הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

החוג למתמטיקה (0366)
אלגברה לינארית 2ב (1120)

(גרסה ארוכה)

מרצה: רני הוד
מתרגל: אמיתי אלדר

תשפ"ב, סמסטר ב' (2022)

מסכם: רועי מעין

The Raymond and
Beverly Sackler Faculty
of Exact Sciences
Tel Aviv University

פרק 1 – מבוא ולכסון

דמיון מטריצות וערכים עצמיים 4

פולינומים 5

לכסון 7

פרק 2 – פולינומים של ה"ל/מטריצות

פולינומים של ה"ל/מטריצות 9

פרק 3 – מרחבי מכפלה פנימית

מרחבי מכפלה פנימית 14

המרחב הדואלי 18

נושאים נוספים 21

1 – מבוא ולכסון

חזרה על לינארית 1ב

נשים לב כי מטריצת מעבר בסיס הגדרנו בזמנו $[id]_C^B$, ובעת נסמנה באות M, כלומר M_C^B ואז מתקיים $M_C^B[v]_B=[v]_C$.

תרגיל חזרה נחמד מתרגול 1:

שאלה ממבחן (לינארית 1, 2016): יהיו U,V מרחבים וקטוריים ממימד n, ו־$T:V\to U$ העתקה לינארית. הוכיחו או הפריכו: T היא איזומורפיזם **אם ורק אם** קיימים בסיסים B,C של V,U בהתאמה כך ש־$[T]_C^B=I_n$.

פתרון:
כיוון ראשון: נניח ש־T איזומורפיזם. נבחר בסיס כלשהו $B:=\{v_1,...,v_n\}$ של V, ונסמן: $C:=\{T(v_1),...,T(v_n)\}$. נטען כי C הוא בסיס של U, וכן ש־$[T]_C^B=I_n$. אכן, מכיוון ש־$|C|=\dim U$ מספיק להוכיח ש־C קבוצה בת"ל. נניח ש־$a_1,...,a_n$ מקדמים כך ש־$\sum_{i=1}^n a_iT(v_i)=0$ אז מכיוון ש־T העתקה לינארית מתקיים גם $T\left(\sum_{i=1}^n a_iv_i\right)=0$, ומכיוון ש־$T$ איזומורפיזם ובפרט חח"ע, נסיק כי $\ker T=\{0\}$ ולכן $\sum_{i=1}^n a_iv_i=0$. מכיוון ש־B בסיס, בהכרח $a_1,a_2,...,a_n=0$ ולכן נסיק שגם C בסיס. לבסוף, לכל i נקבל $[T(v_i)]_C=e_i$ ולכן $[T]_C^B$ מטריצה שהעמודה ה־i שלה אי e_i כלומר מטריצה היחידה I_n כפי שרצינו.
כיוון שני: אם קיימים בסיסים כאלה אז

$$\dim \mathrm{Im}T=\operatorname{rank}[T]_C^B=n$$

כלומר T העתקה על בין שני מרחבים מאותו מימד, ולכן איזומורפיזם.

דמיון מטריצות וערכים עצמיים

דמיון מטריצות

מטריצות דומות: עבור שתי מטריצות $A, A' \in M_n(\mathbb{F})$ אם קיימת מטריצה $P \in M_n(\mathbb{F})$ הפיכה המקיימת: $A' = P^{-1}AP$ אז נאמר ש-$\boldsymbol{A}$ **דומה ל-$\boldsymbol{A'}$** ונסמן $A \sim A'$. P תיקרא **מטריצת הדמיון**.

טענה (שיעור 1): יחס הדמיון על מטריצות ריבועיות הוא יחס שקילות.

תרגילון: מחלקת השקילות ביחס הדמיון של αI_n (מטריצה סקלרית) היא $\{\alpha I_n\}$.

הערות:

- היחס של דמיון מטריצות הוא לא אותו דבר כמו יחס שקילות שורה כתוצאה מדירוג מטריצות.
- מטריצת הדמיון P אינה יחידה, ייתכנו שתי מטריצות P הפיכות שונות ממש שמקיימות את התנאים.

מטריצה לכסינה (Diagonalizable): מטריצה ריבועית A תיקרא לכסינה/ניתנת ללכסון **אם היא דומה למטריצה אלכסונית**. המטריצה האלכסונית הזו תיקרא **הצורה האלכסונית של A**.

ה"ל לכסינה: ה"ל $T: V \to V$ היא לכסינה אם יש בסיס B ל-V עבורו $[T]_B$ אלכסונית.

טענה (שיעור 1): $A \sim A' \Leftrightarrow$ קיימת ה"ל $T: V \to V$ עבור מ"ו V ממימד n ושני בסיסים B, C כך שמתקיים $A = [T]_B$, $A' = [T]_C$.

הערות:

- כלומר, שתי מטריצות ריבועיות מייצגות את אותה ה"ל בבסיסים שונים אמ"מ הן דומות.
- במקרה זה מטריצת הדמיון P היא מטריצת מעבר בסיסים - $A'[v]_C = [Tv]_C = M_C^B[T]_B M_B^C[v]_C = P^{-1}AP[v]_C$.
- לכל סקלר λ המטריצה הסקלרית λI **דומה רק לעצמה** (הוכחנו בתרגול 1).

אינווריאנטית לדמיון: תכונה של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ היא אינווריאנטית לדמיון אם גם עבור כל $A' \in M_n(\mathbb{F})$ שדומה ל-A יש את התכונה של-A יש.

הערות:

- תכונות אינווריאנטיות לדמיון – דטרמיננטה, עקבה, דרגה, הוכחנו בשיעור ובתרגול (אם $A \sim B$):
  - $\det(B) = \det(P^{-1}AP) = \det(P^{-1})\det(A)\det(P) = \det(A)$
  - $tr(B) = tr(P^{-1}AP) = tr(PP^{-1}A) = tr(A)$
  - $rk(B) = rk(P^{-1}AP) = rk(AP) = rk((AP)^T) = rk(P^TA) = rk(A)$
- כדי להוכיח שמטריצות לא דומות, ניתן להראות תכונה אינווריאנטית לדמיון שלא מתקיימת ביניהן.
- מטריצות שחולקות דטרמיננטה, עקבה ודרגה לא בהכרח דומות!

תרגילון: הראו שהתא השמאלי העליון במטריצה אינו אינווריאנטה של דמיון.

ערכים עצמים ווקטורים עצמיים

ערך עצמי ווקטור עצמי: תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$. אם מתקיים עבור $0 \neq v \in \mathbb{F}^n$ וסקלר $\lambda \in \mathbb{F}$ כי $\boldsymbol{Av = \lambda v}$ אז נקרא **ל-λ ערך עצמי** (ע"ע) של המטריצה A, **ול-v נקרא וקטור עצמי** (ו"ע) של A שמתאים לע"ע λ.

סימון: קבוצת הע"ע של מטריצה A נקראת הספקטרום שלה ומסומנת $\boldsymbol{spec(A)}$.

טענה (שיעור 2): אם $v_1, \dots, v_k$ ו"ע של A שמתאימים לע"ע λ מסוים אז גם כל צ"ל שלהם הוא ו"ע של A שמתאים ל-λ. כלומר:

$$\boldsymbol{A(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k)} = \alpha_1 Av_1 + \dots + \alpha_k Av_k = \alpha_1\lambda v_1 + \dots \alpha_k \lambda v_k = \boldsymbol{\lambda(\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k)}$$

מרחב עצמי: נסמן ב-$E(\lambda)$ (או V_λ) את קבוצת כל הו"ע של A עם ע"ע λ. מההגדרה מתקיים:

$$E(\lambda) = \{v \in \mathbb{F}^n | Av = \lambda v\} = \{v \in \mathbb{F}^n | (\lambda I_n - A)v = 0\} = \mathrm{N}(\lambda I - A)$$

כלומר, $E(\lambda)$ הוא תת-מרחב של $\mathbb{F}^n$, ונקרא לו **המרחב העצמי של λ**.

הערות:

- אם v הוא ו"ע אז גם כל כפולה שלו הוא ו"ע (למשל $17v$).
- אם $E(\lambda)\neq\{0\}$ אז נגיד ש-λ הוא ע"ע של A. כדי למצוא ע"ע של A נחפש מהם ערכי λ עבורם $E(\lambda)\neq\{0\}$. באופן שקול זה אומר שלמשוואה ההומוגנית $(\lambda I_n - A)v = 0$ קיים יותר מפתרון אחד, כלומר **המטריצה $\boldsymbol{\lambda I - A}$ לא הפיכה**, והדטרמיננטה שלה מתאפסת.
- טענה מהתרגול שהורחבה במטלה 1: **אם קיימים k ו"ע של A עם k ע"ע שונים זה מזה, אז הקבוצה $\{v_1,\dots,v_k\}$ היא בת"ל.**

פולינומים

מבוא לפולינומים

פולינום: פולינום ממעלה (degree) n הוא מהצורה: $f(x)=\alpha_n x^n+\alpha_{n-1}x^{n-1}+\cdots+\alpha_1 x+\alpha_0$ כאשר המקדמים שלו מהשדה, $\alpha_0,\dots,\alpha_n\in\mathbb{F}$ והמקדם המוביל/העליון אינו אפס, $\alpha_n\neq 0$.

מעלת הפולינום: נסמן $\deg(f)=n$. מספר אבחנות:

- פולינום האפס $f(x)=0$ הוא ממעלה $-\infty$.
- פולינום הפיך: פולינום שיש לו הופכי כפלי בחוג. אלו הם **הפולינומים ממעלה אפס**: $f(x)=\alpha_0$ עבור $\alpha_0\neq 0$. במילים אחרות, מדובר **בסקלר מהשדה**.
- פולינום מתוקן (monic): **פולינום שהמעלה שלו היא 1** נקרא מתוקן. האנלוג לפולינום מתוקן ב-$\mathbb{Z}$ הוא שלם חיובי.
- מתקיים $\deg(fg)=\operatorname{def}(f)+\deg(g)$, וגם $\deg(f+g)\le\max\{\deg(f),\deg(g)\}$.

חוג הפולינומים: נסמן ב-$\mathbb{F}[x]$ את אוסף כל הפולינומים עם מקדמים מהשדה $\mathbb{F}$. זהו מבנה אלגברי שנקרא **חוג (ring) אוקלידי**. יש דמיון רב בין חוג הפולינומים לבין חוג השלמים $\mathbb{Z}$. באופן לא מדויק ניתן לומר שחוג הוא "כמעט שדה":

1. חוג אוקלידי מקיים אתכל תנאי השדה (קיום האיברים 0,1, חילופיות כפל וחיבור, פילוג וכו') מלבד אחד – בחוג אוקלידי לא לכל איבר יש איבר הופכי.
2. במקום איבר הופכי, בחוג אוקלידי ניתן לבצע חלוקה עם שארית.

תכונות מעניינות שנובעות מתנאי החוק האוקלידי:

1. פירוק יחיד – כמו שכל מספר שלם ניתן לכתוב בצורה יחידה (עד כדי כפל ב-1–) כמכפלת מספרים אי-פריקים (ראשוניים), כך גם ניתן לכתוב בצורה יחידה כל פולינום כמכפלה של פולינומים אי-פריקים, כדי כדי כפל באיבר הפיך.
$258=2\cdot3\cdot43=(-2)\cdot3\cdot(-43)$,
$x^4+1=\left(x^2-\sqrt{2}\cdot x+1\right)\cdot\left(x^2+\sqrt{2}\cdot x+1\right)=\left(2x^2-2\sqrt{2}\cdot x+2\right)\cdot\left(\tfrac12x^2+\tfrac12\sqrt{2}\cdot x+\tfrac12\right)$.
2. אין מחלקי 0 – בחוק אוקלידי אין שני איברים שונים מ-0 שמכפלתם שווה ל-0.

פולינום אי-פריק: פולינום f ממעלה חיובית שבכל הצגה שלו בתור $f=gh$ לפחות אחד מבין g,h הוא פולינום הפיך.

חלוקה עם שארית

חלוקת פולינומים: כמו שלמים, ניתן לחלק פולינומים עם שארית. בהינתן $f,g\in\mathbb{F}[x]$ כאשר $g\neq 0$ ניתן למצוא פולינומים יחידים $q,r\in\mathbb{F}[x]$ עבורם מתקיים: $\boldsymbol{f=qg+r}$, כאשר $\deg(r)<\deg(q)$ ונאמר כי q היא **המנה**, ו-r נקרא **השארית**.

הערות:

- אם בחלוקה מתקבלת שארית 0 אז נסמן $g\mid f$ ונאמר ש-f מתחלק ב-g / g מחלק את f. אחרת נסמן $g\nmid f$.
- כדי לחלק פולינומים עם שארית נבצע תהליך שדומה לחילוק ארוך.

שורש של פולינום (root): אפשר להציב סקלר $x=\beta\in\mathbb{F}$ בפולינום $f(x)=\sum_{i=0}^n\alpha_i x^i$ ולקבל את הסקלר $f(\beta)=\sum_{i=0}^n\alpha_i\beta^i$. אם מתקיים $f(\beta)=0$ אז β נקרא שורש של f.

הערות:

- לפולינום ממעלה 0 יש 0 שורשים.
- לפולינום ממעלה $-\infty$ שהוא פולינום האפס, כל $\beta \in \mathbb{F}$ הוא שורש.
- לפולינום ממעלה 1 (לינארי) יש שורש יחיד.
- ניתן לחשב שורשי פולינום ממעלה 2 על ידי נוסחת השורשים.

בעיות אפשריות:

1. שורש מרובה – כמו $\beta = 1$ עבור $(x-1)^2 = x^2 - 2x + 1$.
2. שורשי הפולינום לא בשדה – לעיתים אין שורשים בשדה הממשיים אבל יש בשדה המרוכבים.

טענה (שיעור 3): $\beta \in \mathbb{F}$ הוא שורש של $f \in \mathbb{F}[x] \Leftrightarrow x - \beta \mid f$.

שורש מרובה: β נקרא שורש מריבוי $l \geq 1$ של פולינום f אם $(x-\beta)^l \mid f$, ו-l זו החזקה המקסימלית שמקיימת זאת, כלומר $(x-\beta)^{l+1} \nmid f$.

המשפט היסודי של האלגברה (שיעור 3): לכל פולינום $f \in \mathbb{C}[x]$ ממעלה חיובית יש שורש.

כלומר אין פולינומים אי-פריקים ממעלה גדולה מ-1, כל פולינום מרוכב ניתן לכתוב כמכפלה של גורמים לינאריים.

$$x^4 + 1 = \left(x - e^{-\frac{\pi}{4}i}\right) \cdot \left(x - e^{-\frac{3\pi}{4}i}\right) \cdot \left(x - e^{-\frac{5\pi}{4}i}\right) \cdot \left(x - e^{-\frac{7\pi}{4}i}\right).$$

מסקנה: לפולינום ממעלה $n \geq 0$ יש לכל היותר n שורשים שונים.

פירוק לראשוניים

מחלק משותף (common divisor): עבור פולינומים f, g המחלק המשותף h הוא פולינום כך שמתקיים $h \mid f, h \mid g$. כלומר h מחלק את שניהם ונסמן $h = (f, g)$.

מחלק משותף מקסימלי (gcd): נאמר ש-$d \in \mathbb{F}[x]$ הוא ה-gcd של f, g ונסמן $d = \gcd(f, g)$ אם d מחלק את f, g וגם לכל מחלק משותף אחר h מתקיים ש-h מחלק את d. כלומר $d \mid f, d \mid g$ וגם $h \mid d$. זהו **מחלק משותף שהוא ממעלה מקסימלית**.

הערות:

- אפשר לראות שאם h_1, h_2 שניהם gcd של f, g אז מתקיים $h_1 \mid h_2, h_2 \mid h_1$ ולכן הם שווים עד כדי כפל בפולינום הפיך.
- ניקח את ה-gcd של שני פולינומים להיות המתוקן מכל אלה.
- תכונה חשובה (תרגיל במטלה 2): $\mathbf{gcd}(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}) = \mathbf{gcd}(\boldsymbol{a}, (\mathbf{gcd}(\boldsymbol{b}, \boldsymbol{c}))$. אפשר **להכליל את הטענה ל-n פולינומים**.

אלגוריתם אוקלידס: מאפשר לנו על ידי סדרת צעדים מוגדרים לחשב את ה-gcd של שני מספרים שלמים או שני פולינומים. האלגוריתם הוא רקורסיבי ועובד בצורה הבאה – עבור $\gcd(a, b)$ כאשר $a > b$.

- אם $b = 0$ החזר את a.
- אחרת, החזר את $\gcd(b, a \bmod b)$.

זהות Bezout (שיעור 4): אם $h = \gcd(f, g)$ אז יש פולינומים $m, n \in \mathbb{F}[x]$ כך שמתקיים $h = mf + ng$.
אפשר לחשב את הפולינומים הללו תוך כדי חישוב ה-gcd, לעיתים זה נקרא "אלגוריתם אוקלידס המורחב".

לכסון

פולינום אופייני

פולינום אופייני: נגדיר את הפולינום האופייני של מטריצה A להיות $C_A(x) = \det(xI_n - A)$.

ראינו כי מתקיים ש-λ הוא ע"ע של A אם הוא מאפס את הדטרמיננטה, כלומר הצבתו בפולינום תניב 0. במילים אחרות: **λ ע"ע של A ⇔ λ שורש של $C_A(x)$.**

מסקנה (שיעור 4): למטריצה מסדר n יש לכל היותר n ע"ע שונים.

כדי למצוא ו"ע וע"ע למטריצה A:

1. מחשבים את C_A.
2. מחשבים שורשים שלו $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ($0 \le k \le n$).
3. לכל $1 \le i \le k$ מוצאים בסיס ל-$E(\lambda_i) = \mathrm{N}(\lambda_i I_n - A)$.

הקשר בין לכסון לע"ע וו"ע

תנאי שקול ללכסינות (שיעור 4): A לכסינה ⇔ קיים בסיס של $\mathbb{F}^n$ שמורכב מו"ע של A (בסיס עצמי).
הסיבה: אם B בסיס כזה ו-$P = M_E^B$ אז המטריצה $P^{-1}AP$ אלכסונית. נשים לב ש-M_E^B היא המטריצה שהעמודות שלה הן הווקטורים של הבסיס העצמי B, וכן ש-$P^{-1}AP$ היא המטריצה האלכסונית שאיברי האלכסון שלה הם הע"ע שמתאימים לו"ע של B.

מסקנה (תרגול 3): A לכסינה ⇔ **סכום המימדים של המ"ע הוא n**: הראינו שו"ע עם ע"ע שונים מהווים קבוצה בת"ל, ולכן איחוד הבסיסים שלהם מהווה בסיס מלכסן. בניסוח אחר A לכסינה ⇔ **המרחב $\mathbb{F}^n$ הוא סכום ישר של המ"ע של A.**
נשים לב שבגלל שסכום המימדים הוא תמיד **לכל היותר n**, כדי להראות ש-A לכסינה מספיק להראות שהוא **לפחות n**.

טענה (שיעור 5): אם A, B דומות אז יש להן אותו ספקטרום.

טענה (שיעור 5): תהי $T: V \to V$ ה"ל ותהי $A = [T]_B$ עבור בסיס B של V.
$v \in V$ הוא ו"ע של T שמתאים לע"ע $\lambda \in \mathbb{F}$ ⇔ $[v]_B \in \mathbb{F}^n$ הוא ו"ע של A שמתאים לע"ע $\lambda \in \mathbb{F}$ של A.

כלומר – כדי לחקור את המ"ע של T, מספיק לחקור את המ"ע של מטריצה מייצגת כלשהי.

טענה (שיעור 5): אם A, B דומות אז $C_A = C_B$.

מסקנה (שיעור 5): **הפולינום האופייני הוא תכונה אינווריאנטית לדמיון**, ובעצם מקורו בה"ל T כאשר A, B ייצוגים שלה. לכן ניתן להגדיר עבור $T: V \to V$ את **הפולינום האופייני של T** להיות $C_T = C_{[T]}$ **ולא משנה לפי איזה בסיס** מייצגים את T.

טענה (שיעור 5): $T: V \to V$ לכסינה ⇔ יש בסיס עצמי של V, כלומר בסיס של V שמורכב מו"ע של T.

לכסון סימולטני: נניח $A \sim D, A' \sim D'$. אם אותה מטריצת דמיון P מלכסנת גם את A וגם את A' ($P^{-1}AP = D$ וגם $P^{-1}A'P = D'$) אז נקרא למקרה זה לכסון סימולטני של A ו-A'.

משפט (שיעור 5): יהיו A, A' מטריצות לכסינות. אז A, A' מתחלפות ⇔ הן לכסינות סימולטנית.

ה"ל לכסינות סימולטנית: עבור שתי העתקות $S, T: V \to V$ נגיד ש-S ו-T הן לכסינות סימולטנית, אם קיים בסיס B של V כך שמתקיים $[T]_B$ אלכסונית וגם $[S]_B$ אלכסונית.

משפט (תרגול 7): תהיינה $S, T: V \to V$ העתקות לכסינות. אז S ו-T לכסינות סימולטנית ⇔ S ו-T מתחלפות.

ריבוי אלגברי וגיאומטרי

הגדרה: יהי $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ או של ה"ל $T: V \to V$ כאשר $dimV = n$:

- **הריבוי האלגברי** של λ שנסמן $\boldsymbol{am(\lambda)}$ הוא הריבוי של λ כשורש של $C_A(x)$.
  - כלומר, זוהי החזקה שבה מופיע הגורם $(x - \lambda)$ בפירוק של הפולינום האופייני לגורמים אי פריקים.
- **הריבוי הגיאומטרי** של λ שנסמן $\boldsymbol{gm(\lambda)}$ הוא $dim\mathrm{N}(\lambda I_n - A) = dimE(\lambda)$.
  - כמה ו"ע בת"ל צריך בשביל לפרוש את המרחב הנ"ל.

כמובן מתקיים $1 \leq gm(\lambda), am(\lambda) \leq n$:

- ריבוי גיאומטרי – מתקיים $\{0\} \subset E(\lambda) \subseteq \mathbb{F}^n$ ולכן $gm(\lambda) \geq 1$.
- ריבוי אלגברי – לפולינום לא יהיה שורש עם ריבוי שגדול ממעלת הפולינום ולכן $am(\lambda) \leq n$

משפט (שיעור 5): תהי $A \in M_n(\mathbb{F})$ ויהיו $specA = \{\lambda_1, \dots, \lambda_k\}$. A לכסינה $\Leftrightarrow$:

1. מתקיים $am(\lambda_1) + \dots + am(\lambda_k) = n$.
2. לכל $1 \leq i \leq k$: $gm(\lambda_i) = am(\lambda_i)$.

טענה (שיעור 5): לכל λ מתקיים $gm(\lambda) \leq am(\lambda)$.

פולינום מתפצל (splits): אם פולינום מתפרק למכפלת גורמים לינאריים: $f(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \alpha_i)$ כאשר α_i לאו דווקא שונים, אז נאמר שהוא מתפצל מעל $\mathbb{F}$.

טענה (שיעור 6): לכל ה"ל $T: V \to V$ ולכל ע"ע $\lambda \in \mathbb{F}$ של T מתקיים $gm(\lambda) \leq am(\lambda)$.

משפט הלכסון (שיעור 6): $A \in M_n(\mathbb{F})$ או $T: V \to V$ עבור V ממימד n מעל $\mathbb{F}$ לכסינה $\Leftrightarrow$

1. הפולינום האופייני C_A או C_T מתפצל מעל $\mathbb{F}$.
2. לכל ע"ע $\lambda \in SpecA/T$ מתקיים $gm(\lambda) = am(\lambda)$.

טענה (שיעור 6): יהיו $v_i \in E(\lambda_i)$ עבור $1 \leq i \leq k$ כאשר $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ ע"ע שונים של A או T.
אם $v_1 + \dots + v_k = 0$ אז בהכרח $v_1 = \dots = v_k = 0$.

מסקנה (שיעור 6): אם לכל $1 \leq i \leq k$ ניקח $v_i^1, v_i^2, \dots, v_i^{l_i} \in E(\lambda_i)$ (מכל אחד מהמרחבים העצמיים, ניקח l_i וקטורים בת"ל), אז נקבל כי הקבוצה $\{v_1^1, \dots, v_1^{l_1}, \dots, v_k^1, \dots, v_k^{l_k}\}$ בת"ל (האיחוד של כולם בת"ל).

הערות חשובות (תרגול):

1) הצורה האלכסונית של A היא המטריצה שאיברי האלכסון שלה הם הע"ע, כאשר הע"ע λ מופיע $\dim(E(\lambda))$ פעמים.
2) הצורה האלכסונית של A **יחידה עד כדי שינוי סדר האיברים** על האלכסון (נשים לב כי היא **יחידה אם היא קיימת**, אבל לא כל מטריצה דומה למטריצה אלכסונית).
3) **הסדר של העמודות של המטריצה המלכסנת (P)** צריך להתאים לסדר הע"ע על האלכסון של הצורה האלכסונית, כלומר וקטור העמודה הראשונה מתאים לע"ע בעמודה הראשונה וכו'.

סכום ישר

סכום תמ"ו: יהי V מ"ו ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$ ויהיו $W_1, \dots, W_k$ תמ"ו של V. $\sum_{i=1}^{k} W_i$ הוא התמ"ו $\{w_1 + \dots + w_k : \forall i. w_i \in W_i\}$.

משפט (שיעור 7): יהי $W = W_1 + \dots + W_k$ כמו קודם. התנאים הבאים שקולים:

1. יש הצגה יחידה לוקטור האפס – כלומר אם $w_1 + \dots w_k = 0$ עבור $w_i \in W_i$ אז $w_1 = \dots = w_k$ (מקרה פרטי של 2).
2. יש לכל וקטור $w \in W$ הצגה יחידה - כלומר $w_i \in W_i$ כך שמתקיים $w = w_1 + \dots + w_k$ נקבעים ביחידות על פי w.
3. לכל $i = 1, \dots, k$ מתקיים: $W_i \cap \sum_{j=1, j\neq i}^{k} W_j = \{0\}$.
4. לכל $i = 2, \dots, k$ מתקיים: $W_i \cap \sum_{j=1}^{i-1} W_j = \{0\}$ (גרסה מרוככת של 3).
5. $dimW_1 + \dots + dimW_k = dimW$.

סכום ישר: אם מתקיים אחד (ולכן כל התנאים במשפט אז W נקרא **סכום ישר** (direct sum) של $W_1, \dots, W_k$ ומסמנים:

$$W_1 \oplus \dots \oplus W_k = \oplus_{i=1}^{k} W_i$$

2 – פולינומים של ה"ל/מטריצות

פולינומים של ה"ל/מטריצות

פולינומים של ה"ל/מטריצות

אידיאליים:

ניזכר כי חוג הוא מבנה אלגברי R עם פעולת חיבור וכפל כך שמתקיימות כל התכונות של שדה, פרט לכך שקיים הופכי כפלי לכל איבר ששונה מ-0. כמו כן, כפל לא חייב להיות קומטטיבי. חוגים לדוגמה - $\mathbb{Z}, \mathbb{F}[x], \mathbb{F}[x,y], M_n(\mathbb{F})$.
אפשר להגדיר מושג של **תת-חוג (sub-ring)** בדומה לתמ"ו, תת-שדה וכו'. למשל: $\mathbb{Q}$ הוא תת-שדה של $\mathbb{R}$. $\mathbb{Z}[x]$ תת-חוג של $\mathbb{R}[x]$.

אידיאל: אידיאל של חוג R קומוטטיבי הוא $\emptyset \neq I \subseteq R$ סגורה לחיבור (לכל $a,b \in I$ מתקיים $a+b \in I$) עבורה $I \cdot R \subseteq R$ (כלומר לכל $a \in I$, $b \in \mathbb{R}$ מתקיים $a \cdot b \in I$).

באופן כללי לכל $m \in \mathbb{Z}$ אפשר להגדיר $I_m = m_{\mathbb{Z}} = \{n \in \mathbb{Z} | \ m|n \ \}$ וזה אידיאל של $\mathbb{Z}$. אידיאל מהצורה השאת (כפילות של איבר ספציפי m) נקרא **אידיאל ראשי (principle ideal)** שנוצר על ידי m.

טענה (שיעור 8): בחוג אוקלידי (שיש בו חלוקה עם שארית) כל אידיאל הוא ראשי.

הצבה של ה"ל/מטריצה בפולינום:

עבור $f \in \mathbb{F}[x]$ ומטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ כאשר $f(x) = \alpha_0 + \alpha_1 x + \cdots + \alpha_k x^k$ נגדיר $f(A) = I + \alpha_1 A + \cdots + \alpha_k A^k$. באופן דומה נגדיר עבור ה"ל: $f(T) = \alpha_0 id_V + \alpha_1 T + \cdots + \alpha_k T^k$.

איפוס פולינום: נאמר ש-T/A מאפסת את הפולינום f אם $f(A) = 0_n$ ובדומה $f(T) = 0_V$.
נסמן $\boldsymbol{Ann(A)} = \{f \in \mathbb{F}[x] \mid f(A) = 0\}$ – כל הפולינומים ש-A מאפסת אותם, כלומר ש-A שורש שלהם. כיוון שזה אידיאל ראשי (כל אידיאל של $\mathbb{F}[x]$ הוא ראשי), יש לו יוצר. נסמן ב-m_A את היוצר של $Ann(A)$ ונקרא לו **הפולינום המינימלי** של A.

פולינום מינימלי: קיים ויחיד פולינום $m_A(x) \in \mathbb{F}[x]$ שונה מ-0 המקיים:

1. $m_A \in Ann(A)$
2. לכל $p \in Ann(A)$ מתקיים $m_A \big| p$, כלומר כל מי ש-A מאפסת חייב להיות כפולה של m_A: $\boldsymbol{m_A \mid f \Leftrightarrow f(A) = 0}$ (ובאופן שקול: m_A הוא בעל דרגה מינימלית מבין הפולינום השונים מ-0 ב-$Ann(A)$).
3. m_A מתוקן.

טענה (שיעור 9): אם λ ע"ע של A אז $m_A(x)$ מתחלק ב-$(x-\lambda)$ כלומר λ שורש של m_A.

אבחנות לגבי הצבה בפולינום:

1. אם $f = f_1 + f_2$ אז $f(A) = f_1(A) + f_2(A)$
2. אם $f = \alpha g$ אז $f(A) = \alpha g(A)$
3. אם $f = f_1 f_2$ אז $f(A) = f_1(A) f_2(A) = f_2(A) f_1(A)$
4. **אם $\boldsymbol{A = [T]_B}$ אז $\boldsymbol{[f(T)]_B = f(A)}$**. לכן אם נגדיר $Ann(T)$ נקבל $Ann(T) = Ann([T]_B)$ כלומר $m_A = m_T$, כאשר A ייצוג של T לפי כל בסיס B של V.

טענה (שיעור 9): אם $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של T/A אז $f(\lambda)$ ע"ע של $f(A)/f(T)$ לכל פולינום $f \in \mathbb{F}[x]$.

מסקנה (שיעור 9): אם $\lambda \in \mathbb{F}$ ע"ע של T/A שמאפסת את הפולינום f אז λ הוא שורש של f.

משפט קיילי-המילטון (CH)

משפט קיילי-המילטון (CH): לכל $A \in M_n(\mathbb{F})$ מתקיים $C_A(A) = 0$, ולכל ה"ל $T: V \to V$ מתקיים $C_T(T) = 0$.
ניסוח חלופי - $C_A \mid m_A$, $C_T \mid m_T$.

שלבים בהוכחה:

1. נוכיח למטריצות/ה"ל לכסינות.
2. נוכיח למטיצות/ה"ל ניתנות לשילוש.
3. נוכיח למקרה הכללי.

טענה (שיעור 9): אם $\lambda \in \mathbb{F}$ שורש של m_T אז λ ע"ע T.
כלומר, שורשי הפולינום המינימלי = שורשי הפולינום האופייני = הע"ע.

הגדרה: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{F})$ נקראת משולשית עליונה אם $A_{ij} = 0$ עבור $i > j$.

אבחנות (שיעור 10):

- מטריצה היא אלכסונית ⇔ היא משולשית עליונה ותחתונה.
- אם A דומה למטריצה משולשית $\begin{pmatrix} \beta_1 & \cdots & * \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & \beta\_n \end{pmatrix}$ אז $C_A(x) = \prod_{i=1}^{n}(x - \beta_i)$ ובפרט C_A מתפצל.

התנאים על הבסיס B של V שעבורם $T: V \to V$ מיוצגת על ידי:

- מטריצה אלכסונית – על u_i צריך להיות ו"ע, כלומר $Tu_i \in Span\{u_i\}$ (ה-span הוא כל הכפולות של u_i).
- מטריצה משולשית (עליונה) – לכל u_i מתקיים: $Tu_i \in Span\{u_1, \dots, u_i\}$ (אין תלות בוקטורים $u_{i+1}, \dots, u_n$).

משפט (שיעור 10): תהי $T: V \to V$ ניתנת לשילוש: אז $C_T(T) = 0$.

תמ"ו אינווריאנטים (שמורים)

הגדרה: תהי $T: V \to V$. תמ"ו W של V נקרא T-אינווריאנטי (T-שמור, שמור-T) אם $TW \subseteq W$, כלומר לכל $w \in W$ גם $Tw \in W$
כלומר $ImT\mid_W \subseteq W$.

במקרה הזה ניתן לצמצם את T ל-W ולקבל ה"ל $T\mid_W: W \to W$.

תכונות:

1. תמיד $\{0\}$ ו-V תמ"ו T-אינוו'.
2. מ"ע הוא תמ"ו T-אינוו'.
3. כל תמ"ו T-אינוו' ממימד 1 חלקי למ"ע.
4. סכום וחיתוך של תמ"ו T-אינוו' הוא T-אינוו'.

אבחנה (שיעור 10): אם $V = W \oplus U$ כאשר W הוא T-אינוו' (U לאו דווקא) אז בבסיס של V שמורכב מבסיסים של W ושל U נקבל:
$[T] = \begin{pmatrix} A_1 & \cdots & *** \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & A_2 \end{pmatrix}$.

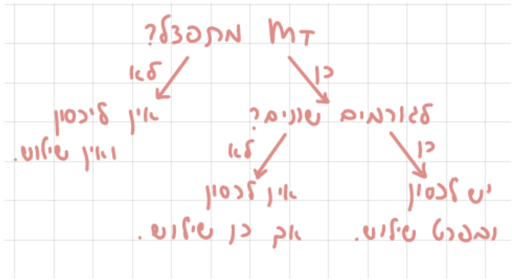
למה (שיעור 10): תהי $T: V \to V$ ה"ל עבור V מ"ו מעל שדה $\mathbb{F}$. יהי $V \neq W$ תמ"ו T-איווו'.
נניח ש-m_T מתפצל (מעל $\mathbb{F}$). אז קיים וקטור $u \in V \backslash W$ וקיים $\lambda \in specT$ עבורם $(T - \lambda id_V)u \in W$.

משפט (שיעור 10): T ניתנת לשילוש ⇔ m_T מתפצל.

מסקנה: כל ה"ל ניתנת לשילוש מעל $\mathbb{C}$.

<u>טענה (שיעור 11):</u> תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$. ניתן להתבונן בה גם כאיבר של $M_n(\mathbb{C})$. נסמן $C_A, m_A \in \mathbb{R}[x]$ בתור הפולינום המינימלי והאופייני של A מעל $\mathbb{R}$. בהתאם, נסמן $C'_A, m'_A \in \mathbb{C}[x]$. אז מתקיים: $C_A = C'_A, m'_A = m_A$.

<u>משפט (שיעור 11):</u> ה"ל $T: V \to V$ לכסינה $\Leftrightarrow$ m_T מכפלת גורמים לינאריים שונים.



<u>תכונות של פירוק מרחב לסכום ישר של מרחבים שמורים (תרגול 6):</u>

נניח ש-V מ"ו, $T: V \to V$ ה"ל, ו-$V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ פירוק של V לסכום ישר, כאשר W_i כולם תמ"ו שמורי T. אנחנו לא מדברים פה בהכרח על העתקה לכסינה – אנחנו רוצים לפרק את המרחב לתמ"ו שהם כולם שמורי T. כי אז מתקיים:

1. אם B_i בסיס של W_i ו-$B = \bigcup_{i=1}^{k} B_i$ אז המטריצה $[T]_B$ היא **מטריצת בלוקים אלכסונית** – גודל כל בלוק כמספר איברי הבסיס ב-B_i. זה תמיד קיים (לפי משפט הפירוק הפרימרי). כאשר $A_i = [T|_{W_i}]_{B_i}$.

$$[T]_B = \begin{pmatrix} A_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & A_2 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & A_3 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & A_{k-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & A_k \end{pmatrix}$$

2. למה זה טוב? למשל לכל פולינום $p \in \mathbb{F}[x]$ מתקיים:

$$p([T]_B) = \begin{pmatrix} p(A_1) & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & p(A_2) & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & p(A_3) & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & p(A_{k-1}) & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & p(A_k) \end{pmatrix}$$

כדי לחשב פולינום כלשהו על T נעשה את זה לכל בלוק בנפרד.

3. עבור הפולינום המינימלי מתקיים: $m_T = lcm(m_{T|_{W_1}}(x), \dots, m_{T|_{W_k}}(x))$. lcm הוא הכפולה המשותפת המינימלית של פולינומים – כולם מחלקים אותו והוא מחלק כל כפולה משותפת אחרת שלהם. מקרה נפוץ – אם כל הפולינומים זרים אז נקבל כי ה-gcd שלהם הוא 1 ואז ה-lcm יהיה **פשוט המכפלה של כל הפולינומים**.

משפט הפירוק הפרימרי

הטלה: עבור מ"ו V ותמ"ו W ניתן להגדיר את ההטלה $P_W: V \to V$ עבורה $Im(P_W) = W$ באופן הבא.
נרשום $V = W \oplus U$ למשל על ידי השלמת בסיס W לבסיס של כל V, והגדרת U כ-span של איברי הבסיס האחרים.
כל $v \in V$ ניתן להציג באופן יחיד על ידי $v = w + u$ עבור $w \in W, u \in U$ ואז מתקיים $P_W(v) = w$.

אבחנות (שיעור 12):

1. לכל תמ"ו W, $\boldsymbol{P_W}$ **ה"ל.**
2. מתקיים $\boldsymbol{P_W^2 = P_W}$ כי אם $P_W(v) = w$ אז כעת ההצגה כסכום של איבר מ-W ואיבר מ-U היא $w = w + 0$ ולכן $P_W(w) = w$. דרך נוספת: W הוא P_W-אינווי' כי $W = Im(P_W)$ ומתקיים $P_W\big|_W = id_W$.

הגדרה שקולה: ה"ל $P: V \to V$ המקיימת $P^2 = P$ היא בעצם ההטלה P_W עבור $W = ImP$. נבחין שבמקרה זה מתקיים $KerP \cap ImP = \{0\}$.

משפט (שיעור 12): יהיה V מ"ו ממימד n מעל שדה $\mathbb{F}$. נניח $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$. נגדיר לכל $1 \le i \le k$ הטלות $P_i: V \to V$ ע"י כך שנציג כל $v \in V$ כ-$v = w_1 + \dots + w_k$ עבור $w_i \in W_i$ ואז $P_i v = w_i$. אז מתקיימים התנאים הבאים:

1. לכל i: $W_i = Im(P_i)$
2. לכל i: $P_i^2 = P_i$.
3. לכל $i \neq j$: $P_i P_j = 0_V$.
4. $P_1 + \dots + P_k = id_V$.

טענה (שיעור 12): נניח $V = W_1 \oplus W_2$, ותהיינה P_1, P_2 ההטלות המתאימות. תהי $T: V \to V$.
אז $TP_i = P_i T$ עבור $i = 1,2 \Leftrightarrow W_1, W_2$ הם T-אינווי'.

אפשר לרשום את V כסכום ישר של W ותמ"ו נוסף בכמה אופנים שונים, ועבור כל אחד מתקבלת הטלה שונה.

דוגמה: ניקח את $V=R^2 = sp\{e_1, e_2\}$ כאשר e_1, e_2 וקטורי היחידה הרגילים במישור.
נגדיר $W = sp\{e_1\}, U = sp\{e_2\}$ ונגדיר $Q = sp\{q\}$ עבור $q = e_1+e_2$.
מתקיים $V = W \oplus U = W \oplus Q$, אך כמובן ש־U, Q שונים.

יתר על כן, הייצוג של וקטור כללי $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ נראה אחרת בשני המקרים:
כסכום של איבר מ־W ואיבר מ־U יש לנו $v = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2$ ולכן ההטלה על W תחזיר לנו את $\boldsymbol{\alpha_1 e_1}$;
לעומת זאת, כסכום של איבר מ־W ואיבר מ־Q יש לנו $v = (\alpha_1-\alpha_2)e_1 + \alpha_2 q$ ולכן ההטלה על W תחזיר לנו את $\boldsymbol{(\alpha_1-\alpha_2)e_1}$.

אז כרגע אי אפשר להגדיר את P_W ישירות באופן יחיד בלי להתייחס למרחב השני U.
בהמשך הקורס נראה שיש בחירה "טובה" ספציפית עבור U וכך נגדיר את P_W, אבל כרגע צריך לסמן משהו כמו $P_{W;U}$ כי זה תלוי ב־U.

משפט הפירוק הפרימרי (שיעור 13): תהי $T: V \to V$ ה"ל ונרשום $m_T = \prod_{i=1}^k p_i^{r_i} = p_1^{r_1} \cdot \ldots \cdot p_k^{r_k}$ כאשר p_i פולינומים אי-פריקים ושונים זה מזה. נסמן $W_i = Ker(p_i^{r_i}(T))$. אז:

1. $V = W_1 \oplus \dots \oplus W_k$.
2. כל W_i הם שמורי T.
3. $m_T|_{W_i} = p_i^{r_i}$.

למעשה, המשפט נכון לגורמים אי פריקים של כל פולינום שההעתקה היא שורש שלו. נראה זאת במפורש בטענה הבאה:

משפט הפירוק הפרימרי היפה (תרגול 6): תהי $T: V \to V$ ה"ל ויהי פולינום $f = p(x)q(x) \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-p, q זרים וכן $f(T) = 0$.
אם נסמן $U = Ker\big(p(T)\big), W = Ker\big(q(T)\big)$ אז מתקיים:

1. W, U שמורי T.
2. $V = W \oplus U$.

משפט זה לא קשור לפולינום מינימלי או אופייני. אם הפולינום f מתפרק לגורמים ליניאריים ממעלה 1 אז T לכסינה והמרחב מתפרק לסכום ישר של מרחבים עצמיים.

כעת נראה את 2. מזהות בזוט כיוון ש- q,p זרים נקבל $a,b \in \mathbb{F}[x]$ כך ש-

$$1 = aq + bp$$

נראה כי $a(T)q(T)(V) = kerp(T)$. אכן לכל $v \in V$ מתקיים:

$$p(T)\left(a(T)q(T)v\right) = a(T)\left(q(T)p(T)v\right) = a(T)f(T)v = a(T)(0) = 0$$

עד כה קיבלנו כי $a(T)q(T)(V) \subseteq kerp(T)$. הפוך, יהי $v \in kerp(T)$. נקבל מבזו:

$$v = id(v) = a(T)q(T)v + b(T)p(T)v = a(T)q(T)v$$

משמע $v \in a(T)q(T)(V)$ ולכן יש שיוויון.
באופן דומה מוכיחים $b(T)p(T)(V) = kerq(T)$.
אם כך שוב מבזוט נקבל שלכל $v \in V$ מתקיים:

$$v = a(T)q(T)v + b(T)p(T)v = u + w$$

כדי להראות שהסכום ישר, יהי $v \in W \cap U$. מתקיים שוב מבזו:

$$v = a(T)q(T)v + b(T)p(T)v = 0 + 0 = 0$$

<u>טענה (שיעור 14):</u> תהי $T: V \to V$ ה"ל ויהי $W_1 \oplus \dots \oplus W_k$ הפירוק הפרימרי של V ביחס ל-T. יהי U תמ"ו T-אינווריאנטי נוסף של V. אז הפירוק הפרימרי של U ביחס ל- $S = T\big|_U$ הוא: $U = (W_1 \cap U) \oplus \dots \oplus (W_k \cap U)$ כאשר מסירים מהסכום מחוברים טריוויאלים, כלומר $W_i \cap U = \{0\}$.

<u>דן הרן – סעיפים א' וב' חשובים:</u>

למה 9.11: *יהי* $W \subseteq V$ *תת מרחב שמור-*T. *יהי* $S = T|_W : W \to W$ *הצמצום של* T *ל-*W. אז

(א) *יהי* $f \in F[X]$. *אז לכל* $W \in w$ *מתקיים* $f(S)(w) = f(T)(w)$. *כלומר,* $f(T|_W) = f(T)|_W$.

(ב) $m_S | m_T$.

(ג) $f_S | f_T$.

הוכחה: (א) תחילה נראה באינדוקציה כי $S^i(w) = T^i(w) \in W$ לכל $i \geq 0$. ואכן, עבור $i = 0$, $T^0 = 1_V$, $S^0 = 1_W$, לכן $S^0(w) = w = T^0(w)$. נניח נכונות עבור $i-1$, אז

$$S^i(w) = S(S^{i-1}(w)) = S(T^{i-1}(w)) = T(T^{i-1}(w)) = T^i(w).$$

מכאן שאם $f = \sum_{i=0}^{\infty} a_i X^i$ אז

$$f(S)(w) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i S^i\right)(w) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i S^i(w) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i(w) = \left(\sum_{i=0}^{\infty} a_i T^i\right)(w) = f(T)(w).$$

(ב) לפי תרגיל 7.15 די להוכיח כי $m_T(S) = 0$. ואכן, $m_T(S)(w) = m_T(T)(w) = 0(w) = 0$ לכל $w \in W$, כלומר, $m_T(S) = 0$.

(ג) נניח $\dim W = m$, $\dim V = m + k$. נבחר בסיס $\mathcal{B}_0$ של W ונשלים אותו לבסיס $\mathcal{B}$ של V. לפי תרגיל 9.5, $[T]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} A & C \\ 0 & D \end{pmatrix}$, באשר $A = [S]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0} \in \mathrm{M}_m(F)$. מכאן לפי תרגיל 6.12 $f_T(X) = f_S(X) \cdot f_D(X)$, ובפרט $f_S | f_T$. ∎

תרגיל 7.15: לכל $f \in F[X]$ *מתקיים:* $f(T) = 0 \Leftrightarrow m_T | f$.

3 – מרחבי מכפלה פנימית

מרחבי מכפלה פנימית

מכפלה פנימית (מ"פ)

המוטיבציה שלנו היא להכניס למ"ו מושגים גיאומטריים כמו "אורך" או "זווית" (בפרט זווית של 90 מעלות). המטרה היא למצוא בסיסים אורתונורמליים, כמו הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$ או $\mathbb{C}^n$. מעתה נעסוק אך ורק בשדות $\mathbb{R}$ או $\mathbb{C}$.

הערה – ממ"פ ממשי נקרא אוקלידי, ממ"פ מרוכב נקרא יוניטרי.

מכפלה פנימית ב-$\mathbb{R}$ (inner product): יהי V מ"ו ממשי. פונקציה בינארית $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{R}$ נקראת מכפלה פנימית אם מתקיימים:

1. סימטריות: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=\langle v,u\rangle$.
2. ליניאריות משמאל:
   a. אדיטיביות משמאל: לכל $u_1,u_2,v\in V$ מתקיים $\langle u_1+u_2,v\rangle=\langle u_1,v\rangle+\langle u_2,v\rangle$
   b. הומוגניות משמאל: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$

   מ-1 + 2 מקבלים גם ליניאריות מימין (בזכות הסימטריה).
3. חיוביות: לכל $0\neq v\in V$ מתקיים $\langle v,v\rangle\geq 0$, שוויון רק עבור $v=0$.

   לכל $v\in V$ מתקיים $\langle 0,v\rangle=0$ ובפרט $\langle 0,0\rangle=0$.

בתרגול 8 ראינו מספר דוגמאות למכפלות פנימיות, הבסיסית ביותר היא המכפלה הסטנדרטית על $\mathbb{R}^n$: $\langle v,u\rangle=\sum_{i=1}^n v_iu_i=v^Tu$. נשים לב כי מתקיים $\langle v,v\rangle=\sum_{i=1}^n v_i^2$.

אי שוויון קושי שוורץ – CS (שיעור 15): יהי V ממ"פ ממשי ויהיו $u,v\in V$. אז $\langle u,v\rangle^2\leq\langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle$.

מכפלה פנימית ב-$\mathbb{C}$: יהי V מ"ו מרוכב. פונקציה בינארית $\langle\cdot,\cdot\rangle: V\times V\to\mathbb{C}$ נקראת מכפלה פנימית אם מתקיימים:

1. הרמיטיות: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle u,v\rangle=\overline{\langle v,u\rangle}$.
2. ליניאריות משמאל:
   a. אדיטיביות משמאל: לכל $u_1,u_2,v\in V$ מתקיים $\langle u_1+u_2,v\rangle=\langle u_1,v\rangle+\langle u_2,v\rangle$
   b. הומוגניות משמאל: לכל $u,v\in V$ מתקיים $\langle\lambda u,v\rangle=\lambda\langle u,v\rangle$

   מ-1 + 2 מקבלים גם אנטי ליניאריות מימין (בזכות הסימטריה).

   אדיטיביות מימין יש בכיף, **הומוגניות מימין עובדת ככה $\langle u,\lambda v\rangle=\bar{\lambda}\langle u,v\rangle$**.
3. חיוביות: לכל $0\neq v\in V$ מתקיים $\langle v,v\rangle\geq 0$, שוויון רק עבור $v=0$.

   לכל $v\in V$ מתקיים $\langle 0,v\rangle=0$ ובפרט $\langle 0,0\rangle=0$. לכל $v\in V$ מתקיים $\langle v,v\rangle\in\mathbb{R}$ מהרמיטיות.

אי שוויון קושי שוורץ – CS ב-$\mathbb{C}$ (שיעור 15): יהי V ממ"פ מרוכב ויהיו $u,v\in V$. אז $|\langle u,v\rangle|^2\leq\langle u,u\rangle\cdot\langle v,v\rangle$.

דוגמאות למכפלות פנימיות

1. **המכפלה הפנימית הסטנדרטית על** $\mathbb{R}^n$: (הדוגמה מלינארית 1)

$$\langle v,u\rangle_{st}:=\sum_{i=1}^n v_i\cdot u_i$$

2. **המכפלה נפנימית הסטנדרטית על** $\mathbb{C}^n$:

$$\langle v,u\rangle_{st}:=\sum_{i=1}^n v_i\cdot\overline{u_i}$$

3. **המכפלה הפנימית הסטנדרטית על** $M_{n\times n}(\mathbb{R})$**:** (בתרגיל בית. אם מחשבים את זה באופן מפורש מסתבר שמקבלים את המקרה הקודם כשחושבים על המטריצות בתור ווקטור ארוך)

$$\langle A,B\rangle := tr\left(A\cdot B^T\right)$$

4. **המכפלה הפנימית הסטנדרטית על** $M_{n\times n}(\mathbb{C})$**:**

$$\langle A,B\rangle := tr\left(A\cdot \overline{B^T}\right)$$

נורמה:

נורמה: הפונקציה $\|\cdot\|: V\to\mathbb{R}$ נקראת נורמה אם מתקיים:

1. הומוגניות: $\|\lambda v\| = |\lambda|\cdot\|v\|$, לכל $\lambda\in\mathbb{F}$.
2. חיוביות: $\|v\|>0$ לכל $v\neq 0$, יש שוויון רק עבור $v=0$ ($\|0\|=0$)
3. אי שוויון המשולש (שיעור 15): לכל $u,v\in V$ מתקיים $\|u+v\|\le\|u\|+\|v\|$.

הנורמה של $v\in V$ בממ"פ V היא $\|v\|=\sqrt{\langle v,v\rangle}$. נורמה זו מכונה גם **נורמה מושרית** מ-$\langle,\rangle$.

הערות:

- במונחי נורמה, אי שוויון CS הוא $|\langle \boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle|\le\|\boldsymbol{u}\|\cdot\|\boldsymbol{v}\|$.
- נורמה מייצגת אורך של וקטור. אפשר להגדיר זווית θ בין וקטורים u,v על ידי $cos\theta=\frac{\langle u,v\rangle}{\|u\|\cdot\|v\|}$. כאשר $\langle u,v\rangle=0$ נקבל זווית של 90 מעלות, כלומר הוקטורים יהיו מאונכים זה לזה.

אורתוגונליות

אורתוגונליות:

ניצבות: אם מתקיים $\langle\boldsymbol{u},\boldsymbol{v}\rangle=\boldsymbol{0}$ נסמן $\boldsymbol{u}\perp\boldsymbol{v}$ **ו**נאמר ש-u,v ניצבים זה לזה / **אורתוגונלים**.
הכללה - עבור קבוצת וקטורים $S\subseteq V$ ווקטור $v\in V$ נסמן $v\perp S$ כאשר $u\perp v$ עבור כל $u\in S$.

וקטור יחידה: אם וקטור v מקיים $\|v\|=1$ נקרא לו וקטור נורמל/יחידה.

למשל, ב-$\mathbb{R}^n$ הוקטור $\begin{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{n}}\\ \cdots\\ \frac{1}{\sqrt{n}}\end{pmatrix}$ נורמל (ביחס למ"פ הסטנדרטית) כי $\sqrt{\sum_{i=1}^n\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^2}=1$.

באופן כללי, לכל $v\neq 0$ אפשר להסתכל על נרמול של v: $\hat{v}=\frac{v}{\|v\|}$ ואז $\|\hat{v}\|=\left|\frac{1}{\|v\|}\right|\cdot\|v\|=1$.

משפט פיתגורס (שיעור 16): אם $u\perp v$ אז $\|u\pm v\|^2=\|u\|^2+\|v\|^2$.

תמ"ו ניצבים: עבור שני תמ"ו $U,W\subseteq V$ נגיד ש-$U\perp W$ אם מתקיים $\forall u\in U,w\in W: u\perp w$.

תכונה (תרגול 8): נניח ש-B,C בסיסים של U,W בהתאמה. אז $\forall u\in B,w\in C: u\perp w \Leftrightarrow U\perp W$.

אפיונים של קבוצות ובסיסים אורתוגונליים:

קבוצה אורתוגונלית (א"ג): קבוצת וקטורים $S\subseteq V$ נקראת קבוצה **אורתוגונלית** אם $0\notin S$ וכן לכל $u,v\in S$ שונים מתקיים $u\perp v$.

הדוגמה הפשוטה ביותר היא הבסיס הסטנדרטי - $\{e_1,\dots,e_n\}$, זוהי קבוצה אורתוגונלית. כלומר, קבוצה שבה כל הוקטורים ניצבים זה לזה.

קבוצה אורתונורמלית (א"נ): קבוצה אורתוגונלית שכל איבריה וקטורים נורמלים (מנורמה 1), נקראת קבוצה **אורתונורמלית**.

משפט (שיעור 17): קבוצה א"ג היא בת"ל.

מסקנה (שיעור 17): קבוצה א"ג של $dimV$ וקטורים היא בסיס (א"ג) של V.

בסיס א"ג/א"נ: בסיס שאיבריו מהווים קבוצה א"ג/א"נ בהתאמה.

תכונות של בסיס א"ג (שיעור 17): יהי V ממ"פ ותהי $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ קבוצה א"ג. התכונות הבאות שקולות:

1. לכל $v \in V$ מתקיים $v = 0 \Leftrightarrow v \perp S$
2. לכל $v \in V$ מתקיים $v = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v,u_i\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle} u_i = \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(v) u_i$. בפרט, S פורשת את V ולכן S בסיס א"ג של V. נשים לב כי מתקיים $[v]_S = \begin{pmatrix} \frac{\langle v,u_1\rangle}{\|u_1\|^2} \\ \dots \\ \frac{\langle v,u_k\rangle}{\|u_k\|^2} \end{pmatrix}$.
3. לכל $v, w \in V$ מתקיים: $\langle v,w\rangle = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v,u_i\rangle\langle u_i,w\rangle}{\langle u_i,u_i\rangle}$.
4. לכל $v \in V$ מתקיים $\|v\|^2 = \sum_{i=1}^{k} \frac{|\langle v,u_i\rangle|^2}{\langle u_i,u_i\rangle}$.

3 ו-4 מכונים לעיתים **שוויון פרסבל**. נשים לב כי אם הקבוצה א"נ, כלומר קבוצה א"ג שבה $\|u_i\| = 1$ אז הגורמים $\langle u_i, u_i\rangle = 1$ ולכן לא משפיעים וניתן לכתוב ביתר קיצור את 2,3,4.

תכונות נוספות (תרגול 9):

- אם $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס א"נ של V, אז מתקיים $\forall v \in V: [v]_B = \begin{pmatrix} \langle v,b_1\rangle \\ \dots \\ \langle v,b_n\rangle \end{pmatrix}$.
- אם $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ בסיס א"נ של V, אז מתקיים $\forall v,u \in V: \langle v,u\rangle = \langle [v]_B, [u]_B\rangle_{st}$. כלומר בסופו של דבר המכפלה הפנימית זו מכפלה של וקטורי קואורדינטות לפי בסיס א"נ כלשהו – ותמיד קיים כזה לפי תהליך GS).

הטלה אורתוגונלית

היטל אורתוגונלי: עבור $u \neq 0$, $P_u(v)$ הוא **הוקטור λu כך ש-u שניצב לוקטור $v - \lambda u$**. לשם כך צריך להתקיים: $\langle v,u\rangle - \lambda\langle u,u\rangle = \langle v,u\rangle - \langle \lambda u,u\rangle = \langle \lambda u - v,u\rangle = 0$ כלומר: $\lambda = \frac{\langle v,u\rangle}{\langle u,u\rangle}$.

טענה (שיעור 16): ההיטל האורתוגונלי $P_u(v) = \lambda u$ הוא הוקטור היחיד שמביא למינימום את $\|v - \lambda u\|$.

הטלה אורתוגונלית: תהי $S = \{u_1, \dots, u_k\}$ קבוצה א"ג בממ"פ V, ונסמן $W = span(S)$, זהו תמ"ו של V.
נסמן עבור $v \in V$ את $P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} P_{u_i}(v)$, וזו ה"ל $P_W: V \to W$.

אבחנה (שיעור 17): מתקיים $v - P_W(v) \perp W$.

האם ההגדרה של P_W תלויה רק ב-W או גם באיברי הבסיס הא"ג S? רק ב-W, כל בסיס של W ייתן את אותה ה"ל.

הערה: בעצם $P_W(v) \perp v - P_W(v)$ כי $P_W(v) \in W$.

טענה (שיעור 17): לכל $v \in V$ הוקטור היחיד $w \in W$ שמקיים $v - w \perp W$ הוא $w = P_W(v)$.

המרחב הניצב: עבור קבוצת וקטורים $S \subseteq V$ כאשר V ממ"פ נסמן $S^\perp = \{v \in V | v \perp S\}$, והוא יקרא **המרחב הניצב ל-S**.

הערה (תרגול 8): באופן כללי, אם U תמ"ו של ממ"פ כלשהו, הנתון כי w מאונך לכל וקטור ב-U נותן לנו משוואות לינאריות על w. מספר המשוואות הבת"ל שנקבל הוא המימד של U.

הערות:

- בהמשך נראה שאם W תמ"ו של V אז $(W^\perp)^\perp = W$.
- ראינו כי $\boldsymbol{V = W \oplus W^\perp}$ **עבור תמ"ו W** כי כל $v \in V$ ניתן לרשום כך:
$$v = P_W(v) + (v - P_W(v)) \text{ כאשר } v - P_W(v) \in W^\perp$$
- מהטענה האחרונה נקבל שהסכום אכן סכום ישר כי לכל דרך לחשב $v = w + (v - w)$ עבור $v - w \in W^\perp$ ו-$w \in W$ בהכרח מתקיים $w = P_W(v)$.
- **ההיטל האורתוגונלי על U - אם B בסיס א"נ של U מתקיים לכל $v \in V$ כי** $\boldsymbol{P_U(v) = \sum_{i=1}^{m} \langle v,b_i\rangle \cdot b_i}$ (מקרה פרטי של אחת התכונות של בסיס א"ג).

טענה (שיעור 18): לכל תמ"ו W של V מתקיים $(W^{\perp})^{\perp} = W$.

תהליך גרם-שמידט (G-S)

משפט (שיעור 18): נתונים $v_1, \dots, v_n \in V$ בת"ל. אז קיימת קבוצה א"ג $u_1, \dots, u_n \in V$ כך שלכל $j = 1, \dots, n$ מתקיים:

$$sp\{v_1, \dots, v_j\} = sp\{u_1, \dots, u_j\}$$

מסקנה (שיעור 18): בהינתן בסיס (רגיל) של תמ"ו W של V, ביצוע G-S ייתן בסיס א"ג של W (אם רוצים בסיס א"נ של W נצטרך לנרמל את הוקטורים $\hat{u} = \frac{u}{\|u\|}$.

בהוכחת המשפט קיבלנו את הנוסחה: $u_j = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} P_{u_i}(v_j) = v_j - \sum_{i=1}^{j-1} \frac{\langle v_j, u_i \rangle}{\|u_i\|^2} u_i$. כדאי לנרמל את הוקטורים כדי לא לחלק כל פעם בנורמה של u_i – אבל לא חייבים.

אלגוריתם GS מתרגול 9:

1. עבור בסיס נתון של U, נאתחל $S = \emptyset$ ונוסיף לו וקטורים.
2. נוסיף את $s_1 = u_1$.
3. עבור $i = 2, \dots, n$ נוסיף ל-S את הוקטור $s_i = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} P_{s_j}(u_j) = u_i - \sum_{j=1}^{i-1} \frac{\langle u_i, s_j \rangle}{\|s_j\|^2} s_j$.

$$u_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1 - \frac{\langle v_3, u_2 \rangle}{\|u_2\|^2} \cdot u_2 \quad u_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, u_1 \rangle}{\|u_1\|^2} \cdot u_1$$

4. כדי להפוך את הבסיס לא"נ נחלק כל אחד מהוקטורים באורך שלו (תזכורת: $\|u\| = \sqrt{\langle u, u \rangle}$).

פירוק QR

עבור $V = \mathbb{C}^m$ כאשר $m \geq n$ ניזכר שהמ"פ הסטנדרטית של $u = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \dots \\ \beta_m \end{pmatrix}, v = \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \dots \\ \alpha_m \end{pmatrix}$ היא $\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{m} \bar{\alpha}_i \beta_i = \bar{v}^t u = v^* u$.

הקבוצה $u_1, \dots, u_n \in \mathbb{C}^m$ א"נ $\Leftrightarrow$ $u_i^* u_j = \langle u_j, u_i \rangle = \begin{cases} 1 & i = j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$. אם נרשום מטריצה $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ שעמודותיה $u_1, \dots, u_n$.

מטריצה אוניטרית: מטריצה $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{C})$ נקראת **אוניטרית** אם מתקיים $Q^* Q = I_n$.

ראינו כי מטריצה היא **אוניטרית אמ"מ עמודותיה אורתונורמליות**.

מטריצה אורתוגונלית: מטריצה $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ נקראת **אורתוגונלית** אם מתקיים $Q^t Q = I_n$.

פירוק QR (שיעור 18): תהי $A \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ שעמודותיה בת"ל, אז קיימת מטריצה אוניטרית $Q \in M_{m \times n}(\mathbb{F})$ ומטריצה משולשית עליונה $R \in M_n(\mathbb{F})$, עם **אלכסון חיובי ממש**. כך ש: $A = QR$. יותר מכך, עמודות Q מתקבלות מביצוע GS מנורמל לעמודות A, והמטריצה R מחושבת ממקדמי GS. באופן מפורט יותר:

$$C_j(A) = \underbrace{\begin{pmatrix} | & | & & | \\ \hat{u}_1 & \hat{u}_2 & \dots & \hat{u}_n \\ | & | & & | \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} < C_j(A), \hat{u}_1 > \\ \vdots \\ < C_j(A), \hat{u}_{j-1} > \\ < C_j(A), \hat{u}_j > \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}}_{C_j(R)}$$

הערה־ $< C_j(A), \hat{u}_j > = \|u_j\|$ ולכן איברי האלכסון של R חיוביים ממש.
בדוגמא מלמעלה נקבל:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_{A} = \underbrace{\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{12}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & \frac{2}{\sqrt{6}} & -\frac{1}{\sqrt{12}} \\ 0 & 0 & \frac{3}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}}_{Q} \underbrace{\begin{pmatrix} \sqrt{2} & \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 & \frac{3}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & 0 & \frac{4}{\sqrt{12}} \end{pmatrix}}_{R}$$

<u>טענה (שיעור 19):</u> תהי $A \in M_{m\times n}(\mathbb{C})$ מטריצה מדרגה n כאשר $m \le n$. אז $ImA \oplus KerA^* = \mathbb{C}^m$.

<u>הערות:</u>

- בתחילת שיעור 20 דיברנו על פירוק QR מול פירוק LU – ולמה QR עדיף (הנורמה נשמרת וזה עוזר לחישוב ריבועים פחותים).
- הוכחת יחידות פירוק QR הייתה בסוף תרגול 9 (גרסה של אמיתי) ובתחילת תרגול 10 (גרסה של יהב). הוכחה לא כיפית בכלל.

ריבועים פחותים

בהינתן נקודות $\{x_i, y_i\}_{i=1}^m$ עבור $m \ge 2$ מחפשים פונקציה לינארית $y = ax + b$ שמתאימה ביותר לנתונים. נרצה למצוא $a, b \in \mathbb{R}$ עבורם $y_i \approx ax_i + b$, למשל $\sum_{i=1}^m \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$ מינימלי. הביטוי הזה מודד כמה אנחנו רחוקים מ-y_i, נרצה שהמרחק הזה ישאף לאפס. רשמנו את הנורמה (האוקלידית) בריבוע של הוקטור $\varepsilon = y - (ax + b)$. מתקיים:

$$\|\varepsilon\|^2 = \sum_{i=1}^{m} \varepsilon^2 = \sum_{i=1}^{m} \left(y_i - (ax_i + b)\right)^2$$

<u>בעיית ריבועים פחותים:</u> נתונה מטריצה $A \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ מדרגה n כאשר $m \le n$ ונתון וקטור $b \in \mathbb{R}^m$. מחפשים פתרון מקורב למשוואה $Ax = B$. כלומר $x \in \mathbb{R}^n$ שעבורו $\varepsilon = Ax - B$ וקטור מנורמה אוקלידית מינימלית $\|\varepsilon\| = \sqrt{\sum_{i=1}^m \varepsilon^2}$.

המרחב הדואלי

המרחב הדואלי

על כל שדה $\mathbb{F}$ ניתן להסתכל כמ"ו חד מימדי מעל עצמו "$\mathbb{F}^1$".

הגדרה: ה"ל $f: V \to \mathbb{F}$ עבור V מ"ו מעל $\mathbb{F}$ נקראת **פונקציונל** (לינארי). קבוצת כל הפונקציונלים מסומנת V^*.

לדוגמה עבור V ממ"פ מעל $\mathbb{C}, \mathbb{R}$ נגדיר עבור $u \in V$ את $f_u: V \to \mathbb{F}$ על ידי $f_u = \langle v, u \rangle$. נשים לב כי עבור מרחב אוקלידי (מעל $\mathbb{R}$) מתקיים $\langle u, v \rangle = \bar{f_u} = f_u$. אמנם, עבור מרחב הרמיטי (מעל $\mathbb{C}$) אין הומוגניות ולכן לא מתקיים $\bar{f_u} = f_u$.

מה המימד של V^*? ראינו כי $dimV^* = dimHom(V, \mathbb{F}) = 1 \cdot dimV = m \times n$.

טענה (שיעור 20): V ממ"פ, f_u מוגדר כמו קודם. ההעתקה $\varphi: V \to V^*$ שמוגדרת על ידי $\varphi(u) = f_u$ היא חח"ע.

מסקנות:

- אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז φ איזומורפיזם מ-V ל-V^*.
- אם $\mathbb{F} = \mathbb{R}$ אז $f(v) = \langle [f]_{B^*}, [v]_B \rangle_{st}$.
- אם $S, T: V \to V$ העתקות (לאו דווקא לינאריות) שמקיימות $\langle v, Tu \rangle = \langle v, Su \rangle$ לכל $u, v \in V$ אז $T = S$. מקרה פרטי הוא **כאשר $\langle v, Tu \rangle = 0$ ואז $T = 0$** (כי $Tu \perp V$).

ההעתקה הצמודה

משפט (שיעור 20): V ממ"פ ממימד n מעל $\mathbb{F}$. נתונה $T: V \to V$ ה"ל. אז קיימת העתקה $T^*: V \to V$ שמקיימת לכל $u, v \in V$: $\langle v, Tu \rangle = \langle T^* v, u \rangle$ והיא **יחידה ולינארית**. T^* נקראת **ההעתקה הדואלית (הצמודה) ל-T**.

העתקה צמודה לעצמה: אם ה"ל $T: V \to V$ מקיימת $T = T^*$ היא נקראת צמודה לעצמה (הרמיטית). במקרה הממשי זו נקראת העתקה סימטרית.

משפט (שיעור 21): עבור ה"ל $T: V \to V$ מתקיים:

1. $(T^*)^* = T$
2. $(S + T)^* = S^* + T^*$
3. $(\lambda T)^* = \bar{\lambda} T^*$
4. $(S \circ T)^* = T^* \circ S^*$
5. $id_V^* = id_V, 0_V^* = 0_V$
6. אם T הפיכה: $(T^{-1})^* = (T^*)^{-1}$

תזכורת: עבור מטריצה מרובבת $A \in M_n(\mathbb{C})$ הגדרנו $A^* = \overline{A^t}$, אם A ממשית אז $A = \bar{A}$ ולכן A^* מתנוון להיות פשוט A^t. לעולם לא נכתוב T^t, ולכן תמיד נראה T^*.

טענה (שיעור 22): עבור $T: V \to V$ ובסיס א"נ $B = \{u_1, \dots, u_n\}$ של V: $[T^*]_B = [T]_B^*$. כמו כן, אם $[S]_B = [T^*]_B$ אז מתקיים $S = T^*$.

האם הטענה הזו נכונה גם כשהבסיס B הוא רק א"ג ולא א"נ? לא!

האם לכל $u \in V$ מתקיים $Tu \perp u$ האם בהכרח $T = 0_V$? לאו דווקא, למשל ניקח $T: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ שמסובבת וקטור ב-90 מעלות: $T(x, y) = (-y, x)$.

טענה (שיעור 22): אם **T צמודה לעצמה** בממ"פ **ממשי** ומתקיים $Tu \perp u$ לכל $u \in V$ אז $T = 0_V$.

כלומר, אנחנו צריכים את הדרישה של T צמודה לעצמה. אמנם בממ"פ מרוכב, איננו זקוקים לדרישה זו.

טענה (שיעור 22): V ממ"פ מרוכב, ה"ל $T: V \to V$ מקיימת $Tu \perp u$ לכל $u \in V$ אז $T = 0_V$.

מסקנה (שיעור 22): V ממ"פ מרוכב, $T: V \to V$ ה"ל. אז $T = T^* \Leftrightarrow \langle Tu, u \rangle \in \mathbb{R}$ לכל $u \in V$.

מסקנה (שיעור 22): כל הע"ע של ה"ל הרמיטית הם ממשיים (בין אם המרחב ממשי או מרוכב).

משפט (שיעור 22): V ממ"פ ממימד n. $T: V \to V$ ה"ל. התנאים הבאים שקולים:

1. T **אוניטרית**: $TT^* = id_V = T^*T$
2. T **משמרת מכפלה פנימית**: $\langle Tu, Tv\rangle = \langle u, v\rangle$ לכל $u, v \in V$.
3. T **משמרת נורמה**: $\|Tv\| = \|v\|$ לכל $v \in V$.
4. לכל בסיס א"נ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ של V, גם $TB = \{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ בסיס א"נ של V (**משמרת בסיס א"נ**).
5. קיים בסיס א"נ $B = \{u_1, \ldots, u_n\}$ של V, גם $TB = \{Tu_1, \ldots, Tu_n\}$ בסיס א"נ של V (יהיה יותר נוח לעיתים להראות פשוט קיום של בסיס כלשהו).

הוכחנו את המשפט בשיעור 23.

<u>דמיון יוניטרי:</u> תהיינה מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. אם קיימת $Q \in M_n(\mathbb{C})$ **יוניטרית** עבורה $Q^*AQ = B$ אז נאמר ש-A **דומה יוניטרית** ל-B.

<u>דמיון אורתוגונלי:</u> תהיינה מטריצות $A, B \in M_n(\mathbb{R})$. אם קיימת $Q \in M_n(\mathbb{R})$ **אורתוגונלית** (=**יוניטרית ממשית**) עבורה $Q^tAQ = B$ אז נאמר ש-A **דומה אורתוגונלית** ל-B.

<u>אבחנה (שיעור 22):</u> אם A דומה (יוניטרית/אורתוגונלית) למטריצה אלכסונית, נאמר שהיא לכסינה (יוניטרית/אורתוגונלית).

<u>טבלת סיכום סימונים (קרדיט לסיכומים מהמודל):</u>

<u>אלו סימונים הם "חוקיים":</u>
V ממ"פ (מרוכב), $\dim V = n \geq 2$, $S, T: V \to V$ ה"ל, U, W תמ"וים של V, $w \in W$, $u \in U$.
$A, B \in M_n(\mathbb{C})$ מטריצות מרוכבות, $x, y \in \mathbb{C}^n$ וקטורי עמודה.

	t	$*$	$\perp$	2	-1
$x^{\square}$	✓	✓	✗	✗	✗
$u^{\square}$	✗	✗	✗	✗	✗
$A^{\square}$	✓	✓	✗	✓	✓
$T^{\square}$	✗	✓	✗	✓	✓
$w^{\square}$	✗	✓	✓	✗	✗

	$+$	$\oplus$	$\cdot$	$\perp$	$\sim$
$x \square y$	✓	✗	✗	✓	✗
$u \square w$	✓	✗	✗	✓	✗
$A \square B$	✓	✗	✓	✓✗	✓
$S \square T$	✓	✗	✓	✗	✗
$W \square U$	✓	✓	✗	✓	✓✗

<u>הערות (תרגול 12):</u>

- העתקות אוניטריות והרמיטיות הן נורמליות.
- T אוניטרית/הרמיטית/נורמלית $\Leftrightarrow$ לכל בסיס B א"נ: $[T]_B$ מטריצה אוניטרית/הרמיטית/נורמלית.

לכסון אוניטרי/אורתוגונלי

<u>תזכורות:</u>

- עבור ה"ל T, S לכסינות, $TS = ST$ אמ"מ הן לכסינות סימולטנית, כלומר יש בסיס B שבו גם $[T]_B, [S]_B$ אלכסוניות.
- $T: V \to V$ בממ"פ V **לכסינה יוניטרית**, אם קיים בסיס **א"נ** B שבו $[T]_B$ אלכסונית.

<u>אבחנה (שיעור 23):</u> אם T לכסינה יוניטרית, כלומר $[T]_B$ אלכסונית בבסיס א"נ B של V. אז $[T^*]_B = [T]_B^*$ וכיוון ש-$[\boldsymbol{T}]_{\boldsymbol{B}}$ אלכסונית גם $[\boldsymbol{T}^*]_{\boldsymbol{B}}$ כזו. מהאפיון של **לכסון סימולטני**, חייב להתקיים $\boldsymbol{T}^*\boldsymbol{T} = \boldsymbol{T}\boldsymbol{T}^*$, כלומר T **נורמלית**.
הוכחנו שאם T לכסינה יוניטרית אז היא נורמלית.

מתי מטריצה A דומה יוניטרית/אורתוגונלית למטריצה אלכסונית?

<u>דמיון אורתוגונלי:</u>

- <u>אבחנה (שיעור 23):</u> אם A דומה אורתוגונלית למטריצה סימטרית, אז A בהכרח סימטרית.
- <u>מסקנה (שיעור 23):</u> אם A דומה אורתוגונלית למטריצה אלכסונית, אז A בהכרח סימטרית.

נוכיח בהמשך שכל מטריצה סימטרית A ניתנת ללכסון אורתוגונלי (זה לכסון יוניטרי במקרה של **מטריצה ממשית**).

דמיון יוניטרי:

- אבחנה (שיעור 23): אם A דומה יוניטרית למטריצה נורמלית N, אז A בהכרח נורמלית.
- מסקנה (שיעור 23): אם A לכסינה יוניטרית אז היא נורמלית בהכרח כי מטריצה מרובבת אלכסונית היא נורמלית.

נוכיח בהמשך שתנאי זה (נורמליות) מספיק לצורך לכסון יוניטרי.

ראינו כי:

- תנאי הכרחי לכך שה"ל/מטריצה **ממשית** תהיה **לכסינה יוניטרית** הוא שתהיה **סימטרית** (=צמודה לעצמה וממשית).
- תנאי הכרחי לכך שה"ל/מטריצה **מרוכבת** תהיה **לכסינה יוניטרית** הוא שתהיה **נורמלית** (=מתחלפת עם צמודתה).

שילוש יוניטרי: ה"ל $T: V \to V$ ניתנת לשילוש יוניטרי אם יש בסיס א"נ B של V עבורו $[T]_B$ משולשית (עליונה). מטריצה A ניתנת לשילוש יוניטרי אם היא דומה יוניטרית למטריצה משולשית.

אבחנה (שיעור 24): מטריצת המעבר בין B ל-C היא משולשית עליונה, כפי שראינו בפירוק QR למקרה של מטריצה ריבועית, R מטריצה משולשית (עם אלכסון ממשי חיובי).

אם $[T]_B = M$ משולשית ומטריצת המעבר מ-B ל-C, היא R ומשולשית הפיכה אז $[T]_B = R^{-1}MR$ כפל של 3 מטריצתו משולשיות ולכן מטריצה משולשית בעצמה.

מסקנה (שיעור 24): אם A/T ניתנת לשילוש אז היא ניתנת גם לשילוש יוניטרי.

טענה (שיעור 24): אם $T = T^*$ אז C_T מתפצל (גם במקרה הממשי).

מסקנה (שיעור 24): אם $u \in V$ הוא ו"ע של ה"ל $T: V \to V$ נורמלית, שמתאים לע"ע $\lambda \in \mathbb{F}$ אז v הוא גם ו"ע של T^* שמתאים לע"ע $\bar{\lambda}$.

משפט (שיעור 24): אם T ה"ל נורמלית ו-$\lambda_1 \neq \lambda_2$ ע"ע שונים שלה, אז $E(\lambda_1) \perp E(\lambda_2)$.

מסקנה (שיעור 24): אם T ה"ל לכסינה, ונורמלית, אז T לכסינה יוניטרית.

משפט (שיעור 24): T לכסינה יוניטרית ⇔ T נורמלית וכן C_T מתפצל.

תרגול 12:

- T לכסינה אוניטרית ⇔ קיים בסיס א"נ המלכסן את T.
- A לכסינה אוניטרית ⇔ קיימת P אוניטרית ו-D אלכסונית כך שמתקיים $A = PDP^*$.
- לכסון אוניטרי: מעל $\mathbb{C}$, T לכסינה אוניטרית ⇔ T נורמלית.
- לכסון אורתוגונלי: מעל $\mathbb{R}$, T לכסינה אורתוגונלית ⇔ T סימטרית.

איך מלכסנים אוניטרית?

- מוצאים מ"ע באופן רגיל.
- עושים G-S לכל מ"ע בנפרד.

נושאים נוספים

אפיון ה"ל/מטריצות (חיוביות ואי-שליליות)

מטריצה חיובית/א"ש: מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ נקראת **חיובית (positive definite)** אם A סימטרית וכן לכל $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\boldsymbol{x^t Ax > 0}$. A נקראת **אי-שלילית (א"ש / positive semi-definite)** אם A סימטרית וכן לכל $0 \neq x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\boldsymbol{x^t Ax \geq 0}$.

הערות:

- להיות חיובית/א"ש לא אומר בהכרח שכל a_{ij} הם חיוביים/א"ש!
- לשים לב שהמטריצות כאן הן **סימטריות** (לכן לכסינות אורתוגונלית, והע"ע ממשיים).

אבחנות (שיעור 26):

- אם $A = (a_{ij})_{i,j=1}^n$ א"ש/חיובית אז $a_{ii} \geq 0$ (או $a_{ii} > 0$) לכל $i = 1, \dots, n$. זה נובע מבחירת $x = e_i$ ואז $e_i^t A e_i = a_{ii}$.
- **אם A חיובית אז A הפיכה**. זה נבוע מכך שאם $Ax = 0$ עבור $x \neq 0$ אז גם $x^t Ax = 0$.

משפט (שיעור 26): תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית ממשית. אז **A חיובית (א"ש) ⇔ כל הע"ע של A חיוביים (א"ש)**.

ה"ל חיובית/א"ש: ה"ל $T: V \to V$ בממ"פ V נקראת חיובית/א"ש אם היא צמודה לעצמה וכן מתקיים לכל $v \neq 0$ כי $\langle Tv, v \rangle > 0$ (או ≥ 0).

הערה: אם $A = [T]_B$ עבור בסיס א"נ B אז A א"ש חיובית ⇔ T א"ש/חיובית.

הערה: דמיון אורתוגונלי משמר א"ש/חיוביות.

נגדיר כעת שורש של מטריצה:

משפט (שיעור 26): תהי $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית ממשית א"ש, אז **קיימת ויחידה** $B \in M_n(\mathbb{R})$ א"ש כך שמתקיים $B^2 = A$.

הערות:

- השורש הריבועי של מטריצה מוגדר רק כאשר המטריצה **א"ש**, והוא ספציפית מדבר על **המטריצה הא"ש היחידה** שמקיימת את השוויון $B^2 = A$.
- אופן חישוב: מכיוון ש-A א"ש יש U אורתוגונלית ו-D אלכסונית עם אלכסון ממשי אי-שלילי כך ש-$A = UDU^{-1}$. אז המטריצה $\boldsymbol{B = U\sqrt{D}U^{-1}}$ היא לכסינה אורתוגונלית עם ע"ע ממשיים א-שליליים, כלומר B אי שלילית ומתקיים:
$$B^2 = U\sqrt{D}U^{-1}U\sqrt{D}\,U^{-1} = A$$

פירוק פולארי

פירוק פולארי: פירוק פולארי של ה"ל T או מטריצה A הוא הפירוק $T = QS$ כאשר Q יוניטרית (עבור A ממשית Q אורתוגונלית) ו-S א"ש (צמודה לעצמה).

טענה (שיעור 26): לכל מטריצה ריבועית A קיים פירוק פולארי $A = UR$ כאשר R א"ש, U אורתוגונלית (יוניטרית במקרה המרוכב).

איך נחשב פירוק פולארי עבור A נתונה?

- נחשב שורש למטריצה $A^t A$ שהיא א"ש: $R^2 = A^t A$, לכן $R = \sqrt{A^t A}$.
- אם A הפיכה, כלומר R הפיך, נקבל כי $U = AR^{-1}$. ואכן $U^t U = (AR^{-1})^t AR^{-1} = (R^{-1})^t A^t AR^{-1} = R^{-1}R^2R^{-1} = I$ וקיבלנו כי U היא מטריצה אורתוגונלית.

הערה: גם אם A לא הפיכה אפשר לחשב U כזו (אבל לא תהיה יחידות).

פירוק SVD

ערך סינגולרי: ממשי אי-שלילי $\sigma \geq 0$ נקרא ערך סינגולרי של מטריצה $A \in M_n(\mathbb{R})$ אם קיימים $x, y \in \mathbb{R}^n$ עבורם מתקיים:

$$\begin{cases} Ax = \sigma y \\ A^t y = \sigma x \end{cases}$$

במקרה המעניין, כאשר $\sigma > 0$ נבחין שמתקיים:

- $A^t Ax = \sigma A^t y = \sigma^2 x$ כלומר σ^2 ע"ע ו-x הוא ו"ע.
- $AA^t y = \sigma Ax = \sigma^2 y$ כלומר σ^2 ע"ע ו-y הוא ו"ע.

כלומר למטריצות $A^t A$ ו-AA^t יש אותם ע"ע.

הגדרה נוספת – הערכים הסינגולריים של A ממשית, הם השורשים הריבועיים של הע"ע החיוביים של $A^T A$.

פירוק SVD: פירוק של A באופן הבא: $A = U\Sigma V^t$ כאשר:

- $\Sigma = diag(\sigma_i)_{i=1}^n$ מטריצת הערכים הסינגולריים. $\Sigma \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$ זוהי מטריצה מלבנית אלכסונית, כלומר אם $m > n$ אז n השורות העליונות מהוות מטריצה אלכסונית, ו-$m - n$ התחתונות הן שורות אפסים, ואילו אם $m < n$ אז m העמודות השמאליות מהוות מטריצה אלכסונית ו-$n - m$ הימניות הן עמודות אפסים.
- U, V מטריצות אורתוגונליות.

ניתן לקבל מיידית מפירוק פולארי: אם $A = UR$ ו-$R = P^t \Sigma P$ אז $A = UR = UP^t\Sigma P = U'\Sigma V^t$.

אבחנה (שיעור 27): אם $A = U\Sigma V^t$ אז $A^t A = U\Sigma^2 U^t = UDU^t$.

אלגוריתם לחישוב (אמיתי):

1. בוחרים את אחת המטריצות - $(A^t A)_{n\times n}$ או $(AA^t)_{m\times m}$. מי יותר קטנה? איפה יש יותר אפסים?
2. נניח לרגע שבחרנו את $(AA^t)_{m\times m}$. נציב פירוק SVD: $AA^t = U\Sigma V^t V\Sigma^t U^t = U\Sigma\Sigma^t U^t$. נשים לב ש: $(\Sigma\Sigma^t)_{m\times m}$ אלכסונית עם ערכים σ_i^2 על האלכסון. U היא לכסון אורתוגונלי של AA^t ו-$\sigma_i = \sqrt{\lambda_i}$ (AA^t א"ש).