Universidad de Costa Rica
Facultad de Ingeniería
Escuela de Ingeniería Eléctrica
IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

Práctica XIII
Procesos aleatorios

Problema 1 — *Proceso aleatorio sinusoidal en fase y en cuadratura* (25 %)

Un proceso estocástico está definido por:

$$W(t) = X\cos(\omega_0 t) + Y\sin(\omega_0 t) \tag{1}$$

donde X y Y son variables aleatorias y ω_0 una constante real. $W(t)$ es estacionario en sentido amplio cuando X y Y son **no correlacionadas**, con valores medios iguales a cero y varianzas iguales $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$. Encuentre la función de autocorrelacion de $W(t)$ y pruebe que es igual a:

$$R_{WW}(\tau) = \sigma^2\cos(\omega_0\tau) \tag{2}$$

Solución propuesta

Por definición,

$$R_{WW} = E[W(t)W(t+\tau)]$$

Si se sustituye la expresión de $W(t)$ en la ecuación anterior se obtiene:

$$R_{WW} = E\Big\{\ [X\cos(\omega_0 t) + Y\sin(\omega_0 t)]\ \ [X\cos(\omega_0(t+\tau)) + Y\sin(\omega_0(t+\tau))]\ \Big\}$$

Distribuyendo:

$$\begin{aligned} R_{WW} = E[&X^2\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) + XY\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau)) \\ &+YX\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) + Y^2\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))] \end{aligned}$$

El valor esperado es un operador lineal, por lo tanto puede descomponerse en el valor esperado de cada monomio:

$$\begin{aligned} R_{WW} = &E\left[X^2\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau))\right] + E\left[XY\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))\right] \\ &+E\left[YX\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau))\right] + E\left[Y^2\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))\right] \end{aligned}$$

Las expresiones trigonométricas son una función que solamente depende del tiempo y no de las variables aleatorias, por lo que pueden ser consideradas constantes y salir del operador $E[\cdot]$:

$$\begin{aligned} R_{WW} = &E\left[X^2\right]\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) + E\left[XY\right]\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) \\ &+E\left[XY\right]\cos(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau)) + E\left[Y^2\right]\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau)) \end{aligned}$$

Como X y Y son variables aleatorias *no correlacionadas* la correlación cruzada es la multiplicación de los valores esperados. Ambos valores esperados son 0, entonces $E[XY] = E[X]E[Y] = 0$, y así:

$$
\begin{aligned}
R_{WW} = E\left[X^2\right]\cos(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) + \cancel{E[XY]}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) \\
+\cancel{E[XY]}\sin(\omega_0 t)\cos(\omega_0(t+\tau)) + E\left[Y^2\right]\sin(\omega_0 t)\sin(\omega_0(t+\tau))
\end{aligned}
$$

Ahora, utilizando las identidades trigonométricas:

$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) - \cos(a+b))$$

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b) + \cos(a+b))$$

se obtiene:

$$= \frac{1}{2}E[X^2][\cos(\omega_0\tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 t)] + \frac{1}{2}E[Y^2][\cos(\omega_0 t) - \cos(2\omega_0 t + \omega_0 t)]$$

Del enunciado se sabe que $\sigma_X^2 = \sigma_Y^2 = \sigma^2$, mientras que $\sigma^2 = E[X^2] - E^2[X]$, pero $E[X] = 0$, por lo tanto:

$$
\begin{aligned}
R_{WW} &= \frac{1}{2}\sigma^2\cos(\omega_0\tau) + \cancel{\frac{1}{2}\sigma^2\cos(2\omega_0 t + \omega_0 t)} + \frac{1}{2}\sigma^2\cos(\omega_0 t) - \cancel{\frac{1}{2}\sigma^2\cos(2\omega_0 t + \omega_0 t)} \\
&= \sigma^2\cos(\omega_0\tau)
\end{aligned}
$$

que representa una autocorrelación **constante** *con respecto al tiempo* (τ es una diferencia temporal).

Problema 2 — *Proceso aleatorio sinusoidal* (25 %)

Considere el siguiente proceso estocástico:

$$X(t) = A\cos(\pi t + \Theta) \tag{3}$$

donde A es una variable aleatoria gaussiana con valor medio 3 y varianza 10, y Θ es una VA uniformemente distribuida en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. Las variables A y Θ son estadísticamente independientes entre sí.

(a) Encuentre el valor esperado del proceso, $E[X(t)]$.

Solución propuesta

$$
\begin{aligned}
E[X(t)] &= E[A\cos(\pi t + \Theta)] = E[A]E[\cos(\pi t + \Theta)] \\
&= 3\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi}\cos(\pi t + \theta)\,\mathrm{d}\theta
\end{aligned}
$$

donde $f_\Theta(\theta) = 1/\pi$ es la función de densidad uniforme de Θ entre $-\pi/2$ y $\pi/2$. Continuando:

$$E[X(t)] = \frac{3}{\pi}\sin(\pi t + \theta)\Big|_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\theta=\frac{\pi}{2}} = \frac{3}{\pi}\left[\sin\left(\pi t + \frac{\pi}{2}\right) - \sin\left(\pi t - \frac{\pi}{2}\right)\right]$$

y finalmente usando la identidad trigonométrica de la suma de senos:

$$E[X(t)] = \frac{6}{\pi}\cos(\pi t)$$

(b) Encuentre la autocorrelación del proceso, $E[X(t)X(t+\tau)]$.

Solución propuesta

Por definición y por la linealidad del operador $E(\cdot)$:

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= E[A\cos(\pi t+\Theta)A\cos(\pi t+\pi\tau+\Theta)] \\ &= E[A^2\cos(\pi t+\theta)\cos(\pi t+\pi\tau+\theta)] \\ &= E[A^2]E[\cos(\pi t+\theta)\cos(\pi t+\pi\tau+\theta)] \end{aligned}$$

Por otra parte, del enunciado se sabe que la varianza de A es 10 y su media es 3, y esto implica que:

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 = E[A^2] - E[A]^2 &= 10 \\ E[A^2] - 3^2 &= 10 \\ E[A^2] &= 19 \end{aligned}$$

Sustituyendo esto y usando la identidad trigonométrica $\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}(\cos(a-b)+\cos(a+b))$ del producto de los cosenos en la ecuación anterior:

$$\begin{aligned} E[X(t)X(t+\tau)] &= \frac{19}{2}E[\cos(\pi t+\pi\tau+\Theta+\pi t+\Theta)+\cos(\pi\tau)] \\ &= \frac{19}{2}\left[\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\frac{1}{\pi}\cos(2\pi t+\pi\tau+2\theta)\,\mathrm{d}\theta+\cos(\pi\tau)\right] \\ &= \frac{19}{2}\left[\frac{1}{2\pi}\sin(2\pi t+\pi\tau+2\theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}+\cos(\pi\tau)\right] \end{aligned}$$

Al evaluar el seno en los intervalos descritos el resultado será 0 por su periodicidad, entonces:

$$E[X(t)X(t+\tau)] = \frac{19}{2}\cos(\pi\tau)$$

Esta es una función periódica con respecto a τ, indicando una "similitud fluctuante" entre el proceso aleatorio consigo mismo en diferentes diferencias de tiempo.

Sobre la estacionaridad del proceso $X(t)$

Si $X(t)$ tiene:

- una función de valor medio $6/\pi\cos(\pi t)$
- una función de autocorrelación $\frac{19}{2}\cos(\pi\tau)$

La evaluación de *estacionaridad* resulta:

✖ Valor medio no es constante con respecto al tiempo

✔ Autocorrelación es dependiente de la diferencia temporal τ, únicamente

Y por tanto **no** cumple los dos requisitos de un proceso estacionario en sentido amplio. Basta con observar un función de valor medio no constante para descartar cualquier forma de estacionaridad de un proceso aleatorio.

Problema 3 — *Producto de la multiplicación de dos procesos aleatorios* (25 %)

Considere los siguientes procesos estocásticos:

$$\begin{aligned} X(t) &= A\cos(\pi t + \Theta) \\ Y(t) &= B\sin(2\pi t + \Phi) \end{aligned} \tag{4}$$

donde A es una variable aleatoria gaussiana con valor medio 3 y varianza 10, y Θ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$. B es una variable aleatoria gaussiana de media 5 y varianza 8, y Φ es una variable aleatoria uniformemente distribuida en el intervalo $[0, \pi]$.

Un sistema posee un conjunto de entradas $X(t)$ y $Y(t)$ para un circuito multiplicador, cuya salida es:

$$Z(t) = X(t)Y(t) \tag{5}$$

Calcule el valor medio $E[Z(t)]$ si las VA A, B, Θ y Φ son estadísticamente independientes entre sí.

Solución propuesta

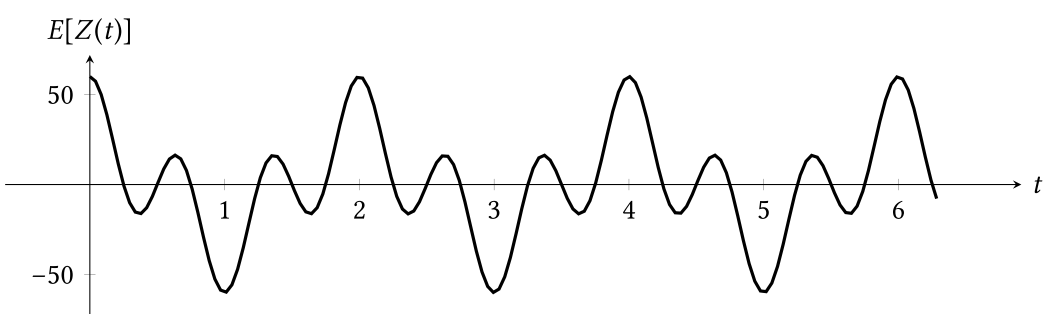
$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[X(t)Y(t)] \\ &= E[AB\cos(\pi t + \Theta)\sin(2\pi t + \Phi)] \end{aligned}$$

Al indicar que son independientes:

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= E[A]\ E[B]\ E[\cos(\pi t + \Theta)]\ E[\sin(2\pi t + \Phi)] \\ &= 3 \cdot 5 \cdot \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{\pi}\cos(\pi t + \theta)\,\mathrm{d}\theta \cdot \int_{0}^{\pi} \frac{1}{\pi}\sin(2\pi t + \phi)\,\mathrm{d}\phi \\ &= -15\sin(\pi t + \theta)\Big|_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\ \cos(2\pi t + \phi)\Big|_{0}^{\pi} \end{aligned}$$

Evaluando y usando identidades trigonométricas:

$$\begin{aligned} E[Z(t)] &= -15[2\cos(\pi t)][-2\cos(2\pi t)] \\ &= 60\cos(\pi t)\cos(2\pi t) \end{aligned}$$



$E[Z(t)]$ es un promedio que varía con el tiempo y de forma periódica, a la misma frecuencia que las señales periódicas que le dan origen.

Problema 4 — *Proceso aleatorio sinusoidal* (25 %)

Un proceso estocástico está definido por:

$$X(t) = C\cos(\Omega t + \Theta) \tag{6}$$

donde C es una variable aleatoria gaussiana de media 5 y varianza 0.2, Ω es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[2\pi(59{,}1) \quad 2\pi(60{,}1)]$, y Θ es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0, \frac{\pi}{2}]$. Las tres variables aleatorias son estadísticamente independientes entre sí.

(a) Suponga que Ω no es una variable aleatoria, sino una constante ω. Encuentre $E[X(t)]$ a partir de:

$$X(t) = C\cos(\omega t + \Theta)$$

Solución propuesta

Debido a que Θ y C son estadísticamente independientes, $f_{C,\Theta}(c,\theta)$, se puede escribir como el producto de las funciones de densidad de probabilidad $f_C(c)$ y $f_\Theta(\theta)$. donde

$$\begin{cases} f_C(c) = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\dfrac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) & \text{para } c \in \mathbb{R} \\ f_\Theta(\theta) = \dfrac{1}{\pi/2} & \text{para } \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right] \end{cases}$$

La función de densidad conjunta sería entonces

$$f_{C,\Theta}(c,\theta) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\pi/2} \qquad \text{para } c \in \mathbb{R}, \theta \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$$

Por definición, el valor esperado vendría dado por

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} c\cos(\omega t + \theta)\left(\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \cdot \frac{1}{\pi/2}\right) \,\mathrm{d}c\,\mathrm{d}\theta$$

Es posible anidar la integral

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} \cos(\omega t + \theta)\frac{1}{\pi/2}\left[\int_{-\infty}^{\infty} c\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}c\right] \mathrm{d}\theta$$

La integral entre paréntesis cuadrados corresponde al valor esperado de la función normal de C:

$$E[C] = \int_{-\infty}^{\infty} c\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{(c-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) \mathrm{d}c = 5$$

$$E[X(t)] = \int_{-\infty}^{\infty} 5\cos(\omega t + \theta)\frac{1}{\pi/2} d\theta$$

Utilizando la identidad trigonométrica

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \frac{5}{\pi/2}\int_0^{\pi/2} \cos(\omega t)\cos(\theta) - \sin(\omega t)\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{10}{\pi}\left[\cos(\omega t)\sin(\theta) + \sin(\omega t)\cos(\theta)\right]\Big|_{\theta=0}^{\theta=\pi/2} \\ &= \frac{10}{\pi}\left[\cos(\omega t)(1-0) + \sin(\omega t)(0-1)\right] = \frac{10}{\pi}\left[\cos(\omega t) - \sin(\omega t)\right] \end{aligned}$$

(b) Suponga ahora que Ω y Θ son constantes, no variables aleatorias, de modo que

$$X(t) = C\cos(\omega t + \theta)$$

Encuentre $R_{XX}(t, t+\tau)$.

Solución propuesta

Suponiendo ω y θ constantes y C una variable aleatoria normal, el valor $R_{XX}(t, t+\tau)$ es, por definición:

$$R_{XX}(t, t+\tau) = E[C\cos(\omega t + \theta)\; C\cos(\omega(t+\tau) + \theta)]$$

Como ω y θ son constantes, las expresiones $\cos(\cdot)$ no son VA, por lo que:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t+\tau) &= E[C^2]\; E[\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega(t+\tau) + \theta)] \\ &= E[C^2]\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega(t+\tau) + \theta) \end{aligned}$$

Con la equivalencia conocida de la varianza, se determina:

$$\begin{aligned} \sigma_C^2 &= E[C^2] - E[C]^2 \\ E[C^2] &= \sigma_C^2 + E[C]^2 = \sigma_C^2 + \mu_C^2 \end{aligned}$$

Entonces, finalmente:

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t+\tau) &= (\sigma_C^2 + \mu_C^2)\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega(t+\tau) + \theta) \\ &= (0{,}2 + 5^2)\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega(t+\tau) + \theta) \\ &= 25{,}2\cos(\omega t + \theta)\cos(\omega(t+\tau) + \theta) \end{aligned}$$