הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

החוג למדעי המחשב (0368)
מתמטיקה בדידה (1118)
(גרסה ארוכה)

מרצים: פרופ' מיכל פלדמן, ד"ר אורי להב, ד"ר גיל כהן
מתרגל: גל מאור
תשפ"ב, סמסטר א' (2021-2022)

מסכם: רועי מעין

The Raymond and
Beverly Sackler Faculty
of Exact Sciences
Tel Aviv University

פרק 1 - קבוצות

פרק 2 – יחסים ופונקציות

פרק 3 - עוצמות

פרק 4 - קומבינטוריקה

פרק 5 - גרפים

1 - קבוצות

מבוא

הגדרות בסיסיות

הגדרה לא רשמית (ובעייתית) – אוסף של עצמים, המהווה עצם בעצמו. לעצמים מהם מורכבת הקבוצה קוראים "איברי הקבוצה" ועל כל אחד מהם אומרים שהוא "שייך" לקבוצה.

הערות:

- אין הגבלה על סוג העצמים שיכולים להיות איברים בקבוצה.
- קבוצה יכולה להכיל טיפוסים שונים של עצמים בתוכה.
- גם **קבוצה** יכולה להיות **איבר בקבוצה**.

קבוצה סופית – ניתנת לתיאור ע"י רישום איבריה בין סוגריים מסולסלים.
לדוגמה $A = \{5, \pi, e, 8\}$.

שייכות: נסמן שייכות לקבוצה ע"י $\in$. **נשים לב שמדובר בקשר בין איבר** (שיכול להיות קבוצה בעצמו) **לבין קבוצה**. השאלה הנשאלת – האם האיבר x נמצא כפי שהוא בדיוק בתוך הקבוצה A?

דוגמאות:

- $5 \in A$
- $\{5\} \notin A$
- $\{5\} \in \{5, \{5\}\}$
- $\{1\} \in \{\{1,2\}, \{3\}\}$

עקרון האקסטנציונאליות: שתי קבוצות שוות זו לזו אמ"ם יש להן בדיוק את אותן האיברים. כלומר, $A = B$ אמ"ם $\forall x. x \in A \leftrightarrow x \in B$.

מסקנות:

1. אין משמעות לסדר האיברים בקבוצה - $\{1,2,4\} = \{4,2,1\}$
2. אין משמעות למספר המופעים של איבר בקבוצה - $\{1,2,2\} = \{1,2\}$

הכלה: אומרים ש-A מוכלת ב-B (או "תת-קבוצה של" או "חלקית ל") ומסמנים $A \subseteq B$ אם כל איבר ששייך ל-A שייך גם ל-B. כלומר, $\forall x. x \in A \to x \in B$. נשים לב שמדובר בקשר בין **קבוצות בלבד**!

נסמן A **מוכלת ממש** ב-B אם $A \subseteq B \wedge A \neq B$. כלומר, תכונה זו אוסרת על שוויון בין הקבוצות.

דוגמאות ($A = \{5, \pi, e, 8\}$):

- $\{\{5\}\} \not\subset \{\{5\}\}$ לא מוכלת **ממש**
- $\{\{5\}\} \subseteq \{\{5\}\}$ כן (מוכלת או **שווה**)

טרנזיטיביות ההכלה: אם $A \subseteq B$ וגם $B \subseteq C$ אז $A \subseteq C$.

הוכחה: צ"ל שלכל $x \in A$ מתקיים $x \in C$.
יהי $x \in A$. מכך ש-$A \subseteq B$ מתקיים $x \in B$. מכך ש-$B \subseteq C$ מתקיים $x \in C$.

הקבוצה הריקה: נסמן את הקבוצה הריקה ב-$\emptyset$ ונגדיר אותה באופן הבא: $\forall x. x \notin \emptyset$.

נשים לב כי **הקבוצה הריקה מוכלת בכל קבוצה אחרת**: $\emptyset \subseteq \{1,2,3\}$ כיוון שזה מתקיים באופן ריק!
הטענה כאן היא $\forall x. x \in \emptyset \to x \in A$ והתנאי הראשון תמיד לא נכון, לכן הטענה תמיד נכונה.

שוויון קבוצות: נגדיר שוויון קבוצות באופן הבא: $A = B \Leftrightarrow \forall x. x \in A \Leftrightarrow x \in B$

משפט (הוכחנו בכיתה עם שקילויות לוגיות) – $A = B \Leftrightarrow A \subseteq B \wedge B \subseteq A$

<u>הגדרת קבוצות וסימונן:</u>

נרצה להגדיר את קבוצת כל האיברים x המקיימים תכונה P מסוימת, כאשר x חופשי ב-P (אינו משתנה קשור).

דוגמאות:

- $A = \{x|P(x)\}, P(x) = x \in \mathbb{R} \wedge (x^2 + 5x + 6 = 0)$
- $B = \{n \in \mathbb{N}|\exists k. k \in \mathbb{N} \wedge n = 2k\}$
- $C = \{x \in \mathbb{R}|0 \leq x < 1\} = [0,1)$
- $D = \{\{n\}|n \in \mathbb{N}\}$ - קבוצת כל הסינגלטונים הטבעיים
- $E = \{kn|n \in \mathbb{N}\} = \{0, k, 2k, \dots\}$ – נרשה גם משתנים חופשיים (k)

פרדוקסים

<u>פרדוקס Berry:</u>

תהא B קבוצת המספרים הטבעיים שלא ניתן להגדיר בעברית בפחות מ-20 מילים. הקבוצה היא אינסופית ומכילה מספרים טבעיים.
לקבוצה B קיים איבר מינימלי, יהא b האיבר הנ"ל. נוכל להגדיר את b בתור:
"המספר הטבעי הקטן ביותר שלא ניתן להגדיר בעברית בפחות מ-20 מילים" (הגדרה זו מכילה פחות מ-20 מילים, יש כאן טריק סמנטי, אבל הצלחנו להגדיר באמצעות המשפט הנ"ל בעברית שמכיל פחות מ-20 מילים, את האיבר, וזו סתירה להגדרת הקבוצה).

<u>פרדוקס Russel:</u>

נגדיר את התכונה: $P(x) = x \notin x$ ונגדיר בהתאם את הקבוצה: $S = \{x|P(x)\}$ כל הקבוצות שלא שייכות לעצמן.
לכל y כללי מתקיים שאם הוא ב-S אז $y \in \{x|P(x)\} \Leftrightarrow y \in \{x|x \notin x\}$ ולפי כלל β (נמצא בספר הגדול והכיפי) נוכל פשוט להציב את y ולקבל $y \notin y$.
בפרט עבור $y = S$ נקבל $S \in S \Leftrightarrow S \notin S$.

ובמילים אחרות: אם הקבוצה S נמצאת ב-S (שייכת לעצמה) אז לפי התכונה היא לא שייכת לעצמה. ואם S לא נמצאת ב-S (לא שייכת לעצמה) אז לפי התכונה היא מקיימת שהיא כן שייכת לעצמה. בשני המקרים נקבל סתירה.

עקרונות להגדרת קבוצות

נניח במפורש את קיומן של הקבוצות הבאות: $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{Q}, \mathbb{R}, \mathbb{C}$.

עקרון לבניית קבוצה סופית – אם $t_1, \dots, t_n$ מייצגים עצמים אז נגדיר את $\{t_1, \dots, t_n\}$ בתור קבוצה.

<u>עקרון הקומפרהנסיה המוגבל:</u>

אם S הוא ביטוי המייצג קבוצה, P היא תכונה, אזי $\{x \in S|P\}$ הוא ביטוי המייצג קבוצה. כלומר, אנו מגבילים את עצמנו לקחת איברים מהקבוצה S בלבד, אותה כבר הגדרנו.
כך ניתן להגדיר למשל: $\emptyset = \{x \in \mathbb{N}|x \neq x\}$.

קבוצת החזקה

<u>עקרון קבוצת החזקה</u> – אם A היא קבוצה, אזי אוסף כל תתי הקבוצות שלה היא גם קבוצה. אוסף זה נקרא קבוצת החזקה של A ונסמנו $P(A)$: $P(A) = \{x|x \subseteq A\}$.

לכל קבוצה A מתקיים:

- $\emptyset \subseteq A$
- $A \subseteq A$

<u>משפט (הוכחה באינדוקציה בביתה)</u> – תהא A קבוצה עם n איברים. אזי $P(A)$ היא קבוצה עם **2^n איברים**.

פעולות על קבוצות

הפעולות ותכונותיהן

פעולה	תיאור מילולי	תיאור מתמטי
איחוד	כל האיברים השייכים לפחות לאחת משתי הקבוצות	$A \cup B = \{x \mid x \in A \vee x \in B\}$
חיתוך	כל האיברים השייכים לשתי הקבוצות	$A \cap B = \{x \mid x \in A \wedge x \in B\}$
הפרש	האיברים השייכים ל-A ולא שייכים ל-B	$A \setminus B = \{x \mid x \in A \wedge x \notin B\}$
הפרש סימטרי	האיברים הנמצאים בדיוק באחת משתי הקבוצות	$A \Delta B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$
משלים	כל האיברים בקבוצת גג כלשהי E שאינם ב-A	$\bar{A} = E \setminus A$

איחוד וחיתוך מוכללים

הגדרה – תהא F משפחה של קבוצות, נגדיר:

פעולה	תיאור מילולי	תיאור מתמטי
איחוד מוכלל	כל האיברים שנמצאים **לפחות בקבוצה אחת בתוך F** כלומר, מספיק שתהיה קבוצה אחת ב-F שמכילה את האיבר, כדי שהאיבר יהיה באיחוד המוכלל	$\bigcup F = \{x \mid \exists A \in F. x \in A\}$
חיתוך מוכלל	כל האיברים שנמצאים **בכל הקבוצות שבתוך F** כלומר, האיבר צריך להיות שייך לכל קבוצה שקיימת בתוך F, כדי שהאיבר יהיה בחיתוך המוכלל	$\bigcap F = \{x \mid \forall A \in F. x \in A\}$

<u>קבוצות זרות:</u> אם החיתוך בין שתי קבוצות ריק, נאמר שהן זרות.

2 – יחסים ופונקציות

יחסים

מכפלה קרטזית

זוג סדור: מסומן כ-$<a,b>$ הוא צמד של שני איברים, כאשר ישנה משמעות לסדר האיברים.

התכונה הנדרשת מבחינת הסדר היא: $<a,b>=<c,d> \Leftrightarrow a=c \wedge b=d$

נייצג זוג סדור באמצעות קבוצה בצורה הבאה: $\{\{a,b\},\{a\}\}$

מכפלה קרטזית: מוגדרת על שתי קבוצות A,B, היא קבוצה של זוגות סדורים באופן הבא, כאשר האיבר הראשון הוא מ-A והאיבר השני הוא מ-B:

$$A\times B=\{z|\exists a\in A,b\in B.z=<a,b>\}=\{<a,b>|a\in A,b\in B\}$$

נשים לב כי המכפלה הקרטזית אינה קומוטטיבית ואינה אסוציאטיבית.

הכללה ל-n-יות סדורות – נוכל להגדיר באופן רקורסיבי את $<a_1,a_2,\dots,a_n>=<a_1,<a_2,\dots,a_n\gg$

אם $A_1,\dots,A_n$ קבוצות, אזי המכפלה הקרטזית של כולן היא קבוצת כל ה-n-יות הסדורות, כך שלכל $i=1,\dots,n$ מתקיים כי $a_i\in A_i$.

סימון – כאשר $A=B$ מקובל לרשום A^2 במקום $A\times A$.

היטל: – עבור $z=<a,b>$ נכתוב $\Pi_1(z)=a,\Pi_2(z)=b$.

יחסים

יחס: יחס S מעל קבוצות A,B (מ-A ל-B) הוא תת-קבוצה של המכפלה הקרטזית $A\times B$.

- נשים לב כי $P(A\times B)$ הוא קבוצת כל היחסים בין הקבוצות, כי כל קבוצה בה היא תת-קבוצה של $A\times B$.
- נגיד שיחס מעל A אם הוא מוגדר על A^2.
- נסמן - $<x,y>\in S, xSy$.
- **יחס הוא קבוצה של זוגות סדורים!**

היחס ההפוך: אם S הוא יחס, S^{-1} מוגדר כך: $S^{-1}=\{<b,a>\mid <a,b>\in S\}$. כלומר, הוא מכיל את כל הזוגות הסדורים ההפוכים.

הרכבת יחסים:

אם יש לנו שני יחסים $S\subseteq A\times B, R\subseteq B\times C$ אז ההרכבה $R\circ S\subseteq A\times C$ מוגדר כך:

$$R\circ S=\{<a,c>\in A\times C|\exists b\in B: <a,b>\in S\wedge <b,c>\in R\}$$

אם למשל R מורכב על S, קודם מפעילים את S (השני ביחס) ואז את R (הראשון ביחס).

תכונות של יחסים

נסתכל על היחס $S\subseteq A\times B$.

תכונה	עברית	מתמטית
מלא (ב-A) (קיום)	לכל איבר בתחום A **קיים** איבר בטווח B. לכל האיברים ב-A קיים בן זוג והם יחד מופיעים כזוג סדור ביחס.	$\forall a\in A.\exists b\in B.<a,b>\in S$
חד-ערכי (יחידות)	לכל איבר בתחום A מתאים איבר **אחד ויחיד** בטווח B. לא יתכן שיש לאותו איבר ב-A שני בני זוג ב-B.	$\forall a\in A.\forall b_1,b_2\in B.$ $(<a,b_1>\in S\wedge <a,b_2>\in S)\to(b_1=b_2)$

נשים לב כי אם $A=\emptyset$ אז היחס מלא באופן ריק.

פונקציות

הגדרה וכתיב למבדא

פונקציה: פונקציה f מקבוצה A לקבוצה B היא התאמה שמתאימה לכל איבר ב-A איבר אחד ויחיד ב-B. פורמלית נאמר כי $f \subseteq A \times B$ היא **יחס מלא וחד-ערכי** מ-A ל-B.

את קבוצת הפונקציות מ-A ל-B נסמן באופן הבא: $A \to B$, B^A.

עבור פונקציה $f: A \to B$ נגדיר את המושגים הבאים:

1. ערך הפונקציה – עבור $a \in A$ נסמן את ערך הפונקציה בנקודה, שהוא הערך $b \in B$ היחיד שמקיים $f(a) = b$.
2. תחום – הקבוצה A נקראת **התחום** של הפונקציה והוא מסומן $Dom(f)$.
3. טווח – הקבוצה B נקראת **טווח** של הפונקציה אם מתקיים $\forall x \in Dom(f): f(x) \in B$. נשים לב ש**טווח אינו יחיד**, אפשר להגדיר מספר טווחים עבורם יתקיים התנאי.
4. תמונה – זהו הטווח ה"הדוק ביותר", אוסף האיברים בקבוצה B שיש להם בן זוג מהתחום. הוא מוגדר בצורה הבאה: $Im(f) = \{f(x) | x \in Dom(f)\}$. **התמונה היא יחידה**, ונאמר ש-B הוא טווח של הפונקציה אמ"מ $Im(f) \subseteq B$.
5. פונקציה חלקית – **יחס חד-ערכי בלבד (לא מלא)** מ-A ל-B. כל פונקציה חלקית מ-A ל-B היא פונקציה מ-A' ל-B' עבור $A \subseteq A'$.

עקרון האקסטנציונאליות לפונקציות:

$$f = g \Leftrightarrow Dom(f) = Dom(g) \land \forall x \in Dom(f).\, f(x) = g(x)$$

כתיב למבדא:

את התאמת הפונקציה ניתן לכתוב בצורה מפורשת בכתיב למבדא בצורה הבאה: $f = \lambda x \in A.\, t$:

- A הוא תחום הפונקציה.
- t הוא כלל ההתאמה של הפונקציה.

כללים פורמליים:

כלל α – כלל ההחלפה	$\lambda y \in A.\, t = \lambda x \in A.\, t(x/y)$
כלל η – הגדרת הפונקציה	$\lambda x \in A.\, t(x) = t$
כלל β – קריאה לפונקציה עם קלט, בתנאי ש-s חופשי להצבה ב-t במקום x	$(\lambda x \in A.\, t)(s) = t(s/x)$

טבלה ב.4: כללי היסוד לפישוטים

(α) $\{y \mid \varphi\} = \{x \mid \varphi(x/y)\}$ בתנאי ש- x משתנה חדש, שאינו מופיע ב- φ.	(α) $\lambda y.\, t = \lambda x.\, t(x/y)$ בתנאי ש- x משתנה חדש, שאינו מופיע ב- t.
(β) $s \in \{x \mid \varphi\} \Leftrightarrow \varphi(s/x)$ בתנאי ש- s חופשי להצבה במקום x ב- φ.	(β) $(\lambda x.\, t)(s) = t(s/x)$ בתנאי ש- s חופשי להצבה במקום x ב- t.
(η) $\{x \mid x \in S\} = S$ בתנאי ש- x אינו מופיע חופשי ב- S.	(η) $\lambda x.\, t(x) = t$ בתנאי ש- x אינו מופיע חופשי ב- t.
(Ext) $\forall A \forall B [A = B \Leftrightarrow \forall x.\, x \in A \Leftrightarrow x \in B]$	(Ext) $\forall f \forall g\, [f = g \Leftrightarrow \forall x.\, f(x) = g(x)]$ וביתר דיוק: $\forall f \forall g\, [f = g \Leftrightarrow \mathrm{Dom}(f) = \mathrm{Dom}(g) \land \land \forall x \in \mathrm{Dom}(f).\, f(x) = g(x)]$
$\pi_2(<x, y>) = y$	$\pi_1(<x, y>) = x$

$z = <\pi_1(z)\,,\ \pi_2(z)>$

(הנוסחה האחרונה נכונה בתנאי ש- z הוא זוג סדור).

פונקציות מיוחדות:

1. פונקציית הזהות - $I_A = \lambda x \in A. x$
2. פונקציה קבועה - $\lambda x \in A. c$
3. פונקציה אופיינית – תהא A קבוצה ו-E קבוצת גג כלשהי. הפונקציה האופיינית מחזירה 1 אם האיבר נמצא ב-A או 0 אם הוא לא נמצא ב-A (מעין true/false):

$$\chi_A^{(E)} = \lambda x \in E = \begin{cases} 0 & x \notin A \\ 1 & x \in A \end{cases}$$

4. הפונקציה שמחזירה את הפונקציה האופיינית:

$$\lambda A \in P(E). \chi_A^{(E)}$$

5. סדרות – פונקציות שהתחום שלהן הוא $\mathbb{N}$:

$$\lambda n \in \mathbb{N}. \frac{1}{n+1}$$

הגדרות נוספות: עבור פונקציה $f: A \to B$:

- צמצום תחת f – אם $A \subseteq X$ אזי הצמצום של f ל-X (צמצמנו את התחום וקיבלנו פונקציה חדשה):
$$f|X = \lambda y \in X. f(y)$$
- תמונה תחת f – אם $X \subseteq A$ אזי התמונה של X תחת f (לקחנו תמונה עבור חלק מהתחום):
$$f[X] = \{f(x) | x \in X\}$$
- קבוצת המקורות – אם $Y \subseteq B$ אזי קבוצת המקורות של Y תחת f היא (לקחנו מקורות של טווח מסוים):

$$f^{-1}[Y] = \{x \in A | f(x) \in Y\}$$

הרכבת פונקציות

הרכבה: אם $f: A \to B$ ו-$g: B \to C$ אזי ההרכבה $g \circ f$ מוגדרת כפונקציה: $g \circ f = \lambda x \in A. g(f(x))$. ההגדרה אפשרית אמ"מ מתקיים $Im(f) \subseteq Dom(g)$.

טענה: ההרכבה היא של שתי פונקציות היא פונקציה (יחס חד-ערכי ומלא). ניתן להוכיח את זה כאשר מוכיחים שתי טענות עזר, אחת להרכבה של יחסים חד-ערכיים, ואחת להרכבה של יחסים מלאים.

תכונות ההרכבה:

1. מתלכדת עם הרכבת יחסים.
2. אינה קומוטטיבית.
3. יתכן ש-$g \circ f$ מוגדרת אך $f \circ g$ אינה מוגדרת.
4. אסוציאטיביות:
$$\forall f: A \to B, g: B \to C, h: C \to D: h \circ (g \circ f) = (h \circ g) \circ f$$
5. שני מקרים בהם קומוטטיביות מתקיימת:
הראשון – אם נסמן $f^{(m)} = f \circ f \circ \ldots \circ f$ (פונקציה מורכבת על עצמה m פעמים) נקבל:
$$f^{(m+n)} = f^{(m)} \circ f^{(n)} = f^{(n)} \circ f^{(m)}$$
השני – הרכבה עם יחס הזהות:
$$f \circ I_A = I_A \circ f = f$$
6. עבור $f: A \to B$ (הוכחה בשיעור 6):
$$f \circ I_A = I_B \circ f = f$$

תכונות נוספות של פונקציות: עבור פונקציה $f: A \to B$.

חח"ע – לכל איבר בטווח יש מקור אחד בדיוק בתחום, שני איברים שונים בתחום מקבלים שני ערכים שונים בטווח:

$$\forall a_1, a_2 \in A. f(a_1) = f(a_2) \to a_1 = a_2$$

$$\forall a_1, a_2 \in A. a_1 \neq a_2 \to f(a_1) \neq f(a_2)$$

על – נאמר כי פונקציה היא על B אם כל איבר בטווח "מכוסה", לכל איבר בטווח יש מקור בתחום.

$$\forall b \in B. \exists a \in A. f(a) = b$$

נשים לב שהפונקציה על B אמ"מ $Im(f) = B$.

פונקציות זיווג

פונקציית זיווג – נקראת גם פונקציה הפיכה/שקילות. היא פונקציה שהיא **גם חח"ע וגם על**.

משפט (שיעור 6): $f: A \to B$ היא פונקציית זיווג מ-A ל-B ⟺ קיימת פונקציה $g: B \to A$ כך שמתקיים:

- f הופכית מימין – $f \circ g = I_B$ (ההרכבה מחזירה איבר מ-B לעצמו).
- f הופכית משמאל - $g \circ f = I_A$ (ההרכבה מחזירה איבר מ-A לעצמו).

בנוסף, אם קיימת פונקציה g כזו אז היא יחידה.

הערות:

1. אם $f: A \to B$ היא פונקצית זיווג, אזי גם $f^{-1}: B \to A$ היא פונקציית זיווג.
2. f^{-1} מתלכד עם הסימון ליחס ההפוך (במקרה זה הפונקציה ההופכית).
3. $(g \circ f)^{-1} = f \circ g$
4. $(f^{-1})^{-1} = f$
5. עבור $f: A \to B$ הביטוי f^{-1} מייצג פונקציה אם f היא חח"ע.
   הפונקציה f^{-1} היא באופן כללי חלקית (מוגדרת מתת-קבוצה של התחום) אבל אם נצמצם אותה **לתמונה** של f אזי $f^{-1}: Im(f) \to A$ היא פונקציית זיווג.
6. נשים לב שהביטוי $f^{-1}[x]$ מוגדר תמיד. מוגדר כפונקציה רק אם f חח"ע.
7. הדרישה להופכיות גם מימין וגם משמאל היא הכרחית. אם נמצא פונקציה g כך שהרכבה שלה על f או הפוך רק מצד אחד נותנת את פונקצית הזהות זה לא מספיק (דוגמה מהשיעור עם $(f = \lambda x \in \mathbb{R}. x^2, f: \mathbb{R} \to [0, \infty))$.

איך מוכיחים שפונקציה היא פונקציית זיווג?

1. מוכיחים שהיא חח"ע ועל.
2. מראים שקיימת לה פונקציה הופכית (כך שמתקיים שההרכבות **משני הצדדים** נותנות את יחס הזהות)

טענה (שיעור 7): לכל קבוצה E קיימת פונקציית זיווג מ-$P(E)$ ל-$E \to \{0,1\}$.

פונקציית Curry: הפונקציה מוגדרת בצורה הבאה: $Cu = \lambda f \in A \times B \to C.\quad \lambda x \in A. \lambda y \in B. f(<x, y>)$

כלומר, היא לוקחת פונקציה של שני משתנים, ומעבירה אותה לפונקציה של משתנה אחד.

מהספר:

טבלה ב.6: פונקציות – מושגים חשובים

(1)		פונקציית ***הזהות*** מעל קבוצה A היא $i_A = \lambda x \in A.\, x$.
(2)		אם $A \subseteq E$, אז הפונקציה ***האופיינית*** של A יחסית ל- E היא: $\chi_A^{(E)} = \lambda x \in E.\ \text{if } x \in A \text{ then } 1 \text{ else } 0$
(3)		אם $f: A \to B$ ו- $X \subseteq A$, אז ***הצמצום*** של f ל- X הוא: $f / X = \lambda x \in X.\, f(x)$ $\quad (f / X : X \to B)$
(4)		אם $f: A \to B$ ו- $g: B \to C$, אז ***ההרכבה*** $g \circ f$ היא: $g \circ f = \lambda x \in A.\, g(f(x))$ $\quad (g \circ f: A \to C)$
(5)	(i)	אם $f: A \to B$ ו- $X \subseteq A$, אז ***התמונה*** של X לפי f היא: $f[X] = \{f(x) \mid x \in A\}$ $\quad (f[X] \subseteq B)$
	(ii)	אם $f: A \to B$ ו- $X \subseteq B$, אז ***המקור*** של X לפי f הוא: $f^{-1}[X] = \{x \in A \mid f(x) \in X\}$ $\quad (f^{-1}[X] \subseteq A)$
(6)	(i)	פונקציה f מעל A נקראת ***חד-חד-ערכית*** (חח"ע) אם: $\forall x \in A\ \forall y \in A.\, f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
	(ii)	פונקציה $f: A \to B$ נקראת ***על*** B אם $B = f[A]$, כלומר: $\forall y \in B\ \exists x \in A.\, y = f(x)$
	(iii)	$f: A \to B$ נקראת ***פונקציית שקילות*** (בין A ל- B) אם היא חח"ע ועל B.
(7)		אם $f: A \to B$ היא פונקציית שקילות, אז ***הפונקציה ההפוכה ל- f*** היא: $f^{-1} = \lambda x \in B.\, \iota y \in A.\, f(y) = x$ $\quad (f^{-1}: B \to A)$

תכונות של יחסים

תכונות של יחסים

כל התכונות הן עבור היחס S מעל הקבוצה A:

תכונה	הגדרה	הערות
רפלקסיבי	$\forall a \in A. aSa$	זה לא "אם אז", לכל איבר בקבוצה הזוג הסדור שלו עם עצמו צריך להיות בקבוצה. אז רק אם יש לנו את כל הלולאות העצמיות של איברים בקבוצה, היחס רפלקסיבי.
א-רפלקסיבי / אנטי-רפלקסיבי	$\forall a \in A. \neg aSa$	זה יותר חזק מלהגיד על יחס שהוא לא רפלקסיבי, אף אחד בקבוצה לא מתייחס לעצמו.
סימטרי	$\forall a, b \in A. aSb \Leftrightarrow bSa$	יחס ריק הוא סימטרי באופן ריק (ה"אם" לא מתקיים).
אנטי-סימטרי	$\forall a, b \in A. aSb \wedge bSa \Rightarrow a = b$	
אנטי-סימטרי חזק	$\forall a, b \in A. aSb \Rightarrow \neg bSa$	
טרנזיטיבי	$\forall a, b, c \in A. (aSb) \wedge (bSc) \Rightarrow aSc$	יחס ריק הוא טרנזיטיבי באופן ריק (ה"אם" לא מתקיים). יחס שבו לא קיימת שלשה, אלא רק aSb הוא גם טרנזיטיבי באופן ריק.

טענות:

1. S טרנזיטיבי $\Leftrightarrow S \circ S \subseteq S$.
2. S סימטרי $\Leftrightarrow S^{-1} = S$.
3. S רפלקסיבי ב-A $\Leftrightarrow I_A \subseteq S$.

יחסי שקילות וחלוקות

יחס שקילות: יחס **טרנזיטיבי, רפלקסיבי וסימטרי** (טרסי).

סימון – נשתמש לפעמים בסימון ~ על מנת לציין יחס שקילות.

חלוקה: חלוקה של A היא קבוצה $P \subseteq P(A)$ המקיימת:

1. איברי P הן קבוצות לא ריקות.
2. לכל איבר ב-A קיימת קבוצה בחלוקה כך שהוא נמצא בה - $\forall a \in A, \exists M \in P. a \in M$
3. כל איבר שייך בדיוק לקבוצה אחת - $\forall a \in A. \forall M_1, M_2 \in P. (a \in M_1) \wedge (a \in M_2) \rightarrow M_1 = M_2$

באופן לא פורמלי, חלוקה של קבוצה A היא קבוצת תתי-קבוצות של A, כך שכל איבר של A נמצא בדיוק באחת מהן.

מחלקת שקילות: יהי ~ יחס שקילות ב-A, נגדיר את מחלקת השקילות של $a \in A$:

$$[a]_{\sim} = \{b \in A | a \sim b\}$$

קבוצת המנה: קבוצת מחלקות השקילות תחת יחס ~ (יחס שקילות) נקראת קבוצת המנה:

$$A/\sim \ = \{[a]_{\sim} | a \in A\}$$

משפט (שיעור 8): בנגד כל יחס שקילות ~ בקבוצה A, קבוצת המנה שלה $A\backslash\sim$ היא **חלוקה**.

המשפט ההפוך (שיעור 8) – חלוקה משרה יחס שקילות: תהא P **חלוקה** של A. היחס הבא הוא **יחס שקילות**:
$S = \{< a, b >\in A^2 | \exists M \in P. a \in M \wedge b \in M\}$. מתקיים גם כי P היא **קבוצת המנה** תחת היחס הזה.

מערכת נציגים:

תהא A קבוצה לא ריקה כלשהי, ו-S יחס שקילות מעל A. תת הקבוצה $T \subseteq A$ נקראת מערכת נציגים של S אם מתקיים:

$$\forall t \in A/S. |t \cap T| = 1$$

כלומר, מערכת נציגים היא תת-קבוצה של הקבוצה A מעליה מוגדר יחס שקילות, והיא מכילה בדיוק נציג אחד מכל מחלקת שקילות שיש בקבוצת המנה. לכן, החיתוך שלה עם קבוצת המנה, הוא תמיד מגודל 1.

יחסי סדר

יחס שניתן להגיד אליו שהוא מייצר סדר בין האיברים. נסתכל על יחס $S \subseteq A^2$.

נבחין בין שני סוגים של יחסי סדר:

קריטריון	**יחס סדר חלש**	**יחס סדר חזק**
תכונות	טרנזיטיבי, רפלקסיבי, אנטי-סימטרי "טראסי"	טרנזיטיבי, אנטי-סימטרי חזק "טאסח" טרנזיטיבי, אי רפלקסיבי "טאר"
דוגמאות	$\leq$ ב-$\mathbb{R}$ (**מלא**) $\subseteq$ ב-$P(\mathbb{N})$ (**לא מלא**) יחס החלוקה בקבוצה $\{2, \dots, 10\}$	$<$ ב-$\mathbb{Z}$ (**מלא**) $\subset$ ב-$P(\mathbb{Z})$ (**לא מלא**)

הערות:

- כאשר נגיד "יחס סדר" נתכוון **ליחס סדר חלש**. אם נתכוון ליחס סדר חזק נגיד "יחס סדר חזק".
- דיאגרמת הסה – לא מסמנים רפלקסיביות, לא עושים חיצים אלא קווים.

טענה (שיעור 11): יחס S בקבוצה A הוא יחס סדר חזק $\Leftrightarrow$ S טרנזיטיבי ואי-רפלקסיבי.

יחסי סדר מלאים:

יחס סדר מלא הוא יחס סדר שבו **כל שני איברים ניתנים להשוואה**.

1. יחס סדר חלש נקרא מלא אם מתקיים $\forall a, b \in A. aSb \vee bSa$.
2. יחס סדר חזק נקרא מלא אם מתקיים $\forall a, b \in A. aSb \vee bSa \vee a = b$ (למשל עבור $<$ צריך גם שוויון).

3 - עוצמות

מבוא

הקדמה לעוצמות

נתבונן ביחס ~ המוגדר כך: $A \sim B \Leftrightarrow$ קיימת פונקציית זיווג מ-A ל-B.

טענה: היחס ~ הוא יחס שקילות:

הוכחה:

1. רפלקסיביות – לכל פונקציה קיימת פונקציית זיווג מ-A ל-A: I_A.
2. סימטריה – אם קיימת פונקציית זיווג מ-A ל-B, אז קיימת פונקציית זיווג מ-B ל-A: הפונקציה ההופכית.
3. טרנזיטיביות – צריך להוכיח (סעיף 4 בהמשך).

משפטים על הרכבת פונקציות (צריך להוכיח):

1. הרכבת פונקציות היא פונקציה.
2. הרכבת פונקציות חח"ע היא חח"ע.
3. הרכבת פונקציות על (הטווח שלהן) היא פונקציה על הטווח שלה.
4. הרכבת פונקציית זיווג היא פונקצית זיווג.

עוצמה

עוצמה: שתי קבוצות A, B הן שוות עוצמה (שקולות) אם קיימת פונקצית זיווג $f: A \to B$. נסמן $A \sim B$.

הערה – נוח להגדיר את היחס* "שוות עוצמה" לפני שהגדרנו מה זה בכלל עוצמה. זהו יחס כוכב יוון שלא קיימת קבוצת כל הקבוצות, לכן לא ניתן להגדיר אותו מעל קבוצה מסוימת. היחס הזה הוא **יחס שקילות**:

- לכל קבוצה A מתקיים $|A| = |A|$.
- $|A| = |B| \Leftrightarrow |B| = |A|$.
- אם $|A| = |B|$ וגם $|B| = |C|$ אז $|A| = |C|$.

כל מיני עוצמות בשביל הכיף:

- המלון של הילברט - שיחקנו עם הסיפור הנפלא הזה והראנו: $\mathbb{N} \cup \{-1\} = \mathbb{N}$
- ויירשטראס - איך התגעגענו לבחור הזה. הראנו באמצעות פונקציה ממש מוזרה שלו, כי: $\mathbb{N} \sim (\mathbb{N} \times \mathbb{N})$
- הראנו גם כי: $\mathbb{N} \sim \mathbb{Q}^+$

דוגמאות נוספות:

עוצמות	פונקציית זיווג
$(0,1) \sim (0,2)$	$f = \lambda x \in (0,1).\, 2x$
$(0,1) \sim (a,b), \quad a < b$	$f = \lambda x \in (0,1).\, a + x(b-a)$
$(0,1] \sim (0,1)$	$f = \lambda x \in (0,1].\begin{cases} \frac{1}{k+1} & x = \frac{1}{k}, k \in \mathbb{N}^+ \\ x & \text{אחרת} \end{cases}$
$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \sim \mathbb{R}$	$f = \lambda x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right).\, tanx$
$(0,1) \sim \mathbb{R}$	$f = \lambda x \in (0,1).\frac{1-2x}{x(1-x)}$
$\|P(E)\| = \|E \to \{0,1\}\|$	$f = \lambda A \in P(E).\, \chi_A^{(E)}$

הגדרה* (שיעור 10) – עוצמה היא מחלקת שקילות של $\mathbb{N}$.

סימון – נסמן את העוצמה של A ב-$|A|$. כלומר $|A| = |B| \Leftrightarrow A \sim B$.

קבוצות סופיות ואינסופיות:

קבוצה סופית: קבוצה A נקראת סופית, אם קיים $n \in \mathbb{N}$ כך ש: $A \sim \{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq n\}$. בפרט, $\emptyset$ סופית כי אפשר לבחור $n = 0$.

טענות (הוכחה בספר):

1. אם $A \sim \{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq n\}$ וגם $A \sim \{k \in \mathbb{N} | 1 \leq k \leq m\}$ אז $m = n$.
2. אם A סופית ו-$B \subset A$ אז $A \nsim B$.

מסקנה - $\mathbb{N}$ **אינסופית**: כי $\mathbb{N}_{even} \sim \mathbb{N}$ ומתקיים $\mathbb{N}_{even} \subset \mathbb{N}$. מהטענה הקודמת לא יתכן שקבוצת הטבעיים סופית.

עוצמות אינסופיות:

- $|\mathbb{Q}| = |\mathbb{Z}| = |\mathbb{N}| = |\mathbb{N}_{odd}| = |\mathbb{N}_{even}| = |\mathbb{N} \times \mathbb{N}| = \aleph_0$
- עוצמת הרצף - $\aleph = |\mathbb{R}| = |(0,1)|$

קבוצה בת מניה: קבוצה A היא בת מניה אם היא קבוצה שניתן למנות אותה, כלומר שהעוצמה שלה היא $\aleph_0$ (יש זיווג מהטבעיים אליה, אפשר למנות את האיברים של הקבוצה A בתור סדרה ולכסות את כולה).

מהספר:

טבלה ג.1: דוגמאות לקבוצות שוות-עוצמה

	קבוצות	פונקציית שקילות
(1)	$\mathbf{N} \sim \mathbf{N}^+$	$\lambda n \in \mathbf{N}.\, n+1$
(2)	$\mathbf{N}_{\text{even}} \sim \mathbf{N}_{\text{odd}}$	$\lambda n \in \mathbf{N}_{\text{even}}.\, n+1$
(3)	$\mathbf{N} \sim \mathbf{N}_{\text{even}}$	$\lambda n \in \mathbf{N}.\, 2n$
(4)	$\mathbf{N} \times \mathbf{N} \sim \mathbf{N}$	$\lambda m \in \mathbf{N},\ k \in \mathbf{N}.\, \frac{(m+k)(m+k+1)}{2} + m$
(5)	$(a<b)\quad [a,b] \sim [0,1]$	$\lambda x \in [a,b].\, \frac{x-a}{b-a}$
(6)	$(a<b)\quad (a,b) \sim (0,1)$	$\lambda x \in (a,b).\, \frac{x-a}{b-a}$
(7)	$\mathbf{R} \sim (-1,1)$	$\lambda x \in \mathbf{R}.\, \frac{x}{1+\lvert x \rvert}$
(8)	$\mathbf{R}^+ = (0,\infty) \sim (0,1)$	$\lambda x \in (0,\infty).\, \frac{x}{1+x}$
(9)	$A \times B \sim B \times A$	$\lambda a \in A, b \in B.\, \langle b, a \rangle$
(10)	$A \times B \to C \sim A \to (B \to C)$	$Cu = \lambda f \in A \times B \to C.\, \lambda x \in A.\, \lambda y \in B.\, f(x,y)$
(11)	$P(E) \sim E \to \{0,1\}$	$\lambda A \in P(E).\, \chi_A^{(E)}$

שיטת הלכסון

משפט (שיעור 13): $\mathbb{N}^+ \nsim (0,1)$, כלומר אין פונקציית זיווג ביניהן.

הראנו זאת באמצעות שיטת הלכסון.

משפט קנטור (שיעור 13) לכל קבוצה A מתקיים $A \nsim P(A)$.

משפט (שיעור 13): התנאים הבאים שקולים:

1. קיימת $B \subseteq A$ כך ש-B בת מניה, כלומר $|B| = \aleph_0$.
2. קיימת $B \subset A$ כך ש-$|A| = |B|$.
3. A אינסופית.

הוכחנו את המשפט באמצעות טענת העזר הבאה – אם $A \sim A'$ ו-$B \sim B'$ ומתקיים $A \cap B = \emptyset, A' \cap B' = \emptyset$ אז מתקיים $A \cup B \sim A' \cup B'$.

שיטות ללכסון (תרגול 7):

- לכסון קלאסי.

תרגיל 1

1. הוכיחו ע"י לכסון כי $|\mathbb{N} \to \{0,1\}| \neq \aleph_0$.

פתרון

1. נניח בשלילה כי $|\mathbb{N}| = |\mathbb{N} \to \{0,1\}|$. לכן, קיימת פונקציה $F \in \mathbb{N} \to (\mathbb{N} \to \{0,1\})$ שהיא על $\mathbb{N} \to \{0,1\}$ (למעשה קיים זיווג, ובפרט קיימת פונ' שהיא על).

$$\begin{aligned} F(0) &= (F(0))(0), (F(0))(1), (F(0))(2), \dots \\ F(1) &= (F(1))(0), (F(1))(1), (F(1))(2), \dots \\ F(2) &= (F(2))(0), (F(2))(1), (F(2))(2), \dots \\ &\vdots \end{aligned}$$

נגדיר:

$$g = \lambda n \in \mathbb{N}.1 - (F(n))(n)$$

כלומר, עבור כל $n \in \mathbb{N}$, אם $(F(n))(n) = 0$ אז $g(n) = 1$, ואם $(F(n))(n) = 1$ אז $g(n) = 0$. מההנחה של F על, קיים $k \in \mathbb{N}$ כך ש- $F(k) = g$. אזי:

$$(F(k))(k) = g(k) = 1 - (F(k))(k) \neq (F(k))(k)$$

סתירה. לכן, $|\mathbb{N} \to \{0,1\}| \neq \aleph_0$.

- הפרד ומשול.

תרגיל 3

הוכיחו ע`י לכסון כי $A=\{f\in\mathbb{N}\to\{0,1\}\mid\forall i\in\mathbb{N}.f\left(i\right)\cdot f(i+1)=0\}$ אינה בת מניה.

פתרון

נראה בעזרת לכסון כי כל פונקציה $h\in\mathbb{N}\to A$ היא בהכרח לא על, ולכן A לא שקולה ל־$\mathbb{N}$. תהי $h\in\mathbb{N}\to A$ כלשהיא, נגדיר

$$g=\lambda n\in\mathbb{N}.\begin{cases}1-h\left(n/2\right)\left(n\right) & n\in\mathbb{N}_{\text{even}}\\ 0 & n\in\mathbb{N}_{\text{odd}}\end{cases}.$$

קודם כל נשים לב כי אכן $g\in A$ (כלומר איבר בטווח של h). מכך ש־$h\left(n/2\right)\left(n\right)\in\{0,1\}$ (עבור $n\in\mathbb{N}_{\text{even}}$) אז גם $g\left(n\right)\in\{0,1\}$ לכל $n\in\mathbb{N}$, כלומר $g\in\mathbb{N}\to\{0,1\}$. בנוסף, לכל $i\in\mathbb{N}$ מתקיים $g\left(i\right)=0$ (אם $i\in\mathbb{N}_{\text{even}}$) או $g\left(i+1\right)=0$ (אם $i\in\mathbb{N}_{\text{odd}}$), לכן

$$g\left(i\right)\cdot g\left(i+1\right)=0$$

ובסה`כ מתקיים התנאי של A, כלומר $g\in A$. נראה כעת כי $g\notin\mathrm{Im}h$, מכך ינבע כי h איננה על. נניח בשלילה כי קיים $k\in\mathbb{N}$ עבורו $g=h\left(k\right)$, נציב $n=2k$ בשני האגפים ונקבל $h\left(k\right)\left(2k\right)=g\left(2k\right)$, אבל $g\left(2k\right)=1-h\left(k\right)\left(2k\right)$ לפי הגדרת g. כלומר בסה`כ $h\left(k\right)\left(2k\right)=1-h\left(k\right)\left(2k\right)$, דבר לא אפשרי שכן $h\left(k\right)\left(2k\right)\in\{0,1\}$, סתירה.

- מונוטוניות.

תרגיל 2 (מבחן)

הראו ע`י לכסון שקבוצת הפונקציות החח`ע מ N ל N אינה בת מניה

פתרון

נסמן ב A את קבוצת הפונקציות החח`ע ב $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. נוכיח שכל פונקציה $F\in\mathbb{N}\to A$, אינה פונקציה על. מזה יוצא כמובן שלא קיימת פונקציית הפיכה מ $\mathbb{N}$ ל A , כלומר ש A אינה בת מניה. נניח בשלילה שקיימת $F\in\mathbb{N}\to A$ על. נגדיר פונקציה $g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ כך: $g=\lambda n\in\mathbb{N}.(\sum_{i=0}^{n}F(i)(i))+n+1$. מתקיים: $g\in A$: בבירור $g\in\mathbb{N}\to\mathbb{N}$. g חח`ע כי: נניח $n_1>n_2$ טבעיים. אז $g(n_2)=\sum_{i=0}^{n_2}F(i)(i)+n_2+1\leq\sum_{i=0}^{n_1}F(i)(i))+n_2+1<\sum_{i=0}^{n_1}F(i)(i)+n_1+1=g(n_1)$, כלומר $g(n_2)\neq g(n_1)$.

מכיוון ש F על נובע שקיים $n'\in\mathbb{N}$ עבורו $F(n')=g$. אבל אז: $F(n')(n')=g(n')=\sum_{i=0}^{n'}F(i)(i)+n'+1>F(n')(n')+1$ סתירה. מש`ל.

הערה: נא לוודא שאתם מבינים מדוע צריך בהגדרת g גם את $+n$ וגם את $+1$.

אריתמטיקה של עוצמות

סדר על עוצמות

סדר על עוצמות: תהיינה a,b עוצמות, וקבוצות A,B כך ש-$|A|=a,|B|=b$. נאמר שמתקיים $\boldsymbol{b \le a}$ אם **קיימת פונקציה חח"ע מקבוצה A ל-B.**

הערה – בהגדרה הנ"ל יש שימוש בנציגים (סתם בחרנו A ו-B), ובמקרים כאלו עלינו להראות שאין תלות בנציגים, כך היחס שהגדרנו יהיה מוגדר היטב.

משפט: תהיינה a,b עוצמות, וקבוצות A,B כך ש-$|A|=a,|B|=b$. מתקיים:

1. $a \le b \Leftrightarrow$ A שוות עוצמה עם תת-קבוצה של B.
2. $a \le b \Leftrightarrow A=\emptyset$ או שיש פונקציה מ-B ל-A שהיא על A.

טענה – היחס $\le$ על עוצמות הוא יחס סדר חלש (כלומר, רפלקסיבי, טרנזיטיבי ואנטי-סימטרי). בהוכחה השתמשנו במשפט קש"ב.

משפט קש"ב (קנטור-שרדר-ברנשטיין): אם $a \le b$ וגם $b \le a$ אז $a=b$.

הראנו באמצעותו כי $|(\boldsymbol{0},\boldsymbol{1})| = |\boldsymbol{P}(\mathbb{N})|$.

עקרון הסנדוויץ' – אם $A \subseteq B \subseteq C$ ומתקיים $|A|=|C|$ אז $|A|=|B|$.

השערת הרצף – אין עוצמות בין $\aleph_0$ ו-א.

פעולות על עוצמות

תהיינה קבוצות A,B כך ש-$|A|=a,|B|=b$ והקבוצות זרות. נגדיר את הפעולות הבאות:

חיבור: $\boldsymbol{a+b=|A\cup B|}$

דוגמאות:

1. $2+2=4$
2. $\aleph_0+1=\aleph_0$
3. $\boldsymbol{\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0}$
4. $\boldsymbol{\aleph_0+\aleph=\aleph_0}$
5. $\boldsymbol{\aleph+\aleph=\aleph}$

כפל: $\boldsymbol{a\cdot b=|A\times B|}$

דוגמאות:

1. $2\cdot 2=4$
2. $0\cdot\aleph=0$
3. $\boldsymbol{\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0}$
4. $\aleph_0\cdot\aleph=\aleph$
5. $\boldsymbol{\aleph\cdot\aleph=\aleph}$

חזקה: $\boldsymbol{a^b=\left|A^B\right|=|B\to A|}$

לכל קבוצה A מתקיים $|P(A)|=|A\to\{0,1\}|=2^{|A|}$ ובפרט $\aleph=|P(\mathbb{N})|=2^{\aleph_0}$.

מהספר:

טבלה ג.2: תכונות בסיסיות של קבוצות סופיות

(1)	(i) לכל $n \in \mathbf{N}$, $\mathbf{N}_n = \{0, 1, \dots, n-1\}$ הינה סופית (בפרט $\varnothing$ הינה סופית). (ii) אם $A \sim \mathbf{N}_n$ ו- $A \sim \mathbf{N}_k$ $(n, k \in \mathbf{N})$, אז $n = k$.
(2)	אם A סופית ו- $B \sim A$, אז B סופית.
(3)	(i) אם A סופית ו- $B \subseteq A$, אז B סופית ו- $\|B\| \le \|A\|$. (ii) אם A סופית ו- $B \subset A$, אז B סופית ו- $\|B\| < \|A\|$.
(4)	(i) קבוצה סופית אינה אקויפוטנטית עם שום קבוצה חלקית-ממש שלה. (ii) אם $\|A\| = \|B\|$, A סופית, ו- $f: A \to B$ ח.ח.ע. או על B, אז f פונקציית שקילות מ- A על B.
(5)	אם A סופית ו- f פונקציה ח.ח.ע. מ- B ל- A, אז B סופית ו- $\|B\| \le \|A\|$.
(6)	אם A סופית ו- f פונקציה מ- A על B, אז B סופית ו- $\|B\| \le \|A\|$.
(7)	אם A סופית ו- R יחס שקילות על A, אז A/R סופית ו- $\|A/R\| \le \|A\|$.
(8)	אם A ו- B סופיות, אז גם $A \cup B$, $A \times B$ ו- $A \to B$ הן סופיות, ומתקיימים: (i) $A \cap B = \varnothing \Rightarrow \|A \cup B\| = \|A\| + \|B\|$ (ii) $\|A \times B\| = \|A\| \cdot \|B\|$ (iii) $\|A \to B\| = \|B\|^{\|A\|}$ (ובסימון אחר: $\|B^A\| = \|B\|^{\|A\|}$)

כללי החשבון

כללים אלו נכונים גם לעוצמות אינסופיות:

1. $ab = ba$
2. $(ab)c = a(bc), (a+b)+c = a+(b+c)$
3. $a(b+c) = ab + ac$
4. נייטרליות:
   a. $a \cdot 0 = 0$
   b. $a + 0 = a$
   c. $a \cdot 1 = a$
   d. $a^1 = a$
   e. $a^0 = 1$
   f. $0^a = \begin{cases} 1 & a = 0 \\ 0 & else \end{cases}$
5. $(ab)^c = a^c b^c$
6. $a^{b+c} = a^b a^c$
7. $\left(a^b\right)^c = a^{bc}$
8. מונוטוניות: אם $a \leq b \wedge c \leq d$
   a. $a + c \leq b + d$
   b. $ac \leq bd$
   c. $a^c \leq b^d$ (פרט למקרה שבו $a = c = 0$ ו-$d \neq 0$)
9. $a < 2^a$

דוגמאות:

1. $3a = a + a + a$
2. $\aleph_0 \cdot 5 = \aleph_0$
3. $\aleph_0^n = \aleph$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$
4. אם $a \leq \aleph$ אז $\aleph + a = \aleph$
5. $2^\aleph + 2^\aleph = 2^{\aleph+\aleph} = 2^\aleph$
6. $a^{\aleph_0} = \aleph$

קבוצות בנות מניה (ב"מ)

<u>משפט:</u> אם A אינסופית ו-B סופית או ב"מ אז $|A \cup B| = |A|$.

<u>משפט:</u> איחוד סופי/ב"מ של קבוצות סופיות/ב"מ הוא סופי/ב"מ.

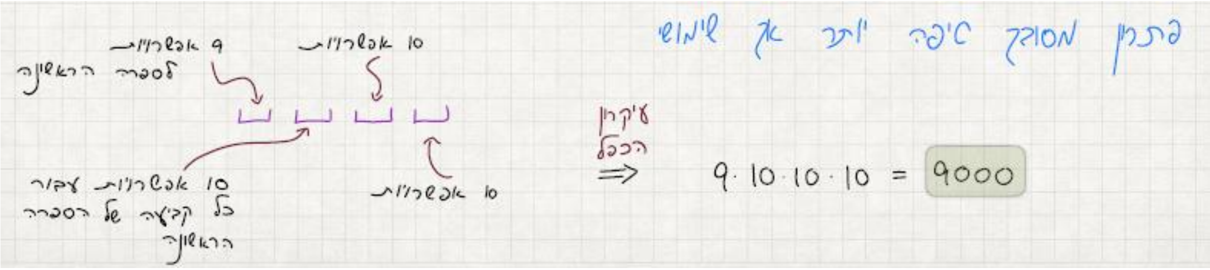
4 - קומבינטוריקה

קומבינטוריקה סופית בסיסית

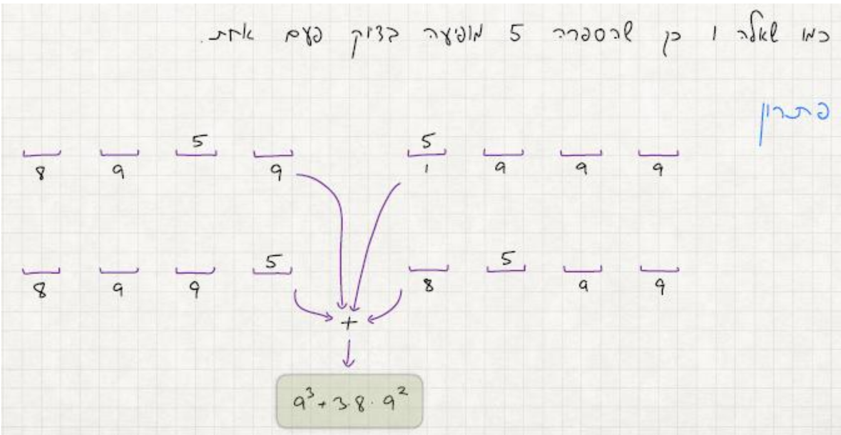
עקרונות הכפל והחיבור

עקרון הכפל: אם ניתן לבנות את איברי הקבוצה A ב-n שלבים כך שבכל שלב $1 \le i \le n$ יש k_i אפשרויות **ללא תלות בבחירות הקודמות** אז מתקיים: $|A| = |k_1 \cdot \ldots \cdot k_n| = \prod_{i=1}^{n} k_i$

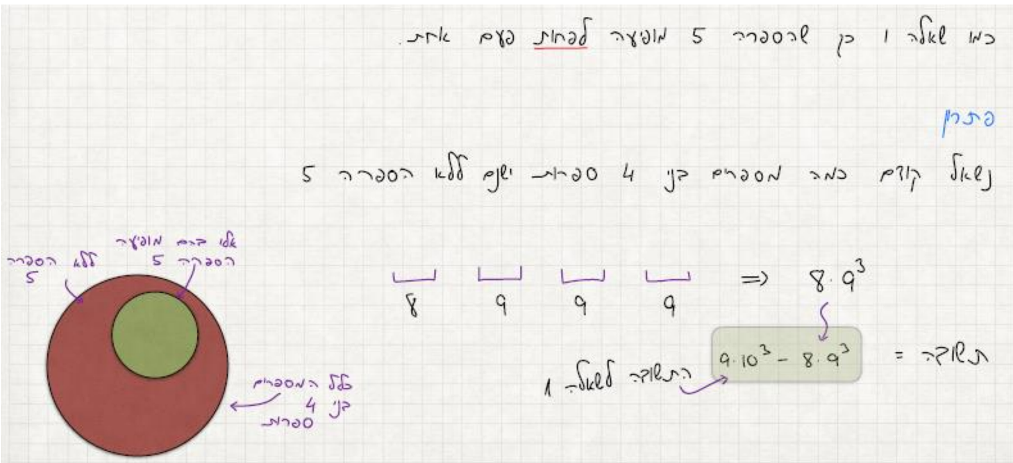
כלומר אנחנו מחלקים לשלבים, בודקים כמה אפשרויות יש לנו בכל שלב, וכופלים את האפשרויות זו בזו.



עקרון החיבור: אם ניתן לבנות את איברי הקבוצה A באופן שכל איבר שייך לאחת מבין n קבוצות אפשריות $A_1, \ldots, A_n$ שהן זרות בזוגות, אז מתקיים: $|A| = |A_1 \cup \ldots \cup A_n| = \sum_{i=1}^{n} |A_i|$



עקרון המשלים: אם $A \subseteq B$ ושתיהן סופיות אז $|A| = |B| - |B \setminus A|$.



תמורות:

תמורה (permutation): תהא A קבוצה בגודל n. סדרה באורך n **ללא חזרות** של איברי A נקראת תמורה של A. מספר התמורות של קבוצה בגודל n מסומן ב-$n!$.

- מספר התמורות של n עצמים – זהו מספר האפשרויות **לסדר n עצמים שונים בשורה**: $\boldsymbol{n!}$

  מהו מספר **התמורות** של n עצמים, כלומר מהו מספר האופנים בו ניתן לסדר אותם **בשורה**? במקום הראשון בשורה ניתן למקם כל אחד מ-n העצמים, במקום השני כל אחד מ-$n-1$ העצמים הנותרים וכך הלאה עד שלמקום האחרון ישאר רק מועמד אחד.

  מספר הדרכים הוא אם כן

$$n(n-1)\cdots 1$$

  מסמנים מספר זה ב-$n!$ והוא נקרא **n עצרת**.

- מספר האפשרויות **לסדר n עצמים שונים במעגל**: $\boldsymbol{(n-1)!}$
  - בוחרים מיקום לאיבר כלשהו, ומסדרים את יתר $n-1$ העצמים ביחס אליו.

תרגיל 1

במשפחה אב, אם ו־ k ילדים.

1. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול?
2. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול כאשר לאב יש מקום ישיבה קבוע?
3. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול כאשר האב והאם יושבים תמיד אחד ליד השני?
4. מהו מספר הדרכים לסדר אותם סביב שולחן עגול כאשר אסור לשני הצעירים לשבת ביחד?

פתרון

1. נדגים שני פתרונות.

   (א) נושיב את האמא, ונסדר את יתר האנשים ביחס אליה. סה"כ $(k+1)!$ אפשרויות.

   (ב) נסדר את כולם בשורה, $(k+2)!$ אפשרויות ולאחר מכן נבטל את $k+2$ הסיבובים האפשריים, $\frac{(k+2)!}{k+2}$.

2. נושיב את האב במקום הקבוע (אפשרות אחת) ואז את יתר האנשים, סה"כ $(k+1)!$ אפשרויות.
3. נתייחס לאב ולאם כישות אחת, כלומר לסדר $k+1$ אנשים במעגל: $k!$. לאחר מכן, "נכניס סדר" בין אבא לאמא ובסה"כ $2k!$.
4. נחשב את המאורע המשלים ונחסר מסך כל האפשרויות. מהסעיף הקודם, נקבל כי בסה"כ מספר האפשרויות הוא $(k+1)!-2k!$.

חליפות וצירופים

נשאל את השאלה הכללית – בכמה דרכים ניתן לבחור k איברים מתוך קבוצה מגודל n ($[n] = \{1,2,\dots,n\}$).

k כדורים ל-n תאים k עצמים מתוך n	k כדורים **זהים**/ **בלי חשיבות לסדר**	k כדורים **שונים**/ **עם חשיבות לסדר (בחירה שונה תיתן תוצאה שונה)**
בכל תא לכל היותר כדור אחד/ **בלי חזרות**	(1) $C(n,k) = \binom{n}{k} = \binom{n}{n-k} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!}$	(2) $P(n,k) = \frac{n!}{(n-k)!}$
אין הגבלה על מספר הכדורים בתא/ **עם חזרות (מותר לבחור אותו דבר שוב, לענות את אותה התשובה)**	(3) $S(n,k) = \binom{k+n-1}{k} = \binom{k+n-1}{n-1}$	(4) n^k $\underline{n} \cdot \underline{n} \cdot \underline{n} \dots$

<u>(1) בלי חזרות ובלי חשיבות לסדר:</u>

- כמה מחזוריות בינאריות באורך n ישנן עם בדיוק k אחדים? (זה כמו לבחור k אינדקסים מתוך n שיש בהם 1)
- מה מספר תתי הקבוצות של [n] מגודל k? (כמה אפשרויות יש לבחור k איברים לתת קבוצה מתוך n).

כמה אפשרויות יש להושיב n אנשים על ספסל, אם:

1. משה רואה את דן מימינו (לאו דווקא צמוד).
2. משה רואה את דן מימינו ומיכל רואה את רונה משמאלה.
3. ליאת רואה את אדם ורונן משמאלה.

פתרון

1. נבחר שני מקומות לדן ומשה, $\binom{n}{2}$ אפשרויות (אין צורך להכניס `סדר` ביניהם כי ברגע שנקבעו המקומות הסדר כבר נקבע). לאחר מכן, נסדר את יתר האנשים. סה`כ: $\binom{n}{2}(n-2)!$.
2. בדומה, נבחר שני מקומות לדן ומשה, שני מקומות מבין הנותרים למיכל ורונה ולאחר מכן נסדר את כל השאר. סה`כ: $\binom{n}{2}\binom{n-2}{2}(n-4)!$.
3. נבחר שלושה מקומות וכעת יש שתי אפשרויות סידור חוקיות לאדם ורונן. לבסוף, נסדר את הנותרים. סה`כ: $\binom{n}{3}2!\,(n-3)!$.

<u>(2) בלי חזרות ועם חשיבות לסדר:</u>

- ?

<u>(3) עם חזרות ובלי חשיבות לסדר:</u>

- כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + \dots + x_n = k$ בטבעיים?
- כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + \dots + x_n = k$ בטבעיים כאשר $x_i \geq a_i$? ($1 \leq i \leq n$)
  - $S(n, k - \sum_{i=1}^{n} a_i)$ כי אנחנו קודם מחלקים את הכדורים שצריך לתאים, ומשם זה פשוט S על מה שנשאר.
- כמה פתרונות יש למשוואה $x_1 + \dots + x_n = k$ בטבעיים כאשר $x_1 \leq a$?
  - נפתור ע"י מעבר למקרה המשלים והוא $x_1 \geq a+1$. זה אנחנו יודעים שיוצא $S(n, k-(a+1))$. נחסיר את זה מסך כל האפשרויות - $S(n,k)$.
-

כמה פתרונות יש למשוואות הבאות?

1. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$ כך ש- $x_i \in \mathbb{N}$ לכל $1 \leq i \leq 100$.
2. $\sum_{i=1}^{100} x_i = 200$ כך ש- $x_i \in \mathbb{N}^+$ לכל $1 \leq i \leq 100$.
3. $\sum_{i=1}^{100} x_i \leq 200$ כך ש- $x_i \in \mathbb{N}$ לכל $1 \leq i \leq 100$.

פתרון

1. חלוקת 200 כדורים זהים ל- 100 תאים שונים. לכן: $\binom{200+100-1}{200}$.
2. נחלק תחילה כדור אחד לכל תא, ואת השאר בדומה לסעיף 3. לכן: $\binom{100+100-1}{100}$.
3. נוסיף עוד תא `זבל` שיקבל את מה שנשאר מהכדורים שחולקו. לכן: $\binom{200+101-1}{200}$.

<u>(4) עם חזרות ועם חשיבות לסדר:</u>

- כמה מחרוזות בינאריות ($n = 2$) יש באורך k? $n^k = 2^k$.
- מהו מספר המחרוזות מעל א"ב באורך n שהן באורך k?

הוכחות קומבינטוריות

<u>ספירה כפולה:</u> לעיתים נרצה להראות ששני ביטויים שווים. ספירה כפולה היא דרך לעשות זאת, על ידי כך שמראים ששני הביטויים שווים לגודל שלישי. באופן ספציפי, בקומבינטוריקה מראים ששני הביטויים הם גודל קבוצה נתונה כפי שנספר בשתי דרכים שונות.

הוכיחו כי $2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$

פתרון

נשאל - מהו מספר המחרוזות הבינאריות באורך n?

מכלל הכפל: לכל כניסה במחרוזת יש 2 אפשרויות

$$2^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

מספר המחרוזות הבינאריות עם בדיוק k אחדים

חלוקה לפי מספר האחדים במחרוזת, k, ושימוש בעקרון החיבור

א. $\binom{m+n}{3} = \binom{n}{3} + \binom{m}{3} + m \cdot \binom{n}{2} + n \cdot \binom{m}{2}$.

הבעיה הקומבינטורית היא בחירה של 3 אנשים מתוך קבוצה של n גברים ו-m נשים.

צד שמאל – באופן מפורש מדובר בבחירה של 3 מתוך קבוצה של m+n בני אדם: $C(m+n,3) = \binom{m+n}{3}$

צד ימין – יש כאן הפרדה למקרים לפי כמות הגברים שנבחרו:

- אם נבחרו 3 גברים: $\binom{n}{3}$
- אם לא נבחר אף גבר אלא רק 3 נשים: $\binom{m}{3}$
- אם נבחרו 2 גברים ואישה אחת: $\binom{m}{1} \cdot \binom{n}{2} = m \cdot \binom{n}{2}$
- אם נבחרו 2 נשים וגבר אחד: $\binom{n}{1} \cdot \binom{m}{2} = n \cdot \binom{m}{2}$

<u>נוסחת הבינום של ניוטון:</u>

לכל x, y ולכל n חיובי שלם מתקיים:

$$(x+y)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i y^{n-i}$$

מקרה פרטי חשוב:

$$(1+x)^n = \sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} x^i$$

זהות פסקל:

$$\binom{n+1}{k+1} = \binom{n}{k} + \binom{n}{k+1}$$

מספר המחרוזות באורך n מעל $\{a,b\}$ עם בדיוק k a-ים

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

<u>עוד דוגמאות:</u>

$$\sum_{k-even} \binom{n}{k} = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2}(1^k + (-1)^k)\binom{n}{k} = \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k} + \frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k} = \frac{1}{2}(1+1)^n + \frac{1}{2}(1-1)^n = 2^{n-1}$$

שאלה 1

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$$

פתרון

נזכור כי $1+1=2$

מנוסחת הבינום

$$2^n = (\underbrace{1}_{a}+\overset{b}{1})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}$$

שאלה 2

הוכיחו כי לכל $0 \le k \le n$ מתקיים

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$$

פתרון

נזכור כי $1-1=0$

מנוסחת הבינום

$$0 = (\underbrace{1}_{a}\overset{b}{-1})^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^k 1^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k}$$

עקרונות קומבינטוריים

עקרון שובך היונים

הגדרה:

אם נחלק $n+1$ כדורים ל־ n תאים, יהיה תא עם לפחות שני כדורים. או, אם עוצמת התחום של פונקציה גדולה מעוצמת הטווח שלה, היא אינה חח`ע.
בנוסח המוכלל: אם נחלק n כדורים ל־ k תאים, יהיה תא עם $\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil$ כדורים.

כלומר, ננסה להבין תמיד מה אפשר להקביל לכדורים ומה אפשר להקביל לתאים. ברגע שיש יותר כדורים מתאים העקרון נכנס לפעולה. איך מגיעים למצב שחייב להיות תא עם שני כדורים? כיוון המחשבה הוא שאנחנו מנסים לשים כל כדור בתא אחר, אם מלכתחילה נשים שני כדורים באותו תא נגמר... אבל פה בדיוק העקרון.
אם ננסה "בכוח" לשים כל כדור בתא אחר בכוונה, אם נגיע למצב ששמנו אחד בכל תא בנפרד ועדיין יש לנו עוד כדור לחלק, אנחנו חייבים לשים אותו בתא שכבר יש בו כדור, ואז נקבל תא עם 2 כדורים!
כלומר תמיד לחשוב על ה-worst case, לפצל כמה שיותר את הכדורים בין התאים ולראות אם אין ברירה שיהיה תא עם שניים.

דוגמאות:

בכיתה 30 תלמידים. כל אחד מהתלמידים שולח משלוח מנות ל־ 15 מחבריו לכיתה. הוכיחו שיש שני תלמידים בכיתה שקיבלו משלוח מנות זה מזה.

פתרון

1. בסך הכל נשלחו $30 \cdot 15$ משלוחי מנות.
2. כל אחד ממשלוחי המנות הללו נשלח בין $\binom{30}{2} = \frac{30 \cdot 29}{2} = 29 \cdot 15 < 30 \cdot 15$ זוגות תלמידים.
3. נתאים לכל משלוח מנות את זוג התלמידים ביניהם הוא נשלח (או: פונקציה שהתחום שלה הוא משלוח מנות והטווח הוא זוג תלמידים).
4. לפי עקרון שובך היונים, ישנם שני משלוחי מנות שהותאמו לאותו זוג תלמידים. שני תלמידים אלו קיבלו משלוחי מנות זה מזה.

עקרון ההכלה וההדחה

רקע:

$$|A\cup B| = |A| + |B| - |A\cap B|$$

$$|A\cup B\cup C| = |A| + |B| + |C| - \left(|A\cap B| + |A\cap C| + |B\cap C|\right) + |A\cap B\cap C|$$

<u>הטבלה:</u>

תהיינה $A_1, \dots, A_n$ קבוצות סופיות. אז:

הכלה והדחה	לא סימטרי	סימטרי
רגיל	(1) $\left\|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\| = \sum_{S\subseteq[n]}\left[(-1)^{\|S\|+1}\cdot\left\|\bigcap_{j\in S} A_j\right\|\right] =$ $= (\|A_1\| + \cdots + \|A_n\|) - (\text{זוגות}) + (\text{שלשות})$ $S\subseteq[n]$ – כל תתי הקבוצות של $\{1,\dots,n\}$ חזקת -1: אם $\|S\|$ אי זוגי אז סימן מינוס, אם $\|S\|$ זוגי אז סימן פלוס. החיתוך המוכלל: חיתוך של כל הקבוצות כך שהאינדקס הוא מהקבוצה S.	(2) $\left\|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\| = \sum_{k=1}^{n}\left[(-1)^{k+1}\binom{n}{k}\cdot\left\|\bigcap_{j\in[k]} A_j\right\|\right]$ במקרה זה החיתוך של כל k קבוצות הוא מאותו גודל לכל $1\le k\le n$. כלומר, חיתוך של שתי קבוצות תמיד יהיה מאותו גודל, חיתוך של 3 קבוצות תמיד יהיה מאותו גודל... אין צורך לחשב שוב. n מעל k – כמות הקבוצות בגודל k מעל [n].
משלים	(3) $\left\|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right\| = \sum_{S\subseteq[n]}[(-1)^{\|S\|}\cdot\|\bigcap_{j\in S} A_j\|] = \|\boldsymbol{U}\| - \left\|\bigcup_{i=1}^{n} \boldsymbol{A_i}\right\|$ עם ההבנה ש-$\bigcap_{j\in\emptyset} A_j = U$, U הוא העולם ממנו מתחילים.	(4) $\left\|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right\| = \|U\| - \left\|\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right\|$ $= \sum_{k=0}^{n}[(-1)^k\binom{n}{k}\cdot\|\bigcap_{j\in[k]} A_j\|]$ לרוב את החיתוך הכללי בתוך הסכימה, חיתוך של k קבוצות נוכל לבטא באמצעות ביטוי סגור כלשהו (התלוי ב-k).

לרוב, נחשוב על כל קבוצה כמכילה איברים המקיימים תכונה מסוימת, ונחשב את מספר האיברים שלא מקיימים אף תכונה.

(3)

- מגדירים את העולם U – אוסף כל האפשרויות ללא אילוצים/מגבלות.
- מגדירים את המקרה הבעייתי שאנחנו לא רוצים שיקרה, ומסמנים ב-A_i (מקרים רעים).
- אנו מחפשים את **חיתוך המשלימים** (אלו המקרים הטובים, שכן עונים על תנאי השאלה).
- זה מתקבל על ידי U פחות איחוד כל המקרים הרעים (בודדים פחות זוגות ועוד שלשות פחות...).
- עוד דוגמאות:
  - מטלה 10 שאלה 5 (מקרה משלים, צביעת גרפים).

תרגיל 1

בכמה דרכים ניתן לחלק 55 כדורים זהים ל־ 5 תאים (שונים) כך שבתא ה i לא יהיו יותר אף תא לא יהיו יותר מ־ $10i$ כדורים?

פתרון

נגדיר את U להיות אוסף החלוקות ללא אילוצים. אזי:

$$|U| = S(5,55) = \binom{59}{4}$$

נגדיר A_i את אוסף החלוקות כך שבתא i יש יותר מ $10i$ כדורים. מתקיים:

- $|A_1| = S(5,44) = \binom{48}{4}$, $|A_2| = S(5,34) = \binom{38}{4}$, $|A_3| = S(5,24) = \binom{28}{4}$, $|A_4| = S(5,14) = \binom{18}{4}$, $|A_5| = S(5,4) = \binom{8}{4}$.
- חיתוכים של זוגות: $|A_1 \cap A_2| = S(5,23) = \binom{27}{4}$, $|A_1 \cap A_3| = S(5,13) = \binom{17}{4}$, $|A_1 \cap A_4| = S(5,3) = \binom{7}{4}$, $|A_1 \cap A_5| = 0$, $|A_2 \cap A_3| = S(5,3) = \binom{7}{4}$. כל שאר חיתוכי הזוגות ריקים.
- חיתוכים של שלשות , רביעיות, כל החמישה A_iים: כולם אפסים.
- מכאן, שהפתרון הוא:

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right| &= |U| - \sum_{i=1}^{5}|A_i| + \sum_{1\le i<j\le 5}|A_i \cap A_j| - \\ &= \binom{59}{4} - \left(\binom{48}{4} + \binom{38}{4} + \binom{28}{4} + \binom{18}{4} + \binom{8}{4}\right) + \left(\binom{27}{4} + \binom{17}{4} + 2\cdot\binom{7}{4}\right)\end{aligned}$$

(4)

- דומה ל-(3), רק שכאן אין צורך למצוא חיתוכים של כל הבודדים, הזוגות, השלשות, רק למצוא אחד מכל סוג וזה תופס לכולם, כי החיתוכים של k קבוצות תמיד זהים.

תרגיל 2

מה מספר הגרפים $G =< \{1,2.\dots,n\}, E >$ בהם אין צמתים מבודדים (כלומר, כאלו שדרגתם 0)?

פתרון

1. נפתור ע`י הכלה והדחה.

(א) ה`עולם` שלנו: כל הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים על n צמתים (נסמן קבוצה זו ב־ U). לכל אחת מתוך $\binom{n}{2}$ הקשתות האפשריות יש אפשרות להופיע או לא להופיע. לכן:

$$|U| = 2^{\binom{n}{2}}$$

(ב) לכל $1 \le i \le n$ נגדיר את A_i להיות כל הגרפים הפשוטים שאינם מכוונים על n צמתים כך שצומת מס' i מבודד.

i. עבור הגרפים שב־ A_i, ישנן $\binom{n-1}{2}$ קשתות אפשריות. לכן:

$$|A_i| = 2^{\binom{n-1}{2}}$$

ii. באופן דומה, עבור $1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n$:

$$|A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k}| = 2^{\binom{n-k}{2}}$$

(ג) אנו מחפשים את $\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right|$. מנוסחת ההכלה וההדחה:

$$\begin{aligned}\left|\bigcap_{i=1}^{n} \bar{A}_i\right| &= 2^{\binom{n}{2}} - n2^{\binom{n-1}{2}} + \binom{n}{2}2^{\binom{n-1}{2}} - \ldots + (-1)^n 2^{\binom{n-n}{2}} \\ &= \sum_{i=0}^{n} (-1)^i \binom{n}{i} 2^{\binom{n-i}{2}}\end{aligned}$$

נוסחאות נסיגה

נוסחאות נסיגה

לעתים פתרון מפורש לבעיה קומבינטורית אינו ידוע, אך יחסית קל להגיע לפתרון רקורסיבי (בהמשך נראה כיצד להגיע לנוסחא מפורשת במקרים ספציפיים). נתחיל בדוגמא פשוטה: כמה מחרוזות בינאריות באורך n קיימות? נסמן מספר זה ב־ a_n. נניח כי מצאנו כמה כאלו באורך $n-1$ יש (כלומר, את a_{n-1}). כעת, כדי להשלים את המחרוזת למחרוזת באורך n, ישנן שתי אפשרויות (או לשים 0 או לשים 1 בתו האחרון). קיבלנו, אם כך, כי $a_n = 2a_{n-1}$. לבסוף, נקבע את תנאי ההתחלה (שימו לב שאחרת לא ניתן לחשב את מספר האפשרויות). במקרה שלנו, $a_0 = 1$, המחרוזת הריקה.

תרגיל 1

נסמן ב־ a_n את מספר האפשרויות לרצף שביל באורך n ע"י שימוש במרצפות אדומות באורך 2, מרצפות ירוקות באורך 2 ומרצפות שחורות באורך 1. כיתבו נוסחת נסיגה ל a_n יחד עם תנאי התחלה.

פתרון

נחלק למקרים לפי המרצפת הראשונה.

- ניתן להניח מרפצת אדומה, ואז נרצף במרצפות באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).
- ניתן להניח מרפצת ירוקה, ואז נרצף במרצפות באורך $n-2$ (a_{n-2} אפשרויות).
- ניתן להניח מרפצת שחורה, ואז נרצף במרצפות באורך $n-1$ (a_{n-1} אפשרויות).

מעקרון החיבור, נקבל כי:

$$\forall n \geq 2 . a_n = 2a_{n-2} + a_{n-1}$$

וכעת נדרש למצוא תנאי התחלה גם ל־ a_0 וגם ל־ a_1. קל לראות כי $a_0 = 1$ (לא להניח כלום) ו־ $a_1 = 1$ (להניח מרצפת שחורה). מכאן, וודאו למשל כי $a_2 = 3$ ואכן ניתן להניח או שתי מרצפות שחורות, או מרצפת ירוקה או מרצפת אדומה.

<u>נמצא ביטוי סגור ל-a_n בשיטת הפולינום האופייני (למערכת הומוגנית):</u>

- נכתוב פתרון מהצורה $a_n = x^n$: $x^n = x^{n-1} + 2x^{n-2}$.
- נחלק ב-x^{n-2} ונקבל $x^2 - x - 2 = 0$.
- קיבלנו את הפולינום האופייני, השורשים שלו הם -1, 2.
- על פי משפט, כל הפתרונות של $a_n = a_{n-1} + 2a_{n-2}$ הם מהצורה הבאה: $A2^n + B(-1)^n$. לקחנו את השורשים של הפולינום האופייני בחזקת n, וכל צירוף לינארי שלהם מהווה פתרון של נוסחת הנסיגה המקורית. אלו גם כל הפתרונות של נוסחת הנסיגה.
- נציב את $a_0 = 1, a_1 = 1$ ונקבל: $1 = a_0 = A2^0 + B(-1)^0 = A + B$, ו-$1 = a_1 = 2A - B$. נפתור ונקבל כי: $A = \frac{2}{3}, B = \frac{1}{3}$. נציב בחזרה: $a_n = \frac{2}{3}2^n + \frac{1}{3}(-1)^n = \frac{1}{3}(2^{n+1} + (-1)^n)$.

דוגמאות נוספות (יש עוד הרבה בתרגול 12):

תרגיל 4

נסמן ב־ a_n את מספר המחרוזות הבינאריות באורך n בהן לא מופיע הרצף 110. כיתבו נוסחת נסיגה ל a_n יחד עם תנאי התחלה.

פתרון

נחלק למקרים לפי התווים הראשונים של המחרוזת.

- אם המחרוזת מתחילה ב־ 0, ניתן להשלים אותה לכל מחרוזת חוקית באורך $n-1$ ב־ a_{n-1} אפשרויות.
- אם המחרוזת מתחילה ב־ 1:
  - אם התו השני הינו 0, ניתן להשלים אותה לכל מחרוזת חוקית באורך $n-2$, ב־ a_{n-2} אפשרויות.
  - אם התו השני הינו 1, ניתן להשלים אותה רק למחרוזת שכולה 1 באופן חוקי.

סה`כ:

$$\forall n \geq 2. a_n = a_{n-1} + a_{n-2} + 1$$

כאשר $a_0 = 1$ ו־ $a_1 = 2$.

5 – גרפים (הקלטות של אמיר רובינשטיין תש"ף)

הגדרות בסיסיות

הגדרת גרף

גרף – באופן לא פורמלי נאמר כי זהו מבנה מתמטי שמאפשר לייצג "קשרים בין עצמים". גרף מורכב משתי קבוצות סופיות (אפשר גם לדבר על גרף אינסופי, בקורס זה נדבר רק על גרפים סופיים):

- V – קבוצת העצמים, נקראים גם **צמתים** (node) או קודקודים (vertex).
- E – קבוצה של "קשרים" שנקראים **קשתות** (edge).

הערה - אם יש לקשת "כיוון" אז הגרף נקרא מכוון (directed), אחרת הגרף נקרא לא מכוון (undirected). **בקורס הזה נדבר על גרפים לא מכוונים אלא אם נאמר אחרת.**

הגדרה פורמלית: גרף הוא זוג סדור $G =< V, E >$ כאשר V היא קבוצה סופית שאיבריה נקראים צמתים, ו-E קבוצת קשתות מהצורה $\{x, y\}$ כאשר $x, y \in V$.

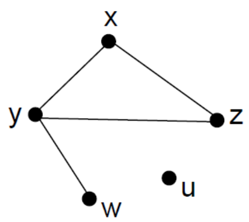
כל קשת היא קבוצה בגודל 2 שמייצגת את העובדה שיש קשר בין x ל-y. אפשר לומר $E \subseteq P_2(V)$ כאשר $P_2(V)$ זוהי קבוצת כל תתי הקבוצות של V שהן מעוצמה 2:

$$P_2(V) = \{U \subseteq V \mid |U| = 2\}$$

הערות:

- נהוג לסמן: $|V| = n, |E| = m$.
- אם ישנה קשת $e = \{x, y\} \in E$ אז נאמר ש-e **נוגעת** ב-x וב-y, ונאמר ש-x ו-y **שכנים/סמוכים/הקצוות של e**.
- קשת מצומת לעצמו נקראת לולאה/קשת עצמית – לפי ההגדרה שלנו לא ניתן להוסיף לולאות, כי $\{z, z\} = \{z\}$.
- אם יש יותר מקשת אחת בין שני צמתים כלשהם הן נקראות קשתות מקבילות – לא נעסוק בזה.
- קיימים גם גרפים ממושקלים – כאשר על כל קשת שמים מספר כלשהו.

בקורס זה נתמקד בגרפים **פשוטים** (בלי לולאות ובלי קשתות מקבילות) **ולא מכוונים**, ולא ממושקלים.



$$G =< V, E >$$
$$V = \{x, y, z, w, u\} \quad (V \text{ סופית})$$
$$E = \{\{x, y\}, \{z, x\}, \{y, z\}, \{y, w\}\}$$

שימו לב כי $E \subseteq P_2(V)$

כאשר $P_2(V) = \{U \subseteq V \mid |U| = 2\}$

שכנים ודרגה

קבוצת השכנים: בהינתן $G =< V, E >$ וצומת $v \in V$ קבוצת השכנים של v מוגדרת להיות כל הצמתים שהוא מחובר אליהם בקשת:

$$N(v) = \{u \in V | \{u, v\} \in E\}$$

דרגה: הדרגה של צומת $v \in V$ היא עוצמת קבוצת השכנים שלו (כמות השכנים שלו):

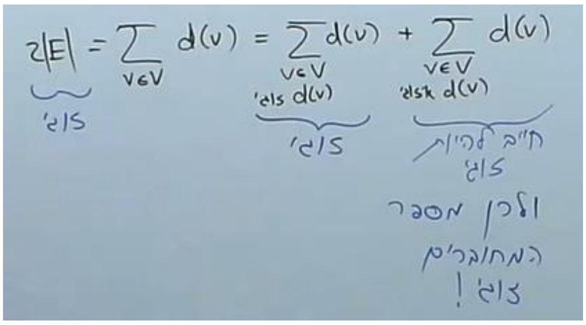
$$d(v) = |N(v)|$$

משפט: הקשר בין סכום הדרגות למספר הקשתות בגרף:

$$\sum_{v \in V} d(v) = 2|E|$$

הסבר - כל קשת תורמת $+1$ לדרגה של 2 צמתים בדיוק.

מסקנה: בכל גרף יש מספר זוגי של דרגות אי-זוגיות.



למת לחיצת הידיים: יש בעולם מספר זוגי של אנשים שלחצו יד למספר אי-זוגי של אנשים.

משפט: בכל גרף עם לפחות שני צמתים $n \geq 2$ יש שני צמתים מאותה דרגה.

הוכחה: הדרגות האפשריות הן $0,1, \dots, n-1$ ולכאורה ייתכן שלכל צומת יש דרגה ייחודית. הסיבה שזה לא יכול לקרות היא שלא ייתכן שיש גם צומת מדרגה 0 וגם צומת מדרגה $n-1$ (נניח בשלילה שיש u, v כאלו כאשר $d(u) = n-1, d(v) = 0$ אז מצד אחד $\{u, v\} \in E$ וגם $\{u, v\} \notin E$).

נשים לב שצומת מדרגה 0 לא מחובר לאף צומת אחר, וצומת מדרגה $n-1$ מחובר לכל הצמתים פרט לעצמו (אלו הן באמת הדרגות המינימליות והמקסימליות האפשריות בגרף עם n צמתים).

שאלה: מהו **מספר הקשתות המקסימלי** בגרף (פשוט, לא מכוון) עם n צמתים? תשובה: $\frac{n(n-1)}{2}$

- הסבר אחד – כל אחד מהצמתים יכול להיות מחובר ל-$n-1$ צמתים אחרים, ככה נקבל $n(n-1)$ אבל ספרנו כל קשת פעמיים ולכן מחלקים ב-2.
- הסבר שני – סכום של טור חשבוני: $1 + 2 + \dots + (n-1)$. בוחרים צומת ואז הוא יהיה מחובר ל-$n-1$ צמתים אחרים. הצומת הבא יכול להיות מחובר לכולם ולא נספור את הקשת שבה הוא מחובר לראשון, לכן $n-2$. ככה עד 0.
- **גרף מלא** – גרף שמכיל מספר כזה של קשתות (מספר מקסימלי). שם נוסף הוא **קליקה**.

תת-גרף וגרף משלים

תת-גרף: בהינתן גרף $G =< V, E >$ תת-גרף שלו $G' =< V', E' >$ הוא גרף כאשר $V' \subseteq V$ ו-$E' = \{ \{u, v\} \in E | u, v \in V' \}$.

כלומר, לקחנו חלק מסוים מהצמתים, ואת כל הקשתות שנוגעות אך ורק בצמתים אלו.

גרף משלים: בהינתן גרף $G =< V, E >$ המשלים שלו הוא $\bar{G} =< V', E' >$ כאשר $V' = V$ ו-$E' = P_2(V) \setminus E = \bar{E}$.

כלומר נוכל לרשום פשוט - $\boldsymbol{\bar{G} =< V, \bar{E} >}$.

כלומר הגרף המשלים הוא עם כל הצמתים של הגרף המקורי, וכל הקשתות שלא קיימות בגרף המקורי, כלומר החיסור של קבוצת הקשתות המקוריות מקבוצת כל הקשתות האפשריות.

איזומורפיזם

הגדרת איזומורפיזם

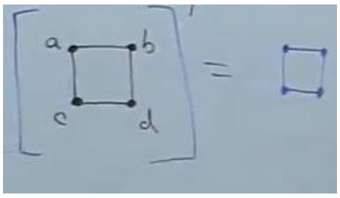
גרפים איזומורפיים – שני גרפים $G_1 = < V_1, E_1 >$ ו-$G_2 = < V_2, E_2 >$ נקראים איזומורפיים $\Leftrightarrow$ קיימת פונקציית זיווג $f: V_1 \to V_2$ כך שלכל שני צמתים $a, b \in V_1$ מתקיים ש-$\{f(a), f(b)\} \in E_2 \Leftrightarrow \{a, b\} \in E_1$.

כלומר, אם שני צמתים שכנים בגרף הראשון, אז הצמתים שמתקבלים מהפעלת הפונקציה עליהם גם שכנים בגרף השני.

<u>הערות:</u>

- הזיווג "שומר על הקשתות" והצמתים משנים שמות.
- בין שני גרפים איזומורפיים יכול להיות יותר מאיזומורפיזם אחד!

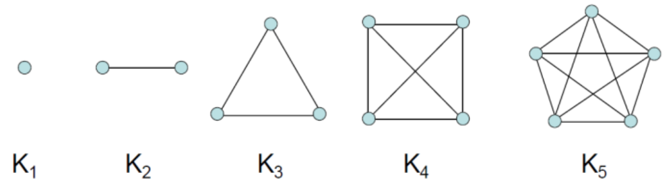
איזומורפיזם בין גרפים הוא **יחס שקילות**. נוח לחשוב על מחלקות השקילות של יחס זה, כגרפים ללא שמות לצמתים:



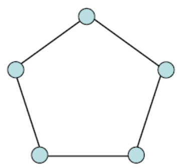
דוגמאות למחלקות שקילות ("סוגים" של גרפים):

1) <u>K_n – קליקה עם n צמתים:</u>

מחלקת השקילות של כל הגרפים השלמים עם n צמתים מסומנת K_n



2) <u>C_n – גרף מעגל עם n צמתים (כאשר $n > 2$):</u>



C_5

C_5 היא מחלקת השקילות של הגרף הבא:

$V = \{0,1,2,3,4\}$

$E = \{\{i, (i+1) mod 5\} \mid 0 \leq i < 5\}$

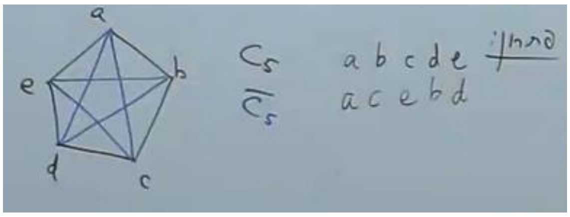
הכרעת איזומורפיזם

<u>תנאים הכרחיים לאיזומורפיזם:</u>

1. אותו מספר צמתים.
2. אותו מספר קשתות.
3. אותו מספר צמתים מכל דרגה.

זה מאפשר לפסול איזומורפיזם בקלות, אך אלו אינם תנאים מספיקים!

תרגיל: האם C_5 איזומורפי למשלים שלו?



שאלה: האם קיים גרף עם 6 צמתים שאיזומורפי למשלים שלו? תשובה: לא. **סכום הקשתות שיש בגרף ובמשלים שלו צריך לצאת סכום הקשתות בגרף המלא**. בגרף המלא עם 6 צמתים K_6 יש $\frac{6\cdot 5}{2}=15$ קשתות. זהו סכום הקשתות בגרף ומשלימו (עם 6 צמתים) ולכן בהכרח כמות הקשתות לא תהיה שווה כיוון ש-15 אי זוגי (לא נוכל לפצל אותו לסכום של שני מספרים שלמים שווים). כדי שגרפים יהיו איזומורפיים חייבת להיות אותה כמות קשתות בשניהם.

מסלולים וקשירות

מסלולים

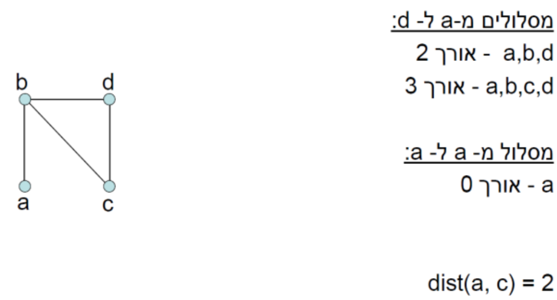
מסלול: מסלול (path) מצומת a לצומת b בגרף $G=<V,E>$ הוא סדרה של צמתים $a=v_0,v_1,\dots,v_m=b$ כאשר לכל $i\in\{0,\dots,m-1\}$ מתקיים $\{v_i,v_{i+1}\}\in E$.

אורך של מסלול: עבור מסלול $p=v_0,\dots,v_m$ מסומן $|p|$ ושווה m (מספר הקשתות).

סוגי מסלולים:

- אם $v_0=v_m$ $(m>0)$ המסלול ייקרא **מעגל**.
- **מסלול פשוט** – מסלול בו **כל הצמתים שונים זה מזה**.
- **מעגל פשוט** – מעגל בו $v_0=v_m$ ואלו הצמתים היחידים שחוזרים. כלומר זהו מסלול שבו כל הצמתים שונים זה מזה פרט לראשון ולאחרון שזהים זה לזה.

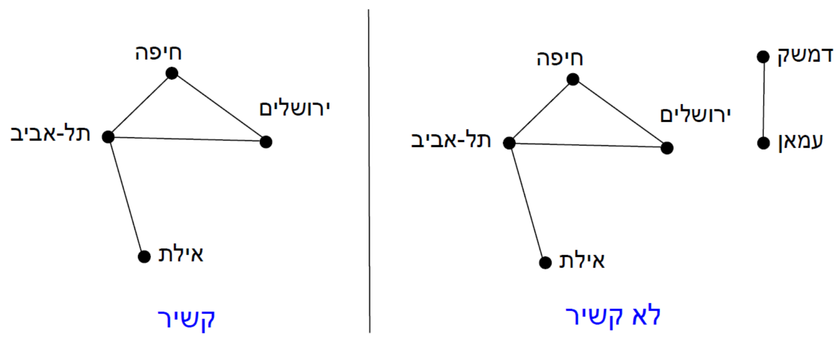
מרחק: המרחק מצומת a לצומת b הוא האורך של **מסלול קצר ביותר** מ-a ל-b (ואם אין אז נסמן ∞).



קשירות

גרף קשיר: גרף נקרא קשיר (connected) אם יש בו מסלול בין כל 2 צמתים.

נגדיר יחס R על צמתי גרף $G=<V,E>$: נגיד כי $\boldsymbol{aRb}$ ⟺ **יש מסלול מ-a ל-b**. זהו יחס שקילות. מחלקות השקילות של יחס זה נקראות **רכיבי קשירות**.



הערות:

1. גרף קשיר אמ"מ יש בו רכיב קשירות אחד.
2. רכיבי הקשירות הם תתי-גרפים קשירים מקסימליים (אי אפשר להוסיף עוד צמתים ולשמור על הקשירות).
3. מסלול בין שני צמתים באותו רכיב קשירות, לא יכול להשתמש בקשתות מרכיב קשירות אחר.

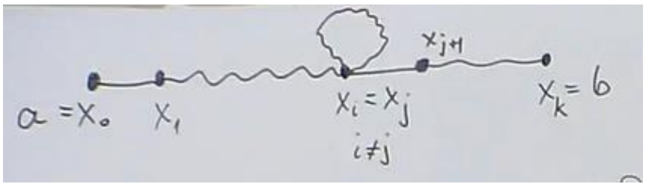
משפטים בנושא קשירות:

משפט 1: בגרף קשיר קיים מסלול **פשוט** בין כל שני צמתים.

הוכחה: קיום מסלול נובע מההגדרה של גרף קשיר. נסתכל על קבוצת המסלולים מצומת a לצומת b כלשהו. קבוצה זו לא ריקה ולכן יש בה מסלול בעל אורך מינימלי. מסלול כזה **חייב להיות פשוט**.
נניח בשלילה שהוא לא פשוט: כלומר במסלול מ-$a = x_0$ ל-$b = x_k$ קיימים $i \neq j$ (אינדקסים שונים של הגעה לצמתים) עבורם $x_i = x_j$. אבל אז מסלול זה לא קצר ביותר, כי המסלול הבא קצר ממנו:

$$x_0, x_1, \dots, x_i, x_{j+1}, \dots, x_k$$

וזו סתירה.



משפט 2: לכל גרף או הוא או משלימו קשיר (יכול להיות גם שניהם).

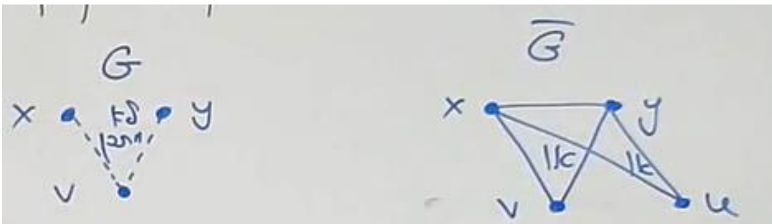
הוכחה: במקום להוכיח משהו מהצורה $\alpha \vee \beta$ נוכיח פסוק שקול שהוא $\neg\alpha \rightarrow \beta$ (הפסוק הראשון שקר רק כאשר שניהם F, והפסוק השני שקר גם רק כאשר שניהם F כי נקבל T גורר F).

נוכיח שאם G לא קשיר אז $\bar{G}$ קשיר.
יהי G גרף לא קשיר, אז קיימים ב-G שני צמתים x, y שאין ביניהן מסלול, ובפרט גם אין ביניהם קשת. לכן $\{x, y\}$ קשת ב-$\bar{G}$.

כל צומת $v \in V$ ששונה מ-x, y, מחובר או ל-x או ל-y או לשניהם ב-$\bar{G}$ (כי הוא לא מחובר גם ל-x וגם ל-y ב-G כי אז היה מסלול בין x ל-y). לכן, יש מסלול בין כל שני צמתים ב-$\bar{G}$: עבור u, v שונים מ-x, y המסלולים האפשריים הם:

- u, x, y, v
- u, y, x, v
- u, x, v
- u, y, v

(למעשה מסלול כזה הוא באורך 3 לכל היותר).



משפט 3: עבור גרף $G =< V, E >$ אם G **קשיר** אז $\boldsymbol{|E| \geq |V| - 1}$.
כלומר, בגרף קשיר יש לפחות $n - 1$ קשתות.

למה: **בגרף קשיר שבו $|V| > |E|$ יש צומת מדרגה 1.**
הוכחת הלמה: הדרגה הממוצעת בגרף כנ"ל קטנה מ-2. אין צמתים מדרגה 0 כי הגרף קשיר, ולכן בהכרח יש צומת מדרגה 1.

$$\frac{\sum_{v\in V} d(v)}{|V|} = \frac{2|E|}{|V|} < \frac{2|V|}{|V|} = 2$$

הוכחה נוספת: נניח בשלילה שכל הדרגות הן לכל הפחות 2.

$$2|E| = \sum_{v\in V} d(v) \geq \sum_{v\in V} 2 = 2|V| \qquad \Rightarrow \qquad |E| \geq |V|$$

סתירה.

מסקנה מהלמה: בגרף המקיים $|V| > |E|$ יש צומת מדרגה 1 **ואם מסירים אותו (ואת הקשת שנוגעת בו) הגרף נשאר קשיר.**

הוכחה: יהי $G = \langle V,E \rangle$ גרף קשיר ו- v צומת מדרגה 1 אותו הסרנו.
נסתכל על שני צמתים כלשהם ב- $V - \{v\}$. בגרף המקורי היה ביניהם מסלול כי היה קשיר.
מסלול זה לא עבר דרך v, אחרת היתה בו קשת שחוזרת פעמיים.

הוכחת המשפט:
נוכיח באינדוקציה על מספר הצמתים.
בסיס: $|V| = 1$. הגרף קשיר ואכן $|E| = 0 \geq 1 - 1$.
הנחה: נניח נכונות עבור גרף עם $n - 1$ צמתים. ונוכיח עבור גרף עם n צמתים.
צעד: נסתכל על גרף עם $|V| = n$ צמתים. נניח בשלילה ש-$m = |E| < |V| - 1$ כלומר $m < n - 1$, כלומר $m \leq n - 2$. תנאי הלמה מתקיימים ולכן ניתן להסיר צומת מדרגה 1 (ואת הקשת שלו) ולקבל גרף **קשיר** שבו לכל היותר $n - 3$ קשתות.

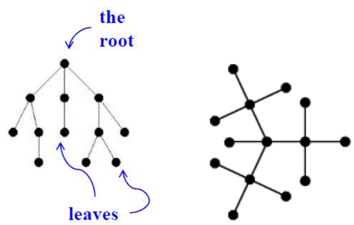
הגרף הוא קשיר ולכן יש בו $n - 1$ צמתים ולפי הנחת האינדוקציה לפחות $n - 2$ קשתות ($|E| \geq (n-1) - 1 = n - 2$). קיבלנו סתירה לכך שיש לכל היותר $n - 3$ קשתות.

עצים

עצים (trees)

עץ: גרף קשיר וחסר מעגלים פשוטים.

הערה: מעתה נתייחס רק למעגלים באורך 3 ומעלה, אחרת כל קשת יוצרת מעגל.



יער: גרף חסר מעגלים פשוטים.

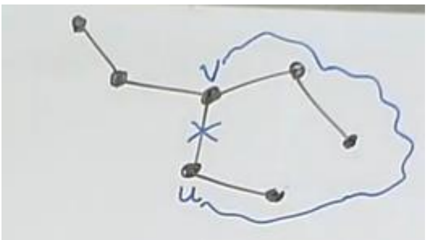
יער הוא מעין אוסף של עצים, הוא לא חייב להיות קשיר, הוא מכיל רכיבי קשירות שהם העצים.

מסקנות

<u>משפט 1:</u> בגרף חסר מעגלים פשוטים בעל n צמתים יש לכל היותר $n-1$ קשתות, כלומר $|E| \leq |V|-1$.

<u>למה:</u> אם מסירים מגרף חסר מעגלים פשוטים קשת כלשהי, אז רכיב הקשירות שבו הייתה הקשת "מתפרק" לשניים ואז מספר רכיבי הקשירות בגרף כולו גדל ב-1.

<u>הוכחה:</u> נסיר קשת $\{u,v\}$ כלשהי מגרף חסר מעגלים פשוטים. אם רכיב הקשירות לא התפרק לשניים, אז עדיין איש מסלול בין u ל-v אבל אז זה אומר, שלפני הסרת הקשת היה מעגל, וזו סתירה.



<u>הוכחת המשפט:</u> באינדוקציה (מלאה) על מספר הצמתים.
בסיס: $n=1$ זה גרף חסר מעגלים פשוטים, עבורו $|E|=0 \leq 1-1$.
הנחה: נניח נכונות עבור כל גרף באורך קטן מ-n.
צעד: יהי $G=<V,E>$ גרף בעל n צמתים וחסר מעגלים פשוטים. נסיר ממנו קשת כלשהי $\{x,y\}$. לפי הלמה, כמות רכיבי הקשרות היא לפחות 2. וניתן להפעיל את הנחת האינדוקציה על כל רכיב בנפרד (הוא בעל פחות צמתים וגם חסר מעגלים).

נסמן את מספר רכיבי הקשירות ב-t ומתקיים $t \geq 2$ ואת רכיבי הקשירות נסמן $G_i=<V_i,E_i>$ כאשר $1 \leq i \leq t$. לפי הנחת האינדוקציה מתקיים $|E_i| \leq |V_i|-1$. נתאר את כמות כל הקשתות (הקשת שהסרנו + סכום כל כמות הקשתות בכל רכיב קשירות):

$$|E| = 1 + \sum_{i=1}^{t} |E_i| \leq 1 + \sum_{i=1}^{t} (|V_i|-1)$$
$$= 1 + \sum_{i=1}^{t} |V_i| - t = 1 + |V| - t \leq |V| - 1$$

<u>מסקנה:</u> בעץ בעל n צמתים יש $n-1$ קשתות בדיוק.

<u>מסקנות (לשים לב שהן רק **בכיוון אחד**):</u>

- **עץ הוא גרף קשיר מינימלי** (אם נסיר קשת כלשהי הוא כבר לא יהיה קשיר).
- **עץ הוא גרף חסר מעגלים מקסימלי** (אם נוסיף קשת כלשהי ניצור מעגל).

משפט 4.3 התנאים הבאים שקולים, עבור גרף G לא מכוון:

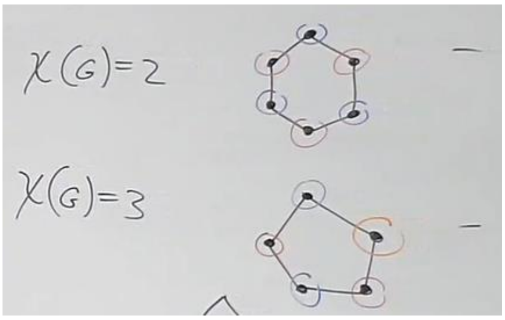
1. G עץ.
2. G קשיר ובכל תת־גרף שלו יש צומת שדרגתו 0 או 1.
3. G קשיר ו־ $|E|=|V|-1$.
4. G קשיר מינימלי (דהיינו, אם נסלק קשת נקבל גרף לא קשיר).
5. בין כל שני צמתים של G יש מסלול (פשוט) יחיד.
6. G חסר מעגלים ו־ $|E|=|V|-1$.
7. G חסר מעגלים מקסימלי.

צביעת גרפים

צביעה

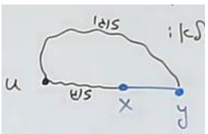
צביעה חוקית: צביעה חוקית של גרף $G =< V, E >$ ב-k צבעים היא פונקציה $f \in V \to \{1,2, \dots, k\}$ עבור k כלשהו כך ש-$\{x, y\} \in E$ אז מתקיים $f(x) \neq f(y)$.

- גרף הוא **k-צביע** אם יש לו צביעה חוקית ב-k צבעים.
- **מספר הצביעה** של גרף G הוא ה-k המינימלי עבורו הגרף k-צביע. מסומן $\chi(G)$.



טענה: גרף הוא 2-צביע ⇔ אין בו מעגלים באורך אי-זוגי.

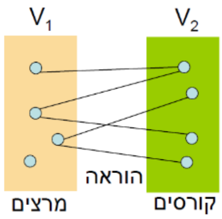
הוכחה:
⇐ נניח שגרף הוא 2-צביע, אז כל מעגל חייב לעבור לסירוגין בין צמתי צבע אחד לצמתי הצבע השני, ולחזור לצומת ההתחלה. לכן, מעגל כזה חייב להיות באורך זוגי.
⇒ נניח שבגרף אין מעגלים באורך אי-זוגי, נבחר צומת u כלשהו ונגדיר: $V_1 = \{v \in V | dest(u, v) \text{ } is \text{ } even\}$ וגם $V_2 = \{v \in V | dest(u, v) is \text{ } odd\}$. נצבע את צמתי V_1 בכחול ואת צמתי V_2 באדום וזוהי צביעה חוקית!
נניח בשלילה שלא:



קיבלנו מעגל באורך אי-זוגי (אותה ההוכחה לגבי אדום).

גרף דו-צדדי: גרף 2-צביע נקרא גם גרף דו-צדדי, גרף דו"צ. זהו גרף שניתן לחלק את צמתיו ל-2 תתי קבוצות שאינן ריקות כך שמתקיים: $V_1 \cap V_2 = \emptyset$, $V_1 \cup V_2 = V$, וכל **הקשתות מחברות צמתים מקבוצות שונות**.

סימון: $G =< V_1, V_2, E >$.



הערה: קליקה בגודל n היא בעלת מספר צביעה n. יש סוג מיוחד של גרפים שנקראים גרפים מישוריים, שניתן לייצג באמצעותם מפות. מסתבר שכל מפה ניתנת לצביעה בעד 4 צבעים, "משפט ארבעת הצבעים".