הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

החוג למתמטיקה (0366)
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 2ב (1122)
(גרסה ארוכה)

מרצה: ליאור קמה / עדי דיקשטיין
מתרגלת: אן לה בלנק

תשפ"ב, סמסטר ב' (2022)

מסכם: רועי מעין

The Raymond and
Beverly Sackler Faculty
of Exact Sciences
Tel Aviv University

פרק 1 – אינטגרל מסוים

פרק 2 – סדרות וטורי פונקציות

פרק 3 – פונקציות בכמה משתנים

פרק 4 – גזירות בכמה משתנים

פרק 5 – אינטגרלים בכמה משתנים

1 – אינטגרל מסוים

מבוא וחזרה על אינטגרל לא מסוים

נוסחאות אינטגרציה מהספר של או"פ:

2.2.1 רשימה בסיסית של נוסחאות אינטגרציה

נוסחת גזירה	נוסחת אינטגרציה מתאימה
$(c)' = 0$	$\int 0dx = C$
עבור $\alpha \neq -1$ $\left(\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1}\right)' = x^\alpha$	$\int x^\alpha dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C$
בפרט; $x' = 1$	בפרט; $\int 1dx = \int dx = x + C$
$(\ln\lvert x\rvert)' = \frac{1}{x}$	$\int \frac{dx}{x} = \ln\lvert x\rvert + C$
$(-\cos x)' = \sin x$	$\int \sin x dx = -\cos x + C$
$(\sin x)' = \cos x$	$\int \cos x dx = \sin x + C$
$(\tan x)' = \frac{1}{\cos^2 x}$	$\int \frac{dx}{\cos^2 x} = \tan x + C$
$(-\cot x)' = \frac{1}{\sin^2 x}$	$\int \frac{dx}{\sin^2 x} = -\cot x + C$
$(\arcsin x)' = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$	$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \arcsin x + C$
$(\arctan x)' = \frac{1}{1+x^2}$	$\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$
עבור $a > 0$, $a \neq 1$: $\left(\frac{a^x}{\ln a}\right)' = a^x$	$\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$
בפרט; $(e^x)' = e^x$	בפרט; $\int e^x dx = e^x + C$

טבלת פונקציות קדומות

1. **לכל** $\lambda \neq -1$ **ובכל קטע** I **אז** $\int x^{\lambda}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda+1}x^{\lambda+1} + C$
2. **בכל קטע** I **שאינו כולל את** 0**, אז** $\int \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \ln|x| + C$
3. **לכל** $a > 0$ **ובכל קטע** I **אז** $\int a^x\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\ln a}a^x + C$
4. **בכל קטע** I **אז** $\int \sin x\,\mathrm{d}x = -\cos x + C$
5. **בכל קטע** I **אז** $\int \cos x\,\mathrm{d}x = \sin x + C$
6. **בכל קטע** I **כך שלכל** k **שלם מתקיים** $2\pi k + \frac{\pi}{2} \notin I$ **וגם** $2\pi k - \frac{\pi}{2} \notin I$ **אז** $\int \frac{1}{\cos^2 x}\,\mathrm{d}x = \tan x + C$
7. **לכל** $a > 0$ **ובכל קטע** I **אז** $\int \frac{1}{x^2+a^2}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{a}\arctan\frac{x}{a} + C$
8. **לכל** $a > 0$ **ובכל קטע** $I \subseteq (-a,a)$ **אז** $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arcsin\frac{x}{a} + C$
9. **לכל** $a > 0$ **ובכל קטע** $I \subseteq (-a,a)$ **אז** $\int \frac{-1}{\sqrt{a^2-x^2}}\,\mathrm{d}x = \arccos\frac{x}{a} + C$
10. **תהי** $f:(s,t)\to\mathbb{R}$ **פונקציה בעלת פונקציה קדומה** $F:(s,t)\to\mathbb{R}$ **ויהיו** $A\neq 0, B$ **מספרים ממשיים. אז בכל קטע** I **בין** $\frac{s-B}{A}$ **ל-**$\frac{t-B}{A}$ **מתקיים**
$$\int f(Ax+B)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{A}F(Ax+B) + C$$
11. **תהי** $f:I\to\mathbb{R}$ **פונקציה גזירה ב־**I **כך ש־**$f(x)\neq 0$ **לכל** $x\in I$**. אז בקטע** I **מתקיים**
$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln|f(x)| + C$$
12. **תהי** $f:I\to\mathbb{R}$ **פונקציה גזירה ב־**I**. אז בקטע** I **מתקיים**
$$\int f'(x)e^{f(x)}\,\mathrm{d}x = e^{f(x)} + C$$

1 שיטות אינטגרציה

טענה 1.1 (אינטגרציה בחלקים) יהי I רווח כלשהו, תהאנה $f,g:I\to\mathbb{R}$ פונקציה, ותהא $F:I\to\mathbb{R}$ קדומה של f. נניח כי g גזירה על I וכמו כן נניח כי ל Fg' יש קדומה על I. במקרה זה ל fg יש קדומה על I ומתקיים $\int fg(x)dx = Fg - \int Fg'(x)dx$.

טענה 2.1 (החלפת משתנים 1) יהיו I,J רווחים כלשהם, ותהאנה $f:I\to\mathbb{R}$, $g:J\to I$ פונקציות. נניח כי קיימת $F:I\to\mathbb{R}$ קדומה של f וכי g גזירה על J. במקרה זה ל $f\circ g\cdot g'$ יש קדומה על I ומתקיים $\int f\circ g(x)\cdot g'(x)dx = F\circ g + c$.

הערה: בכתיב דיפרנציאלי נהוג לכתוב $\int f(g)\cdot\frac{dg}{dx}dx = \int f(g)dg = F(g)+c$. זה עוזר לזכור, אבל זה "סלנג".

טענה 3.1 (החלפת משתנים 2) יהיו I,J רווחים כלשהם, ותהאנה $f:I\to\mathbb{R}$, $g:J\to I$ פונקציות. נניח כי g גזירה על J ולכל $x\in J$ מתקיים $g'(x)\neq 0$. כמו כן g על I. נניח כי קיימת $F:J\to\mathbb{R}$ קדומה של $f\circ g\cdot g'$ על J. במקרה זה קיימת קדומה ל f על I ומתקיים $\int f(x)dx = F\circ g^{-1} + c$.

הצבה טריגונומטרית/אוניברסאלית (תרגול 1)

1.2.1 הצבה טריגונומטרית

כאשר יש לנו פונקציה המורכבת מפונקציות טריגונומטריות ניתן להציב $x=2\arctan u$ ואז מזהויות טריגונומטריות

$$\sin x=\frac{2u}{1+u^2},\quad \cos x=\frac{1-u^2}{1+u^2},\quad \tan x=\frac{2u}{1-u^2},\quad \mathrm{d}x=\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u$$

תרגיל: חשבו פונקציה קדומה עבור $\frac{1}{\sin^3 x}$ בתחום $0<x<\pi$.

טיוטה: אז נשתמש בהצבה $x=2\arctan u$ ונקבל

$$\begin{aligned}\int\frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x}&=\int\frac{\left(1+u^2\right)^3}{8u^3}\cdot\frac{2}{1+u^2}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{4}\int\frac{1+2u^2+u^4}{u^3}\,\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{4}\int\left(u+\frac{2}{u}+\frac{1}{u^3}\right)\mathrm{d}u\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}u^2+2\ln u-\frac{1}{2u^2}\right)+C\end{aligned}$$

פתרון: נגדיר $f:(0,\pi)\to\mathbb{R}$ על ידי $f\left(x\right)=\frac{1}{\sin^3 x}$ ו־$g:(0,\infty)\to(0,\pi)$ על ידי $g\left(x\right)=2\arctan x$. אז מתקיים:

- g גזירה ו־$g'\left(x\right)=\frac{2}{1+x^2}\neq 0$ עבור $x>0$.
- g היא על $(0,\pi)$ כי יש לה הופכית (משמאל) $g^{-1}\left(x\right)=\tan\frac{x}{2}$.
- מטבלת פונקציות קדומות וזהויות טריגונומטריות מתקיים כי

$$\begin{aligned}\int f\circ g\left(x\right)g'\left(x\right)\mathrm{d}t&=\int\frac{\left(1+x^2\right)^3}{8x^3}\cdot\frac{2}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int\frac{1+2x^2+x^4}{x^3}\,\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\int\left(x+\frac{2}{x}+\frac{1}{x^3}\right)\mathrm{d}x\\&=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{2}x^2+2\ln x-\frac{1}{2x^2}\right)+C\end{aligned}$$

ולכן $F:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת על ידי $F\left(u\right)=\frac{1}{8}x^2+\frac{1}{2}\ln x-\frac{1}{8x^2}$ והיא קדומה של $(f\circ g)\cdot g'$.

ממשפט החלפת משתנים מתקיים:

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} = \frac{1}{8}\tan^2\frac{x}{2} + \frac{1}{2}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{1}{8\tan^2\frac{x}{2}} + C$$

מזהויות טריגונומטריות ($\tan\frac{\theta}{2} = \sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}$) מתקיים:

$$\begin{aligned}\tan^2\frac{x}{2} - \frac{1}{\tan^2\frac{x}{2}} &= \frac{1-\cos x}{1+\cos x} - \frac{1+\cos x}{1-\cos x}\\ &= \frac{(1-\cos x)^2 - (1+\cos x)^2}{(1+\cos x)(1-\cos x)}\\ &= -\frac{4\cos x}{1-\cos^2 x}\\ &= -\frac{4\cos x}{\sin^2 x}\end{aligned}$$

ולכן

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{\sin^3 x} = \frac{1}{2}\ln\left(\tan\frac{x}{2}\right) - \frac{\cos x}{2\sin^2 x} + C$$

אינטגרל רימן בקטע סופי וסגור

מבוא לאינטגרל רימן

חלוקה: יהי $[a,b]$ קטע. חלוקה של הקטע היא קבוצת נקודות $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ ת כך ש-$a=x_0<x_1<x_2<\dots<x_n=b$.

הערות:

- אנחנו לוקחים קטע סגור, לוקחים את הקצוות ובוחרים עוד נקודות בפנים, כך שבחלוקה יש n נקודות.
- החלוקה יוצרת $n-1$ קטעים (בין הנקודות).
- **את הקטע ה-i-י בחלוקה $[x_i,x_{i+1}]$ אסמן לצורך נוחות ב-J.**
- חלוקה נפוצה תהיה **החלוקה הרגולרית** – זוהי חלוקה ל-n קטעים ($n+1$ נקודות) בה כל קטעי החלוקה הן באורך שווה ($\frac{b-a}{n}$).

פרמטר החלוקה: בהינתן קטע $[a,b]$ וחלוקה $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ של הקטע, הפרמטר של החלוקה הוא $\lambda(\Pi)=\max\limits_{0\le i\le n-1}(x_{i+1}-x_i)$.

הערה: הפרמטר של החלוקה הוא המקסימום על כל אורכי הקטעים, כלומר תת-הקטע הכי ארוך בחלוקה.

עידון: יהי $[a,b]$ קטע ותהאנה Π_1,Π_2 חלוקות של הקטע. נאמר כי Π_2 היא עידון של Π_1 כאשר $\Pi_1\subseteq\Pi_2$.

הערות:

- בעידון אנו מוסיפים עוד נקודות לחלוקה הקודמת, וכך מקבלים **חלוקה עדינה יותר**.
- חלוקה אחת היא עידון של חלוקה אחרת אם היא **מתקבלת מן הקודמת על ידי הוספת נקודות חלוקה**. לזכור **שהחלוקה המקורית מוכלת בעידון**, העידון היא חלוקה שמכילה עוד נקודות.

תרגיל לבית: יהי $[a,b]$ קטע ותהאנה Π_1,Π_2 חלוקות של הקטע.

- אם Π_2 עידון של Π_1 אז $\lambda(\Pi_2)\le\lambda(\Pi_1)$ (**מטלה 2 – שאלה 3**).
- קיימת חלוקה Π_3 של $[a,b]$ שהיא עידון של Π_1 ושל Π_2 (**הוכח בתרגול 2 – טענה שימושית להוכחות**)

סכומי דרבו: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. תהא $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ חלוקה של $[a,b]$.

- **סכום דרבו עליון** של f ביחס לחלוקה Π מוגדר ע"י: $\overline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=0}^{n-1}\sup\limits_{x\in J}f(x)(x_{i+1}-x_i)$
- **סכום דרבו תחתון** של f ביחס לחלוקה Π מוגדר ע"י: $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{i=0}^{n-1}\inf\limits_{x\in J}f(x)(x_{i+1}-x_i)$

הערות:

- בעצם אנחנו סוכמים שטחי מלבנים. רוחב המלבן הוא אורך הקטע ה-i בחלוקה, וגובה המלבן הוא ערך הפונקציה בנקודה, בסכומי דרבו ערך הפונקציה שאנחנו לוקחים הוא הסופרימום/אינפימום.
- אם הפונקציה **רציפה** בקטע החלוקה (שהוא קטע סגור), אז **הסופרימום והאינפימום שלה בקטע הם המקסימום והמינימום** בהתאמה.
- יש מקומות (חדו"א 2א) שהגדירו את המושג של תנודה, שזה ישירות ההפרש בין הסופ לאינפ וזה קצת מקל בהוכחות, חבל שפה ממש מתנגדים לסימונים ולקיצורים.

טענה (שיעור 1): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אז:

1. לכל חלוקה Π של $[a,b]$ מתקיים: $\inf\limits_{x\in[a,b]}f(x)(b-a)\le\underline{S}(f,\Pi)\le\overline{S}(f,\Pi)\le\sup\limits_{x\in[a,b]}f(x)(b-a)$
2. לכל שתי חלוקות Π_1,Π_2 אם Π_2 היא עידון של Π_1 אז: $\boldsymbol{\underline{S}(f,\Pi_1)\le\underline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_1)}$
3. לכל שתי חלוקות שונות זו מזו Π_1,Π_2 מתקיים: $\underline{S}(f,\Pi_1)\le\overline{S}(f,\Pi_2)$

הערה: כשמעדנים חלוקה, אז סכומי דרבו תחתונים עולים וסוגרים על הגרף מלמטה, בעוד שסכומי דרבו עליונים יורדים וסוגרים על הגרף מלמעלה. ככל שנעדן יותר את החלוקה, ככה נתקרב יותר למדוד את השטח האמיתי, התחתונים עולים והעליונים יורדים.

תרגיל לבית: להשלים את ההוכחה של 2.

אינטגרל עליון/תחתון: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה.

- **האינטגרל העליון** של f ב-$[a,b]$ מוגדר להיות $\overline{\int_a^b} f(x)dx=\inf\{\overline{S}(f,\Pi)|\Pi\ is\ a\ partition\ of\ [a,b]\}$
- **האינטגרל התחתון** של f ב-$[a,b]$ מוגדר להיות $\underline{\int_a^b} f(x)dx=\sup\{\underline{S}(f,\Pi)|\Pi\ is\ a\ partition\ of\ [a,b]\}$

הערה: נשים לב כי האינטגרל העליון הוא האינפימום על קבוצת כל סכומי דרבו העליונים, כלומר הוא **סכום דרבו העליון הכי קטן** והכי הדוק על הגרף. בנ"ל האינטגרל התחתון הוא **סכום דרבו התחתון הכי גדול**.

שימושים:

- אם ידוע לנו כי פונקציה אינטגרבילית ניתן להשתמש באינטגרל עליון/תחתון (תרגול 2):

$$\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x=\overline{\int_a^b} f_2(x)\,\mathrm{d}x=\inf\{\overline{S}(f_2,\Pi):\Pi\text{ a partition of }[a,b]\}$$
$$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x=\underline{\int_a^b} f_1(x)\,\mathrm{d}x=\sup\{\underline{S}(f,\Pi):\Pi\text{ a partition of }[a,b]\}$$

מתכונות הסופרמום קיימת Π_1 חלוקה של $[a,b]$ כך ש-$\int_a^b f_1(x)\,\mathrm{d}x<\underline{S}(f_1,\Pi_1)+\frac{\varepsilon}{3}$.
מתכונות האינפימום קיימת Π_2 חלוקה של $[a,b]$ כך ש-$\overline{S}(f_2,\Pi_2)<\int_a^b f_2(x)\,\mathrm{d}x+\frac{\varepsilon}{3}$.

- ניזכר:
  - סופרימום – אם M סופרימום אז קיים $a\in A$ כך ש: $M-\varepsilon<a$ (הורדנו טיפה ויש איבר יותר גדול).
  - אינפימום – אם m אינפימום אז קיים $a\in A$ כך ש: $m+\varepsilon>a$ (הוספנו טיפה ויש איבר יותר קטן).

אינטגרביליות לפי דרבו ולפי רימן

אינטגרביליות רימן לפי דרבו: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. נאמר כי f אינטגרבילית רימן ב-$[a,b]$ לפי דרבו כאשר:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx=\underline{\int_a^b} f(x)dx=\int_a^b f(x)dx$$

תרגיל לבית:

- יהי $[a,b]$ קטע ויהי $\alpha\in\mathbb{R}$. נגדיר $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=\alpha$ לכל $x\in[a,b]$. הראו כי f אינטגרבילית בקטע וחשבו את האינטגרל שלה.
- נגדיר $f:[0,1]\to\mathbb{R}$ על ידי $f(x)=x^2$ לכל $x\in[0,1]$. הראו כי f אינטגרבילית בקטע וחשבו את האינטגרל שלה (מטלה 2 – שאלה 2ב).

קריטריון דרבו לאינטגרביליות רימן (שיעור 1): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. f אינטגרבילית רימן לפי דרבו $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon>0$ קיימת חלוקה Π של $[a,b]$ כך ש- $\overline{S}(f,\Pi)-\underline{S}(f,\Pi)<\varepsilon$.

קבוצת נקודות בחירה: יהי $[a,b]$ קטע, תהא $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ חלוקה של $[a,b]$. תהא $\xi=\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ קבוצת נקודות כך שלכל $0\le i\le n-1$ מתקיים: $\xi_i\in[x_i,x_{i+1}]$. ξ תיקרא קבוצת נקודות בחירה.

סכום רימן: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. תהא $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ חלוקה של $[a,b]$. תהא $\xi=\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$ קבוצת נקודות בחירה. סכום רימן של f ביחס לחלוקה Π וביחס לקבוצת נקודות בחירה ξ הוא: $S(f,\Pi,\xi)=\sum_{i=0}^{n-1}f(\xi_i)(x_{i+1}-x_i)$

הערה: ראיתי שהן נקראות גם "נקודות מתאימות", שם יותר "מתאים" לדעתי. אפשר גם "נקודות דגימה".

תרגיל לבית: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. תהא $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ חלוקה של $[a,b]$. אז לכל בחירה של נקודות בחירה $\xi=\{\xi_i\}_{i=0}^{n-1}$:

$$\underline{S}(f,\Pi)\le S(f,\Pi,\xi)\le\overline{S}(f,\Pi)$$

אינטגרביליות רימן לפי רימן (שיעור 2): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. נאמר כי f **אינטגרבילית רימן לפי רימן** כאשר קיים מספר I כך שלכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל חלוקה Π של $[a,b]$, אם $\lambda(\Pi)<\delta$ אז לכל בחירה ξ של נקודות בחירה עבור Π: $|S(f,\Pi,\xi)-I|<\varepsilon$.

משפט (שיעור 2): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. f **אינטגרבילית רימן לפי רימן** ב-$[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f **חסומה וגם אינטגרבילית רימן לפי דרבו** ב-$[a,b]$.

תרגיל לבית: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$.

- אם f אינטגרבילית רימן על $[a,b]$ ו-$a\le c<d\le b$ אז f אינטגרבילית רימן על $[c,d]$.
- **אדיטיביות האינטגרל:** לכל $c\in(a,b)$ אם f אינטגרבילית ב-$[a,c]$ וב-$[c,b]$ אז f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ ומתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx=\int_a^c f(x)dx+\int_c^b f(x)dx$$

משפטים ותכונות

תנאים מספיקים לאינטגרביליות:

טענה (שיעור 2): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. אם f **רציפה** ב-$[a,b]$ אז f **אינטגרבילית** ב-$[a,b]$.

תרגיל לבית: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. אז:

$$\sup_{x\in[a,b]}f(x)-\inf_{x\in[a,b]}f(x)=\sup_{x,y\in[a,b]}\big(f(x)-f(y)\big)=\sup_{x,y\in[a,b]}|f(x)-f(y)|$$

טענה (שיעור 2): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. אם f **מונוטונית** ב-$[a,b]$ אז f **אינטגרבילית** ב-$[a,b]$.

תרגיל לבית: להוכיח את המקרה ש-f יורדת (הוכחנו בכיתה עבור f עולה).

תרגיל לבית: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ חסומה. נניח כי f **רציפה פרט למספר סופי של נקודות**. הוכיחו כי f אינטגרבילית ב-$[a,b]$. (טיפ: להתחיל עם נקודת אי-רציפות אחת ואז להוכיח באינדוקציה.)

משפטים נוספים:

ליניאריות האינטגרל (שיעור 2): תהאנה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ ויהיו $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$. אם f ו-g אינטגרביליות ב-$[a,b]$ אז $\alpha f+\beta g$ אינטגרבילית ב-$[a,b]$ וכמו כן:

$$\int_a^b \alpha f(x)+\beta g(x)dx=\alpha\int_a^b f(x)dx+\beta\int_a^b g(x)dx$$

תרגיל לבית: הוכחת המשפט במקרה הכללי (בכיתה הוכחנו עבור $\alpha,\beta\neq 0$).

מונוטוניות האינטגרל (שיעור 2): תהאנה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ב-$[a,b]$. נניח כי לכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x)\ge g(x)$. אז:

$$\int_a^b f(x)dx\ge\int_a^b g(x)dx$$

אי שוויון המשולש לאינטגרלים (שיעור 2): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. $|f|$ אינטגרלית וכמו כן: $\left|\int_a^b f(x)dx\right|\le\int_a^b|f(x)|dx$.

תרגיל לבית:

- תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. f אינטגרבילית ב-$[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f חסומה ב-$[a,b]$ וגם לכל $\varepsilon,\eta>0$ קיימת חלוקה $\Pi=\{x_i\}_{i=0}^n$ של $[a,b]$ כך שמתקיים $\sum_{i\in A}x_{i+1}-x_i<\varepsilon$ כאשר $A=\{0\le i\le n-1|\sup_{x\in J}f(x)-\inf_{x\in J}f(x)\le\eta\}$.
- הראו כי פונקצית רימן אינטגרבילית ב-$[0,1]$.

<u>טענה (שיעור 3)</u>: תהאנה $f:[a,b]\to[c,d]$ ו-$g:[c,d]\to\mathbb{R}$ פונקציות. נניח כי f אינטגרבילית ו-g רציפה.
אז $g\circ f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית.

<u>טענה (שיעור 3)</u>: תהאנה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות, אז fg אינטגרבילית.

<u>תרגיל לבית</u>: להוכיח את הטענה עבור f ו-g אי-שליליות, ישירות מהקריטריונים שלמדנו.

<u>משפט (שיעור 3)</u>: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. f אינטגרבילית רימן לפי רימן ב-$[a,b]$ $\Leftrightarrow$ f חסומה וגם אינטגרבילית לפי דרבו ב-$[a,b]$.

<u>תרגיל לבית</u>: כחלק מההוכחה של השקילות בין רימן ודרבו, טענת עזר מגעילה כלשהי.

<u>טענה (תרגול 2)</u>: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$. אם f **אינטגרבילית** רימן לפי רימן ב-$[a,b]$ אז f **חסומה** ב-$[a,b]$.

ממשפט זה נובע התנאי ההכרחי לאינטגרביליות – חסימות. **אם פונקציה לא חסומה אז היא לא אינטגרבילית!**

<u>טענה (תרגול 2)</u>: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית לפי רימן, תהי $\{\Pi_n\}$ סדרת חלוקות של $[a,b]$, ולכל $n\in\mathbb{N}$ תהי ξ_n קבוצת נקודות בחירה לחלוקה Π_n. אם $\boldsymbol{\lambda(\Pi_n)\to 0}$ אז: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} S(f,\Pi_n,\xi_n)=\int_a^b f(x)dx}$.

המשפט היסודי

<u>מוסכמה</u>: אם $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית, נסמן $\int_b^a f(x)dx=-\int_a^b f(x)dx$.

<u>אינטגרל לא מסוים</u>: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור ב-I. יהי $a\in I$. נגדיר אינטגרל לא מסוים של f ב-I בתור הפונקציה $F:I\to\mathbb{R}$ המוגדרת כל ידי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ לכל $x\in I$.

<u>משפט (שיעור 4)</u>: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור ב-I. יהי $a\in I$.
נגדיר $F:I\to\mathbb{R}$ המוגדרת כל ידי $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ לכל $x\in I$, אז F **רציפה**.

<u>תרגיל לבית</u>:

- הוכחת המשפט עבור נקודת קצה.
- באותם תנאים כמו במשפט אבל – אם I קטע סגור אז F היא ליפשיץ.

<u>המשפט היסודי של החשבון הדיפרנציאלי (שיעור 4)</u>: תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור ב-I. יהי $a\in I$.
נגדיר $F(x)=\int_a^x f(t)dt$ לכל $x\in I$. תהא $x_0\in I$. אם f רציפה ב-x_0 אז F גזירה ב-x_0 ומתקיים $F'(x_0)=f(x_0)$.

<u>תרגיל לבית</u>:

- הוכחת המשפט עבור נקודת קצה.
- תהא $f:I\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת-קטע סגור של I. יהיו $F,\hat{F}$ אינטגרלים לא מסוימים של F.
הראו כי קיים $c\in\mathbb{R}$ כך שלכל $x\in I$ מתקיים $F(x)-\hat{F}(x)=c$.

<u>מסקנה (שיעור 4)</u>: **אם $\boldsymbol{f:I\to\mathbb{R}}$ רציפה אז יש לה קדומה.**

<u>המשפט היסודי של החשבון האינטגרלי/נוסחת ניוטון-לייבניץ (שיעור 4)</u>: תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית ובעלת קדומה ב-$[a,b]$. עבור F קדומה כלשהי של f מתקיים: $\int_a^b f(x)dx=F(b)-F(a)$.

<u>נשים לב למקרים הבאים:</u>

- <u>פונקציות אינטגרביליות שאינן בעלות קדומה</u> – נסתכל על הפונקציה הבאה שרציפה פרט לנקודה אחת ולכן אינטגרבילית, $f(x)=\begin{cases}0 & x=0\\ 1 & 0<x\le 1\end{cases}$. פונקציה זו לא מקיימת תכונת דרבו ולכן אין לה קדומה.
- פונקציות בעלות קדומה שאינן אינטגרביליות.
- פונקציות **רציפות** – הן החיתוך בין שתי הקבוצות הללו, הן **גם אינטגרביליות וגם בעלות קדומה.**

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים (שיעור 4): תהאנה $F,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות ב-$[a,b]$ ונגזרותיהן אינטגרביליות רימן ב-$[a,b]$ אז:

$$\int_a^b F'(x)g(x)dx = F(x)g(x)\,|_a^b - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

שינוי משתנים 1 (שיעור 4): תהאנה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[c,d]\to[a,\mathrm{b}]$ פונקציות. נניח כי f אינטגרבילית ובעלת קדומה. בנוסף g גזירה והפונקציה $(f\circ g)g'$ אינטגרבילית ב-$[c,d]$. אז:

$$\int_c^d f\circ g(x)g'(x)dx = \int_{g(c)}^{g(d)} f(x)dx$$

שינוי משתנים 2 (שיעור 4): תהאנה $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $g:[c,d]\to[a,\mathrm{b}]$ פונקציות. g מונוטונית ממש ועל $[a,b]$. נניח כי g גזירה והפונקציה
$(f\circ g)g'$ אינטגרבילית ובעלת קדומה ב-$[c,d]$. אז:

$$\int_a^b f(x)dx = \int_{g^{-1}(a)}^{g^{-1}(b)} f\circ g(x)g'(x)dx$$

משפטי ערך ביניים

משפט ערך הביניים 1 (שיעור 4): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרבילית. אז קיים $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)\le\eta\le\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)dx = \eta(b-a)$$

משפט ערך הביניים 2 (שיעור 4): תהא $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ רציפה. אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)dx = c(b-a)$$

תרגיל לבית: תהאנה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות ונניח כי g אי-שלילית. אז קיים $\inf\limits_{x\in[a,b]} f(x)\le\eta\le\sup\limits_{x\in[a,b]} f(x)$ כך שמתקיים $\int_a^b f(x)dx = \eta(b-a)$. יתר על כן, אם f רציפה קיים $c\in[a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(c)\int_a^b g(x)dx$$

משפט ערך הביניים של בונה (שיעור 4): תהאנה $f,g:[a,b]\to\mathbb{R}$ אינטגרביליות אם f מונוטונית אז קיים $c\in[a,b]$ כך ש:

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(a)\int_a^c g(x)dx + f(b)\int_a^b g(x)dx$$

תרגיל לבית: להשלים את הוכחת המשפט למקרה שבו f יורדת.

אינטגרל לא אמיתי

אינטגרל לא אמיתי

אינטגרל לא אמיתי (קטע לא חסום): יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$. נניח כי f אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$. נגדיר $F: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ על ידי $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ לכל $x \in [a,+\infty)$.
נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ בקטע $[a,+\infty)$ **מתכנס** כאשר **קיים וסופי הגבול** $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. אם הגבול אינו קיים או שאינו סופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי **מתבדר**.

באופן דומה, ניתן להגדיר $f: (-\infty,a] \to \mathbb{R}$ ולהגדיר $F(x) = \int_x^a f(t)dt$, ולחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to-\infty} F(x)$.

אינטגרל לא אמיתי (פונקציה לא חסומה בקטע): תהא $f: [a,b) \to \mathbb{R}$. נניח כי f אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,b)$.
נגדיר $F: [a,b) \to \mathbb{R}$ על ידי $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ לכל $x \in [a,b)$.
נאמר כי האינטגרל הלא אמיתי $\int_a^b f(x)dx$ בקטע $[a,b)$ **מתכנס** כאשר **קיים וסופי הגבול** $\lim\limits_{x\to b^-} F(x)$ (הגבול של F משמאל ב-b). אם הגבול אינו קיים או שאינו סופי נאמר שהאינטגרל הלא אמיתי **מתבדר**.

באופן דומה, ניתן להגדיר $f: (a,b] \to \mathbb{R}$ ולהגדיר $F(x) = \int_x^b f(t)dt$, ולחשב את הגבול $\lim\limits_{x\to a^+} F(x)$ (הגבול של F מימין ב-a).

טענה (שיעור 5): תהא $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת-קטע קומפקטי. אם קיים $c \in (\alpha,\beta)$ כך שהאינטגרלים הלא אמיתיים: $\int_\alpha^c f(x)dx$ ו-$\int_c^\beta f(x)dx$ מתכנסים, אז לכל $d \in (\alpha,\beta)$ האינטגרלים $\int_\alpha^d f(x)dx$ ו-$\int_d^\beta f(x)dx$ מתכנסים ומתקיים:

$$\int_\alpha^d f(x)dx + \int_d^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

כלומר, לא משנה איזו נקודה נבחר בתחום.

תרגיל לבית: הוכחת הטענה.

טענה (שיעור 5): תהא $f: (\alpha,\beta) \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית על כל תת-קטע קומפקטי. אם קיים $c \in (\alpha,\beta)$ כך שהאינטגרלים הלא אמיתיים: $\int_\alpha^c f(x)dx$ ו-$\int_c^\beta f(x)dx$ מתכנסים, אז נאמר כי $\int_\alpha^\beta f(x)dx$ מתכנס ובמקרה זה נגדיר:

$$\int_\alpha^\beta f(x)dx = \int_\alpha^c f(x)dx + \int_c^\beta f(x)dx$$

קריטריוני התכנסות

הערה – בשיעור ליאור ניסח את כל קריטריוני ההתכנסות על קטע לא חסום, אפשר לנסח באופן דומה על קטע סופי.

קריטריון קושי (שיעור 5): יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$. נניח כי f אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$. אז $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **מתכנס** $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך שלכל $q > p > M$ מתקיים $\left|\int_p^q f(x)dx\right| < \varepsilon$.

תרגיל לבית: נסחו את קריטריון קושי לאינטגרל לא אמיתי על קטע סופי.

קריטריון קושי בקטע סופי: יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f: [a,b) \to \mathbb{R}$. נניח כי f אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,b)$. אז $\int_a^b f(x)dx$ מתכנס $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $p,q \in (b-\delta,b)$ מתקיים $\left|\int_p^q f(x)dx\right| < \varepsilon$.

קריטריון ההשוואה (שיעור 5): תהאנה $f,g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציות. נניח כי f,g אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$. נניח כי f,g אי שליליות. כמו כן, נניח כי קיימים $x_0 \geq a$ ו-$M > 0$ כך שלכל $x \geq x_0$ מתקיים $f(x) \leq Mg(x)$. במקרה זה אם $\int_a^{+\infty} g(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ מתכנס.

הערה – לרוב ניקח $M = 1$.

תרגיל: הוכיחו כי האינטגרל $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$ מתכנס בתנאי.

פתרון: בתרגיל קודם הוכחנו כי $\int_1^{+\infty}\frac{\sin(x)}{x}dx$ מתכנס, ועל כן על מנת להוכיח שהוא מתכנס בתנאי, עלינו להראות כי אינו מתכנס בהחלט. כלומר, עלינו להראות כי האינטגרל $\int_1^{+\infty}\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|dx$ מתבדר. נסמן $f(x)=\frac{\sin(x)}{x}$. נשים לב כי כיוון ש-$|\sin(x)|\le 1$ לכל $x\in\mathbb{R}$, נוכל בעזרת שימוש בזהויות טריגונומטריות את אי-השוויון הבא לכל $x\ge 1$:

$$\left|\frac{\sin(x)}{x}\right|\ge\frac{\sin^2(x)}{x}=\frac{\frac{1}{2}-\cos(2x)}{x}=\frac{1}{2x}-\frac{\cos(2x)}{2x}$$

נסמן $g(x)=\frac{1}{2x}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{x}$ ו-$h(x)=\frac{1}{2}\cdot\frac{\cos(2x)}{x}$ לכל $x\in[1,+\infty)$. בהרצאה הראיתם כי האינטגרל $\int_1^{+\infty}g(x)dx$. הוכיחו כי האינטגרל $\int_1^{+\infty}\frac{\cos(2x)}{2x}dx$ **(עשו זאת, עקבו אחר שלבי ההוכחה מהתרגיל הקודם והתאימו למקרה זה).**

מתקיימים כל תנאי משפט ההשוואה בין $|f(x)|$ ו-$g(x)-h(x)$ ועל כן, כיוון ש-$\int_1^{+\infty}(g(x)-h(x))dx$ מתבדר, גם $\int_1^{+\infty}|f(x)|dx$ מתבדר.

<u>קריטריון ההשוואה הגבולי (שיעור 5):</u> תהאנה $f,g:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציות. נניח כי f,g אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$. נניח כי f,g אי שליליות. כמו כן, נניח כי קיימים $x_0\ge a$ כך שלכל $x\ge x_0$ מתקיים $g(x)>0$. וכמו כן קיים הגבול $L=\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

- אם $L\in(0,\infty)$ אז האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחדיו.
- אם $L=0$ אז אם $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ מתכנס.
- אם $L=\infty$ אז אם $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ מתכנס אז $\int_a^{+\infty}g(x)dx$ מתכנס.

<u>תרגיל לבית:</u> אם הגבול **חיובי** זה מתקיים בשני הכיוונים, כלומר **האינטגרלים מתכנסים ומתבדרים יחדיו**.

<u>תרגיל לבית:</u> תהא $f:[1,+\infty)\to\mathbb{R}$. נניח כי $\int_1^{+\infty}f(x)dx$ מתכנס. הוכיחו/הפריכו:

1. $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$
2. אם f רציפה בקטע אז $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$
3. אם קיים גבול ל-f ב-$+\infty$ אז $\lim_{x\to+\infty}f(x)=0$

א. הוכיחו כי האינטגרל $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ מתכנס.

פתרון: נסמן $f(x)=e^{-x^2}$ לכל $x\in[0,+\infty)$. כמו כן, נגדיר $g(x)=e^{-x}$ לכל $x\in[0,+\infty)$.

- f,g אינטגרביליות על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[0,+\infty)$.
- f,g אי-שליליות.
- עבור $x_0\ge 1$ ו-$M=1$, לכל $x\ge 1$ מתקיים כי $f(x)=e^{-x^2}\le e^{-x}=M\cdot g(x)$ (נובע ממונוטוניות עולה של e^x).

מתקיימים כל התנאים למבחן ההשוואה הגבולי. כיוון ש-$\int_0^{+\infty}g(x)dx$ מתכנס **(תוכיחו בתרגיל הבית)**, אז גם $\int_0^{+\infty}e^{-x^2}dx$ מתכנס, כרצוי.

<u>אינטגרל וטור (שיעור 6):</u> תהא $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה אי-שלילית ומונוטונית יורדת. אז לכל $N\in\mathbb{N}$ מתקיים:

$$\sum_{n=1}^{N}f(a+n)\le\int_a^{a+N}f(x)dx\le\sum_{n=0}^{N-1}f(a+n)$$

יתר על כן, $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ מתכנס $\Leftrightarrow\sum_{n=1}^{\infty}f(a+n)$ מתכנס ובמקרה זה:

$$\sum_{n=1}^{\infty}f(a+n)\le\int_a^{\infty}f(x)dx\le\sum_{n=0}^{\infty}f(a+n)$$

<u>תרגיל לבית:</u> לכל $n\in\mathbb{N}$ מתקיים: $\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{k}\le\ln(n+1)\le\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$.

<u>התכנסות בהחלט:</u> יהי $a\in\mathbb{R}$ ותהא $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$. נניח כי f אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$.
נאמר כי $\int_a^{+\infty}f(x)dx$ **מתכנס בהחלט** כאשר $\int_a^{+\infty}|f(x)|dx$ מתכנס.
אם האינטגרל מתכנס אך לא בהחלט נאמר כי הוא **מתכנס בתנאי**.

טענה (שיעור 6): יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהא $f: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$. נניח כי f אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$. אם $\int_a^{+\infty} f(x)dx$ **מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס**.

קריטריון דיריכלה (שיעור 6): תהאנה $f,g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציות. נניח כי f,g אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$. נניח כי g **מונוטונית** ומתקיים $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = 0$, וכמו כן הפונקציה $F: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $F(x) = \int_a^x f(t)dt$ לכל $x \in [a,+\infty)$ **חסומה**. אז $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ **מתכנס**.

תרגיל: נגדיר $f(x) = \frac{\sin(x)}{x}$ לכל $x \in [1,+\infty)$. הוכיחו כי האינטגרל $\int_s^{\infty} f(x)dx$ מתכנס לכל $s \in (1,+\infty)$.

פתרון: יהי $s \in (1,+\infty)$. נסמן $h(x) = \sin(x)$ ו-$g(x) = \frac{1}{x}$ לכל $x \in [s,+\infty)$.

- h,g אינטגרביליות על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[s,+\infty)$.
- g פונקציה מונוטונית המקיימת $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.
- נגדיר $H(x) = \int_s^x f(t)dt = \int_s^x \sin(t)dt = [-\cos(t)]_s^x = -\cos(s) + \cos(x)$. מתקיים לכל $x \in [1,+\infty)$:

$$|F(x)| \le |-\cos(s) + \cos(x)| \le 1 + 1 = 2$$

ועל כן זו פונקציה חסומה.

מתקיימים כל תנאי קריטריון דיריכלה, ולכן האינטגרל $\int_s^{+\infty} h(x)g(x)dx = \int_s^{+\infty} f(x)dxdx$ מתכנס.

קריטריון אבל (שיעור 6): תהאנה $f,g: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ פונקציות. נניח כי f,g אינטגרבילית על כל קטע קומפקטי המוכל ב-$[a,+\infty)$. נניח כי g **מונוטונית יורדת ואי-שלילית**. נגדיר $F: [a,+\infty) \to \mathbb{R}$ על ידי $F(x) = \int_a^x f(t)dt$. נניח כי קיים וסופי $\lim\limits_{x\to+\infty} F(x)$. אז $\int_a^{+\infty} f(x)g(x)dx$ **מתכנס**.

2 – סדרות וטורי פונקציות

סדרות פונקציות

התכנסות נקודתית ובמ"ש

סדרת פונקציות: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$. לכל $n \in \mathbb{N}^+$ תהא $f_n: A \to \mathbb{R}$, אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ תיקרא סדרת פונקציות על A.

התכנסות נקודתית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. יהי $x_0 \in A$. נאמר כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית בנקודה x_0 כאשר $\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

תהא $B \subseteq A$ ותהא $f: B \to \mathbb{R}$. נאמר כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת נקודתית על** B **ל-** f אם לכל $x \in B$ מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
כלומר, **לכל $x \in B$ ולכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}^+$** כך שלכל $n \ge N$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

תרגיל לבית:

- יחידות הגבול (אם סדרה מתכנסת נקודתית לשתי פונקציות שונות, הפונקציות האלה שוות).
- צמצום של פונקציה (אם f_n מתכנסת נקודתית על B ל-f, אז $f_n \restriction_C$ מתכנסת נקודתית ל-$f \restriction_C$).

התכנסות במ"ש: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. תהא $B \subseteq A$ ותהא $f: B \to \mathbb{R}$. נאמר כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ **מתכנסת במידה שווה** (במ"ש) על B ל-f כאשר: **לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}^+$** כך שלכל $n \ge N$ ולכל $x \in B$ מתקיים $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.

הגדרה שקולה (תרגול 5): תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. תהא $B \subseteq A$ ותהא $f: B \to \mathbb{R}$.
אז $f_n \underset{B}{\rightrightarrows} f \Leftrightarrow$ **לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N \in \mathbb{N}^+$** כך שלכל $n \ge N$ מתקיים $\sup\limits_{x\in B}|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$.
כלומר: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup\limits_{x\in B}|f_n(x) - f(x)| = 0$.

הערות:

- כדי לשלול התכנסות במ"ש של סדרת פונקציות, מספיק להוכיח כי קיים $\varepsilon > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים $x_n \in A$ כך שמתקיים: $|f_n(x_n) - f(x_n)| \ge \varepsilon$.
- התכנסות במ"ש גוררת התכנסות נקודתית.

תרגיל: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על $[0,1]$ המוגדרת על ידי $f_n(x) = \frac{1}{n+x^2}$ לכל $x \in [0,1]$. הוכיחו כי הסדרה הפונקציות מתכנסת (נקודתית) ומצאו את הפונקציה הגבולית. האם ההתכנסות היא במידה שווה?

פתרון: נגדיר פונקציה $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ על ידי $f(x) = 0$ לכל $x \in [0,1]$.

יהי $x \in [0,1]$ אז מתקיים כי

$$f_n(x) = \frac{1}{n+x^2} = \frac{\frac{1}{n}}{1+x^2\cdot\frac{1}{n}}$$

בנוסף ידוע כי $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ ולכן מחשבון גבולות מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{\frac{1}{n}}{1+x^2\cdot\frac{1}{n}} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}}{1+x^2\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}} = \frac{0}{1+x^2\cdot 0} = 0$$

אז מתקיים כי $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ לכל $x \in [0,1]$. ולכן הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ל-f נקודתית.

נראה כי ההתכנסות היא במידה שווה:

יהי $n \in \mathbb{N}^+$ ויהי $x \in [0,1]$

$$|f_n(x) - f(x)| = \left|\frac{1}{n+x^2}\right| = \frac{1}{n+x^2} \le \frac{1}{n}$$

לכן

$$0 \le \sup_{x\in[0,1]} |f_n(x) - f(x)| \le \frac{1}{n}$$

ומכיוון ש-$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ לפי סנדוויץ'

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{x\in[0,1]}|f_n(x) - f(x)| = 0$$

ולכן $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה ל-f.

קריטריוני התכנסות

סדרת קושי במידה שווה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. תהא $B \subseteq A$. נאמר כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במידה שווה על B כאשר **לכל $0 < \varepsilon$ קיים** $\boldsymbol{N} \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $n, m \geq N$ ולכל $x \in B$ מתקיים $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$.

קריטריון קושי להתכנסות במ"ש (שיעור 7): תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. תהא $B \subseteq A$. אז $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על B ל-f $\Leftrightarrow$ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת קושי במידה שווה על B.

הגדרה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. נאמר כי הסדרה חסומה במידה אחידה כאשר קיים $M > 0$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ ולכל $x \in A$ מתקיים $|f_n(x)| \leq M$.

טענה (שיעור 8): תהאנה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ו-$\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרות פונקציות על $A \subseteq \mathbb{R}$. תהאנה $f, g: A \to \mathbb{R}$. נניח $f_n \rightrightarrows f$ ו-$g_n \rightrightarrows g$. אם הפונקציות f, g חסומות אז $f_n g_n \rightrightarrows fg$.

תרגיל: תהי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על $(1,\infty)$ המוגדרת על ידי $f_n(x) = 1 + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{n^x}$ לכל $x \in (1,\infty)$ הוכיחו כי הסדרה אינה מתכנסת במידה שווה.

פתרון: נוכיח בעזרת קריטריון קושי.

נתבונן ב- $\varepsilon = \frac{1}{4} > 0$ ויהי $n_0 \in \mathbb{N}^+$ כלשהו.

נתבונן ב- $n = n_0 + 1$, $m = 2n$ ונתבונן ב- $x = 1 + \frac{1}{n}$ אז מתקיים

$$\begin{aligned}
|f_m(x) - f_n(x)| &= \left|1 + \frac{1}{2^x} + \cdots + \frac{1}{m^x} - 1 - \frac{1}{2^x} - \cdots - \frac{1}{n^x}\right| \\
&= \frac{1}{(n+1)^x} + \frac{1}{(n+2)^x} + \cdots + \frac{1}{m^x} \\
&\geq \underbrace{\frac{1}{m^x} + \frac{1}{m^x} + \cdots + \frac{1}{m^x}}_{\text{פעמים } m-n}
\end{aligned}$$

ולכן מתקיים כי

$$|f_m(x) - f_n(x)| \geq \frac{m-n}{m^x} = \frac{2n-n}{(2n)^{1+1/n}} = \frac{1}{2\sqrt[n]{2n}} \geq \frac{1}{4} = \varepsilon$$

ולכן אין התכנסות במידה שווה בקטע.

משפטי התכנסות במ"ש

התכנסות במ"ש וגבולות (שיעור 8): תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. תהא $f: A \to \mathbb{R}$. תהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נק' הצטברות של A. נניח כי:

1. לכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$ וסופי. נסמנו α_n.
2. $f_n \underset{A}{\rightrightarrows} f$.
3. אז $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת ומתקיים $\lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{n \to \infty} \alpha_n$.

בתרגול הופיע ניסוח יותר נחמד:

טענה. (גבול והתכנסות במידה שווה) תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה, תהא $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A ותהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. נניח כי $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במידה שווה לפונקציה $f: A \to \mathbb{R}$. אם לכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים וסופי הגבול $\lim_{x \to x_0} f_n(x)$ אז קיים וסופי הגבול $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ומתקיים

$$\lim_{n \to \infty} \lim_{x \to x_0} f_n(x) = \lim_{x \to x_0} f(x).$$

התכנסות במ"ש ורציפות (שיעור 8): תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. תהא $f: A \to \mathbb{R}$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$, f_n רציפה על A וכמו כן $f_n \rightrightarrows f$ אז f רציפה על A.

משפט דיני (שיעור 8): תהא $A \subseteq \mathbb{R}$ קומפקטית. תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על A. תהא $f: A \to \mathbb{R}$. נניח כי:

1. $f_n \to f$.
2. לכל $x \in A$ הסדרה $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מונוטונית.
3. לכל $n \in \mathbb{N}^+$: f_n רציפה וכמו כן f רציפה.

אז $f_n \rightrightarrows f$.

התכנסות במ"ש ואינטגרביליות (שיעור 9): תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות אינטגרביליות על קטע $[a,b]$ המתכנסת במ"ש לפונקציה f על $[a,b]$. אז f אינטגרבילית ומתקיים: $\lim_{n \to \infty} \int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx$.

התכנסות במ"ש וגזירות (שיעור 9): תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על קטע $[a,b]$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$, f_n גזירה ב-$[a,b]$. נניח כי הסדרה $\{f'_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש על $[a,b]$. נניח כי קיימת $x_0 \in [a,b]$ כך ש-$\{f_n(x_0)\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת. אז:

1. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת במ"ש לפונקציה f על $[a,b]$.
2. f גזירה ב-$[a,b]$ ומתקיים $f'_n \rightrightarrows f'$.

תרגיל. נגדיר $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ע"י $f_n(x) = \frac{\arctan(x^n)}{n}$ לכל $x \in [0,\infty)$. ונגדיר $f : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ עבור $f(x) = 0$ לכל $x \in [0,\infty)$.
הראו כי $f_n \rightrightarrows f$, האם $f'_n \rightrightarrows f'$?

נטען כי סדרת הנגזרות לא מכנסת ל-f' אפילו נקודתית, נתבונן בסדרת הנגזרות:
יהי $n \in \mathbb{N}$, הפונקציה f_n גזירה ומתקיים לכל $x \in [0,\infty)$,

$$f'_n(x) = \frac{1}{n}\frac{nx^{n-1}}{1+(x^n)^2} = \frac{x^{n-1}}{1+x^{2n}}$$

אכן, הפונקציה אינה מתכנסת נקודתית ב-$x=1$:

$$f'_n(1) = \frac{1^{n-1}}{1+1^{2n}} = \frac{1}{2} \xrightarrow[n \to \infty]{} \frac{1}{2} \neq 0 = f'(1)$$

טורי פונקציות

התכנסות נקודתית ובמ"ש

<u>הגדרה:</u> תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על $A \subseteq \mathbb{R}$. נגדיר סדרה חדשה $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ על A על ידי: $S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} f_k(x)$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$ ולכל $x \in A$. אם $\{S_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת נקודתית בנקודה $x_0 \in A$ נאמר כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס.
אם הסדרה מתכנסת במ"ש אז הטור מתכנס במ"ש.

<u>מבחן-M של ויירשטראס (שיעור 10):</u> תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על $A \subseteq \mathbb{R}$. תהא $B \subseteq A$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$ קיים $M_n > 0$ כך שלכל $x \in B$ מתקיים $|f_n(x)| \le M_n$. אם $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה על B.

תרגיל. נגדיר את $f_n : [0,\infty) \to \mathbb{R}$ ע"י $f_n(x) = n^2x^2e^{-n^2x}$ לכל $x \in [0,\infty)$.
נתבונן בטור הפונקציות $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n^2x^2e^{-n^2x}$.
האם הטור מתכנס נקודתית? אם כן, האם הטור מתכנס במידה שווה?
פתרון. נוכיח כי הטור מתכנס במידה שווה.
יהי $n \in \mathbb{N}$, נתבונן בפונקציה f_n:
נתבונן ב-f_n', מכללי גזירה:

$$f_n'(x) = 2n^2xe^{-n^2x} - n^4x^2e^{-n^2x} = n^2xe^{-n^2x}\left(2-n^2x\right)$$

לכל $x \in [0,\infty)$. נשווה לאפס בכדי למצוא נקודות חשודות:

$$n^2xe^{-n^2x}\left(2-n^2x\right) = 0$$

ולכן מתקיים כי $x = 0, \frac{2}{n^2}$ הן נקודות חשודות.
נבחין כי $f_n'(x)$ היא חיובית כאשר $x \in \left(0, \frac{2}{n^2}\right)$ ושלילית כאשר $x \in \left(\frac{2}{n^2}, \infty\right)$.
כלומר, מתקיים כי $f_n(x)$ עולה ממש ב-$\left(0, \frac{2}{n^2}\right)$ ויורדת ממש ב-$\left(\frac{2}{n^2}, \infty\right)$.
כלומר, לכל $x \in [0,\infty)$ מתקיים כי:

$$0 \le f_n(x) \le f_n\left(\frac{2}{n^2}\right) = n^2\frac{4}{n^4}e^{-n^2\frac{2}{n^2}} = \frac{4}{e^2}\frac{1}{n^2}$$

כפי שראינו בחדו"א 1ב מתקיים כי טור המספרים $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{4}{e^2}\frac{1}{n^2}$ מתכנס.
לכן, מ-M-בוחן מתקיים כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במידה שווה ולכן נקודתית.

<u>משפטים (שיעור 10):</u>

- <u>התכנסות במ"ש ורציפות:</u> תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על $A \subseteq \mathbb{R}$. תהא $B \subseteq A$. תהא $f: B \to \mathbb{R}$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$ הפונקציה f_n רציפה ב-B וכי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ במידה שווה. אז f רציפה ב-B.
- <u>התכנסות במ"ש ואינטגרביליות (אינטגרציה איבר-איבר):</u> תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על $[a,b]$. תהא $f: [a,b] \to \mathbb{R}$. נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$ הפונקציה f_n אינטגרבילית, וכי $\sum_{n=1}^{\infty} f_n = f$ במידה שווה, אז f אינטגרבילית ומתקיים:
$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=1}^{\infty}\int_a^b f_k(x)dx$$
- <u>התכנסות במ"ש וגזירות (גזירה איבר-איבר):</u> תהא $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת פונקציות על $[a,b]$.
נניח כי קיימת $x_0 \in [a,b]$ עבורה $\sum_{n=1}^{\infty} f_n(x_0)$ מתכנס.
נניח כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$ הפונקציה f_n גזירה ב-$[a,b]$.
בנוסף, הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f'_n$ מתכנס במ"ש על $[a,b]$.
אז: הטור $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ מתכנס במ"ש על $[a,b]$ ופונקציית הגבול f מקיימת $\boldsymbol{f' = \sum_{n=1}^{\infty} f'_n}$.

טורי חזקות

הגדרה: תהא $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה מספרית. תהא $x_0 \in \mathbb{R}$. נגדיר את טור החזקות המוגדר ע"י $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סביב x_0 ע"י:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$$

מוסכמה: $a^0 = 1$ לכל $a \in \mathbb{R}$.

משפט (שיעור 10): תהא $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה. יהי $y \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. נניח כי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n y^n$ מתכנס. אז:

1. לכל $x \in (-|y|,|y|)$ הטור **מתכנס בהחלט**.
2. לכל $0<r<|y|$ הטור **מתכנס במ"ש ב-$[-r,r]$**.

משפט אבל (שיעור 10): תהא $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ סדרה. אז קיים R יחיד בקטע $[0,+\infty]$ המקיים כי לכל $x \in \mathbb{R}$:

1. אם $|x|<R$ אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **מתכנס**.
2. אם $|x|>R$ אז הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ **מתבדר**.

R נקרא רדיוס ההתכנסות, ונקבל כי מתקיים כי לכל $x \in (-R,R)$ הטור מתכנס.

משפט קושי-הדמר (שיעור 11): תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נסמן $\rho = \overline{\lim}\sqrt[n]{|a_n|}$, נסמן ב-R את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$:

1. אם $\rho \in (0,+\infty)$ אז $R=\frac{1}{\rho}$.
2. אם $\rho = 0$ אז $R=+\infty$.
3. אם $\rho=+\infty$ אז $R=0$.

משפט דלמבר (תרגול 7): יהי $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות עם $a_n \neq 0$ החל ממקום מסוים. אם הגבול קיים במובן הרחב, רדיוס ההתכנסות R של הטור מקיים:

$$R=\lim_{n\to\infty}\frac{|a_n|}{|a_{n+1}|}$$

הרכבה (תרגול 7): יהי $g(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות המתכנס ב-$(-R,R)$. נגדיר את הפונקציה $f: A \to B$ כך ש-$|f(x)|<R$ לכל $x \in A$. אז מתקיים כי $g(f(x)) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n f(x)^n$.

טורי חזקות ידועים ושימושיים:

- $\sum_{k=0}^{\infty} x^k = \frac{1}{1-x}$ מתכנס ב $(-1,1)$.
- על פי המשפט גזירה איבר-איבר של טורי חזקות :

$$\sum_{k=0}^{\infty}(k+1)x^k = \sum_{k=1}^{\infty} kx^{k-1} = \frac{1}{(1-x)^2}$$ מתכנס ב $(-1,1)$.

- $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x$ מתכנס בכל הישר.
- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{-x^k}{k} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{-x^{k+1}}{k+1} = \ln(1-x)$ מתכנס ב $[-1,1)$
- $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{(2n+1)!}x^{2n+1} = \sin(x)$ מתכנס בכל הישר.
- $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k x^{2k} = \sum_{k=0}^{\infty}(-x^2)^k = \frac{1}{1+x^2}$ מתכנס ב $(-1,1)$.
- על פי המשפט אינטגרציה איבר-איבר של טורי חזקות : $\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\frac{1}{2k+1}x^{2k+1} = \arctan(x)$ מתכנס ב $[-1,1]$.

משפט (שיעור 11): תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נסמן ב-R את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$. אז בקטע $(-R,R)$ הטור מתכנס לפונקציה רציפה.

אינטגרציה איבר-איבר (שיעור 11): תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נסמן ב-R את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
נסמן ב-f את הפונקציה $f"(-R,R) \to \mathbb{R}$ על ידי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לכל $x \in (-R,R)$. אז לכל קטע $[a,b] \subseteq (-R,R)$,
f אינטגרבילית על $[a,b]$ ומתקיים:

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{b^{n+1} - a^{n+1}}{n+1}$$

משפט 11.7: (אינטגרציה של טור חזקות)
יהי $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R. אזי לכל נקודה $|x| < R$, מתקיים

א.

$$\int_0^x f(t)\,dt = \int_0^x \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n \right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

ב. לשני הטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ אותו רדיוס התכנסות R.

ג. אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודת הקצה $x = R$, אז גם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x = -R$.

גזירה איבר-איבר (שיעור 11): תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נסמן ב-R את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
נסמן ב-f את הפונקציה $f: (-R,R) \to \mathbb{R}$ על ידי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לכל $x \in (-R,R)$.
אז f גזירה ב-$(-R,R)$ ומתקיים לכל $x \in (-R,R)$:

$$f'(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n n x^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1}(n+1)x^n$$

משפט 11.8: (גזירה של טור חזקות)
יהי $f(x) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ טור חזקות בעל רדיוס התכנסות R. אזי לכל נקודה $|x| < R$, מתקיים

א.

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

ב. לשני הטורים $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$, $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ אותו רדיוס התכנסות R.

ג. אם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ מתכנס בנקודת הקצה $x = R$, אז גם הטור $\sum\limits_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$ מתכנס בנקודה זו.

ד. כנ"ל לגבי נקודת הקצה $x = -R$.

משפט (שיעור 11): תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה. נסמן ב-R את רדיוס ההתכנסות של הטור $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.
נסמן ב-f את הפונקציה $f"(-R,R) \to \mathbb{R}$ על ידי $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ לכל $x \in (-R,R)$. אז לכל $k \in \mathbb{N}^+$ ולכל $x \in (-R,R)$:
f גזירה k פעמים ב-x ומתקיים: $f^{(k)}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \frac{(n+k)!}{n!} x^n$. בפרט אם $R \neq 0$ מתקיים $a_k = \frac{f^{(k)}(0)}{k!}$.

3 – פונקציות בכמה משתנים

המבנה הטופולוגי של $\mathbb{R}^n$

המרחב $\mathbb{R}^n$

נגדיר מבנה של מרחב וקטורי על $\mathbb{R}^n = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix} \middle| x_1, \dots x_n \in \mathbb{R}\right\}$. בצירוף פעולות חיבור וכפל בסקלר מוגדר המרחב הוקטורי.

לכל $1 \le i \le n$ נסמן e_i וקטור שכולו אפסים פרט למקום ה-i. $\{e_1, \dots, e_n\}$ נקרא הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$. לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים: $x = \sum_{i=1}^n x_i e_i$.

מכפלה סקלרית: נגדיר מכפלה סקלרית כפונקציה $\langle\cdot,\cdot\rangle: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$.

לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ אם $y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}, x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \cdots \\ x_n \end{pmatrix}$ אז $\langle x, y\rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$.

הגדרה: יהיו $x, y \in \mathbb{R}^n$. נאמר כי x, y מאונכים או ניצבים כאשר $\langle x, y\rangle = 0$ ונסמן $x \perp y$.

טענה (שיעור 11): לכל $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ ולכל $a, b \in \mathbb{R}$ מתקיים:

1. סימטריה: $\langle x, y\rangle = \langle y, x\rangle$
2. בילינאריות: $\langle ax + by, z\rangle = a\langle x, z\rangle + b\langle y, z\rangle$
3. $\langle x, x\rangle \ge 0$ ומתקיים $\langle x, x\rangle = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

הנורמה הסטנדרטית האוקלידית: לכל $x \in \mathbb{R}^n$ נסמן $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ בתור הנורמה של x.

תכונות:

1. לכל $x \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\|x\| > 0$. יתר על כן, $x = 0 \Leftrightarrow \|x\| = 0$.
2. לכל $x \in \mathbb{R}^n$, לכל $a \in \mathbb{R}$ מתקיים $\|ax\| = |a| \cdot \|x\|$.

אי שוויון קושי-שוורץ (שיעור 12): לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $|\langle x, y\rangle| \le \|x\| \cdot \|y\|$.

אי שוויון המשולש עבור הנורמה האוקלידית (שיעור 12): לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ מתקיים $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

תרגילים לבית – לכל $x \in \mathbb{R}^n$:

- $\|x\| \le \sum_{j=1}^n |x_j|$.
- **לכל $1 \le j \le n$: $|x_j| \le \|x\|$ – שימושי!**

המטריקה האוקלידית: לכל $x, y \in \mathbb{R}^n$ נגדיר $d(x, y) = \|x - y\|$.

כלומר, מרחק בין שתי נקודות במרחב הנפלא שאנחנו מתעסקים בו, הוא בעצם:

$$d(x, y) = \sqrt{\langle x - y, x - y\rangle} = \sqrt{(x_1 - y_1)^2 + (x_2 - y_2)^2 + \cdots + (x_n - y_n)^2}$$

תכונות - לכל $x, y, z \in \mathbb{R}^n$:

1. $d(x, y) \ge 0$. יתר על כן $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$.
2. $d(x, y) = d(y, x)$
3. $d(x, z) \le d(x, y) + d(y, z)$

טופולוגיה (איכס)

סביבה כדורית/מעגלית: יהי $x_0 \in \mathbb{R}^n$, יהי $r > 0$.

- נגדיר **כדור פתוח** סביב x_0 ברדיוס r על ידי $B(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x_0) < r\}$
- נגדיר **כדור סגור** סביב x_0 ברדיוס r על ידי $\bar{B}(x_0, r) = \{x \in \mathbb{R}^n | d(x, x_0) \leq r\}$

נקודה פנימית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$, תהא $x_0 \in \mathbb{R}^n$. נאמר כי x_0 **נקודה פנימית** ב-A או ש-A סביבה של x_0 כאשר קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$B(x_0, \varepsilon) \subseteq A$. אוסף הנקודות הפנימיות של A נקרא **הפנים של** A ונסמנו $\boldsymbol{A^o}$ **או** $\boldsymbol{int(A)}$.

תרגיל לבית: לכל $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים $int(A) \subseteq A$.

קבוצה פתוחה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A תיקרא פתוחה כאשר $A = int(A)$.

קבוצה פתוחה היא קבוצה שכל הנקודות שלה הן נקודות פנימיות.

תרגיל לבית: לכל $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים כי A פתוחה $\Leftrightarrow$ לכל $x \in A$ קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$B(x, \varepsilon) \subseteq A$.

נקודת סגור: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$, תהא $x_0 \in \mathbb{R}^n$. נאמר כי x_0 **נקודת סגור** של A כאשר לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $B(x_0, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. אוסף נקודות הסגור של A נקרא הסגור של A ונסמנו $\boldsymbol{Cl(A)}$ **או** $\boldsymbol{\bar{A}}$.

תרגיל לבית: לכל $A \subseteq \mathbb{R}^n$ מתקיים $A \subseteq \bar{A}$.

קבוצה סגורה: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A תיקרא סגורה כאשר $A = \bar{A}$.

טענה (שיעור 12): תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A פתוחה $\Leftrightarrow$ $\mathbb{R}^n \backslash \bar{A}$ סגורה.

תרגיל לבית: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ הראו כי:

1. $int(int(A) = int(A)$
2. $\bar{\bar{A}} = \bar{A}$
3. $int(A) = \mathbb{R}^n \backslash \overline{\mathbb{R}^n \backslash A}$

אבחנה (תרגול 8): יהי $n \in \mathbb{N}^+$, יהי $x = (x_1, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ ויהי $\varepsilon > 0$. יהי $y = (y_1, \ldots, y_n) \in B(x, \varepsilon)$. אז לכל $1 \leq i \leq n$, מתקיים כי $|x_i - y_i| < \varepsilon$. זה שימושי לשם הוכחה האם קבוצה היא סגורה/פתוחה/neither.

הערות:

- ישנן קבוצות שאינן פתוחות ואינן סגורות.
- הקבוצות היחידות שהן גם פתוחות וגם סגורות הן $\mathbb{R}^n, \emptyset$.
- p היא נקודת שפה, אם כל כדור פתוח סביב p מכיל נקודות הן מ-A והן מ-A^c: "אפשר להתקרב לנקודה כרצוננו עם נקודות מתוך A ונקודות מחוץ ל-A".

גבולות ורציפות

סדרות

הגדרת הגבול: תהא $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}^n$. יהי $q \in \mathbb{R}^n$. נאמר שהסדרה מתכנסת ל-q כאשר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $k \geq K$ מתקיים $d\left(q^{(k)}, q\right) < \varepsilon$.

הערה: בהינתן $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$, $q \in \mathbb{R}^n$, אז $a_k = \{d(q^{(k)}, q)\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה מספרית, $q^{(k)} \to q$ אמ"מ $a_k \to 0$.

תרגיל לבית: תהא $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה ב-$\mathbb{R}^n$. יהי $q \in \mathbb{R}^n$.
לכל $k \in \mathbb{N}^+$ נסמן $q^{(k)} = \begin{pmatrix} q_1^{(k)} \\ \dots \\ q_n^{(k)} \end{pmatrix}$, $q = \begin{pmatrix} q_1 \\ \dots \\ q_n \end{pmatrix}$ אז $q^{(k)} \to q \Leftrightarrow$ לכל $1 \leq j \leq n$ מתקיים $q_j^{(k)} \to q_j$.

כלומר – התכנסות של הסדרה גוררת התכנסות בכל סדרת קואורדינטות בנפרד, והתכנסות הקואורדינטות גוררת התכנסות של הסדרה כולה.

סדרת קושי: תהא $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה. נאמר כי היא סדרת קושי כאשר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $K \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $m, l \geq K$ מתקיים $d\left(q^{(m)}, q^{(l)}\right) < \varepsilon$.

טענה (שיעור 13): תהא $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה. הסדרה מתכנסת $\Leftrightarrow$ היא סדרת קושי.

קבוצה חסומה: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא חסומה כאשר קיים $R > 0$ כך ש-$A \subseteq B(0, R)$.

קוטר: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה לא ריקה. הקוטר של A מוגדר ומסומן להיות $diam(A) = \sup_{x,y \in A} d(x,y)$.

קבוצה קומפקטית: קבוצה $A \subseteq \mathbb{R}^n$ תיקרא קומפקטית כאשר A סגורה וחסומה.

טענה (שיעור 13): תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A **סגורה** $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ של איברי A, **אם הסדרה מתכנסת ל-q אז $q \in A$**.

טענה (שיעור 13): תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$. A **קומפקטית** $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ של איברי A **קיימת תת-סדרה המתכנסת לנקודה ב-A**.

טענה (שיעור 15 ליאור): תהא $K \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה קומפקטית ותהא $f: K \to \mathbb{R}^n$ רציפה. אז $f(K)$ קומפקטית.

תרגיל: תהי $B = \{(x, \cos(x)) : x \in \mathbb{R}\}$. קבעו האם הקבוצה סגורה / פתוחה / לא סגורה ולא פתוחה.

פתרון: נראה כי B סגורה. תהי $\{q^{(k)}\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של איברי B המתכנסת לגבול $q \in \mathbb{R}^2$.
לכל $k \in \mathbb{N}^+$, $q^{(k)} \in B$, ולכן קיים $x^{(k)} \in \mathbb{R}$ כך ש-$q^{(k)} = \left(x^{(k)}, \cos\left(x^{(k)}\right)\right)$. נסמן $q = (x, y)$.
מהגדרת התכנסות סדרות ב-$\mathbb{R}^2$, אנו יודעים שכיוון ש-$\lim_{k\to\infty} q^{(k)} = q$ אז $\lim_{k\to\infty} x^{(k)} = x$ ו-$\lim_{k\to\infty} \cos\left(x^{(k)}\right) = y$.
cos היא פונקציה רציפה, ולכן מהגדרת הגבול לפי היינה, $\lim_{k\to\infty} \cos\left(x^{(k)}\right) = \cos(x)$.
ולכן, $q = (x, \cos(x))$ ולכן $q \in B$.
הגבול של כל סדרה מתכנסת של איברי B שייך ל-B ולכן הקבוצה סגורה.

גבולות

נקודת הצטברות: תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x \in \mathbb{R}^n$. נאמר כי x נקודת הצטברות של A אם לכל $\varepsilon > 0$ מתקיים $A \cap B(x, \varepsilon) \backslash \{x\} \neq \emptyset$.

גבול לפי קושי: יהיו $n, m \in \mathbb{N}^+$. תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ ותהא $x_0 \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות של A. תהא $f: A \to \mathbb{R}^m$.
נאמר כי ל-f יש גבול $L \in \mathbb{R}^m$ ב-x_0 לפי קושי אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$, אם $0 \leq \|x - x_0\| \leq \delta$ אז $\|f(x) - L\| \leq \varepsilon$. נסמן $\lim_{x \to x_0} f(x) = L \in \mathbb{R}^m$.

כאשר יש לנו פונקציה $f: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, נוכל להסתכל עליה כוקטור של m פונקציות סקלריות. למשל: $f(x, y, z) = \begin{pmatrix} x^2 + 3e^y \\ z - cosy \end{pmatrix}$ נוכל לפצל לשתי פונקציות $f_1(x, y, z) = x^2 + 3e^y$, $f_2(x, y, z) = z - cosy$.

פירוק לרכיבים (שיעור 14): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, תהא $x_0 \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות של A. תהאנה $f_1, \dots, f_m: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציות המקיימות $f = \begin{pmatrix} f_1 \\ \vdots \\ f_m \end{pmatrix}$. יהי $L \in \mathbb{R}^m$ ונסמן $L = \begin{pmatrix} L_1 \\ \vdots \\ L_m \end{pmatrix}$. אז:
$\lim_{x \to x_0} f(x) = L \Leftrightarrow$ לכל $1 \le i \le m$ מתקיים $\lim_{x \to x_0} f_i(x) = L_i$.

גבול לפי היינה: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, תהא $x_0 \in \mathbb{R}^n$ נקודת הצטברות של A. יהי $L \in \mathbb{R}^m$. נאמר כי L גבול של f ב-x_0 לפי היינה כאשר לכל סדרה $\left\{q^{(k)}\right\}_{k=1}^{\infty}$ המקיימת כי לכל $k \in \mathbb{N}^+$ כי $q^{(k)} \in A \backslash \{x_0\}$ וגם $q^{(k)} \xrightarrow[k \to \infty]{} x_0$ מתקיים $f\left(q^{(k)}\right) \xrightarrow[k \to \infty]{} L$.

תרגיל לבית: L גבול של f ב-x_0 לפי קושי $\Leftrightarrow$ L גבול של f ב-x_0 לפי היינה.

רציפות

הגדרה: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, תהא $x_0 \in A$. נאמר כי f רציפה ב-x_0 כאשר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$, אם $d(x, x_0) < \delta$ אז $d\big(f(x), f(x_0)\big) < \varepsilon$.

טענה (שיעור 14): תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f: A \to \mathbb{R}^m$ אז f רציפה ב-A $\Leftrightarrow$ לכל $V \subseteq \mathbb{R}^m$ פתוחה $f^{-1}(V)$ פתוחה.

עקומה: פונקציה $\gamma^n: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ נקראת עקומה.

מסילה רציפה: היא פונקציה $\gamma: [a, b] \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}^n$ רציפה. $\gamma(a), \gamma(b)$ ייקראו קצוות המסילה. עבור $A \subseteq \mathbb{R}^m$ נאמר כי γ מוגבלת ב-A כאשר לכל $t \in [a, b]$ מתקיים $\gamma(t) \in A$.

קשירות מסילתית: $A \subseteq \mathbb{R}^m$ קשירה מסילתית כאשר לכל $x, y \in A$ קיימת $\gamma: [0,1] \to \mathbb{R}^m$ מסילה רציפה מוגבלת ב-A המקיימת $\gamma(0) = x, \gamma(1) = y$.

משפט ערך הביניים (שיעור 15 ליאור): תהא $A \subseteq \mathbb{R}^n$ קשירה מסילתית. תהא $f: A \to \mathbb{R}$ רציפה. יהיו $x, y \in A$ ונניח $f(x) \le f(y)$. אז לכל $f(x) \le \lambda \le f(y)$ קיימת $z \in A$ כך ש-$\lambda = f(z)$.

4 – גזירות בכמה משתנים

גזירות

נגזרות חלקיות וכיווניות

נגזרת חלקית: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. יהי $1 \leq i \leq n$.
אם קיים הגבול $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+he_i)-f(x_0)}{h}$ אז נאמר כי הוא **הנגזרת החלקית** של f לפי x_i ונסמנו $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0)$.

מקפיא y – פרמטר וגוזר לפי x
$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h, y_0) - f(x_0, y_0)}{h}$$
הנגזרת החלקית בכיוון x

מקפיא x- פרמטר וגוזר לפי y
$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_0,y_0) = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0, y_0+h) - f(x_0, y_0)}{h}$$
הנגזרת החלקית בכיוון y

נגזרת כיוונית: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. יהי $v \in \mathbb{R}^n$ וקטור יחידה.
אם קיים הגבול $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+hv)-f(x_0)}{h}$ אז נאמר כי הוא **הנגזרת הכיוונית** של f בכיוון v בנקודה x_0 ונסמנו $\frac{\partial f}{\partial v}(x_0)$.

הערה: לכל $1 \leq i \leq n$ מתקיים $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = \frac{\partial f}{\partial e_i}(x_0)$ במקרה ואחד מהם מוגדר.

דיפרנציאביליות

במשתנה יחיד, אמרנו ש-$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה ב-x_0 אם קיים הגבול $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$ ובמקרה זה סימנו אותו על ידי $f'(x_0)$. ניסוח שקול לכך הוא שקיים $L \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-Lh}{h} = 0$ ובמקרה זה מתקיים $L = f'(x_0)$.

כלומר, נוכל להגדיר פונקציה $\omega: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על ידי $\omega(h) = f(x_0+h) - f(x_0) - f'(x_0)h$ לכל $h \in \mathbb{R}$ ונקבל כי ω מתאפסת ורציפה ב-0 ומתקיים $\lim_{h \to \infty} \frac{\omega(h)}{h} = 0$. ניעזר ברעיון זה בבדי להכליל את הגדרת הנגזרת.

דיפרנציאביליות: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית.
נאמר כי f **דיפרנציאבילית** ב-x_0 אם קיימת ה"ל $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ כך שמתקיים $\lim_{v \to 0} \frac{f(x_0+v)-f(x_0)-Lv}{\|v\|} = 0$ ובמקרה זה נאמר כי L הוא **דיפרנציאל** של f ב-x_0.

יחידות הדיפרנציאל (שיעור 15): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. נניח כי L_1, L_2 הם דיפרנציאלים של f ב-x_0 אז $L_1 = L_2$.

דיפרנציאל: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. אם L הוא דיפרנציאל של f ב-x_0 אז נאמר כי הוא הדיפרנציאל של f ב-x_0 ונסמנו $\boldsymbol{d_{x_0}(f) = L}$.

תרגיל לבית (עדי השתמשו בו בהוכחות): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. תהא $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ה"ל. יהי $\delta > 0$ כך ש-$\mathcal{B}(x_0, \delta) \subseteq A$. f דיפרנציאבילית ובעלת דיפרנציאל L $\Leftrightarrow$ קיימת פונקציה $\omega: \mathcal{B}(0, \delta) \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ אשר מתאפסת ורציפה ב-0 ומקיימת: $f(x_0+v) = f(x_0) + Lv + \omega(v)\|v\|$.

תרגיל לבית: תהאנה $f_1, \dots, f_m: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציות ותהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. נגדיר $f: A \to \mathbb{R}^m$ על ידי $f(x) = \left(f_1(x), \dots, f_m(x)\right)^T$ לכל $x \in A$. אז f דיפרנציאבילית ב-x_0 $\Leftrightarrow$ f_i דיפרנציאבילית ב-x_0 לכל $1 \leq i \leq m$.

טענה (שיעור 15): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. אם f דיפרנציאבילית ב-x_0 אז f רציפה ב-x_0 ולכל וקטור יחידה $v \in \mathbb{R}^n$ קיימת ל-f נגזרת כיוונית בכיוון v בנקודה x_0 ומתקיים $\frac{\partial \boldsymbol{f}}{\partial \boldsymbol{v}}(\boldsymbol{x_0}) = \boldsymbol{d_{x_0}}(\boldsymbol{f}(\boldsymbol{v}))$.

כלומר, נגזרת כיוונית היא הפעלה של הדיפרנציאל על הכיוון הרלוונטי.

גרדיאנט ומטריצת הנגזרות החלקיות

טענה (שיעור 16): תהאנה $f_1, \dots, f_m: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציות ותהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. נגדיר $f: A \to \mathbb{R}^m$ על ידי $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \left(\boldsymbol{f_1}(\boldsymbol{x}), \dots, \boldsymbol{f_m}(\boldsymbol{x})\right)^{\boldsymbol{T}}$ לכל $x \in A$. נניח כי f דיפרנציאבילית ב-x_0. אזי **המטריצה המייצגת של f ביחס ל-$\boldsymbol{x_0}$** ביחס לבסיס הסטנדרטי תסומן $Df(x_0)$ והיא נתונה על ידי:

$$Df(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1}(x_0) & \cdots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

הערה: עבור פונקציה דיפרנציאבילית $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ המטריצה $Df(x_0)$ היא מטריצה מגודל $m \times n$.

טענה (שיעור 16): תהא $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ה"ל. אזי קיים ויחיד וקטור $u \in \mathbb{R}^n$ כך שמתקיים $Lv = \langle u, v \rangle$ לכל $v \in \mathbb{R}^n$.

גרדיאנט: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. אם f דיפרנציאבילית ב-x_0 אז נגדיר את **הגרדיאנט** $\nabla f(x_0)$ של f ב-x_0 להיות הוקטור היחיד שמקיים $\boldsymbol{d_{x_0} f(v)} = \langle \boldsymbol{\nabla f(x_0)}, \boldsymbol{v} \rangle$ לכל $v \in \mathbb{R}$.

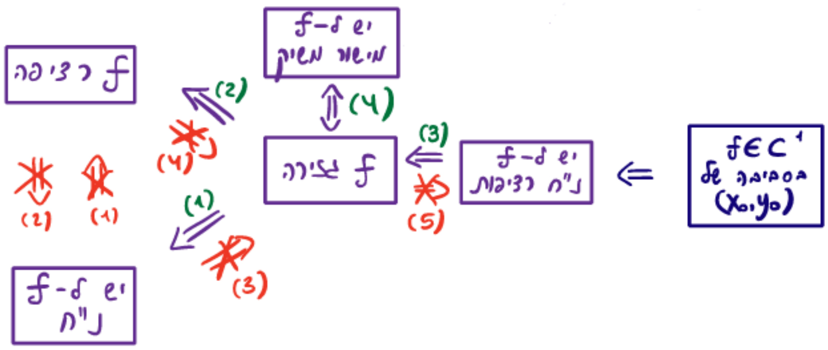
מסקנה (שיעור 16): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית.
אם f דיפרנציאבילית ב-x_0 אז הגרדיאנט של f ב-x_0 נתון על ידי:

$$\nabla f(x_0) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \\ \vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

משפט (שיעור 16): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. נניח כי **הנגזרות החלקיות** של f קיימות בסביבה של x_0 **ורציפות** ב-x_0. אז f **דיפרנציאבילית** ב-x_0.

גזירה ברציפות: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. נאמר כי f **גזירה ברציפות ב-$\boldsymbol{x_0}$** אם הנגזרות החלקיות של f קיימות בסביבה של x_0 ורציפות ב-x_0.

ניזכר בדוקטור צנזור:



כלל השרשרת

<u>כלל השרשרת (שיעור 16):</u> תהאנה $g: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ו-$f: B \subseteq \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ פונקציות. נניח כי $g(A) \subseteq B$ ותהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. נניח כי $g(x_0)$ היא נקודה פנימית ב-B.

אם g דיפרנציאבילית ב-x_0 ו-f דיפרנציאבילית ב-$g(x_0)$ אז $f \circ g$ דיפרנציאבילית ב-x_0 ומתקיים $d_{x_0}(f \circ g) = d_{g(x_0)}f \circ d_{x_0}g$

<u>באופן כללי יותר:</u> תהאנה $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ ו-$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ דיפרנציאביליות בכל נקודה. נסמן $g(\theta) = \left(x(\theta), y(\theta)\right)^T$. המטריצות המייצגות של הדיפרנציאלים של f, g הינן: $Df = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right), Dg = \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix}$

אז לפי כלל השרשרת:

$$D(f \circ g) = Df \cdot Dg = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}\right) \cdot \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial \theta} \\ \frac{\partial y}{\partial \theta} \end{pmatrix} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

לצורך ההוכחה של כלל השרשרת הגדרנו:

- <u>נורמה של מטריצה</u> – תהא $A = \left(a_{ij}\right)$ מטריצה בגודל $m \times n$. הנורמה של A מוגדרת להיות $\|A\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^2}$.
- <u>נורמה של ה"ל</u> – תהא $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ה"ל. נניח כי L מיוצגת בבסיסים הסטנדרטיים של $\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^m$ על ידי המטריצה A. אז הנורמה של L מוגדרת על ידי $\|L\| = \|A\|$.

<u>מסקנה (שיעור 16):</u> תהא $L: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ ה"ל. אז L רציפה.

משפט 3.20: (כלל השרשרת) אם הפונקציות $x = g(t)$, $y = h(t)$ גזירות בנקודה t_0, ואם הפונקציה $f(x, y)$ גזירה בנקודה (x_0, y_0), כאשר $x_0 = g(t_0)$, $y_0 = h(t_0)$, אזי הנגזרת של הפונקציה $z = F(t) = f(g(t), h(t))$ בנקודה t_0 היא

$$\frac{dz}{dt}(t_0) = \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) \cdot \frac{dx}{dt}(t_0) + \frac{\partial z}{\partial y}(x_0, y_0) \cdot \frac{dy}{dt}(t_0)$$

הניסוח התמציתי של המשפט מבוטא בנוסחה הבאה

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dt} \qquad (3.7)$$

<u>כלל השרשרת:</u>

$$\begin{tikzcd} \mathbb{R} \arrow[r] \arrow[rr, bend left, "F"] & \mathbb{R}^2 \arrow[r, "f"] & \mathbb{R} \\ t \arrow[r, mapsto] & (x(t),y(t)) \arrow[r, mapsto] & f(x(t),y(t)) \end{tikzcd}$$

<u>משפט:</u> תהי $f(x,y)$ בעלת נ"ח רציפות בתחום D. יהיו $x(t), y(t)$ גזירות בקטע I כך שלכל $t \in I$: $(x(t),y(t)) \in D$.
נגדיר $F(t) = f(x(t),y(t))$. אזי:

רגילה ב-$\mathbb{R}$

$$F'(t) = \left.\frac{\partial f}{\partial x}\right|_{(x(t),y(t))} \cdot \frac{dx}{dt} + \left.\frac{\partial f}{\partial y}\right|_{(x(t),y(t))} \cdot \frac{dy}{dt}$$

חלקית ב-$\mathbb{R}^2$

<u>עוד גרסה של כלל השרשרת:</u> $F(u,v) = f(x(u,v), y(u,v))$.

<u>משפט:</u> אם $f(x,y)$, $x(u,v)$, $y(u,v)$ כולן גזירות ברציפות אז:

$$\frac{\partial F}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{du} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{du}$$
$$\frac{\partial F}{\partial v} = \frac{\partial f}{\partial x} \cdot \frac{dx}{dv} + \frac{\partial f}{\partial y} \cdot \frac{dy}{dv}.$$

נגזרות מסדר גבוה

משפט שוורץ (שיעור 17): תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה, תהא $x_0 \in U$ נקודה, ותהא $f: U \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ברציפות. נניח כי קיימים $1 \leq i < j \leq n$ כך שהנגזרות החלקיות $\frac{\partial f}{\partial x_i}, \frac{\partial f}{\partial x_j}$ גזירות ברציפות ב-x_0 אז מתקיים: $\frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right)(x_0) = \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial f}{\partial x_j}\right)(x_0)$.

גזירות k פעמים: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית. נאמר כי f גזירה k פעמים ב-x_0 אם לכל $0 \leq l \leq k$ ולכל $1 \leq i_1, \dots, i_l \leq n$ הנגזרת $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}}(x_j) \coloneqq \frac{\partial}{\partial x_{i_l}}\left(\frac{\partial}{\partial x_{i_{l-1}}}\left(\dots\left(\frac{\partial f}{\partial x_{i_1}}\right)\right)\right)\Big|_{x_0}$ מוגדרת.

אם בנוסף לכל $0 \leq l \leq k$ ולכל $1 \leq i_1, \dots, i_l \leq n$ הנגזרת $\frac{\partial^l f}{\partial x_{i_l} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}}$ רציפה ב-x_0 אז נאמר כי f גזירה ברציפות k פעמים ב-x_0.

טיילור וחקירת פונקציה

פולינום טיילור

פולינום טיילור: יהי $N \in \mathbb{N}^+$, יהי $r > 0$. תהא $x_0 \in \mathbb{R}^n$ ותהא $f: \mathcal{B}(x_0, r) \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה N פעמים ב-x_0. פולינום טיילור מסדר N של f בנקודה x_0 הוא הפולינום:

$$P_N(x_0 + v) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}}(x_0) \cdot v_{i_1} \cdot \ldots \cdot v_{i_k}$$

לכל $v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathcal{B}(x_0, r)$.

באופן שקול ניתן לרשום לכל $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$:

$$P_N(x_0) = f(x_0) + \sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k!} \sum_{i_1=1}^{n} \dots \sum_{i_k=1}^{n} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_k} \cdot \ldots \cdot \partial x_{i_1}}(x_0) \cdot (x - x_0)_{i_1} \cdot \ldots \cdot (x - x_0)_{i_k}$$

השארית של פולינום טיילור של f מסדר N סביב x_0 היא פונקציה $R_N: \mathcal{B}(x_0, r) \to \mathbb{R}$ הנתונה על ידי $R_N(x) = f(x) - P_N(x)$ לכל $x \in \mathcal{B}(x_0, r)$. בתכלס – ברור שהנוסחה הזאת זוועתית. צריך להסתכל על זה גג ב-$\mathbb{R}^3$ לדעתי, מספיק אפילו $\mathbb{R}^2$ כדי להבין מה הולך פה. סמי זעפרני:

משפט 8.2: תהי $z = f(x, y)$ פונקציה בעלת n נגזרות רציפות בסביבת הנקודה $P = (x_0, y_0)$. אזי פולינום טיילור של $f(x, y)$ הוא

$$\begin{aligned} T_n(x, y) &= f(P) + f_x(P)(x - x_0) + f_y(P)(y - y_0) \\ &+ \tfrac{1}{2!}\left[f_{xx}(P)(x - x_0)^2 + 2f_{xy}(P)(x - x_0)(y - y_0) + f_{yy}(P)(y - y_0)^2\right] \\ &+ \tfrac{1}{3!}\Big[f_{xxx}(P)(x - x_0)^3 + 3f_{xxy}(P)(x - x_0)^2(y - y_0) \\ &\qquad + 3f_{xyy}(P)(x - x_0)(y - y_0)^2 + f_{yyy}(P)(y - y_0)^3\Big] \\ &+ \cdots \\ &+ \tfrac{1}{n!}\left[f_{x^n}(P)(x - x_0)^n + nf_{x^{n-1}y}(P)(x - x_0)^{n-1}(y - y_0) + \cdots + f_{y^n}(P)(y - y_0)^n\right] \end{aligned}$$

משפט שארית פיאנו (שיעור 18): יהי $r>0$. תהא $x_0\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{B}(x_0,r)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה N פעמים ב-x_0. אז מתקיים:

$$\lim_{x\to x_0}\frac{R_N(x)}{\|x-x_0\|^N}=0$$

משפט שארית לגראנז' (שיעור 18): יהי $r>0$. תהא $x_0\in\mathbb{R}^n$ ותהא $f:\mathcal{B}(x_0,r)\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה $N+1$ פעמים ב-x_0. אז לכל $v\in\mathcal{B}(x_0,r)$ קיים $\lambda\in[0,1]$ כך שמתקיים: $R_N(x_0+v)=\frac{1}{(N+1)!}\sum_{i_1=1}^n\dots\sum_{i_{N+1}=1}^n\frac{\partial^{N+1}f}{\partial x_{i_{N+1}}\cdot\ldots\cdot\partial x_{i_1}}(x_0+\lambda v)\cdot v_{i_1}\cdot\ldots\cdot v_{i_{N+1}}$

המשפטים המרכזיים

טענה (שיעור 18): תהא $U\subseteq\mathbb{R}^n$ פתוחה ותהא $f:U\to\mathbb{R}^m$ דיפרנציאבילית, הפיכה ובעלת הופכית דיפרנציאבילית. אז $n=m$.

הגדרה: תהא $f:A\subseteq\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ פונקציה ותהא x_0 נקודה פנימית של A.
נסמן $f(x)=(f_1(x),\dots,f_m(x))^T$ לכל $x\in A$ כאשר $f_1,\dots,f_m:A\to\mathbb{R}$ פונקציות. יהי $k\in\mathbb{N}^+$. נאמר כי f גזירה ברציפות k פעמים בנקודה x_0 אם לכל $1\le i\le m$ הפונקציה f_i גזירה ברציפות k פעמים בנקודה x_0.

משפט הפונקציה ההפוכה (שיעור 18): תהא $A\subseteq\mathbb{R}^n$ קבוצה, תהא x_0 נקודה פנימית של A ותהא $f:A\to\mathbb{R}^n$ פונקציה גזירה ברציפות בסביבת x_0. נניח כי הדיפרנציאל $d_{x_0}f:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}^m$ של f ב-x_0 הוא העתקה הפיכה. אזי:

1. קיימת קבוצה פתוחה $U\subseteq A$ שמכילה את x_0 כך שהצמצום $f|_U:U\to\mathbb{R}^n$ היא חח"ע ו-$f(U)$ פתוחה.
2. ההעתקה ההופכית $g:f(U)\to U$ גזירה ברציפות ב-$f(U)$ ומתקיים $d_{f(x_0)}g\circ d_{x_0}f=Id$.

5. נגדיר $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ על ידי:

$$f(x,y)=\left(x^3+xy+y^3,x^2-y^2\right)$$

(א) הראו כי קיימת קבוצה פתוחה $U\subset\mathbb{R}^2$ כך ש-$(1,1)\in U$ ובה $f|_U$ הפיכה על $f(U)$ ו-$(f|_U)^{-1}$ גזירה ברציפות.
פתרון:
f היא גזירה ברציפות פעמיים משום שזו הרכבה של אלמנטריות בכל קואורדינטה.
לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ מתקיים:

$$Df(x,y)=\begin{pmatrix}3x^2+y & 2x\\ x+3y^2 & -2y\end{pmatrix}$$

נתבונן בדטרמיננטה של המטריצה המייצגת של הדיפרנציאל של f בנקודה $(1,1)$:

$$\det Df(1,1)=\det\begin{pmatrix}3+1 & 2\\ 1+3 & -2\end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix}4 & 2\\ 4 & -2\end{pmatrix}=-8-8=-16\neq0$$

מכאן שהדיפרנציאל $d_{(1,1)}f$ העתקה הפיכה ולכן ממשפט הפונקציה ההפוכה קיימת סביבה פתוחה $U\subset\mathbb{R}^2$ של $(1,1)$ וסביבה פתוחה $V\subset\mathbb{R}^2$ של $f(1,1)=(3,0)$ כך ש-$f|_U:U\to\mathbb{R}^2$ חח"ע ומתקיים $f(U)=V$.
אז $f|_U$ הפיכה וההעתקה ההפכית $(f|_U)^{-1}:V\to U$ גזירה ברציפות.

(ב) נסמן $g=(f|_U)^{-1}$ מצאו את המטריצה $Dg(f(1,1))$.
פתרון:
בהמשך לסעיף הקודם, ידוע כי $d_{f(1,1)}g\circ d_{(1,1)}f=I$ ולכן, כאשר נעבור למטריצות המייצגות בבסיס הסטנדרטי, נקבל:

$$Dg(f(1,1))\cdot Df(1,1)=I$$

ולכן מתקיים כי:

$$Dg(f(1,1))=Df(1,1)^{-1}=\frac{1}{-16}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -4 & 4\end{pmatrix}=\frac{1}{8}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 2 & -2\end{pmatrix}$$

כרצוי.

סימונים:

- הנקודות של $\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ יסומנו כזוג סדור (x,y) כאשר $x\in\mathbb{R}^n$ ו-$y\in\mathbb{R}^m$.
- $\pi:\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m\to\mathbb{R}^m$ בהטלה הטבעית המוגדרת ע"י $\pi(x,y)=y$ לכל $(x,y)\in\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$.
- בהינתן נקודה $(x_0,y_0)\in U$ ופונקציה $F:U\to\mathbb{R}^k$, נגדיר פונקציה חדשה $F_{x_0}:\pi(U)\to\mathbb{R}^k$ ע"י $F_{x_0}(y)=F(x_0,y)$ לכל $y\in\pi(U)$. אם $F:U\to\mathbb{R}^k$ דיפרנציאבילית ב-U אז F_{x_0} דיפרנציאבילית ב-$\pi(U)$.

לכל $y\in\pi(U)$ נסמן $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y)=DF_{x_0}(y_0)$. נשים לב כי $\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)$ היא מטריצה בגודל $k\times m$. בדומה ניתן להגדיר את $\frac{\partial F}{\partial x}(x,y_0)$.

משפט הפונקציה הסתומה (שיעור 18): תהא $U\subseteq\mathbb{R}^n\times\mathbb{R}^m$ קבוצה פתוחה. תהא $F:U\to\mathbb{R}^m$ פונקציה גזירה ברציפות.
תהא $(x_0,y_0)\in U$ ונסמן $c=F(x_0,y_0)$. נניח כי מתקיים $\det\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x_0,y_0)\right)\neq 0$. אזי קיימות קבוצות פתוחות $V\subseteq\mathbb{R}^n, W\in\mathbb{R}^m$ ופונקציה גזירה ברציפות $f:V\to W$ כך שמתקיים: $x_0\in V, y_0\in W, V\times W\subseteq U$ וגם:

$$\{(x,y)\in V\times W: F(x,y)=c\}=\{(x,y)\in V\times W: y=f(x)\}=\{(x,f(x))\in V\times W: x\in V\}$$

יתר על כן, לכל $x\in V, y\in W$ המטריצה $\frac{\partial F}{\partial y}(x,y)$ הפיכה ומתקיים:

$$Df(x)=-\left(\frac{\partial F}{\partial y}(x,f(x))\right)^{-1}\cdot\frac{\partial F}{\partial x}(x,f(x))$$

*ההוכחה של המשפט הזה לקחה שעה שלמה, אחת ההוכחות **הסתומות ומיותרות** שראיתי בקורס הזה.*

תרגיל. נתונה מערכת המשוואות

$$\begin{cases} x+y+z=1 \\ x^3-y^3+z^3=-1 \end{cases}$$

נתון כי $(1,1,-1)$ הוא פתרון למערכת.
הוכיחו כי קיים קטע פתוח $I\subset\mathbb{R}$ שמכיל את 1 ופונקציה גזירה ברציפות $\varphi:I\to\mathbb{R}^2$ כך ש־$\varphi(1)=(1,-1)$ ולכל $x\in I$, $(x,\varphi(x))$ פתרון למערכת.
חשבו את $\frac{\partial\varphi}{\partial x}(1)$.

פתרון.
ראשית, נגדיר את $F:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ ע"י:

$$F(x,y,z)=\begin{pmatrix} x+y+z-1 \\ x^3-y^3+z^3+1 \end{pmatrix}$$

לכל $(x,(y,z))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2\cong\mathbb{R}^3$.
נתבונן בנקודה $p=(1,(1,-1))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$:

$$F(p)=F(1,1,-1)=\begin{pmatrix} 1+1+-1-1 \\ 1^3-1^3+(-1)^3+1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

כמו כן, F היא גזירה ברציפות משום שכל קואורדינטה שלה היא פונקציה אלמנטרית בכל משתנה ולכן היא גזירה ברציפות בכל משתנה.
נחשב את $\det\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(p)$:
נתבונן ב־$\frac{\partial F}{\partial(y,z)}$, יהי $(x_1,(y_1,z_1))\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^2$ אז,

$$\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(x_1,(y_1,z_1))=\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3y_1^2 & 3z_1^2 \end{pmatrix}$$

נציב את p,

$$\det\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(p)=\det\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(1,1,-1)=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3\cdot 1^2 & 3\cdot(-1)^2 \end{pmatrix}=\det\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}=6\neq 0$$

אזי ממשפט הפונקציה הסתומה קיימות קבוצות פתוחות $U\subseteq\mathbb{R}, V\subseteq\mathbb{R}^2$ כך ש־$1\in U$ ו־$(1,-1)\in V$.
ופונקציה $f:U\to V$ גזירה ברציפות כך שמתקיים:

$$\{(x,(y,z))\in U\times V\ :\ F(x,(y,z))=0\}=\{(x,(y,z))\in U\times V\ :\ (y,z)=f(x)\}.$$

משום ש־U פתוחה קיים $\varepsilon>0$ כך ש־$(1-\varepsilon,1+\varepsilon)\subset U$.
נתבונן ב־$I=(1-\varepsilon,1+\varepsilon)$ ובפונקציה $\varphi=f|_I: I\to\mathbb{R}^2$ ונקבל כי $1\in I$ ו־φ גזירה ברציפות וכי $\varphi(1)=(1,-1)$.
בנוסף לכל $x\in I$ מתקיים כי $(x,\varphi(x))\in U\times V$ ולכן מתקיים כי $F(x,\varphi(x))=0$.
כלומר, $(x,\varphi(x))$ פתרון למערכת.

בנוסף, לכל $x \in I$ המטריצה $\frac{\partial F}{\partial(y,z)}(x,\varphi(x))$ היא הפיכה ומתקיים:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(x) = -\left(\frac{\partial F}{\partial(y,z)}\right)^{-1}(x,\varphi(x)) \cdot \frac{\partial F}{\partial x}(x,\varphi(x))$$

נבחין כי לכל $(x,(y,z)) \in \mathbb{R}^3$ מתקיים:

$$\frac{\partial F}{\partial x}(x,(y,z)) = \begin{pmatrix} 1 \\ 3x^2 \end{pmatrix}$$

ולכן מתקיים כי:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x}(1) = -\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -\frac{1}{6}\begin{pmatrix} 0 \\ 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

נקודות קיצון

חיוביות ושליליות של מטריצות סימטריות:

הגדרה: תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית. נאמר כי A חיובית ממש אם לכל $v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$ מתקיים $\langle Av, v\rangle > 0$. באופן דומה נאמר ש-A שלילית ממש אם מתקיים $\langle Av, v\rangle < 0$.

משפט (שיעור 19): תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית. אזי A ניתנת ללכסון ע"י בסיס א"נ.

מסקנה (שיעור 19): תהא $A \in M_n(\mathbb{R})$ סימטרית. אז:

א. A חיובית ממש $\Leftrightarrow$ כל הע"ע של A חיוביים.
ב. A שלילית ממש $\Leftrightarrow$ כל הע"ע של A שליליים.

הגדרה: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה.

א. נאמר ש-x_0 נקודת **מינימום** מקומי של f אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $\|x - x_0\| < \delta$ אז $\boldsymbol{f(x_0) \le f(x)}$.
ב. נאמר ש-x_0 נקודת **מקסימום** מקומי של f אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $\|x - x_0\| < \delta$ אז $\boldsymbol{f(x_0) \ge f(x)}$.
ג. נאמר ש-x_0 נקודת **קיצון מקומי** של f אם היא מינימום מקומי או מקסימום מקומי של f.

נקודה קריטית: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית של A. נניח כי f דיפרנציאבילית ב-x_0. נאמר כי x_0 היא **נקודה קריטית** של f אם $d_{x_0}f = 0$. אם x_0 אינה נקודת קיצון מקומי של f נאמר כי היא **נקודת אוכף** של f.

מטריצת הסיאן (Hessian): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית של A. נניח כי f גזירה פעמיים ב-x_0. מטריצת ההסיאן של f ב-x_0 מסומנת ב-$Hess_{x_0}f$ ומוגדרת להיות המטריצה המייצגת של הדיפרנציאל של הגרדיאנט של f ב-x_0 לפי הבסיס הסטנדרטי של $\mathbb{R}^n$, כלומר:

$$Hess_{x_0}f = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_1}(x_0) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_n}(x_0) & \cdots & \frac{\partial^2 f}{\partial x_n \partial x_n}(x_0) \end{pmatrix}$$

מסקנות (שיעור 19):

- $Hess_{x_0}f$ היא מטריצה סימטרית בגודל $n \times n$.
- פולינום טיילור $P: A \to \mathbb{R}$ מסדר 2 של f סביב x_0 נתון לכל $x \in A$ על ידי:

$$P(x) = f(x_0) + \langle \nabla f(x_0), x - x_0\rangle + \frac{1}{2}\langle \mathrm{Hess}_{x_0} f(x - x_0), x - x_0\rangle$$

משפט (שיעור 19): תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ פונקציה, תהא $x_0 \in A$ נקודה פנימית של A. נניח כי f גזירה פעמיים ברציפות ב-x_0. נניח כי x_0 נקודה קריטית של f. אז:

א. אם $Hess_{x_0}f$ חיובית ממש אז x_0 נקודת מינימום מקומי של f.
ב. אם $Hess_{x_0}f$ שלילית ממש אז x_0 נקודת מקסימום מקומי של f.

העתקה פתוחה: תהא $f: A \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ פונקציה. נאמר כי f היא העתקה פתוחה אם לכל $U \subseteq A$ פתוחה, התמונה של $f(U) \subseteq \mathbb{R}^m$ היא קבוצה פתוחה.

משפט ההעתקה הפתוחה (שיעור 20): תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהא $f: U \to \mathbb{R}^m$ גזירה ברציפות. תהא $x \in U$ נקודה. אם $rank\left(d_{x_0}f\right) = m$ אז $f(x) \in Int(f(U))$. בפרט אם $rank\left(d_{x_0}f\right) = m$ לכל $x \in U$ אז f היא העתקה פתוחה.

משפט כופלי לגראנז' (שיעור 20): תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה פתוחה ותהא $f: U \to \mathbb{R}$ גזירה ברציפות. תהאנה $g_1, \dots, g_k: U \to \mathbb{R}$ גזירות ברציפות. נסמן $M = \{x \in U: g_1(x) = \cdots = g_k(x) = 0\}$. תהא $a \in M$ נקודת קיצון מקומי ב-M. אם $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$ בת"ל אזי $\nabla f(a)$ שייך לתת המרחב הלינארי הנפרש ע"י $\nabla g_1(a), \dots, \nabla g_k(a)$.

במילים אחרות, קיימים $\lambda_1, \dots, \lambda_k \in \mathbb{R}$ (כופלי לגראנז') כך שמתקיים: $\nabla f(a) = \lambda_1 \nabla g_1(a) + \cdots + \lambda_k \nabla g_k(a)$.

טענה (שיעור 20): תהא $C \in \mathbb{R}^n$ קבוצה סגורה. תהא $g: C \to \mathbb{R}^m$ רציפה, אזי לכל $y \in \mathbb{R}^m$ הקבוצה $M = \{x \in C: g(x) = y\}$ היא סגורה.

5 – אינטגרלים בכמה משתנים

אינטגרל רימן

הגדרות בסיסיות

תיבה: תיבה ב-$\mathbb{R}^n$ היא קבוצה מהצורה $Q=\prod_{j=1}^{n} I_j = I_1\times\ldots\times I_n$ כאשר I_j הוא קטע חסום לכל $1\le j\le n$.

- אם לכל $1\le j\le n$ הקטע I_j פתוח אז נאמר כי Q **תיבה פתוחה**.
- אם לכל $1\le j\le n$ הקטע I_j סגור אז נאמר כי Q **תיבה סגורה**.
- אם קיים $1\le j\le n$ כך ש-I_j הוא יחידון אז נאמר כי Q היא **תיבה מנוונת**.

אורך: יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע חסום. אם $\bar{I}=[a,b]$ אז האורך של I מוגדר ומסומן על ידי $\ell(I)=b-a$.

תרגיל לבית:

- אם Q תיבה אז $\bar{Q}$ היא תיבה סגורה.
- תהא $Q=\prod_{j=1}^{n} I_j$ תיבה, הוכיחו כי קוטר של Q נתון על ידי $diam(Q)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}\ell(I_j))^2}$. בפרט אם $\bar{Q}=\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$ אז מתקיים $diam(Q)=\sqrt{\sum_{j=1}^{n}(b_j-a_j)^2}$.

נפח: תהא $Q=\prod_{j=1}^{n} I_j$ תיבה. הנפח של Q מוגדר ומסומן על ידי $Vol(Q)=\prod_{j=1}^{n}\ell(I_j)$.

הערות:

- אם $\bar{Q}=\prod_{j=1}^{n}[a_j,b_j]$ אז $Vol(Q)=Vol(\bar{Q})=\prod_{j=1}^{n}(b_j-a_j)$.
- אם Q תיבה מנוונת אז $Vol(Q)=0$.

אינטגרל רימן

חלוקה: תהא $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. חלוקה Π של Q היא קבוצה $\Pi=\{Q_j\}_{j=1}^{N}$ שאבריה הן תיבות סגורות ב-$\mathbb{R}^n$ כך שמתקיים:

1. $Q=\bigcup_{j=1}^{N} Q_j$
2. לכל $1\le i<j\le N$ מתקיים $Int(Q_i)\cap Int(Q_j)\neq\emptyset$.

הפרמטר של החלוקה מוגדר ומסומן על ידי $\lambda(\Pi)=\max_{1\le j\le N} diam(Q_j)$.

עידון: תהא $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהאנה Π_1,Π_2 חלוקות של Q. נאמר כי Π_2 היא עידון של Π_1 אם לכל $R\in\Pi_2$ קיימת $R'\in\Pi_1$ כך שמתקיים $R\subseteq R'$.

סכומי דרבו: תהא $Q\subseteq\mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $\Pi=\{Q_j\}_{j=1}^{N}$ חלוקה של Q. תהא $f:Q\to\mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

- **סכום דרבו העליון** של f ביחס לחלוקה Π מוגדר ע"י: $\overline{S}(f,\Pi)=\sum_{j=0}^{N}\sup_{x\in Q_j} f(x)\mathrm{Vol}(\mathrm{Q_j})$
- **סכום דרבו התחתון** של f ביחס לחלוקה Π מוגדר ע"י: $\underline{S}(f,\Pi)=\sum_{j=0}^{N}\inf_{x\in Q_j} f(x)\mathrm{Vol}(\mathrm{Q_j})$

טענה (שיעור 21):

1. לכל חלוקה Π של Q מתקיים $Vol(Q)inff\le\underline{S}(f,\Pi)\le\overline{S}(f,\Pi)\le Vol(Q)supf$
2. לכל שתי חלוקות Π_1,Π_2 של Q, אם Π_2 היא עידון של Π_1 אז: $\underline{S}(f,\Pi_1)\le\underline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_2)\le\overline{S}(f,\Pi_1)$
3. לכל שתי חלוקות Π_1,Π_2 של Q מתקיים $\underline{S}(f,\Pi_1)\le\overline{S}(f,\Pi_2)$

אינטגרל רימן: תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה.

- האינטגרל העליון של f ב-Q מסומן $\overline{\int_Q} f(x)dx$ ומוגדר להיות $\overline{\int_Q} f(x)dx = \inf\{\overline{S}(f,\Pi): \Pi\ is\ a\ partition\ of\ Q\}$
- האינטגרל התחתון של f ב-Q מסומן $\underline{\int_Q} f(x)dx$ ומוגדר להיות $\underline{\int_Q} f(x)dx = \sup\{\underline{S}(f,\Pi): \Pi\ is\ a\ partition\ of\ Q\}$

נאמר כי f אינטגרבילית רימן לפי דרבו על Q כאשר $\overline{\int_Q} f(x)dx = \underline{\int_Q} f(x)dx$ ונגדיר את האינטגרל להיות $\int_Q f(x)dx = \underline{\int_Q} f(x)dx$

קריטריון דרבו (שיעור 21): תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. f אינטגרבילית רימן לפי דרבו $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיימת חלוקה Π של Q כך ש-$\overline{S}(f,\Pi) - \underline{S}(f,\Pi) < \varepsilon$.

תכונות של אינטגרל רימן (שיעור 21):

1. תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ פונקציה חסומה. תהא $\Pi = \{Q_j\}_{j=1}^N$ חלוקה של Q. אם לכל $1 \le j \le N$ f אינטגרבילית על Q_j אז f אינטגרבילית על Q ומתקיים $\int_Q f(x)dx = \sum_{j=1}^N \int_{Q_j} f(x)dx$
2. לינאריות: תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה, ותהאנה $f,g: Q \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות ויהיו $a,b \in \mathbb{R}$. אזי $af+bg$ אינטגרבילית ומתקיים $\int_Q (af+bg)(x)dx = a\int_Q f(x)dx + b\int_Q g(x)dx$.
3. מונוטוניות: תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה, ותהאנה $f,g: Q \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות. נניח כי לכל $x \in Q$ מתקיים $g(x) \le f(x)$. אזי מתקיים $\int_Q g(x)dx \le \int_Q f(x)dx$.
4. יהי $M > 0$, תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ פונקציה. נניח כי לכל $x \in Q$ מתקיים $|f(x)| \le M$, אזי $\left|\int_Q f(x)dx\right| \le M \cdot Vol(Q)$.

מדידות ז'ורדן

קבוצות זניחות

אז אם מחפשים באינטרנט, או לומדים מצנזור, נתקלים במושג "מידה 0" או משהו בסגנון. פה התעקשו על קבוצה זניחה. אולי זה אפילו עדיף, כי הנושא הזה זניח ברמות על. זה סופר לא קריטי בשביל לחשב אחר כך אינטגרלים.

קבוצה זניחה: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה. נאמר כי E זניחה אם לכל $\varepsilon > 0$ קיימת סדרה של תיבות פתוחות $\{Q_j\}_{j=1}^{\infty}$ שמכסות את E. כלומר מתקיים $E \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ ובנוסף מתקיים $\sum_{j=1}^{\infty} Vol(Q_j) < \varepsilon$.

טענות (שיעור 22):

1. תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ זניחה, אזי $Int(E) = \emptyset$.
2. תהא $\{E_k\}_{k=1}^{\infty}$ סדרה של תת-קבוצות של $\mathbb{R}^n$. נסמן $E = \bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ אם לכל $k \in \mathbb{N}^+$ הקבוצה E_k זניחה. אם E בת-מניה אז E זניחה.
3. תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי הגרף של f הנתון על ידי $\Gamma f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in Q\}$ הוא קבוצה זניחה.
4. תהא $U \subseteq \mathbb{R}^n$ תת-קבוצה פתוחה. תהא $f: U \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אזי הגרף של f הנתון על ידי $\Gamma f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^{n+1} : x \in U\}$ הוא קבוצה זניחה.

הערות:

- לא בהכרח קבוצה מנפח 0! כי אולי לא ז'ורדן. אם קבוצה זניחה היא קבוצת ז'ורדן אז הנפח שלה הוא 0.
- נקודה היא קבוצה זניחה - $x \in \prod_{i=1}^{n} [x^i - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{n}}, x^i + \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{\frac{1}{n}}]$.
- קבוצה בת מניה היא זניחה (זה לא אמ"מ).
- איחוד עד בן מניה של זניחות הוא זניח.
- $\mathbb{Q}^n$ זניחה ($\partial\mathbb{Q}^n = \mathbb{R}^n$ אינה זניחה).
- אם קבוצה $M \subseteq \mathbb{R}^n$ **מכילה נקודה פנימית** (כלומר $p \in M$ כך ש-$\mathcal{B}(p, r) \leq M$ עבור $r > 0$ כלשהו) אז $\boldsymbol{M}$ **לא זניחה** (כי לכל קבוצה זניחה יש פנים ריק).

הסבר: אסור להגיד שהנפח של $M > 0$ כי לא בהכרח M ז'ורדן.

$\Leftarrow$ קיימת תיבה Q המוכלת ב-M שאינה מנפח 0. נסמן $z = V(Q) > 0$.

נניח ש-M זניחה. אז נכסה אותה ע"י תיבות $\{P_i\}$ כך ש-$\sum_{i=1}^{\infty} V(P_i) < z$.

אז מתקיים $Q \subseteq \bigcup_{i=1}^{\infty} P_i$ וכן $z = V(Q) > V\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} P_i\right) \geq \sum_{i=1}^{\infty} V(P_i) > z$

סתירה.

משפטים ותכונות

- משפט לבג (שיעור 22): תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ פונקציה **חסומה**. נסמן ב-D את קבוצת הנקודות ב-Q בהן f לא רציפה. אזי f אינטגרבילית רימן $\Leftrightarrow$ D זניחה.
- מסקנה (שיעור 22): תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ פונקציה **רציפה**. אזי f **אינטגרבילית**.
- טענה (שיעור 22): תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהאנה $f, g: Q \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות רימן. אזי $f \cdot g: Q \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית רימן.
- אי שוויון המשולש: תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ חסומה. אם f אינטגרבילית ב-Q אז $|f|$ אינטגרבילית ב-Q ומתקיים: $\left|\int_Q f(x)dx\right| \leq \int_Q |f(x)|dx$.
- טענה (שיעור 22): תהא $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ תיבה סגורה. תהא $f: Q \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית. אם $\{x \in Q | f(x) \neq 0\}$ זניחה אז $\int_Q f(x)dx = 0$.

קבוצות ז'ורדן

קבוצת ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצה. E תיקרא קבוצת ז'ורדן כאשר ∂E זניחה. (תזכורת: $\partial E = \bar{E} \backslash int(E)$)

דוגמאות:

1. לכל $x \in \mathbb{R}^n$, הסינגלטון $\{x\}$ ז'ורדן.
2. $\mathbb{Q}^n \subseteq \mathbb{R}^n$ אינה קבוצת ז'ורדן שכן $\partial(\mathbb{Q}^n) = \mathbb{R}^n$ אינה זניחה.
3. לכל $x \in \mathbb{R}^n$ ולכל $\delta > 0$ מתקיים $\mathcal{B}(x, \delta)$ קבוצת ז'ורדן.
4. יהיו $R, h > 0$. $Z_{R,h} = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 | x^2 + y^2 \leq R, z \in [0, h]\}$ הוא גליל והוא קבוצת ז'ורדן.
5. תהא $Q = \prod_{j=1}^n [a_j, b_j]$ תיבה סגורה, אז Q קבוצת ז'ורדן.

טענה (שיעור 23): תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצת ז'ורדן חסומה, תהא $f: E \to \mathbb{R}$ חסומה. נניח כי קבוצת נקודות האי-רציפות של f זניחה. נגדיר $F: \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ על ידי: $F(x) = \begin{cases} f(x) & x \in E \\ 0 & x \notin E \end{cases}$. אז:

1. לכל תיבה סגורה $Q \subseteq \mathbb{R}^n$ המכילה את E מתקיים כי $F\big|_Q$ אינטגרבילית.
2. קיים מספר I כך שלכל תיבה סגורה Q המכילה את E מתקיים $\int_Q F\big|_Q dx = I$.

אינטגרביליות ז'ורדן: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצת ז'ורדן חסומה, תהא $f: E \to \mathbb{R}$ חסומה. נאמר כי f אינטגרבילית ב-E אם קיימת תיבה Q המכילה את E כך ש-$F\big|_Q$ אינטגרבילית ב-Q, ונגדיר $\int_E f(x)dx = \int_Q F\big|_Q dx$ כאשר Q תיבה סגורה כלשהי המכילה את E.

אינטגרל בצמצום: תהאנה $E \subseteq G \subseteq \mathbb{R}^n$, תהא $f: G \to \mathbb{R}$. אם $f\big|_E$ אינטגרבילית אז נגדיר $\int_E f(x)dx = \int_G f\big|_E dx$.

נפח: תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצת ז'ורדן חסומה אז $Vol(E) = \int_E 1dx$.

טענה (שיעור 23): תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצת ז'ורדן זניחה וחסומה, תהא $f: E \to \mathbb{R}$ חסומה. אז f אינטגרבילית על E ו-$\int_E f(x)dx = 0$.

אדיטיביות האינטגרל (שיעור 23): תהאנה A, B קבוצות ז'ורדן חסומות וזרות. נניח $A \cup B \to \mathbb{R}$ חסומה. נניח כי f אינטגרבילית על A ואינטגרבילית על B. אזי f אינטגרבילית על $A \cup B$ ומתקיים: $\int_{A \cup B} f(x)dx = \int_A f(x)dx + \int_B f(x)dx$.

הערות:

- דוגמה לקבוצה חסומה שאינה ז'ורדן: $\mathbb{Q}^n \cap \mathcal{B}(0,1)$ כי מתקיים $\partial(\mathbb{Q}^n \cap \mathcal{B}(0,1)) = \overline{\mathcal{B}(0,1)}$.

חישוב אינטגרלים

משפט פוביני

סימונים:

- נזהה $\mathbb{R}^{n+m} \cong \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^m$. תהאנה $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ ותהא $f: A \times B \to \mathbb{R}$ פונקציה.
- קובעים x: לכל $x \in A$ נגדיר $f_x: B \to \mathbb{R}$ ע"י $f_x(y) = f(x,y)$ לכל $y \in B$.
- קובעים y: לכל $y \in B$ נגדיר $f_y: A \to \mathbb{R}$ ע"י $f_y(x) = f(x,y)$ לכל $x \in A$.

משפט פוביני (שיעור 24): תהאנה $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות סגורות ותהא $f: A \times B \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית.
נגדיר $F_1: A \to \mathbb{R}$ על ידי $F_1(x) = \int_B^- f_x(y)dy$ ו-$F_2: B \to \mathbb{R}$ על ידי $F_2(y) = \int_A^- f_y(x)dx$ לכל $x \in A, y \in B$. אזי הפונקציות אינטגרביליות ומתקיים: $\int_{A\times B} f(x,y)dxdy = \int_A F_1(x)dx = \int_B F_2(y)dy$

טענה (שיעור 24): תהאנה $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ תיבות סגורות ותהא $f: A \times B \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית.
נסמן: $NA = \{x \in A | f_x: B \to \mathbb{R} \text{ is not integrable}\}$, $NB = \{y \in B | f_y: A \to \mathbb{R} \text{ is not integrable}\}$. אזי קבוצות אלה זניחות.

משפט (שיעור 24): תהא $E \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצת ז'ורדן חסומה. תהאנה $f_1, f_2: E \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות וחסומות עבורן $f_1(x) \le f_2(x)$ לכל $x \in E$. נסמן $D = \{(x,y) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} | x \in E, f_1(x) \le y \le f_2(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$. אזי D קבוצת ז'ורדן חסומה ולכל $g: D \to \mathbb{R}$ אינטגרבילית מתקיים: $\int_D g(x,y)dxdy = \int_E (\int_{f_1(x)}^{f_2(x)} g(x,y)dy)dx$.

טענה (שיעור 24): תהאנה $A \subseteq \mathbb{R}^n, B \subseteq \mathbb{R}^m$ קבוצת ז'ורדן חסומות, ותהאנה $f: A \to \mathbb{R}$ ו-$g: B \to \mathbb{R}$ אינטגרביליות.
אזי $A \times B \subseteq \mathbb{R}^{n+m}$ קבוצת ז'ורדן והפונקציה $fg: A \times B \to \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $(fg)(x,y) = f(x)g(y)$ היא אינטגרבילית ומתקיים:

$$\int_{A\times B} (fg)(x,y)dxdy = \left[\int_A f(x)dx\right]\left[\int_B g(y)dy\right]$$

החלפת משתנים

דיפאומורפיזם גזיר ברציפות: תהאנה $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצות פתוחות. תהא $T: U \to V$ העתקה גזירה ברציפות. נאמר כי T היא דיפאומורפיזם גזיר ברציפות אם T העתקה הפיכה, וההעתקה ההופכית $T^{-1}: V \to U$ היא גזירה ברציפות.

משפט שינוי משתנה (שיעור 25): תהאנה $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ קבוצות פתוחות וחסומות. יהי $T: U \to V$ דיפאומורפיזם גזיר ברציפות. תהא E קבוצת ז'ורדן חסומה ונניח כי $\bar{E} \subseteq V$. אזי $T^{-1}(E)$ קבוצת ז'ורדן חסומה. יתר על כן, לכל פונקציה אינטגרבילית $f: E \to \mathbb{R}$ מתקיים כי $(f \circ T)|detDT|$ אינטגרבילית על $T^{-1}(E)$ ומתקיים:

$$\int_E f(y)dy = \int_{T^{-1}(E)} (f \circ T)(x) \cdot detDT(x)dx$$

סיכום מעבר לקואורדינטות:

קואורדינטות	מתי להשתמש?	העתקה	יעקוביאן
פולריות	x^2, y^2	$T: [0,\infty) \times [0,2\pi) \to \mathbb{R}^2$ $T(r,\theta) = \begin{pmatrix} rcos\theta \\ rsin\theta \end{pmatrix}$ $x^2 + y^2 = r^2$	$detDT(r,\theta) = r$
גליליות	x^2, y^2, z	$T: [0,\infty) \times [0,2\pi) \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ $T(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} rcos\theta \\ rsin\theta \\ z \end{pmatrix}$ $x^2 + y^2 = r^2$	$detDT(r,\theta,z) = r$
כדוריות	x^2, y^2, z^2	$T: [0,\infty) \times [0,2\pi) \times [0,\pi] \to \mathbb{R}^3$ $T(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} rsin\varphi cos\theta \\ rsin\varphi sin\theta \\ rcos\varphi \end{pmatrix}$ $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$	$detDT(r,\theta,\varphi) = r^2 sin\varphi$

אינטגרלים לא אמיתיים

בקרוב.. (אין למה לחכות).