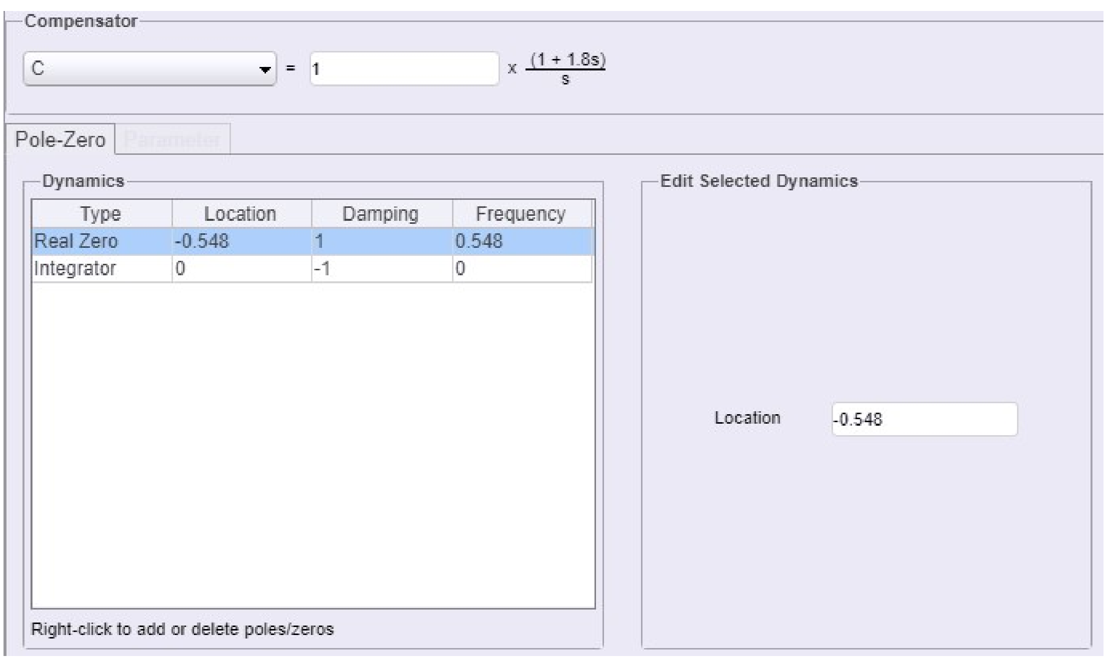


Figura 7: Imagen de los requerimientos para el controlador tipo PI

Controlador tipo PID:

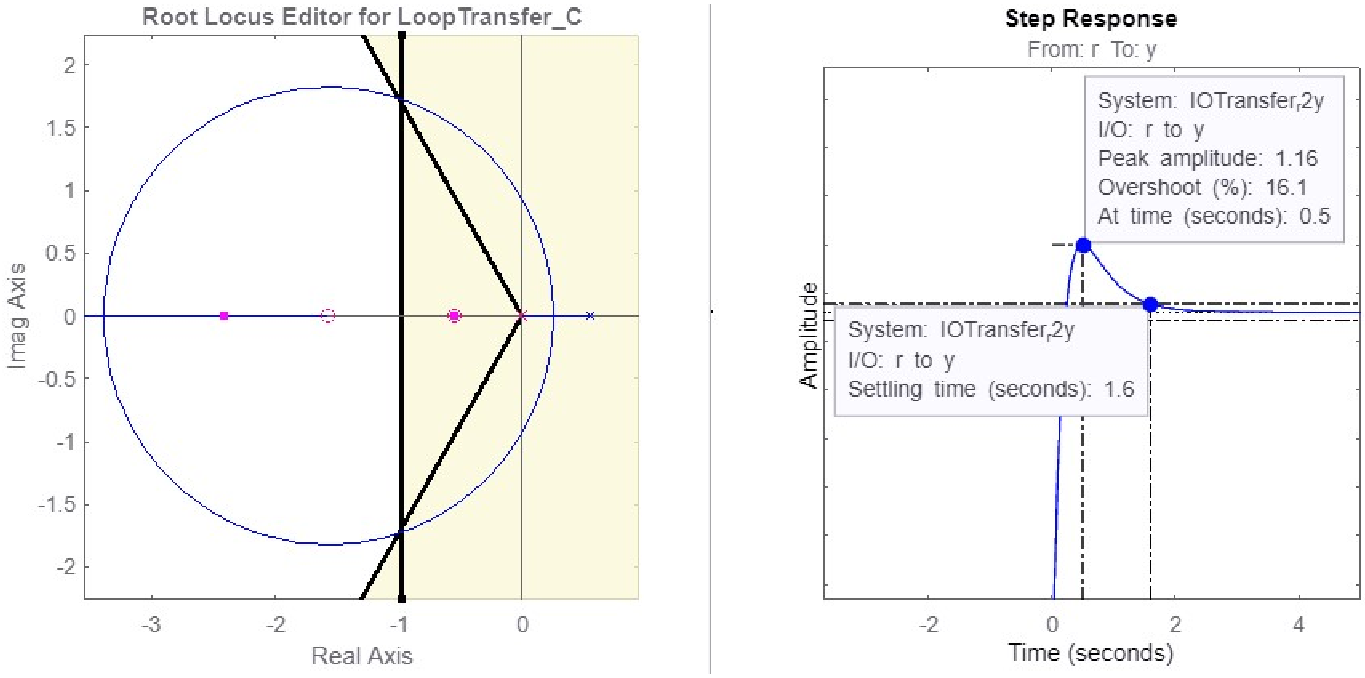


Figura 8: Imagen del LGR y de la salida. Controlador tipo PID

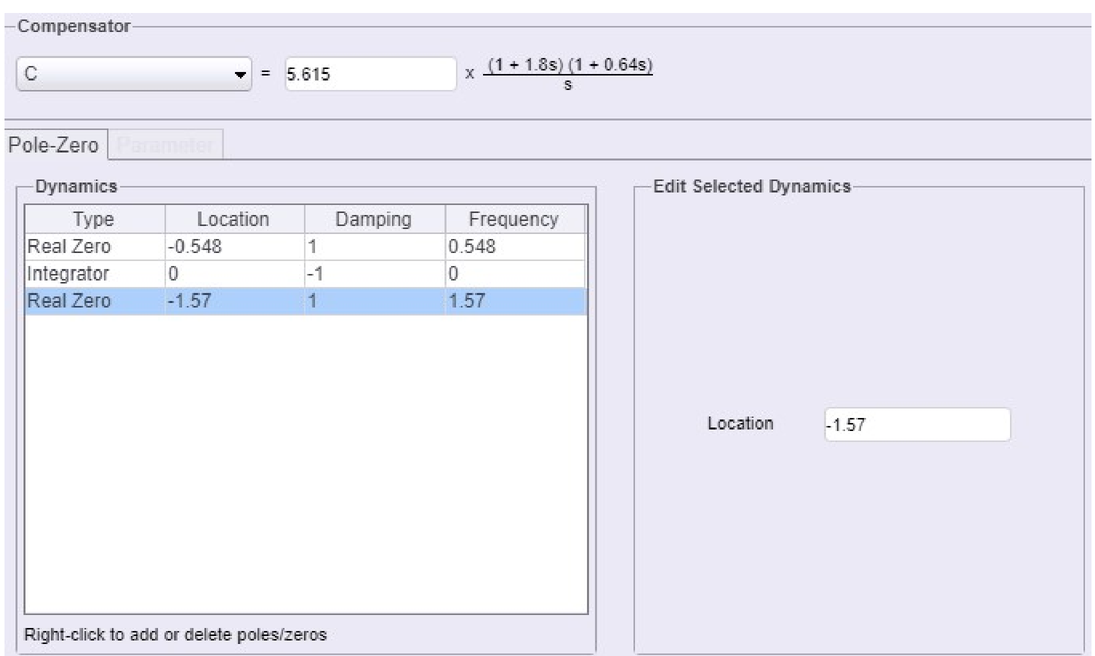


Figura 9: Imagen de los requerimientos para el controlador tipo PID