הפקולטה למדעים מדויקים
ע"ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

החוג למתמטיקה (0366)
חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי 1ב (1121)

(גרסה ארוכה)

מרצה: אלכסנדר מינקין

מתרגל: עדי דיקשטיין

תשפ"ב, סמסטר א' (2021-2022)

מסכם: רועי מעין

The Raymond and
Beverly Sackler Faculty
of Exact Sciences
Tel Aviv University

פרק 1 – מבוא

פרק 2 – סדרות ממשיות

פרק 3 - טורים

פרק 4 – פונקציות במשתנה ממשי אחד

פרק 5 – חשבון דיפרנציאלי במשתנה אחד (נגזרות)

פרק 6 – מבוא לחשבון אינטגרלי במשתנה אחד (אינטגרלים)

1 – מבוא

מושגים ממבנה הישר הממשי

סימונים ונוסחאות חשובות (צנזור 03 – עד 19)

סימנים חשובים:

- $\sum$ – סכום של איברים.
- Π – מכפלה של איברים.
- $n!$ – עצרת: $n! = \prod_{k=1}^{n} k$. נשים לב כי מגדירים $0! = 1$.
- $\binom{n}{k}$ – מקדם הבינום (n מעל k): $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$

מקדמי בינום נפוצים:

$$\binom{1}{0} = \frac{1!}{0!\,1!} = 1$$

$$\binom{n}{0} = \binom{n}{n} = 1$$

$$\binom{n}{1} = \frac{n!}{1!\,(n-1)!} = n$$

$$\binom{n}{n-k} = \frac{n!}{(n-k)!\,k!} = \frac{n!}{k!\,(n-k)!} = \binom{n}{k}$$

זהות פסקל – $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k}$

נוסחת הבינום של ניוטון:

- הנוסחה הראשונה – לכל $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$
- הנוסחה השנייה – לכל $a, b \in \mathbb{R}, n \in \mathbb{N}$ מתקיים: $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=1}^{n} a^{k-1} b^{n-k}$

אי שוויונות שימושיים

אי שוויון המשולש:

- תכונה חשובה של הערך המוחלט: $|x| \le a \Leftrightarrow -a \le x \le a$
- אי שוויון המשולש: לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|x+y| \le |x| + |y|$
- אי שוויון המשולש ההפוך: לכל $x, y \in \mathbb{R}$ מתקיים $|x \pm y| \ge |x| - |y|$
- אי שוויון המשולש המוכלל: $\left|\sum_{j=1}^{n} x_j\right| \le \sum_{j=1}^{n} x_j$

אי שוויון ממוצעים:

- חשבוני-גאומטרי: יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים וחיוביים. אז:
$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \ge \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}$$
- הרמוני-גאומטרי: יהיו $a_1, a_2, \dots, a_n$ מספרים ממשיים וחיוביים. אז:
$$\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n} \ge \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \dots + \frac{1}{a_n}}$$

אי שוויון ברנולי: לכל $x > -1$ ולכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים: $(1+x)^n \ge 1 + nx$, ושוויון מתקיים רק כאשר $x = 0 \vee n = 1$.

תכונות המספריים הממשיים

נגדיר שתי פונקציות: $+:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, $\cdot:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$

נניח שמתקיימות כל התכונות הבאות, לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$:

1. קומוטטיביות – $x+y=y+x, xy=yx$
2. אסוציאטיביות - $(x+y)+z=x+(y+x), (xy)z=x(yz)$
3. איבר ניטרלי לחיבור (0) - $x+0=x$
4. איבר ניטרלי לכפל (1) - $x\cdot 1=x$
5. איבר נגדי – לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש: $x+y=0$ (יש אחד כזה, לכן נסמן אותו $-x$)
6. איבר הופכי – לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש: $x\cdot y=1$ (יש אחד כזה, לכן נסמן אותו x^{-1})
7. דיסטריבוטיביות - $x(y+z)=xy+xz$

טענות שהוכחנו בכיתה:

- אם $x+y=x+z$ אז $y=z$
- $x\cdot 0=0$
- יחידות האיבר הנגדי: לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $y\in\mathbb{R}$ כך ש: $x+y=0$
- $-(-x)=x$

טענות להוכחה בבית:

- אם $xy=xz$ אז $y=z$
- יחידות האיבר ההופכי
- $-1\cdot x=-1$

נגדיר שתי פעולות נוספות: $-:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, $:\ :\mathbb{R}\times\mathbb{R}\{0\}\to\mathbb{R}$

טענה: לכל $x\in\mathbb{Q}$ ו-$y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ מתקיים $x+y\in\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$ (סכום מספר רציונלי וממשי נותן מספר ממשי).

יחס סדר: על $\mathbb{R}$ נגדיר יחס סדר $<\subseteq\mathbb{R}^2$, שמקיים לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$:

1. אם $x<y$ אז $\neg y<x$
2. אם $x<y\wedge y<z$ אז $x<z$
3. $x<y\vee y<x\vee x=y$
4. אם $x<y$ אז $x+z<y+z$
5. אם $x<y$ וגם $z>0$ אז $xz<yz$

צפיפות הממשיים בממשיים: לכל $x,y\in\mathbb{R}$ אם $x<y$ אז קיים $z\in\mathbb{R}$ כך ש-$x<z<y$.

צפיפות הרציונאליים בממשיים: לכל $x,y\in\mathbb{R}$ אם $x<y$ אז קיים $q\in\mathbb{Q}$ כך ש-$x<q<y$.

תכונת/עקרון ארכימדס: לכל $x,y\in\mathbb{R}$ אם $x>0$ אז קיים $n\in\mathbb{N}$ כך ש-$nx>y$.

טענה 1.3 לכל $\varepsilon>0$ קיים $n\in\mathbb{N}^+$ המקיים $\frac{1}{n}<\varepsilon$.

הוכחה: יהי $\varepsilon>0$.

לפי תכונת ארכימדס, עבור הבחירות $x=\varepsilon>0,\ y=1$ קיים $n\in\mathbb{N}^+$ כך ש־$n\varepsilon>1$.

נתבונן ב־n.

את האי־שוויון האחרון נחלק ב־ε, שהוא חיובי, ונקבל כי

$$\varepsilon>1/n.$$

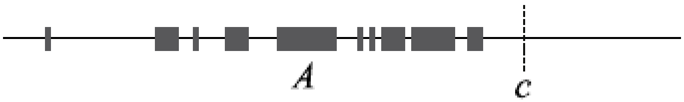
ערך שלם תחתון: לכל $x\in\mathbb{R}$ קיים $k\in\mathbb{Z}$ יחיד כך שמתקיים $k\leq x<k+1$. נסמן את ה-k היחיד הזה ב-$\lfloor x\rfloor$ ונקרא לו הערך השלם התחתון של x.

חסמים של קבוצות

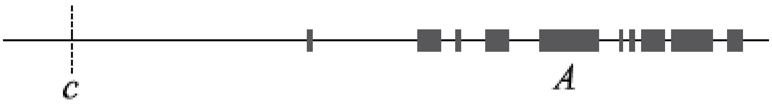
חסם מלעיל ומלרע (צנזור 03 – 36 עד הסוף):

תהא $A\subseteq\mathbb{R}$ לא ריקה.

- חסם מלעיל - מספר $M\in\mathbb{R}$ נקרא חסם מלעיל של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\le M$. אם קיים ב-A חסם מלעיל נאמר כי היא **חסומה מלעיל/מלמעלה**.



- חסם מלרע - מספר $m\in\mathbb{R}$ נקרא חסם מלרע של A אם לכל $a\in A$ מתקיים $a\ge m$. אם קיים ב-A חסם מלרע נאמר כי היא **חסומה מלרע/מלמטה**.



- חסימות – A נקראת **חסומה** אם היא חסומה מלעיל ומלרע.

טענות:

- אם $A\subseteq\mathbb{Z}$ חסומה מלמעלה, אז יש לה איבר מקסימלי והוא יחיד (שיעור 5).
- אם $A\subseteq\mathbb{Z}$ חסומה מלמטה, אז יש לה איבר מינימלי והוא יחיד (שיעור 5 – לא הוכחנו).

תרגיל: הוכיחו כי A חסומה אם ורק אם קיים $C\ge 0$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $|a|\le C$.

פתרון: $(\Leftarrow)$ נניח כי קיים $C\ge 0$ כך שלכל $a\in A$ מתקיים $|a|\le C$, באופן שקול

$$-C\le a\le C\,(\star)$$

נתבונן ב־C. יהי $a\in A$, אז לפי $(\star)$ מתקיים $a\le C$, ולכן C הוא חסם מלעיל עבור A, ולכן A חסומה מלעיל. באופן דומה A חסומה מלרע.

$(\Rightarrow)$ נניח כי A חסומה. על כן קיימים $M,m\in\mathbb{R}$ כך ש־ M חסם מלעיל של A ו־m חסם מלרע של A. נגדיר $C=\max\{|m|,|M|\}$.

נתבונן ב־C. אז $C\ge 0$. יהי $a\in A$ אז מתקיים

$$\begin{cases} a\le M\le |M|\le C \\ a\ge m\ge -|m|\ge -C \end{cases}$$

ולכן $|a|\le C$. $\square$

מקסימום ומינימום:

- מקסימום – איבר $a\in A$ יקרא מקסימלי, אם הוא חסם מלעיל של A. נסמן $maxA$.
- מינימום – איבר $a\in A$ יקרא מינימלי, אם הוא חסם מלרע של A. נסמן $minA$.

הערות:

- נשים לב כי במקרים אלה, מקסימום ומינימום הם **חסמים שחייבים להיות שייכים לקבוצה**, קודם לכן, החסמים היו סתם מספרים כלליים ב-$\mathbb{R}$.

טענה: אם קיים מקסימום/מינימום אז הוא יחיד.

סופרמום ואינפימום (צנזור 04):

תהא $A \subseteq \mathbb{R}$.

חסם עליון/סופרימום (supremum): מספר $M \in \mathbb{R}$ יקרא חסם עליון של A אם מתקיים:

1. M חסם מלעיל של A.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a + \varepsilon > M$.

הערות:

- נסמן אותו בתור $supA$, ואם אין לקבוצה חסם מלעיל אז נסמן $supA = \infty$.
- זהו החסם מלעיל הקטן ביותר (הכי הדוק) – לכל חסם מלעיל אחר S, מתקיים $supA \leq S$.

המחשה – אם מגדירים את התנאי על סופרימום y כך שלכל $\varepsilon > 0$ קיים $x \in A$ כך ש-$x > y - \varepsilon$ (כלומר $x + \varepsilon > y$), ניתן לראות כי לא משנה כמה נתרחק מהסופרימום, תמיד יהיה איבר מהקבוצה שלא יהיה קטן מהמקום אליו הגענו, כלומר זהו החסם הכי הדוק ואין אף חסם יותר הדוק ממנו.

החסם העליון של קבוצה הוא איפוא חסם מלעיל, שאפשר להתקרב אליו כרצוננו על־ידי איברים מהקבוצה.

חסם תחתון/אינפימום (infimum): מספר $m \in \mathbb{R}$ יקרא חסם תחתון של A אם מתקיים:

1. m חסם מלרע של A.
2. לכל $\varepsilon > 0$ קיים $a \in A$ כך ש- $a - \varepsilon < m$.

הערות:

- נסמן אותו בתור $infA$, ואם אין לקבוצה חסם מלרע אז נסמן $infA = -\infty$.
- זהו החסם מלרע הגדול יותר (הכי הדוק) – לכל חסם מלרע אחר S, מתקיים $infA \geq S$.

טענות:

- אם קיים חסם עליון/תחתון אז הוא יחיד.
- **אם קיים ל-A איבר מקסימלי אז $\boldsymbol{supA = maxA}$** (שימושי להוכחות).
  - כלומר אם מצאנו sup והוא לא שייך לקבוצה אז לקבוצה אין max.
- **אם קיים ל-A איבר מינימלי אז $\boldsymbol{infA = minA}$** (שימושי להוכחות).
  - כלומר אם מצאנו inf והוא לא שייך לקבוצה אז לקבוצה אין min.

אקסיומת השלמות: לכל $A \subseteq \mathbb{R}$. אם A לא ריקה וחסומה מלעיל, אז קיים ל-A סופרמום.

מסקנה – אם A לא ריקה וחסומה מלרע, אז קיים ל-A אינפימום (לא הוכחנו – אולי באמצעות כפל במינוס 1).

ב) $B = \{x^2 + x + 1 \ : \ x \in \mathbb{R}\}$.
נוכיח כי B לא חסומה מלעיל.
יהי $M > 0$.
נתבונן ב-$x = M$.
ע"פ הגדרת B נסיק כי מתקיים $M^2 + M + 1 \in B$.
כמו כן מתקיים $M < M^2 + M + 1$ ולכן B אינה חסומה מלעיל.
נוכיח כי B חסומה מלרע ונמצא את החסם התחתון שלה.
יהי $x \in \mathbb{R}$.
ניתן לרשום

$$x^2 + x + 1 = x^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot x + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}.$$

מכאן נסיק כי

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} \geq \frac{3}{4}$$

ולכן הקבוצה B חסומה מלרע ע"י $\frac{3}{4}$.
יתר על כן, נתבונן ב-$x = -\frac{1}{2}$, ונשים לב כי

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = \frac{3}{4} \in B$$

לכן $\frac{3}{4}$ הוא האיבר המינימלי של B, כלומר,

$$\min B = \inf B = \frac{3}{4}.$$

<u>כיסויים:</u>

תהי X קבוצה לא ריקה ותהי $Y \subset X$ תת קבוצה של X. נסמן ב-$P(X)$ את אוסף כל תתי הקבוצות של X.

- <u>כיסוי</u> – כיסוי של Y הוא תת-אוסף של קבוצות $\boldsymbol{A'} \subseteq P(X)$ (כלומר, קבוצה המכילה תתי-קבוצות של X) שמקיימת $Y \subseteq \bigcup_{A \in A'} A$.
  כלומר, כל איבר ב-Y שייך לאיחוד המוכלל של קבוצות ב-A' (שייך לפחות לאחת מהן).
- <u>תת כיסוי</u> – תת-קבוצה $B \subseteq P(X)$ נקראת תת-כיסוי של Y על ידי איברי A' אם $B \subseteq A'$ ו-B הוא כיסוי של Y.

<u>הערות:</u>

- לכל כיסוי A' של Y ב-X, הכיסוי A' מהווה תת כיסוי של עצמו.

<u>המבנה הטופולוגי הסטנדרטי של הישר הממשי</u>

סביבות

<u>סביבה סימטרית:</u> יהי $x \in \mathbb{R}$, וגם $0 < \varepsilon \in \mathbb{R}$. הקבוצה $(x - \varepsilon, x + \varepsilon) = \{y \in \mathbb{R}: |y - x| < \varepsilon\}$ נקראת סביבה סימטרית של x.

בשמות אחרים גם נקראת "אפסילון סביבה של x", "כדור פתוח סביב x ברדיוס ε - $\mathrm{B}(x, \varepsilon)$.

<u>סביבה:</u> יהי $x \in \mathbb{R}$, ותהי $I \subseteq \mathbb{R}$. נגיד ש-I סביבה של x אם יש סביבה סימטרית u של x כך שמתקיים $u \subseteq I$.

כלומר, אם קיים $\varepsilon > 0$ כך ש-$(x - \varepsilon, x + \varepsilon) \subseteq I$. אנחנו מגדירים כאן סביבה כללית באמצעות סביבה סימטרית (שמוכלת בתוכה).

<u>נקודה פנימית:</u> יהי $x \in \mathbb{R}$, ותהי $A \subseteq \mathbb{R}$. נגיד ש-x היא נקודה פנימית של A, אם קיימת סביבה I של x כך ש-$I \subseteq A$.

סימון - נסמן את אוסף כל הנקודות הפנימיות של הקבוצה ב-A^o.

<u>טענה:</u> I סביבה של $x \Leftrightarrow$ קיימים $a, b \in \mathbb{R}$ כאשר $a < b$ כך ש-$x \in (a, b)$ וגם $(a, b) \subseteq I$. (שיעור 5 לא הוכחנו)

<u>סביבה מנוקבת:</u> תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. אם A סביבה של x אז הקבוצה $A \backslash \{x\}$ נקראת סביבה מנוקבת של x.

כלומר, כל הנקודות רלוונטיות חוץ מ-x עצמה.

קבוצות (צנזור 23 / צנזור 24)

קבוצה פתוחה: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, נגיד שהקבוצה פתוחה, כאשר היא סביבה של כל איבריה.

דוגמאות:

- לכל $a < b$ מתקיים כי (a, b) קבוצה פתוחה. (הוכחנו בשיעור 5).
- הקבוצה $\mathbb{R}$ פתוחה. (הוכחנו בשיעור 5).
- הקטע $[0,1)$ לא קבוצה פתוחה (הוכחנו בשיעור 5). נשים לב כי הנקודה 0 אינה פנימית, לא קיימת סביבה של 0 המוכלת בקטע. סביבה של 0 אוטומטית תהיה יותר שמאלה מ0 ולכן לא מוכלת בקטע.

נקודת סגור: יהי $x \in \mathbb{R}$, ותהי $A \subseteq \mathbb{R}$. נגיד ש-x היא נקודת סגור של A, אם לכל סביבה u של x מתקיים $u \cap A \neq \emptyset$.

כלומר, נעבור על כל הסביבות של הנקודה, ואם תהיה לפחות נקודה אחת משותפת עם A (החיתוך בין הסביבה לקבוצה לא ריק) אז מדובר בנקודת סגור.

סימון - את אוסף כל נקודות הסגור של הקבוצה נסמן $Cl(A)$.

קבוצה סגורה: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$, נגיד שהקבוצה סגורה, אם היא מכילה את כל נקודות הסגור שלה.

קבוצה קומפקטית: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$. הקבוצה A קבוצה קומפקטית אם היא חסומה וסגורה.

טענה (תרגיל לבית, לא הוכחנו): אם קבוצה A קומפקטית אז $supA \in A \wedge infA \in A$.

6. יהי שתי קבוצות T, S שמקיימות את התנאי $T \subseteq S$.

(א) הוכיחו כי מתקיים $Cl\,T \subseteq Cl\,S$.
(ב) הוכיחו כי מתקיים $T^o \subseteq S^o$.

פתרון:

(א) לפי הנתון, אנחנו יודעים ש- $T \subseteq S$.

בנוסף אנחנו יודעים שמתקיים ש- $S \subseteq Cl\,S$, זה נובע מטענה שלמדתם בשיעור.

ובפרט נקבל ש - $T \subseteq Cl\,S$.

לכן הקבוצה T מוכלת בסגור של S, נוכיח ש- $Cl\,T \subseteq Cl\,S$.

יהי $x \in Cl T$. יהי $r > 0$, אז קיים $y \in B(x, r)$ כך ש- $y \in T$. נתבונן ב- y.

נקבל ש- $y \in B(x, r)$ וגם $y \in T$ לכן $y \in S$ לכן נקבל $B(x, r) \cap S \neq \emptyset$.

לכן x היא נקודת סגור של S, לכן $x \in Cl\,S$, כלומר ש- $Cl\,T \subseteq Cl\,S$.

(ב) יהי $x \in T^o$, כלומר קיימת $r > 0$, כך ש- $B(x, r) \subseteq T \subseteq S$.

לכן x היא נקודה פנימית של S כלומר $x \in S^o$. לכן קבלנו ש- $T^o \subset S^o$.

נקודת הצטברות: תהי $A \subseteq \mathbb{R}$ נגיד ש-x הוא נקודת הצטברות של הקבוצה A אם לכל סביבה מנוקבת I של A מתקיים: $I \cap A \neq \emptyset$.

הערות:

- ניתן גם לומר שבכל סביבה של x נוכל למצוא לפחות נקודה אחת ששייכת ל-A שהיא לא x.
- בהמשך נאמר שנקודת הצטברות היא נקודה שמאפשרת לנו להתקרב אליה כרצוננו (לא נגיע אליה ממש כי אנחנו מדברים על סביבה מנוקבת שלה), עם ערכים מ-A ששונים ממנה.

2 - סדרות

תכונות יסודיות של סדרות

תכונות בסיסיות

סדרה – סדרה ממשית היא פונקציה $a\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$. את איברי הסדרה נהוג לסמן ע"י a_n לכל $n \in \mathbb{N}^+$, ולא ע"י $a(n)$. את הסדרות נסמן בסימונים הבאים: $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ או פשוט $\{a_n\}$ או a.

דוגמאות:

- הסדרה קבועה הנתונה ע"י $a_n = c$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$, עבור $c \in \mathbb{R}$ מספר קבוע כלשהו.
- הסדרה החשבונית הנתונה ע"י $a_n = c + (n-1)\,d$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$, עבור $c, d \in \mathbb{R}$. (תרגיל לבית) מקיימת את כלל הנסיגה על ידי כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n + d$ ו- $a_1 = c$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.
- הסדרה ההנדסית הנתונה ע"י $a_n = b \cdot q^{n-1}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$, עבור $a_1, q \in \mathbb{R}$. (תרגיל לבית) הסדרה מקיימת את כלל הנסיגה $a_{n+1} = a_n \cdot q$ ו- $a_1 = b$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.
- סדרת האי זוגיים $\{2n-1\}_{n=1}^{\infty}$, סדרת הזוגיים $\{2n\}_{n=1}^{\infty}$.

חסימות:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- **חסומה מלעיל** – a_n חסומה מלעיל אם קיים $M \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n \le M$.
- **חסומה מלרע** – a_n חסומה מלרע אם קיים $m \in \mathbb{R}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n \ge m$.
- **חסומה** – כאשר היא חסומה גם מלעיל וגם מלרע.

מונוטוניות:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

- **עולה** – אם לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n \le a_{n+1}$ אז נגיד שהסדרה עולה, אם $a_n < a_{n+1}$ היא **עולה ממש**.
  - באופן שקול: $a_{n+1} - a_n \ge 0$.
  - באופן שקול אם $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \ge 1$.
- **יורדת** – אם לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n \ge a_{n+1}$ אז נגיד שהסדרה יורדת, אם $a_n > a_{n+1}$ היא **יורדת ממש**.
  - באופן שקול: $a_{n+1} - a_n \le 0$.
  - באופן שקול אם $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$: $\frac{a_{n+1}}{a_n} \le 1$.
- אם נקבל $a_{n+1} = a_n$ אז הסדרה גם עולה וגם יורדת, נאמר שהיא **קבועה**.

תת-סדרה ותמורה:

תהי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה.

תת-סדרה (צגזור 14 – 20 עד 28) – תהי $n\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ סדרה עולה ממש - $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.
הסדרה שמתקבלת מההרכבה $a \circ n\colon \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ נקראת תת-סדרה של a. נסמן - $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$.

למשל:

- $a_n = a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots$
- $n_k = k^2 = 1, 4, 9, 16, \ldots$
- $a_{n_k} = a_1, a_4, a_9, \ldots$

הערות:

- נשים לב כי סדרה היא **תמיד תת-סדרה של עצמה**.
- אנחנו רוצים לשמור על הסדר, ולכן $\{n_k\}$ **עולה ממש**.
- תמיד מתקיים $\mathbf{n_k \geq k}$, האיבר הכללי בתת-סדרה הוא מספר טבעי שהוא או שווה לאינדקס k (לוקחים את האיבר בסדרה), או גדול מ-k (אם מדלגים על איבר מסוים).

תמורה – תהי $n: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{N}^+$ סדרה חח"ע ועל - $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$.
הסדרה שמתקבלת מההרכבה $a \circ n: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ נקראת **תמורה** של a.

פעולות על סדרות

תהיינה $a, b: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ שתי סדרות. נגדיר את הסדרות הבאות:

1. סכום - $(a+b)_n = a_n + b_n$
2. חיסור - $(a-b)_n = a_n - b_n$
3. כפל בקבוע – $(c \cdot a)_n = c \cdot a_n$
4. מכפלה – $(a \cdot b)_n = a_n \cdot b_n$
5. חלוקה – אם מתקיים כי $b_n \neq 0$ אז נגדיר $\left(\frac{a}{b}\right)_n = \frac{a_n}{b_n}$

סדרות נסיגה

סדרת נסיגה - סדרה נקראת סדרת נסיגה, כאשר כל איבר מוגדר באמצעות האיברים הקודמים לו, בהינתן תנאי התחלה (איבר ראשון).

1. תהי סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מוגדרת ע"י כלל נסיגה

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 3}, \qquad a_1 = 1$$

לכל $n \in \mathbb{N}^+$. הראו כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$, הביטוי a_n מוגדר היטב וגם $a_n > 0$.

בסיס האינדוקציה: נתון ש־ $a_1 = 1 > 0$.

צעד האינדוקציה: יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נניח כי $a_n > 0$. נוכיח כי a_{n+1} מוגדר היטב וגם $a_{n+1} > 0$.

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{4a_n + 3}$$

לפי הנחת האינדוקציה a_n ולכן גם $4a_n + 3$ הם מספרים חיובים. מכאן a_{n+1} מוגדר היטב וגם $a_{n+1} > 0$.

מכאן נקבל שהסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא נוגדרת היטב וחסומה מלמטה על ידי אפס.

גבולות של סדרות

הגדרת הגבול (צנזור 05 - 26 עד הסוף)

תהי $a: \mathbb{N}^+ \to \mathbb{R}$ סדרה, ויהי $L \in \mathbb{R}$.

הגדרת גבול של סדרה – L הוא גבול של $\{a_n\}$ אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ כך שלכל $n \geq N(\varepsilon)$ מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

מה זה אומר?

- לכל $\varepsilon > 0$ – **לא בוחרים**. לכל מספר כזה גם אם מאוד קטן, לא בשליטתנו.
- קיים $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ - **כן בוחרים**. זהו אינדקס מסוים בסדרה (לרוב יהיה תלוי באפסילון, לשים לב שהוא צריך להיות טבעי, ולכן נשתמש לפעמים בערך שלם תחתון או עליון).
- כך שלכל $n \geq N(\varepsilon)$ – החל מהאינדקס הזה, כל איברי הסדרה במקומות מספיק רחוקים מקיימים.
- $|a_n - L| < \varepsilon$ – המרחק בין איברי הסדרה לגבול קטן מאפסילון, כלומר **קרובים מאוד לגבול**.

סדרה מתכנסת – אם ל-$\{a_n\}$ יש גבול L, אז נגיד שהיא **מתכנסת ל-L**.

סדרה מתבדרת – אם לסדרה אין גבול נגיד שהיא **מתבדרת**.

טענה (שיעור 7 / צנזור 06 - התחלה עד 18): אם $\{a_n\}$ **מתכנסת** אז היא **חסומה**.

כלומר, באופן שקול, אם סדרה **לא חסומה** אז היא **לא מתכנסת**.

יחידות הגבול (שיעור 8 / צנזור 06 – 23 עד הסוף): תהי $\{a_n\}$ מתכנסת, אזי יש לה גבול יחיד.

תרגיל.

1. נגדיר סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_n = \frac{(-1)^n+1}{2}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. הוכיחו או הפריכו לפי ההגדרה כי $a_n \to 0$.
2. נגדיר סדרה $(a_n)_{n=3}^{\infty}$ ע"י $a_n = \frac{3n^2-4}{n^2-4}$ לכל $n \geq 3$ טבעי. הוכיחו או הפריכו לפי ההגדרה כי $a_n \to 3$.

פתרון.

1. נתבונן ב-$\epsilon = 1$. יהי N טבעי חיובי. נתבונן ב-$n = 2N$. אז $n \geq N$ ו-$|a_n - 0| = 1 \geq \epsilon$ לכן $a_n \nrightarrow 0$.
2. יהי $\epsilon > 0$. נתבונן ב-$N = max\left\{3, \left\lceil\sqrt{\frac{8}{\epsilon}+4}\right\rceil + 1\right\}$. יהי $n \geq N$. אז

$$|a_n - 3| = \left|\frac{3n^2-4}{n^2-4} - 3\right| = \left|\frac{3n^2-4-3n^2+12}{n^2-4}\right| = \left|\frac{8}{n^2-4}\right|$$

בנוסף, $n \geq 3$ לכן $\frac{8}{n^2-4} > 0$ ולכן $|a_n - 3| = \frac{8}{n^2-4}$.
$n > \sqrt{\frac{8}{\epsilon}+4}$ לכן $n^2 > \frac{8}{\epsilon}+4$ לכן $n^2 - 4 > \frac{8}{\epsilon} > 0$ לכן $\frac{1}{n^2-4} < \frac{\epsilon}{8}$ לכן $\frac{8}{n^2-4} < \epsilon$. לכן $a_n \to 3$.

שאיפה לאינסוף:

סדרה שואפת לאינסוף - אם לכל $M > 0$ קיים $N(M) \in N$ כך שלכל $n \geq N(M)$ מתקיים $a_n > M$. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = \infty$.

סדרה שואפת למינוס אינסוף - אם לכל $M > 0$ קיים $N(M) \in N$ כך שלכל $n \geq N(M)$ מתקיים $a_n < -M$. נסמן $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$.

סדרה ששואפת לאינסוף היא סדרה מתבדרת! כיוון שמתכנסת **זה רק לגבול סופי**. לכן, נגדיר את המושג הבא.

מתכנסת במובן הרחב – סדרה מתכנסת במובן הרחב אם היא **מתכנסת**, **או שואפת ל-∞ או ל-∞-**.

תרגיל 1.

נגדיר סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_n = n^2 - n$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. הוכיחו או הפריכו לפי ההגדרה כי $a_n \to \infty$.

פתרון.

יהי $M > 0$. נתבונן ב-$N = \max\{2, \lceil M \rceil\}$. יהי $n \geq N$ אז $n \geq 2$ ולכן $n^2 \geq 2n$. לכן

$$a_n = n^2 - n \geq 2n - n = n \geq N \geq M$$

אריתמטיקה של גבולות

חשבון גבולות: תהיינה $\{a_n\}, \{b_n\}$ סדרות **מתכנסות (לגבול סופי)**. אז:

1. גבול של סכום (שיעור 8) - $\lim\limits_{n\to\infty}(a+b)_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n + \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
2. גבול של כפל בקבוע - $\lim\limits_{n\to\infty} ca_n = c\lim\limits_{n\to\infty} a_n$
3. גבול של מכפלה (שיעור 8) - $\lim\limits_{n\to\infty}(ab)_n = \lim\limits_{n\to\infty} a_n \lim\limits_{n\to\infty} b_n$
4. גבול של מנה (שיעור 8) –אם נניח כי $\lim\limits_{n\to\infty} b_n \neq 0$ אז קיים $N_0 \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים $b_n \neq 0$ ואז ניתן להגדיר $\lim\limits_{n\to\infty}(\frac{a}{b})_{n=N_0} = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} a_n}{\lim\limits_{n\to\infty} b_n}$.

חשבון גבולות אינסופיים:

1. חיבור וכפל (שיעור 9) - אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \lim\limits_{n\to\infty} b_n = \infty$, אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$
2. אינסוף וגבול רגיל: אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = \infty$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = L \neq 0$ אז מתקיים:
   a. $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) = \lim\limits_{n\to\infty}(a_n - b_n) = \infty$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty}(b_n - a_n) = -\infty$
   b. אם $L > 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = \infty$
   c. אם $L < 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n b_n) = -\infty$
3. גבול במובן הרחב וגבול אפס: אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$ כאשר $L > 0$ (סופי או אינסופי) וגם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 0$ אז מתקיים:
   a. אם קיים $N_0 \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים $b_n > 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = \infty$
   b. אם קיים $N_0 \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים $b_n < 0$ אז $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_n}{b_n} = -\infty$
   c. אחרת, לסדרת המנה אין גבול במובן הרחב – כלומר היא מתבדרת.

יהיו $a, b > 0$. נגדיר סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_n = \sqrt{n+a}\sqrt{n+b} - n$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. הראו כי היא מתכנסת וחשבו את גבולה.

לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים

$$a_n = \sqrt{n+a}\sqrt{n+b} - n = \frac{\left(\sqrt{n+a}\sqrt{n+b} - n\right)\left(\sqrt{n+a}\sqrt{n+b} + n\right)}{\sqrt{n+a}\sqrt{n+b} + n} = \frac{(n+a)(n+b) - n^2}{\sqrt{n+a}\sqrt{n+b} + n}$$
$$= \frac{n(a+b) + ab}{\sqrt{n+a}\sqrt{n+b} + n} = \frac{a + b + \frac{ab}{n}}{\sqrt{\frac{n+a}{n}}\sqrt{\frac{n+b}{n}} + 1} = \frac{a + b + \frac{ab}{n}}{\sqrt{1+\frac{a}{n}} \cdot \sqrt{1+\frac{b}{n}} + 1}$$

לפי אריתמטיקה $a + b + \frac{ab}{n} \to a + b$ וגם $\sqrt{1+\frac{a}{n}} \cdot \sqrt{1+\frac{b}{n}} \to 1$ (לבית, העזרו בתרגיל 1.2) ולכן לפי אריתמטיקה $a_n \to \frac{a+b}{2}$.

משפטים על גבולות

כלל הסנדוויץ' (שיעור 9 / צגזור 08 – 26 עד 38) – תהיינה $\{a_n\},\{b_n\},\{c_n\}$ סדרות. אם קיים $N_0\in\mathbb{N}^+$ כך שלכל $n\ge N_0$ מתקיים $c_n\le a_n\le b_n$ וגם $\lim\limits_{n\to\infty} c_n=\lim\limits_{n\to\infty} b_n=L$ אז מתקיים כי $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=L$.

כלומר, כאשר סדרה חסומה בין שתי סדרות שהגבול שלהן זהה, אז גם הגבול של הסדרה יהיה זהה לגבול שלהן.

במסקנה מכלל הסנדוויץ' נוכל לראות כי הגבול של סדרה חסומה כפול סדרה ששואפת ל-0 הוא 0.

חסומה כפול אפיסה (שיעור 9 / צגזור 08 – 18 עד 26) – תהיינה $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות. אם $\{a_n\}$ חסומה, $\{b_n\}$ שואפת ל-0. אז מתקיים:

$$\lim_{n\to\infty}(a_nb_n)=0$$

כלל הסנדוויץ' לגבולות אינסופיים (שיעור 9) - תהיינה $\{a_n\},\{b_n\}$ סדרות. נניח שקיים $N_0\in\mathbb{N}^+$ כך שלכל $n\ge N_0$ מתקיים $a_n\le b_n$.
אז:

a. אם $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=\infty$
b. אם $\lim\limits_{n\to\infty} b_n=-\infty$ אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n=-\infty$

נגדיר סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_n=\sqrt[n]{\frac{n^4+1}{3^n}}$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$. הראנה כי היא מתכנסת וחשבו את גבולה.

לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $n\ge 1$ ולכן $n^4\ge 1$ ולכן $2n^4=n^4+n^4\ge 1+n^4$ לכן $\frac{n^4+1}{3^n}\le 2\cdot\frac{n^4}{3^n}$.
בנוסף, $\frac{n^4}{3^n}\le\frac{n^4+1}{3^n}$ לכן

$$\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}{3}=\sqrt[n]{\frac{n^4}{3^n}}\le a_n\le\sqrt[n]{2\cdot\frac{n^4}{3^n}}=\sqrt[n]{2}\cdot\frac{\left(\sqrt[n]{n}\right)^4}{3}$$

לפי כלל הסנדביץ' ומכך ש-$\sqrt[n]{n}\to 1$ ו-$\sqrt[n]{2}\to 1$ נקבל $a_n\to\frac{1}{3}$.

משפט ויירשטראס (שיעור 9 / צגזור 13) - תהי $\{a_n\}$ סדרה. אם a_n **מונוטונית** אז היא **מתכנסת במובן הרחב**.

בחלק מההוכחה קיבלנו גם את המשפטים הבאים:

- תהי $\{a_n\}$ סדרה **מונוטונית וחסומה**, אז היא **מתכנסת**.
- תהי $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת ל-L. אם A חסם מלרע של $\{a_n\}$ אז $A\ge L$.
- תהי $\{a_n\}$ סדרה מתכנסת ל-L. אם A חסם מלעיל של $\{a_n\}$ אז $A\le L$.
- תהי $\{a_n\}$ סדרה עולה ולא חסומה, אז היא שואפת ל-∞.
- תהי $\{a_n\}$ סדרה יורדת ולא חסומה, אז היא שואפת ל-$-\infty$.

לא הוכחנו:

- **עולה וחסומה** מלמעלה – מתכנסת ל-sup.
- **יורדת וחסומה** מלמטה – מתכנסת ל-inf.

נגדיר סדרה $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ ע"י $a_1=\frac{3}{2}$ ו-$a_{n+1}=\frac{3}{4-a_n}$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$ טבעי. הוכיחו כי היא מתכנסת וחשבו את גבולה.

נוכיח באינדוקציה שהסדרה מוגדרת ש-$1 < a_n \leq \frac{3}{2}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.

בסיס $(n=1)$ - צריך להוכיח ש-a_1 מוגדר וש-$1 < a_1 = \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$ וזה נכון.

צעד - יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נניח ש-a_n מוגדר וש-$1 < a_n \leq \frac{3}{2}$.

אז $4 - a_n > 0$ ולכן a_{n+1} מוגדר. אז:

$1 < a_n \leq \frac{3}{2}$ לכן $-1 > -a_n \geq -\frac{3}{2}$ לכן $3 > 4 - a_n \geq \frac{5}{2}$ לכן $\frac{1}{3} < \frac{1}{4-a_n} \leq \frac{2}{5}$ ולכן $1 < a_{n+1} \leq \frac{6}{5} \leq \frac{3}{2}$.

נוכיח באינדוקציה שהסדרה יורדת:

בסיס $(n=1)$ - $a_2 = \frac{6}{5} > \frac{3}{2} = a_1$.

צעד - יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נניח $a_{n+1} > a_n$. אז:

$-a_n < -a_{n+1}$ לכן $4 - a_{n+1} < 4 - a_n$ לכן $\frac{1}{4-a_{n+1}} > \frac{1}{4-a_n}$ לכן $a_{n+2} > a_{n+1}$.

אז לפי המשפט שלנו הסדרה מתכנסת. נסמן $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = L$. אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_{n+1} = L$ (הוכיחו בבית).

לכן $L = \frac{3}{4-L}$ ולכן $L = 1$ או $L = 3$.

בנוסף, $1 < a_n \leq \frac{3}{2}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$ ולכן לפי המשפט שלנו $1 \leq L \leq \frac{3}{2}$. לכן $L = 1$.

הלמה של קנטור (שיעור 10 / צנזור 14 – התחלה עד 20):

תהי $\{[a_n, b_n]\}$ סדרה של קטעים סגורים שמקיימת:

1. $[a_{n+1}, b_{n+1}] \subseteq [a_n, b_n]$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} (b_n - a_n) = 0$

אז יש בדיוק נקודה אחת שמשותפת לכל הקטעים הללו – קיים $c \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים $\bigcap_{n=1}^{\infty} [a_n, b_n] = \{c\}$

כלומר, אם כל קטע מוכל בקודמו, והמרחק בין הקטעים שואף לאפס, אז יש בדיוק נקודה אחת שמשותפת לכל הקטעים האלו.

סדרת קושי - Cauchy (צנזור 17)

סדרת קושי – תהי $\{a_n\}$ סדרה. נגיד שהיא סדרת קושי, אם לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $m, n \in \geq N(\varepsilon)$ מתקיים $|a_m - a_n| < \varepsilon$.

- נשים לב כי $N(\varepsilon)$ אינו תלוי ב-m.
- זה שונה מהגדרת הגבול הרגילה, פה ממקום מסוים כל שני איברים קרובים מאוד אחד לשני (גם אם האינדקסים שלהם מאוד רחוקים זה מזה).

טענה (שיעור 11): תהי $\{a_n\}$ סדרת קושי, אז $\{a_n\}$ חסומה.

קריטריון קושי (שיעור 11): תהי $\{a_n\}$ סדרה. $\{a_n\}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ $\{a_n\}$ סדרת קושי.

תרגיל: תהא $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה הנתונה ע"י

$$a_n = \frac{1}{4} + \frac{2^2}{4^2} + \ldots + \frac{n^2}{4^n} = \sum_{j=1}^{n} \frac{j^2}{4^j}$$

לכל $n \in \mathbb{N}^+$. הוכיחו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ הינה סדרת קושי.

פתרון: לכל $n \geq 5$ טבעי מתקיים $n^4 < 4^n$ (הוכיחו זאת!)

יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן ב־$N = \max\left\{5, \left\lfloor \frac{1}{\varepsilon} \right\rfloor + 1\right\}$.

יהיו $n, m \geq N$.

אם $n = m$ אז $|a_n - a_m| = 0 < \varepsilon$.

לכן נניח כי $n \neq m$.

ללא הגבלת הכלליות נניח כי $n < m$, ובפרט $m \geq n+1$.

נשים לב כי מתקיים

$$|a_m - a_n| = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{j^2}{4^j} < \sum_{j=n+1}^{m} \frac{j^2}{j^4} = \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j^2} \leq \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j\,(j-1)}$$

לכל $j \geq 2$ מתקיים

$$\frac{1}{j(j-1)} = \frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}.$$

על כן

$$|a_m - a_n| < \sum_{j=n+1}^{m} \frac{1}{j\,(j-1)} = \sum_{j=n+1}^{m} \left(\frac{1}{j-1} - \frac{1}{j}\right) = \frac{1}{n} - \frac{1}{m} < \frac{1}{n} \leq \frac{1}{N} < \varepsilon.$$

מכאן $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא אכן סדרת קושי.

תתי סדרות וגבולות חלקיים

גבול חלקי

גבול חלקי (צנזור 14 – 33 עד הסוף) - תהי $\{a_n\}$ סדרה, ויהי $L \in \mathbb{R}$.

- נגיד ש-L הוא גבול חלקי של a_n כאשר ל-a_n יש **תת-סדרה** $\{a_{n_k}\}$ **שמתכנסת ל-L.**
- נגיד ש-$\pm\infty$ הוא גבול חלקי של a_n כאשר ל-a_n יש **תת-סדרה** $\{a_{n_k}\}$ **שמתכנסת במובן הרחב ל-$\pm\infty$.**

את קבוצת כל הגבולות החלקיים נסמן ב-$Pl(a_n)$.

משפט בולצאנו-ויירשטראס (שיעור 11 / צנזור 15 – 27 עד 45) - תהי $\{a_n\}$ סדרה. אם $\{a_n\}$ **חסומה** אז יש לה **תת-סדרה שמתכנסת.**

מסקנות (צנזור 16):

- לכל סדרה חסומה יש לפחות גבול חלקי אחד.
- לכל סדרה יש תת-סדרה מתכנסת במובן הרחב.

הגדרה שקולה (שיעור 12): L הוא גבול חלקי $\Leftrightarrow$ **לכל** $\varepsilon > 0$ **ולכל** $N \in \mathbb{N}^+$ **קיים** $n \geq N$ כך שמתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

עבור גבול אינסוף: $L = \infty$ הוא גבול חלקי $\Leftrightarrow$ לכל $M > 0$ ולכל $N \in \mathbb{N}$ קיים $n \geq N$ כך שמתקיים $a_n > M$.

מה הכוונה בכך ש-L הוא גבול חלקי? נשים לב שזה שונה מהגדרת הגבול הרגיל. אם היינו אומרים **שממקום מסוים, כל איברי הסדרה** מאוד קרובים ל-L אז הוא היה גבול. אנחנו **לא רוצים שממקום מסוים כולם יהיו קרובים**, אלא שלא משנה כמה רחוק נלך, **לכל מקום**, **יהיה איבר אחד לפחות** שיהיה מספיק **קרוב לגבול.**

אפיון גבולות חלקיים (**171 באו"פ** / צנזור 15 – 27 עד 27) – L הוא גבול חלקי של $\{a_n\}$ $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ יש אינסוף ערכי n עבורם מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

כלומר, אינסוף מאיברי הסדרה (כל איברי תת הסדרה) נמצאים בכל סביבה של L.

נבחין בין:

1. תנאי לגבול רגיל (כמעט תמיד) - לכל $\varepsilon > 0$ **כמעט לכל n** (החל ממקום מסוים, **לכל n פרט למספר סופי של ערכים – נגיד 1,2,3 כי זה מתקיים מהמקום 4**) מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.
2. תנאי לגבול חלקי (שכיח) - לכל $\varepsilon > 0$ **עבור אינסוף ערכי n (קבוצה אינסופית של ערכי n)** מתקיים $|a_n - L| < \varepsilon$.

טענה (שיעור 12): $\{a_n\}$ מתכנסת במובן הרחב ל-L $\Leftrightarrow$ $Pl(a_n) = \{L\}$.

כלומר, סדרת גבולות החלקיים מכילה בדיוק איבר אחד – יש **לסדרה מתכנסת בדיוק גבול חלקי אחד**. בפרט, לא קיימת סדרה עם גבול חלקי יחיד אשר אין לה גבול. אם הקבוצה $Pl(a_n)$ מכילה לפחות שני איברים (קיימות שתי **תתי-סדרות שמתכנסות לגבולות שונים**) **אז הסדרה לא מתכנסת במובן הרחב.**

למשל הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $a_n = (-1)^n$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$ אינה מתכנסת משום שיש לה שתי תת סדרות המתכנסות לגבולות שונים: האחת $a_{2k} \to 1$ והשנייה $a_{2k+1} \to -1$.

.

הערות כלליות:

- תת-סדרה של תת-סדרה היא תת-סדרה של הסדרה המקורית.

(ב) $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ המוגדרת על ידי $b_n = n^{(-1)^n n}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.

נוכיח כי

$$b_{2k} = (2k)^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty \qquad b_{2k-1} = (2k-1)^{-(2k-1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$$

הוכחה: לכל $k \in \mathbb{N}^+$, $(2k)^{2k} \geq k$ (הוכיחו !)
ולכן, מכלל סנדוויץ' נובע כי $(2k)^{2k} \xrightarrow[k\to\infty]{} +\infty$.
באופן דומה, ל $k \geq 2$ מתקיים

$$0 \leq (2k-1)^{-(2k-1)} = \frac{1}{(2k-1)^{2k-1}} \leq \frac{1}{2k-1} \to 0$$

מכלל סנדוויץ', נובע כי $(2k-1)^{-(2k-1)} \xrightarrow[k\to\infty]{} 0$ כנדרש. היות שסדרות האינדקסים המתאימות לתת סדרה $\{b_{2k}\}$ ו- $\{b_{2k-1}\}$ ממצות את הטבעיים, נובע מטענה שראינו בתרגול כי אלו הם הגבולות היחידים של הסדרה הנתונה. כלומר

$$PL(b_n) = \{0, \infty\}$$

גבול עליון וגבול תחתון (צנזור 16 – 29 עד הסוף)

תהי $\{a_n\}$ סדרה.

גבול עליון - אם ל-$Pl(a_n)$ ישר איבר מקסימלי אז נקרא לו הגבול העליון, ונסמנו ב-$limsup(a_n)$ או $\overline{\lim} a_n$.

סימון - אם $\infty \in Pl(a_n)$ אז $limsup(a_n) = \infty$.

גבול תחתון - אם ל-$Pl(a_n)$ ישר איבר מינימלי אז נקרא לו הגבול התחתון, ונסמנו ב-$liminf(a_n)$ או $\underline{\lim} a_n$.

סימון - אם $-\infty \in Pl(a_n)$ אז $limsup(a_n) = -\infty$.

משפט (שיעור 13 – לא הוכחנו): תהי $\{a_n\}$ סדרה. $\{a_n\}$ מתכנסת $\Leftrightarrow$ $limsup(a_n) = liminf(a_n)$.

טענה (שיעור 14): תהי $\{a_n\}$ סדרה. קיים לה $limsup(a_n)$.

תרגיל. מצאו את הגבול העליון והגבול התחתון של הסדרות הבאות:
א. הסדרה הנתונה ע"י $a_n = \frac{n-1}{n+1}\cos\left(\frac{2\pi n}{3}\right)$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.
פתרון: בתרגיל בית 2 הוכחנו כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $-\frac{1}{2} \leq a_n < 1$.
נוכיח כי $\overline{\lim} a_n = 1$.
נתבונן בסדרה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ הנתונה ע"י $n_k = 3k$ לכל $k \in \mathbb{N}^+$, זו סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. נשים לב כי לכל $k \in \mathbb{N}^+$ מתקיים

$$a_{n_k} = \frac{n_k - 1}{n_k + 1}\cos\left(\frac{2\pi n_k}{3}\right) = \frac{3k-1}{3k+1}\cos(2\pi k) = \frac{k\left(3-\frac{1}{k}\right)}{k\left(3+\frac{1}{k}\right)} = \frac{3-\frac{1}{k}}{3+\frac{1}{k}}.$$

כיוון ש-$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$, מאריתמטיקה נקבל כי

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty}\frac{3-\frac{1}{k}}{3+\frac{1}{k}} = \frac{3-0}{3+0} = 1.$$

כיוון ש-1 הוא חסם מלעיל של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נסיק כי $\overline{\lim} a_n = 1$.
נוכיח כי $\underline{\lim} a_n = -\frac{1}{2}$.
נתבונן בסדרה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ הנתונה ע"י $n_k = 3k+1$ לכל $k \in \mathbb{N}^+$, זו סדרה עולה ממש של מספרים טבעיים. נשים לב כי לכל $k \in \mathbb{N}^+$ מתקיים

$$a_{n_k} = \frac{n_k - 1}{n_k + 1}\cos\left(\frac{2\pi n_k}{3}\right) = \frac{3k+1-1}{3k+1+1}\cos\left(2\pi k + \frac{2\pi}{3}\right) = \frac{3k}{3k+2}\cos\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3k}{k\left(3+\frac{2}{k}\right)} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3+\frac{2}{k}}.$$

כיוון ש-$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k} = 0$, מאריתמטיקה נקבל כי

$$\lim_{k\to\infty} a_{n_k} = \lim_{k\to\infty} -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3+\frac{2}{k}} = -\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{3+0} = -\frac{1}{2}.$$

כיוון ש-$-\frac{1}{2}$ הוא חסם מלרע של הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נסיק כי $\underline{\lim} a_n = -\frac{1}{2}$.

(ב) הוכחנה כי

$$\overline{\lim}\left(a_n+b_n\right)\le\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n$$

פתרון: נסמן $\gamma=\overline{\lim}\left(a_n+b_n\right)$. אזי קיימת סדרה $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ עולה ממש של מספרים טבעיים המקיימת $\lim_{k\to\infty}\left(a_{n_k}+b_{n_k}\right)=\gamma$.

הסדרה $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ חסומה ועל כן קיימת לה תת־סדרה $\left\{a_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ מתכנסת. נסמן את גבולה ב־α.

כיוון ש־ $\left\{a_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ היא תת־סדרה של $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ נסיק כי $\alpha\in PL\left(a_n\right)$. מכאן

$$\alpha\le\overline{\lim}a_n. \qquad (1)$$

$\left\{a_{n_{k_j}}+b_{n_{k_j}}\right\}_{j=1}^{\infty}$ תת־סדרה של $\{a_{n_k}+b_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ ועל כן מתכנסת ולאותו הגבול γ.

בנוסף, נשים לב כי לכל $j\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $b_{n_{k_j}}=\left(a_{n_{k_j}}+b_{n_{k_j}}\right)-a_{n_{k_j}}$ ולכן מאריתמטיקה של גבולות נסיק כי $\lim\limits_{j\to\infty}b_{n_{k_j}}=\gamma-\alpha$. לכן בדומה לקודם $\gamma-\alpha\in PL\left(b_n\right)$ ומכאן

$$\gamma-\alpha\le\overline{\lim}b_n. \qquad (2)$$

מ־(1) ו־(2) נובע

$$\overline{\lim}\left(a_n+b_n\right)=\gamma=\alpha+(\gamma-\alpha)\le\overline{\lim}a_n+\overline{\lim}b_n,$$

כנדרש.

<u>מסקנה (שיעור 14)</u> - לכל $\varepsilon>0$ קיים $N\in\mathbb{N}^+$ כך שלכל $n>N$ מתקיים $a_n<limsup(a_n)+\varepsilon$.

הגענו למסקנה הזו כחלק מההוכחה בשיעור 14, מצורף כאן הסבר מפורט יותר על כל הטענות שניתן לומר על גבול עליון ותחתון, עדי השתמש בטענות על הגבול התחתון בפתרון של תרגיל ממטלה 7. ההסבר מבוסס על מה שמופיע ברשימות המרצה הישנות, מצרף גם את זה לאחר מכן. הטענות הללו מופיעות גם בתרגול 6 של חדו"א 1א מ-2021.

<u>טענות נוספות (נסמן כרגע $limsup(a_n)=L$):</u>

- <u>הוא גבול חלקי</u> – **לכל** $\varepsilon>0$ **ולכל** $N\in\mathbb{N}^+$ **קיים** $n\ge N$ כך שמתקיים $\boldsymbol{a_n>L-\varepsilon}$.
  - $a_n>L-\varepsilon$ שכיחה (מתקיימת למספר אינסופי של איברי הסדרה).
  - כיוון שהוא גבול חלקי מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$ ובפרט $a_n>L-\varepsilon$.
- <u>מסקנה נוספת</u> – **לכל** $\varepsilon>0$ **קיים** $N\in\mathbb{N}^+$ כך **שלכל** $n\ge N$ מתקיים $\boldsymbol{a_n<L+\varepsilon}$.
  - $a_n<L+\varepsilon$ כמעט תמיד (מתקיימת לכל איברי הסדרה פרט למספר סופי של איברים).
  - אין גבולות חלקיים יותר גדולים ממנו.

<u>טענות נוספות (נסמן כרגע $liminf(a_n)=L$):</u>

- <u>הוא גבול חלקי</u> – **לכל** $\varepsilon>0$ **ולכל** $N\in\mathbb{N}^+$ **קיים** $n\ge N$ כך שמתקיים $\boldsymbol{a_n<L+\varepsilon}$.
  - $a_n<L+\varepsilon$ שכיחה (מתקיימת למספר אינסופי של איברי הסדרה).
  - כיוון שהוא גבול חלקי מתקיים $|a_n-L|<\varepsilon$ ובפרט $a_n<L+\varepsilon$.
- <u>מסקנה נוספת</u> – **לכל** $\varepsilon>0$ **קיים** $N\in\mathbb{N}^+$ כך **שלכל** $n\ge N$ מתקיים $\boldsymbol{a_n>L-\varepsilon}$.
  - $a_n>L-\varepsilon$ כמעט תמיד (מתקיימת לכל איברי הסדרה פרט למספר סופי של איברים).
  - אם מניחים בשלילה שהטענה אינה מתקיימת כמעט תמיד, כלומר $a_n\le L-\varepsilon$ שכיחה (מתקיימת למספר אינסופי של איברים) נקבל שהסדרה חסומה מלמעלה, לפי BW יש לה תת סדרה שמתכנסת ונקבל גבול חלקי שקטן יותר מ-L בסתירה. כלומר – אין גבולות חלקיים קטנים יותר מ-L.

2.6.12 טענה שקולה להיותך $\liminf/\limsup$.

בטענה הבאה נשתמש במושגים מילוליים חדשים (שתתקלו בהם גם בקורסים אחרים, למשל הסתברות) המתארים תכונות של סדרות: "עובדה שכיחה" ("infinitely often") זו עובדה שמתקיימת למספר אינסופי של אברי הסדרה. ועובדה המתקיימת "כמעט תמיד" זו עובדה המתקיימת לכל אברי הסדרה פרט למספר סופי (או אפס) של אברים. שימו לב שכל עובדה המתקיימת כמעט תמיד היא שכיחה, אבל לא להפך. יתר על כן, אם עובדה מתקיימת כמעט תמיד אזי שלילתה לא יכולה להיות שכיחה. לדוגמא, עבור הסדרה

$$(1,2,3,1,2,1,2,1,2,1,2\ldots)$$

התכונה $a_n=1$ היא שכיחה ואילו התכונה $a_n=3$ איננה שכיחה שזה שקול לכך ש $a_n\neq 3$ מתקיימת כמעט תמיד (ובפרט היא שכיחה).

טענה 2.96 תהי $(a_n)_{n=1}^{\infty}$ סדרה חסומה. אזי $L=\liminf a_n$ אם רק אם מתקיים שלכל $\varepsilon>0$ מתקיים

1) $a_n<L+\varepsilon$ שכיחה,
2) $L-\varepsilon<a_n$ מתקיימת כמעט תמיד.

הוכחה: נתחיל עם הכיוון $\Leftarrow$. יהי $\varepsilon>0$. מכיוון ש $L=\liminf a_n$, אזי L הינו גבול חלקי של a_n ומטענה 2.80 נובע שיש מספר אינסופי של אברים בקטע $(L-\varepsilon,L+\varepsilon)$. מזה אנו מסיקים את מייד את (1). כעת, נניח בשלילה ש (2) אינו מתקיים. אזי התנאי $L-\varepsilon\geq a_n$ הינו שכיח (ז"א הוא מתקיים עבור מספר אינסופי של אברים). בפרט, קיימת תת־סדרה (a_{n_k}) של (a_n) עבורה מתקיים $L-\varepsilon\geq a_{n_k}$. אם כן, יש לנו תת־סדרה a_{n_k} החסומה מלעיל ע"י $L-\varepsilon$ ולכן ממשפט בולצאנו־ווירשטראס 2.72 נובע שיש לה תת־סדרה מתכנסת $a_{n_{k_l}}\to l$. מטענה 2.33 נובע כי $l\leq L-\varepsilon$ ולכן $l<L$. אבל זו סתירה לכך ש $L=\liminf a_n=\min\mathcal{P}$ ו־$l\in\mathcal{P}$.

נראה כעת את הכיוון השני של הטענה $\Rightarrow$. אם אנו מניחים את (1) ו (2) אזי מקבלים כי הטענה $L-\varepsilon<a_n<L+\varepsilon$ היא טענה שכיחה לכל $\varepsilon>0$. בפרט, ממסקנה 2.80 נובע ש L הינו גבול חלקי של הסדרה a_n. נניח בשלילה כי קיים גבול חלקי נוסף המקיים $L'<L$. נבחר $\varepsilon=\frac{L-L'}{2}$. אזי מצד אחד אנו מקבלים כי $a_n<L'+\varepsilon=\frac{L+L'}{2}$ טענה שכיחה (מהגדרת הגבול לתת סדרה), ומצד שני $a_n<L-\varepsilon=\frac{L+L'}{2}$ כמעט תמיד לפי (2). קיבלנו אם כן סתירה. ■

המספר e

הגדרת e באמצעות גבול

נגדיר $a_n=\left(1+\frac{1}{n}\right)^n$, $b_n=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}$.

טענות עזר (שיעור 12-13):

- טענה 1 – $\{a_n\}$ עולה ממש וגם חסומה ולכן מתכנסת.
- טענה 2 – $\{b_n\}$ עולה ממש וגם חסומה ולכן מתכנסת.
- טענה 3 – לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n\leq b_n$ ולכן $e\leq t$.
- טענה 4 – $e\geq t$.
- טענה 5 – e אינו מספר רציונלי - $e\notin\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$.

חישוב גבולות עם e

טענה (שיעור 13): – תהי $\{a_n\}$ שמקיימת:

- לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n>0$
- $\lim\limits_{n\to\infty}(a_n)=\infty$

אז מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e$

טענת עזר: אם $\{a_n\}$ היא סדרה חיובית המתכנסת אל $A>0$, ו-$\{b_n\}$ סדרה המתכנסת אל $B\in\mathbb{R}$ אזי: $\lim\limits_{n\to\infty}a_n^{b_n}=A^B$.

סד"פ לחישוב גבולות עם e (דוגמה ופירוט בתרגול 7):

נביא את הביטוי לצורה של $\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{b_n}$. אנו יודעים כי הגבול הפנימי יוצא e. נצטרך משפט שירשה לנו למצוא את הגבול של החזקה שנשארה – לפי טענת העזר נקבל כי הגבול הסופי יהיה e בחזקת הגבול של b_n.

תרגיל. חשבו את הגבול

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{5n+2}$$

פתרון. יהי $n\in\mathbb{N}^+$. נשים לב כי

$$\frac{n^2+n}{n^2+1}=1+\frac{n^2+n}{n^2+1}-1=1+\frac{n^2+n-\left(n^2+1\right)}{n^2+1}=1+\frac{n-1}{n^2+1}.$$

לכל $n\geq 2$ טבעי מתקיים

$$\frac{n^2+n}{n^2+1}=1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n-1}}$$

נגדיר סדרה הנתונה ע"י $a_n=\frac{n^2+1}{n-1}$ לכל $n\geq 2$ טבעי. נשים לב כי מתקיים

$$a_n=\frac{n^2+1}{n-1}=\frac{n\left(n+\frac{1}{n}\right)}{n\left(1-\frac{1}{n}\right)}=\frac{n+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}$$

כיוון ש־$\frac{1}{n}\to 0$ ו־$n\to+\infty$ נסיק מאריתמטיקה כי

$$\lim_{n\to\infty}a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{n+\frac{1}{n}}{1-\frac{1}{n}}=+\infty.$$

כעת, כיוון ש־$a_n>0$ לכל $n\geq 2$, נוכל לסמן $b_n=\frac{5n+2}{a_n}=\frac{5n+2}{\frac{n^2+1}{n-1}}$. נשים לב שמתקיים

$$b_n=\frac{5n+2}{\frac{n^2+1}{n-1}}=\frac{(5n+2)(n-1)}{n^2+1}=\frac{5n^2-3n-2}{n^2+1}=\frac{n^2\left(5-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}\right)}{n^2\left(1+\frac{1}{n^2}\right)}=\frac{5-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}.$$

כיוון ש־

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}=0$$

נסיק מאריתמטיקה של גבולות כי

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\lim_{n\to\infty}\frac{5-\frac{3}{n}-\frac{2}{n^2}}{1+\frac{1}{n^2}}=\frac{5-0-0}{1+0}=5.$$

נשים לב לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים

$$\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{5n+2}=\left(\left(1+\frac{1}{\frac{n^2+1}{n-1}}\right)^{\frac{n^2+1}{n-1}}\right)^{\frac{5n+2}{\frac{n^2+1}{n-1}}}=\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{b_n}.$$

כיוון ש־$a_n\to+\infty$ אנו יודעים לפי משפט מהכיתה כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}=e.$$

בנוסף, נוכיח בכיתה כי אם $\{\alpha_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה חיובית המתכנסת אל $A>0$ ו־$\{\beta_n\}_{n=1}^{\infty}$ המתכנסת אל $B\in\mathbb{R}$ אזי

$$\lim_{n\to\infty}\alpha_n^{\beta_n}=A^B.$$

לכן נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n^2+n}{n^2+1}\right)^{5n+2}=\lim_{n\to\infty}\left(\left(1+\frac{1}{a_n}\right)^{a_n}\right)^{b_n}=e^5.$$

גבולות שהוכחנו:

הגבול	מתי הוכחנו
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$	שיעור 7 (גבול רגיל - לפי הגדרה)
$\lim\limits_{n\to\infty}x^n=\infty,\qquad x>1$	שיעור 8 (גבול אינסוף - לפי הגדרה)
$\lim\limits_{n\to\infty}\lvert(-1)^n\rvert=1$	סדרה קבועה, נשים לב כי בלי ערך מוחלט הגבול אינו 1
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{(-1)^n}{n}=0$	שיעור 9 (חסומה כפול אפסה)
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1$	שיעור 10 (בעזרת כלל הסנדוויץ')
$\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{c}=1,\qquad c>0$	שיעור 10 (בעזרת כלל הסנדוויץ')
$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a^n}{n}=\infty,\qquad a>1$	שיעור 10 (בעזרת כלל המנה לסדרות)
$\lim\limits_{n\to\infty}n^2-n=\infty$	תרגול 5 (גבול אינסוף – לפי ההגדרה)
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=e$	שיעור 13 (הגדרת המספר e)
$\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^2}\right)^{n^2}=e$	שיעור 13 (תת-סדרה של סדרה ששואפת ל-e)

3 - טורים

טורים מספריים (צנזור אינפי 2 – סרטון 17)

סדרת סכומים חלקיים – תהי $\{a_n\}$ סדרה. נגדיר סדרה חדשה – לכל $n \in \mathbb{N}^+$: $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$. לסדרה $\{S_n\}$ נקרא סדרת הסכומים החלקיים של $\{a_n\}$.

טור מתכנס – נגיד שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס כאשר סדרת הסכומים החלקיים $\{S_n\}$ מתכנסת.

טור הנדסי:

- סדרת הסכומים החלקיים - $S_n = \sum_{k=1}^{n} q^x = \frac{q(q^n-1)}{q-1}$
- $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(q^n-1)}{q-1} = \begin{cases} \infty & q > 1 \\ \frac{q}{q-1} & -1 < q < 1 \\ \text{מתבדרת} & q \le -1 \end{cases}$

קריטריון קושי (שיעור 14): תהי $\{a_n\}$ סדרה. $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ לכל $\varepsilon > 0$ קיים $N(\varepsilon) \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $m, n \ge N(\varepsilon)$ מתקיים:

$$\left|\sum_{k=n+1}^{m} a_k\right| = |a_{n+1} + \cdots + a_m| < \varepsilon$$

תנאי הכרחי להתכנסות הטור (שיעור 14): אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס אז $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$.

קריטריוני התכנסות לטורים אי-שליליים (צנזור אינפי 2 – סרטון 18)

מבחן העיבוי: תהי $\{a_n\}$ סדרה חיובית ויורדת. הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ מתכנס.

תרגיל: הוכיחו כי הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ מתבדר.

פתרון: הסדרה $\left\{\frac{1}{n \log n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה יורדת של מספרים חיוביים, לכן נוכל להיעזר במבחן העיבוי.
נראה כי הטור $\sum\limits_{n=1}^{\infty} 2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \log 2^n}$ מתבדר.
נשים לב כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים

$$2^n \cdot \frac{1}{2^n \cdot \log 2^n} = \frac{1}{n \cdot \log 2}.$$

כיוון שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ מתבדר, נסיק מאריתמטיקה כי הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n \cdot \log 2}$ מתבדר גם הוא. לבסוף, לפי משפט העיבוי נסיק כי הטור $\sum\limits_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ מתבדר. $\square$

טור הרמוני מוכלל (מבחן p): הטור $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $p > 1$.

מבחן השוואה: נניח שקיים $N_0 \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $n \ge N_0$ מתקיים $0 \le a_n \le b_n$. אז:

- אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר, אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר.

מבחן השוואה גבולי: נניח שקיים $N_0 \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $n \ge N_0$ מתקיים $a_n \ge 0, b_n > 0$. נניח $L = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$ גבול במובן הרחב. אז:

- אם $0 < L < \infty$: $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס $\Leftrightarrow$ $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס.
- אם $L = 0$ $(b_n \gg a_n)$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתכנס אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.
- אם $L = \infty$ $(a_n \gg b_n)$: $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ מתבדר אז $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.

תרגיל: בידקו עבור אילו ערכים של α הטור הבא מתכנס/מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)^{\alpha}$$

פתרון: לכל $n\in\mathbb{N}^{+}$ נסמן $a_n=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)^{\alpha}$. תחילה נשים לב כי

$$\begin{aligned}a_n&=\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n-1}\right)^{\alpha}\cdot\frac{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^{\alpha}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^{\alpha}}\\&=\frac{(n+1-(n-1))^{\alpha}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^{\alpha}}\\&=\frac{2^{\alpha}}{\left(\sqrt{n+1}+\sqrt{n-1}\right)^{\alpha}}\\&=\frac{2^{\alpha}}{n^{\alpha/2}\cdot\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}}\end{aligned}$$

מכאן

$$\frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha/2}}}=\frac{2^{\alpha}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}}.$$

כיוון ש־$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$ נסיק לפי תרגיל מתרגול 5 כי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\alpha}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}}=\frac{2^{\alpha}}{\left(\sqrt{1+0}+\sqrt{1-0}\right)^{\alpha}}=\frac{2^{\alpha}}{2^{\alpha}}=1.$$

על כן קיבלנו כי

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{\frac{1}{n^{\alpha/2}}}=\lim_{n\to\infty}\frac{2^{\alpha}}{\left(\sqrt{1+\frac{1}{n}}+\sqrt{1-\frac{1}{n}}\right)^{\alpha}}=1.$$

נעיר כי ניתן להשתמש באריתמטיקה כי α קבוע ולא תלוי ב־n.

כעת, ע"פ מבחן ההשוואה הגבולי הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס אם ורק אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{\alpha/2}}$ מתכנס, כלומר אם ורק אם $\alpha>2$.

<u>מבחן קושי (השורש):</u> תהי $\{a_n\}$ סדרה אי-שליליות. $C=limsup(\sqrt[n]{a_n})$. אז:

- אם $c<1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתכנס.
- אם $c>1$ (כולל ∞) אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ מתבדר.

תרגיל: בדקו האם הטור הבא מתכנס או מתבדר:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n(n+1)}$$

פתרון: נעזר בחישוב הבא:

תרגיל לבית: לוודא כי $\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}=e$.

כעת, נשים לב כי מתקיים

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n}{n+1}\right)^{n+1}=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+1}}=\frac{1}{e}<1$$

לפי **מבחן השורש** לכן הטור מתכנס.

מבחן דאלמבר (המנה): נניח שקיים $N_0 \in \mathbb{N}^+$ כך שלכל $n \geq N_0$ מתקיים $a_n > 0$. נסמן $s = limsup(\frac{a_{n+1}}{a_n})$, $i = liminf(\frac{a_{n+1}}{a_n})$:

- אם $i > 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתבדר.
- אם $s < 1$ אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס.

(ד) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}$ כאשר $k, m \in \mathbb{N}$

פתרון: נסמן $a_n = \frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$ ונשים לב כי $a_n > 0$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$ (ודאו זאת!). אז מתקיים

$$\begin{aligned}
\frac{a_{n+1}}{a_n} &= \frac{\frac{\sqrt[m]{(n+1)!}}{\sqrt[k]{(2(n+1))!}}}{\frac{\sqrt[m]{n!}}{\sqrt[k]{(2n)!}}} = \frac{\sqrt[m]{(n+1)!}}{\sqrt[m]{n!}} \cdot \frac{\sqrt[k]{(2n)!}}{\sqrt[k]{(2(n+1))!}} \\
&= \frac{\sqrt[m]{n+1}}{\sqrt[k]{(2n+1)(2n+2)}} = \frac{(n+1)^{1/m}}{(4n^2+6n+2)^{1/k}} = \frac{n^{1/m}\left(1+1\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/m}}{n^{2/k}\left(4+6\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{1/k}} \\
&= n^{\frac{1}{m}-\frac{2}{k}} \cdot \frac{\left(1+1\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/m}}{\left(4+6\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{1/k}}
\end{aligned}$$

כיוון ש־$\frac{1}{n}, \frac{1}{n^2} \to 0$ נסיק מאריתמטיקה ומהטענה מהסעיף הקודם כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left(1+1\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/m}}{\left(4+6\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{1/k}} = \frac{1}{4^{1/k}}$$

כעת נחלק למקרים:

i. אם $\frac{1}{m}-\frac{2}{k} < 0$ אז $n^{\frac{1}{m}-\frac{2}{k}} \to 0$ ולכן מאריתמטיקה נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{m}-\frac{2}{k}} \cdot \frac{\left(1+1\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/m}}{\left(4+6\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{1/k}} = 0 \cdot \frac{1}{4^{1/k}} = 0 < 1.$$

מכאן לפי מבחן המנה הטור יתכנס.

ii. אם $\frac{1}{m}-\frac{2}{k} > 0$ אז $n^{\frac{1}{m}-\frac{2}{k}} \to +\infty$ ולכן מאריתמטיקה נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{m}-\frac{2}{k}} \cdot \frac{\left(1+1\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/m}}{\left(4+6\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{1/k}} = +\infty.$$

מכאן לפי מבחן המנה הטור יתבדר.

iii. אם $\frac{1}{m}-\frac{2}{k} = 0$ אז $n^{\frac{1}{m}-\frac{2}{k}} = n^0 = 1 \to 1$ ולכן מאריתמטיקה נסיק כי

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty} n^{\frac{1}{m}-\frac{2}{k}} \cdot \frac{\left(1+1\cdot\frac{1}{n}\right)^{1/m}}{\left(4+6\cdot\frac{1}{n}+2\cdot\frac{1}{n^2}\right)^{1/k}} = 1 \cdot \frac{1}{4^{1/k}} = \frac{1}{4^{1/k}} < 1.$$

מכאן לפי מבחן המנה הטור יתכנס.

קריטריוני התכנסות כלליים

טור מתכנס בהחלט – תהי $\{a_n\}$ סדרה. נגיד שהטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ **מתכנס בהחלט** כאשר הטור $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ מתכנס.

טענה (שיעור 15): אם הטור $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ מתכנס בהחלט אז הוא מתכנס.

מבחן לייבניץ (שיעור 15): תהי $\{a_n\}$ סדרה שיורדת וגבולה 0. אז הטור $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

בדקו האם הטור מתכנס בהחלט, מתכנס בתנאי או מתבדר,

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^\alpha \cdot \log n}$$

עבור $x \in \mathbb{R}$. (שימו לב הטור תלוי בפרמטר α, התשובה יכולה להיות תלויה בערכו של הפרמטר):

הפתרון: דבר ראשון נשים לב שאם $\alpha < 0$ אז $\left|\frac{(-1)^n}{n^\alpha \log n}\right| \xrightarrow{n\to\infty} +\infty$.

לכן כמובן שהטור מתבדר, כי האיבר הכללי שלו לא שואף ל־0.

נניח ש־$\alpha \geq 0$, ונסמן $a_n = \frac{1}{n^\alpha \log n}$.

לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים ש־

$$(n+1)^\alpha \log(n+1) \geq n^\alpha \log n$$

וזה שקול ל־

$$a_n = \frac{1}{n^\alpha \log n} \geq \frac{1}{(n+1)^\alpha \log(n+1)} = a_{n+1}$$

אז הסדרה a_n יורדת וגם היא שואפת ל־0, ולכן ממשפט לייבניץ הטור $\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n a_n$ מתכנס.

נשאר לבדוק רק התכנסות בהחלט, כלומר את התכנסות הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$.

לכל $n \geq 3$ מתקיים $\log n \geq 1$, ולכן $\frac{1}{n^\alpha} \leq \frac{1}{n^\alpha \log n}$.

מכיוון שהטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$ מתכנס אם $\alpha > 1$ נקבל שגם הטור שלנו מתכנס אם $\alpha > 1$.

במקרה $0 \leq \alpha < 1$ מתקיים $\frac{1}{n \log n} \geq \frac{1}{n^\alpha \log n}$, ומכיוון שכבר ראינו שהטור

$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \log n}$ מתבדר גם הטור $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha \log n}$ מתבדר.

לסיכום: אם $\alpha < 0$ אז הטור מתבדר, אם $0 \leq \alpha < 1$ אז הטור מתכנס בתנאי, אם $\alpha > 1$ אז הטור מתכנס בהחלט.

תרגיל: קבעו האם הטורים הבאים מתכנסים בתנאי, מתכנסים בהחלט או מתבדרים:

1. $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$

- **התכנסות בהחלט** - הטור <u>אינו</u> מתכנס בהחלט. אכן, לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים

$$\left|\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}\right|=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$$

הוכחנו שהטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}$ לא מתכנס (טור הרמוני מוכלל עם $\alpha=0.5$)

- **התכנסות** - לכל $n\in\mathbb{N}^+$ נסמן $a_n=\frac{1}{\sqrt{n+2}}$. הסדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ היא סדרה מונוטונית יורדת המתכנסת ל־0 ולכן לפי **משפט לייבניץ** הטור $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt{n+2}}$ מתכנס.

על כן קיבלנו כי ההתכנסות היא בתנאי.

4 - פונקציות

מבוא

פונקציה

פונקציה – תהיינה A,B קבוצות. נגיד ש-$f \subseteq A \times B$ היא פונקציה מ-A ל-B. אם לכל $a \in A$ קיים $b \in B$ כך ש:

1. **קיום** – $(a,b) \in f$
2. **יחידות** – אם קיים $b' \in B$ כך ש-$(a,b') \in f$ אז $b' = b$.

הגדרות נוספות – תהיינה A,B קבוצות, תהי f פונקציה מ-A ל-B.

- **תחום** – A נקראת התחום של f ונסמן אותה ב-$domf$.
- **טווח** – B נקראת טווח של f.
- אם מתקיים $f(a) = b$ אז b נקרא **התמונה** של a, ו-a נקרא **מקור** של b.

סימון – נסמן $\boldsymbol{f}: \boldsymbol{A} \to \boldsymbol{B}$ או B^A.

איך ניתן להציג פונקציה?

אם נסמן את אוסף הזוגות הסדורים (x,y) במערכת צירים אז נקבל את גרף הפונקציה. ניתן להציג בעוד צורות רבות כמו: טבלה, דיאגרמה, נוסחה, שמות שמורים כמו - $sin, cos, \sqrt{}$.

דרך נוספת היא הטלאה (הגדרה לפי תחומים שונים) – $f(x) = \begin{cases} x^2, & 0 \le x \le 1 \\ -3, & x > 1 \end{cases}$

תכונות והגדרות

פונקציה $f: A \to B$ נקראת:

- חח"ע (injective) – לכל $x,y \in A$. אם $f(x) = f(y)$ אז $x = y$.
  - לחילופין: לכל $x,y \in A$. אם $x \neq y$ אז $f(x) \neq f(y)$.
- על (surjective) – אם לכל $b \in B$ קיים $a \in A$ כך ש-$f(a) = b$.
- מחזורית – אם קיים $a > 0$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים $f(x+a) = f(x)$.
  - אם קיים לפונקציה מחזור **מינימלי** T אז נאמר כי היא פונקציה מחזורית **בעלת מחזור $\boldsymbol{T}$**. אז נאמר כי לכל $0 < b < T$ קיים $x \in A$ עבורו $f(x+b) \neq f(x)$.
- זוגית - $f(-x) = f(x)$.
- אי זוגית - $f(-x) = -f(x)$.

הרכבת פונקציות - יהיו $f: A \to B$ ו-$g: B \to C$ אז ההרכבה $g \circ f$ מוגדרת על ידי $g \circ f: A \to C$ ולכל $x \in A$ מתקיים:

$$g \circ f(x) = g(f(x))$$

פונקציה הפיכה – פונקציה $f: A \to B$ נקראת הפיכה אם קיימת $g: B \to A$ כך שלכל $x \in A$ מתקיים: $(g \circ f)(a) = a$

וגם לכל $b \in B$ מתקיים: $(f \circ g)(b) = b$. כלומר, ההרכבות נותנות את יחס הזהות משני הצדדים.

משפט (יוכח בקורס בדידה) – f הפיכה אמ"מ היא חח"ע ועל. בנוסף אם היא הפיכה קיימת לה פונקציה הופכית אחת ויחידה.

הגדרות נוספות:

תהא $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$:

תמונה – תהא $B \subseteq A$. התמונה של B ביחס ל-f היא הקבוצה $f[B] = \{f(x) | x \in B\}$. התמונה של התחום כולו תקרא גם התמונה של f.

המקור – תהא $C \subseteq \mathbb{R}$. המקור של C ביחס ל-f היא הקבוצה $f^{-1}[C] = \{x \in A | f(x) \in C\}$.

פונקציה חסומה – נאמר כי f חסומה כאשר התמונה שלה חסומה.

צמצום – תהא $B \subseteq A$. נגדיר פונקציה חדשה $g: B \to \mathbb{R}$, כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) = g(x)$. g נקראת צמצום של f לתחום B. נסמן: $g = f|_B$.

פונקציות אלמנטריות

1. הפונקציה המעריכית – יהי $a > 0$, הפונקציה המעריכית בבסיס a הינה $f: \mathbb{R} \to (0, \infty)$ המוגדרת כך:
$$f(x) = a^x$$
אם בנוסף מתקיים $a \neq 1$ אז ניתן להגדיר לה פונקציה הפוכה $\log_a(a^x) = x$
2. פונקציית החזקה – עבור $a > 0$ הינה $f: [0, \infty) \to [0, \infty)$ המוגדרת כך:
$$f(x) = x^a$$
3. פונקציות טריגונומטריות – $\sin, \cos, \tan$...

פונקציות מיוחדות

1. פונקציית הערך השלם – פונקציה המחזירה לכל מספר ממשי את המספר השלם הגדול ביותר שקטן או שווה לו. (יענו הפונקציה מעגלת כלפי מטה). נשים לב כי מתקיים:
$$\lfloor x \rfloor \leq x < \lfloor x \rfloor + 1$$
2. פונקציית החלק השברי – החלק השברי הוא המרחק בין מספר למספר השלם הקרוב ביותר שקטן או שווה לו. מקובל לסמן ב-$\{x\}$. נשים לב כי מתקיים לכל מספר שהוא הסכום של החלק השלם שלו והחלק השברי שלו:
$$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$$
3. פונקציית רימן:

פונקציית רימן: $f: \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{q} & \exists p \in Z, \exists q \in \mathbb{N}^+ \text{ such that } (p, q) = 1 \text{ and } x = \frac{p}{q} \\ 1 & x = 0 \\ 0 & x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$, כאשר $(\cdot, \cdot)$ הוא המחלק המשותף הכי גדול של שני מספרים שלמים.

4. פונקציית דיריכלה – פונקציה מחזורית ללא מחזור מינימלי.

פונקציית דיריכלה: $f: \mathbb{R} \to [0, 1]$

$$D(x) = \begin{cases} 1, & x \in \mathbb{Q}, \\ 0, & x \notin \mathbb{Q}, \end{cases}$$

לכל $x \in \mathbb{R}$. פונקציות דיריכלה ורימן הן פונקציות מחזוריות (אם יש זמן להוכיח שפונקציות רימן היא מחזורית).

גבולות של פונקציות

הגדרת הגבול (צנזור 28)

תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. יהי $L \in \mathbb{R}$.

הגדרה (לפי קושי) – L הוא גבול של $f(x)$ בנקודה x_0 אם **לכל** $\varepsilon > 0$ **קיים** $\delta > 0$ כך **שלכל** $x \in A$:
אם $0 < |x - x_0| < \delta$ **אז** $|f(x) - L| < \varepsilon$.

- δ – בשליטתנו, לרוב נבטא אותו באמצעות ε, והוא לא תלוי ב-x!
- באי השוויון מתקיים $x \neq x_0$, כי אנחנו לא מסתכלים על הנקודה עצמה x_0! **f לא בהכרח מוגדרת ב-x_0 עצמה.**
- תזכורת: נקודת הצטברות של A – כל סביבה של הנקודה שניקח, יהיו בה נקודות חוץ ממנה שהן שייכות ל-A. במילים אחרות, נוכל להתקרב כמה שנרצה לנקודה באמצעות נקודות מ-A.

דיריכלה (שיעור 16) – הגענו למסקנה שלפונקצית דיריכלה אין גבול באף נקודה.

יחידות הגבול – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. יהי $L \in \mathbb{R}$ גבול של $f(x)$ בנקודה x_0.
אז, לכל $P \in \mathbb{R}$, אם P הוא גבול של $f(x)$ בנקודה x_0 אז מתקיים $P = L$.

תרגיל: הראו כי $\lim_{x\to 5} \sqrt{x^2-9} = 4$ לפי הגדרת הגבול של קושי.

טיוטה: יהי $\epsilon > 0$, נשתמש במעבר שלמדנו, כאשר נכפיל בצמוד $\sqrt{x^2-9}+4$ ואז נפשט,

$$\left|\sqrt{x^2-9}-4\right| = \left|\frac{x^2-25}{\sqrt{x^2-9}+4}\right| = \left|\frac{(x+5)(x-5)}{\sqrt{x^2-9}+4}\right| = |x-5| \cdot \frac{|x+5|}{\sqrt{x^2-9}+4}$$

אם נבחר δ כשלהו שמקיים $\delta < 1$ אז יתקיים $|x-5| < \delta < 1$ אז נקבל כי $-1 < x-5 < 1$ ומכאן $4 < x < 5$, על כן מתקיים

$$x + 5 < 11$$

וגם

$$\sqrt{7} < \sqrt{x^2-9}$$

אזי

$$\left|\sqrt{x^2-9}-4\right| = |x-5| \cdot \frac{|x+5|}{\sqrt{x^2-9}+4} < |x-5| \cdot \frac{11}{\sqrt{7}+4} < \frac{11}{\sqrt{7}+4} \cdot \delta$$

ולכן אם גם מתקיים $\delta < \frac{4+\sqrt{7}}{11} \cdot \varepsilon$ אז נקבל ש-

$$|\sqrt{x^2-9}-4| < \frac{11}{\sqrt{7}+4} \cdot \delta < \varepsilon$$

פתרון: יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן ב- $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4+\sqrt{7}}{11} \cdot \varepsilon\right\}$.

יהי $x \in \mathbb{R}$. נניח כי $0 < |x-5| < \delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{4+\sqrt{7}}{22} \cdot \varepsilon\right\} < 1$, אזי מתקיים

$$x+5 < 11, \qquad \sqrt{7} < \sqrt{x^2-9}.$$

מכאן

$$\begin{aligned}\left|\sqrt{x^2-9}-4\right| &= \left|\frac{x^2-25}{\sqrt{x^2-9}+4}\right| \\ &= \left|\frac{(x+5)(x-5)}{\sqrt{x^2-9}+4}\right| \\ &= |x-5| \cdot \frac{|x+5|}{\sqrt{x^2-9}+4} \\ &< |x-5| \cdot \frac{11}{\sqrt{7}+4} \\ &< \frac{11}{\sqrt{7}+4} \cdot \delta \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon\end{aligned}$$

גבולות עם אינסוף:

תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. הגבול של $f(x)$ בנקודה x_0 הוא:

- אינסוף – אם לכל $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $f(x) > M$.
  נסמן $\lim_{x \to x_0} f(x) = \infty$.
- מינוס אינסוף – אם לכל $M > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $f(x) < -M$.
  נסמן $\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$.

הגבול כאשר x שואף לאינסוף - תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. יהי $L \in \mathbb{R}$ ונניח ש-A לא חסומה מלעיל. נגיד ש-L הוא גבול של $f(x)$ ב-∞, כאשר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $M > 0$ כך שלכל $x \in A$, אם $x > M$ אז $|f(x) - L| < \varepsilon$.

דומה מאוד להגדרת גבול של סדרה - כלומר, החל ממקום מסוים (כמו בסדרות), כל ערכי הפונקציה קרובים מאוד (עד כדי ε ל-L).

תרגיל: הוכיחו כי:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{x^2+1}{\ln x + \sin x} = \infty$$

טיוטה: יהי $0 < M \in \mathbb{R}$, צריך למצוא $N > 0$ כך שאם $x > N$ אז מתקיים $f(x) > M$.
מאי שוויון ברנולי (שראינו קודם) שלכל $x > 0$ ולכל $n \geq 1$ מתקיים ש- $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \geq 1+x$.

לכל $x>0$ הסדרה $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n$ עולה ממש ומתכנסת ל-e^x לכן נסיק כי מתקיים $\left(1+\frac{x}{n}\right)^n \le e^x$ לכל $x>0$. על כן נסיק כי

$$x<1+x\le e^x,$$

לכל $x>0$. על כן נסיק כי מתקיים $\ln x \le x$ לכל $x>0$.

בנוסף אנחנו יודעים ש- $\sin x \le 1$ לכל $x\in\mathbb{R}$. לכן מאי שליליות נסיק כי

$$\frac{x^2+1}{\ln x+\sin x} \ge \frac{x^2+1}{x+1}$$

מכאן, לכל $x>1$ מתקיים

$$\frac{x^2+1}{x+1} \ge \frac{x^2}{x+x} = \frac{x}{2}$$

כעת, אם גם מתקיים $x>2M$ אז נקבל כי

$$\frac{x^2+1}{\ln x+\sin x} > \frac{x}{2} > M$$

פתרון: יהי $0<M\in\mathbb{R}$, נתבונן ב- $N=\max\{2,4M\}$.
תרגיל לבית: הוכיחו כי מתקיים $\ln x \le x$ לכל $x>0$.

יהי x נניח ש- $x>N>0$.
אנו יודעים כי $\sin x \le 1$ ולכן מאי שליליות נסיק

$$\frac{x^2+1}{\ln x+\sin x} \ge \frac{x^2+1}{x+1} \ge \frac{x^2}{x+x} = \frac{x}{2} > \frac{N}{2} = \frac{\{2,4M\}}{2} \ge 2M > M$$

□

קריטריון היינה - יהי $f: A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. יהי $L\in\mathbb{R}$.

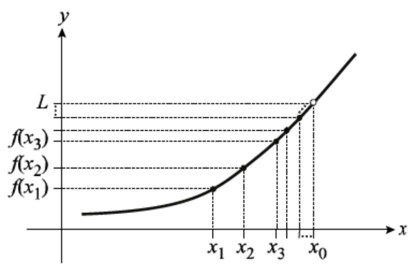
L הוא גבול של $f(x)$ בנקודה x_0 $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{a_n\}$ שמקיימת:

1. לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n\in A$
2. לכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n\ne x_0$
3. $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = x_0$

מתקיים: $\lim\limits_{n\to\infty} f(a_n)=L$.

נשים לב כי $f(a_n)$ זו סדרה המורכבת בצורה הבאה: $f(a_1),f(a_2),\dots,f(a_n)$.

מבחינה אינטואיטיבית, הגדרה זו נותנת ביטוי פשוט לכך שכאשר ערכי x שואפים ל- x_0, ערכי y המתאימים להם שואפים ל- L. התנאי $x_n\ne x_0$ משקף את העובדה שגבול הפונקציה בנקודה x_0 אינו תלוי בערך הפונקציה בנקודה זו.



תרגיל: הוכיחו לפי הגדרות הגבול השונות כי מתקיים $\lim_{x\to -3}\frac{2x-5}{x+4}=-11$.

טיוטה: נחפשר מגבלות על $\delta>0$ כך שנוכל לחסום בצורה נוחה את הביטוי

$$\left|\frac{2x-5}{x+4}-(-11)\right|$$

כאשר $|x-(-3)|<\delta$.
לצורך כך, נפשט את הביטוי ונגדיל אותו ו"נחפש" מתי מופיע הביטוי $x-(-3)=x+3$. נשים לב כי,

$$\left|\frac{2x-5}{x+4}-(-11)\right|=\left|\frac{13x+39}{x+4}\right|=13\left|\frac{x+3}{x+4}\right|$$

כיוון שאנו מניחים כי $-\delta<x+3<\delta$, ע"י הוספת 1 לאי־שוויון השמאלי נסיק כי

$$1-\delta<x+4$$

ונניח כי $1-\delta>0$. על כן נקבל כי

$$\left|\frac{2x-5}{x+4}-(-11)\right|=13\left|\frac{x+3}{x+4}\right|<13\cdot\frac{\delta}{1-\delta}$$

אם נדרוש כי $\delta<\frac{1}{2}$ נקבל כי

$$\left|\frac{2x-5}{x+4}-(-11)\right|\le 13\cdot\frac{\delta}{1-\delta}<13\cdot\frac{\delta}{1-\frac{1}{2}}=26\delta$$

כעת נוכל לדרוש כי $\delta<\frac{\varepsilon}{26}$ וכך נסיק כי

$$\left|\frac{2x-5}{x+4}-(-11)\right|<26\delta<26\cdot\frac{\varepsilon}{26}=\varepsilon.$$

לכן אם נדרוש כי $\delta<\min\left\{\frac{1}{2},\frac{\varepsilon}{26}\right\}$ נקבל כי

$$\left|\frac{2x-5}{x+4}-(-11)\right|<\varepsilon.$$

כרצוי.

פתרון: לפי קושי: יהי $\varepsilon>0$. נתבונן ב־ $\delta=\min\left\{\frac{1}{4},\frac{\varepsilon}{52}\right\}$.

יהי $x\in\mathbb{R}$. נניח $0<|x-(-3)|<\delta$, מתקיים ש־

$$x+4>1-\delta>1-\frac{1}{4}>\frac{1}{2}$$

ומכאן נסיק כי

$$\left|\frac{2x-5}{x+4}-(-11)\right|=\left|\frac{13x+39}{x+4}\right|<\frac{13|x+3|}{\frac{1}{2}}<26\delta\le\frac{\varepsilon}{2}<\varepsilon$$

לפי היינה: תהי $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרה כלשהי כך שמתקיים $x_n\neq -3$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$ וגם ש־ $x_n\to -3$.

אז לפי חשבון גבולות של סדרות $\frac{2x_n-5}{x_n+4}\to -11$ (הוכיחו בבית!).

אריתמטיקה של גבולות (צנזור 30)

חשבון גבולות – תהיינה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי x_0 נקודת הצטברות של A, ויהיו $L_1,L_2\in\mathbb{R}$.
נניח $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=L_2$. אז:

1. $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)=L_1+L_2$
2. $\lim\limits_{x\to x_0}(\lambda f)=\lambda L_1$
3. $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)=L_1L_2$
4. אם $L_2\neq 0$ אז קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $g(x)\neq 0$. אז לביטוי הבא יש משמעות ומתקיים:
$\lim\limits_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\frac{L_1}{L_2}$

חשבון גבולות אינסופיים – תהיינה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. אז:

1. כפל וסכום - אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$ אז $\lim\limits_{x\to x_0}(fg)(x)=\infty$, $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\infty$
2. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ וגם $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=a$ אז:
   a. $\lim\limits_{x\to x_0}(f+g)(x)=\infty$
   b. אם קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $g(x)\neq 0$, אז:
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\end{cases}$$
   c. $$\lim_{x\to x_0} f(x)g(x)=\begin{cases}\infty, & a>0\\ -\infty, & a<0\end{cases}$$
3. אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=L>0$ וגם $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ אז:
   a. אם קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז:
   $$\lim_{x\to x_0}\frac{f(x)}{g(x)}=\begin{cases}\infty, & g(x)>0\\ -\infty, & g(x)<0\end{cases}$$
   b. אחרת, אין גבול של מנה כזה בנקודה x_0.

משפטים על גבולות (צנזור 28)

כלל הסנדוויץ' – תהיינה $f,g,h\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0\in A$ נקודת הצטברות של A.
נניח שקיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $h(x)\le f(x)\le g(x)$.
אם $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=\lim\limits_{x\to x_0} g(x)$ (סופי) אז $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$.

מסקנה (חסומה כפול אפיסה) - תהיינה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי x_0 נקודת הצטברות של A.
אם קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)|\le M$ וגם $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=0$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)g(x)=0$.

כלל הסנדוויץ' לגבולות אינסופיים – תהיינה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי x_0 נקודת הצטברות של A.
נניח שקיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $f(x)\le g(x)$. אז:

- אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=\infty$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=\infty$
- אם $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)=-\infty$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} g(x)=-\infty$

טענות נוספות:

1. תהיינה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0\in A$ נקודת הצטברות של A. נניח שקיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $\boldsymbol{f(x)\le g(x)}$. נניח של-$f,g$ יש גבולות סופיים ב-x_0. אז: $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)\le\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$.
2. תהיינה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. נניח של-f,g יש גבולות סופיים ב-x_0 כך שמתקיים $\boldsymbol{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)<\lim\limits_{x\to x_0} g(x)}$. אז קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $\boldsymbol{f(x)<g(x)}$.

גבולות והרכבה:

גבולות והרכבה – תהיינה $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: Imf \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A.
נניח $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = y_0$ כאשר $y_0 \in \mathbb{R}$. נניח $\lim\limits_{y\to y_0} g(y) = L$ כאשר $L \in \mathbb{R}$.
נניח שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז מתקיים $f(x) \neq y_0$ אז $\lim\limits_{x\to x_0} (g\circ f)(x) = L$.

הערות:

- הרבה פעמים נראה שזה מתקיים לכל $\delta > 0$ בעצם וזה פותר לנו את העניין (למשל תרגול 9 תרגיל 5 – תרגיל לבית).
- עוד דוגמאות לתרגילים ניתן למצוא בתרגול 8.

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$.

פתרון: לכל $x > 0$ נסיק מחוקי לוגריתמים כי

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{1}{x}\cdot \ln(1+x) = \ln\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

נגדיר את הפונקציות $f(x) = (1+x)^{\frac{1}{x}}$ לכל $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ וגם $g(y) = \ln y$ לכל $y > 0$.

לפי משפט היינה ובעזרת גבולות ידועים עבור סדרות נקבל כי

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} (1+x)^{\frac{1}{x}} = e$$

וגם מתקיים כי $\lim\limits_{y\to e} g = \lim\limits_{y\to e} \ln(y) = 1$ (נראה זאת בהמשך).

תרגיל לבית: הראו כי

1) לכל $x \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ מתקיים $1 + x < e^x$.
2) קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in \mathbb{R}$ שמקיים $0 < |x-0| < \delta$ מתקיים $f(x) \neq e$.

כעת, לפי משפט גבולות והרכבה נקבל ש-

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$$

$\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(\cos x)}{x^2}$.

פתרון: לכל $x \in \mathbb{R}\setminus\{2\pi k \,:\, k\in\mathbb{Z}\}$ מתקיים

$$\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \frac{\ln(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{x^2}$$

נגדיר את הפונקציות $f(x) = \cos x - 1$ לכל $x \in \mathbb{R}$ וגם $g(y) = \frac{\ln(y+1)}{y}$ לכל $y \in (-1,\infty)\setminus\{0\}$.
נשים לב כי

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0} \cos x - 1 = 0$$

וגם מתקיים כי $\lim\limits_{y\to 0} g(y) = \lim\limits_{y\to 0} \frac{\ln(1+y)}{y} = 1$ (מהסעיף קודם).
כמו כן לכל $x \in \mathbb{R}$ עבור $0 < |x-0| < \frac{\pi}{4}$ מתקיים $f(x) = \cos(x) - 1 \neq 0$.
לכן לפי משפט גבולות והרכבה נקבל כי

$$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+\cos(x)-1)}{\cos(x)-1} = 1$$

נעזר בזהות הטריגונומטרית $\cos(x) - 1 = -2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)$ וכיוון שמתקיים

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = 1$$

(ודאו זאת!) אז לפי ארתמטיקה של גבולות נקבל כי

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos(x)-1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{-2\sin^2\left(\frac{x}{2}\right)}{x^2} = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)^2 = -\frac{1}{2}\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right)\lim_{x\to 0}\left(\frac{\sin\left(\frac{x}{2}\right)}{\frac{x}{2}}\right) = -\frac{1}{2}$$

לכן שוב לפי הארתמטיקה של גבולות נקבל שהגבול המקורי הוא

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(\cos x)}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x - 1)}{\cos x - 1}\cdot\frac{\cos x - 1}{x^2} = \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\cos x-1)}{\cos x - 1}\lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2} = -\frac{1}{2}$$

$$\lim_{x\to 0}\left(|\sin x|\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}$$

פתרון: לכל $x\neq 0$ מתקיים

$$\left(|\sin x|\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}=e^{\ln\left[\left(|\sin x|\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}\right]}=e^{\frac{\ln(|\sin x|)}{\ln|x|}}$$

נגדיר את הפונקציות $f(x)=\frac{\ln(|\sin x|)}{\ln|x|}$ לכל $x\neq 0$ וגם $g(y)=e^y$ לכל $y\in\mathbb{R}$.

נקבל ש־

$$\lim_{x\to 0}f(x)=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\left|\frac{\sin x}{x}\right|\cdot|x|\right)}{\ln|x|}=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right)+\ln\left(|x|\right)}{\ln|x|}=$$

לפי ארתמטיקה של גבולות וגם ראינו ש־ $\frac{\sin x}{x}\xrightarrow[x\to 0]{}1$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{\ln\left(\left|\frac{\sin x}{x}\right|\right)}{\ln|x|}+1=0+1=1$$

וגם מתקיים ש־ $\lim_{y\to 1}g(y)=\lim_{y\to 1}e^y=e$ (מהסעיף הקודם).

כמוכן, קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ שמקיים $0<|x-0|<\delta$ אז $f(x)=\frac{\ln(|\sin x|)}{\ln|x|}\neq 1$ (בהמשך נוכיח כי $\sin x<x$ לכל $x>0$).

לכן לפי משפט גבולות והרכבה נקבל ש־לפי כלל ההצבה

$$\lim_{x\to 0}\left(|\sin x|\right)^{\frac{1}{\ln|x|}}=e^1=e$$

טענה: תהיינה $f,g\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0\in\mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נסמן $\lim_{x\to x_0}f(x)=L$, $\lim_{x\to x_0}g(x)=P$. אז:

1. אם $L>0$ אז קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $f(x)>0$ אז $\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=L^P$.
2. אם $L=0$ אז קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $f(x)\geq 0$, $P>0$ אז $\lim_{x\to x_0}f(x)^{g(x)}=0$.

גבולות חד-צדדיים (צנזור 32)

צמצום של הגבול - תהי $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. תהי $B\subseteq A$. תהי x_0 נקודת הצטברות של B. אם קיים הגבול $f|_B$ ב-x_0 והוא L, אז נקרא ל-L הגבול של f ביחס ל-B ב-x_0. נסמן $\lim_{x\to x_0,\ x\in B}f(x)$.

סימונים:

- $A_{x_0^+}=A\cap(x_0,\infty)=\{x\in A\colon x>x_0\}$
- $A_{x_0^-}=A\cap(-\infty,x_0)=\{x\in A\colon x<x_0\}$

תהי $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. יהי $L\in\mathbb{R}$.

גבול חד צדדי מימין - אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A_{x_0^+}$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-L|<\varepsilon$, אז L נקרא גבול מימין של f ב-x_0. נסמן $\lim_{x\to x_0^+}f(x)=L$.

- הגדרה שקולה – התנאי הוא $0<x-x_0<\delta$.

גבול חד צדדי משמאל - אם לכל $\varepsilon>0$ קיים $\delta>0$ כך שלכל $x\in A_{x_0^-}$ אם $0<|x-x_0|<\delta$ אז $|f(x)-L|<\varepsilon$, אז L נקרא גבול משמאל של f ב-x_0. נסמן $\lim_{x\to x_0^-}f(x)=L$.

- הגדרה שקולה – התנאי הוא $0<x_0-x<\delta$.

טענה - תהי $f\colon A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. יהי $L\in\mathbb{R}$.
ל-$f(x)$ יש גבול ב-x_0 והוא L $\Leftrightarrow$ **הגבולות של $f(x)$ ב-x_0 מימין ומשמאל קיימים ושווים זה לזה.**

רציפות

רציפות (צנזור 34)

הגדרה (רגילה) – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה ותהי $x_0 \in A$. נגיד ש-$f(x)$ רציפה ב-x_0 כאשר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $|x - x_0| < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

הגדרה (גבול) – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A.
$f(x)$ רציפה ב-x_0 $\Leftrightarrow$ קיים וסופי הגבול $\lim_{x \to x_0} f(x)$ ומתקיים $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$.

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to 0} -\frac{1}{x^2} = -\infty$ וגם $\lim_{x \to -\infty} e^x = 0$ לכן לפי תרגיל 2 מהתרגול

$$\lim_{x \to 0} f(x) = 0 = f(0)$$

לכן f רציפה ב-$x = 0$.

הגדרה (היינה) – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי x_0 נקודת הצטברות של A. $f(x)$ רציפה ב-x_0 $\Leftrightarrow$ לכל סדרה $\{a_n\}$ שמקיימת:

1. $a_n \in A$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$
2. $\lim_{n \to \infty} a_n = x_0$

מתקיים $\lim_{n \to \infty} f(a_n) = f(x_0)$.

טענה: תהיינה $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0 \in A$ ונניח שהפונקציות רציפות ב-x_0, ומתקיים $f(x_0) > g(x_0)$.
אז קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $|x - x_0| < \delta$ אז $f(x) > g(x)$.

חשבון פונקציות רציפות: תהיינה $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0 \in A$ ונניח שהפונקציות רציפות ב-x_0. אז גם הפונקציות הבאות רציפות ב-x_0:

1. $f + g$
2. λf לכל $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $f \cdot g$
4. אם $g(x_0) \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$.

רציפות פונקציות אלמנטריות: כל הפונקציות **האלמנטריות רציפות** לכל x_0 **בתחום הגדרתן**:

1. פולינומים
2. ערך מוחלט
3. פונקציה מעריכית
4. פונקציה לוגריתמית
5. פונקציה טריגונומטרית
6. פונקציה רציונאלית

רציפות והרכבה: תהיינה $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: Imf \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות. נניח f רציפה ב-x_0 ונניח ש-g רציפה ב-$f(x_0)$. אז מתקיים כי $g \circ f$ רציפה ב-x_0.

מסקנה – אם $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של A אז $(g \circ f)(x_0) = \lim_{x \to x_0} (g \circ f)(x) = g(\lim_{x \to x_0} f(x))$.

תרגיל 3.

הוכיחו שהגבולות הבאים קיימים וחשבו אותם:

1. $\lim\limits_{x\to -1}\frac{sin\left(x^3+1\right)}{x^3+1}$
2. $\lim\limits_{x\to \infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{e^x}$
3. $\lim\limits_{x\to 0^+}\sqrt[x]{x}$

פתרון.

1. נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x\right)=\begin{cases}\frac{sin(x)}{x} & x\neq 0\\ 1 & x=0\end{cases}$ לכל $x\in\mathbb{R}$. אז f רציפה ב-0 (הוכיחו).
נגדיר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $g\left(x\right)=x^3+1$ לכל $x\in\mathbb{R}$. אז g רציפה ב--1.
לכן מהרכבת רציפות

$$\lim_{x\to -1}\frac{sin\left(x^3+1\right)}{x^3+1}=\lim_{x\to -1}f\circ g\left(x\right)=f\circ g\left(-1\right)=1$$

2. נגדיר $f:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x\right)=\left(1+\frac{1}{x}\right)^x$ לכל $x>0$. אז $\lim\limits_{x\to\infty}f\left(x\right)=e$.
נגדיר $g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $g\left(x\right)=e^x$ לכל $x\in\mathbb{R}$. אז $\lim\limits_{x\to\infty}g\left(x\right)=\infty$.
לכן לפי תרגיל 2 נקבל

$$\lim_{x\to\infty}\left(1+\frac{1}{e^x}\right)^{e^x}=\lim_{x\to\infty}f\circ g\left(x\right)=e$$

3. נגדיר $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x\right)=e^x$ לכל $x\in\mathbb{R}$. אז $\lim\limits_{x\to -\infty}f\left(x\right)=0$.
נגדיר $g:\left(0,\infty\right)\to\mathbb{R}$ ע"י $g\left(x\right)=\frac{ln(x)}{x}$ לכל $x>0$. אז $\lim\limits_{x\to 0^+}g\left(x\right)=-\infty$ (אם לא הוכחתם אז עשו זאת).
לכן מוריאציה של תרגיל 2 נקבל

$$\lim_{x\to 0^+}e^{\frac{ln(x)}{x}}=\lim_{x\to 0^+}f\circ g\left(x\right)=0$$

מיון נקודות אי-רציפות

תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת אי-רציפות של f. נניח ש-x_0 נקודת הצטברות של A.

1. סליקה – אם קיים וסופי הגבול $\lim_{x \to x_0} f(x) \neq f(x_0)$.
כלומר, יש גבול בנקודה הזו והוא פשוט שונה מערך הפונקציה בנקודה, אפשר "לתקן" ולהפוך את הפונקציה לרציפה, להשלים את הנקודה הזאת.
2. סוג ראשון – אם שני הגבולות החד-צדדיים (מימין ומשמאל) קיימים וסופיים, אבל שונים זה מזה.
3. סוג שני – אם לפחות אחד מהגבולות החד-צדדיים לא קיים או אינסופי.

$$f(x) = \begin{cases} x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) & x \neq 0 \\ 1 & x = 0 \end{cases}$$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

$\lim_{x \to 0} x = 0$ ו-sin חסומה ב-$\mathbb{R}$ לכן

$$\lim_{x \to 0} f(x) = \lim_{x \to 0} x \cdot sin\left(\frac{1}{x}\right) = 0$$

לכן ל-f גבול סופי ב-0 השונה מ-$f(0)$ ולכן יש ל-f אי-רציפות סליקה ב-$x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} \frac{sin(x)}{x} & x > 0 \\ 2e^x & x \leq 0 \end{cases}$$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

$$\lim_{x \to 0^+} f(x) = \lim_{x \to 0^+} \frac{sin(x)}{x} = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} f(x) = \lim_{x \to 0^-} 2e^x = 2$$

הגבולות החד צדדיים ב-0 קיימים, סופיים ואינם שווים ולכן ל-f אי-רציפות מסוג ראשון ב-$x = 0$.

$$f(x) = \begin{cases} sin(ln(x)) & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

נתבונן בסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ המוגדרות ע"י $a_n = e^{\frac{\pi}{2} - 2n\pi}$ ו-$b_n = e^{-n\pi}$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.
יהי $n \in \mathbb{N}^+$. אז

$$f(a_n) = sin\left(ln\left(e^{\frac{\pi}{2} - 2n\pi}\right)\right) = sin\left(\frac{\pi}{2} - 2n\pi\right) = 1$$

$$f(b_n) = sin\left(ln\left(e^{-n\pi}\right)\right) = sin(-n\pi) = 0$$

לכן $f(a_n) \to 1, \quad f(b_n) \to 0$.
הסדרות $(a_n)_{n=1}^{\infty}, (b_n)_{n=1}^{\infty}$ חיובית, ו-$a_n \to 0, \ b_n \to 0$ (הוכיחו) לכן $\lim_{x \to 0^+} f(x)$ לא קיים לפי קריטריון היינה.
לכן ל-f אי-רציפות מסוג שני ב-0.

תכונות נוספות

תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in A$.

- f רציפה משמאל ב-x_0 – לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $0 \le x_0 - x < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.
- f רציפה מימין ב-x_0 – לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $0 \le x - x_0 < \delta$ אז $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$.

רציפות בקטע סגור – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה כאשר $a, b \in \mathbb{R}$ ומתקיים $a < b$. נגיד ש-f רציפה ב-$[a,b]$ כאשר:

1. f רציפה בכל $x_0 \in (a,b)$
2. f רציפה מימין ב-a
3. f רציפה משמאל ב-b

ערך הביניים (צגזור 35): יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימים $a < b$. תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח שמתקיים $f(a)f(b) < 0$. אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש-$f(c) = 0$.

מסקנה – לכל $d \in \mathbb{R}$ שבין $f(a)$ ל-$f(b)$ קיים $c \in (a,b)$ כך ש-$f(c) = d$.

תהי f רציפה ב-$\mathbb{R}$ המקיימת $f(0) = 7,\ f(1) = 2$. הוכחנה כי קיים פתרון למשוואה $f(x) = 4x - sin(x)$ ב-$\mathbb{R}$.

נגדיר $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = f(x) - 4x + sin(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.
מתקיים $g(0) = f(0) = 7$ ו-$g(1) = f(1) - 4 + sin(1) < 0$.
g רציפה ב-$[0,1]$ (הוכחנה) לכן לפי ערך הביניים קיים $c \in [0,1]$ כך ש-$f(c) = 0$, כלומר קיים פתרון כנדרש.

הוכיחו שהפונקציה $f: (0,\infty) \to \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י $f(x) = e^x ln(x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$ היא על.

פתרון.

יהי $t \in \mathbb{R}$. מתקיים

$$\lim_{x\to\infty} e^x = \infty \qquad \lim_{x\to\infty} ln(x) = \infty$$

לכן מאריתמטיקה

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = \lim_{x\to\infty} e^x ln(x) = \infty$$

מהגדרת הגבול קיים $x_1 > 0$ כך ש-$f(x_1) > t$.

מתקיים

$$\lim_{x\to0^+} e^x = 1 \qquad \lim_{x\to0^+} ln(x) = -\infty$$

לכן מאריתמטיקה

$$\lim_{x\to0^+} e^x ln(x) = -\infty$$

לכן קיים $\delta > 0$ כך שלכל $0 < x < \delta$ מתקיים $f(x) < t$.
נסמן $x_2 = \frac{\min\{x_1,\delta\}}{2}$. אז $0 < x_2 < x_1$ וגם $0 < x_2 < \delta$ ולכן $f(x_2) < t$.
f רציפה ב-$[x_2, x_1]$ (הוכיחו) לכן לפי משפט ערך הביניים קיים $c \in [x_2, x_1] \subseteq (0,\infty)$ כך ש-$f(c) = t$. לכן f על $\mathbb{R}$.

ויירשטראס 1 (צנזור 36): יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימים $a<b$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה. **אם היא רציפה אז היא חסומה.**

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.

הוכיחו כי אם f רציפה ב-$\mathbb{R}$ ו-$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$, $\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ קיימים וסופיים אז f חסומה ב-$\mathbb{R}$.

פתרון.

נסמן $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=L_2,\ \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=L_1$.

$\lim\limits_{x\to\infty} f(x)$ לכן קיים $N_1>0$ כך שלכל $x>N_1$ מתקיים $L_1-1<f(x)<L_1+1$.

$\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)$ לכן קיים $N_2>0$ כך שלכל $x<-N_2$ מתקיים $L_2+1<f(x)<L_2+1$.

f רציפה ב-$[-N_2,N_1]$ לכן לפי ויירשטראס f חסומה שם.

לכן קיים M כך שלכל $x\in[-N_2,N_1]$ מתקיים $|f(x)|\le M$.

נתבונן ב-

$$M_1=\max\{M,L_1+1,L_2+1\}\qquad M_2=\min\{-M,L_1-1,L_2-1\}$$

יהי $x\in\mathbb{R}$. אז $f(x)\le M_1$ וגם $M_2\le f(x)$ (הוכיחו בבית). לכן f חסומה ב-$\mathbb{R}$.

ויירשטראס 2: יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ המקיימים $a<b$. תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה. נניח ש-f רציפה ב-$[a,b]$.
אז קיימים $x_1,x_2\in[a,b]$ כך שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $f(x_2)\le f(x)\le f(x_1)$.

כלומר, מובטח לנו כי לפונקציה יש מינימום ומקסימום בקטע.

תרגיל 7.

תהי $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ רציפה ב-$\mathbb{R}$ ויהי $T>0$. הוכיחו:

1. לכל $x\in\mathbb{R}$ קיימים $y\in[0,T]$ ו-$n\in\mathbb{Z}$ כך ש-$x=y+nT$
2. אם f מחזורית ב-$\mathbb{R}$ אז f מקבלת מקסימום ומינימום ב-$\mathbb{R}$

פתרון.

1. יהי $x\in\mathbb{R}$. נתבונן ב-$n=\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor$ וב-$y=x-T\cdot\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor$.
אז $n\in\mathbb{Z}$, $x=y+nT$.
מכך ש-$\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor\le\frac{x}{T}$ נובע $-T\cdot\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor\ge -T\cdot\frac{x}{T}=-x$. לכן $x-T\cdot\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor\ge 0$.
מכך ש-$\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor>\frac{x}{T}-1$ נובע $-T\cdot\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor<-T\cdot\frac{x}{T}+T=-x+T$. לכן $x-T\cdot\left\lfloor\frac{x}{T}\right\rfloor<T$.
לכן $y\in[0,T]$, וכמו שאמרנו $x=y+nT$.

2. f מחזורית לכן קיים $T>0$ כך שלכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $f(x)=f(x+T)$.
אז f רציפה ב-$[0,T]$ ולפי ויירשטראס מקבלת שם מינימום ומקסימום.
לכן קיימים $x_1,x_2\in[0,T]$ כך שלכל $x\in[0,T]$ מתקיים $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.
יהי $x\in\mathbb{R}$. אז מסעיף קודם קיימים $y\in[0,T]$ ו-$n\in\mathbb{Z}$ כך ש-$x=y+nT$.
הוכחתם בתרגיל בית 3 ש-$f(y)=f(y+nT)=f(x)$. לכן $f(x_1)\le f(x)\le f(x_2)$.
לכן f מקבלת מינימום ומקסימום ב-$\mathbb{R}$.

רציפות במידה שווה (רציפות במ"ש) (צנזור 37)

רציפות במ"ש – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. נגיד ש-f **רציפה במ"ש ב-A** כאשר לכל $\varepsilon > 0$ קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x, y \in A$ שמקיימים $|x - y| < \delta$ מתקיים $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$.

האם $\ln(x)$ רציפה במידה שווה ב-$[1, \infty)$?

כן. נוכיח זאת: יהי $\varepsilon > 0$. נתבונן ב- $\delta = \varepsilon$, יהיו $x, y \in [1, \infty)$ ונניח כי $|x - y| < \delta$. נניח בלי הגבלת הכלליות כי $x \geq y$

ונקבל:

$$|\ln x - \ln y| = \left|\ln \frac{x}{y}\right| = \left|\ln \frac{y + x - y}{y}\right| = |\ln\left(1 + \frac{x - y}{y}\right)|$$

מתכונת המונוטוניות של הפונקציה ln נובע כי $\ln\left(1 + \frac{x - y}{y}\right) > 0$, לכן

$$|\ln\left(1 + \frac{x - y}{y}\right)| = \ln\left(1 + \frac{x - y}{y}\right)$$

בנוסף, הוכחנו בתרגול 8 כי $\ln(1 + x) \leq x$ לכל $x \geq 0$ לכן, כיוון ש-$x - y \geq 0$ מתקיים כי :

$$\ln\left(1 + \frac{x - y}{y}\right) \leq \frac{x - y}{y}$$

מכיוון ש- $y \in [1, \infty)$ נובע כי :

$$\frac{x - y}{y} \leq x - y < \varepsilon$$

לכן ln רציפה במידה שווה ב-$[1, \infty)$.

טענה: תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. **אם היא רציפה במ"ש אז היא רציפה.**

חשבון רציפות במ"ש: תהיינה $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות רציפות במ"ש ב-A. אז גם הפונקציות הבאות רציפות במ"ש ב-A:

1. $f + g$
2. λf לכל $\lambda \in \mathbb{R}$
3. $f \cdot g$ (אם f, g חסומות ב-A).

b. $f(x) = x + \frac{x}{x+1}$ לכל $x \in (0, \infty)$.

פתרון

הפונקציות x ו- $\frac{x}{x+1}$ רציפות במידה שווה ב- $(0, +\infty)$ לכן כסכום של שתי פונקציות רציפות במידה שווה, הפונקציה f רציפה במידה שווה ב- $(0, +\infty)$.

הרכבה ורציפות במ"ש: תהיינה $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $g: Imf \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות. f רציפה במ"ש ב-A, g רציפה במ"ש ב-Imf. מתקיים כי $g \circ f$ רציפה במ"ש ב-A.

משפט קנטור: יהיו $a, b \in \mathbb{R}$ המקיימים $a < b$. תהי $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ פונקציה. אם f **רציפה** ב-$[a, b]$ אז היא **רציפה במ"ש** ב-$[a, b]$.

טענה מהתרגול: תהי f מוגדרת בקטע I ותהיינה סדרות $\{x_n\}, \{y_n\}$ כך שמתקיים $x_n, y_n \in I$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$. אם $|x_n - y_n| \to 0$ וגם $|f(x_n) - f(y_n)| \nrightarrow 0$ אז f לא רציפה במ"ש בקטע I.

d. $f(x)=\cos\left(x^2\right)$ לכל $x\in[0,\infty)$.

פתרון

הפונקציה לא רציפה במידה שווה. נגדיר $x_n=\sqrt{2\pi n}, y_n=\sqrt{2\pi n+\pi}$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$. אז מתקיים כי :

$$\lim_{n\to\infty}|x_n-y_n|=\lim_{n\to\infty}\left|\sqrt{2\pi n}-\sqrt{2\pi n+\pi}\right|=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\pi}{\sqrt{2\pi n}+\sqrt{2\pi n+\pi}}\right|=0$$

כמו כן לכל $n\in\mathbb{N}^+$, $f(x_n)-f(y_n)=1$. על כן

$$\lim_{n\to\infty}|f(x_n)-f(y_n)|=1$$

טענות נוספות מהתרגול:

1. יהיו $a,b\in\mathbb{R}$ ונניח $a<b$. תהי $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה.
f רציפה במ"ש ב-(a,b) $\Leftrightarrow$ הגבול של f מימין ב-a ומשמאל ב-b קיימים וסופיים.
a. $f(x)=\arctan x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

פתרון

arctan פונקציה רציפה ב-$\mathbb{R}$. בנוסף :

$$\lim_{x\to+\infty} arctanx=\frac{\pi}{2}$$

$$\lim_{x\to-\infty} arctanx=-\frac{\pi}{2}$$

כלומר, על פי המשפט מתרגיל 2 : f רציפה ב-$[0,+\infty)$ וב- $(-\infty,0]$ והגבולות קיימים וסופיים בקצוות לכן הפונקציה רציפה במידה שווה ב-$\mathbb{R}$.

2. יהי $a\in\mathbb{R}$, תהי $f:[a,+\infty)\to\mathbb{R}$ פונקציה רציפה. אם קיים וסופי הגבול $\lim_{x\to+\infty}f(x)=L$ אז f רציפה במ"ש ב-$[a,+\infty)$.
לא עובד בכיוון ההפוך – למשל הפונקציה $f(x)=x$ רציפה במ"ש אבל הגבול שלה באינסוף לא סופי.
3. יהיו $a,b,c\in\mathbb{R}$ ונניח כי $a<b<c$. תהי f רציפה במידה שווה בקטעים $(a,b],[b,c)$. אזי f רציפה במידה שווה ב-(a,c).
בדומה, הטענה נכונה כאשר $a=-\infty$ ו/או $c=\infty$.

5 - נגזרות

הנגזרת

נגזרת (צבזור 38)

הגדרה (רגילה) – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A.
אם קיים וסופי הגבול $\lim\limits_{x \to x_0} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ אז הוא נקרא הנגזרת של $f(x)$ בנקודה x_0. נסמן את הגבול ע"י $f'(x_0)$ או $\frac{df}{dx}(x_0)$ נגיד ש-f גזירה ב-x_0.

טענה: תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A.
f גזירה ב-x_0 $\Leftrightarrow$ קיים וסופי הגבול הבא: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)}{h}$.

טענה: תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A.
f גזירה ב-x_0 $\Leftrightarrow$ קיים $\alpha \in \mathbb{R}$ כך שמתקיים: $\lim\limits_{h \to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0)-\alpha h}{h} = 0$ ואז $\alpha = f'(x_0)$.

נגזרת מימין ומשמאל:

- נגזרת מימין בנקודה x_0: $f'(x_0^+) = \lim\limits_{x \to x_0^+} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$
- נגזרת משמאל בנקודה x_0: $f'(x_0^-) = \lim\limits_{x \to x_0^-} \frac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$

משיק - תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח ש-f גזירה ב-x_0.
נגדיר פונקציה חדשה $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = f(x_0) + f'(x_0) \cdot (x - x_0)$ לכל $x \in \mathbb{R}$. פונקציה g כזאת נקראת **משיק ל-$f(x)$ בנקודה x_0**.

טענה: תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in \mathbb{R}$ נקודת הצטברות של A. נניח ש-f גזירה ב-x_0.
יהי $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ משיק ל-$f(x)$ בנקודה x_0, אז מתקיים $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) - g(x) = 0$.

כללי גזירה (צבזור 39, צבזור 40, צבזור 41)

גזירה אז רציפה: תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של A.
נניח ש-f **גזירה** ב-x_0 אז f **רציפה** ב-x_0.

חשבון פונקציות גזירות: תהיינה $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות גזירות ב-x_0, כאשר x_0 נקודת הצטברות של A. אז הפונקציות הבאות גזירות ב-x_0 והנגזרות שלהן הן:

1. $(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0)$
2. $(\lambda f)'(x_0) = \lambda \cdot f'(x_0)$
3. $(f \cdot g)'(x_0) = f'(x_0) \cdot g(x_0) + f(x_0) \cdot g'(x_0)$
4. אם $g'(x_0) \neq 0$ אז גם $\frac{f}{g}$ גזירה ומתקיים $\left(\frac{f}{g}\right)'(x_0) = \frac{f'(x_0)g(x_0)-f(x_0)g'(x_0)}{g^2(x_0)}$

כלל השרשרת: תהיינה $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של A.
נניח f גזירה ב-x_0 ו-g גזירה ב-$f(x_0)$. אז: $(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0)$.

נגזרת פונקציה הפוכה: תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של A. נניח שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $|x - x_0| < \delta$ אז $f(x)$ מונוטונית ממש. נניח ש-f גזירה ב-x_0 וגם ש-$f'(x_0) \neq 0$.
אז קיימת f^{-1} בסביבת $f(x_0)$ ומתקיים:

$$(f^{-1})'(f(x_0)) = \frac{1}{f'(x_0)}$$

גזירה חזקה: תהיינה $f, g: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציות. תהי $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של A. נניח ש-f, g גזירות ב-x_0 ושקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $|x - x_0| < \delta$ אז $f(x) > 0$ אז מתקיים:

$$(f^g)'(x_0) = \left(e^{\ln f^g}\right)'(x_0) = \left(e^{g \ln f}\right)'(x_0) = f(x_0)^{g(x_0)} \cdot \left(g'(x_0)\ln(f(x_0)) + \frac{g(x_0)}{f(x_0)} \cdot f'(x_0)\right)$$

נגזרות של פונקציות אלמנטריות:

1. לכל $n \in \mathbb{N}^+$, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^n$ מתקיים $f'(x) = nx^{n-1}$
2. לכל $\alpha \in \mathbb{R}$, $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^\alpha$ מתקיים $f'(x) = \alpha x^{\alpha-1}$
3. לכל $a > 0, a \neq 1$, $f:\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = a^x$ מתקיים $f'(x) = a^x lna$
4. לכל $a > 0, a \neq 1$, $f:(0,\infty) \to \mathbb{R}$, $f(x) = \log_a x$ מתקיים $f'(x) = \frac{1}{xlna}$
5. $(\text{sinx})' = \text{cosx}$, $(cosx)' = -sinx$

תרגיל. חשבו את הנגזרת של הפונקציה $f:(0,\pi) \to \mathbb{R}$ המוגדרת על ידי $f(x) = (\sin x)^{\cos x}$ לכל $x \in (0,\pi)$.

פתרון. לכל $a > 0$, $a^b = e^{(b\ln a)}$, לכן $\sin x^{\cos x} = e^{\cos x \ln(\sin x)}$ לכל $x \in (0,\pi)$.

$$(\cos x \ln(\sin x))' = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot (\ln(\sin x))'$$

לכן על פי כלל השרשרת, נקבל כי :

$$(\ln(\sin x))' = \frac{\cos x}{\sin x}$$

נקבל

$$(\cos x \ln(\sin x))' = -\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}$$

לכן על פי כלל השרשרת, נקבל כי :

$$(\sin x^{\cos x})' = e^{\cos x \ln(\sin x)}(-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}) = (-\sin x \ln(\sin x) + \cos x \cdot \frac{\cos x}{\sin x}) \sin x^{\cos x}$$

10. תרגיל. תהא $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. נתון כי היא פונקציה גזירה ב $x=1$ ו $f(1)>0$. חשבו את הגבולות הבאים:

a. $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{n}}$

נגדיר את הסדרה $\{a_n\}$ על ידי $a_n=\frac{1}{n}$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$.

נגדיר את הסדרה $\{b_n\}$ על ידי $b_n=\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}{f(1)}$ לכל $n\in\mathbb{N}^+$.

מכיוון ש- $\lim\limits_{n\to\infty}b_n=1$, $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=0$, על פי המשפט,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{f\left(1+\frac{1}{n}\right)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{n}}=1^0=1$$

b. $\lim\limits_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{\ln x}}$

פתרון

$$\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(1+\frac{f(x)-f(1)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\left(1+\frac{f(x)-f(1)}{f(1)}\right)^{\frac{f(1)}{f(x)-f(1)}\cdot\frac{f(x)-f(1)}{f(1)}\cdot\frac{1}{\ln x}}$$

בנוסף

$$\lim_{x\to1}\frac{x-1}{\ln x}=1$$

לכן

$$\lim_{x\to1}\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)^{\frac{1}{\ln x}}=\lim_{x\to1}e^{\ln\left(\frac{f(x)}{f(1)}\right)\frac{1}{f(1)}\frac{f(x)-f(1)}{x-1}\cdot\frac{x-1}{\ln x}}=e^{\frac{f'(1)}{f(1)}}$$

תכונות של פונקציות גזירות

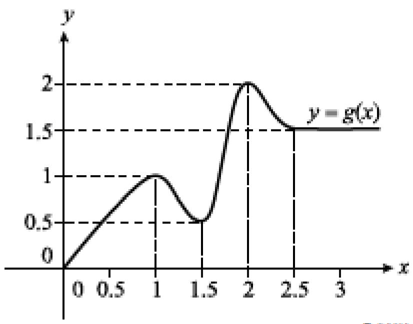
נקודות קיצון (צבזור 42)

הגדרה – תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in A$.

- אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $|x - x_0| < \delta$ אז $f(x) \le f(x_0)$ נגיד של-f יש **מקסימום מקומי** ב-x_0.
- אם קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in A$ אם $|x - x_0| < \delta$ אז $f(x) \ge (x_0)$ נגיד של-f יש **מינימום מקומי** ב-x_0.
- נגיד ש-x_0 היא **נקודת קיצון מקומי** של f כאשר ל-f יש מינימום מקומי או מקסימום מקומי ב-x_0.

נתבונן כעת בפונקציה $g(x)$ באיור 5. הנקודה $x = 1$ אינה נקודת מקסימום של הפונקציה בקטע $[0,3]$, שכן ערך הפונקציה בנקודה זו קטן מערכה בנקודה $x = 3$.

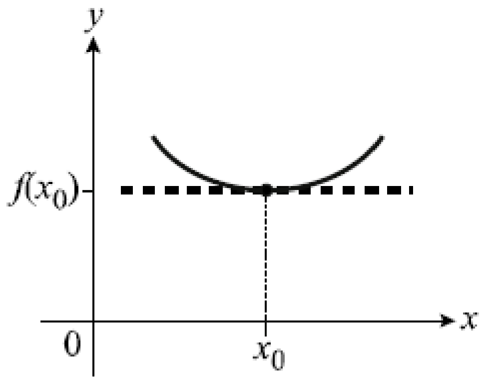
אבל, כפי שנראה מן הגרף, קיימת **סביבה** של הנקודה $x = 1$ אשר בה כל ערכי הפונקציה נמצאים מתחת לערך $g(1)$, כלומר קיימת סביבה של $x = 1$, אשר לכל x בה מתקיים $g(x) \le g(1)$. במקרה זה נאמר כי הנקודה $x = 1$ היא **נקודת מקסימום מקומי** של הפונקציה g, והערך $g(1)$ הוא **מקסימום מקומי** של g.



איור 5

בדומה, הנקודה $x = 1.5$ היא **נקודת מינימום מקומי** של g, והערך $g(1.5)$ הוא מינימום מקומי של g.

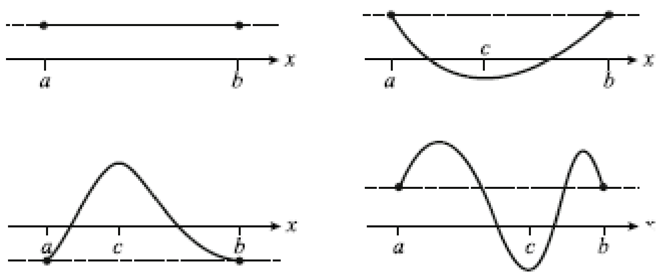
משפט פרמה: תהי $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה. תהי $x_0 \in A$ נקודת הצטברות של A. נניח ש-x_0 היא **נקודת קיצון מקומי** של f. נניח ש-f גזירה ב-x_0. אז מתקיים $f'(x_0) = 0$.



משפטי ערך ממוצע (צבזור 42)

משפט רול (Rolle): תהי $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ פונקציה. נניח f רציפה ב-$[a,b]$, f גזירה ב-(a,b) וגם $f(a) = f(b)$. אז קיים $c \in (a,b)$ כך ש-$f'(c) = 0$.

כלומר, משפט רול מבטיח קיומה של נקודה כלשהי שבה הנגזרת מתאפסת, הוא לא קובע את מיקומה בתוך הקטע.



תרגיל. תהאנה $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות גזירות המקיימות $f'(x)g(x)\neq f(x)g'(x)$ לכל $x\in\mathbb{R}$. נניח כי קיימים $a,b\in\mathbb{R}$ כך ש-$a<b$ וגם $f(a)=f(b)=0$. הוכיחו כי קיימת $c\in[a,b]$ כך ש-$g(c)=0$.

פתרון: נניח בשלילה שלכל $x\in[a,b]$ מתקיים $g(x)\neq 0$. אזי הפונקציה $h:[a,b]\to\mathbb{R}$ הנתונה ע"י $h(x)=\frac{f(x)}{g(x)}$ לכל $x\in[a,b]$ היא מוגדרת היטב וגזירה כמנה של פונקציות גזירות עם מכנה לא אפס.

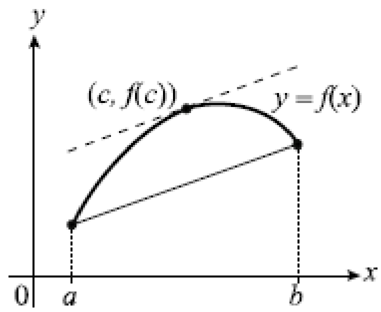
לפי כללי גזירה אנו יודעים כי לכל $x\in[a,b]$ מתקיים

$$h'(x)=\frac{f'(x)g(x)-f(x)g'(x)}{(g(x))^2}$$

ולפי הנתון נסיק כי $h'(x)\neq 0$ לכל $x\in[a,b]$.

מצד שני, כיוון ש-$f(a)=f(b)=0$ נסיק כי $h(a)=h(b)=0$. לכן לפי משפט רול קיימת $c\in(a,b)$ עבורה $h'(c)=0$, וזו סתירה. $\square$

משפט לגראנז' (Lagrange): תהי $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ פונקציה. נניח f רציפה ב-$[a,b]$ וגזירה ב-(a,b). קיים $c\in(a,b)$ כך ש-$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(c)$.



הערות:

- משפט זה נקרא גם "משפט הערך הממוצע של החשבון הדיפרנציאלי".
- משפט זה מהווה הכללה של משפט רול, ההנחות הן אלה של משפט רול, למעט דרישת השוויון $f(a)=f(b)$.

מסקנות:

- תהיינה $f,g:A\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציות. נניח ש-f,g גזירות ב-(a,b) ומתקיים לכל $x\in(a,b)$: $f'(x)=g'(x)$. אז קיים $c\in(a,b)$ כך שלכל $x\in(a,b)$ מתקיים $f(x)=g(x)+c$.
- יהי I רווח (קטע פתוח/סגור/סופי/אינסופי) ב-$\mathbb{R}$. תהי $f:I\subseteq\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב-I. אם $f'(x)$ חסומה ב-I אז f רציפה במ"ש ב-I (צנזור 45)

טענה (תרגול 11): תהי $\{a_n\}$ סדרה. נניח כי קיים $\lambda\in[0,1)$ כך שלכל $n\in\mathbb{N}^+$ מתקיים: $|a_{n+2}-a_{n+1}|\leq\lambda|a_{n+1}-a_n|$ אז הסדרה $\{a_n\}$ מתכנסת לגבול סופי.

תרגיל. נגדיר סדרה $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ ע"י כלל הנסיגה הבא: $a_1 = 1$ ו־$a_{n+1} = \cos(a_n)$ לכל $n \in \mathbb{N}^+$.

1. הוכיחו כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.
2. נסמן $L = \lim_{n\to\infty} a_n$. הוכיחו כי מתקיים $\cos(L) = L$.

פתרון:

1. אנו יודעים כי לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $-1 \le \cos(x) \le 1$, לכן לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $-1 \le a_n \le 1$. נגדיר $f : [-1,1] \to [-1,1]$ ע"י $f(x) = \cos(x)$ לכל $x \in [-1,1]$. אנו יודעים כי f גזירה ומתקיים $f'(x) = -\sin(x)$ לכל $x \in [-1,1]$.

תרגיל לבית: וודאו כי לכל $n \in \mathbb{N}^+$ מתקיים $a_n \neq a_{n+1}$.

יהי $n \in \mathbb{N}^+$, אזי לפי התרגיל לבית ולפי משפט לגרנז' קיים c בין a_n לבין a_{n+1} כך שמתקיים

$$\frac{a_{n+2} - a_{n+1}}{a_{n+1} - a_n} = \frac{f(a_{n+1}) - f(a_n)}{a_{n+1} - a_n} = f'(c). \qquad (1)$$

נשים לב כי לכל $x \in [-1,1]$ מתקיים $0 \le |f'(x)| \le \sin(1) < 1$ **(וודאו זאת!)**.

על כן, מ־(1) נקבל כי

$$|a_{n+2} - a_{n+1}| = |f'(c)(a_{n+1} - a_n)| \le \sin(1)|a_{n+1} - a_n|.$$

כך נסיק לפי התרגיל לבית כי $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ מתכנסת.

2. הפונקציה $\cos$ היא רציפה בכל $\mathbb{R}$, על כן לפי משפט היינה נסיק כי

$$L = \lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} a_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \cos(a_n) = \cos(L),$$

כנדרש.

טענה (מונוטוניות והקשר לנגזרת – תרגול 11): יהי $a \in \mathbb{R}$ ותהי $g: [a, \infty)$ פונקציה עבורה $\lim_{x \to +\infty} g(x) = 0$. אז:

1. אם g עולה ממש אז לכל $x \geq a$ מתקיים $g(x) < 0$.
2. אם g יורדת ממש אז לכל $x \leq a$ מתקיים $g(x) > 0$.

תרגיל. יהי $\alpha \in \mathbb{R}$. נגדיר $f(x) = (x + \alpha) \log\left(1 + \frac{1}{x}\right)$.

1. הוכיחו כי f יורדת ב־$[1, \infty)$ עבור $\alpha = 1$.
2. יהי $0 \leq \alpha < \frac{1}{2}$. הוכיחו כי קיים $M > 0$ כך ש־f עולה ב־$[M, \infty)$.

פתרון: לכל $x > 0$ הפונקציה f מוגדרת וגזירה ברציפות אינסוף פעמים כסכום, מכפלה והרכבה של פונקציות אלמנטריות.

נגזור את f פעמיים ונקבל כי:

$$f'(x) = \log\left(1 + \tfrac{1}{x}\right) - \frac{x + \alpha}{x(x+1)}, \qquad f''(x) = \frac{(2\alpha - 1)x + \alpha}{x^2 (x+1)^2}.$$

לכל $x \in [1, \infty)$ (וודאו זאת!).

1. עבור $\alpha = 1$ נקבל כי

$$f''(x) = \frac{x+1}{x^2 (x+1)^2} = \frac{1}{x^2 (x+1)},$$

לכל $x \in [1, \infty)$. כיוון ש־$x \geq 1$ נסיק כי

$$f''(x) = \frac{1}{x^2(x+1)} > 0.$$

על כן f' היא פונקציה עולה ממש בקטע $[1, \infty)$.

ודאו כי מתקיים $\lim_{x \to +\infty} f'(x) = 0$.

לפי התרגיל לבית נסיק כי $f'(x) < 0$ לכל $x \in [1, \infty)$ ומכאן f יורדת בתחום זה.

2. לכל $x \in [1, \infty)$ מתקיים $x^2 (x+1)^2 > 0$ ולכן הסימן של f'' שווה לסימן של הפונקציה הנתונה ע"י $g(x) = (2\alpha - 1)x + \alpha$ לכל $x \in [1, \infty)$. נסמן $M_0 = \frac{\alpha}{1 - 2\alpha}$ ונסיק לב כי $g(x) < 0$ לכל $x > M_0$ (וודאו זאת!).

על כן $f''(x) < 0$ לכל $x \in (M_0, \infty)$. מכאן f' יורדת ממש בתחום (M_0, ∞).

ודאו כי מתקיים $\lim_{x \to \infty} f'(x) = 0$.

על כן נסיק מהתרגיל לבית כי $f'(x) > 0$ לכל $x \in (M_0, \infty)$.

מכאן f עולה ממש בתחום (M_0, ∞) ובפרט בתחום $[M_0 + 1, \infty)$, כנדרש. $\square$

משפט קושי (Cauchy) (צבזור 43): תהיינה $f, g: [a, b] \to \mathbb{R}$. נניח שמתקיים:

1. f, g רציפות ב-$[a, b]$
2. f, g גזירות ב-(a, b)
3. לכל $x \in [a, b]$, $g'(x) \neq 0$.

אז קיים $c \in (a, b)$ כך שמתקיים $\frac{f'(c)}{g'(c)} = \frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}$ וגם $g(a) \neq g(b)$.

הערות:

- משפט זה הוא הכללה של משפט לגראנז'.

(א) $x - \frac{x^2}{2} < \ln(1+x) < x$

פתרון: נגדיר את הפונקציה $f : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \ln(1+x)$ לכל $x \in (-1, +\infty)$.
נשים לב כי הפונקציה f היא גזירה בתחום הגדרתה ולכל $x \in (-1, +\infty)$ מתקיים $f'(x) = \frac{1}{1+x}$.
יהי $x \in (0, +\infty)$. לפי משפט לגרנז' קיים $c \in (0, x)$ כך שמתקיים

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = f'(c) = \frac{1}{1+c} < 1$$

כיוון ש-$x > 0$ נסיק כי

$$\ln(1+x) < x.$$

נגדיר את הפונקציות $g, h : (-1, +\infty) \to \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = \ln(1+x) - x,\ \ h(x) = \frac{x^2}{2}$ לכל $x \in (-1, +\infty)$.
נשים לב כי הפונקציות g, h הן גזירות בתחום הגדרתן ולכל $x \in (-1, +\infty)$ מתקיים $g'(x) = \frac{1}{1+x} - 1,\ h'(x) = x$.

בנוסף, לכל $x > 0$ מתקיים $h'(x) > 0$.
יהי $x \in (0, +\infty)$. לפי משפט קושי קיים $c \in (0, x)$ כך שמתקיים

$$\frac{\ln(1+x) - x}{\frac{x^2}{2}} = \frac{g(x) - g(0)}{h(x) - h(0)} = \frac{g'(c)}{h'(c)} = \frac{\frac{1}{1+c} - 1}{c} = \frac{\frac{1-1-c}{1+c}}{c} = -\frac{1}{1+c} > -1.$$

כיוון ש-$\frac{x^2}{2} > 0$ נסיק כי

$$\ln(1+x) - x > -\frac{x^2}{2},$$

ולכן

$$\ln(1+x) > x + \left(-\frac{x^2}{2}\right) = x - \frac{x^2}{2},$$

כנדרש. $\square$

משפט דרבו (Darboux) (צנזור 44): יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה. נניח ש-f גזירה ב-I. לכל $a, b \in I$ כך ש-$a < b$ ולכל $d \in \mathbb{R}$ שנמצא בין $f'(a)$ לבין $f'(b)$ קיים $c \in (a, b)$ כך ש-$f'(c) = d$.

כלומר, תכונת משפט לגראנז' עבור פונקציית הנגזרת נכונה גם כאשר **הנגזרת אינה רציפה** בקטע!

טענה (תרגול 11): תהי $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ פונקציה רציפה. נניח שהגבולות $\lim_{x\to-\infty} g(x)$, $\lim_{x\to+\infty} g(x)$ קיימים סופיים ושווים. אז קיימת ל-g נקודת קיצון גלובלי, כלומר או מינימום גלובלי או מקסימום גלובלי.

תרגיל: תהי $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ גזירה כך שמתקיים

$$\lim_{x\to+\infty} (f(x) - f(-x)) = 0.$$

הוכיחו כי f' מתאפסת לפחות בנקודה אחת.

פתרון: נגדיר פונקציה $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = f(x) - f(-x)$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

אז g היא פונקציה אי־זוגית, כלומר לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $g(-x) = -g(x)$.

מהנתון מתקיים $\lim_{x\to+\infty} g(x) = 0$.

כיוון ש־g אי־זוגית ושואפת ל־0 כש־$x \to +\infty$, נסיק כי $\lim_{x\to-\infty} g(x) = 0$ **(וודאו זאת!)**.

בנוסף, הפונקציה g היא רציפה ב־$\mathbb{R}$ **(וודאו זאת!)**.

לפי התרגיל לבית נסיק כי קיימת ל־g נקודת קיצון גלובלית, נסמנה $x_1 \in \mathbb{R}$.

נבחין כי g גזירה, כסכום והרכבה של גזירות, ולפי כלל שרשרת לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים

$$g'(x) = f'(x) + f'(-x)$$

(וודאו זאת!).

מכיוון ש־ x_1 נקודת קיצון גלובלית, היא בפרט נקודת קיצון מקומי, לכן לפי משפט פרמה מתקיים $g'(x_1) = 0$, ולכן מתקיים

$$f'(x_1) + f'(-x_1) = 0$$

נפריד לשני מקרים:

מקרה 1: אם $f'(x_1) = 0$, אז נתבונן ב־x_1 ונשים לב כי היא הנקודה המבוקשת.

מקרה 2: אם $f'(x_1) \neq 0$. נניח ללא הגבלת הכלליות כי $f'(x_1) > 0$. אזי נקבל כי $f'(-x_1) = -f'(x_1) < 0$. לכן לפי משפט דרבו, יש נקודה x_2 בין x_1 ל $-x_1$ שבה $f'(x_2) = 0$. נתבונן ב־x_2 ונשים לב כי היא הנקודה המבוקשת. □

הערות:

- דומה למשפט ערך הביניים אבל פה אנחנו דורשים פחות, במשפט ערך הביניים דרשנו גם רציפות ופה לא.

כלל לופיטל (צנזור 46, צנזור 47)

כלל לופיטל 1: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. תהיינה $f, g: I \to \mathbb{R}$ פונקציות. תהי x_0 נקודת הצטברות של I. אם:

1. f, g גזירות ב-$I\backslash\{x_0\}$
2. $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = 0$ – **מקרה של אי וודאות** $\frac{0}{0}$.
3. קיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in I\backslash\{x_0\}$ אם $0 < |x - x_0| < \delta$ אז $g(x) \neq 0$
4. קיים הגבול (סופי או אינסופי) $\lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = L$

אז: $\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = L$.

כלל לופיטל 2: אותו דבר רק בסעיף 2 מתקיים $\lim_{x\to x_0} |g(x)| = \infty$ - זה מקרה של **אי וודאות** $\frac{L}{\infty}$.

הערה – ניתן להכליל את הכללים עבור $x \to \pm\infty$.

(א) $\lim\limits_{x\to1}\frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}$

פתרון: נגדיר את הפונקציות $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ ע"י $f\left(x\right)=\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)$ ו־$g\left(x\right)=x-1$ לכל $x\in\mathbb{R}$.
הפונקציות f,g הן גזירות בתחום הגדרתן כהרכבה של פונקציות אלמנטריות.
לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים $g'\left(x\right)=1$. נחשב את הנגזרת של f:
אנו יודעים כי לכל $x\in\mathbb{R}$ מתקיים

$$\left(\arctan x\right)'=\frac{1}{1+x^2},$$

ולפי כלל גזירה של מנה נקבל כי

$$\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)'=\frac{\left(x^2-1\right)'\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)\left(x^2+1\right)'}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{2x\left(x^2+1\right)-\left(x^2-1\right)2x}{\left(x^2+1\right)^2}=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}$$

לכן לפי כלל השרשרת נסיק כי

$$\begin{aligned}f'\left(x\right)&=\frac{1}{1+\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)^2}\cdot\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\\&=\frac{1}{1+\frac{\left(x^2-1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2}}\cdot\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\\&=\frac{\left(x^2+1\right)^2}{\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2-1\right)^2}\cdot\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2}\\&=\frac{4x}{\left(x^2+1\right)^2+\left(x^2-1\right)^2}\end{aligned}.$$

נשים לב כי מתקיים:
1) $\lim\limits_{x\to1}f\left(x\right)=\lim\limits_{x\to1}g\left(x\right)=0$,
2) f,g גזירות ב־$\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
3) $g'\left(x\right)\neq0$ לכל $x\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$,
4) הגבול $\lim\limits_{x\to1}\frac{f'\left(x\right)}{g'\left(x\right)}$ קיים ושווה 1,
(וודאו זאת!) אזי לפי משפט לופיטל הגבול

$$\lim_{x\to1}\frac{\arctan\left(\frac{x^2-1}{x^2+1}\right)}{x-1}=\lim_{x\to1}\frac{f\left(x\right)}{g\left(x\right)}$$

קיים ושווה 1.

נגזרת מסדר גבוה ופולינומי טיילור ומקלורן

נגזרת מסדר גבוה

נגזרת מסדר גבוה – תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה כאשר I קטע פתוח. תהי $x_0 \in I$ נקודת הצטברות של I. יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נניח שקיים $\delta > 0$ כך שלכל $x \in I$ אם $|x - x_0| < \delta$ לפונקציה יש n נגזרות ב-x.
לכל x שעבורו קיימת נגזרת מסדר n, נסמן את הנגזרת מסדר n ע"י $f^{(n)}(x)$.
נגיד ש-f גזירה $n+1$ פעמים אם קיים וסופי הגבול הבא: $\boldsymbol{f^{(n+1)}(x_0) = \lim_{x \to x_0} \frac{f^{(n)}(x) - f^{(n)}(x_0)}{x - x_0}}$.

פולינומי טיילור ומקלורן (צנזור 48 – 51)

רקע:

נניח כי אנחנו יודעים לחשב את כל הנגזרות של הפונקציה f מסדר 1 עד n. אנחנו רוצים לבנות פולינום מסדר n:

$$T_n(x) = a_0 + a_1(x - x_0) + a_2(x - x_0)^2 + \cdots + a_n(x - x_0)^n$$

נחפש שהוא יקיים את התנאים הבאים:

- $T_n(x_0) = f(x_0)$.
- עבור כל הנגזרות מסדר k כלשהו מתקיים $T_n^{(k)}(x_0) = f^{(k)}(x_0)$.

קיבלנו כי לכל $k = 1, \dots, n$ מתקיים $a_k = \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}$.

פולינום טיילור – יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. תהי $x_0 \in I$ נקודה פנימית של I. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה. יהי $n \in \mathbb{N}^+$.
נניח ש-$f(x)$ גזירה n פעמים ב-x_0 אז הפולינום $T_{f,x_0,n}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדר ע"י:

$$T_{f,x_0,n} = f(x_0) + \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k$$

לכל $x \in \mathbb{R}$ נקרא פולינום טיילור מסדר n של הפונקציה $f(x)$ בנקודה x_0.

פולינום מקלורן – אם $x_0 = 0$ זהו מקרה פרטי של פולינום טיילור שנקרא פולינום מקלורין.

שארית מסדר n – נגדיר את $R_n(x)$ להיות השארית מסדר n. זה ההפרש בין הערך המדויק לבין הערך המקורב.

נשים לב כי:

- $R_n(x) = f(x) - T_n(x)$
- $R_n(x_0) = f(x_0) - T_n(x_0) = 0$
- $R_n'(x) = 0$
- R_n גזירה כמה פעמים שנרצה.

משפט טיילור (משפט פיאנו): יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. תהי $x_0 \in I$ נקודה פנימית של I. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה. יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נניח ש-$f(x)$ גזירה n פעמים ב-x_0 אז:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{R_n(x)}{(x - x_0)^n} = 0$$

כלומר, השארית יחסית זניחה ביחס לקירוב.

משפט שארית לגראנז': יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע. תהי $x_0 \in I$ נקודה פנימית של I. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה. יהי $n \in \mathbb{N}^+$. נניח ש-$f(x)$ גזירה $n+1$ פעמים ב-x_0. אז לכל $x \in I$ קיים c שנמצא בין x_0 ל-x כך שמתקיים:

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(c)}{(n+1)!}(x - x_0)^{n+1}$$

חשבון את פיתוח טיילור מסדר n של הפונקציות הבאות סביב הנק' x_0:

(א) $f(x)=2^x$ לכל $x\in\mathbb{R}$, עבור $x_0=0$, $n=2$.

פתרון:

נחשב את הנגזרת הראשונה והשנייה של הפונקציה $f(x)=2^x$ בנקודה $x_0=0$.

לכל $x\in\mathbb{R}$ הנגזרת הראשונה היא

$$f^{'}(x)=\ln(2)\cdot 2^x$$

וגם לכל $x\in\mathbb{R}$ הנגזרת השנייה היא

$$f^{''}(x)=(\ln(2))^2\cdot 2^x$$

לכן עבור $x=0$ נקבל ש- $f^{'}(0)=\ln(2)\,,\ f^{''}(0)=(\ln(2))^2$ וגם $f(0)=1$.

אז פולינום טיילור של f מסדר 2 היא

$$f(x)=f(0)+f^{'}(0)\,x+\frac{1}{2}f^{''}(0)\,x^2$$

$$=1+\ln(2)\,x+\frac{1}{2}(\ln(2))^2\,x^2$$

4. חשבו בעזרת פיתוח טיילור את הגבול $\lim\limits_{n\to\infty}\{n!e\}$ כאשר $\{x\}=x-\lfloor x\rfloor$ לכל $x\in\mathbb{R}$ (פונקציית החלק השברי).

פתרון:

יהי $\varepsilon>0$. נסמן $\alpha=\min\{\varepsilon,1\}$ נתבונן ב- $N=\left[\frac{\varepsilon}{\alpha}\right]+1$.

יהי $n\geq N$.

מפיתוח טיילור של e^x סביב 0 עם שארית לגרנג נקבל כי קיים $c\in(0,1)$ כך ש-

$$e=e^1=1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+....+\frac{1}{n!}+\frac{e^c}{(n+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{1}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)!}$$

(ודאו זאת). לכן

$$n!e=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}+\frac{n!e^c}{(n+1)!}=\sum_{k=0}^{n}\frac{n!}{k!}+\frac{e^c}{(n+1)}$$

כעת, לכל $0\leq k\leq n$, $\frac{n!}{k!}\in N^+$ (הוכיחו זאת). וכמו כן $0<\frac{e^c}{(n+1)}\leq\frac{e^c}{(N+1)}<1$. לכן

$$0\leq\{n!e\}=\frac{e^c}{(n+1)}<\varepsilon$$

ומכאן $|\{n!e\}|<\varepsilon$.

חקירת פונקציה

תחומי עלייה וירידה

עלייה וירידה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח כלשהו. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב-I. אז:

- f **עולה** ב-I $\Leftrightarrow$ לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) \geq 0$
- אם לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) > 0$ אז f **עולה ממש** ב-I.
  - נשים לב שזו גרירה וזה לא מתקיים בכיוון ההפוך. למשל, עבור הפונקציה $f(x) = x^3$ היא עולה ממש אבל יש נקודה שבה הנגזרת מתאפסת - $f'(0) = 0$.
  - זו דרך נוחה לדעת שפונקציה היא חח"ע (אם היא מונוטונית ממש).
- f **יורדת** ב-I $\Leftrightarrow$ לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) \leq 0$
- אם לכל $x \in I$ מתקיים $f'(x) < 0$ אז f **יורדת ממש** ב-I.

נקודות קיצון (צנזור 53)

טענה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח כלשהו. תהי $x_0 \in I$. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב-$I\backslash\{x_0\}$. נניח שלכל $x \in I\backslash\{x_0\}$ מתקיים $f'(x) \neq 0$. אז:

1. $f'(x)$ שומרת על הסימן בקטע $I_{x_0^+}$ ובקטע $I_{x_0^-}$.
2. אם לכל $x \in I\backslash\{x_0\}$ מתקיים $f'(x) > 0$ אז x_0 לא קיצון מקומי.
3. אם לכל $x \in I\backslash\{x_0\}$ מתקיים $f'(x) < 0$ אז x_0 לא קיצון מקומי.
4. אם לכל $x \in I_{x_0^+}$ מתקיים $f'(x) > 0$ ולכל $x \in I_{x_0^-}$ מתקיים $f'(x) < 0$ אז ל-f יש מינימום מקומי ב-x_0.
5. אם לכל $x \in I_{x_0^+}$ מתקיים $f'(x) < 0$ ולכל $x \in I_{x_0^-}$ מתקיים $f'(x) > 0$ אז ל-f יש מקסימום מקומי ב-x_0.

ועכשיו בעברית:

- *אנחנו לא מסתכלים על הנקודה עצמה, היא לא מעניינת אותנו.*
- *2,3 – אם הנגזרת תמיד שלילית או חיובית, כלומר לא מחליפה סימן - הפונקציה עולה ממש או יורדת ממש ואין קיצון.*
- *4 – אם הנגזרת שלילית ואז חיובית זה אומר שהפונקציה יורדת ואז עולה ולכן יש מינימום.*
- *5 – אם הנגזרת חיובית ואז שלילית זה אומר שהפונקציה עולה ואז יורדת ולכן יש מקסימום.*

טענה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח כלשהו. תהי $f: I \to \mathbb{R}$. יהי $n \in \mathbb{N}^+$, תהי $x_0 \in I$. נניח f גזירה $n+1$ פעמים ב-x_0 ונניח כי מתקיים: $f'(x_0) = f''(x_0) = \cdots = f^{(n)}(x_0) = 0$ וגם $f^{(n+1)}(x_0) \neq 0$ אז:

1. אם n זוגי אז ל-f אין קיצון ב-x_0.
2. אם n אי זוגי אז:
   a. אם $f^{(n+1)}(x_0) > 0$ אז x_0 מינימום מקומי.
   b. אם $f^{(n+1)}(x_0) < 0$ אז x_0 מקסימום מקומי.

לסיכום:

- אם יש נקודה חשודה לקיצון, שבאה מאי-גזירות של פונקציה – נקבע לפי תחומי עלייה וירידה בלבד.
- אם הנקודה הגיעה מהתאפסות הנגזרת – או שנבדוק תחומי עלייה וירידה, או שנבדוק נגזרת מסדר גבוה ראשונה שלא מתאפסת.

5. מצאו נק' מינימום/מקסימום גלובליים עבור הפונקציות הבאות בתחומים הנתונים:

(א) תהי הפונקציה $f:[0,2]\to\mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי $f(x)=\sin^2 x+\cos^3 x$ לכל $x\in[0,2]$.

פתרון:

שימו לב שנקודות מינימום/מקסימום גלובליים הן נקודות קיצון מקומי או הן נקודות קצה של קטע סגור.

נחקור את הפונקציה f בקטע הסגור $[0,2]$.

הפונקציה f היא חלקה ב־ $\mathbb{R}$ כי היא סכום של פונקציות אלמנטריות חלקיות ב־ $\mathbb{R}$.

בפרט f היא חלקה ב־$[0,2]$, לפי משפט ויישטראס נקבל שקיים מקסימום ומינימום בקטע $[0,2]$.

יהי $x\in\mathbb{R}$, נחשב את הנגזרת של f, נקבל ש־

$$f^{'}(x)=2\sin x\cos x-3\cos^2 x\sin x=2\cos x\sin x\left(1-\frac{3}{2}\cos x\right)$$

לכל $x\in[0,2]$.

נשתמש בזהות הגיאומטרית $2\cos x\sin x=\sin 2x$ לכל $x\in\mathbb{R}$.

לכן נקבל שהנגזרת מקיימת כי לכל $x\in\mathbb{R}$

$$f^{'}(x)=\sin 2x\left(1-\frac{3}{2}\cos x\right)$$

הנגזרת $f^{'}$ מתאפס בקטע $[0,2]$ אם ורק אם $\sin 2x=0$ או $\left(1-\frac{3}{2}\cos x\right)=0$.

לכן הנקודות שבהן הנגזרת מתאפס בקטע $[0,2]$ הן $x=0$ או $x=\frac{\pi}{2}$ או $x=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\approx 0.81410....$.

לכן יש שתי נקודות חשודות והן $x=\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\approx 0.81410...$, $x=\frac{\pi}{2}$, לכן חישובים ישירים של הערכים נקבל ש־

$$f\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\sin^2\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)+\cos^3\left(\arccos\left(\frac{2}{3}\right)\right)=\frac{23}{27}\approx 0.85185..$$

$$f\left(\frac{\pi}{2}\right)=\sin^2\left(\frac{\pi}{2}\right)+\cos^3\left(\frac{\pi}{2}\right)=1$$

ויש שתי נקודות קצה (שצריך לבדוק את הערכים שלהם), לכן חישובים ישירים נקבל ש־

$$f(0)=1,\ \ f(2)=\sin^2(2)+\cos^3(2)=0.75475258...$$

לכן $x=0$ וגם $x=\frac{\pi}{2}$ הן נקודות המקסימום הגלובליות. ו־ $x=2$ היא נקודת המינימום הגלובלית.

תרגיל: תהי הפונקציה $f:(0,+\infty)\to\mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי $f(x)=\frac{\ln^2 x}{x}$ לכל $x>0$. תמצאו את מקסימום ומינימום מקומים של f.

פתרון:

תחום ההגדרה של f הוא $(0,+\infty)$.

הפונקציה f היא חלקה בקטע $(0,+\infty)$, כי היא הרכבה של פונקציות אלמנטריות חלקות.

נחשב את הנגזרת של הפונקציה ונקבל שלכל $x>0$ מתקיים ש־

$$f'(x)=\frac{2\ln x\cdot\frac{1}{x}\cdot x-\ln^2 x}{x^2}=\frac{\ln x\cdot(2-\ln x)}{x^2}$$

לכן $f'(x)=0$ אם ורק אם $x=1$ או $x=e^2$ (ודאו זאת).

נחשב את הנגזרת השנייה של הפונקציה ונקבל שלכל $x>0$ מתקיים ש־

$$f''(x)=\frac{x^2[\frac{1}{x}(2-\log x)-\frac{1}{x}\log x]-2x\log x(2-\log x)}{x^4}=$$

$$=\frac{2-2\log x-4\log x+2\log^2 x}{x^3}=\frac{2-6\log x+2\log^2 x}{x^3}$$

כמובן $f''(1)=2>0$ כלומר הנקודה $x=1$ היא מינימום מקומי.

וגם $f''(e^2)=\frac{-2}{e^6}<0$ כלומר הנקודה $x=e^2$ מקסימום מקומי.

קמירות וקעירות (צנזור 54, צנזור 56)

פונקציה קמורה – יהי $I\subseteq\mathbb{R}$ קטע פתוח כלשהו. תהי $f:I\to\mathbb{R}$ פונקציה. נגיד ש-f היא פונקציה קמורה ב-I, כאשר: לכל $x_1,x_2\in I$ ולכל $t\in[0,1]$ מתקיים: $f(tx_2+(1-t)x_1)\le tf(x_2)+(1-t)f(x_1)$.

טענת עזר: לכל $x,y,z\in\mathbb{R}$ שמקיימים $x<y<z$ קיים $t\in[0,1]$ כך ש-$y=tz+(1-t)x$.

מה אפשר לראות בעיניים?

- קמורה – כל ישר שנמתח בין שתי נקודות על הפונקציה יהיה מעל הפונקציה.
- קעורה – כל ישר שנמתח בין שתי נקודות על הפונקציה יהיה מתחת לפונקציה.

יהיו $f,g:I\to\mathbb{R}$ (I קטע מוכלל). נתון ש־ f,g קמורות.

הוכיחו:

(א) $f+g$ קמורה.

פתרון: יהיו $x,y\in I$ ויהי $\lambda\in[0,1]$.

נתון ש־ g קמורה, לפי ההגדרה של קמירות נקבל

$$g(\lambda x+(1-\lambda)y)\le\lambda g(x)+(1-\lambda)g(y)$$

נתון ש־ f קמורה, לפי ההגדרה של קמירות נקבל

$$f(\lambda x + (1-\lambda)y) \leq \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)$$

לכן לפי חישוב ישיר נקבל ש־

$$(f+g)(\lambda x + (1-\lambda)y) = f(\lambda x + (1-\lambda)y) + g(\lambda x + (1-\lambda)y)$$

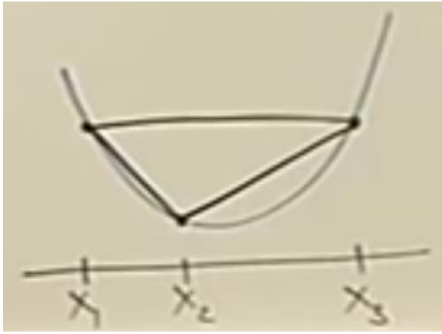
$$\leq [\lambda f(x) + (1-\lambda) f(y)] + [\lambda g(x) + (1-\lambda) g(y)] =$$

$$= \lambda (f+g)(x) + (1-\lambda)(f+g)(y)$$

לכן $f+g$ היא פונקציה קמורה.

<u>למת המיתרים:</u> יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח כלשהו. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה קמורה ב-I. אז לכל $x_1, x_2, x_3 \in I$ אם $x_1 < x_2 < x_3$ אז:

$$\frac{f(x_2)-f(x_1)}{x_2-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_1)}{x_3-x_1} \leq \frac{f(x_3)-f(x_2)}{x_3-x_1}$$



<u>פונקציה קעורה</u> – יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע כלשהו. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה. נגיד ש-f קעורה ב-I כאשר $-f$ קמורה ב-I.

<u>עוד שלל טענות:</u>

1. יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע כלשהו. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב-I. אז **f קמורה ב-I $\Leftrightarrow$ $f'(x)$ עולה ב-I.**
2. יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע כלשהו. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב-I. תהי $x_0 \in I^0$ נקודה פנימית. נסמן ב-ℓ_{x_0} את המשיק לפונקציה בנקודה x_0. אז **f קמורה $\Leftrightarrow$ לכל $x_0 \in I$ מתקיים $\ell_{x_0} \leq f(x)$.** *(כלומר, המשיק תמיד מתחת לגרף הפונקציה)*
3. יהי $I \subseteq \mathbb{R}$ קטע פתוח. תהי $f: I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה פעמיים ב-I. אז **f קמורה ב-I $\Leftrightarrow$ $f''(x) \geq 0$ לכל $x \in I$.**
4. אם פונקציה **קמורה ב-I** אז היא **רציפה ב-I**. *(לא בהכרח גזירה, למשל $f(x) = |x|$).*

7. תהי $f:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ מוגדרת וקמורה בקטע $(0,\infty)$.

נתון שמתקיים $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)=0$.

נגדיר פונקציה חדשה $g:(0,\infty)\to\mathbb{R}$ על ידי $g(x)=\frac{f(x)}{x}$ לכל $x>0$.

הוכיחו שהפונקציה g מונוטונית עולה ב־$(0,\infty)$.

פתרון:

נגדיר $l,h:(0,x)\to\mathbb{R}$ על ידי

$$l(\alpha)=\frac{f(x)-f(\alpha)}{x-\alpha}$$

$$h(\alpha)=\frac{f(y)-f(\alpha)}{y-\alpha}$$

לכל $\alpha\in(0,x)$.

לפי למת המיתרים מתקיים כי לכל $\alpha\in(0,x)$

$$l(\alpha)\le h(\alpha)$$

כמוכן מאריתמטיקת גבולות $\lim_{\alpha\to 0} l(\alpha)=\frac{f(x)}{x}$ וגם $\lim_{\alpha\to 0} h(\alpha)=\frac{f(y)}{y}$.

ממשפט על גבולות ואי שיוויונות נקבל ש־

$$\frac{f(x)}{x}\le\frac{f(y)}{y}$$

לכל $x,y\in(0,\infty)$.

6 – אינטגרלים

אינטגרל לא מסוים

פונקציה קדומה

פונקציה קדומה – יהי $I \subseteq \mathbb{R}$. תהיינה $f, F: I \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות. נגיד ש-**F קדומה של f ב-I**, כאשר F גזירה ב-I ולכל $x \in I$ מתקיים:

$$F'(x) = f(x)$$

טענה: יהי $I \subseteq \mathbb{R}$. תהיינה $f, F: I \to \mathbb{R}$ שתי פונקציות. כאשר F קדומה של f ב-I. תהי $G: I \to \mathbb{R}$ פונקציה גזירה ב-I.
G קדומה של $f \Leftrightarrow$ קיים $c \in \mathbb{R}$ ממשי כך שלכל $x \in I$ מתקיים $G(x) = F(x) + c$.

אינטגרל לא מסוים

סימון – נסמן את אוסף כל הפונקציות הקדומות של $f(x)$ בצורה הבאה - $\int f(x)$.

טענה (לינאריות האינטגרל?): נניח F, G קדומות של f, g בהתאמה בתחום I. אז לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ מתקיים:

$$\int \alpha f(x) + \beta g(x) dx = \alpha F(x) + \beta G(x) + c$$

טענה: נניח F קדומה של f ב-I. לכל $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ כאשר $\alpha \neq 0$ מתקיים: $\int f(ax+b)dx = \frac{F(ax+b)}{a} + c$

זה מתקיים רק לפונקציה לינארית!

$\int \left(6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx$ ב-$(-1,1)$.

משימוש באינטגרלים מידיים אנו יודעים כי

$$\int \cos(x)\,dx = \sin x \quad \int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = \arcsin x$$

על כן מלינאריות האינטגרל

$$\int \left(6\cos(x) + \frac{4}{\sqrt{1-x^2}}\right) dx = 6\int \cos(x)\,dx + 4\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} dx = 6\sin x + 4\arcsin x + C$$

כאשר C הוא קבוע כלשהו.

שיטות אינטגרציה

אינטגרציה בחלקים

כאשר נרצה למצוא אינטגרל של מכפלת פונקציות, נוכל להשתמש בשיטה הבאה:

$$\int u(x)v'(x)dx = u(x)v(x) - \int u'(x)v(x)dx$$

לפי מינקין, מקרים קלאסיים של אינטגרציה בחלקים – נסמן פולינום $p(x)$:

- $\int p(x)e^{ax+b}dx$ נסמן $u = p(x)$
- $\int p(x) \cdot sin(ax+b)\,dx$ או $\int p(x) \cdot cos(ax+b)\,dx$ נסמן $u = p(x)$
- $\int p(x) \cdot ln(ax+b)\,dx$ נסמן $u = ln(ax+b)$
- $\int p(x) \cdot arctan(ax+b)\,dx$ נסמן $u = arctan(ax+b)$

אינטגרציה בחלקים: יהי I רווח כלשהו, תהאנה $f,g: I \to \mathbb{R}$ פונקציות, ותהא $F: I \to \mathbb{R}$ קדומה של f.
נניח כי g גזירה על I,
וכמו כן נניח כי למכפלה Fg' יש קדומה על I.
במקרה זה ל-fg יש קדומה על I ומתקיים $\int (fg)(x)dx = (Fg)(x) - \int (Fg')(x)dx$

תרגיל. חשבו את $\int e^x \cdot \sin(x)\,dx$ ב־$\mathbb{R}$,

פתרון: הפונקציות $v'(x) = e^x$, $u(x) = \sin(x)$ הן גזירות אינסוף פעמים ב־$\mathbb{R}$, בנוסף, הפונקציה $v(x) = e^x$ היא קדומה של v'.

הפונקציה $u' \cdot v(x) = \cos(x)e^x$ היא רציפה ולכן קיימת לה פונקציה קדומה (נוכיח בסמסטר הבא). תנאי משפט האינטגרציה בחלקים מתקיימים ולכן נוכל לרשום

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cdot \sin(x) - \int e^x \cos(x)\,dx. \qquad (1)$$

הפונקציות $v'(x) = e^x$, $u_1(x) = \cos(x)$ הן גזירות אינסוף פעמים ב־$\mathbb{R}$, בנוסף, הפונקציה $u_1' \cdot v$ היא רציפה ולכן קיימת לה פונקציה קדומה. תנאי משפט האינטגרציה בחלקים מתקיימים ולכן נוכל לרשום

$$\int e^x \cos(x)\,dx = e^x \cdot \cos(x) + \int e^x \sin(x)\,dx, \qquad (2)$$

מ־(2), (1) נסיק כי

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cdot \sin(x) - e^x \cdot \cos(x) - \int e^x \sin(x)\,dx$$

לבסוף, נחלץ את $\int e^x \sin(x)\,dx$ מתוך משוואה זו ונקבל כי

$$\int e^x \sin(x)\,dx = e^x \cdot \frac{\sin(x) - \cos(x)}{2} + C.$$

תרגיל. חשבו את $\int\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x-1}-2}$ ב־$(5,\infty)$

פתרון: יהי $x>5$. אזי מתקיים

$$\begin{aligned}\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x-1}-2} &= \frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x-1}-2}\cdot\frac{\sqrt{x-1}+2}{\sqrt{x-1}+2}\\ &= \frac{(x-5)(x+1)\left(\sqrt{x-1}+2\right)}{x-5}\\ &= (x+1)\left(\sqrt{x-1}+2\right)\\ &= x\sqrt{x-1}+2x+\sqrt{x-1}+2.\end{aligned}$$

משימוש בלינאריות האינטגרל ובאינטגרלים מידיים נסיק שמתקיים

$$\int\left(2x+\sqrt{x-1}+2\right)dx = x^2+\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}+2x$$

בכדי לחשב את $\int x\sqrt{x-1}dx$ נבצע אינטגרציה בחלקים.

נסמן $f(x)=\sqrt{x-1},\ g(x)=x$ לכל $x>5$. אזי g גזירה עם נגזרת $g'(x)=1$ לכל $x>5$. בנוסף, משימוש באינטגרלים מידיים נסיק כי הפונקציה F הנתונה ע"י $F(x)=\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}$ לכל $x>5$ היא קדומה של f ולבסוף לפונקציה $(F\cdot g')(x)=\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}$ יש קדומה המתקבלת מאינטגרל מידי. על כן לפונקציה $(f\cdot g)(x)=x\sqrt{x-1}$ יש קדומה הנתונה ע"י

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{x-1}dx &= \int f(x)\,g(x)\,dx\\ &= F(x)\,g(x)-\int F(x)\,g'(x)\,dx\\ &= x\cdot\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}-\int\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}dx\\ &= x\cdot\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}-\frac{(x-1)^{2.5}}{1.5\cdot2.5}.\end{aligned}$$

לכן מלינאריות האינטגרל נסיק כי

$$\int\frac{x^2-4x-5}{\sqrt{x-1}-2}dx = x^2+\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}+2x+x\cdot\frac{(x-1)^{1.5}}{1.5}-\frac{(x-1)^{2.5}}{1.5\cdot2.5}+C.$$

שיטת ההצבה (החלפת משתנים)

מקרה ראשון: כאשר F היא קדומה של f ב-I אז:

$$\int \boldsymbol{f(\varphi(x)) \cdot \varphi'(x)\, dx} = \begin{bmatrix} t = \varphi(x) \\ dt = \varphi'(x)dx \end{bmatrix} = \int f(t)dt = F(t) + c = \boldsymbol{F(\varphi(x)) + c}$$

החלפת משתנים 1: יהיו I, J רווחים כלשהם, ותהאנה $f: I \to \mathbb{R}$,$g: J \to I$ פונקציות.
נניח כי קיימת $F: I \to \mathbb{R}$ קדומה של f,
וכי g גזירה על J.
במקרה זה לפונקציה $(f \circ g) \cdot g'$ יש קדומה על I ומתקיים $\int (f \circ g)(x) \cdot g'(x)dx = (F \circ g)(x) + c$.

$\int 90x^2 \sin\left(2 + 6x^3\right) dx$ ב-$\mathbb{R}$.

טיוטה: נגדיר משתנה חדש $u = 2 + 6x^3$ אז נקבל כי

$$1\, du = 18x^2\, dx$$

וכך נקבל כי

$$\int 90x^2 \sin\left(2 + 6x^3\right) dx = \int 5 \cdot 18x^2 \sin\left(2 + 6x^3\right) dx = 5 \int \sin\left(2 + 6x^3\right) \cdot \left(18x^2\right) dx$$

$$= 5 \int \sin(u)\, du = -5 \cos u + c = -5 \cos\left(2 + 6x^3\right) + C.$$

פתרון: נבדוק שתנאי משפט החלפת משתנים מתקיימים.

נגדיר שתי הפונקציות $f, g \to \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ על ידי

$$f(x) = \sin x, \quad g(x) = 2 + 6x^3$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

משימוש באינטגרלים מידיים קיימת ל-f פונקציה קדומה $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ שמוגדרת על ידי $F(x) = -\cos x$ לכל $x \in \mathbb{R}$.

הפונקציה g היא פולינום לכן g היא גזירה ב- $\mathbb{R}$.

אז לפי משפט החלפת משתנים מתקיים

$$\begin{aligned} \int 90x^2 \sin\left(2 + 6x^3\right) dx &= 5 \cdot \int 18x^2 \sin\left(2 + 6x^3\right) dx \\ &= 5 \int f \circ g(x) \cdot g'(x)\, dx \\ &= 5F \circ g + C \\ &= -5 \cos\left(2 + 6x^3\right) + C \end{aligned}$$

<u>מקרה שני:</u> דומה למקרה הראשון, רק שלאחר החזרה למשתנה x צריך גם להפוך את הפונקציה:

$$\int f(x)\,dx = \begin{bmatrix} x = \omega(t) \\ dx = \omega'(t)dt \end{bmatrix} = \int f(\omega(t)) \cdot \omega'(t)dt$$

<u>החלפת משתנים 2:</u> יהיו I, J רווחים כלשהם, ותהאנה $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to I$ פונקציות.
נניח כי g גזירה על J,
ולכל $x \in J$ מתקיים $g'(x) \neq 0$.
כמו כן g על I.
נניח כי קיימת $F: J \to \mathbb{R}$ קדומה של $(f \circ g) \cdot g'$ על J.
במקרה זה קיימת קדומה ל-g על I ומתקיים $\int f(x)dx = F \circ g^{-1} + c$.

תרגיל. חשבו את $\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}dx$ ב־$\mathbb{R}$.

פתרון: נסמן $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ע"י $f(x) = \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}$ לכל $x \in \mathbb{R}$ ו־$g: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to \mathbb{R}$ ע"י $g(x) = \tan(x)$ לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.
הפונקציה g היא גזירה על $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ולכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ מתקיים $g'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} \neq 0$. נשים לב כי

$$g^{-1}(x) = \arctan(x), \qquad g: \mathbb{R} \to \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$$

לכל $x \in \mathbb{R}$.

לכל $x \in \mathbb{R}$. יהי $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, אזי מתקיים

$$(f \circ g)(x) \cdot g'(x) = \frac{(\tan(x))^3}{\left(1 + (\tan(x))^2\right)^{\frac{5}{2}}} \cdot \frac{1}{\cos^2 x} = \sin^3(x),$$

(וודאו זאת!).נחשב את האינטגרל $\int \sin^3 x dx$ בקטע $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

יהי $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, אזי מתקיים

$$\sin^3 x = \sin x \cdot \sin^2 x = \sin x \cdot \left(1 - \cos^2 x\right) = \sin x - \sin x \cdot \cos^2 x.$$

הפונקציות $\sin x, \sin x \cdot \cos^2 x$ רציפות בכל $\mathbb{R}$, ובפרט ב־$\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$, ולכן יש להן קדומות בקטע זה. מלינאריות האינטגרל נסיק כי

$$\int \sin^3 x\,dx = \int \left(\sin x - \sin x \cdot \cos^2 x\right)\,dx = \int \sin x\,dx - \int \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$$

אנו יודעים כי $\int \sin x\,dx = -\cos x$. נחשב את $-\int \sin x \cdot \cos^2 x\,dx$.

נגדיר $f_1: (0,1] \to \mathbb{R}$, $f_1(x) = x^2$ ו־$g_1: \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right) \to (0,1]$, $g_1(x) = \cos x$. נשים לב כי $g_1'(x) = -\sin x$
ו־$F_1: (0,1] \to \mathbb{R}$ הנתונה ע"י $F_1(x) = \frac{1}{3}x^3$ היא פונקציה קדומה של f_1, ולכן נסיק ממשפט שינוי משתנה כי

$$-\int \sin x \cdot \cos^2 x\,dx = \int f_1 \circ g_1(x) \cdot g_1'(x)\,dx = F_1 \circ g(x) = \frac{1}{3}\cos^3 x.$$

על כן נסיק כי

$$\int \sin^3 x\,dx = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$$

נסמן $F(x) = -\cos x + \frac{1}{3}\cos^3 x$ לכל $x \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. אז לפי משפט שינוי משתנה, מתקיים

$$\begin{aligned}\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}dx &= F \circ g^{-1}(x) + C \\ &= F(\arctan(x)) + C \\ &= -\cos(\arctan(x)) + \tfrac{1}{3}\cos^3(\arctan(x)) + C.\end{aligned}$$

תרגיל לבית: לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $\cos(\arctan(x)) = \frac{1}{(1+x^2)^{1/2}}$.

רמז : היעזרו בזהות $\tan^2 y s + 1 = \frac{1}{\cos^2 y}$ הנכונה לכל $y \in \left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$.

מכאן נקבל כי

$$\int \frac{x^3}{(1+x^2)^{\frac{5}{2}}}dx = -\frac{1}{(1+x^2)^{1/2}} + \frac{1}{(1+x^2)^{3/2}} + C.$$

אינטגרל של פונקציה רציונאלית

נניח $P(x), Q(x)$ פולינומים, $P, Q: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ננסה למצוא את $\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx$

פירוק לשברים חלקיים:

טענה: יהי $P(x)$ פולינום כלשהו. אז ניתן להציג אותו כמכפלה של ביטויים מהצורה $(x-a)$ וביטויים מהצורה x^2+px+q שהוא אי-פריק.

בפועל מה עושים? פורסים את הפולינום בצורה הבאה ומחפשים מקדמים A, B, C.

תרגיל. חשבו את $\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx$ ב־$(2, \infty)$.

טיוטה: לכל $x > 2$ מתקיים $x^2-3x+2 = (x-1)(x-2)$.

נחפש $A, B \in \mathbb{R}$ עבורם

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{A}{x-1} + \frac{B}{x-2}.$$

נכפיל את המשוואה ב־$(x-1)(x-2)$ ונקבל כי

$$1 = A(x-2) + B(x-1) = (A+B)x - 2A - B$$

ע"י השוואת מקדמים נסיק כי

$$\begin{cases} A+B=0 \\ -2A-B=1 \end{cases}$$

לכן נסיק כי $A=-1,\ B=1$ ומכאן

$$\frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1}.$$

כעת נעזר באינטגרלים מידיים ונסיק כי

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-2) - \ln(x-1) + C.$$

פתרון: יהי $x > 2$. אזי מתקיים

$$\frac{1}{x^2-3x+2} = \frac{1}{(x-1)(x-2)} = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x-1},$$

(וודאו זאת!). משימוש באינטגרלים מידיים ובלינאריות האינטגרל נסיק כי

$$\int \frac{1}{x^2-3x+2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{1}{x-1} dx = \ln(x-2) - \ln(x-1) + C.$$

חילוק פולינומים:

טענה: לכל שני פולינומים $P(x), Q(x)$ כאשר $Q(x)$ אינו פולינום האפס, קיימים ויחידם הפולינומים $q(x), r(x)$ כך שמתקיים:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = q(x) + \frac{r(x)}{Q(x)}$$

כאשר חזקת $r(x)$ קטנה מחזקת $Q(x)$. כלומר, כל מנה של פולינומים אפשר להציג כחלק שלם ושארית.