הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

החוג למתמטיקה (0366)
אלגברה לינארית 1ב (1119)

(גרסה ארוכה)

מרצה: ענת אמיר

מתרגל: איתן רוזן/אמיתי אלדר

תשפ"ב, סמסטר א' (2021-2022)

מסכם: רועי מעין

The Raymond and
Beverly Sackler Faculty
of Exact Sciences
Tel Aviv University

פרק 0 - מבוא

שדות 3

מספרים מרוכבים 5

פרק 1 – מערכת משוואות לינאריות (ממ"ל)

מערכת משוואות לינארית ומטריצות 8

המרחב $\mathbb{F}^n$ 11

פרק 2 - מטריצות

מרחב המטריצות 16

סוגי מטריצות 18

פרק 3 – מרחבים וקטוריים (מ"ו)

מרחב וקטורי 22

מרחבי שורות ועמודות של מטריצות 27

השלמות בנוגע למטריצות 28

פרק 4 – העתקות לינאריות (ה"ל)

העתקות לינאריות 30

נוסחת המימדים והרכבה 32

החלפת בסיס 33

לקינות 34

0 – מבוא

חלק זה עוסק בהגדרה של מושג השדה (וכל האלף תכונות שהוא צריך לקיים), מושג מאוד בסיסי שמעליו אנחנו עובדים. כל אובייקט שנגדיר אחר כך ישתמש בסקלרים (איברים) מעל שדה כלשהו. בין היתר מתמקדים בשדה המרוכבים, איך עובדים עם מספרים מרוכבים וכל זה – תענוג.

שדות

מבוא - קבוצות

כל החומר הזה נלמד בבדידה (תורת הקבוצות). נקודות שעלו כאן בכל זאת:

- קבוצת המספרים הטבעיים **בלינארית – לא כוללת את 0!** כלומר $\mathbb{N} = \{1,2,3, \dots\}$. אם נרצה להתייחס לקב' הטבעיים יחד עם 0 נסמנה $\mathbb{N}_0$.
- בקבוצות אין חשיבות לסדר ולחזרות – בקורס זה לעיתים נתעניין בקב' בהן יש חשיבות לסדר ולחזרות. נקרא להן **קבוצות סדורות**.

שדה

הגדרה – שדה $\mathbb{F}$ הינו קבוצה שבה מוגדרות פעולות חיבור "+" וכפל "$\cdot$" אשר מקיימות את התכונות הבאות:

1. סגירות: ביחס לחיבור ולכפל: $\forall a,b \in \mathbb{F}: (a+b) \in \mathbb{F} \wedge (a \cdot b) \in \mathbb{F}$
2. חוק החילוף: בחיבור ובכפל:
   a. $\forall a,b \in \mathbb{F}: a+b = b+a$
   b. $\forall a,b \in \mathbb{F}: a \cdot b = b \cdot a$
3. חוק הקיבוץ: בחיבור ובכפל:
   a. $\forall a,b \in \mathbb{F}: (a+b)+c = a+(b+c)$
   b. $\forall a,b \in \mathbb{F}: (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$
4. חוק הפילוג: $\forall a,b \in \mathbb{F}: a \cdot (b+c) = a \cdot b + a \cdot c$
5. קיום איבר ניטרלי לחיבור: איבר האפס - $\exists \mathbf{0} \in \mathbb{F}: (\forall a \in \mathbb{F}: a+0 = 0+a = a)$
6. קיום איבר ניטרלי לכפל: $\exists 0 \neq \mathbf{1} \in \mathbb{F}: (\forall a \in \mathbb{F}: a \cdot 1 = 1 \cdot a = a)$
7. קיום איבר נגדי: $\forall a \in \mathbb{F}: (\exists b \in \mathbb{F}: a+b = b+a = 0)$
   b נקרא הנגדי של a ומסומן $-a$
8. קיום איבר הופכי: $\forall 0 \neq a \in \mathbb{F}: (\exists b \in \mathbb{F}: a \cdot b = b \cdot a = 1)$
   b נקרא ההופכי ל-a ומסומן a^{-1}

הערות:

- איברי השדה נקראים **סקלרים**.
- פעולת **החיסור** בשדה מוגדרת כחיבור עם הנגדי: $a - b = a + (-b)$
- פעולת **החילוק** בשדה מוגדרת ככפל בהופכי: $\frac{a}{b} = a \cdot b^{-1}$

דוגמאות:

- $\mathbb{N}$ - לא שדה: אין איבר ניטרלי לחיבור (איבר אפס).
- $\mathbb{N}_0$ – לא שדה: אין איברים נגדיים.
- $\mathbb{Z}$ - לא שדה: אין איברים הופכיים.
- $\mathbb{Q}, \mathbb{R}$ - **שדות!**

שדה שארית

הגדרה – שדה שארית $\mathbb{Z}_p$ מוגדר על בסיס מספר ראשוני כלשהו המסומן ב-p. בשדה זה, פעולות החיבור והכפל מתבצעות כרגיל, ולאחר מכן אנו לוקחים את שארית החלוקה של התוצאה ב-p.

דוגמה - $\mathbb{Z}_2 = \{0,1\}$:

+	0	1
0	0	1
1	1	0

$\cdot$	0	1
0	0	0
1	0	1

למשל, כדי לחשב את 1+1, ניקח את התוצאה המקורית (2) וניקח את שארית החלוקה ב-p (2), שארית זו היא 0.

בשדה זה נוכל להגדיר איברים הופכיים ונגדיים:

- איבר נגדי – איבר שאם נחבר אותו לאיבר מסוים נקבל 0. נסמן את כל המקומות בטבלה שהתוצאה שלהם היא 0 בחיבור, וכך נקבל איברים נגדיים.
- איבר הופכי – איבר שאם נכפיל אותו באיבר מסוים נקבל 1. נסמן את כל המקומות בטבלה שהתוצאה שלהם היא 1 בכפל, וכך נקבל איברים הופכיים.

דוגמה - $\mathbb{Z}_5 = \{0,1,2,3,4\}$

+	0	1	2	3	4
0	0	1	2	3	4
1	1	2	3	4	0
2	2	3	4	0	1
3	3	4	0	1	2
4	4	0	1	2	3

$\cdot$	0	1	2	3	4
0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4
2	0	2	4	1	3
3	0	3	1	4	2
4	0	4	3	2	1

הערה – בבסיס שאינו ראשוני, לא יהיה איבר הופכי בשדה שארית.

תכונות של שדות

יהי $\mathbb{F}$ כלשהו עם פעולת חיבור "+" ופעולת כפל "$\cdot$".

1. יחידות האיבר הנגדי - לכל סקלר בשדה קיים איבר נגדי יחיד.
   הוכחה:
   יהי $a \in \mathbb{F}$ עם זוג איברים נגדיים $b, c \in \mathbb{F}$. נקבל:
   $$c = 0 + c = (\boldsymbol{b} + \boldsymbol{a}) + \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} + (\boldsymbol{a} + \boldsymbol{c}) = b + 0 = b$$
   $$\Rightarrow b = c$$
   כלומר, האיברים הנגדיים חייבים להיות אותו הדבר.
2. יחידות האיבר ההופכי – לכל סקלר ששונה מאפס בשדה, קיים איבר הופכי יחיד.
   הוכחה:
   יהי $a \in \mathbb{F}$ עם זוג איברים הופכיים $b, c \in \mathbb{F}$. נקבל:
   $$c = 1 \cdot c = (\boldsymbol{b} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{c} = \boldsymbol{b} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{c}) = b \cdot 1 = b$$
   $$\Rightarrow b = c$$
   כלומר, האיברים ההופכיים חייבים להיות אותו הדבר.
3. לכל סקלר בשדה $a \in \mathbb{F}$ מתקיים $a \cdot 0 = 0$.
   הוכחה:
   $$a \cdot 0 = a \cdot (0 + 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0$$
   נחבר לשני האגפים את $-(a \cdot 0)$ ונקבל:
   $$a \cdot 0 - (a \cdot 0) = a \cdot 0 + a \cdot 0 - (a \cdot 0)$$
   $$0 = a \cdot 0 + 0$$
   $$\boldsymbol{a \cdot 0 = 0}$$

4. לכל סקלר $a \in F$ מתקיים $(-1) \cdot a = -a$
הוכחה:
מיחידות האיבר הנגדי מספיק שנראה: $(-1) \cdot a + a = 0$. כלומר, שאכן הביטוי $(-1) \cdot a$ הוא הנגדי של a (סכומם נותן לנו 0)

$$(-1) \cdot a + a = (-1) \cdot a + 1 \cdot a = (-1+1) \cdot a = 0 \cdot a = 0$$

5. אין מחלקי אפס – אם $a, b \in \mathbb{F}$ כך ש: $ab = 0$ אז $b = 0 \vee a = 0$. כלומר, אם מכפלה שווה לאפס, לפחות אחד מהמוכפלים חייב להיות אפס, לא ייתכן ששניהם שונים מאפס.
הוכחה:
אם $a \cdot b = 0$ ו-$a \neq 0$ נרצה להראות שבהכרח $b = 0$.
נכפול את שני האגפים ב-a^{-1}:

$$b = 1 \cdot b = (\boldsymbol{a^{-1}} \cdot \boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{b} = \boldsymbol{a^{-1}} \cdot (\boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{b}) = a^{-1} \cdot 0 = 0$$
$$\Rightarrow b = 0$$

מספרים מרוכבים

פעולות חשבון עם מרוכבים

$$\mathbb{C} = \{a + ib | a, b \in \mathbb{R}\}$$

נשים לב כי עבור $z = a + ib$:

- $i = \sqrt{-1}$
- a – החלק הממשי: $Re(z) = a$
- b – החלק המדומה: $Im(z) = b$

חיבור מרוכבים – מתבצע בעזרת סכימה של החלקים הממשיים בנפרד והחלקים המדומים בנפרד:

$$(a + ib) + (c + id) = (a + c) + i(b + d)$$

כפל מרוכבים – בעזרת חוק הפילוג, נפתח ונגיע לכך ש:

$$(a + ib) \cdot (c + id) = (ac - bd) + i(ad + cb)$$

איברים מעניינים:

- איבר ניטרלי לחיבור – $0 + 0i = 0$
- איבר ניטרלי לכפל – $1 + 0i = 1$
- איבר נגדי – האיבר הנגדי ל-$a + ib$ יהיה $-a - ib$.
- איבר הופכי - $(a + ib)^{-1} = \frac{a-ib}{(a+ib)(a-ib)} = \frac{a-ib}{a^2+b^2}$

ערך מוחלט וצמוד

צמוד:

עבור $z = a + ib$ נגדיר את הצמוד להיות $\bar{z} = a - ib$. גאומטרית, נבצע שיקוף ביחס לציר הממשי.

ערך מוחלט:

הערך המוחלט של מספר מרוכב יהיה המרחק שלו מהראשית $|z| = \sqrt{a^2 + b^2}$.

$$z \cdot \bar{z} = a^2 + b^2 = |z|^2$$

חישוב האיבר ההופכי - $z^{-1} = \frac{1}{z} = \frac{\bar{z}}{z \cdot \bar{z}} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$

תכונות:

1. $\overline{z+w}=\bar{z}+\bar{w}$
2. $\overline{z\cdot w}=\bar{z}\cdot\bar{w}$
3. $|z|\geq 0$ ובפרט $|z|=0$ אמ"ם $z=0$ (בראשית הצירים).
4. $|z\cdot w|=|z|\cdot|w|$
5. $|z+w|\leq|z|+|w|$

תכונות 1-2 מכונות לינאריות הצמוד.
תכונות 3-5 מכונות נורמות, ניתן לקחת קבוצה ולהגדיר עליה נורמות, וכך נוכל לחשב מרחקים.

עוד תכונות (סלע פריד):

טענה יהי $z_1,z_2\in\mathbb{C}$. אז מתקיים

1. $\overline{z_1\pm z_2}=\overline{z_1}\pm\overline{z_2}$.
2. $\overline{z_1\cdot z_2}=\overline{z_1}\cdot\overline{z_2}$.
3. אם $z_2\neq 0$ אז $\overline{\frac{z_1}{z_2}}=\frac{\overline{z_1}}{\overline{z_2}}$.
הוכחה שיעורי בית.

טענה יהי $z=a+bi\in\mathbb{C}$. אז

1. $\overline{\overline{z}}=z$.
2. $z\in\mathbb{R}$ אמ"מ $\overline{z}=z$.
3. $z\overline{z}=|z|^2$.
4. $z+\overline{z}=2\mathrm{Re}(z)$.
5. $z-\overline{z}=2\mathrm{Im}(z)i$.
6. $\mathrm{Re}(z)\leq|z|$.

הצגה פולארית

הצגה פולארית:

לעיתים נעדיף לייצר מספר מרוכב בהצגה פולארית. הצגה זו מתבססת על:

- r – המרחק מראשית הצירים של הנקודה.
$$r=\sqrt{a^2+b^2}=|z|$$
$$a=rcos\theta,b=rsin\theta$$
- θ – הזווית שנוצרת בין הישר אשר מחבר את הנקודה עם ראשית הצירים לבין הישר הממשי.
$$\theta=\arctan\left(\frac{b}{a}\right)+\pi k,k=\{0,1\}$$
הזווית יכולה להיות ברביע הראשון, או ברביע השלישי (ואז נוסיף לפתרון π).

מעבר מהצגה קרטזית לפולארית:

על מנת לעבור מהצגה קרטזית לפולארית, נצטרך לחשב את r,θ ואז נייצג בצורה הבאה:

$$z=a+ib=rcos\theta+irsin\theta=r(cos\theta+isin\theta)=rcis\theta=re^{i\theta}$$

ההצגה האחרונה $re^{i\theta}$ מגיעה מנוסחת אוילר, כאשר ידוע כי $e^{i\theta}=cos\theta+isin\theta$.

מעבר מהצגה פולארית לקרטזית:

$$z=re^{i\theta}=r(cos\theta+isin\theta)=rcos\theta+isin\theta$$

תכונות:

- $\overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$
- $|re^{i\theta}| = r$
- $re^{i\theta} \cdot pe^{i\varphi} = rpe^{i(\theta+\varphi)}$

שורשים מרוכבים

העלאה בחזקה:

$$(rcis\theta)^n = r^n cis(n\theta)$$
$$\left(re^{i\theta}\right)^n = r^n e^{in\theta}$$

נוסחת דה-מואבר:

$$\sqrt[n]{re^{i\theta}} = \{\sqrt[n]{r}e^{i\frac{\theta+2\pi k}{n}} | 0 \le k < n-1\}$$

דוגמה נמצא את כל השורשים המרוכבים של המשוואה $z^3 = -8$. לשם כך, נבחין כי $a = -8 = 8e^{i\pi}$. מטענה הקודמת נובע כי פתרונות המשוואה נתונים על ידי

$$z_0 = 2e^{i\frac{\pi}{3}}, z_1 = 2e^{i\pi}, z_2 = 2e^{i\frac{5\pi}{3}}.$$

נעבור להצגה קרטזית ונקבל

$$z_0 = 1 + \sqrt{3}i, z_1 = -2, z_2 = 1 - \sqrt{3}i.$$

1 – מערכת משוואות לינארית

חלק זה עוסק בעבודה בסיסית עם מערכת משוואות לינאריות, והייצוג שלהן במטריצות על מנת לפתור אותן בצורה נוחה. פה מפתחים את הטכניקה לעבוד עם מטריצה ככלי עזר (דירוג מטריצות). לאחר מכאן מדברים על המרחב הבסיסי ביותר, מרחב ה-n-יות ולומדים את כל המושגים הבסיסיים: צירוף לינארי, תלות לינארית, פרישה ובסיס.

מערכת משוואות לינארית ומטריצות

מערכת משוואות לינארית (ממ"ל)

משוואת ישר בסיסית במישור $y = ax + b$ כוללת משתנים (x, y) ומקדמים (a, b). ניתן לרשום אותה גם בצורה הבאה: $-ax + y = b$.

משוואה לינארית – משוואה לינארית מעל שדה $\mathbb{F}$ ב-n משתנים היא משוואה מהצורה הבאה:

$$a_1x_1 + a_2x_2 + \cdots + a_nx_n = b$$

נדבר על משוואות בעיקר מעל הממשיים והמרוכבים, רק מעל שדות באופן כללי.

מה יש לנו כאן:

- $a_1, a_2, \dots, a_n$ – מקדמי המשוואה
- b – מקדם חופשי
- $x_1 x_2, \dots, x_n$ – משתנים

כולם יכולים לקבל כך ערך סקלרי מתוך השדה $\mathbb{F}$.

מערכת משוואות לינארית - נגדיר מערכת של m משוואות לינאריות ב-n נעלמים מעל השדה $\mathbb{F}$ בצורה הבאה:

$$\begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & = & \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n & = & b_m \end{pmatrix}$$

עבור איבר a_{ij}:

- i – מייצג את מספר המשוואה (השורה)
- j – מייצג את מספר המשתנה (העמודה)

נשים לב כי יעניין אותנו לקחת רק את מקדמי המערכת ואת המקדמים החופשיים.

הצגה על ידי מטריצה

נגדיר מטריצות של מערכת משוואות לינאריות בעלת m משוואות ו-n נעלמים.

מטריצת מקדמים מורחבת:

טבלה שבה m שורות ו-n+1 עמודות (למשתנים + למקדמים החופשיים), כאשר לכל $1 \le i \le m, 1 \le j \le n$ הרכיב שבשורה ה-i ובעמודה ה-j הוא מקדם של המשתנה x_j מהמשוואה ה-i.
בעמודה ה-n+1 נרשום את המקדמים החופשיים בהתאם למשוואות.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & a_{22} & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{pmatrix}$$

מטריצת מקדמים מצומצמת:

במטריצה זו לא מופיעה עמודת המקדמים החופשיים, לפעמים נעדיף לעבוד איתה.

פתרון ממ"ל

פתרון של מערכת משוואות לינאריות ב-n נעלמים מעל השדה $\mathbb{F}$ הוא סדרה של n סקלרים מהשדה (n-יה):

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$$

כך שכאשר נחליף כל משתנה במערכת בערך המתאים לו מהסדרה, נקבל **שכל המשוואות מתקיימות**. את אוסף הפתרונות של מערכת נייצג בעזרת S.

פעולות שורה אלמנטריות (פש"א ☺):

3 פעולות אותן נוכל לבצע על מטריצת מקדמים (מצומצמת או מורחבת).

שם	סימון	משמעות
החלפת שורה	$R_i \leftrightarrow R_j$	החלפת השורה ה-i והשורה ה-j
כפל שורה בסקלר	$R_i \leftarrow \lambda R_i, 0 \neq \lambda \in \mathbb{F}$	מכפלת כל רכיבי השורה ה-i בסקלר λ
חיבור שורות	$R_i \leftarrow R_i + \lambda R_j$	הוספת הרכיב מהשורה ה-j לאחר מכפלתו בסקלר λ לרכיב המתאים מהשורה ה-i

טענה (פש"א הן הפיכות):

פעולות שורה אלמנטריות הן הפיכות, כלומר לכל פעולה אלמנטרית קיימת פעולה הופכית אשר מחזירה למטריצה המקורית.

מטריצות שקולות שורה (ש"ש) – זוג מטריצות מקדמים A, B נקראת שקולות שורה, ויסומנו כ: $A \sim B$, אם **קיימת סדרה (סופית) של פעולות שורה אלמנטריות** המעבירה את המטריצה A אל המטריצה B.

טענה (יחס שקילות מטריצות): היחס של שקילות מטריצות הוא יחס שקילות (רפלקסיבי, סימטרי, טרנזיטיבי).

משפט (אוסף פתרונות של מטריצות ש"ש): למערכות שמייצגות מטריצות שקולות שורה יש את אותו אוסף הפתרונות.

דירוג מטריצות ושיטת גאוס

איבר מוביל (פותח) – איבר מוביל בשורה ה-i של מטריצה הינו האיבר השמאלי ביותר שאינו שווה לאפס.

מטריצה מדורגת:

1. כל שורות ה-0 שלה נמצאות בתחתית.
2. האיבר המוביל של כל שורה נמצא יותר ימינה מהאיבר המוביל של השורה שמעליה.

מטריצה מדורגת קנונית:

1. המטריצה מדורגת.
2. כל האיברים המובילים שלה שווים ל-1.
3. כל שאר האיברים בעמודה של איבר מוביל שווים ל-0.

טענות נוספות:

1. כל מטריצה שקולת שורה למטריצה מדורגת קנונית אחת ויחידה. אם $A \sim K$ ו-K מטריצה מדורגת נגיד ש-K היא הצורה הקנונית של A. (בשלב זה עדיין לא הוכחנו את זה, רק איפשהו בשיעור 11)
2. תהי מטריצה $A \in \mathbb{R}^{m \times n}$. אם $m > n$ אז בצורה המדורגת קנונית ישנן בהכרח שורות אפסים. (תרגול 3 כולל הוכחה).

אלגוריתם אלימנציית גאוס:

כל עוד המטריצה לא מדורגת קנונית נבצע:

1. נחפש את העמודה הראשונה ה"בעייתית", זה יכול לקרות מכמה סיבות:
   a. האיבר המוביל אינו 1.
   b. יש איבר מוביל שנמצא שמאלה יותר מאיבר מוביל של אחת השורות שמעליו.
   c. יש איבר מוביל שאין בעמודה שלו רק 0.

   נסמן את העמודה הבעייתית ב-j.
   נבחר שורה כלשהי שהאיבר המוביל שלה הוא בעמודה ה-j ונסמנה p. נחליף את השורה ה-p עם השורה העליונה ביותר i שמתחת לשורה עם האיבר המוביל האחרון (שווה ל-1) משמאל.
2. נאתחל את האיבר המוביל ל-1 - נבצע $R_i \leftarrow a_{ij}^{-1}R_i$ (האיבר המוביל הפותח בשורה ה-i כעת יהיה 1).
3. נאפס את העמודה - נבצע לכל שורה שהיא לא i: $R_k \leftarrow R_k - a_{kj}R_i$ (נדאג שכל האיברים בעמודה יחד עם האיבר המוביל, יהיו 0 פרט לאיבר המוביל).

מושגים:

- משתנה מוביל – משתנה שבצורה המדורגת מופיע בעמודה שלו איבר מוביל.
- משתנה חופשי – משתנה שבצורה המדורגת לא מופיע בעמודה שלו איבר מוביל.

מערכת הומוגנית

הגדרה - המערכת $(A|0)$ נקראת מערכת הומוגנית. זו מערכת שבה כל המקדמים החופשיים מתאפסים.

- מערכת הומוגנית תיוצג באמצעות **מטריצת המקדמים המצומצמת**. כיוון שעמודת המקדמים החופשיים כולה אפסים לפני, אחרי, ובמהלך הדירוג.
- במערכת יש תמיד לפחות פתרון אחד (אין שורות סתירה בכלל). הפתרון היחיד הזה נקרא **הפתרון הטריוויאלי** ובו כל המשתנים מתאפסים - $\vec{0}$.
- אם **אין משתנים חופשיים** - נסיק כי יש **פתרון אחד והוא הפתרון הטריוויאלי** (n-יית האפס).
- אם **יש משתנים חופשיים** - נסיק כי **קיים פתרון לא טריוויאלי** (n-יה שלא כל האיברים בה אפס).

הערה כשפותרים מערכת הומוגנית לא נהוג לכתוב את עמודת המקדמים החופשיים, שהרי הם כולם אפסים ולא משתנים במהלך הדירוג. לכן, במקום $\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 3 & 0 \end{array}\right)$ נכתוב $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$.

תרגיל נתבונן במערכת (בכתיב מטריצות)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & 3 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

התלויה בפרמטר $\lambda \in \mathbb{R}$ (כלומר, לכל λ מתקבלת מערכת שונה). עבור אילו ערכי $\lambda \in \mathbb{R}$ אין למערכת פתרון, קיים למערכת פתרון יחיד, קיימים אינסוף פתרונות. אם קיימים פתרונות, מצאו אותם.

פתרון נדרג, ואם נאלץ לחלק בביטוי שעלול להיות אפס, נבדוק את הערכים המאפסים בנפרד.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & 3 \\ 1 & 1+\lambda & 1 & 3 \\ 1+\lambda & 1 & 1 & 3 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3-(1+\lambda)R_1]{R_2 \to R_2 - R_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1+\lambda & 3 \\ 0 & \lambda & -\lambda & 0 \\ 0 & -\lambda & -2\lambda-\lambda^2 & -3\lambda \end{array}\right)$$

כעת אנו רוצים לחלק את השורה השנייה ב־λ ולכן נבדוק את המקרה $\lambda = 0$. במקרה זה המטריצה הינה מהצורה

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

ואנו מסיקים כי קבוצת הפתרונות הינה

$$\left\{ \begin{pmatrix} 3-t-s \\ t \\ s \end{pmatrix} \;\middle|\; s,t \in \mathbb{R} \right\}.$$

אנו יכולים להניח כעת כי $\lambda \neq 0$. נמשיך את הדירוג:

$$\xrightarrow[R_3\to -\frac{1}{\lambda}R_3]{R_2\to\frac{1}{\lambda}R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1+\lambda&3\\0&1&-1&0\\0&1&2+\lambda&3\end{array}\right)\xrightarrow[R_3\to R_3-R_2]{R_1\to R_1-R_2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2+\lambda&3\\0&1&-1&0\\0&0&3+\lambda&3\end{array}\right)$$

כעת אנו רוצים לחלק את השורה השלישית ב־$3+\lambda$ ולכן נבדוק את המקרה $\lambda=-3$. במקרה זה השורה השלישית הינה מהצורה $(0\ 0\ 0\ |\ 3)$, כלומר התקבלה שורת סתירה ולכן אין פתרונות במקרה זה. אנו יכולים להניח כעת כי $\lambda\neq -3$. נמשיך את הדירוג:

$$\xrightarrow{R_3\to\frac{1}{3+\lambda}R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&2+\lambda&3\\0&1&-1&0\\0&0&1&\frac{3}{3+\lambda}\end{array}\right)\xrightarrow[R_2\to R_2+R_3]{R_1\to R_1-(2+\lambda)R_3}\left(\begin{array}{ccc|c}1&0&0&\frac{3}{3+\lambda}\\0&1&0&\frac{3}{3+\lambda}\\0&0&1&\frac{3}{3+\lambda}\end{array}\right)$$

אנו מסיקים כי למערכת הפתרון היחיד $\begin{pmatrix}\frac{3}{3+\lambda}\\\frac{3}{3+\lambda}\\\frac{3}{3+\lambda}\end{pmatrix}$.

נסכם: עבור $\lambda=0$ יש למערכת אינסוף פתרונות:

$$\left\{\begin{pmatrix}3-t-s\\t\\s\end{pmatrix}\ \middle|\ s,t\in\mathbb{R}\right\}.$$

עבור $\lambda=-3$ אין למערכת פתרון.
עבור $\lambda\neq 0,-3$ יש למערכת פתרון יחיד

$$\begin{pmatrix}\frac{3}{3+\lambda}\\\frac{3}{3+\lambda}\\\frac{3}{3+\lambda}\end{pmatrix}.$$

המרחב $\mathbb{F}^n$

מרחב ה-n-יות (המרחב הוקטורי $\mathbb{F}^n$)

המרחב הוקטורי $\mathbb{F}^n$ - המרחב הוא אוסף כל הסדרות בנות n רכיבים מהשדה. מוגדר על ידי:

הקבוצה $\left(\begin{matrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{matrix}\quad a_1,\dots,a_n\in\mathbb{F}\right)$ (כלומר, תמיד אנחנו נדבר על **n רכיבים בכל n-יה**).

יחד עם הפעולות הבאות:

- חיבור – מתבצע איבר-איבר, רק בין n-יות שהן מאותו הגודל.
- כפל בסקלר – גם מתבצע איבר-איבר, כפל בסקלר מהשדה.

שוויון n-יות – נאמר ששתי n-יות שוות אמ"מ יש להן מספר זהה של רכיבים, והרכיבים שווים זה לזה בהתאמה.

סימונים שונים ל-n-יה - $\underset{\rightarrow}{a}, \underline{a}, \bar{a}, \vec{\boldsymbol{a}} \in \mathbb{F}^n$

המרחב מקיים תכונות (המגיעות מהשדה עצמו):

- סגירות.
- חילוף.
- קיבוץ.
- פילוג.
- איבר נייטרלי לחיבור - $\exists\vec{0}=\begin{pmatrix}0\\\vdots\\0\end{pmatrix}=\forall\vec{a}\in\mathbb{F}^n=\vec{o}+\vec{a}=\vec{a}+\vec{o}=\vec{a}$
- איבר נייטרלי לכפל בסקלר - $\forall\vec{a}\in\mathbb{F}^n=1_{\mathbb{F}}\cdot\vec{a}=\vec{a}$
- איבר נגדי - $\forall\vec{a}\in\mathbb{F}^n=\begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix}\exists\overrightarrow{-a}\in\mathbb{F}^n=\overrightarrow{-a}+\vec{a}=\vec{o},\overrightarrow{-a}=(-1_{\mathbb{F}})\cdot\vec{a}$
- אין איבר הופכי כי אי אפשר לחלק!

עוד קצת הבהרות:

- קבוצת n-יות נסמן באופן הבא: $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_m\} \subseteq \mathbb{F}^n$. הקבוצה מוכלת במרחב ה-n-יות כיוון שהיא מכילה תת-קבוצה של n-יות מסוימות.
- נשים לב כי n – **כמות הרכיבים בכל n-יה** (מכאן שמה), m – **כמות ה-n-יות**, מספר האיברים בקבוצה.

צירוף לינארי

צירוף לינארי (צ"ל) - נאמר ש-$\vec{u} \in \mathbb{F}^n$ הינה צירוף לינארי של קבוצת ה-n-יות $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{F}^n$ אם קיימים מקדמים (סקלרים) $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים $\vec{u} = \lambda_1 \cdot \vec{v}_1 + \dots + \lambda_k \cdot \vec{v}_k = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot v_i$.

הערות:

- צ"ל טריוויאלי – צ"ל שבו כל הסקלרים הם אפס.
- צ"ל שאינו טריוויאלי – צ"ל שבו לא כל הסקלרים הם אפס.
- צ"ל שמתאפס – צ"ל שהוא בפועל n-ית האפס, תוצאת החיבור תיתן לנו בסוף את $\vec{0}$.

פרישה

מרחב נפרש (פרישה) - המרחב הנפרש על ידי קבוצת ה-n-יות $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{F}^n$ הוא קבוצת כל ה-n-יות שהן צירוף לינארי של $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k$.

$$Span(\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\}) = \{\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \cdot \vec{v}_i | \lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k \in \mathbb{F}\}$$

- כלומר, הפרישה מכילה את **אוסף כל הצירופים הלינאריים האפשריים של קבוצת ה-n-יות** (קבוצה של צירופים לינאריים – לקחנו כמה n-יות ומצאנו את כל הצירופים הלינאריים שלהם, אז כבה אנחנו יוצרים עם מעין "מניפה" מרחב שלם).
- הבסיס הסטנדרטי בבסיס 3 הוא $\mathbb{R}^3 = Sp\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ – זו הדרך הכי פשוטה לקבל את כל המרחב $\mathbb{R}$.
- נשים לב כי מתקיים $\vec{u} \in Sp(S) \Leftrightarrow Sp(S \cup \{\vec{u}\}) = Sp(S)$ (תרגול 3).

קבוצה פורשת - אומרים שהקבוצה $A = \{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{F}^n$ **פורשת את** $\mathbb{F}^n$ אם $Span(A) = \mathbb{F}^n$.

סימון – יהי $v = \begin{pmatrix}a_1\\\vdots\\a_n\end{pmatrix} \in \mathbb{F}^n$, נאמר ש-$a_k$ הוא הקוארדינטה ה-k של v ונסמן $[v]_k = a_k$.

בשביל לבדוק האם קבוצה $A \subseteq \mathbb{F}^n$ היא פורשת:

- נבנה מטריצה שה-n-יות $\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \dots, \vec{v}_k\} \subseteq \mathbb{F}^n$ רשומות בעמודותיה.
- נדרג את המטריצה לצורה מדורגת (לאו דווקא קנונית).
- נבדוק האם **מתקבלת שורת אפסים** – אם כן בהכרח יש n-יה כלשהי שעבורה נוכל לבנות שורת סתירה. נסיק כי הפרישה לא מכילה את כל ה-n-יות האפשריות, לכן **הקבוצה אינה פורשת**.
- אם במטריצה יש יותר שורות מעמודות ($m < n$)
  - בצורה מדורגת יש לנו לכל היותר איבר מוביל אחד בעמודה.
  - לכן מספר האיברים המובילים יהיה לכל היותר m.
  - בהכרח ישנה שורה ללא איבר מוביל וזוהי בהכרח שורת אפסים.
  - **כלומר, אם $m < n$ הקבוצה לא פורשת ($\begin{pmatrix}x & x\\x & x\\x & x\end{pmatrix}$). קבוצה שבה יש פחות מ-$n$ n-יות.**

תלות לינארית

קבוצה תלויה לינארית (ת"ל) – נאמר שקבוצת n-יות $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\}\subseteq\mathbb{F}^n$ הינה תלויה לינארית (ת"ל), אם קיימים מקדמים $\lambda_1,\lambda_2,\dots,\lambda_k\in\mathbb{F}$ **שלא כולם 0**, כך ש – $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\vec{v}_i=\vec{0}$ כלומר קיים **צ"ל לא טריוויאלי שלה שמתאפס** (נסיק שיש לנו עוד צ"ל כאלו שמאפסים).

- נשים לב, אם קבוצה ת"ל אז בייצוג שלה במטריצת עמודות, יש פתרון כלשהו שהוא שונה מ-0 (לא טריוויאלי).
- $0\in Span(\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m\})$, צ"ל שמתאפס שייך לפרישה של הקבוצה.
- ניתן גם לומר שקבוצה היא ת"ל אם אחת מה-n-יות היא צ"ל של ה-n-יות האחרות בקבוצה (תרגול 3):

$$\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot v_i=0\Leftrightarrow v_1=\frac{1}{\lambda_1}(-\lambda_2v_2-\lambda_3v_3-\dots-\lambda_kv_k)$$

קבוצה בלתי תלויה לינארית (בת"ל) – אחרת, אם לכל בחירת מקדמים שניקח, שעבורם $\sum_{i=1}^{k}\lambda_i\cdot\vec{v}_i=\vec{0}$ **בהכרח כולם 0**, נאמר שהקבוצה בלתי תלוי לינארית (בת"ל). כלומר, **רק הצ"ל הטריוויאלי מתאפס**.

הערות:

- אם n-יות הן פתרונות של מערכת אז גם צירוף לינארי שלהן הוא פתרון (מהתרגול)
- אם בקבוצה אף אחת מה-n-יות אינה צ"ל של אחרות אז היא בת"ל.

בשביל לבדוק האם קבוצה $A\subseteq\mathbb{F}^n$ היא תלויה לינארית:

- נבנה מטריצה **הומוגנית (מטריצת מקדמים מצומצמת)** שה-n-יות $\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_k\}\subseteq\mathbb{F}^n$ רשומות בעמודותיה.
- נבדוק האם קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית שהיא מייצגת.
- אם בתום הדירוג, **ישנו משתנה חופשי** – קיים פתרון לא טריוויאלי ולכן היא **ת"ל**.
- אם **אין משתנה חופשי** – קיים רק הפתרון הטריוויאלי ולכן היא **בת"ל**.
- אם במטריצה יש יותר עמודות משורות $(m>n)$
  - בצורה מדורגת בכל שורה יש לכל היותר איבר מוביל אחד.
  - במקסימום יש n איברים מובילים במטריצה כולה, אבל יש m עמודות.
  - לכן בהכרח יש עמודה ללא איבר מוביל, כלומר עם משתנה חופשי (לפחות אחת).
  - ישנו משתנה חופשי – לכן קיים פתרון לא טריוויאלי ולכן הקבוצה **ת"ל**.
  - **כלומר, אם $m>n$ הקבוצה ת"ל ($\begin{pmatrix}x&x&x\\x&x&x\end{pmatrix}$). קבוצה שבה יש יותר מ-$n$ m-יות.**

נשים לב כי **הקבוצה הריקה: בת"ל באופן ריק** – לא קיים צ"ל לא טריוויאלי שלה שמתאפס.

תרגיל בדקו אם הוקטורים $\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^2$ בת"ל.

פתרון יהיו $\alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}$. אז

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff\begin{pmatrix}\alpha_1-\alpha_2\\\alpha_1+\alpha_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\iff$$

$$\begin{aligned}\alpha_1-\alpha_2&=0\\\alpha_1+\alpha_2&=0\end{aligned}$$

כלומר, התקבלה מערכת משוואות הומוגנית. נפתור אותה

$$\begin{pmatrix}1&-1\\1&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to R_2-R_1}\begin{pmatrix}1&-1\\0&2\end{pmatrix}\xrightarrow{R_2\to\frac{1}{2}R_2}\begin{pmatrix}1&-1\\0&1\end{pmatrix}\xrightarrow{R_1\to R_1+R_2}\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

נסיק כי למערכת הפתרון היחיד $\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$. כלומר, הוקטורים בת"ל.

סיכום כולל – המרחב $\mathbb{F}^n$

איך בודקים - שורות	איך בודקים - עמודות	מושג
למה? *אם קבוצה פורשת, אז כל n-יה היא צ"ל שלה. לכן, אם נבנה מטריצה שבשורותיה רשומים איברי הקבוצה, ונוסיף עוד שורה שבה רשומה n-יה כללית, לאחר דירוג נוכל לאפס את ה-n-יה הכללית.* *לשם כך, נרצה לקבל איבר מוביל בכל אחת מעמודות המטריצה. כלומר, אין משתנים חופשיים.*	*1 - למה?* *כדי שקבוצה תהיה פורשת, אנחנו רוצים להימנע משורת אפסים.* *אם יש שורת אפסים, יש אפשרות לבנות שורת סתירה עבור n-יה כלשהי בעמודת המקדמים החופשיים (אנחנו שמים שם ערכים כרצוננו), כלומר אין עבורה פתרון.* *אז היא אינה צ"ל אפשרי של הקבוצה! אבל אנו זקוקים לכל הצ"ל האפשריים בפרישה ולכן הקבוצה לא פורשת.* *2 – למה?* *בצורה מדורגת בכל עמודה יש לכל היותר איבר מוביל אחד. לכן מספר האיברים המובילים יהיה לכל היותר m, אבל יש n שורות. בהכרח ישנה שורה ללא איבר מוביל וזוהי בהכרח שורת אפסים.* *לכן הקבוצה **לא פורשת**.* $\begin{pmatrix} x & x \\ x & x \\ x & x \end{pmatrix}$	(קבוצה) **קבוצה פורשת (את $\mathbb{F}^n$)**
	1 - למה? *אנחנו מדברים על מטריצת מקדמים מצומצמת למערכת הומוגנית (עמודת המקדמים החופשיים היא כולה אפסים ולכן לא נרשום אותה).* *כדי שקבוצה תהיה תלויה לינארית צריך שיהיה קיים פתרון לא טריוויאלי למערכת ההומוגנית שהיא מייצגת.* *אם יש משתנה חופשי – קיים פתרון לא טריוויאלי ולכן היא ת"ל.* *אין משתנה חופשי – קיים רק הפתרון הטריוויאלי ולכן היא בת"ל.* *2 – למה?* *בצורה מדורגת בכל שורה יש לכל היותר איבר מוביל אחד. יש n איברים מובילים במטריצה כולה, אבל יש m עמודות. לכן בהכרח יש עמודה ללא איבר מוביל – כלומר עם משתנה חופשי.* *יש משתנה חופשי – קיים פתרון לא טריוויאלי ולכן **היא ת"ל**.* $\begin{pmatrix} x & x & x \\ x & x & x \end{pmatrix}$	(קבוצה) ת"ל – **תלויה לינארית** ובת"ל – **בלתי תלויה לינארית**

בסיס

<u>בסיס</u> – קבוצה של n-יות $A \subseteq \mathbb{F}^n$ נקראת בסיס אם היא **גם פורשת (את $\mathbb{F}^n$) וגם בת"ל**.

<u>הבסיס הסטנדרטי</u> – הבסיס הסטנדרטי ב-$\mathbb{F}^n$ הוא:

$$\left\{\vec{e}_1 = \begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \vec{e}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \vec{e}_n = \begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}\right\} = \{\vec{e}_j\}_{j=1}^n = \left(\vec{e}_j\right)_i = \begin{cases}1 & i = j\\ 0 & i \neq j\end{cases}$$

- נראה שזו אכן קבוצה פורשת - כל n-יה כללית ניתן לייצג כצ"ל לינארי של איברי הקבוצה (זה מקביל לבניית מטריצה שבה נחפש לקבל שאין שורת אפסים):

$$\begin{pmatrix}c_1\\c_2\\\vdots\\c_n\end{pmatrix} = c_1\begin{pmatrix}1\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + c_2\begin{pmatrix}0\\1\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \cdots + c_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\1\end{pmatrix}$$

- נראה שזו אכן קבוצה בת"ל – רק הצ"ל הטריוויאלי מתאפס.

<u>נשים לב כי **בבסיס של $\mathbb{F}^n$ יש בדיוק n איברים**:</u>

- אם יהיו יותר מ-n איברים, מתקיים $m > n$ והקבוצה לא בת"ל.
- אם יהיו פחות מ-n איברים, מתקיים $m < n$ והקבוצה לא פורשת.

הערה – **לאותו מרחב קיימים בסיסים שונים**, אך בכולם אותו מספר n-יות.

משפטים (שיעור 8):

משפט - תהי $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m\}\subseteq\mathbb{F}^n$, אז הטענות הבאות שקולות זו לזו:

1. A היא בסיס של $\mathbb{F}^n$.
2. A קבוצה פורשת מזערית (אם נוריד ממנה איבר, אז היא כבר **לא תהיה פורשת**).
3. A קבוצה בת"ל מירבית (אם נוסיף לה איבר, היא כבר **לא תהיה בת"ל**).

מסקנה - תהי $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m\}\subseteq\mathbb{F}^n$, אם שתיים מבין שלושת הטענות הבאות מתקיימות, אז היא בסיס ובהכרח כל שלושת הטענות מתקיימות:

1. A קבוצה בת"ל.
2. A קבוצה פורשת.
3. ב-A יש n איברים.

מסקנה – קבוצה בת n איברים ב-$\mathbb{F}^n$ היא פורשת $\Leftrightarrow$ היא בת"ל. כלומר, אם יש קבוצה של n n-יות, או שהיא פורשת ובת"ל ביחד, או שהיא לא זה ולא זה.

משפט - הקבוצה $A=\{\vec{v}_1,\vec{v}_2,\dots,\vec{v}_m\}\subseteq\mathbb{F}^n$ היא בסיס של $\mathbb{F}^n$ $\Leftrightarrow$ לכל $\vec{u}\in\mathbb{F}^n$ קיים צ"ל יחיד של איברי A ששווה לה.

2 - מטריצות

חלק זה עוסק במטריצות! כל מה שאפשר לעשות עם מטריצות, ובעיקר כפל מטריצות (טכניקה). עוברים על שחלוף של מטריצות, סוגים שונים וחשובים של מטריצות – ריבועיות, אלמנטריות, והפיכות. כמעט כל סוגי המטריצות הללו מוזכרים בהמשך ומשתמשים בהן המון, אז מכאן צריך להרגיש בנוח עם כפל של מטריצות, ועם זיהוי של מטריצה הפיכה, שמקיימת לא מעט תכונות שצריך לזכור!

מרחב המטריצות

הגדרות ותכונות

סימונים:

- נסמן מטריצה בסימונים הבאים: $Mat_{m\times n}(\mathbb{F}), \boldsymbol{M_{m\times n}}(\mathbb{F}), \mathbb{F}^{m\times n}$ את אוסף כל המטריצות מגודל $m\times n$, שיש בהן **m שורות ו- n עמודות**, ורכיביהן מהשדה $\mathbb{F}$.
- נסמן ב-$\boldsymbol{A_{ij}}$ את האיבר שנמצא בשורה ה-i-ית ובעמודה ה-j-ית של המטריצה A.

שוויון מטריצות – נאמר שזוג מטריצות שוות זו לזו אם יש להן את **אותו הגודל בדיוק, וכל רכיביהן שווים בהתאמה** (פש"א אינן רלוונטיות כאן, צריכה להיות התאמה מדויקת, שוכחים בהקשר הזה ממערכות משוואות).

פעולות:

- במרחב המטריצות נגדיר שתי פעולות: חיבור וכפל בסקלר. שתי הפעולות מתבצעות **איבר איבר**.
- חיבור – לא מוגדר על מטריצות **מסדרה שונה (לא מאותו הגודל)**!

תכונות של מרחב המטריצות:

1. סגירות – נובעת מההגדרה.
2. חוק החילוף – נובע מחילופיות בשדה.
3. חוק הקיבוץ – נובע מקיבוציות בשדה.
4. חוקי הפילוג:
   a. $\forall A,B\in M_{m\times n}(\mathbb{F}), \forall\lambda\in\mathbb{F}: \lambda(A+B)=\lambda A+\lambda B$
   b. $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}), \forall\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}: (\lambda_1+\lambda_2)A=\lambda_1 A+\lambda_2 A$
5. איבר נייטרלי לחיבור – מטריצת האפס, שבה כל הרכיבים הם איבר האפס מהשדה.
   $\exists 0\in M_{m\times n}(\mathbb{F}): \forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}): A+0=0+A=A$
6. איבר נייטרלי לכפל – איבר היחידה מהשדה.
   $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}): 1_{\mathbb{F}}\cdot A=A$
7. איבר נגדי – המטריצה הנגדית היא מטריצה שבה הרכיבים הם נגדיים בהתאמה.
   $\forall A\in M_{m\times n}(\mathbb{F}): -A=(-1_{\mathbb{F}})\cdot A$

הערות:

- מרחב המטריצות אינו שדה כי הכפל מוגדר בין מטריצה לסקלר ולא בין מטריצה למטריצה. לכן אין איבר הופכי.
- אם $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ נסמן ב-A_{*j} את העמודה ה-j-ית, וב-A_{i*} את השורה ה-i-ית.
- מטריצה מגודל $m\times 1$ היא m-יה שרשומה בעמודה.
- מטריצה מגודל $1\times n$ היא n-יה שרשומה בשורה.

כפל מטריצה ב-n-יה

הגדרה – תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ותהי $\vec{v}\in\mathbb{F}^n$, נגדיר את המכפלה $A\vec{v}$ כצ"ל של עמודות המטריצה כאשר מקדמי העמודות, הם הרכיבים של ה-n-יה $\vec{v}$.

$$A\vec{v}=v_1\vec{A}_1+v_2\vec{A}_2+\cdots+v_n\vec{A}_n\in\mathbb{F}^m$$

- נשים לב כי כפל מטריצה ב-n-יה מוגדר רק כאשר מספר העמודות המטריצה שווה למספר הרכיבים ב-n-יה. כלומר, צריך במקרה הזה n עמודות, והתוצאה תהיה בכמות השורות של המטריצה – m.
- הרכיב ה-i-י בתוצאה מתקבל מסכימת מכפלות איברי השורה ה-i-ית של המטריצה ב-n-יה.

<u>הצגה מטריציונית של מערכת משוואות</u> – עבור המשתנים $\vec{x}\in\mathbb{F}^n$, ועבור מקדמים חופשיים $\vec{b}\in\mathbb{F}^m$, נשים לב כי ניתן לייצג מערכת משוואות לינארית בצורה הבאה:

$$A_{m\times n}\cdot\vec{x}=\vec{b}$$

כפל מטריצות

<u>הגדרה</u> – מכפלת מטריצות $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ ו-$B\in M_{n\times l}(\mathbb{F})$ היא מטריצה מגודל $m\times l$. האיבר ה-ij במכפלה $A_{m\times n}\cdot B_{n\times l}$ מתקבל מסכימת **מכפלות מתאימות של השורה ה-i-ית של A והעמודה ה-j-ית של B**:

$$[AB]_{ij}=\sum_{k=1}^{n}A_{ik}B_{kj}=(A_{i1},A_{i2},\dots,A_{in})\begin{pmatrix}B_{1j}\\B_{2j}\\\vdots\\B_{nj}\end{pmatrix}$$

<u>כפל מטריצות לפי עמודות:</u>

- <u>כפל מטריצות</u> - העמודה ה-j-ית של המכפלה מתקבלת **ממכפלת המטריצה A בעמודה ה-j-ית של B**.

$$A\cdot\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ v_1 & v_2 & \dots & v_k\\ | & | & | & |\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}| & | & | & |\\ Av_1 & Av_2 & \dots & Av_k\\ | & | & | & |\end{pmatrix}$$

- <u>כפל מטריצה בעמודה (Av)</u> – עבור $A_{n\times m}$ ועמודה $v_{m\times 1}$, מטריצת המכפלה $\boldsymbol{Av_{n\times 1}}$ היא עמודה המתקבלת מהכפלת השורה ה-i-ית של A בעמודה v. בפועל, נקבל **צ"ל של עמודות A עם מקדמים מ-v**.

$$\begin{pmatrix}1&0&1\\0&2&0\\-1&-1&-1\end{pmatrix}_{3\times3}\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-3\end{pmatrix}_{3\times1}=\begin{pmatrix}1\cdot\mathbf{2}+0\cdot-\mathbf{1}+1\cdot-\mathbf{3}\\0\cdot\mathbf{2}+2\cdot-\mathbf{1}+0\cdot-\mathbf{3}\\-1\cdot\mathbf{2}\pm1\cdot-\mathbf{1}\pm1\cdot-\mathbf{3}\end{pmatrix}_{3\times1}=2\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0\\2\\-1\end{pmatrix}-3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=$$
$$=2C_1-1C_2-3C_3$$

<u>כפל מטריצות לפי שורות:</u>

- <u>כפל מטריצות</u> – השורה ה-i-ית של מטריצת המכפלה מתקבלת **ממכפלת השורה ה-i-ית של A במטריצה B**.

$$\begin{pmatrix}- & v_1 & -\\ - & v_2 & -\\ - & \dots & -\\ - & v_k & -\end{pmatrix}\cdot B=\begin{pmatrix}- & v_1B & -\\ - & v_2B & -\\ - & \dots & -\\ - & v_kB & -\end{pmatrix}$$

- <u>כפל שורה במטריצה (vA)</u> – עבור שורה $v_{1\times n}$ ומטריצה $A_{n\times m}$, מטריצת המכפלה $\boldsymbol{vA_{1\times m}}$ היא שורה המתקבלת מהכפלת השורה v בעמודה ה-i-ית של A. בפועל, נקבל **צ"ל של שורות A עם מקדמים מ-v**.

$$(1\quad 1\quad 2)_{1\times3}\cdot\begin{pmatrix}0&-1\\2&2\\1&-1\end{pmatrix}_{3\times2}=(\mathbf{1}\cdot0+\mathbf{1}\cdot2+\mathbf{2}\cdot1\quad \mathbf{1}\cdot-1+\mathbf{1}\cdot2+\mathbf{2}\cdot-1)_{1\times2}=$$
$$=1(0\quad -1)+1(2\quad 2)+2(1\quad -1)=1R_1+1R_2+2R_3$$

הערה הגדרנו מכפלת מטריצות AB עמודה־עמודה כצירוף לינארי של עמודות A לפי המקדמים של עמודות B. **באמצעות מושג השחלוף נקבל נקודת מבט נוספת:** שורות AB הינן עמודות $(AB)^t=B^tA^t$ ועמודות B^tA^t מתקבלות כצירופים לינארים של עמודות B^t לפי המקדמים בעמודות A^t. כלומר, השורה ה־i של AB מתקבלת כצירוף לינארי של שורות B לפי המקדמים בשורה ה־i של A.

דוגמה תהיינה $\begin{pmatrix}3&-3\\2&-2\end{pmatrix}$, $\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}$. אז, לפי ההגדרה,

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3\\2&-2\end{pmatrix}=\left(\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}\ \ \begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-3\\-2\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1&-1\\-6&6\end{pmatrix}$$

מצד שני:

$$\begin{pmatrix}1&-1\\-2&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&-3\\2&-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\cdot(3\ \ -3)+(-1)\cdot(2\ \ -2)\\(-2)\cdot(3\ \ -3)+0\cdot(2\ \ -2)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1\\-6&6\end{pmatrix}.$$

תכונות של כפל מטריצות:

1. סגירות – מורכבת כי המכפלה אינה תמיד מוגדרת. אין סגירות כאשר $m \neq n$. כאשר המטריצות עם מספר זהה של שורות ועמודות יש סגירות.
$$A_{n\times n}\cdot B_{n\times n}\in M_{n\times n}(\mathbb{F})$$
2. חוק החילוף – לא מתקיים בדר"כ.
3. חוק הקיבוץ – מתקיים:
$$(A_{m\times n}B_{n\times l})C_{l\times k}=A_{m\times n}(B_{n\times l}C_{l\times k})$$
4. חוקי הפילוג (חזרנו לחוק פילוג אחד, כי אנחנו מדברים רק על כפל מטריצות):
$$[(A_{m\times n}+B_{n\times l})C_{l\times k}]_{ij}=[AC+BC]_{ij}$$
5. איבר נייטרלי לכפל – איבר נייטרלי **לכפל מימין הוא I_n ולכפל משמאל הוא I_m.**
$$AI_n=I_mA=A$$
6. איבר הופכי – נראה בהמשך...

הערות:

- הכפל מוגדר אם ורק אם מספר העמודות של A שווה למספר השורות של B.
- **כפל מטריצות אינו חילופי** – פעמים רבות המכפלות אינן מוגדרות משני הצדדים, וגם אם מוגדרות הן מגדלים שונים, וגם אם הגדלים זהים לרוב אין חילופיות.
- מטריצות מתחלפות – מטריצות שמקיימות את חוק החילוף – $AB=BA$.
- בכפל מטריצות יש מחלקי אפס! כלומר יש מטריצות שאינן 0 שמכפלתן היא בן 0.
אם $A^2=0$ זה לא אומר ש-$A=0$.
- אין נוסחאות כפל מקוצר – כי אין חילופיות בכפל.

סוגי מטריצות

מטריצה משוחלפת (transposed)

הגדרה – אם $A\in M_{m\times n}$, אז המטריצה המשוחלפת (transposed) מתקבלת מהפיכת שורות A לעמודות (או עמודות A לשורות).
נסמן אותה בתור $A^T\in M_{n\times m}$.

תכונות:

1. $(A^T)^T=A$
2. $(A+B)^T=A^T+B^T$
3. $(\lambda A)^T=\lambda A^T$
4. $(AB)^T=B^TA^T$

מטריצה ריבועית וסוגיה השונים

מטריצה ריבועית – מטריצה נקראת ריבועית אם מס' השורות שלה שווה למס' העמודות. נסמן - $A\in M_{n\times n}(\mathbb{F})=M_n(\mathbb{F})$.

האלכסון הראשי – האלכסון הראשי של מטריצה ריבועית מורכב מהאיברים $\{a_{ii}\}_{i=1}^n$.

נגדיר סוגים שונים של מטריצות ריבועיות:

- סימטרית – A תיקרא סימטרית אם $A^T=A$.
  - האיברים באלכסון הראשי אינם משתנים בשחלוף – לא משנה מה נשים שם.
  - האיברים האחרים חייבים להיות זהים כי הם מתחלפים בשחלוף.

$$\begin{pmatrix}6 & X\\ X & 19\end{pmatrix}$$

- אנטי-סימטרית – A תיקרא אנטי-סימטרית אם $A^T=-A$.
  - האיברים באלכסון הראשי אינם משתנים בשחלוף, וצריכים להיות שווים לנגדי שלהם, כלומר הם 0.
  - שאר האיברים צריכים להיות נגדיים בהתאמה.

$$\begin{pmatrix}0 & X\\ -X & 0\end{pmatrix}$$

- מטריצת היחידה – I_n היא מטריצה שהאלכסון הראשי שלה כולו 1, וכל שאר האיברים הם 0.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

מטריצה זו היא **איבר נייטרלי ביחס לכפל מטריצות.**

- מטריצה סקלרית – סקלר מוכפל במטריצת היחידה - λI_n. על האלכסון יש λ ומחוץ לאלכסון אפסים.
- מטריצה אלכסונית – האלכסון הראשי מורכב מסדרה של סקלרים, $diag(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$.

נשים לב, כי מטריצת האפס היא המטריצה היחידה שהיא גם סימטרית וגם אנטי-סימטרית.

חזקה של מטריצה – עבור $n \in \mathbb{N}$ נגדיר $A^n = A \cdot A \cdot \dots \cdot A$ n פעמים.

- נשים לב כי $A^0 = I_n$
- ניתן להציב מטריצות בתור משתנים בפולינום – כאשר עבור חזקה 0 נשבץ את מטריצת היחידה.

מטריצה הפיכה

מטריצה הפיכה – מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ תיקרא הפיכה אם קיימת $B \in M_n(\mathbb{F})$ כך שמתקיים $AB = BA = I_n$. נסמן את המטריצה ההפיכה $B = A^{-1}$.

<u>הערה ("מספיק לבדוק רק צד אחד")</u> – הוכחנו כי **מספיק לבדוק רק צד אחד** $AB = I_n$ או $BA = I_n$:

טענה (שיעור 11) – אם A, B מקיימות $AB = I_n$ אז גם $BA = I_n$.

<u>תכונות (שיעור 11 ותרגול 6):</u>

1. <u>יחידות המטריצה ההופכית</u> - המטריצה ההופכית (במידה וקיימת) היא יחידה.
2. <u>כפל הפיכות הוא הפיך</u> - אם A, B הפיכות אז AB הפיכה, ומתקיים $(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$.
באופן כללי יותר, אם $A_1, \dots A_n$ אז גם $A_1 \cdot \dots \cdot A_n$ הפיכה ומתקיים: $(A_1 \cdot \dots \cdot A_n)^{-1} = A_n^{-1} \cdot \dots \cdot A_1^{-1}$.
3. <u>כלל הצמצום</u> – אם C הפיכה מתקיים $A = B \Leftrightarrow AC = BC \Leftrightarrow CA = CB$.
נשים לב כי מותר לצמצם רק אם C באותו צד (בשני האגפים). כלומר אם $AC = CB$ לא בהכרח $A = B$.
4. <u>משוחלפת הפיכה</u> – אם A הפיכה אז גם A^T הפיכה ומתקיים $(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T$.
5. אם ב-A יש שורה/עמודה של אפסים אז A אינה הפיכה.

מטריצה אלמנטרית

מטריצה $E \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת אלמנטרית אם היא מתקבל ממטריצת היחידה I לאחר **הפעלת פש"א אחת בלבד**.

נסמן עבור כל פש"א מטריצה אלמנטרית מתאימה:

1. $\boldsymbol{E_{i,j}^{(1)}}$ (החלפת שורה) - מתקבלת ממטריצת היחידה לאחר החלפת השורות i, j.
2. $\boldsymbol{E_{i,\lambda}^{(2)}}$ (כפל בסקלר) - מתקבלת ממטריצת היחידה לאחר הכפלת השורה ה-i-ית ב-λ.
3. $\boldsymbol{E_{i,j,\lambda}^{(3)}}$ (הוספת כפולה של שורה אחרת) - מתקבלת ממטריצת היחידה לאחר הוספת λ פעמים את השורה ה-j-ית לשורה ה-i-ית.

<u>דוגמה – עבור $M_3(\mathbb{R})$:</u>

$$E_{1,3}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, E_{1,3}^{(2)} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, E_{1,3,-3}^{(3)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

<u>הערות:</u>

- מכפלת המטריצה A במטריצה האלמנטרית E **משמאל** שקולה לביצוע פש"א שהיא מייצגת על המטריצה A.
- מכפלה מימין במטריצה אלמנטרית שקולה לביצוע פעולת עמודה אלמנטרית (אנחנו לא נוגעים בזה...).

קשר בין מטריצות אלמנטריות להפיכות:

מסקנה – המטריצות **האלמנטריות** הן **הפיכות**, והמטריצות **ההפיכות** הן **אלמנטריות**. זה מתקיים כיוון שכל פש"א ניתן להפוך עם פש"א בכיוון ההפוך:

- $(E_{i,j}^{(1)})^{-1} = E_{i,j}^{(1)}$
- $(E_{i,\lambda}^{(2)})^{-1} = E_{i,\lambda^{-1}}^{(2)}$
- $(E_{i,j,\lambda}^{(3)})^{-1} = E_{i,j,-\lambda}^{(3)}$

מסקנה – **מכפלה של מטריצות אלמנטריות** היא מטריצה **הפיכה** (כי הן הפיכות).

טענה – אם שתי מטריצות A ו-B שקולות שורה מגודל $m \times n$, אז קיימת מטריצה הפיכה $P_{m\times n}$ כך שמתקיים: $B = PA$ (ובאופן שקול $P^{-1}B = A$).

תכונות של מטריצה הפיכה

מסקנות נוספות:

משפט (שיעור 11) – תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. הטענות הבאות שקולות זו לזו:

1. A הפיכה.
2. למערכת ההומוגנית $A\vec{x} = \vec{0}$ קיים פתרון יחיד (הטריוויאלי).
3. A ש"ש ל-I_n: כלומר **הצורה הקנונית של A היא I_n.**

מסקנות:

- A הפיכה ⇔ היא ניתנת **לפירוק כמכפלת מטריצות אלמנטריות**.
- אם A הפיכה אז למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ **קיים פתרון יחיד לכל $\vec{b}$** (לא רק למערכת ההומוגנית, ההוכחה שעשינו נכונה לכל n-יה, ונקבל שיש פתרון יחיד).
- A הפיכה ⇔ עמודותיה/שורותיה הן **בסיס של מרחב ה-n-יות** (כי אם נדרג קנונית בעמודות/שורות נקבל שהיא פורשת/בת"ל וזה יספיק כי יש בה n איברים).

מתרגול 6 – סיכום של רוב השקילויות לכך שמטריצה הפיכה:

ה־משפט מהרצאה (כדאי לדעת את ההוכחה שלו בע"פ):

תהי מטריצה $A \in M_n(F)$ אז כל התנאים הבאים שקולים:

1. **A מטריצה הפיכה.**
2. **A שקולת שורה למטריצת יחידה.**
3. **לכל $b \in \mathbb{F}^n$ למערכת $Ax = b$ יש פתרון יחיד.**
4. **קיימת מטריצה B כך ש־ $AB = I$.**
5. **קיימת מטריצה B כך ש־ $BA = I$.**
6. **העמודות של A בת"ל.**
7. **השורות של A בת"ל.**

<u>אלגוריתם למציאת ההופכית:</u>

נתונה $A \in M_n(\mathbb{F})$. נסמן ב-B את צורתה הקנונית. קיימת סדרה של מטריצות אלמנטריות E_1, E_k כך ש-$B = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$. אז מתקיים כי A הפיכה $\Leftrightarrow$ $B = I_n$, ואז $I_n = E_k \cdot \ldots \cdot E_1 \cdot A$.

לכן, נדרג את המערכת הבאה: $(A|I_n)$. אם הגענו ל-I_n משמאל, אז מצד ימין קיבלנו את ההופכית, כלומר הגענו לצורה הבאה: $(I_n|A^{-1})$. אחרת, המטריצה אינה הפיכה.

תרגיל **בדקו אם המטריצה** $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 3 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ **הפיכה. אם כן מצאו את** A^{-1}.

פתרון

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 - 3R_1]{R_2 \to R_2 - 2R_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_2 \to -\frac{1}{3}R_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & -5 & -4 & -3 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow[R_3 \to R_3 + 5R_2]{R_1 \to R_1 - 2R_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{5}{3} & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{R_3 \to -\frac{3}{2}R_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{2}{3} & 0 \\ 0 & 1 & \frac{2}{3} & \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right) \xrightarrow[R_2 \to R_2 - \frac{2}{3}R_3]{R_1 \to R_1 - \frac{2}{3}R_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{array}\right)$$

לכן A **הפיכה ו-** $A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ -\frac{1}{2} & \frac{5}{2} & -\frac{3}{2} \end{pmatrix}$.

3 – מרחבים וקטוריים

חלק זה עוסק במרחבים וקטוריים כלליים – כל מה שראינו על n-יות ועל מטריצות זה בקטנה... אלו היו דוגמאות למרחבים וקטוריים. כלומר, כל התכונות שהגדרנו גם עכשיו יוכללו עבור כל מרחב וקטורי כללי. נסתכל על אותן התכונות המוכרות כמו צ"ל, פרישה, ת"ל ובסיס (נגדיר גם את המושג מימד).
מגדירים תתי-מרחבים של מרחבים אחרים, ופעולות כמו סכום וחיתוך של מרחבים. מעמיקים במרחבים נוספים כמו מרחבי השורות והעמודות של מטריצה.
בנוסף, מגדירים עוד מושגים מתקדמים יותר לגבי מטריצות כמו דרגה, מאפס, ודטרמיננטה.

מרחב וקטורי

מרחב וקטורי

מרחב וקטורי (מ"ו) – קבוצה V שמוגדרות בה פעולות של חיבור "+" וכפל בסקלר משדה $\mathbb{F}$ נקראת **מרחב וקטורי (מ"ו) מעל השדה** $\mathbb{F}$ אם היא מקיימת את התכונות הבאות (כל התכונות שהגדרנו עבור מרחב ה-n-יות):

1. סגירות לחיבור
2. סגירות לכפל בסקלר
3. חוק החילוף בחיבור (וגם חילוף בכפל בסקלר)
4. חוק הקיבוץ בחיבור
5. חוק הקיבוץ בכפל בסקלר
6. חוקי הפילוג
7. קיום איבר נייטרלי לחיבור
8. קיום איבר נייטרלי לכפל בסקלר
9. קיום איבר נגדי

איברי המרחב V נקראים וקטורים.

דוגמאות:

1. $\mathbb{F}^n$ - מרחב **ה-n-יות** מעל $\mathbb{F}$
2. $M_{m\times n}(\mathbb{F})$ - מרחב **המטריצות** מגודל $m\times n$ מעל $\mathbb{F}$
3. $\mathbb{F}_n[x]$ – מרחב **הפולינומים** במקדמים מהשדה $\mathbb{F}$ ממעלה שקטנה או שווה ל-n.
4. $\{f: I\to R\}$ – מרחב **הפונקציות** הממשיות כאשר $I\subseteq R$.
5. תהי $A\in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה. **קבוצת הפתרונות של המערכת ההומוגנית** $\boldsymbol{A\vec{x}=0}$ היא מרחב וקטורי מעל $\mathbb{F}$ שמוכל בתוך $\mathbb{F}^n$, כלומר זהו תת מרחב.
6. כל שדה הוא מ"ו מעל כל תת-שדה שלו - $\mathbb{C}$ הינו מ"ו מעל $\mathbb{R}$, $\mathbb{R}$ הינו מ"ו מעל $\mathbb{Q}$.
7. אוסף החיצים המישוריים שיוצאים מראשית הצירים.

תת-מרחב וקטורי

תת-מרחב וקטורי (ת"מ) – יהי V מרחב וקטורי, אז $W\subseteq V$ הוא **תת-מרחב וקטורי** של V אם הוא מרחב וקטורי ביחס לפעולות ב-V.

טענה (קריטריון לתת-מרחב): יהי V מרחב וקטורי, אז $W\subseteq V$ הוא תת-מרחב וקטורי אמ"מ מתקיים:

1. $W\neq\emptyset$
2. סגירות לחיבור – $\forall u,v\in W: u+v\in W$
3. סגירות לכפל בסקלר – $\forall u\in W,\lambda\in\mathbb{F}: \lambda u\in W$

הערות:

- את תכונות 2 ו-3 ניתן להחליף בתכונה אחת: $\forall u,v\in W,\lambda_1,\lambda_2\in\mathbb{F}: \lambda_1 u+\lambda_2 v\in W$. כלומר **זוהי סגירות לצירופים לינאריים**. כל צירוף לינארי שניקח יהיה שייך לתת המרחב.
- אם $0\notin W$ נסיק ישר כי אין סגירות לכפל בסקלר (כפל בסקלר אפס מהשדה צריך לתת את איבר האפס). ולכן זהו לא יהיה תת מרחב.
- לרוב נראה כי $0\in W$ בדי להראות שהקבוצה אינה ריקה.
- מרחב וקטורי הוא **תמיד תת-מרחב של עצמו**.
- **מרחב האפס** הוא תת-מרחב של כל מרחב.

תכונות מוכרות עם תוספות

פרישה - יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, ותהי $H \subseteq V$. נגדיר את הפרישה של H להיות אוסף כל הצ"ל **הסופיים** באיברי H.

$$SpanH = \{\lambda_1 \vec{v}_1 + \cdots + \lambda_n \vec{v}_n | n \in \mathbb{N}_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}, \vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in H\}$$

H יכולה להיות אינסופית. אנחנו מסתכלים רק על צ"ל סופיים שלה.

הערה - $\boldsymbol{SpanB + SpanC = Span(B \cup C)}$.

תרגיל נבדוק אם $\{2x+x^2, 1-x+x^2\}$ פורשת את $\mathbb{R}_2[x]$. לשם כך יהי $a+bx+cx^2 \in \mathbb{R}_2[x]$. נבדוק אם קיימים $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ כך ש-

$$a+bx+cx^2 = \alpha_1(2x+x^2) + \alpha_2(1-x+x^2)$$

כלומר,

$$a+bx+cx^2 = \alpha_2 + (2\alpha_1 - \alpha_2)x + (\alpha_1+\alpha_2)x^2$$

לכן

$$\begin{aligned} \alpha_2 &= a \\ 2\alpha_1 - \alpha_2 &= b \\ \alpha_1 + \alpha_2 &= c \end{aligned}$$

נעבור לכתיב מטריצות ונדרג

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & a \\ 2 & -1 & b \\ 1 & 1 & c \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & c \\ 2 & -1 & b \\ 0 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & c \\ 0 & -3 & b-2c \\ 0 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 3a+b-2c \\ 0 & 1 & a \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & c-a \\ 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 3a+b-2c \end{array}\right)$$

ולמערכת יש פתרון אמ"מ $3a+b-2c=0$. אפשר להגיד שנמצאה הגבלה (תנאי) ולכן הקבוצה אינה פורשת. לכן, למשל, מתקיים $x^2 \notin \mathrm{Span}\{2x+x^2, 1-x+x^2\}$ ולכן $\{2x+x^2, 1-x+x^2\}$ **לא** פורשת את $\mathbb{R}_2[x]$.

טענה: אם V מ"ו ו-$H \subseteq V$ אז Span(H) הוא ת"מ של V.

מ"ו נוצר סופית – יהי V מ"ו ויהי $W = Span(H)$ כאשר $H \subseteq V$ קבוצה סופית. אז נאמר ש-W נוצר סופית. כלומר, אם קיימת **קבוצה סופית שפורשת את W** אז הוא נוצר סופית.

ת"ל - יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$. נאמר שהקבוצה $H \subseteq V$ היא ת"ל, אם ישנו $n \in \mathbb{N}_0$ וגם $\vec{v}_1, \ldots, \vec{v}_n \in H$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{F}$ כך שמתקיים שהם לא כולם אפס ומתקיים:

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

בת"ל – נאמר שהקבוצה H בת"ל, אם לכל $n \in \mathbb{N}_0$ כאשר כל המקדמים הם בהכרח 0, כלומר $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 0_{\mathbb{F}}$.

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \vec{v}_k = \vec{0}$$

דוגמאות:

1. $\{\cos^2 x, \sin^2 x, 1\}$ ת"ל – אלו וקטורים במרחב הפונקציות הרציפות $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. יש צ"ל לא טריוויאלי ולכן ת"ל. זה צריך להיות שווה זהותית לאפס.
2. $\{cos\, x, sin\, x, 1\}$ בת"ל.
3. $\{x^k\}_{k=0}^{\infty}$ בת"ל.

דוגמה בדקו אם $\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}\in\mathrm{Mat}_2(\mathbb{R})$ ת"ל. לשם כך, יהיו $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1&0\\2&0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}1&1\\2&2\end{pmatrix}+\alpha_3\begin{pmatrix}1&2\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\begin{pmatrix}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&\alpha_2+2\alpha_3\\2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3&2\alpha_2+2\alpha_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\0&0\end{pmatrix}$$

כלומר,

$$\begin{aligned}\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3&=0\\\alpha_2+2\alpha_3&=0\\2\alpha_1+2\alpha_2+\alpha_3&=0\\2\alpha_2+2\alpha_3&=0\end{aligned}$$

נעבור לכתיב מטריצות ונדרג

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\0&1&2\\2&2&1\\0&2&2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

נסיק כי למערכת פתרון יחיד ולכן המטריצות בת"ל.

טענות:

- (ראינו כבר בעבר) אם H קבוצה ת"ל במ"ו V, אז היא מכילה וקטור שהינו צ"ל של כל היתר.
- (ראינו כבר בעבר) תהי H קבוצה בת"ל במ"ו V, $\vec{v}\in\mathbb{F}$. מתקיים $H\cup\{\vec{v}\}$ בת"ל $\Leftrightarrow \vec{v}\notin Sp(H)$.

סכום וחיתוך מרחבים

סכום ישר – יהיו U,W זוג ת"מ של מ"ו V. נגדיר את הסכום $U+W$ באופן הבא:

$$U+W=\{\vec{u}+\vec{w}\mid\vec{u}\in U,\vec{w}\in W\}$$

אם גם $U\cap W=\{0\}$ אז נאמר שהסכום הוא ישר ונסמן $U\oplus W$.

סכום, חיתוך ואיחוד ת"מ:

- אם U,W ת"מ של V, אז גם $\boldsymbol{U\cap W}$ הוא ת"מ של V.
  - אם U אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית $A\vec{x}=\vec{0}$, ו-W אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית $B\vec{x}=\vec{0}$, אז $U\cap W$ יהיה אוסף הפתרונות של $(\frac{A}{B})\vec{x}=\vec{0}$.
- אם U,W ת"מ של V, אז גם $\boldsymbol{U\cup W}$ הוא ת"מ של V $\Leftrightarrow U\subseteq W\vee W\subseteq U$.
  - כלומר **איחוד של ת"מ הוא לא בהכרח ת"מ!**
- אם U,W ת"מ של V, אז גם $\boldsymbol{U+W}$ הוא ת"מ של V.
  - למעשה החיבור הזה הוא ת"מ המינימלי אשר מכיל את $U\cup W$.

תרגיל מצאו את $U\cap W$ ו־$U+W$ עבור תתי המרחבים הבאים של $V=\mathbb{R}^3$

$$U=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\right\},\ W=\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

מצאו בסיס עבור $U\cap W$ ו־$U+W$. **בדקו אם** $V=U+W$ **בדקו האם** $V=U\oplus W$:

פתרון נתחיל עם $U\cap W$: נאפיין וקטורים $v\in V$ כך ש־ $v\in U\cap W$: מתקיים $v\in U\cap W$ לכל $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3,\alpha_4\in\mathbb{R}$ כך ש־

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}=v=\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+\alpha_4\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}.$$

$$\alpha_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\alpha_2\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}-\alpha_3\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-\alpha_4\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}=0$$

כלומר, נמצא את פתרונות המערכת ההומוגנית הבאה:

$$\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\1&2&-1&-2\\0&1&-1&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0&-1\\0&1&-1&0\\0&0&1&-1\end{pmatrix}$$

אז $\alpha_4=t$,$\alpha_3=t$ עבור $t\in\mathbb{R}$ (אין צורך למצוא את α_1,α_2). נסיק כי

$$U\cap W=\left\{t\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

לכן, בסיס של $U\cap W$ נתון על ידי

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

לשם המחשה, נראה מה היה קורה אילו היינו עושים שימוש ב־α_1,α_2: מתקיים $\alpha_1=\alpha_2=t$. לכן

$$U\cap W=\left\{t\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}=\left\{t\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\ \middle|\ t\in\mathbb{R}\right\}=\mathbf{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\3\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

נמשיך עם $U+W$: מטענה קודמת, מתקיים

$$U+W=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\2\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\2\\0\end{pmatrix}\right\}.$$

נמצא כעת בסיס לסכום: נציב את וקטורי הקבוצה הפורשת כשורות מטריצה:

$$\begin{pmatrix}1&1&0\\0&2&1\\0&1&1\\1&2&0\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\\0&0&0\end{pmatrix}$$

לכן,

$$U+W=\operatorname{Span}\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}=\mathbb{R}^3$$

ובסיס של $U+W$ נתון, למשל, על ידי

$$\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}.$$

לבסוף, V אינו סכום ישר של U,W כי $U\cap W\neq\{0\}$.

בסיס וממד

בסיס – נאמר שקבוצה $B \subseteq V$ כאשר V מ"ו מעל $\mathbb{F}$, היא בסיס של V אם מתקיים $Sp(B) = V$ ו-B בת"ל.

משפט: יהיה V מ"ו נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. תהי $B \subseteq V$. התנאים הבאים שקולים:

1. B בסיס של V.
2. כל $\vec{v} \in V$ ניתן להביע כצ"ל של איברי B בצורה יחידה.
3. B פורשת מזערית.
4. B בת"ל מירבית.

מסקנות:

1. **קבוצה פורשת** במ"ו נוצר סופית **מכילה בסיס** כלשהו (אפשר להוריד ממנה איברים עד שתהיה בת"ל ואז בסיס).
2. **קבוצה בת"ל** במ"ו נוצר סופית **מוכלת בבסיס** כלשהו (אפשר להוסיף לה איברים (שלא שייכים ל-Span) עד שהיא תהיה פורשת ואז בסיס).
3. **בכל בסיס** של מ"ו נוצר סופית ישנו **מספר זהה של איברים**. (הוכחנו בשיעור 14).

מימד – אם V מ"ו נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. נגדיר את המימד של V - $\dim_{\mathbb{F}} V$ להיות כמספר האיברים בבסיס של V. אם V אינו נוצר סופית אז נסמן $\dim_{\mathbb{F}} V = \infty$.

בסיסים סטנדרטיים:

1. נניח כי $V = \mathbb{F}^n$ מעל $\mathbb{F}$. אז הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix}1\\0\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\ \vdots\\0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0\\0\\ \vdots\\0\\1\end{pmatrix} \right\}$$

מהווה בסיס של $\mathbb{F}^n$ ונקראת *הבסיס הסטנדרטי של* $\mathbb{F}^n$. נסיק כי $\dim \mathbb{F}^n = n$.

2. הקבוצה

$$\left\{ \begin{pmatrix}1&0&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0&1&\cdots&0\\0&0&\cdots&0\\ \vdots&&&\vdots\\0&0&\cdots&0\end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix}0&\cdots&0&0\\0&\cdots&0&0\\ \vdots&&0&\vdots\\0&\cdots&0&1\end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$$

מהווה בסיס של $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$ ונקראת *הבסיס הסטנדרטי של* $\mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F})$. נסיק כי $\dim \mathrm{Mat}_{m\times n}(\mathbb{F}) = mn$.

3. הקבוצה

$$\{1, x, \dots, x^n\} \subseteq \mathbb{F}_n[x]$$

מהווה בסיס של $\mathbb{F}_n[x]$ ונקראת *הבסיס הסטנדרטי של* $\mathbb{F}_n[x]$. נסיק כי $\dim \mathbb{F}_n[x] = n+1$.

נוסחת המימדים: אם U, W זוג ת"מ של מ"ו נוצר סופית V אז:

$$\dim(U+W) = dimU + dimW - \dim(U \cap W)$$

טענות:

1. יהי V מ"ו נוצר סופית מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי U ת"מ של V. אז $dimU \le dimV$ ומתקיים $U = V \Leftrightarrow dimU = dimV$.
2. אם U, W זוג ת"מ של מ"ו V אז $U \cap W = \{0\} \Leftrightarrow$ כל $\vec{v} \in U + W$ **ניתן להצגה יחידה** כסכום של וקטורים מ-U ו-W, כלומר $\vec{v} = \vec{u} + \vec{w}$ כאשר $\vec{u} \in U$, $\vec{w} \in W$.
3. אם $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ הוא בסיס של מ"ו V אז: $V = Sp\{\vec{b}_1\} \oplus \dots \oplus Sp\{\vec{b}_n\}$.

מרחבי שורות ועמודות של מטריצות

מרחבי שורות ועמודות

תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$:
$$A = \begin{pmatrix} | & | & | \\ \vec{v}_1 & \dots & \vec{v}_n \\ | & | & | \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} - & \vec{u}_1 & - \\ - & \dots & - \\ - & \vec{u}_m & - \end{pmatrix}$$

- מרחב השורות של A – המרחב שנפרש ע"י שורותיה. נסמן $Row(A) = Sp_{\mathbb{F}}\{\vec{u}_1, \dots, \vec{u}_m\} \subseteq \mathbb{F}^n$
- מרחב העמודות של A – המרחב שנפרש ע"י עמודותיה: נסמן $Col(A) = Sp_{\mathbb{F}}\{\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_n\} \subseteq \mathbb{F}^m$

<u>השפעת הדירוג על מרחבי השורות והעמודות:</u>

- מרחב השורות **אינו משתנה בדירוג**.
- מרחב העמודות של המטריצה יכול להשתנות בדירוג.

<u>טענות שימושיות:</u>

1. אם A, B שקולות שורה אז $Row(A) = Row(B)$.
2. אם A מטריצה מדורגת (לאו דווקא קנונית) אז **שורותיה שאינן שורות אפסים מהוות בסיס ל-$Row(A)$**, ובפרט הן קבוצה בת"ל ב-$\mathbb{F}^n$.
3. תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ מטריצה אשר העמודות שלה הן $S = \{v_1, \dots, v_n\}$, כלומר מתקיים $Span(S) = Col(A)$. תהי $\tilde{A}$ הצורה המדורגת קנונית שלה. נניח כי ב-$\tilde{A}$ ישנם r איברים פותחים. נסמן ב-j_i את **אינדקס העמודה של האיבר הפותח בשורה ה-i** ב-$\tilde{A}$.
אם ניקח את האינדקסים של העמודות בהן יש איבר פותח במדורגת קנונית, העמודות במטריצה A המקורית באינדקסים הללו, הן קבוצה בת"ל שפורשת את $Col(A)$ – **כלומר בסיס למרחב העמודות**.

<u>מציאת בסיס בעזרת מרחבי שורות ועמודות (שיעור 15):</u>

- ניתן להיעזר במרחבי שורות על מנת למצוא בסיס יפה לקבוצה פורשת. **נשים את הוקטורים כשורות של מטריצה, נדרג, וניקח את כל השורות שלא התאפסו בדירוג.**
- בכדי למצוא בסיס יפה למרחב העמודות נידרש לשחלף את המטריצה.

<u>משפט הדרגה:</u> תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. מתקיים $dimRow(A) = dimCol(A)$.

דרגה של מטריצה

<u>הגדרה</u> - תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הדרגה של A מוגדרת להיות **כמימד מרחבי השורות והעמודות של A**. כלומר:
$$rank(A) = dimRow(A) = dimCol(A)$$

<u>הערות:</u>

- דרגת המטריצה שווה **למספר האיברים המובילים שבצורתה הקנונית.**
- דרגת המטריצה שווה **למספר השורות השונות מ-0 שבצורתה המדורגת.**
- אם A, B שקולות שורה אז $Col(A) \neq Col(B)$ אבל מתקיים:
$$rank(A) = dimCol(A) = dimRow(A) = dimRow(B) = dimCol(B) = rank(B)$$

<u>תכונות הדרגה:</u>

1. אם A שקולת שורה ל-B אז $rank(A) = rank(B)$.
לחילופין, אם $A = PB$ כאשר P הפיכה אז מתקיים $rank(A) = rank(PB) = rank(B)$.
2. $rank(A^T) = rank(A)$.
3. $A = 0 \Leftrightarrow rank(A) = 0$. (זה כי אין בכלל איברים מובילים)
4. $rank(A) \leq \min\{m, n\}$.
5. אם $A \in M_n(\mathbb{F})$ אז A הפיכה $\Leftrightarrow rank(A) = n$.
6. $rank(AB) \leq \min\{rank(A), rank(B)\}$.
7. $rank(A + B) \leq rank(A) + rank(B)$.

השלמות בנוגע למטריצות

המאפס והאפסות

מאפס – תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$. המאפס של A הוא אוסף הפתרונות של המערכת ההומוגנית שמתאימה לה. זהו תת מרחב של $\mathbb{F}^n$ ונסמן אותו באופן הבא:

$$N(A) = \{\vec{x} \in \mathbb{F}^n | A\vec{x} = \vec{0}\}$$

אפסות – למימד של המאפס אנו נקרא האפסות של המטריצה. נסמן:

$$null(A) = \dim N(A)$$

משפט הדרגה והאפסות: אם $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ אז מתקיים $rank(A) + null(A) = n$.

מסקנה – האפסות היא כמספר המשתנים החופשיים במטריצה (מספר העמודות שבהן אין איבר מוביל).

במילים אחרות, כמות האיברים המובילים במטריצה המדורגת (הדרגה) וכמות האיברים החופשיים (האפסות) שווה למספר העמודות שהוא n.

דטרמיננטה

הגדרה (תנאים) – פונקציית דטרמיננטה היא פונקציה $D_n: M_n(\mathbb{F}) \to \mathbb{F}$ אשר מקיימת את 4 התכונות הבאות:

1. $D_n(I_n) = 1$
2. $D_n\left(E^{(1)}_{i,j}A\right) = -D_n(A)$ – הפיכת שורות במטריצה שקולה להפיכת סימן.
3. $D_n\left(E^{(2)}_{i,\lambda}A\right) = \lambda D_n(A)$ – מכפלת שורה בסקלר שקולה למכפלת הדטרמיננטה כולה באותו סקלר.
4. $D_n\left(E^{(3)}_{i,j,\lambda}A\right) = D_n(A)$ – הוספת מכפלה בסקלר של שורה אחת לאחרת **אינה משנה את הדטרמיננטה**.

טענה (זהויות שימושיות):

- $D_n\left(E^{(1)}_{i,j}\right) = -1$
- $D_n\left(E^{(2)}_{i,\lambda}\right) = \lambda$
- $D_n\left(E^{(3)}_{i,j,\lambda}\right) = 1$

מסקנה – אם E מטריצה אלמנטרית אז מתקיים $D_n(EA) = D_n(E) \cdot D_n(A)$.

תכונות וטענות נוספות:

1. **A הפיכה $\Leftrightarrow$ $D_n(A) \neq 0$.**
2. אם במטריצה A זוג שורות זהות אז $D_n(A) = 0$.
3. אם במטריצה A יש שורת אפסים, אז $D_n(A) = 0$.
4. אם A מטריצה משולשת עליונה, אז הדטרמיננטה שווה למכפלת האיברים באלכסון הראשי.

הגדרה אינדוקטיבית (פיתוח לפי שורה/עמודה) – פונקציית הדטרמיננטה למטריצה מגודל $n \times n$ מוגדרת כך:

- $D_1(a) = a$
- $D_n(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{i+k}A_{ik} \cdot D_{n-1}(M_{ik})$ - **פיתוח לפי השורה ה-i-ית** כאשר M_{ik} זו תת המטריצה שמתקבלת לאחר מחיקת השורה ה-i-ית והעמודה ה-k-ית.
- $D_n(A) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{j+k}A_{kj} \cdot D_{n-1}(M_{kj})$ – **פיתוח לפי העמודה ה-j-ית** כאשר M_{kj} זו תת המטריצה שמתקבלת לאחר מחיקת השורה ה-k-ית והעמודה ה-j-ית.

הערה - בחישוב דטרמיננטות **מותר לבצע פעולות עמודה אלמנטריות**. זה יכול לסייע לנו להגיע לעמודת אפסים ומשם קל לפתח לפי העמודה והדטרמיננטה מתאפסת למשל.

יחידות הדטרמיננטה: תהיינה $f_1, f_2 \in M_n(\mathbb{F})$ זוג דטרמיננטות. לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ בהכרח $f_1(A) = f_2(A)$. כלומר פונקציית הדטרמיננטה היא יחידה.

דטרמיננטה של משוחלפת: מתקיים $D_n(A^T) = D_n(A)$.

כפליות הדטרמיננטה: עבור $A,B\in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $D_n(AB)=D_n(A)\cdot D_n(B)$.

דטרמיננטה של הופכית: אם A הפיכה אז $\det(A^{-1})=\det(A)^{-1}$.

אבחנות נוספות:

- האם $|\lambda A|=\lambda|A|$? לא, כפל מטריצה בסקלר היא כמכפלת כל שורותיה בסקלר ולכן מתקיים $|\lambda A|=\boldsymbol{\lambda^n}|A|$.
- האם $|A+B|=|A|+|B|$? לא בהכרח.
- **לינאריות הדטרמיננטה בשורה ובעמודה – רק באחת השורות או באחת העמודות!**

$$\det\begin{pmatrix} - & \vec{u}+\vec{v} & - \\ - & w_1 & - \\ - & w_n & - \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} - & \vec{u} & - \\ - & w_1 & - \\ - & w_n & - \end{pmatrix}+\det\begin{pmatrix} - & \vec{v} & - \\ - & w_1 & - \\ - & w_n & - \end{pmatrix}$$

4 – העתקות לינאריות

חלק זה עוסק בהגדרת העתקה לינארית ומשחקים שונים איתה... בגדול זו פונקציה ממרחב אחד לאחר, אבל בונים סביב זה הרבה הגדרות ומושגים חדשים.

אנחנו מגלים שכל מרחב וקטורי ניתן לייצג באמצעות n-יות, ושכל העתקה לינארית ניתן לייצג באמצעות מטריצה.

העתקות לינאריות

העתקה לינארית

הגדרה – העתקה $T: V \to W$ כאשר V, W זוג מ"ו מעל אותו השדה $\mathbb{F}$ נקראת לינארית אם היא מקיימת את התכונות הבאות:

- הומוגנית - $\forall\lambda \in \mathbb{F}, \forall\vec{v} \in V: \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\lambda}\vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{\lambda T}(\vec{\boldsymbol{v}})$ **אין חשיבות לסדר של כפל בסקלר** והפעלת ההעתקה.
- חיבוריות - $\forall\vec{u}, \vec{v} \in V: \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}} + \vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}})$ **אין חשיבות לסדר של פעולת החיבור** והפעלת ההעתקה.

לחילופין נדרוש את איחוד שתי התכונות הללו – כלומר שההעתקה שומרת על צ"ל, אין חשיבות לסדר של צירוף לינארי והפעלת ההעתקה:

$$\forall\alpha, \beta \in \mathbb{F}, \forall\vec{u}, \vec{v} \in V: \boldsymbol{T}(\boldsymbol{\alpha}\vec{\boldsymbol{u}} + \boldsymbol{\beta}\vec{\boldsymbol{v}}) = \boldsymbol{\alpha T}(\vec{\boldsymbol{u}}) + \boldsymbol{\beta T}(\vec{\boldsymbol{v}})$$

טענות בסיסיות:

1. תנאי הכרחי ללינאריות - אם $T: V \to W$ ה"ל אז מתקיים $\boldsymbol{T}\left(\vec{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{v}}\right) = \vec{\boldsymbol{0}}_{\boldsymbol{w}}$. ה"ל תמיד תעתיק את וקטור האפס לוקטור האפס.
2. שמירה על צ"ל - אם $T: V \to W$ ה"ל אז מתקיים $\boldsymbol{T}\left(\sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{k}} \cdot \vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}}\right) = \sum_{k=1}^{n} \boldsymbol{\lambda}_{\boldsymbol{k}} \cdot \boldsymbol{T}(\vec{\boldsymbol{v}}_{\boldsymbol{k}})$ ה"ל תמיד תשמור על צ"ל, אפשר לשים אותם בתוך ההעתקה או מחוצה לה.

משפט: ה"ל נקבעות ביחידות לפי פעולתן על איברי הבסיס. כלומר, אם $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ בסיס למ"ו V, ו-C קבוצה כלשהי במ"ו W (לאו דווקא בת"ל) אז קיימת ה"ל $T: V \to W$ **יחידה**, אשר מקיימת $\forall 1 \le k \le n: T\left(\vec{b}_k\right) = \vec{c}_k$.

מסקנה - תמיד אפשר לבנות העתקה לינארית בין כל 2 מרחבים וקטוריים!

תמונה וגרעין

תמונה – התמונה של T היא אוסף הוקטורים שההעתקה מחזירה בפועל:

$$Im(T) = \{\vec{w} \in W | \exists\vec{v} \in V: T(\vec{v}) = \vec{w}\} = \{T(\vec{v}) | \vec{v} \in V\} \subseteq W$$

נשים לב שהתמונה היא ת"מ של הטווח W.

גרעין – הגרעין של T הוא אוסף כל הוקטורים שההעתקה ממפה לוקטור האפס:

$$Ker(T) = \left\{\vec{v} \in V \middle| T(\vec{v}) = \vec{0}\right\} \subseteq V$$

נשים לב שהגרעין הוא ת"מ של התחום V.

תכונות נוספות

נגדיר את התכונות הבאות:

- חח"ע (מונומורפיזם) – $\forall\vec{u}, \vec{v} \in V: T(\vec{u}) = T(\vec{v}) \Leftrightarrow \vec{u} = \vec{v}$
- על (אפימורפיזם) – $\forall\vec{w} \in W. \exists\vec{v} \in V: T(\vec{v}) = \vec{w}$
- איזומורפיזם – קיום של חח"ע + על.

טענה:

- T חח"ע $\Leftrightarrow Ker(T) = \{\vec{0}\} \Leftrightarrow \dim(Ker(T)) = 0$
- T על $\Leftrightarrow Im(T) = W \Leftrightarrow \dim(Im(T)) = \dim(W)$

קואורדינטות

וקטור קואורדינטות – יהי V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ ממימד n. יהי $B=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$ בסיס של V. נתבונן בוקטור כלשהו במרחב $\vec{v}\in V$.
הוקטור $[\vec{v}]_B\in\mathbb{F}^n$ הוא **וקטור הקואורדינטות** של v על פי הבסיס B, המוגדר באופן הבא:
נניח ש-$\lambda_1,\dots,\lambda_n\in\mathbb{F}$ הם הסקלרים (היחידים – כי זה בסיס) שמגדירים את הצ"ל $\vec{v}=\lambda_1\vec{b}_1+\cdots+\lambda_n\vec{b}_n$ אז:

$$[\vec{v}]_B=\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

זהו **וקטור העמודה שמכיל את המקדמים בצ"ל** היחיד של איברי הבסיס B שנותן את $\vec{v}$.

העתקת הקואורדינטות:

יהי V מ"ו נוצר סופית עם בסיס $B=\{\vec{b}_1,\dots,\vec{b}_n\}$. נזכור שכל וקטור ב-V ניתן להצגה יחידה כצ"ל של איברי הבסיס B:
$v=\sum_{k=1}^{n}\lambda_k\vec{b}_k$. נגדיר העתקה באופן הבא:

$$[\,\cdot\,]_B:V\to\mathbb{F}^n,\ [\vec{v}]_B:\begin{pmatrix}\lambda_1\\ \vdots\\ \lambda_n\end{pmatrix}$$

ההעתקה מתאימה לכל וקטור במרחב את וקטור הקואורדינטות שלו לפי B. העתקה זו מוגדרת היטב כיוון שכל וקטור ב-V ניתן בהכרח להביע כצ"ל של איברי הבסיס B.

הערות:

1. אם $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ בת"ל ו-T חח"ע אז גם $\{T\vec{v}_1,\dots,T\vec{v}_n\}$ בת"ל.
   כלומר העתקה **חח"ע מעתיקה קבוצות בת"ל לקבוצות בת"ל.**
2. אם $\{\vec{v}_1,\dots,\vec{v}_n\}$ פורשת את התחום ו-T על אז $\{T\vec{v}_1,\dots,T\vec{v}_n\}$ פורשת את הטווח.
   כלומר העתקה **על מעתיקה קבוצות פורשת בתחום לקבוצות פורשות בטווח.**
3. אם B בסיס של התחום ו-T איזומורפיזם אז $T(B)$ בסיס של הטווח.
   כלומר העתקה שהיא **איזומורפיזם מעתיקה בסיסים בתחום לבסיסים בטווח.**

מסקנה - **כלומר העתקת הקורואורדינטות היא איזומורפיזם, וככזו לא שומרת רק על צ"ל אלא גם על תכונות לינאריות כמו אי-תלות לינארית ופרישה. בעזרתה נוכל לתרגם בעיות ממ"ו כללי למרחב ה-n-יות.**

תרגיל בדקו אם הוקטורים $\{1+x+x^2,1-x+x^2\}\subseteq\mathbb{R}_2[x]$ בת"ל. אם כן, השלימו את הקבוצה לבסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

פתרון נעבור לקואורדינטות ביחס לבסיס הסטנדרטי $B=\{1,x,x^2\}$ (ניתן לבחור בכל בסיס אחר של $\mathbb{R}_2[x]$. הבסיס הסטנדרטי בד"כ נוח יותר). אז

$$[1+x+x^2]_B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},[1-x+x^2]_B=\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}.$$

וקטורי הקואורדינטות בת"ל מכיוון שהם אינם פרופורציונליים. לכן הוקטורים המקוריים בת"ל. נשלים את וקטורי הקואורדינטות לבסיס של $\mathbb{R}^3$:

$$\begin{pmatrix}1&1&1\\1&-1&1\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1&1&1\\0&-2&0\end{pmatrix}$$

לכן הקבוצה $\left\{\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ בסיס של $\mathbb{R}^3$ ולכן $\{1+x+x^2,1-x+x^2,x^2\}$ בסיס של $\mathbb{R}_2[x]$.

נוסחת המימדים והרכבה

נוסחת המימדים

נוסחת המימדים: אם $T: U \to V$ ה"ל אז $dimKerT + dimImT = dimU$.

- זה קצת דומה למשפט הדרגה והאפסות.
- ניזכר שלמטריצה A ניתן להתאים ה"ל $T_A: \mathbb{F}^n \to \mathbb{F}^m$ כאשר מתקיים $Ker(T_A) = N(A)$, $Im(T_A) = Col(A)$.

טענה: תהי $T: U \to V$ ה"ל, אז:

1. אם T חח"ע אז $dimU \leq dimV$.
2. אם T על אז $dimU \geq dimV$.
3. אם T איזומורפיזם אז $dimU = dimV$.

טענה: תהי $T: U \to V$ ה"ל. אם $dimU = dimV$ אז התנאים הבאים שקולים: T חח"ע $\Leftrightarrow$ T על $\Leftrightarrow$ T איזומורפיזם.

מ"ו איזומורפיים – נאמר שזוג מ"ו U, V מעל אותו השדה $\mathbb{F}$ הם איזומורפיים, אם קיים איזומורפיזם $T: U \to V$.
במקרה כזה נסמן $U \cong V$.

מסקנה – אם $U \cong V$ אז $dimU = dimV$.

טענה: אם U, V זוג מ"ו נוצרים סופית מעל אותו השדה $\mathbb{F}$ ומתקיים $dimU = dimV$ אז $U \cong V$.

- כל המ"ו מאותו המימד הם איזומורפיים האחד לשני, כלומר תמיד אפשר לעבור למרחב ה-n-יות מאותו המימד.
- מ"ו מאופיינים ע"י השדה שמעליו הם מוגדרים והמימד שלהם בלבד.

הרכבות

הרכבה – יהיו U, V, W מ"ו מעל אותו השדה $\mathbb{F}$. תהיינה $T: U \to V$, $S: V \to W$ ה"ל. נגדיר את ההרכבה $S \circ T: U \to W$ באופן הבא:

$$\forall \vec{u} \in U: S \circ T(\vec{u}) = S(T(\vec{u}))$$

טענה: הרכבת ה"ל היא בעצמה לינארית.

הערות:

- הרכבת איזומורפיזמים היא בעצמה איזומורפיזם (כי הרכבה של חח"ע היא חח"ע, והרכבה של על היא על).
- אם $T: V \to V$ ה"ל נוכל להגדיר את T^k בתור T מורכבת על עצמה k פעמים, כאשר $T^0 = Id$.

העתקה הפוכה – יהי $T: U \to V$ איזומורפיזם. ניתן להגדיר **העתקה הפוכה** $T^{-1}: V \to U$ באופן הבא:

$$\forall \vec{u} \in U, \vec{v} \in V: T(\vec{u}) = \vec{v} \Leftrightarrow T^{-1}(\vec{v}) = \vec{u}$$

טענה: אם T איזומורפיזם אז גם T^{-1} איזומורפיזם.

הערות:

ראינו קודם שמ"ו נוצר סופית מאופיין לפי המימד שלו והשדה שמעליו הוא מוגדר בלבד. כלומר, אם V מ"ו ממימד n מעל $\mathbb{F}$ אז מתקיים $\boldsymbol{V \cong \mathbb{F}^n}$. בפרט, אם B בסיס למ"ו V אז **העתקת הקואורדינטות** $[\,\cdot\,]_B$ **היא איזומורפיזם בין V ל-**$\boldsymbol{\mathbb{F}^n}$:

- **לינארית** ולכן היא שומרת על **צ"ל** – כדי לבדוק האם וקטור שייך לפרישה (באמצעות וקטורי קוא').
- **חח"ע** ולכן שומרת על **אי-תלות לינארית** – כדי לבדוק האם קבוצה בת"ל (באמצעות וקטורי קוא').
- **על** ולכן שומרת על **פרישה** – כדי לבדוק האם קבוצה פורשת את V (נבדוק האם וקטורי הקוא' פורשים את $\mathbb{F}^n$)
- **איזומורפיזם** ולכן שומרת על בסיסים – כדי לבדוק האם קבוצה בסיס ל-V (נבדוק האם וקטורי הקוא' בסיס ל-$\mathbb{F}^n$)

החלפת בסיס

מטריצת ייצוג

מטריצת ייצוג – תהי $T: U \to V$ ה"ל ויהיו $B = \{\vec{b}_1, \dots, \vec{b}_n\}$ בסיס של U ו-C בסיס של V.
נאמר שמטריצה $M \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ היא **מטריצת ייצוג** במעבר מהבסיס B אל הבסיס C אם מתקיים:

$$\forall \vec{u} \in U: [T(\vec{u})]_C = M \cdot [\vec{u}]_B$$

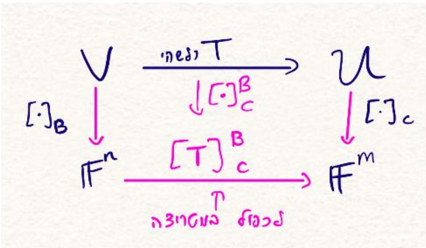
הערות:

- לחשב את הה"ל זה בסך הכול לכפול במטריצת הייצוג שלה. היא מייצגת את הה"ל.
- נשים לב כי $n = dimU, m = dimV$.

טענה: מטריצת הייצוג של הה"ל T במעבר מ-B ל-C היא **יחידה** ומקיימת (נסמן את מטריצת הייצוג כך: $[T]_C^B$)

$$[T]_C^B = \begin{pmatrix} | & | & | \\ [T(\vec{b}_1)]_C & \dots & [T(\vec{b}_n)]_C \\ | & | & | \end{pmatrix}_{m \times n}$$

הערות:



- אנחנו לוקחים את איברי הבסיס של B ומפעילים עליהם את ההעתקה T.
- אי אפשר סתם לשים אותם בעמודות של מטריצה - לוקחים את וקטורי הקואורדינטות שלהם ביחס לבסיס C.
- נשים לב כי $V \cong \mathbb{F}^m$, $U \cong \mathbb{F}^n$.

טענה: אם $T: U \to V$ כאשר B בסיס ל-U ו-C בסיס של V אז מתקיים:

- $\boldsymbol{KerT} \cong \boldsymbol{N}([\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{B}})$ ואז $dimKerT = null[T]_C^B$.
- $\boldsymbol{ImT} \cong \boldsymbol{Col}[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{B}}$ ואז $dimImT = rank[T]_C^B$.

נשים לב כי האיזומורפיזם שמעתיק את הגרעין למאפס הוא $[\,\cdot\,]_B$, ואת התמונה למרחב העמודות הוא $[\,\cdot\,]_C$.

מטריצת מעבר

מטריצת מעבר – נשים לב כי מתקיים: $\forall \vec{v} \in V: [Id(\vec{v})]_C = [\vec{v}]_C = [\boldsymbol{Id}]_{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{B}} \cdot [\vec{v}]_B$. כלומר, המטריצה $[\boldsymbol{Id}]_{\boldsymbol{C}}^{\boldsymbol{B}}$ מעבירה מייצוג לפי בסיס B לייצוג לפי בסיס C ולכן היא נקראת מטריצת מעבר מ-B ל-C.

מטריצת הייצוג של הרכבה: יהיו U, V, W מ"ו מעל השדה $\mathbb{F}$. כאשר B בסיס של U, C של V ו-D של W. תהיינה גם $T: U \to V$ ו-$S: V \to W$ ה"ל. אז:

$$S \circ T: U \to W, [S \circ T]_D^B = [S]_D^C \cdot [T]_C^B$$

כלומר, המטריצה המייצגת של ההרכבה, היא **מכפלת המטריצות המייצגות**.

מסקנות:

1. אם $T: U \to V$ איזומורפיזם, B בסיס של U ו-C בסיס של V אזי $[T^{-1}]_B^C = ([T]_C^B)^{-1}$.
2. אם $T: U \to V$ איזומורפיזם, B, B' בסיסים של U ו-C, C' בסיסים של V אזי $[T]_C^B = [Id]_C^{C'} \cdot [T]_{C'}^{B'} \cdot [Id]_{B'}^B$.
3. יהיו B, C, D בסיסים למרחב V אז: $[Id]_D^B = [Id]_D^C \cdot [Id]_C^B$.

לקינוח

כלל קרמר

כלל קרמר – תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{F})$ הפיכה, ויהי $\vec{b} \in \mathbb{F}^n$. למערכת $A\vec{x} = \vec{b}$ קיים פתרון יחיד והוא: $x_j = \frac{|B_j|}{|A|}$ כאשר המטריצה B_j מתקבלת מהמטריצה A לאחר החלפת העמודה ה-j-ית שלה בוקטור $\vec{b}$.

דוגמה נפתור באמצעות משפט קרמר את המערכת $Ax = b$ כאשר $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ ו-$b = \begin{pmatrix} 3 \\ -3 \end{pmatrix}$.

פתרון: המטריצה A הפיכה (למשל, כי הדטרמיננטה שלה שונה מאפס) ולכן ניתן להשתמש במשפט קרמר. הפתרון היחיד $c = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ נתון על ידי

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ -3 & -1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{0}{-2} = 0, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -3 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{vmatrix}} = \frac{-6}{-2} = 3.$$

לכן הפתרון הוא $\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \end{pmatrix}$. אכן

$$\left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & -3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -2 & -6 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

המטריצה המצורפת

המטריצה המצורפת – תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ נגדיר את המטריצה המצורפת ל-A $adj(A) \in M_n(\mathbb{F})$ באופן הבא:

$$adj(A) = (-1)^{i+j} \cdot \det(M_{ji})$$

כאשר המינור מתקבל מ-A לאחר מחיקת השורה ה-j-ית והעמודה ה-i-ית.

משפט: לכל מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $A \cdot adj(A) = adj(A) \cdot A = \det(A) \cdot I_n$.

מסקנה – אם A הפיכה אז $\det(A) \neq 0$ ונקבל: $I_n = A \cdot \frac{adj(A)}{|A|}$ ולכן $\boldsymbol{A^{-1} = \frac{adj(A)}{|A|}}$.