# Procesos estocásticos

## Introducción

Fabián Abarca Calderón

IE0405 – Modelos Probabilísticos de Señales y Sistemas

13

Tema IV

UNIVERSIDAD DE COSTA RICA

EIE Escuela de Ingeniería Eléctrica

# Contenido

Los procesos estocásticos son los terceros “objetos aleatorios” que analizaremos.
Incorporan una segunda variable independiente, *el tiempo*, que los hace útiles en la descripción de fenómenos cambiantes o dinámicos tales como…las **señales** y los **sistemas**.

DRAE
: Perteneciente o relativo al azar.

Vox
: Que está sometido al azar y que es objeto de análisis estadístico.

Oxford
: Determinado aleatoriamente; que tiene una distribución de probabilidad aleatoria o patrón que puede ser analizado estadísticamente pero no predicho con precisión.

Es sinónimo de “aleatorio” y puede ser usado de forma intercambiable, excepto porque suena más *elegante* (en español, porque en inglés sigue siendo *random processes*).
De aquí se definen dos casos:

- ***Proceso estocástico***
- ***Secuencia estocástica***

…en donde…

# *Proceso*

## Definición de diccionario

Vox Conjunto de fases sucesivas de un fenómeno o hecho complejo.

En este contexto, **procesos** será utilizado para procesos **continuos** en el tiempo.

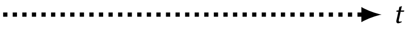
$$\longrightarrow t$$

## *Secuencia*

### Definición de diccionario

Vox [1]Serie de elementos que se suceden unos a otros y guardan relación entre sí. [2]Orden o disposición de una serie de elementos que se suceden unos a otros.

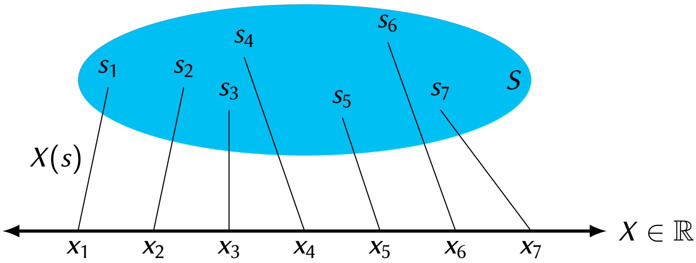
En este contexto, **secuencias** será utilizado para procesos **discretos** en el tiempo.

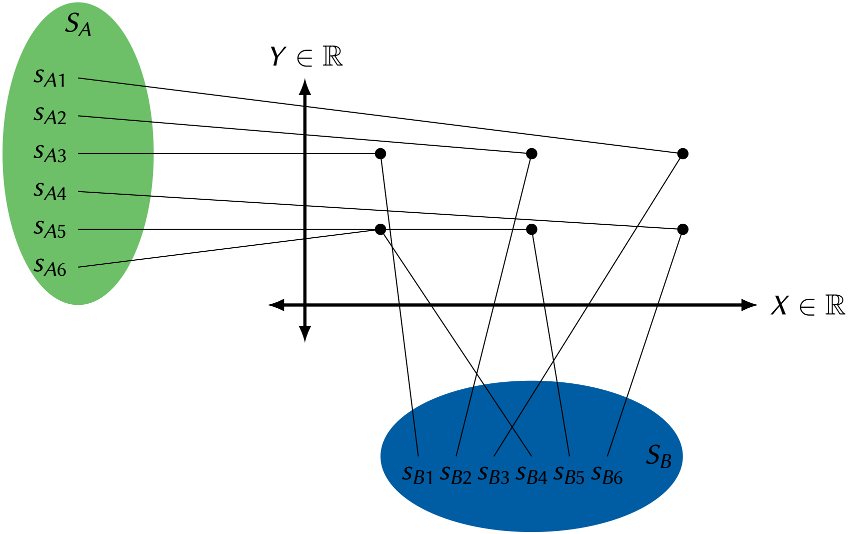


A partir de un espacio de eventos aleatorios $S$ con resultados elementales $s$ (a veces denominados $\zeta$), se obtendrán los siguientes "objetos aleatorios":

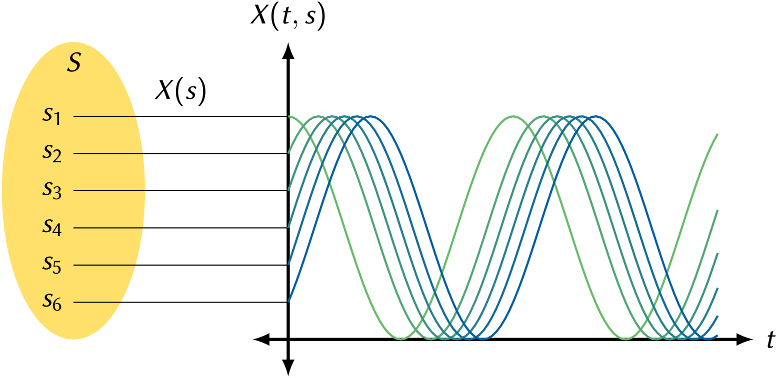
| | | |
|---|---|---|
| $X(s)$ | $\mathbf{X}(s)$ | $X(t,s)$ |
| **variable** aleatoria | **vector** aleatorio | **proceso** aleatorio |
| $X$ | $[X_1, \ldots, X_N]$ | $X(t)$ |
| $X(s) \longrightarrow \mathbb{R}$ | $\mathbf{X}(s) \longrightarrow \mathbb{R}^N$ | $X(t) \longrightarrow \mathbb{R}, t$ |

# Mapeo de la variable aleatoria




$S_A$
$s_{A1}$
$s_{A2}$
$s_{A3}$
$s_{A4}$
$s_{A5}$
$s_{A6}$
$Y \in \mathbb{R}$
$X \in \mathbb{R}$
$S_B$
$s_{B1}$ $s_{B2}$ $s_{B3}$ $s_{B4}$ $s_{B5}$ $s_{B6}$

# Mapeo del proceso aleatorio



# Concepto de un proceso estocástico

### Proceso aleatorio

Una variable aleatoria $X$ es una función de los posibles resultados $s$ de un experimento, pero ahora es una función tanto de $s$ como del tiempo. Se asigna una función

$$x(t, s) \tag{1}$$

a todo resultado $s$. La familia de todas estas funciones, denotada $X(t, s)$, es denominada un proceso aleatorio o proceso estocástico.

Cada resultado elemental $s$ genera una función del tiempo.

# Visualización de un proceso estocástico

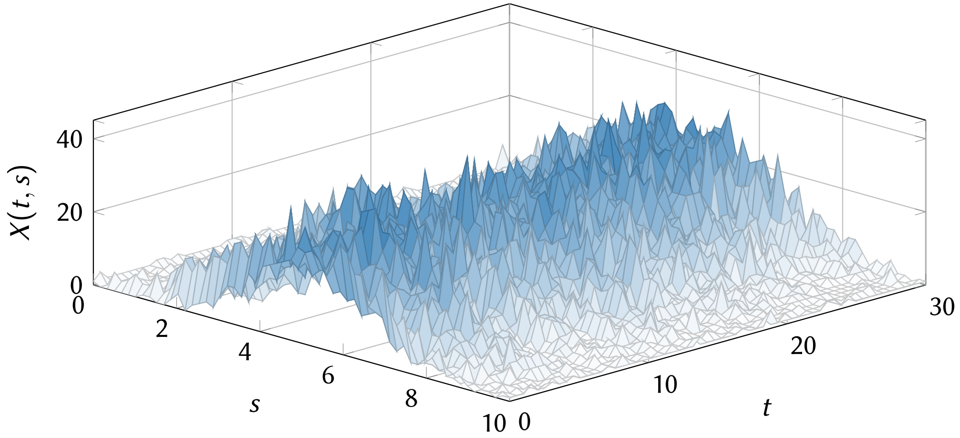



Figura: Proceso aleatorio continuo.

# Funciones muestra del proceso estocástico

Se usará a menudo la notación abreviada $x(t)$, para representar una onda específica de un proceso aleatorio denotado por $X(t)$.

- Un proceso aleatorio $X(t, s)$ representa una familia o agregado de funciones del tiempo cuando $t$ y $s$ son variables.
- Cada una de las funciones del tiempo, miembro del proceso estocástico, se llama una **función muestra** o **miembro del agregado** y, a veces, una **realización del proceso**.

Un camino aleatorio es una sucesión de decisiones, y las opciones dentro de cada decisión tienen una distribución de probabilidad particular. En un ejemplo sencillo, en cada paso se elige aleatoriamente entre 1 y $-1$ con igual probabilidad. A continuación se grafican diez funciones muestra distintas. Cada una de estas realizaciones son una entre infinitas posibilidades.

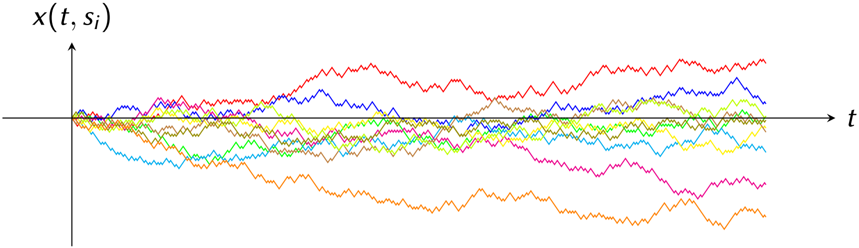



Figura: Ejemplo del proceso aleatorio llamado "camino aleatorio" (*random walk*).

# Casos especiales del proceso estocástico I

**Función del tiempo** Un proceso aleatorio representa una simple función del tiempo cuando $t$ es una variable y $s$ está fijo en un valor específico.

**Variable aleatoria** Un proceso aleatorio representa una variable aleatoria cuando $t$ es fijo y $s$ es una variable.

**Número** Un proceso aleatorio representa un simple número cuando $t$ y $s$ son ambos fijos.

# Casos especiales del proceso estocástico II

- La variable aleatoria $X(t_1, s) = X(t_1)$ se obtiene del proceso cuando el tiempo *se congela* al valor $t_1$. A menudo se usa la notación $X_1$ para denotar la variable aleatoria asociada con el proceso $X(t)$ en el tiempo $t_1$.
- $X_1$ corresponde a una tajada vertical por el agregado en el tiempo $t_1$. Las propiedades estadísticas de $X_1 = X(t_1)$ describen las propiedades estadísticas del proceso aleatorio en el tiempo $t_1$.
- Se visualiza cualquier número de variables aleatorias $X_i$ derivadas de un proceso aleatorio $X(t)$ en tiempos $t_i$, $i = 1, 2, \ldots,$ como

$$X_i = X(t_i, s) = X(t_i)$$

# Valor esperado de un proceso estocástico

- El valor esperado de $X_i$ es denominado el promedio del agregado así como el valor medio o esperado del proceso aleatorio en el tiempo $t_i$.
- Dado que $t_i$ puede tener cualquier valor, el valor medio de un proceso puede no ser constante: es una función del tiempo:

$$E[X(t)]$$

# Clasificación de procesos

# Clasificación de procesos

**Proceso aleatorio continuo** El caso si $X$ es un proceso continuo y $t$ toma un continuo de valores.

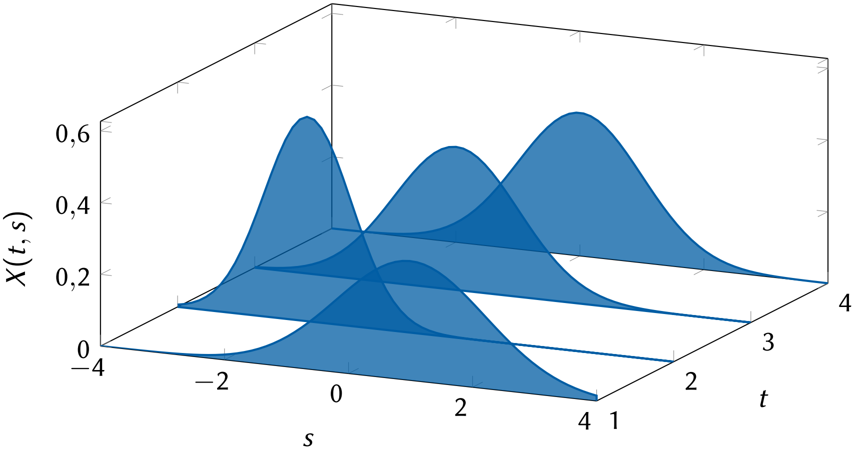
**Proceso aleatorio discreto** Corresponde a la variable aleatoria $X$ que toma solamente valores discretos mientras que $t$ es continuo.

**Secuencia aleatoria continua** Un proceso aleatorio para el que $X$ es continuo pero el tiempo tiene solamente valores discretos (al muestrear periódicamente los miembros del agregado de un proceso aleatorio continuo).

**Secuencia aleatoria discreta** Corresponde al caso de variables aleatorias discretas y tiempo discreto.

| | **Valores continuos** | **Valores discretos** |
|---|---|---|
| **Tiempo continuo** | Proceso aleatorio continuo | Proceso aleatorio discreto |
| **Tiempo discreto** | Secuencia aleatoria continua | Secuencia aleatoria discreta |

# Ejemplo de una secuencia aleatoria continua I



# Procesos determinísticos y no determinísticos

# Procesos determinísticos y no determinísticos

Un proceso aleatorio puede describirse por **la forma de sus funciones muestra**.

- Si valores futuros de cualquier función muestra no pueden ser predichos exactamente de valores observados pasados, el proceso se denomina **no determinístico**.
- Un proceso se llama **determinístico** si los valores futuros de cualquier función muestra pueden ser predichos de valores pasados.

# Ejemplo de proceso aleatorio determinístico con función exponencial I

Sea un proceso aleatorio definido por

$$X(t) = Ae^{-t}u(t)$$

donde $A$ es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{1, 2, 3\}$ con igual probabilidad.

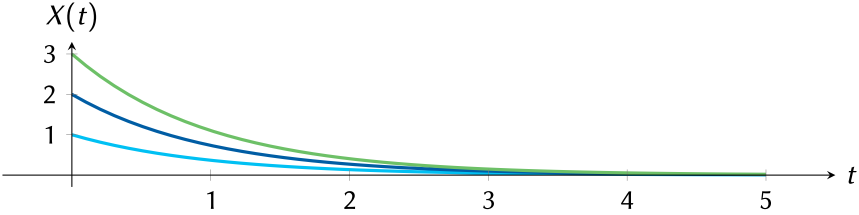



Figura: Familia de funciones del proceso aleatorio $X(t)$

# Ejemplo de variaciones en la amplitud para una onda sinusoidal I

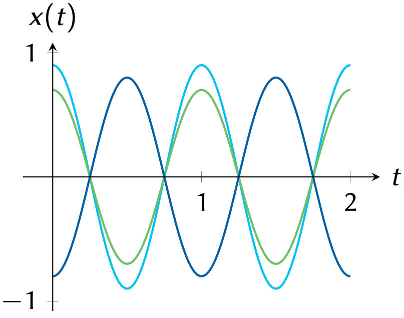
Una señal tiene la forma deseada $v(t) = v_0 + a\cos(\omega_0 t + \theta_0)$, pero su recepción puede estar seriamente afectada por un canal de transmisión que agrega ruido, inflexiones de onda, reverberaciones, etc. Se puede por ahora asumir que existen únicamente variaciones aleatorias en la amplitud, modeladas como un proceso aleatorio

$$X(t) = v_0 + A\cos(\omega_0 t + \theta_0)$$

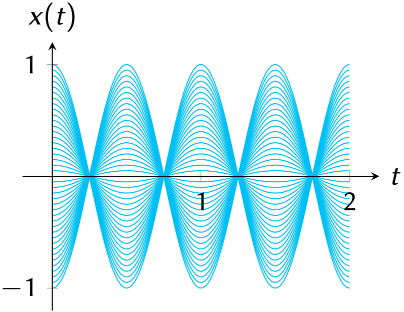
y que $A \sim \text{unif}(-1, 1)$.

# Ejemplo de variaciones en la amplitud para una onda sinusoidal II

Para $A \sim \text{unif}(-1,1)$, $v_0 = 0$, $\omega_0 = 2\pi$ y $\theta_0 = 0$ se tiene:




(a) $A = \{0{,}9, 0{,}7, -0{,}8\}$




(b) $A \sim \text{unif}(-1,1)$

Figura: Ejemplo de variaciones aleatorias de amplitud en una función sinusoidal

# Ejemplo de variaciones en la amplitud para una onda sinusoidal III

En general, para una función de la forma

$$X(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right) \tag{2}$$

$A$, $\Theta$ u $\omega_0$ (o todos) pueden ser variables aleatorias. Cualquier función muestra corresponde a la ecuación (2) con valores particulares de estas variables aleatorias. Por consiguiente, el conocimiento de la función muestra con anterioridad a cualquier instante del tiempo, permite automáticamente la predicción de los valores futuros de la función muestra porque su forma es conocida, **determinística**.

# Funciones de distribución de un proceso aleatorio

# Función de probabilidad acumulativa de primer orden

Para un tiempo particular $t_1$, la función de probabilidad acumulativa asociada con la variable aleatoria $X_1 = X(t_1)$, será denotada $F_X(x_1; t_1)$ y es conocida más precisamente como la función acumulativa de primer orden del proceso $X(t)$. Se le define como

$$F_X(x_1; t_1) = P\{X(t_1) \leq x_1\} \tag{3}$$

para cualquier número real $x_1$.

# Función de probabilidad acumulativa de segundo orden

Para dos variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$, la función acumulativa conjunta de segundo orden es la extensión bidimensional de la fórmula anterior:

$$F_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = P\{X(t_1) \leq x_1, X(t_2) \leq x_2\} \tag{4}$$

De manera similar, para $N$ variables aleatorias $X_i = X(t_i)$, $i = 1, 2, \ldots, N$, la función acumulativa conjunta de orden $N$ es

$$F_X(x_1, \ldots, x_N; t_1, \ldots, t_N) = P\{X(t_1) \leq x_1, \ldots, X(t_N) \leq x_N\} \tag{5}$$

# Funciones de densidad de probabilidad

Las funciones de densidad conjunta de interés se encuentran de las derivadas apropiadas de las tres fórmulas anteriores:

$$f_X(x_1; t_1) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x_1} F_X(x_1; t_1) \tag{6}$$

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = \frac{\partial^2 F_X(x_1, x_2; t_1, t_2)}{\partial x_1 \partial x_2} \tag{7}$$

$$f_X(x_1, \ldots, x_N; t_1, \ldots, t_N) = \frac{\partial^N F_X(x_1, \ldots, x_N; t_1, \ldots, t_N)}{\partial x_1 \cdots \partial x_N} \tag{8}$$

# Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial I

¿Cuál es la función de densidad para este proceso aleatorio definido con anterioridad?

$$X(t) = Ae^{-t}u(t)$$

donde $A$ es una variable aleatoria discreta que puede tomar los valores $\{1, 2, 3\}$ con igual probabilidad.

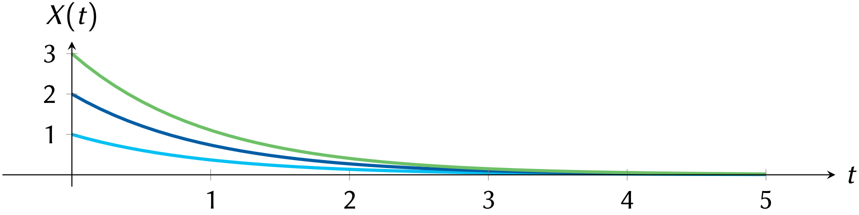



Figura: Familia de funciones del proceso aleatorio $X(t)$

# Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial II

La función de densidad probabilística $f_X(x,t)$ puede deducirse analizando que:

- En $t = 1$ el proceso aleatorio $X(1)$ puede tomar los valores $e^{-1}$, $2e^{-1}$ o $3e^{-1}$, cada uno con probabilidad $\frac{1}{3}$, por tanto

$$f_X(x,1) = \frac{1}{3}\delta(x - e^{-1}) + \frac{1}{3}\delta(x - 2e^{-1}) + \frac{1}{3}\delta(x - 3e^{-1})$$

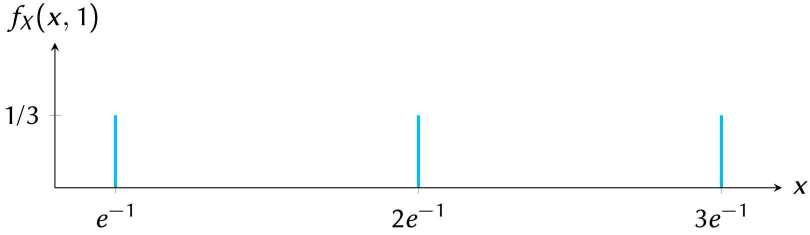



Figura: Función de densidad de probabilidad para el tiempo $t = 1$.

# Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial III

- Esto se puede generalizar para cualquier $t$ como

$$f_X(x,t) = \frac{1}{3}\delta(x - e^{-t}) + \frac{1}{3}\delta(x - 2e^{-t}) + \frac{1}{3}\delta(x - 3e^{-t})$$

La función de densidad, por tanto, es una *secuencia* de funciones definidas para cada instante de tiempo (ya sea discreto o continuo).

# Ejemplo de función de densidad de un proceso con función exponencial IV

- De la misma forma, puede definirse la función de densidad **conjunta** para dos VA $X(t_1)$ y $X(t_2)$, que vienen del mismo proceso aleatorio pero en dos instantes de tiempo $t_1$ y $t_2$,

$$
\begin{aligned}
f_X(x_1, x_2, t_1, t_2) = & \frac{1}{3}\delta(x_1 - e^{-t_1}, x_2 - e^{-t_2}) \\
& + \frac{1}{3}\delta(x_1 - 2e^{-t_1}, x_2 - 2e^{-t_2}) \\
& + \frac{1}{3}\delta(x_1 - 3e^{-t_1}, x_2 - 3e^{-t_2})
\end{aligned}
$$

# Independencia estadística

Dos procesos $X(t)$ e $Y(t)$ son estadísticamente independientes si el grupo de variables aleatorias $X(t_1), X(t_2), \ldots, X(t_N)$ es independiente del grupo $Y(t'_1), Y(t'_2), \ldots, Y(t'_M)$ para cualquier escogencia de tiempos $t_1, t_2, \ldots, t_N, t'_1, t'_2, \ldots, t'_M$. La independencia requiere que la densidad conjunta sea factorizable por grupos:

$$\begin{aligned} &f_{X,Y}(x_1, \ldots, x_N, y_1, \ldots, y_M; t_1, \ldots, t_N, t'_1, \ldots, t'_M) = \\ &f_X(x_1, \ldots, x_N; t_1, \ldots, t_N) f_Y(y_1, \ldots, y_M; t'_1, \ldots, t'_M) \end{aligned} \tag{9}$$

# Estacionaridad

- Un **proceso** aleatorio se convierte en una **variable** aleatoria cuando *el tiempo se fija* en un valor particular.
- La **variable** aleatoria poseerá propiedades **estadísticas**, tales como valor medio, momentos, varianza, etcétera, relacionados con su función de densidad.
- Si **dos variables** aleatorias se obtienen del proceso para dos instantes del tiempo, tendrán propiedades estadísticas (medias, varianzas, momentos conjuntos, etcétera) relacionados con su función de densidad conjunta.

> Un proceso aleatorio se dice que es **estacionario** si todas sus propiedades estadísticas **no cambian con el tiempo**.

Otros procesos son denominados **no estacionarios**.

# Estacionaridad de primer orden

# Procesos estacionarios de primer orden I

Un proceso aleatorio es llamado estacionario de orden uno si su función de densidad de primer orden no cambia con un desplazamiento en el origen del tiempo. Es decir,

$$f_X(x_1; t_1) = f_X(x_1; t_1 + \Delta) \tag{10}$$

debe ser cierto para cualquier $t_1$ y cualquier número real $\Delta$.
Como consecuencia de la ecuación (10), $f_X(x_1; t_1)$ es independiente de $t_1$ y el valor medio del proceso $E[X(t)]$ es una constante:

$$E[X(t)] = \overline{X} = \text{constante} \tag{11}$$

Para probar lo anterior se encuentra los valores medios de las variables aleatorias $X_1 = X(t_1)$ y $X_2 = X(t_2)$. Para $X_1$:

$$E[X_1] = E[X(t_1)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1)\, \mathrm{d}x_1 \tag{12}$$

Para $X_2$:

$$E[X_2] = E[X(t_2)] = \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_2)\, \mathrm{d}x_1 \tag{13}$$

La variable $x_2$ de integración ha sido reemplazada por la variable alternativa $x_1$ por conveniencia.

Si se pone ahora $t_2 = t_1 + \Delta$ en la ecuación 13,

$$\begin{aligned} E[X_2] = E[X(t_2)] &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1 + \Delta)\, \mathrm{d}x_1 = E[X(t_1 + \Delta)] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} x_1 f_X(x_1; t_1)\, \mathrm{d}x_1 = E[X(t_1)] \\ &= E[X_1] \end{aligned}$$

Se concluye finalmente

$$E[X(t_1 + \Delta)] = E[X(t_1)]$$

que debe ser constante porque $t_1$ y $\Delta$ son arbitrarios.

# Estacionaridad de segundo orden

## Estacionaridad de segundo orden

Un proceso se llama estacionario de orden dos si su función de densidad de segundo orden cumple que

$$f_X(x_1, x_2; t_1, t_2) = f_X(x_1, x_2; t_1 + \Delta, t_2 + \Delta) \tag{14}$$

para todo $t_1$, $t_2$ y $\Delta$.
Pero aquí interviene una nueva relación de interés:

$$R_{XX}(t_1, t_2) = E[X_1 X_2] = E[X(t_1)X(t_2)] \tag{15}$$

recibe el nombre de **autocorrelación de un proceso aleatorio** $X(t)$ y será en general una función de $t_1$ y $t_2$. Una consecuencia de la ecuación (14) es que la autocorrelación de un proceso estacionario de segundo orden es una función solamente de las diferencias temporales y no del tiempo absoluto; es decir, si $\tau = t_2 - t_1$, entonces

$$R_{XX}(t_1, t_1 + \tau) = E[X(t_1)X(t_1 + \tau)] = R_{XX}(\tau) \tag{16}$$

# Estacionaridad en sentido amplio

# Estacionaridad en sentido amplio I

Muchos problemas prácticos requieren que se trate con la función de autocorrelación y el valor medio de un proceso aleatorio. Las soluciones se simplifican mucho si tales cantidades no dependieran del tiempo absoluto. La estacionaridad de segundo orden es suficiente para garantizar estas características. Empero, es a menudo más restrictivo que necesario y es deseable una forma más *relajada* de estacionaridad. La forma más útil es el **proceso estacionario en sentido amplio**, definido como aquel en donde

$$E[X(t)] = \overline{X} \quad \text{(constante)} \tag{17}$$

$$E[X(t)X(t+\tau)] = R_{XX}(\tau) \tag{18}$$

## Estacionaridad conjunta

Dos procesos aleatorios $X(t)$, $Y(t)$ son conjuntamente estacionarios en sentido amplio si cada uno es estacionario en sentido amplio y su función de correlación cruzada (*crosscorrelation*)

$$R_{XY}(t_1, t_2) = E[X(t_1)Y(t_2)] \tag{19}$$

es una función solamente de la diferencia temporal $\tau = t_2 - t_1$ y no del tiempo absoluto, es decir,

$$\begin{aligned} R_{XY}(t, t+\tau) &= E[X(t)Y(t+\tau)] \\ &= R_{XY}(\tau) \end{aligned} \tag{20}$$

Se demostrará que el proceso aleatorio

$$X(t) = A\cos\left(\omega_0 t + \Theta\right)$$

es estacionario en sentido amplio si se supone que $A$ y $\omega_0$ son constantes y $\Theta$ es una variable aleatoria distribuida uniformemente en el intervalo $[0, 2\pi]$. El valor medio es

$$\begin{aligned} E[X(t)] &= \int_0^{2\pi} A\cos(\omega_0 t + \theta)\frac{1}{2\pi}d\theta \\ &= 0 \end{aligned}$$

# Ejemplo de estacionaridad en sentido amplio II

La función de autocorrelación con $t_1 = t$ y $t_2 = t + \tau$ se convierte[1] en

$$\begin{aligned} R_{XX}(t, t+\tau) &= E\left[A\cos(\omega_0 t + \Theta) A\cos(\omega_0 t + \omega_0 \tau + \Theta)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} E\left[\cos(\omega_0 \tau) + \cos(2\omega_0 t + \omega_0 \tau + 2\Theta)\right] \\ &= \frac{A^2}{2} \cos(\omega_0 \tau) \end{aligned}$$

La función de autocorrelación depende solamente de $\tau$ y el valor medio es una constante, por lo que $X(t)$ es estacionario en sentido amplio.

[1] Se utiliza la identidad $\cos(x)\cos(y) = \frac{1}{2}\cos(x-y) + \cos(x+y)$.

# Estacionaridad en sentido estricto y de orden $N$

Un proceso aleatorio es estacionario de orden $N$ si su función de densidad de orden $N$ es invariante ante un desplazamiento en el origen temporal; es decir, si

$$f_X(x_1, \ldots, x_N; t_1, \ldots, t_N) = f_X(x_1, \ldots, x_N; t_1 + \Delta, \ldots, t_N + \Delta) \tag{21}$$

para todo $t_1, \ldots, t_N$ y $\Delta$. La estacionaridad de orden $N$ implica estacionaridad a todos los órdenes $k \leq N$. Un proceso estacionario a todo orden $N = 1, 2, \ldots,$ es denominado estacionario en sentido estricto.

- **¿Qué es un proceso estocástico?**
  *Luis Rincón*, https://youtu.be/Gngu2xp3exU