הפקולטה למדעים מדויקים
ע״ש ריימונד ובברלי סאקלר
אוניברסיטת תל אביב

החוג למדעי המחשב (0368)
הסתברות וסטטיסטיקה (2002)
(גרסה ארוכה)

מרצה: שלומי רובינשטיין
מתרגל: ניר קרת

תשפ"ג, סמסטר א' (2022-2023)

מסכם: רועי מעין

The Raymond and
Beverly Sackler Faculty
of Exact Sciences
Tel Aviv University

פרק 1 – מבוא

פרק 2 – משתנים מקריים

פרק 3 – נושאים נוספים

1 – מבוא

מבוא

מרחבי הסתברות

מרחב המדגם – במרחב הסתברות יש לנו אוסף של תוצאות אלמנטריות שיכולות לקרות (כמו בהטלת קוביה – 1, 2, 3, 4, 5, 6). כלומר זהו אוסף של נקודות אלמנטריות שלא ניתנות לחלוקה (אין משהו יותר בסיסי). האוסף כולו נקרא Ω.

אוסף מאורעות – יש קבוצה של מאורעות. מאורע מכיל קבוצה של נקודות אלמנטריות. למשל בהטלת קוביה יש מאורע של "תוצאה זוגית" המכיל את אוסף הנקודות 2, 4, 6.

הנחות:

- ✓ סגור תחת איחוד – איחוד של מאורעות שהם באוסף גם הוא באוסף.
- ✓ סגור תחת משלים – משלים של מאורע שהוא באוסף גם הוא בסוף.

<u>פונקציית הסתברות:</u> המטרה שלנו היא לתת פונקציית הסתברות לכל מאורע. נתאים לכל מאורע, הסתברות (סיכוי). זו פונקציה מעולם המאורעות אל הערכים הממשיים. פונקציה זו תסומן ב-P. נגדיר את האקסיומות הבאות:

- ✓ $P(A) \geq 0$.
- ✓ $P(\Omega) = 1$.
- ✓ אם A_i זרות (כלומר החיתוך בין כל שתי קבוצות זרות הוא ריק) אז: $P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)$, עבור איחוד בן-מניה. הסתברות של איחוד הקבוצות שווה לסכום ההסתברויות.

<u>טענות בסיסיות (שיעור 1):</u>

א. $\boldsymbol{P(\emptyset) = 0}$ (הערה: יש גם קבוצות לא ריקות שההסתברות שלהן היא 0, נראה בהמשך).
הוכחה: נגדיר $A_i = \emptyset$ לכל $1 \leq i < \infty$. מתקיים $A_1 = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ ולכן:
$$P(A_1) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i) = \sum_{i=1}^{\infty} P(A_1)$$

ב. **כאשר A_i מאורעות זרים אז** $\boldsymbol{P(\bigcup_{i=1}^{n} A_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)}$, כלומר זה נכון גם למספר סופי.
הוכחה: נגדיר $B_i = A_i$ לכל $1 \leq i \leq n$. נגדיר $B_i = \emptyset$ עבור $i > n$. נשים לב כי מתקיים:
$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{n} B_i\right) = P\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i\right) = \sum_{i=1}^{\infty} P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) = \sum_{i=1}^{n} P(A_i)$$

ג. **אם $\boldsymbol{A \subseteq B}$ אז $\boldsymbol{P(A) \leq P(B)}$.**
הוכחה: לפי הנתון $B = A \cup (B \backslash A)$ ולכן $P(B) = P(A) + P(B\backslash A) \geq P(A)$.

ד. $\boldsymbol{P(A) + P(A^c) = 1}$.
הוכחה: הקבוצות זרות ולכן $P(A) + P(A^c) = P(A \cup A^c) = P(\Omega) = 1$.

ה. **לכל A מתקיים $\boldsymbol{0 \leq P(A) \leq 1}$.**
הוכחה: $\emptyset \subseteq A \subseteq \Omega$ לכן $0 \leq P(A) \leq 1$.

דוגמה פשוטה למרחב הסתברות:

- ✓ מרחב המדגם: $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$
- ✓ קבוצה של מאורעות: $\{\emptyset, \Omega, \{1,2,5,6\}, \{3,4\}\}$
- ✓ תוצאות פונקציית ההסתברות: $P(\{1,2,5,6\}) = 0.7, P(\{3,4\}) = 0.3$

<u>טענה (שיעור 1):</u> **תהי $\{A_i\}$ קבוצה של מאורעות אז** $\boldsymbol{P(\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i) \leq \sum_{i=1}^{\infty} P(A_i)}$.

הוכחה: נגדיר $B_i = A_i \backslash (\bigcup_{j<i} A_j)$, כלומר A_i ללא כל הקבוצות הקודמות. נראה כי $\bigcup_{i=1}^{\infty} B_i = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$. נראה הכלה דו-כיוונית.
אם $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ אז קיים i כך ש-$x \in B_i$ וכיוון ש-$B_i \subseteq A_i$ נקבל $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$.
בכיוון השני, אם $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ אז קיים j מינימלי המקיים $x \in A_j$ כלומר הוא לא שייך לקבוצות הקודמות ולכן $x \in B_j$ ונקבל $x \in \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$.

מרחבי הסתברות סימטריים

מרחב מדגם סימטרי הוא מרחב שבו לכל הנקודות האלמנטריות יש אותה הסתברות. אז $P(A)=\frac{|A|}{|\Omega|}$. מרחב כזה הוא רק סופי, לא יכול להיות שיש מספר אינסופי של נקודות שלכולן אותן הסתברות. לשם החישובים ניעזר בקומבינטוריקה (מקורס בדידה האהוב...).

<u>דוגמאות:</u>

1) מושיבים לאורך ספסל 20 אנשים, כך שכל הסידורים שווי הסתברות. מהי ההסתברות שדן ישב במקום 7?

- ✓ <u>דרך א':</u> $|\Omega|=20!$, $|A|=1\cdot 19!$ (דן במקום 7 ועוד 19 עצרת כדי לסדר את יתר האנשים). נקבל $P(A)=\frac{19!}{20!}=\frac{1}{20}$.
- ✓ <u>דרך ב':</u> נשתכנע שכל המיקומים של דן הם שווי הסתברות. נסתכל רק על המיקום של דן. $|\Omega|=20$, $|A|=1$.

2) יש 50 גפרורים שמהם 20 הם שרופים. אני מוציא ללא החזרה 3 גפרורים. מהי ההסתברות שאצליח להדליק אש?

- ✓ <u>דרך א':</u> $|\Omega|=\binom{50}{3}$ (ללא החזרה, ללא חשיבות לסדר). $|A|=\binom{30}{3}+\binom{30}{2}\binom{20}{1}+\binom{30}{1}\binom{20}{2}$ (כולם לא שרופים, 2 לא שרופים ו-1 שרוף, 1 לא שרוף ו-2 שרופים).
- ✓ <u>דרך ב':</u> $|A|=\binom{50}{3}-\binom{20}{3}$ (נחסר הוצאה של 3 גפרורים שרופים). יותר בפירוט: $P(A)=1-P(A^C)=1-\frac{\binom{20}{3}}{\binom{50}{3}}$.

3) מסדרים n אנשים לאורך ספסל. כל הסידורים שווי הסתברות. מהי ההסתברות שדן ישב ליד רמי?

- ✓ $|\Omega|=n!$ (כל הסידורים האפשריים). נאחד את דן ואת רמי, הם חייבים לשבת אחד ליד השני. יש n-1 אלמנטים אחרים שהם לא דן ורמי שצריך לסדר. נכפיל גם בסידור הפנימי של דן ורמי ונקבל $|A|=2!\,(n-1)!$.
  לכן: $P(A)=\frac{2!(n-1)!}{n!}=\frac{2}{n}$.

4) מסדרים n אנשים באקראי סביב מעגל. מה הסיכוי שדן ישב ליד רמי?

- ✓ <u>דרך א':</u> $|\Omega|=(n-1)!$ (סידור סביב מעגל). $|A|=2!\cdot(n-2)!$ (באופן דומה). $P(A)=\frac{2!(n-2)!}{(n-1)!}=\frac{2}{n-1}$.
- ✓ <u>דרך ב':</u> נסתכל על שני השכנים של דן. $|\Omega|=\binom{n-1}{2}$. נשתכנע שכל הבחירות של שני השכנים הם שוות הסתברות, לא משנה מי מימין ומי משמאל. נרצה לבחור שני שכנים כך שרמי הוא אחד מהם. $|A|=\binom{1}{1}\cdot\binom{n-2}{1}$.
- ✓ <u>דרך ג':</u> במעגל אין השפעה למיקום של דן על המיקום של רמי. הושבנו את דן במקום כלשהו. כעת נחשב כמה מקומות אפשריים יש לרמי - $(n-1)$, וב-2 מתוכם הוא יושב ליד דן. נקבל $|\Omega|=n-1$, $|A|=2$.

5) מהי ההסתברות שלגבי שלושה אנשים, לכל אחד יש יום הולדת בתאריך שונה?

- ✓ $|\Omega|=365^3$, $|A|=365\cdot 364\cdot 363=\binom{365}{3}\cdot 3!$. כלומר בחרנו 3 ימים, ואנחנו מחלקים את האנשים בין הימים.

<u>זהירות עם מרחב מדגם לא סימטרי:</u> יש שני כדים ושני כדורים. מטילים את הכדורים לכדים כך שכל הצירופים הם שווי הסתברות. מהי ההסתברות שיהיה כדור אחד בכל כד?

- ✓ פתרון שגוי: ישנם 3 מקרים אפשריים, ורק במקרה אחד יש כדור אחד בכל כד. נראה שהתשובה היא $\frac{1}{3}$. אבל לא מדובר במרחב הסתברות סימטרי. פתרון נכון: $|\Omega|=2^2$, $|A|=2$.

<u>סיכום - מדגמים של k פרטים מתוך n פרטים:</u>

	ללא חשיבות לסדר	עם חשיבות לסדר
עם החזרה	לא מרחב הסתברות סימטרי! לאור הדוגמה עם הכדים והכדורים.	n^k
בלי החזרה	$\binom{n}{k}$	$\binom{n}{k}\cdot k!=n(n-1)\ldots(n-k+1)=\frac{n!}{(n-k)!}$

<u>שאלה:</u> בונים מילה באורך 8 שכל אות שלה היא a או b בסיכוי שווה. מהי ההסתברות שגם a וגם b יופיעו?

- ✓ פתרון: $|\Omega|=2^8$, ובעזרת משלים נכתוב $|A|=2^8-2$.

עקרון ההכלה וההפרדה

עקרון ההכלה וההפרדה (שיעור 1): מתקיים $\boldsymbol{P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)}$. באופן כללי יותר:

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}^{n}P(A_i\cap A_j)+\sum_{i<j<k}^{n}P(A_i\cap A_j\cap A_k)$$

במקרה של שניים או שלושה מאורעות ניתן לראות בקלות בדיאגרמת ון כי הנוסחה מתקיימת.

הוכחה: באיחוד כלולות נקודות שהן בלפחות אחד מבין A_i. נרצה לספור כל נקודה כזו פעם אחת בדיוק. נניח ש-x כלול ב-m מאורעות. נקבל:

$$\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\cdots\pm\binom{m}{m}=\left[-\binom{m}{0}+\binom{m}{1}-\binom{m}{2}+\binom{m}{3}-\cdots\pm\binom{m}{m}\right]+\binom{m}{0}=\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}(-1)^{k+1}+\binom{m}{0}$$
$$=(-1+1)^m+1=0+1=1$$

דוגמאות:

1) בוחרים במילה באורך 9 שמורכבת מהאותיות a,b,c. מהי ההסתברות שגם a תופיע וגם b תופיע?

- ✓ נסתכל על המשלים, יש אות שלא מופיעה. A – a לא מופיעה, B – b לא מופיעה:
$$P(A\cup B)=P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\frac{2^9}{3^9}+\frac{2^9}{3^9}-\frac{1^9}{3^9}$$

2) בוחרים 13 קלפים ללא החזרה מתוך חפיסה של 52 קלפים. מהי ההסתברות שכל סדרה תהיה מיוצגת?

- ✓ $|\Omega|=\binom{52}{13}$. נסתכל על המשלים שבו יש סדרה שלא מיוצגת. נגדיר A – לב לא מיוצג, B – עלה לא מיוצג, C – מעוין לא מיוצג, D – תלתן לא מיוצג. המשלים הוא איחוד של כל המאורעות האלה. המאורעות אינם זרים, ולכן ניעזר בהכלה והפרדה:
$$P(A\cup B\cup C\cup D)=P(A)+P(B)+P(C)+P(D)-P(A\cap B)-P(A\cap C)-\cdots+P(A\cap B\cap C)+\cdots$$
לכל המאורעות יש אותה הסתברות, ולכן:
$$P(A\cup B\cup C\cup D)=4P(A)-\binom{4}{2}P(A\cap B)+\binom{4}{3}P(A\cap B\cap C)=4\frac{\binom{39}{13}}{\binom{52}{13}}-\binom{4}{2}\frac{\binom{26}{13}}{\binom{52}{13}}+\binom{4}{3}\frac{\binom{13}{13}}{\binom{52}{13}}$$

3) בוחרים בסיכוי שווה מספר טבעי בין 1 ל-10. מהי ההסתברות שהוא לא יתחלק בלפחות אחד מבין 2, 3, 5.

- ✓ דרך א': נגדיר A – לא מתחלק ב-2, B – לא מתחלק ב-3, C – לא מתחלק ב-5. אנו מחפשים את $P(A\cup B\cup C)$. נחשב את הדברים הנחוצים: $P(A)=\frac{5}{10},P(B)=\frac{7}{10},P(C)=\frac{8}{10},P(A\cap B)=\frac{3}{10},P(A\cap B)=\frac{4}{10},P(B\cap C)=\frac{5}{10}$. בנוסף, $P(A\cap B\cap C)=\frac{2}{10}$. לכן נקבל: $P(A\cup B\cup C)=\frac{5+7+8}{10}-\frac{3+4+5}{10}+\frac{2}{10}=0$. חישבנו את המשלים (לא מתחלק באף אחד מהם) ולכן ההסתברות היא 1.
- ✓ דרך ב': רק מספר שהוא לפחות 30 יכול להתחלק בכל השלושה. לכן בין 1 ל-10 כל מספר לא יתחלק בלפחות אחד מבין המספרים הנתונים.

4) בוחרים מילה באורך 10 שבנויה מהאותיות a,b,c. כל אות בסיכוי שווה משלושתן.

א) מהי ההסתברות שלכל אות יהיה ייצוג?

- ✓ מרחב המדגם הוא $|\Omega|=3^{10}$. נוח יותר להסתכל על המשלים, שיש אות שלא מופיעה. נחשב את מספר האפשרויות למילים שאין בהן את כל אחת מהאותיות, ונחסר את המקרים שבהן אין שתי אותיות ביחד (יש רק אפשרות אחת למילה): $|A^c|=2^{10}+2^{10}+2^{10}-1-1-1$.

ב) מהי ההסתברות שכל אות תופיע לפחות פעמיים?

- ✓ דרך א': $|A^c|=\binom{10}{2}\binom{8}{2}\binom{6}{2}3^4$. בעייתי כיוון שיש כאן חזרות בספירה.
- ✓ דרך ב': נגדיר A_0 – a לא מופיעה, B_0 – b לא מופיעה, C_0 – c לא מופיעה. A_1 – a מופיעה פעם אחת, ובהתאם לשאר האותיות. נחשב את האיחוד של כל 6 המאורעות האלה. ההסתברות של אות לא להופיע זהה עבור כל האותיות, כנ"ל עבור ההסתברות של אות להופיע פעם אחת. אין חיתוכים של 3 מאורעות. נקבל:

$$3P(A_0)+3P(A_1)-3P(A_0\cap B_0)-3P(A_1\cap B_1)-6P(A_0\cap B_1)=$$
$$3\cdot\frac{2^{10}}{3^{10}}+3\cdot\frac{10\cdot 2^9}{3^{10}}-3\cdot 1-3\cdot\frac{10\cdot 9}{3^{10}}-6\frac{10}{3^{10}}$$

- ✓ פתרון ג': ניעזר בכך שהמילה קצרה יחסית (תנאי מיוחד לשאלה). הכי הרבה אות יכולה להופיע 6 פעמים (כי שתי האותיות האחרות תופסות 4 מקומות). נספור את כל האפשרויות הקיימות.
  - a – 6, b – 2, c – 2 (3 אופציות כאלו באופן כללי)
  - a – 5, b – 3, c – 2 (!3 אופציות)
  - a – 4, b – 4, c – 2 (3 אופציות)
  - a – 4, b – 3, c – 3 (3 אופציות)

נשאר לנו לבחור את המקומות בהן כל ספרה תופיע. נקבל סה"כ: $P=\frac{3\binom{10}{6}\binom{4}{2}+3!\binom{10}{5}\binom{5}{3}+3\binom{10}{4}\binom{6}{4}+3\binom{10}{4}\binom{6}{3}}{3^{10}}$

5) <u>המזכירה הרשלנית</u>: מזכירה צריכה לשלוח n מכתבים ל-n אנשים. לכל מכתב מתאימה מעטפה יחידה. מהי ההסתברות שלפחות אדם אחד יקבל את המכתב שמתאים לו?

- ✓ A_i – אדם i מקבל את המכתב המתאים לו.

$$P\left(\bigcup_{i=1}^{n}A_i\right)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)-\sum_{i<j}^{n}P\left(A_i\cap A_j\right)+\sum_{i<j<k}^{n}P\left(A_i\cap A_j\cap A_k\right)-\cdots=$$

- ✓ אין הבדל בין הסיכוי של אדם אחד לקבל את המכתב לעומת הסיכוי של אדם אחר ולכן:

$$=nP(A_1)-\binom{n}{2}P(A_1\cap A_2)+\binom{n}{3}P(A_1\cap A_2\cap A_3)\ldots=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}P(A_1\cap\ldots\cap A_k)(-1)^{k+1}=$$

- ✓ נשים לב כי: $P(A_1)=\frac{1}{n}=\frac{(n-1)!}{n!}$. $P(A_1\cap A_2)=\frac{(n-2)!}{n!}$. $P(A_1\cap\ldots\cap A_k)=\frac{(n-k)!}{n!}=\frac{1}{\binom{n}{k}k!}$ ולכן:

$$=\sum_{k=1}^{n}\binom{n}{k}\frac{1}{\binom{n}{k}k!}(-1)^{k+1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k!}(-1)^{k+1}=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{6}-\cdots\xrightarrow[n\to\infty]{}1-\frac{1}{e}$$

6) בבחירות דן קיבל 8 קולות ורמי קיבל 2 קולות. סופרים באקראי את הקולות. מה הסיכוי שרמי הוביל באיזשהו שלב?

- ✓ רמי יכול להוביל אחרי קול 1, אחרי 2 קולות, או אחרי 3 קולות. אמנם אם הוא הוביל אחרי 2 קולות הוא הוביל גם אחרי קול 1. ולכן למעשה הוא יכול להוביל אחרי ה-1 או אחרי ה-3. $P(A_1\cap A_3)=P(A_1)+P(A_3|A_1)=\frac{2}{10}+\frac{\binom{2}{2}}{\binom{10}{2}}$

הסתברות בסיסית

הסתברות מותנה

נרצה לחשב הסתברות בהינתן שמשהו התרחש. נתון מאורע A שידוע שהוא התרחש, מה כעת הסיכויים שמאורע B יתרחש. נסמן זאת בצורה הבאה: $P(B|A)$.

נוסחה להסתברות מותנה (שיעור 2): $\boldsymbol{P(B|A)} = \frac{\boldsymbol{P(A\cap B)}}{\boldsymbol{P(A)}}$. כלומר, מה חלקו של B בעולם של A (לא של Ω).

דוגמאות:

1) מטילים קוביה תקינה. ידוע שהתקבלה תוצאה גדולה מ-3. מהו כעת הסיכוי שהתוצאה זוגית?

- ✓ A – תוצאה גדולה מ-3. B – תוצאה זוגית. $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{2}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{2}{3}$.

2) במשפחה יש שני ילדים. המינים שלהם ב"ת. כל אחד בן בסיכוי חצי.

א) נניח שהראשון הוא בן, מה הסיכוי ששניהם בנים?

- ✓ פתרון א': כעת צריך שהשני יהיה בן, זה לא תלוי בקודם. לכן הסיכוי הוא חצי.
- ✓ פתרון ב': A – הראשון בן, B – שניהם בנים. $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.

ב) נניח שיש לפחות בן אחד, מה הסיכוי ששניהם בנים?

- ✓ A – לפחות בן אחד, B – שניהם בנים. $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{\frac{1}{4}}{\frac{3}{4}} = \frac{1}{3}$.

כלל השרשרת

מהנוסחה של הסתברות מותנה נוכל לגזור את כלל השרשרת. **נתחיל בכלל השרשרת לשני מאורעות**. ראינו ש: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)}$ ולכן נוכל להסיק ש: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)$.

דוגמה: יש לי מטבע וקוביה תקינים. אני בוחר בהם בסיכוי שווה ומטיל את החפץ הנבחר. מה הסיכוי שאקבל תוצאה 5?

- ✓ A – בחרתי בקוביה, B – קיבלתי תוצאה 5. לכן: $P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$. נשים לב שבמקרה פרטי זה מתקיים $P(A\cap B) = P(B)$ (במטבע לא נוכל לקבל תוצאה של 5 – רק אם נקבל קוביה נוכל לקבל תוצאה של 5).

עבור שלושה מאורעות - $P(A\cap B\cap C) = P(A\cap B)\cdot P(C|A\cap B) = P(A)\cdot P(B|A)\cdot P(C|A\cap B)$.

כלל השרשרת ל-n מאורעות (שיעור 2): עבור n מאורעות נגדיר באופן דומה:

$$P\left(\bigcap_{i=1}^{n} A_i\right) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_2\cap A_1)\cdot \ldots$$

דוגמה: יש 4 אנשים. לכל אחד מהם, יש יום הולדת ביום אקראי לחלוטין באופן בלתי-תלוי באחרים. מהי ההסתברות שלכולם יהיה יום הולדת ביום שונה מהאחרים?

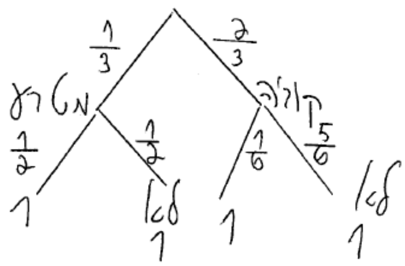
- ✓ דרך א': A_i – המאורע שלאדם i יש יום הולדת בתאריך שונה מכל קודמיו. אנו רוצים לחשב את:

$$P(A_1\cap A_2\cap A_3\cap A_4) = P(A_1)\cdot P(A_2|A_1)\cdot P(A_3|A_1\cap A_2)\cdot P(A_4|A_1\cap A_2\cap A_3) = 1\cdot\frac{364}{365}\cdot\frac{363}{365}\cdot\frac{362}{365}$$

- ✓ דרך ב' (פתרון על סמך החומר הקודם): מרחב המדגם של 4 ימי הולדת ל-4 אנשים הוא $\Omega = 365^4$, $A = \binom{365}{4}\cdot 4!$ ומכפילים כי אנחנו מקפידים על סדר בחירת ארבעת התאריכים.

הסתברות שלמה

<u>דוגמה:</u> אני בוחר במטבע בסיכוי $\frac{1}{3}$ או אלטרנטיבית בקוביה בסיכוי $\frac{2}{3}$. שניהם תקינים. מה הסיכוי שאקבל תוצאה של 1?



- ✓ על פי העץ הסיכוי הוא: $\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{2}+\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{6}$.

<u>נוסחת ההסתברות השלמה (שיעור 2):</u> ננסח באופן כללי את ההסתברות השלמה למספר כלשהו של מאורעות:

$$P(B)=P(A_1)\cdot P(B|A_1)+P(A_2)\cdot P(B|A_2)+\cdots+P(A_n)\cdot P(B|A_n)=\sum_{i=1}^{n}P(A_i)\cdot P(B|A_i)=\sum_{i=1}^{n}P(B\cap A_i)$$

זה נכון כאשר A_i מאורעות זרים שאיחודם הוא Ω. אנו בעצם סוכמים את כל המסלולים האפשריים בעץ, כאשר בכל אחד מהם אנו מחשבים את ההסתברות באמצעות כלל השרשרת.

1) יש לי 4 מטבעות. הראשון נופל על עץ בסיכוי $\frac{1}{4}$, השני בסיכוי $\frac{1}{2}$, השלישי בסיכוי $\frac{3}{4}$ והרביעי בסיכוי 1.

א) אני בוחר באקראי (בסיכוי שווה) באחד המטבעות. מה הסיכוי שבהטלה ראשונה אקבל "עץ"?

- ✓ על פי הסתברות שלמה נחשב: $\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot\frac{1}{2}+\frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 1$

ב) מה הסיכוי שבכל 3 ההטלות הראשונות אקבל "עץ"?

- ✓ נחשב: $\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^3+\frac{1}{4}\cdot 1^3$

ג) מה הסיכוי שב-10 ההטלות הראשונות אקבל 8 "עץ"?

- ✓ אם למשל בחרתי במטבע הראשון אז הסיכוי הוא $\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$. נשים לב שבמקרה זה אנו צריכים לבחור את 8 העצים שנקבל בהטלות ולכן הבחירה בתחילת החישוב.
- ✓ התשובה הכללית היא: $0+\frac{1}{4}\cdot\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^8\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^2+\frac{1}{4}\cdot\binom{10}{8}\cdot\left(\frac{1}{4}\right)^8\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^2$. במקרה האחרון אין אופציה לקבל רק 8 עץ, נקבל בוודאות 10 עץ.

2) יש 2 מטבעות. הראשון נופל על "עץ" בסיכוי $\frac{2}{3}$ והשני בסיכוי $\frac{1}{3}$. בוחרים מביניהם בסיכוי שווה ומבצעים סדרת הטלות. נניח שב-100 ההטלות הראשונות קיבלנו הכול "עץ". מהו בקירוב הסיכוי שבהטלה ה-101 נקבל "עץ"?

- ✓ כיוון שלא נתון באיזה מטבע מדובר, לא ניתן לומר שההטלות הן בלתי-תלויות. אם קיבלנו 100 פעמים "עץ" סביר להניח שמדובר במטבע הראשון.
- ✓ <u>דרך א':</u> נגדיר A – 100 עצים, B – 101 עצים. נחשב:

$$P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}=\frac{P(B)}{P(A)}=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{101}+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{101}}{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{100}}\cong\frac{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{101}}{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{100}}=\frac{2}{3}.$$

- ✓ <u>דרך ב':</u> נגדיר A – 100 עצים, B – 101 עצים, C – בחרנו במטבע הראשון:

$$P(B|A)=P(C|A)\cdot P(B|A\cap C)+P(C^c|A)\cdot P(B|A\cap C^c)=P(C|A)\cdot\frac{2}{3}+P(C^c|A)\cdot\frac{1}{3}\cong 1\cdot\frac{2}{3}+0\cdot\frac{1}{3}=\frac{2}{3}$$

$$P(C|A)=\frac{P(C\cap A)}{P(A)}=\frac{\frac{1}{2}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{100}}{\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{100}+\left(\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{100}}\cong 1$$

הערה שלי – בדרך ב' יש שימוש **בנוסחת ההסתברות השלמה** – ענף אחד הוא שסדר המאורעות הוא $A \to C \to B$ ובענף שני סדר המאורעות הוא $A \to C^C \to B$. כל ענף כזה אנו מחשבים באמצעות **כלל השרשרת**. כל חישוב בשלעצמו הוא באמצעות הסתברות מותנה (כפי שמוגדר בכללים של הסתברות שלמה ושל כלל השרשרת).

נוסחת בייס

כלל בייס (שיעור 2): $P(A|B) = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$.

הוכחה: $P(A|B) = \frac{P(A\cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)}$, על פי כלל השרשרת שכבר ראינו.

1) יש לנו כד עם 5 כדורים כחולים ו-3 ירוקים. יש כד עם 4 כחולים ו-8 ירוקים. בוחרים באקראי בכד, וממנו מוציאים ללא החזרה כדורים. נניח ששני הכדורים הראשונים היו כחולים. A – בחרנו בכד הראשון. B – קיבלנו שני כחולים. C – קיבלנו שלושה כחולים.

א) מה הסיכוי שבחרנו בכד הראשון?

- ✓ לפי כלל בייס: $\frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{5+3}{2}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{5+3}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{4}{2}}{\binom{4+8}{2}}} = \frac{P(A)\cdot P(B|A)}{P(B)} = P(A|B)$. **נשים לב לחישובים באמצעות n-choose-k**: 2 כדורים מתוך 8 כדורים זה מרחב המדגם, אבל אנו בוחרים רק 2 מתוך 5 כחולים.

ב) מה הסיכוי שהכדור השלישי יהיה כחול?

- ✓ לפי כלל בייס: $P(C|B) = \frac{P(B\cap C)}{P(B)} = \frac{P(C)}{P(B)} = \frac{P(A)\cdot P(C|A)+P(A^C)\cdot P(C|A^C)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{5}{3}}{\binom{8}{3}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{4}{3}}{\binom{12}{3}}}{\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{5}{2}}{\binom{8}{2}}+\frac{1}{2}\cdot\frac{\binom{4}{2}}{\binom{12}{2}}}$
- ✓ פתרון בדרך שונה: $P(C|B) = P(A|B)\cdot P(C|A\cap B) + P(A^C|B)\cdot P(C|A^C\cap B) = X\cdot\frac{5-2}{8-2} + X\cdot\frac{4-2}{12-2}$

2) מבצעים 3 הטלות ב"ת של מטבע. A – בהטלה הראשונה והשנייה קיבלנו "עץ". B – בהטלה השנייה והשלישית קיבלנו "עץ". נניח שלמטבע יש סיכוי של p ל-"עץ". עבור אילו ערכי p, A,B הם ב"ת?

- ✓ בדיקה פורמלית: הם ב"ת $\Leftrightarrow P(A\cap B) = P(A)\cdot P(B)$. מתקיים: $P(A) = P(B) = p^2, P(A\cap B) = p^3$. נשים לב כי $p^3 = p^4$ רק אם $p = 0,1$.

כעת נסתכל על מאורעות אחרים. D – שתי ההטלות הראשונות זהות, E – שתי ההטלות האחרונות זהות. עבור אילו ערכי p, D,E הם ב"ת?

- ✓ בדיקה פורמלית: $P(D) = P(E) = p^2 + (1-p)^2$ – או שפעמיים "עץ" או שפעמיים "פלי". $P(D\cap E) = p^3 + (1-p)^3$ – או שהכול "עץ" או שהכול "פלי".
- ✓ מתי $(p^2+(1-p)^2)(p^2+(1-p)^2) = p^3 + (1-p)^3$, כאשר $p = 0,0.5,1$.

3) מבצעים n הטלות ב"ת של מטבע הוגן. מהי ההסתברות שכל תוצאות ה"עץ" יופיעו ברצף אחד?

- ✓ אם הראשון הוא "עץ" אז מותר שיהיו 0 או 1 מהפכים. הסיכוי שהראשון "עץ" הוא 0.5. הסיכוי ל-0 מהפכים הוא 0.5^{n-1} כי יש $n-1$ מעברים. הסיכוי למהפך 1 הוא $\binom{n-1}{1}\cdot 0.5\cdot 0.5^{n-2}$ כי אנחנו בוחרים את המקום של המהפך, פעם אחת מהפך, ועוד $n-2$ פעמים שאין מהפך. סה"כ $0.5(0.5^{n-1} + \binom{n-1}{1}\cdot 0.5\cdot 0.5^{n-2})$.
- ✓ אם הראשון הוא "פלי" אז מותר שיהיו 0 או 1 או 2 מהפכים:

$$0.5\left(0.5^{n-1} + \binom{n-1}{1}\cdot 0.5\cdot 0.5^{n-2} + \binom{n-1}{2}\cdot 0.5^2\cdot 0.5^{n-3}\right)$$

- ✓ סה"כ נסכום את שתי ההסתברויות (לפי הסתברות שלמה) ונקבל את התוצאה הרצויה.

1. בכד שתי קוביות: A קובייה הוגנת ו B המראה 6 בהסתברות 0.5 ואת הספרות $1,2,3$ בהסתברות שווה.

(א) שולפים קוביה מהכד ומטילים אותה. מה ההסתברות לקבל 6?

(ב) קיבלנו 6. מה ההסתברות ששלפנו הקוביה ההוגנת?

פתרון:

נשתמש בנוסחת ההסתברות השלמה כדי לענות על הסעיף הראשון:

$$P(6) = P(6 \mid A)P(A) + P(6 \mid B)P(B) = \frac{1}{6} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

כעת נשתמש בכלל בייס כדי לענות על הסעיף השני:

$$P(A \mid 6) = \frac{P(6 \mid A)P(A)}{P(6)} = \frac{\frac{1}{6} \times \frac{1}{2}}{\frac{1}{3}} = \frac{1}{4}$$

2. לגבי שופט מסויים ידועים הנתונים הבאים:

(א) הסיכוי שאדם העומד לדין ימצא אשם הוא 0.6

(ב) הסיכוי ש"עבריין" (A) ימצא "אשם" (G) הוא 0.8

(ג) הסיכוי ש"חף מפשע" (A^c) ימצא "זכאי" (G^c) הוא 0.9

הגיע אדם למשפט.

(א) מה הסיכוי שהוא עבריין?

(ב) מה הסיכוי שאדם שנמצא אשם יהיה חף מפשע?

(ג) מה הסיכוי שהשופט טועה בפסיקה?

פתרון:

(א) נסמן את ההסתברות שאדם הוא עבריין ב p ונצייר עץ או בעזרת נוסחאת ההסתברות השלמה:

$$P(G) = P(G \mid A)P(A) + P(G \mid A^c)P(A^c) = 0.8p + 0.1(1-p) = 0.6$$

נבודד את p ונקבל $P(A) = p = \frac{5}{7}$.

(ב)

$$P(A^c \mid G) = \frac{P(A^c)P(G \mid A^c)}{P(G)} = \frac{(1-\frac{5}{7}) \times 0.1}{0.6} = \frac{1}{21}$$

(ג)

$$P(G \cap A^c) + P(G^c \cap A) = P(G \mid A^c)P(A^c) + P(G^c \mid A)P(A) =$$

$$0.1 \times \frac{2}{7} + 0.2 \times \frac{5}{7} = \frac{6}{35}$$

1. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין - מועד ב' ספטמבר 2006, שאלה 15:
נתונים שני כדים הממוספרים "1" ו- "2". בכד "1" יש 5 כדורים לבנים ו- 5 כדורים שחורים, ובכד "2" יש 3 כדורים שחורים ו - 3 כדורים לבנים. בוחרים באקראי כדור מכד "1" ומעבירים אותו לכד "2" (נקרא לו "הכדור המועבר"). כעת בוחרים באקראי כדור מכד "2" (נקרא לו "הכדור הזוכה").
בהינתן שצבעו של הכדור הזוכה הוא לבן, מה ההסתברות שהכדור המועבר הוא לבן?
פתרון:
נגדיר את המאורעות הבאים:
A - הכדור המועבר לבן.
B - הכדור הזוכה לבן.

$$P(A \mid B)=\frac{P(A)P(B \mid A)}{P(B)}=\frac{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{7}}{\frac{5}{10}\cdot\frac{4}{7}+\left(1-\frac{5}{10}\right)\cdot\frac{3}{7}}=\frac{4}{7}$$

אי תלות

אי-תלות בזוגות:

אנו אומרים שמאורעות A, B הם בלתי תלויים (ב"ת) אם $\boldsymbol{P(B|A)=P(B)}$. כלומר, למאורע A אין שום השפעה על המאורע B. הסיכוי ש-B יקרה הוא אותו סיכוי בלי שום תלות במאורע A. לכן: $P(B)=P(B|A)=\frac{P(A\cap B)}{P(A)}$. אנו מדברים על תכונה כזאת כאשר ידוע $P(A)>0$. למעשה, **זוג מאורעות הם ב"ת $\Leftrightarrow$ $\boldsymbol{P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)}$**.

אי-תלות כללית:

אנו אומרים שקבוצת מאורעות $\{A_i\}$ היא ב"ת כללית, אם לכל קבוצה חלקית של מאורעות אין השפעה על כל קבוצה חלקית אחרת זרה לה, של מאורעות. כלומר, צריך לבדוק אם מתקיימים קבוצה של שוויונות: $\boldsymbol{P\left(\bigcap_{i\in B}A_i \mid \bigcap_{j\in C}A_j\right)=P\left(\bigcap_{i\in B}A_i\right)}$ **עבור כל B,C זרות**.

דוגמה: לכל אחד מבין יעל, דנה ורועי יש יום הולדת אקראי, באופן ב"ת באחרים. A – ליעל ולדנה יש יום הולדת באותו תאריך. B – ליעל ולרועי יש יום הולדת באותו תאריך. C – לדנה ולרועי יש יום הולדת באותו תאריך. נבדוק האם המאורעות הם ב"ת בזוגות, והאם הם ב"ת באופן כללי.

- ✓ נשים לב כי $P(A)=P(B)=P(C)=\frac{1}{365}$ (אחד מחקה את השני ויש לו את אותו תאריך יום ההולדת).
- ✓ נבדוק בזוגות: $P(A\cap B)=1\cdot\frac{1}{365}\cdot\frac{1}{365}=\frac{1}{365^2}$. וקיבלנו כי $P(A\cap B)=P(A)\cdot P(B)$, לכן **יש אי-תלות בזוגות**.
- ✓ נשים לב כי: $P(A\cap B\cap C)=\frac{1}{365^2}\neq P(A)\cdot P(B)\cdot P(C)$ ולכן **אין אי-תלות באופן כללי**. אפשר גם להסתכל על הדבר הבא: $P(C|A\cap B)=1\neq P(C)$.

הערה: **יכול להיות שמאורעות הם ב"ת כללית, אבל תלויים בזוגות? לא!** כיוון שבאי-תלות כללית עוברים על כל תתי הקבוצות.

4. הוכיחו או הפריכו: אם A, B מאורעות בלתי תלויים בעלי הסתברויות חיוביות, אז הם אינם זרים.
פתרון:
נתון שהמאורעות בעלי הסתברויות חיוביות, לכן $P(A)P(B)>0$, בנוסף נתון שהם בלתי תלויים, לכן $P(A)P(B)=P(A\cap B)$. מסקנה - ההסתברות של החיתוך גדולה מ 0 ולכן הוא איננו ריק, כלומר המאורעות אינם זרים.
לסיכום: מאורעות ב"ת בעלי הסתברות חיובית אינם זרים. טענה שקולה: מאורעות זרים בעלי הסתברות חיובית הם מאורעות תלויים.

3. בכד שני מטבעות - אחד הוגן ואחד מקבל "עץ" בהסתברות 0.7. מוציאים מטבע מהכד באקראי, ומטילים אותו פעמיים. נגדיר את המאורעות:
A- התקבל "עץ" בהטלה הראשונה.
B- התקבל "עץ" בהטלה השניה.
האם המאורעות בלתי תלויים?

פתרון:

המאורעות תלויים. נחשב:

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times 0.7 = 0.6$$

לכן

$$P(A)P(B) = 0.36.$$

מצד שני:

$$P(A \cap B) = P(A \cap B \mid 1 \text{ coin})P(1 \text{ coin}) + P(A \cap B \mid 2 \text{ coin})P(2 \text{ coin}) =$$
$$\frac{1}{2} \times (\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} \times (0.7 \times 0.7) = 0.37.$$

אינטואיטיבית, המאורעות תלויים בגלל שאם מקבלים "עץ" בהטלה הראשונה, יותר סביר ששלפנו את המטבע המזוייף, ולכן יש סיכוי גבוה יותר לקבל "עץ" בהטלה הבאה.

הסתברות בסיסית - סוגיות

1) לליאת יש ארון שבו 10 מגירות. היא מאמינה בסיכוי של 0.9 שהמפתח נמצא באחת המגירות, ובסיכוי שווה ביניהן. המפתח לא נמצא ב-9 המגירות הראשונות. מהו כעת הסיכוי שהוא במגירה העשירית?

- ✓ A – לא ב-9 הראשונות, B – בעשירית. $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{0.9\cdot 0.1}{1-0.9\cdot 0.9}$. כאן חישבנו את $P(A)$ באמצעות משלים.
אפשר גם לומר שאם הוא לא ב-9 הראשונות הוא: או בחוץ, או ב-10 ולכן: $P(B|A) = \frac{0.9\cdot 0.1}{0.1+0.9\cdot 0.1} = \frac{0.9}{0.19} = \frac{9}{19}$.

<u>טענה (שיעור 3):</u> אם מטילים n מטבעות הטלות ב"ת, וידוע שלפחות אחד המטבעות הוא הוגן אז סכום ה"עצים" **זוגי** בסיכוי 0.5.

- ✓ B – סכום ה"עצים" זוגי. A – סכום יתר המטבעות להוציא המטבע המיוחד (אחד ההוגנים), הוא זוגי.
- ✓ $P(B) = P(A \cap \text{המיוחד כישלון}) + P(A^C \cap \text{המיוחד הצלחה}) = P(A)\cdot P(\text{כישלון}) + P(A^C)\cdot P(\text{הצלחה}) =$
$= P(A)\cdot 0.5 + P(A^C)\cdot 0.5 = 0.5(P(A) + P(A^C)) = 0.5$
- ✓ **בכל מצב של היתר, המטבע המיוחד (ההוגן) מאזן אותנו לסכום זוגי בסיכוי 0.5.**

2) בכד יש 8 כדורים אדומים, 6 כחולים, ו-5 ירוקים. אני מוציא מהכד כדורים עם החזרה. מה הסיכוי שהראשון שאינו אדום הוא כחול? (שיצא כחול לפני ירוק)

- ✓ דרך א: כיוון שהוא אינו אדום, הסיכוי יחושב מתוך כחולים ועוד ירוקים, ולכן $\frac{6}{11} = \frac{6}{6+5}$
- ✓ דרך ב: $P = \sum_{n=1}^{\infty} P(n-1 \text{ אדומים תחילה}) \cdot P(n \text{ כחול בשלב}) = \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{8}{8+6+5}\right)^{n-1} \cdot \frac{6}{8+6+5}$. כיוון שאלו כל האפשרויות שיהיה רצף של אדומים ואז כחול (הראשון שאינו אדום).
- ✓ דרך ג: יהי a – הסיכוי המבוקש. $a = P(\text{ראשון ירוק})\cdot 0 + P(\text{ראשון כחול})\cdot 1 + P(\text{ראשון אדום})\cdot a$. אם הראשון ירוק הפסדנו, אם הוא כחול ניצחנו, ואם הוא אדום כיוון שאנחנו מחזירים את הכדור מדובר באותו הסיכוי a. לכן:

$$a = \frac{6}{8+6+5} + \frac{8}{8+6+5}\cdot a$$

2. שלדון רוס, פרק 3 עמ' 96.
בניסוי רב שלבי מטילים שוב ושוב זוג קוביות ומביטים **בסכום** התוצאות. מה ההסתברות לקבל 5 לפני שנקבל 7.
פתרון:
לכל n נגדיר E_n בתור המאורע "הסכומים 5 ו - 7 אינם מתקבלים ב $n-1$ הניסויים הראשונים, והסכום 5 מתקבל בניסוי ה n". זאת סידרה של מאורעות זרים. לכן ההסתברות המבוקשת היא:

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} P(E_n)$$

ההסתברות לקבל סכום 5 בהטלה כלשהי היא $\frac{4}{36}$ וההסתברות לקבל סכום 7 בהטלה כלשהי היא $\frac{6}{36}$. מכיון שהניסויים ב"ת זה בזה מקבלים:

$$P(E_n) = \left(1-\frac{10}{36}\right)^{n-1}\frac{4}{36} = \left(\frac{13}{18}\right)^{n-1}\frac{1}{9}$$

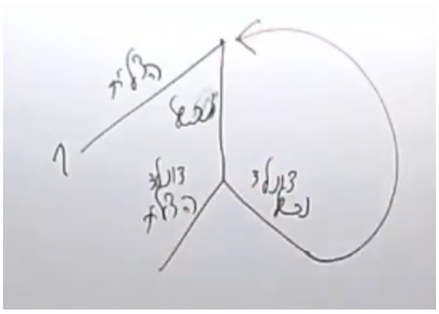
$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n\right) = \frac{1}{9}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{13}{18}\right)^{n-1} = \frac{1}{9}\frac{1}{1-\frac{13}{18}} = \frac{2}{5}$$

ניתן לקבל פתרון זה בדרך נוספת (רקורסיבית). נסמן את ההסתברות של המאורע הרצוי ב p. אז מתקיים:

$$p = \frac{4}{36}\times 1 + \frac{26}{36}\times p + \frac{6}{36}\times 0$$

למעשה אנחנו מתנים בסכום הראשון שהתקבל: אם התקבל 5 - המאורע יקרה בוודאות (הסתברות 1), אם התקבל 7 - המאורע לא יקרה (הסתברות 0), אם התקבל כל סכום שאינו 5 או 7 - אז מכיוון שלניסוי הראשון אין השפעה על הניסוי השני (אי תלות) ההסתברות לקבל 5 נשארת זהה (p).

דרך נוספת: מתוך 36 התוצאות האפשריות, אנו מעוניינים רק ב 10 - 4 תוצאות הנותנות סכום 5 ו - 6 תוצאות הנותנות סכום 7. כל 10 התוצאות הן שוות הסתברות (ולמעשה כל התוצאות הן שוות הסתברות - מרחב מדגם סימטרי), לכן ההסתברות שאחת מתוך 4 התוצאות הנותנות סכום 5 תתקבל ראשונה (מבין 10 התוצאות האפשריות) היא $\frac{4}{10}$.



3) קים ודונלד מנהלים דו-קרב. בכל שלב תורו של אחד מהם לנסות לפגוע באחר. בכל ניסיון יש ליורה סיכוי שלא תלוי בניסיונות האחרים. לקים יש סיכוי של $\frac{1}{4}$ בכל ניסוי, לדונלד יש סיכוי של $\frac{1}{3}$. ידוע שקים מתחיל בניסיונות. מה הסיכוי של קים לנצח?

- ✓ דרך א: $\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4}+\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{4} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{4}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^n = \frac{\frac{1}{4}}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}$.
- ✓ דרך ב: a – סיכוי של קים לנצח: $a = \frac{1}{4}\cdot 1 + \frac{3}{4}(\frac{1}{3}\cdot 0 + \frac{2}{3}\cdot a)$. קיבלנו משוואה שמתארת את התהליך שקורה כאן. תוך שני צעדים או שנפלה הכרעה, או שאנו חוזרים ויש סיכוי שוב.

4) שתי קבוצות כדורסל. הראשונה קולעת בסיכוי גבוה יותר במחצית הראשונה, וגם קולעת בסיכוי גבוה יותר במחצית השנייה. האם בהכרח היא קולעת בסה"כ (בשתי המחציות) באחוזים גבוהים יותר?

- ✓ ניתן דוגמה מפריכה. נניח שהקבוצה הראשונה קולעת במחצית הראשונה בסיכוי 0.15 והשנייה בסיכוי 0.1. נניח שבמחצית השנייה, הראשונה קולעת בסיכוי 0.9 והשנייה בסיכוי 0.8.
- ✓ נניח שהראשונה מבצעת את 0.9 מהזריקות במחצית הראשונה, והשנייה את 0.9 מהזריקות במחצית השנייה.
- ✓ A – סיכוי של ראשונה לקלוע: $P(A) = 0.9\cdot 0.15 + 0.1\cdot 0.9 = 0.9\cdot 0.25$.
- ✓ B – סיכוי של שנייה לקלוע: $P(B) = 0.1\cdot 0.1 + 0.9\cdot 0.8 > P(A)$.

5) **(תשפ"ג שיעור 9 בסוף)** יעל מטילה 101 פעמים מטבע הוגן. דנה מטילה 100 פעמים מטבע הוגן. ידוע שכל 201 ההטלות הן ב"ת. מה הסיכוי שיעל תקבל יותר "עצים" מדנה?

- ✓ A – ב-100 ההטלות הראשונות של יעל, היא קיבלה יותר "עצים" מדנה. B – ב-100 ההטלות של דנה היא קיבלה יותר מאשר ב-100 ההטלות הראשונות של יעל.
- ✓ $P(A) = P(B)$ כי זה סימטרי לחלוטין. אם מתקיים A אז בוודאות היא תקבל יותר מיעל, אם מתקיים B אז בוודאות יעל לא תקבל יותר מדנה, ואם יש שוויון אז הסיכוי שיעל תקבל יותר מדנה הוא חצי.
- ✓ סה"כ: $P(A)\cdot 1 + P(B)\cdot 0 + \big(1 - P(A) - P(B)\big)\cdot 0.5 = P(A) + 0.5 - 0.5P(A) - 0.5P(B) = 0.5$.

6) זוג תאומים הם זהים בסיכוי חצי, ואינם זהים בסיכוי חצי. זוג תאומים זהים הם זוג בנים בסיכוי חצי, וזוג בנות בסיכוי חצי. זוג תאומים לא זהים, המינים שלהם הם ב"ת. גלעד ואופיר הם זוג תאומים בנים. מה הסיכוי שהם זהים?

- ✓ A – שניהם בנים, B – הם זהים. $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)\cdot P(A|B)}{P(B)\cdot P(A|B)+P(B^C)\cdot P(A|B^C)} = \frac{0.5\cdot 0.5}{0.5\cdot 0.5+0.5\cdot 0.25} = \frac{2}{3}$.
  כאן השתמשנו בעובדה ש-$P(A|B^C)$ היא רבע במקרה זה, שראינו כבר בעבר.

<u>סוגיה על ספירת קולות בבחירות:</u> בבחירות קיבל מועמד א' a קולות, ומועמד ב' b קולות. $a > b$. סופרים את הקולות באופן אקראי לחלוטין כך שכל הסדרים הם שווי הסתברות.

א) מה הסיכוי שמועמד א' יוביל (ממש) לאורך כל ספירת הקולות? **או** מה **הסיכוי המשלים** שיש לפחות נקודת שוויון אחת?

- ✓ נחשב את הסיכוי שיש לפחות נקודת שוויון אחת. נסמן את המאורע הזה ב-D.
- ✓ $P(D) = P\big(D \cap \text{קול ראשון א}\big) + P\big(D \cap \text{קול ראשון ב}\big) = P\big(\text{קול ראשון ב}\big) = \frac{2b}{a+b}$
- ✓ $P\big(D \cap \text{קול ראשון א}\big) = P(D)\cdot P\big(\text{קול ראשון א}\big|D\big) = P(D)\cdot\frac{1}{2}$ - מכלל השרשרת
- ✓ $P\big(D \cap \text{קול ראשון ב}\big) = P(D)\cdot P\big(\text{קול ראשון ב}\big|D\big) = P(D)\cdot\frac{1}{2}$ - מכלל השרשרת
- ✓ $P\big(D \cap \text{קול ראשון ב}\big) = P\big(\text{קול ראשון ב}\big) = \frac{b}{a+b}$ – אם את הקול הראשון קיבל ב' יש נקודת שוויון

סה"כ ההסתברות הרצויה היא $\boldsymbol{\frac{a-b}{a+b}} = 1 - \frac{2b}{a+b}$.

ב) מה הסיכוי שמועמד א' לא יהיה בפיגור בשום שלב? (הובלה/שוויון). נעבור לבעיה דומה שבה א' קיבל $a+1$ קולות ומועמד ב' קיבל b קולות. בבעיה זו מועמד א' תמיד מוביל (לא היה שוויון) בסיכוי $\frac{a+1-b}{a+1+b}$ – הצבה של $a+1$ בהסתברות של סעיף א'.

- ✓ $\frac{a+1}{a+1+b}\cdot p = \frac{a+1-b}{a+1+b}$, אחרי שנספר הקול הראשון (שחייב לקבל מועמד א' אחרת הוא ישר בפיגור), שאר הקולות מעורבבים אקראית ולכן נסמן ב-p את ההסתברות הרצויה (לא להיות בפיגור).
- ✓ נקבל $p = \frac{a+1-b}{a+1}$.

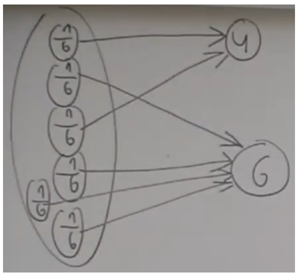
2 – משתנים מקריים

משתנים מקריים

משתנים מקריים בדידים

משתנה מקרי: אנו מתרגמים כל נקודה במרחב המדגם לערך מספרי. **משתנה מקרי הוא פונקציה ממרחב המדגם, אל אוסף הערכים האפשריים**. כל ערך מתקבל בהסתברות ששווה לסכום ההסתברויות של הנקודות שמופנות אליו. למשתנים המקריים נקרא X,Y ולערכים השונים שהם מקבלים נשתמש באותיות קטנות: $P(X=x)=\cdots$.

פונקציית הסתברות: הרשימה של ההסתברויות עבור הערכים השונים, היא **פונקציית ההסתברות – מתאימה לכל ערך אפשרי את ההסתברות שלו**. לפעמים נותנים רשימה מלאה, ולפעמים נותנים ביטויים כלליים כמו $P(X=x)=0.5^x$ עבור כל x טבעי. פונקציה זו נקראת גם פונקציית ההתפלגות.



סוגיה: נתון משתנה מקרי X המקיים $P(X=6)=\frac{2}{3}, P(X=4)=\frac{1}{3}$. נתון מרחב מדגם של 6 נקודות בעלות הסתברות $\frac{1}{6}$. בכמה דרכים ניתן לממש את המשתנה באמצעות מרחב מדגם זה?

- אנו צריכים לבחור 2 חיצים שיופנו לערך 4, ו-4 חיצים שיופנו לערך 6 כדי שההסתברות הרצויה תתקבל. יש לכך $\binom{6}{4}$ אפשרויות לבחור אילו חיצים יופנו ל-6.

סוגיה: נניח שיש מרחב מדגם שבו אינסוף נקודות. לנקודה ה-i יש הסתברות 0.5^i. בכמה דרכים ניתן לממש משתנה שמקיים:

$$P(X=7)=0.5, P(X=1)=0.5$$

או שאפנה את הנקודה שלה הסתברות 0.5 ל-7 ואת היתר ל-1, או להפך.

משתנה מנוון: משתנה שמקבל רק **ערך אחד מסוים** (כל ערך ממשי, זהו הפרמטר שלו). את הערך הזה, הוא מקבל בהסתברות 1. למשל: מספר הראשים של אדם הוא משתנה מנוון שמקבל רק את הערך 1: $P(X=1)=1$.

2. מערבבים היטב חפיסת קלפים סטנדרטית, והופכים קלפים עד שמקבלים לב בפעם הראשונה. יהי X משתנה מקרי הסופר את הקלפים שהפכנו. כיצד מתפלג X?

פתרון:

למעשה אין חשיבות למספרים שעל הקלפים, אלא רק לצורות. לפי הגישה הזו גודל מרחב המדגם הוא $\binom{52}{13}$ (בחירת מקומות ללבבות) וגודל המאורע $X=k$ הינו $\binom{52-k}{12}$ (יש לב במקום ה - k וצריך למקם את 12 הלבבות הנותרים ב - $52-k$ המקומות שאחרי הלב הנ"ל).

משפחות של התפלגויות

יש משפחות של משתנים. בכל משפחה יש מאפיינים ידועים. כדי לזהות בדיוק את המשתנה, צריך רק להגיד מהם הפרמטרים של המשתנה.

משפחה	הגדרה	פונקציה
משתנה אחיד-בדיד $X\sim U[a,b]$	משתנה מקרי נקרא אחיד בדיד, אם הוא מקבל **בסיכוי שווה את כל אחד מהערכים השלמים שבין a ל-b**. הפרמטרים הם a ו-b, זוג שלמים.	$P(X=k)=\frac{1}{b-a+1}$ $k\in\mathbb{Z}, a\le k\le b$
משתנה אינדיקטורי/ברנולי $X\sim B(p)$	**משתנה שמסמן הצלחה או כישלון**. הוא מקבל את הערכים 1 עבור הצלחה בסיכוי p, ו-0 עבור כישלון.	$P(X=1)=p$ $P(X=0)=1-p$ $0<p<1$

- זוג משתנים מקריים הם **שווים**, אם בהכרח הם מקבלים את **אותו הערך**.
- זוג משתנים מקריים הם **שווי התפלגות** אם יש להם את **אותה פונקציית ההסתברות**, למשל $X\sim U[0,1]$, $Y=1-X$. הם שווי התפלגות אבל לא שווים.

שאלה: נתון $X\sim U[1,8]$. מהו $P(X\le 5)$? נחשב: $P(X\le 5)=P(X=1)+P(X=2)+\cdots+P(X=5)=\frac{5-1+1}{8-1+1}=\frac{5}{8}$.

מימוש משתנה אינדיקטור באמצעות סדרת הטלות של מטבע (שיעור 5 תשפ"ג):

נתון מטבע שנופל על "עץ" בסיכוי $\frac{1}{3}$. אפשר לבצע בו סדרה של הטלות ב"ת. האם בעזרת 5 הטלות ניתן לממש בעזרתו משתנה אינדיקטורי בעל הסתברות $\frac{1}{2}$?

- ✓ לא. ב-5 הטלות של מטבע כזה, יש מרחב מדגם שלכל נקודה שבו יש הסתברות שהיא $\frac{x}{243}=\frac{x}{3^5}$ עבור x שלם כלשהו. לא ניתן לחלק מרחב מדגם זה ל-2 חלקים שווים.

אמנם, נראה שניתן לממש את האינדיקטור בעזרת **סדרה שאורכה לא חסום מראש**. אבל הוא בכל מקרה סופי.

- ✓ בכל שלב נטיל שני מטבעות. עד השלב שבשתי ההטלות יהיו תוצאות שונות. בכל פעם התוצאות זהות בסיכוי $\frac{5}{9}=\frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}+\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}$. זה יכול לקרות כל מספר סופי של פעמים, אבל בסופו של דבר לא יהיה שוויון בתוצאת ההטלות (כי משתנה גיאומטרי מקבל בהכרח ערך סופי – כתוב בהמשך).
- ✓ ברגע שנפלה הכרעה (בפעם הראשונה שאין שוויון), **אם זה פלי-עץ נגיד כישלון. אם זה עץ-פלי נגיד הצלחה**. שניהם קורים בסיכוי שווה: $\frac{1}{3}\cdot\frac{2}{3}=\frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3}$, לכן קיבלנו אינדיקטור בעל סיכוי $\frac{1}{2}$.

משתנה בינומי $X\sim Bin(n,p)$	משתנה זה סופר את **מספר ההצלחות ב-n ניסויי ברנולי ב"ת שלכל אחד מהם יש סיכוי p**, כלומר הוא סכום של n משתני ברנולי ב"ת. אם $n=1$ מדובר במקרה פרטי שהוא משתנה ברנולי. טווח הערכים של המשתנה הם כל השלמים שבין 0 ל-n.	$P(X=x)=\binom{n}{x}\cdot p^x\cdot(1-p)^{n-x}$ $P(X=n)=p^n$ $P(X=0)=(1-p)^n=q^n$

שאלה: נתון $X\sim Bin\left(100,\frac{1}{3}\right)$. מהו $P(X\le 97)$? נחשב:

$$P(X\le 97)=1-P(X>97)=1-P(X\ge 98)=1-\left(\frac{1}{3}\right)^{100}-\binom{100}{99}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{99}\cdot\frac{2}{3}-\binom{100}{98}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^{98}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{2}$$

מימוש משתנה בינומי באמצעות הוצאת כדורים: אנו מדברים על הוצאה **עם החזרה**, כי מדובר בניסיונות ב"ת.
איך נממש משתנה למשל $Bin(10,\frac{3}{7})$? נסתכל על **כד שבו 3 כדורים כחולים** ו-4 כדורים ירוקים. **נוציא מהכד 10 כדורים** עם החזרה, ונספור את **מספר הכחולים** שביניהם. לכל הוצאה של כדור כחול יש הסתברות $\frac{3}{3+4}$ ויש 10 ניסיונות. נותר להכפיל במספר האפשרויות לבחור 3 פעמים שנוציא כדור כחול - $\binom{10}{3}$.

נשים לב: **אם p הוא לא מספר רציונלי**, אז לא קיים הרכב של כד שבו פרופורציית הכדורים הכחולים היא בדיוק p, למשל $\frac{1}{\sqrt{2}}$.

מקרה מיוחד – משתנה בינומי כסכום של אינדיקטורים תלויים (שיעור 4): נתונים אינדיקטורים X,Y,Z. שלושתם כישלון בסיכוי $\frac{1}{8}$. שלושתם הצלחה בסיכוי $\frac{1}{8}$. בסיכוי $\frac{3}{8}$ רק X הצלחה. בסיכוי $\frac{3}{8}$ רק Y ו-Z הם הצלחה. נקבל כי כל אחד מהם הוא אינדיקטור בסיכוי $\frac{1}{2}$.

- $P(Y=1)=0.5$, $P(Y=1|X=1)=\frac{P(X=1,Y=1)}{P(X=1)}=\frac{\frac{1}{8}}{\frac{4}{8}}=\frac{1}{4}\neq P(Y=1)$.
- $P(X=1,Y=1)=\frac{1}{8}\neq P(X=1)\cdot P(Y=1)$.

נסתכל על התפלגות הסכום של המשתנים הללו:

- $P(X+Y+Z=0)=\frac{1}{8}$, $P(X+Y+Z=1)=\frac{3}{8}$, $P(X+Y+Z=2)=\frac{3}{8}$, $P(X+Y+Z=3)=\frac{1}{8}$.
- לגבי משתנה $W\sim Bin(3,0.5)$ מתקיים: $P(W=1)=3\cdot 0.5\cdot 0.5^2=\frac{3}{8}$, $P(W=0)=0.5^3=\frac{1}{8}$.
- מדובר באינדיקטורים תלויים שהסכום שלהם מתפלג בינומית!

משתנה היפרגאומטרי $X \sim HG(n;a,b)$	משתנה סופר את **מספר הכדורים הכחולים המתקבלים ב-n הוצאות**, **ללא החזרה**, מכד שבו יש a כדורים כחולים ו-b כדורים ירוקים. כן **הניסיונות הם תלויים**. אילוצים: $0 \le k \le n, 0 \le k \le a, 0 \le n-k \le b$	$P(X=k) = \frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}$

<u>מימוש משתנים היפרגאומטריים:</u>

- ✓ האם משתנה היפרגאומטרי יכול להיות משתנה בינומי? רק אם יש הוצאה אחת, כי כך אין חשיבות לתלות.
- ✓ האם משתנה היפרגאומטרי יכול להיות מנוון? אם $b=0$ כי אז אין בכלל הוצאה של כדורים. או אם מוציאים את כל הכדורים.

<u>שאלה:</u> מוציאים 5 כדורים ללא החזרה מכד שבו 8 כחולים, 6 ירוקים ו-4 אדומים. איך מתפלג מספר הכדורים שהם ירוקים או אדומים? $X \sim HG(5;10,8)$.

1. בבריכה 5 דגי זהב ו - 15 קרפיונים. דייג דג 6 דגים ללא החזרה. יהי X מספר דגי הזהב שהדייג דג, Y מספר דגי הזהב שנשארו בבריכה.

(א) כיצד מתפלג X?

(ב) כיצד מתפלג Y?

(ג) כיצד מתפלג $X+Y$?

(ד) נניח שלאחר כל פעם שהדייג תופס דג, הוא משחרר אותו, איך מתפלג X?

פתרון:

(א) $X \sim HG(n=6, a=5, b=15)$

(ב) $Y \sim HG(n=14, a=5, b=15)$

(ג) נשים לב ש $Y=5-X$. לכן $X+Y=5$ הוא מספר קבוע (משתנה מקרי מנוון)

(ד) $X \sim Bin(6, \frac{5}{20})$ (הוצאה עם החזרה)

<u>מספר ניסיונות עד קבלת n הצלחות:</u>

המשותף למשתנים מקריים בינומי והיפרגאומטרי הוא ששניהם סופרים מספר הצלחות במספר נתון של ניסיונות. כעת נעבור למשפחות של משתנים שסופרים את מספר הניסיונות עד קבלת מספר קבוע n של הצלחות.

משתנה גיאומטרי $X \sim G(p)$	מבצעים סדרה של **ניסיונות ב"ת** שלכל אחד מהם יש הסתברות p, ו**מחכים עד קבלת ההצלחה הראשונה**. טווח הערכים: $1 \le k \le \infty$	$P(X=k) = (1-p)^{k-1} \cdot p$ $= q^{k-1} \cdot p$

<u>שאלה:</u> נתון $X \sim G(p)$. מהו $P(X \le 20)$?

- ✓ דרך א: $P(X \le 20) = p + pq + pq^2 + \cdots + pq^{20-1}$.
- ✓ דרך ב: $P(X \le 20) = 1 - P(X > 20) = 1 - (pq^{20} + pq^{21} + \cdots) = 1 - \frac{pq^{20}}{1-q} = 1 - \frac{pq^{20}}{p} = 1 - q^{20}$.
- ✓ דרך ג: כדי לקבל ערך גדול מ-20 דרושים 20 כישלונות בהתחלה וזה קורה בסיכוי q^{20}. לכן $P(X \le 20) = 1 - q^{20}$.

<u>חוסר זיכרון של התפלגות גיאומטרית (שיעור 3):</u> אם $X \sim G(p)$ אז $P(X > x+a | X > a) = P(X > x)$.
כלומר, אם נכשלנו a פעמים, אז מספר הניסיונות שצריך לעשות לאחר הניסוי ה-a הוא שוב בעל ההתפלגות הגאומטרית המקורית. **כישלון במספר פעמים לא משפיע על סיכוי ההצלחה בהמשך**.

הסבר: $P(X > x+a | X > a) = \frac{P(X>x+a, X>a)}{P(X>a)} = \frac{P(X>x+a)}{P(X>a)} = \frac{q^{x+a}}{q^a} = q^x = P(X > x)$.

<u>משתנה גיאומטרי מקבל בהכרח ערך סופי (שיעור 4):</u>

- ✓ גישה ראשונה: $P(X=k) = p \cdot q^{k-1}$. נסכם את ההסתברויות על פני כל הערכים הסופיים. $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k) = \sum_{k=1}^{\infty} p \cdot q^{k-1} = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$. קיבלנו כי סכום ההסתברויות הוא 1.
- ✓ גישה שנייה: לכל n, הסיכוי שאקבל יותר מ-n ניסיונות הוא q^n. עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים n כך ש-$q^n < \varepsilon$. לכן, הסיכוי שנעשה יותר מ-n ניסיונות לכל n קטן מכל קבוע חיובי ולכן שווה לאפס: **רק בסיכוי 0 לא תהיה הכרעה אף פעם**. **יש הסתברות 1 שבשלב כלשהו תהיה הצלחה**.

3. בכד עשרה כדורים, אחד לבן והשאר שחורים. בכל סיבוב מוציאים כדור, עד שיוצא כדור לבן. נסמן ב X את מספר הסיבוב שבו הסתיים הניסוי. כיצד מתפלג X כאשר:

(א) מוציאים ומחזירים.

(ב) מוציאים ולא מחזירים.

(ג) מוציאים ומחזירים, אבל ידוע שלא ביצענו יותר מ 20 ניסויים.

(ד) מוציאים ומחזירים, אבל מפסיקים לנסות אחרי 20 ניסויים.

פתרון:

(א) התפלגות גיאומטרית. בכל שלב הסיכוי להצלחה הוא $\frac{1}{10}$, ואז $X \sim G(\frac{1}{10})$.

(ב) נדמיין שהכדורים מסודרים בשורה, ומוציאים אותם מימין לשמאל. משיקולי סימטריה, הסיכוי שהכדור הלבן במקום ה i הוא שווה לכל i, ולכן שווה ל$\frac{1}{10}$. לכן מדובר בהתפלגות אחידה $U[1,10]$.
ניתן לקבל אינטואיציה לכך על ידי חישוב ישיר של ההסתברות עבור כמה מקרים :

$$P(X=1)=\frac{1}{10}$$

$$P(X=2)=\frac{9}{10}\cdot\frac{1}{9}=\frac{1}{10}$$

$$P(X=3)=\frac{9}{10}\cdot\frac{8}{9}\cdot\frac{1}{8}=\frac{1}{10}$$

כעת ניתן להמשיך באינדוקציה. לא נעשה זאת אלא נסתפק בטיעון הסימטריה.

(ג) אפשר לנסח את השאלה כך: נגדיר את Y להיות מספר הנסיונות ללא כל התניה . אז $Y \sim G(\frac{1}{10})$ כפי שמצאנו בסעיף הראשון. בסעיף זה מבקשים מאיתנו למצוא את ההתפלגות של מ"מ X המקיים $X = Y \mid Y \leq 20$
עבור $k > 20$ ההסתברות $P\left(X=k\right)$ היא 0, ועבור $k \leq 20$ נחשב:

$$P\left(X=k\right)=\left(P(Y=k\mid Y\leq 20\right)=\frac{P(Y=k\cap Y\leq 20)}{P(Y\leq 20)}=\frac{P(Y=k)}{1-P(Y>20)}=\frac{(\frac{9}{10})^{k-1}\frac{1}{10}}{1-(\frac{9}{10})^{20}}$$

משתנה בינומי שלילי $X \sim NB(n,p)$	מבצעים סדרה של ניסיונות ב"ת שלכל אחד מהם יש הסתברות p. סופרים את **מספר הניסיונות עד קבלת n הצלחות**. טווח הערכים: $n \leq k \leq \infty$, חייבים להיות לפחות n ניסיונות. מבין $k-1$ הניסיונות הראשונים צריכים להיות $n-1$ הצלחות. האחרון חייב להיות הצלחה.	$P(X=k)=\binom{k-1}{n-1}p^n\cdot q^{k-n}$

דוגמאות:

1) מטילים הטלות ב"ת של קוביה תקינה, עד שמקבלים 8 פעמים 6. מהי ההסתברות שנטיל את הקובייה 20 פעמים?

$$P(X=20)=\binom{20-1}{8-1}p^8\cdot(1-p)^{12}$$

2) יהי $X \sim NB(3,\frac{1}{5})$. מהו $P(X\geq 100)$?

✓ המאורע $X \geq 100$ שקול למאורע שב-99 הניסיונות הראשונים קיבלנו לכל היותר 2 הצלחות (כי אז מספר הניסיונות שלנו הוא לפחות 100 כדי לנסות לקבל את ההצלחה ה-3). כלומר $Y=2$ כאשר $Y \sim Bin(99,\frac{1}{5})$. נחשב:

$$P(0\ successes)+P(1s)+P(2s)=\left(1-\frac{1}{5}\right)^{99}+\binom{99}{1}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)^{98}+\binom{99}{2}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)^{97}$$

3) נתון כד שבו 7 כדורים כחולים ו-3 כדורים ירוקים. מוצאים בלי החזרה כדורים מהכד עד שמקבלים כדור ירוק. מהי התפלגות מספר הכדורים שנוציא?

- ✓ X – מספר הכדורים. אם ההוצאות היו עם החזרה – זה היה ב"ת וזו הייתה **התפלגות גיאומטרית**. אך זה לא המצב.
- ✓ נכתוב: $P(X=k)=\frac{\binom{7}{k-1}}{\binom{7+3}{k-1}}\cdot\frac{\binom{3}{1}}{\binom{10-(k-1)}{1}}$. בשלב ראשון נוציא $k-1$ כדורים שהם רק כחולים, ולא נוציא אף ירוק. ואז מגיע שלב ההכרעה, שבו נוציא כדור ירוק (יש 3 אפשרויות), מתוך הכדורים שנשארו (הוצאנו כבר $k-1$). עד ההצלחה אנו צריכים רק כישלונות, וההצלחה קוטעת את סדרת הניסיונות.

4) הילוך מקרי (שיעור 4 תשפ"ג) – נרצה להראות כי $\lim_{n\infty}\binom{2n}{n}\cdot 0.5^{2n}=0$ (הסיכוי שנלך בדיוק n צעדים ימינה, וכתוצאה מכך n צעדים שמאלה ונחזור לראשית), בעזרת נוסחת סטרלינג: $n!\sim\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n$.

$$\binom{2n}{n}\cdot 0.5^{2n}=\frac{2n!}{n!\,n!}\cdot 0.5^{2n}\sim\frac{\sqrt{2\pi 2n}\cdot\left(\frac{2n}{e}\right)^{2n}}{\left(\sqrt{2\pi n}\cdot\left(\frac{n}{e}\right)^n\right)^2}\cdot 0.5^{2n}\approx\frac{\sqrt{2\pi n}}{2\pi n}=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$$

משתנה בינומי שלילי הינו סכום של משתנים גאומטריים ב"ת (שיעור 4): משתנה $NB(n,p)$ הוא סכום של n משתנים גיאומטריים ב"ת שכל אחד מהם הוא $G(p)$ – **כלומר שווי התפלגות**.

דוגמה: איך מתפלג מספר הטלות קוביה, עד שנקבל פעמיים תוצאת 6? $NB(2,\frac{1}{6})$. זה גם הסכום של שני משתנים $G(\frac{1}{6})$ ב"ת. כי הזמן עד הצלחה אחת מתפלג $G(\frac{1}{6})$ ואחריה מחכים להצלחה נוספת שזמנה מתפלג $G(\frac{1}{6})$.

קירובים והתפלגות פואסונית

קירוב משתנים HG על ידי משתנים בינומיים (שיעור 4): יהי $X\sim HG(n;a,b)$, אם a ו- b הם גדולים ו-n הוא קטן, אז ניתן לקרב את פונקציית ההסתברות של X על ידי פונקציית ההסתברות של Y כאשר $Y\sim Bin(n,\frac{a}{a+b})$.

כלומר, הניסיונות הם כמעט ב"ת, ההשפעה היא קטנה.

הסבר: $P(X=k)=\frac{\binom{a}{k}\binom{b}{n-k}}{\binom{a+b}{n}}=\frac{\frac{a!}{k!(a-k)!}\cdot\frac{b!}{(n-k)!(b-(n-k))!}}{\frac{(a+b)!}{n!(a+b-n)!}}\cong\frac{n!}{k!(n-k)!}\cdot\frac{a^k\cdot b^{n-k}}{(a+b)^n}=\binom{n}{k}\cdot\frac{a}{(a+b)^k}\cdot\frac{b}{(a+b)^{n-k}}$.

זה נובע מכך ש: $\lim_{a\to\infty,k\text{ is constant}}\frac{a}{a-k}=1$.

כך למשל, את פונקציית ההסתברות של משתנה $HG(5;1000{,}500)$ ניתן לקרב ע"י פונקציית ההסתברות של משתנה $Bin(5,\frac{2}{3})$.

התפלגות פואסונית:

משתנה פואסוני $X\sim P(\lambda)$	למשתנה פואסוני יש פרמטר יחיד $\lambda>0$. הוא מקבל רק ערכים שלמים אי-שליליים: $0,1,2,\ldots$	$P(X=k)=e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$

נשים לב כי מתקיים: $\sum e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\sum\frac{\lambda^k}{k!}=e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda}=1$ ולכן זו התפלגות לגיטימית.

קירוב משתנה בינומי על ידי משתנה פואסוני (שיעור 4): יהי $X\sim Bin(n,p)$, אם n גדול, p קטן (קרוב מאוד לאפס), ו- $\lambda=np$ איזשהו קבוע קטן. אז ניתן לקרב את פונקציית ההסתברות של X על ידי פונקציית ההסתברות של Y כאשר $Y\sim P(\lambda)$.

דוגמה (אחוז אחד חולים): $X\sim Bin(100{,}0.01)$, מתקיים $P(X=0)=(1-0.01)^{100}$. זה שווה גם בקירוב להסתברות שמשתנה $P(100\cdot 0.01)=P(1)$ יקבל את הערך 0 שזה $e^{-100\cdot 0.01}=e^{-1}$.

מתקיים: $P(X=1)=\binom{100}{1}\cdot 0.01\cdot 0.99^{99}$. זה בקירוב ההסתברות שמשתנה $P(1)$ יקבל את הערך 1 שזה $e^{-1}\cdot\frac{1}{1}=e^{-1}$.

הסבר: נתון $X\sim Bin(n,p)$.

- $P(X=0)=(1-p)^n=\left(1-\frac{\lambda}{n}\right)^n\approx e^{-\lambda}$.
- $P(X=1)=\binom{n}{1}\cdot p(1-p)^{n-1}\cong\lambda(1-p)^n=\lambda e^{-\lambda}$
- $P(X=2)\cong\frac{\lambda^2}{2}\cdot e^{-\lambda}$.

אפשר להראות שזה עובד גם הלאה, באינדוקציה, ולקבל שפונקציית ההסתברות של X היא בקירוב $P(X=k)\cong e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}$.

משתנים מקריים רציפים

פונקציית הסתברות מצטברת: לגבי משתנה מקרי X נגדיר את **פונקציית ההסתברות המצטברת** שלו: $F_X(x) = P(X \le x)$. זו ההסתברות להיות משמאל לערך x קטן (כולל), כלומר עד אותה נקודה x. הפונקציה מוגדרת עבור כל משתנה, בדיד או רציף.

אם $F_X(x)$ רציפה בכל נקודה x אז המשתנה X נקרא **משתנה רציף**. הפונקציה לא קופצת בשום נקודה.

- **במקרה כזה: $P(X \le x) = P(X < x)$ כי שיעור הקפיצה שלה בנקודה x הוא 0. לא מפריע אם נכלול את השווה או לא (כל נקודה מתקבלת בהסתברות 0)**. ואז ההסתברות שנקבל ערך בקטע שבין a ל-b היא $F_X(b) - F_X(a)$.
- $P(a < x \le b) = P(X \le b) - P(X \le a) = F_X(b) - F_X(a)$.
- $P(a \le X \le b) = P(X \le b) - P(x < a) = F_X(b) - \lim_{x \to a^-} F_X(x) = F_X(b) - F_X(a)$. כאשר המעבר האחרון קורה אם המשתנה הוא רציף, שם הפונקציה רציפה.

תכונות נוספות:

- $\lim_{x \to \infty} F_X(x) = 1$ כי זה מכיל כל מאורע.
- $\lim_{x \to -\infty} F_X(x) = 0$ כי זה לא מכיל אף מאורע.

משתנה רציף בהחלט: לגבי משתנה X בעל פונקציית הסתברות מצטברת $F_X(x)$, אם קיימת פונקציה $f_X(t)$ כך שעבור כל נקודה x מתקיים: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$ אז נגיד שהמשתנה X הוא **רציף בהחלט**, ש-$f_X(t)$ **היא פונקציית צפיפות** שלו.

- באופן טבעי, פונקציה זו תהיה הנגזרת.
- פונקציית הצפיפות אינה יחידה! אפשר לשנות אותה במספר סופי או בן מניה של נקודות, והאינטגרל לא ישתנה.
- אם X משתנה רציף בהחלט אז $P(a \le X \le b) = \int_a^b f_X(t)dt$.
- **מתקיים: $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)dx = 1$**.

ההבדל בין בדיד לרציף: משתנה בדיד – מקבל מספר סופי או בן מניה של ערכים. משתנה רציף – משתנה שפונקציית ההסתברות המצטברת שלו היא רציפה.

משתנה מקרי אחיד רציף:

משתנה מקרי אחיד רציף בקטע שבין a ל-b, מסומן $X \sim U(a,b)$ – כאן הסוגריים מעוגלות (קטע פתוח) ולא מרובעות כמו בבדיד. הוא מקבל **כל קטע בהסתברות שהיא פרופורציונאלית לאורך הקטע**. הוא מקבל רק ערכים שבין a ל-b.

דוגמה: $X \sim U(20,50)$. מהו $P(X \le 10)$? זה 0. מהו $P(X \le 80)$? זה 1. מהו $P(30 \le X \le 40)$?

- ✓ $P(30 \le X \le 40) = \frac{40-30}{50-20} = \frac{10}{30} = \frac{1}{3}$.
- ✓ $P(30 \le X \le 40) = F_X(40) - F_X(30) = \frac{40-20}{50-20} - \frac{30-20}{50-20} = \frac{2}{3} - \frac{1}{3} = \frac{1}{3}$.

בעיקרון, עבור משתנה מקרי $X \sim U(a,b)$ מתקיים:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{x-a}{b-a} & a \le x \le b \\ 1 & x > b \end{cases}$$

עבור משתנה $X \sim U(a,b)$ מתקיים $f_X(x) = \frac{1}{b-a}$ – פונקציית הצפיפות עבור $a \le x \le b$. זו הנגזרת של $F_X(x)$.

1. יהי $X \sim U(-2{,}5)$ מ"מ **רציף**. נגדיר מ"מ חדש $Y = \sqrt{|X|}$. מצאו את ההתפלגות של Y (פונקצית צפיפות ופונקצית התפלגות מצטברת).

פתרון:

בשאלות מהסוג הזה, שבהן מגדירים מ"מ חדש כפונקציה של מ"מ שהתפלגותו ידועה, רצוי להתחיל את הפתרון במציאת תחום הערכים שהמ"מ החדש יכול לקבל. במקרה שלנו Y יכול לקבל כל ערך בקטע $[0, \sqrt{5}]$ **ואף ערך מחוץ לקטע הזה.**

בשלב השני של הפתרון נמצא את פונקציית ההתפלגות המצטברת של Y - $F_Y(y)$ - עבור $y \in [0, \sqrt{5}]$:

$$F_Y(y) = P(Y \le y) = P(\sqrt{|X|} \le y) = P(|X| \le y^2) = P(-y^2 \le X \le y^2) = F_X(y^2) - F_X(-y^2)$$

ונשים לב שהרכיב השני מתאפס עבור $y > \sqrt{2}$. כעת נרשום את פונקציית ההתפלגות המצטברת באופן מלא.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{y^2+2}{7} - \frac{-y^2+2}{7} = \frac{2y^2}{7} & 0 < y \le \sqrt{2} \\ \frac{y^2+2}{7} & \sqrt{2} < y \le \sqrt{5} \\ 1 & \sqrt{5} < y \end{cases}$$

לבסוף נגזור את פונקציית ההתפלגות המצטברת (כל אינטרוול בנפרד):

$$f_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{4y}{7} & 0 < y \le \sqrt{2} \\ \frac{2y}{7} & \sqrt{2} < y \le \sqrt{5} \\ 0 & \sqrt{5} < y \end{cases}$$

משתנה מקרי מעריכי/אקספוננציאלי רציף:

משתנה מקרי X מתפלג אקספוננציאלית, $X \sim \exp(\lambda)$ כאשר $\lambda > 0$ הוא הפרמטר היחיד של ההתפלגות. מתקיים:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

פונקציית הצפיפות:

$$f_X(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ \lambda \cdot e^{-\lambda x} & x \ge 0 \end{cases}$$

1) יהי $X \sim \exp(2)$. מהו $P(-1 \le X \le 3)$?

- ✓ פתרון א: $P(-1 \le X \le 3) = F_X(3) - F_X(-1) = 1 - e^{-2\cdot 3} - 0 = 1 - e^{-6}$
- ✓ פתרון ב: $\forall x \ge 0\ f_X(x) = 2 \cdot e^{-2x}$. לכן: $P(-1 \le X \le 3) = \int_{-1}^{3} f_X(t)dt = \int_{-1}^{3} 0dt + \int_{-1}^{3} 2 \cdot e^{-2t}dt$

2) יהי $X \sim \exp(1)$. מצאו את ההתפלגות של X^2, כלומר את $F_{X^2}(x)$.

- ✓ עבור $x < 0$ מתקיים $F_{X^2}(x) = 0$ כי אי אפשר בכלל לקבל ערכים קטנים מ-0.
- ✓ עבור $x \ge 0$ מתקיים $F_{X^2}(x) = P(X^2 \le x) = P(-\sqrt{x} \le X \le \sqrt{x}) = P(X \le +\sqrt{x}) = 1 - e^{-1\sqrt{x}}$.

2. יהי X משתנה מקרי מעריכי $X \sim Exp(\lambda)$. כיצד מתפלג $\lceil X \rceil$ (עיגול כלפי מעלה של X)? **פתרון:**

נסמן ב Y את $\lceil X \rceil$. נשים לב שמהגדרתו של Y נובע כי הוא מ"מ בדיד המקבל את הערכים $1, 2, \ldots$.

עבור כל k טבעי מתקיים:

$$P(Y = k) = P(k - 1 < X \le k) = \int_{k-1}^{k} \lambda e^{-\lambda t}\mathrm{d}t = e^{-\lambda(k-1)} - e^{-\lambda k} = e^{-\lambda(k-1)}(1 - e^{-\lambda})$$

נסמן $p = 1 - e^{-\lambda}$ ונקבל:

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} \cdot p$$

כלומר, Y מתפלג גיאומטרית עם פרמטר $p = 1 - e^{-\lambda}$.

חוסר הזיכרון של התפלגות מעריכית (שיעור 5): $P(X \geq x+a|X>a) = e^{-\lambda x}$.

הסבר: $P(X \geq x+a|X>a) = \frac{P(X\geq x+a, X\geq a)}{P(X\geq a)} = \frac{P(X\geq x+a)}{P(X\geq a)} = \frac{1-P(X\leq x+a)}{1-P(X\leq a)} = \frac{1-(1-e^{-\lambda(a+x)})}{1-(1-e^{-\lambda a})} = \frac{e^{-\lambda(a+x)}}{e^{-\lambda a}} = e^{-\lambda x}$.

- זה מייצג אורך חיים של מכשירים, שבהם ישן טוב כמו חדש.

דוגמה: נסתכל על פונקציית ההסתברות המצטברת הבאה:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x<0 \\ 0.2 & x=0 \\ 0.2+\frac{x}{2} & 0\leq x\leq 1.6 \\ 1 & x>1.6 \end{cases}$$

- יש קפיצה ב-0, לכן הפונקציה לא רציפה ב-0 ולכן המשתנה הוא לא רציף.
- לא יכול להיות משתנה בדיד כי הפונקציה עולה בקטע שלם ולכן טווח הערכים הוא אינו סופי או בן מניה.

דוגמה למשתנה שאינו רציף ואינו בדיד (שיעור 5 תשפ"ג) – נניח שמכשיר חדש לא עובד בכלל בסיכוי 0.1, אחרת הוא עובד בזמן שמתפלג $\exp(1)$. הנקודה אפס מתקבלת בסיכוי 0.1. אבל גם מתקבל רצף של נקודות בעלות הסתברות אפס. אין רציפות של פונקציית ההסתברות המצטברת בנקודה 0.

דוגמה: נניח שבסיכוי חצי בוחרים נקודה מבין 0 ו-1 בסיכוי שווה, ובסיכוי חצי בוחרים נקודה שמתפלגת אחיד רציף בקטע $(0,1)$. מצאו את פונקציית ההסתברות המצטברת של X – אילו ערכים מתקבלים?

- משמאל לנקודה 0 נקבל 0.
- בנקודה 0 נקבל $\frac{1}{4}$.
- בנקודה 1 נקבל 1.
- הנקודה 1 מתקבלת בסיכוי $\frac{1}{4}$ ולכן בכל נקודה שמשמאל ל-1 יש הסתברות מצטברת לא גדולה מ-$\frac{3}{4}$. הערך $\frac{3}{4}$ לא מתקבל.

קבוצות בעלות הסתברות אפס (תשפ"ג שיעור 9 באזור 2:00:00):

נדבר על המשתנה $X \sim U(0,1)$, ונדבר על קבוצה בקטע הזה שיש לה הסתברות אפס. נראה קבוצה שאינה בת מניה, שגם לא יש הסתברות אפס. נסתכל על פיתוח המספרים בקטע לפי בסיס 3 – עם הספרות 0, 1, 2. נסתכל על קבוצת המספרים שבפיתוח שלהם לא מופיע 1 בשום מקום – רק 0 ו-2.

- ✓ נראה שלמשלים שלה יש הסתברות של 1, ולכן לה יש הסתברות של 0.
- ✓ המשלים (יש 1 במקום כלשהו בפיתוח) הוא בשליש האמצעי. אנו מוסיפים בשלב השני שני קטעים קצרים יותר פי 3. בשלב השלישי 4 קטעים קצרים פי 3 שוב. לכן נקבל: $\frac{1}{3}+2\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^2+4\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^3$ ונקבל $\frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{2}{3}}=1$ (המנה היא $\frac{2}{3}$).

4. במכשיר חשמלי 5 רכיבים. המכשיר מפסיק לעבור ברגע ש-2 רכיבים מתקלקלים. התפלגות משך הזמן בשעות עד שרכיב מתקלקל היא בעלת פונקציית הצפיפות הבאה:

$$f(x) = \frac{100}{x^2}I(x\geq 100)$$

מה ההסתברות שהמכשיר יעבוד לאחר 150 שעות, כאשר הרכיבים בלתי תלויים זה בזה?

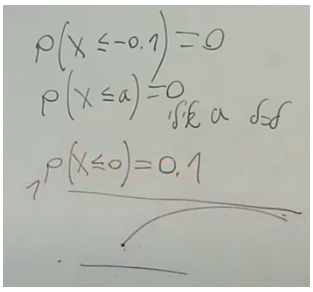
פתרון:

נסמן ב-p את ההסתברות של רכיב כלשהו להתקלקל תוך 150 שעות. נסמן ב-Y את המשתנה המקרי שסופר כמה רכיבים מקולקלים בתום 150 שעות. נסמן ב-E את המאורע שהמכשיר עובד לאחר 150 שעות.

$$P(E) = P(Y<2) = P(Y=0)+P(Y=1) = \binom{5}{0}p^0(1-p)^5+\binom{5}{1}p(1-p)^4$$

כאשר השתמשנו בהתפלגות בינומית. כעת עלינו למצוא את p. נסמן ב-X את המשתנה המקרי שמודד זמן עד לקלקול של רכיב:

$$p = P(X\leq 150) = \int_{-\infty}^{150} f(x)dx = 100\int_{100}^{150}\frac{1}{x^2}dx = \frac{1}{3}.$$



משתנים מקריים דו-מימדיים בדידים

בהתפלגות דו-מימדית יש שני מאפיינים או משתנים. את ערכיהם וההסתברויות שהם מקבלים ניתן לתאר בטבלה או בביטויים כלליים. דוגמה: X,Y שני משתנים שמקבלים צירופי ערכים שונים.

X\Y	0	2	3	
6	0.1	0.2	0	0.3
11	0	0.3	0.4	0.7
	0.1	0.5	0.4	

הטבלה מייצגת את ההסתברויות לצירופים השונים: $P(X=x,Y=y)$. בדפנות הטבלה נכתבות **ההסתברויות השוליות**. ההסתברויות הללו מסתכמות ל-1.

<u>אי תלות:</u> זוג משתנים מקריים X,Y נקראים ב"ת אם לכל הערכים האפשריים x,y: $P(X=x,Y=y)=P(X=x)\cdot P(Y=y)$.
זו הרחבה למושג אי תלות בין מאורעות – אנו צריכים שכל זוגות המאורעות $(X=x),(Y=y)$ יהיו ב"ת. אם יש לפחות זוג ערכים אחד x,y שעבורו המשוואה לא מתקיימת (או אם יש 0 בטבלה), אז המשתנים תלויים.

- ✓ בדוגמה המשתנים הם תלויים, כיוון שלמשל $P(X=11,Y=0)=0\neq 0.7\cdot 0.1$.
- ✓ דוגמה לזוג משתנים ב"ת: שתי הטלות ב"ת של סביבון.

<u>דוגמה:</u> זורקים 3 כדורים ל-3 תאים. כל כדור נכנס לכל כד בסיכוי $\frac{1}{3}$ באופן ב"ת באחרים. X – מספר הכדורים בכד הראשון. Y – מספר התאים התפוסים (שיש בהם לפחות כדור אחד). מצאו את פונקציית ההסתברות המשותפת של (X,Y). זו גם נקראת פונקציית ההתפלגות המשותפת. נקבל כי X מתפלג בינומית: $X\sim Bin(3,\frac{1}{3})$.

X\Y	1	2	3	
0	$\frac{\binom{2}{1}}{3^3}$	$\frac{2\cdot\binom{3}{2}}{3^3}$	0	$\frac{8}{27}$
1	0	$\frac{\binom{3}{1}\cdot 2}{3^3}$	$\frac{3!}{3^3}$	$\frac{12}{27}$
2	0	$\frac{\binom{3}{2}\cdot 2}{3^3}$	0	$\frac{6}{27}$
3	$\frac{1}{3^3}$	0	0	$\frac{1}{27}$

<u>חישוב התפלגות סכום של שני משתנים:</u>

1) התפלגות הסכום של שתי הטלות ב"ת של קוביה תקינה: $X,Y,Z=X+Y$.

- $P(Z=1)=0$
- $P(Z=2)=P(X=1,Y=1)=P(X=1)\cdot P(Y=1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$
- $P(Z=3)=P(X=1,Y=2)+P(X=2,Y=1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}+\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{2}{36}$
- $P(Z=12)=P(X=6,Y=6)=\frac{1}{36}$

מספר הצירופים הגדול ביותר יהיה עבור סכום 7, יש לכך הכי הרבה אפשרויות ($\frac{6}{36}$).
נקבל $P(Z=k)=\frac{6-|k-7|}{36}$ לכל $2\le k\le 12$.

2) התפלגות תוצאת המקסימום של שתי קוביות תקינות: X,Y הקוביות, Z המקסימום.

- $P(Z=1)=\frac{1}{6}\cdot\frac{1}{6}=\frac{1}{36}$
- $P(Z=k)=P(Z\le k)-P(Z\le k-1)=P(X\le k,Y\le k)-P(X\le k-1,Y\le k-1)$

$$=P(X\le k)\cdot P(Y\le k)-P(X\le k-1)\cdot P(Y\le k-1)=\frac{k}{6}\cdot\frac{k}{6}-\frac{k-1}{6}\cdot\frac{k-1}{6}=\frac{2k-1}{36}$$

<u>סכום משתנים פואסוניים:</u> נתונים שני משתנים $X\sim P(\lambda),Y\sim P(\mu)$ כאשר הם ב"ת. נסתכל על $Z=X+Y$.

$$P(Z=z)=\sum_{x=0}^{z}P(X=x,Y=z-x)=\sum_{x=0}^{z}P(X=x)\cdot P(Y=z-x)=\sum_{x=0}^{z}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^x}{x!}\cdot e^{-\mu}\cdot\frac{\mu^{z-x}}{(z-x)!}$$
$$=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{z!}\sum_{x=0}^{z}\cdot\frac{z!}{x!\,(z-x)!}\cdot\lambda^x\mu^{z-x}=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{z!}\sum_{x=0}^{z}\cdot\binom{z}{x}\cdot\lambda^x\mu^{z-x}$$
$$=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{1}{z!}\cdot(\lambda+\mu)^z=e^{-(\lambda+\mu)}\cdot\frac{(\lambda+\mu)^z}{z!}\Rightarrow Z\sim P(\lambda+\mu)$$

<u>סכום משתנים בינומיים:</u> נתונים שני משתנים $X\sim Bin(n,p),Y\sim Bin(m,p)$ ב"ת. נסתכל על $Z=X+Y$. הסכום מתפלג בינומית: $Z\sim Bin(n+m,p)$.

<u>התפלגות מותנה:</u> נגדיר התפלגות מותנה של משתנה X בהינתן מאורע מסוים, או בהינתן שהוא או משתנה אחר מקבל ערכים מסוימים. סימון: $X\big|_{Y=y},X\big|_{y\in A},X\big|_{X\geq 3}$.

1) X,Y זוג משתנים מקריים ב"ת. $X\sim Bin(n,p)$, $Y\sim Bin(m,p)$. נגדיר $Z=X+Y$. מהי התפלגות X בהינתן $Z=z$?

$$P(X=x|Z=z)=\frac{P(X=x,Z=z)}{P(Z=z)}=\frac{P(X=x,Y=z-x)}{P(Z=z)}=\frac{P(X=x)\cdot P(Y=z-x)}{P(Z=z)}$$
$$=\frac{\binom{n}{x}\cdot p^x(1-p)^{n-x}\cdot\binom{m}{z-x}\cdot p^{z-x}(1-p)^{m-(z-x)}}{\binom{n+m}{z}\cdot p^z(1-p)^{n+m-z}}=\frac{\binom{n}{x}\cdot\binom{m}{z-x}}{\binom{n+m}{z}}$$

קיבלנו כי $\boldsymbol{X=x|Z=z\sim HG(z;n,m)}$.

2) נתונים שני משתנים $X\sim G(p),Y\sim G(p)$ ב"ת. נסתכל על $Z=X+Y$. נראה בדרך נוספת כי $\boldsymbol{Z\sim NB(2,p)}$.

$$P(Z=z)=\sum_{x=1}^{z-1}P(X=x,Y=z-x)=\sum_{x=1}^{z-1}P(X=x)\cdot P(Y=z-x)=\sum_{x=1}^{z-1}p\cdot q^{x-1}\cdot p\cdot q^{z-x-1}$$
$$=\sum_{x=1}^{z-1}p^2\cdot q^{z-2}=(z-1)\cdot p^2\cdot q^{z-2}=\binom{z-1}{1}\cdot p^2\cdot q^{z-2}$$

נתון $Z=z$. מהו $P(X=x\big|Z=z)$?

$$P(X=x|Z=z)=\frac{P(X=x,Z=z)}{P(Z=z)}=\frac{P(X=x,Y=z-x)}{P(Z=z)}=\frac{p\cdot q^{x-1}\cdot p\cdot q^{z-x-1}}{\binom{z-1}{1}\cdot p^2\cdot q^{z-2}}=\frac{1}{z-1}$$

קיבלנו שההתפלגות המותנה היא אחידה בדידה: $\boldsymbol{U[1,z-1]}$.

<u>הערה:</u> בשיעור 6 תשפ"ב שלומי דיבר על **מימוש משתנים מקריים דו-מימדיים** בטבלה לעומת מרחב מדגם מצומצם יותר, ועל **סדרות של משתנים מקריים**. מופיע בסיכום של הילה מן.

2. מטילים מטבע שלוש פעמים (בלתי תלויות). נסמן ב - X את מספר הפעמים שהתקבל "עץ" בשתי ההטלות הראשונות וב - Y את מספר הפעמים שהתקבל "עץ" בשתי ההטלות האחרונות. מצאו את ההתפלגות המשותפת של X,Y ואת ההתפלגות המותנית $Y \mid X = x$.

פתרון:

מדובר במרחב הסתברות סימטרי - ישנם 8 מאורעות בסיסיים - $\Omega = \{(0,0,0),(0,0,1)\ldots(1,1,1)\}$ - המתקבלים כולם בהסתברות $\frac{1}{8}$. נרשום את הערכים שמקבלים המ"מ X ו - Y עבור כל $\omega \in \Omega$:

ω	X	Y
000	0	0
001	0	1
010	1	1
011	1	2
100	1	0
101	1	1
110	2	1
111	2	2

כעת קל למצוא את ההתפלגות המשותפת (כל תא של הטבלה מייצג את חיתוך המאורעות המיוצגים על ידי השורה והעמודה שלו)

Y/X	0	1	2	
0	$1/8$	$1/8$	0	$1/4$
1	$1/8$	$1/4$	$1/8$	$1/2$
2	0	$1/8$	$1/8$	$1/4$
	$1/4$	$1/2$	$1/4$	1

חשוב לשים לב לנקודות הבאות:

(א) ההתפלגות השולית של X זהה להתפלגות השולית של Y. אנחנו מצפים לכך משום שאין שום הבדל בין שתי ההטלות הראשונות לבין שתי ההטלות האחרונות. זאת דרך לבדוק שלא טעינו - תמיד בדקו שהתשובה שקיבלתם הגיונית.

(ב) ההתפלגות השולית של כל אחד מהמשתנים היא בינומית. כלומר $X \sim Bin(2, 1/2)$ וכך גם Y. גם זו תוצאה צפוייה.

(ג) ודאו שההתפלגויות השוליות מסתכמות ל 1.

כעת נביט בהתפלגות המותנית:

אם $X = 0$, בוודאות ההטלה השניה היא "פלי" ולכן ההטלה השנייה תקבע אם Y יקבל את הערכים 0 או 1 בהסתברות שווה

$$Y \mid X = 0 \sim Ber(\frac{1}{2})$$

בדומה, אם $X = 2$, ההטלה השנייה היא בוודאות "עץ" ולכן:

$$Y \mid X = 2 \sim 1 + Ber(\frac{1}{2})$$

אם $X = 1$, אז בהסתברות $\frac{1}{2}$ ה"עץ" מתקבל בהטלה הראשונה, ובהסתברות $\frac{1}{2}$ הוא מתקבל בהטלה השניה. לכן, בסיכוי $\frac{1}{2}$, Y מקבל "עץ" בהטלה הראשונה שלו, וההטלה השנייה שלו לא קשורה לתוצאה של X, ולכן בסה"כ $Y|X = 1 \sim Bin(2, 0.5)$. ניתן לשים לב שבמקרה זה, התפלגות Y היא בלתי תלויה במאורע $X = 1$ (אבל באופן כללי Y ו-X אינם בלתי תלויים).

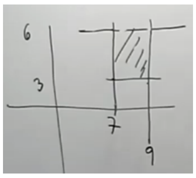
דרך אחרת: מרגע שמוצאים את ההתפלגות המשותפת ניתן למצוא את ההתפלגויות השוליות ישירות מהטבלה. למשל כדי למצוא את $Y \mid X = 0$ נביט בשורה שבה $X = 0$ ונראה שהערכים 0 ו 1 - 1 מתקבלים בהסתברות שווה p המקיימת $p = \frac{1/8}{1/4} = \frac{1}{2}$. ההתפלגות המתאימה לכך היא $Ber(\frac{1}{2})$.

משתנים מקריים דו-מימדיים רציפים

התפלגות דו-מימדית רציפה:

X, Y משתנים רציפים. הם מקבלים ערכים שהם צירוף הערכים של X ושל Y. מתקבלות נקודות על המישור. נסמן קבוצת נקודות זו ב-A, זהו תחום. אז: $\boldsymbol{P(A) = \int_A f_{X,Y}(x,y)dxdy}$.

נגדיר **פונקציית הסתברות מצטברת דו-מימדית**: $\boldsymbol{F_{X,Y}(x,y) = P(X \le x, Y \le y)}$. בעזרת פונקציה זו נוכל למצוא את ההסתברויות של תחומים שונים. אם קיימת פונקציה



דוגמה: יהיו X, Y זוג משתנים מקריים רציפים:

$$P(7 \le X \le 9, 3 \le Y \le 6) = F_{X,Y}(9,6) - F_{X,Y}(7,6) - F_{X,Y}(9,3) + F_{X,Y}(7,3)$$

התפלגות מותנה:

נגדיר התפלגות מותנה של X,Y בהינתן X על ידי: $F_{Y|X=x}(y) = \frac{F_{X,Y}(x,y)}{F_X(x)} = \frac{P(X \le x, Y \le y)}{P(X \le x)}$.

באותה צורה נגדיר צפיפות מותנה: $f_{Y|X} = \frac{f_{X,Y}(x,y)}{f_X(x)}$.

אי-תלות: נגיד שזוג המשתנים המקריים X, Y הם ב"ת, אם לכל x, y מתקיים: $F_X(x,y) = F_X(x) \cdot F_Y(y)$.

מה לגבי התנאי $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) \cdot f_Y(y)$? **זה תנאי מספיק אבל לא תנאי הכרחי**. אפשר לשנות את הצפיפות במספר סופי/קטן של נקודות. לכן לא חייבים לשמור על השוויון.

חישוב התפלגות סכום של מעריכים ב"ת:

נתונים $X \sim \exp(\lambda), Y \sim \exp(\lambda)$ שווי פרמטר. נגדיר $Z = X + Y$. **כאן אנו מחשבים צפיפות ולא פה"מ, סכמנו את כל הצירופים של X ו-Y שנותנים Z. עשינו אינטגרל אחד ולא אינטגרל כפול.**

$$f_Z(z) = \int_0^z f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_0^z f_X(x) \cdot f_Y(z-x)dx = \int_0^z \lambda \cdot e^{-\lambda x} \cdot \lambda \cdot e^{-\lambda(z-x)}dx = \int_0^z \lambda^2 \cdot e^{-\lambda z}dx$$
$$= \lambda^2 \cdot z \cdot e^{-\lambda z}$$

חישוב התפלגות סכום של אחידים ב"ת:

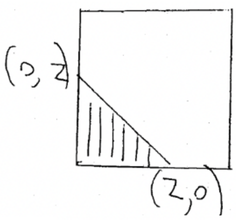
נתונים X, Y מתפלגים אחיד בתוך הריבוע $0 \le X \le 1, 0 \le Y \le 1$. מצאו את התפלגות Z כאשר $Z = X + Y$.

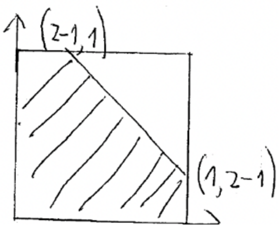
פתרון ראשון (חישוב הצפיפות):

- ✓ נתחיל בחישוב הצפיפות של z עבור $0 \le z \le 1$: $f_Z(z) = \int_0^z f_{X,Y}(x, z-x)dx = \int_0^z 1dx = z$. ההתפלגות היא אחידה בתוך הריבוע, כל נקודה מתקבלת באותה צפיפות. אז האינטגרל על הצפיפות בתוך הריבוע הוא 1.
- ✓ כעת נסתכל על $1 < z \le 2$: $f_Z(z) = \int_{z-1}^1 1dx = 1 - (z-1) = 2 - z$.

פתרון שני (חישוב הפה"מ):

- ✓ מכיוון שזו התפלגות אחידה, לכל מאורע יש הסתברות פרופורציונאלית לשטח הריבוע. כאן שטח הריבוע הוא 1, ולכן ההסתברות של מאורע שווה בדיוק לשטחו. כעת ניגש לחשב את $F_Z(z)$. כאשר $Z = X + Y$.
- ✓ המאורע שהסכום לא גדול מ-z עבור $0 \le z \le 1$: נחשב את שטח המשולש. השטח הוא $\frac{z^2}{2}$.
- ✓ המאורע שהסכום לא גדול מ-z עבור $1 \le z \le 2$: השטח המבוקש הוא המקווקו, המשלים שלו הוא משולש. נחסיר את שטח המשולש מהשטח הכללי: $1 - \frac{(1-(z-1)) \cdot (1-(z-1))}{2} = 1 - \frac{(2-z)^2}{2}$.





רק בהתפלגות אחידה יכולנו להיעזר בשיטה הגיאומטרית. בהתפלגויות אחרות, ההסתברויות לא פרופורציונאליות לשטח.

<u>דוגמה נוספת:</u> נתון הקטע שבין 0 ל-1. בוחרים בו שתי נקודות. כל נקודה מתפלגת $U(0,1)$ והן ב"ת. נוצרים שלושה קטעים: $(0,\min\{X,Y\}), (\min\{X,Y\},\max\{X,Y\}), (\max\{X,Y\},1)$. מהי ההסתברות שמקטעים אלה ניתן ליצור משולש?

- ✓ צריך שכל צלע תהיה באורך קטן מחצי – ואז לא תהיה צלע שגדולה מסכום שתי האחרות. נסתכל על שלוש הצלעות. כל אחת גוררת אילוצים.
- ✓ קיבלנו שהשטח המתאים הוא שני משולשים. השטח הכולל שלהם הוא $\frac{1}{4} = 2\cdot\left(\frac{0.5\cdot 0.5}{2}\right)$.

1. שאלה ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד ב' ספטמבר 2006
יהיו X ו - Y שני משתנים מקריים שווי התפלגות. מתקיים $X\sim U(0,1)$. מהו $P(Y<X^2)$?

(א) אם הם ב"ת אז $\frac{1}{2}$
(ב) אם הם ב"ת אז $\frac{1}{3}$
(ג) אם הם ב"ת אז $\frac{1}{4}$
(ד) $\frac{1}{6}$ בין אם הם תלויים או לא
(ה) אף תשובה אינה נכונה

פתרון:
ראשית, קל לשלול את תשובה ד': אם המשתנים תלויים אז ייתכן ש $Y=X$. במקרה כזה $Y<X^2$ בהסתברות 0. הסבר: $0\le X\le 1$ ולכן מתקיים בהכרח $Y=X>X^2$.
נותר לחשב את הסתברות המאורע המבוקש אם המשתנים ב"ת. נשים לב שבהינתן $X=x$, מתקיים ש $P(Y<x^2)=x^2$. זאת משום ש Y מתפלג אחיד בקטע $(0,1)$ ו - x^2 בהכרח שייך לקטע $(0,1)$. לכן מהסתברות שלמה:

$$P(Y<X^2)=\int_0^1 P(Y<X^2|X=x)f_X(x)dx=\int_0^1 \cdot P(Y<x^2)f_X(x)dx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

כאשר $P(Y<X^2|X=x)=P(Y<x^2)$ מאחר שX ו Y בלתי תלויים (ולכן ההתפלגות של Y לא משתנה תחת התניה על X).

תשובה ב' נכונה.
דרך נוספת: נפתור על ידי אינטגרציה על פונקציית הצפיפות המשותפת. אנו רוצים לבצע אינטגרל בשטח הירוק, אשר מסמן את כל הנקודות המקיימות את המאורע $Y<X^2$:

$$P(Y<X^2)=\int_0^1\int_0^{x^2}1dydx=\int_0^1 x^2dx=\frac{1}{3}$$

3. מבחינה של ד"ר אסף כהן, ינואר 2013

יהיו $X,Y \sim U(0,1)$ זוג מ"מ רציפים ב"ת. נגדיר $Z=|X-Y|$. מצאו את פונקצית הצפיפות של Z.

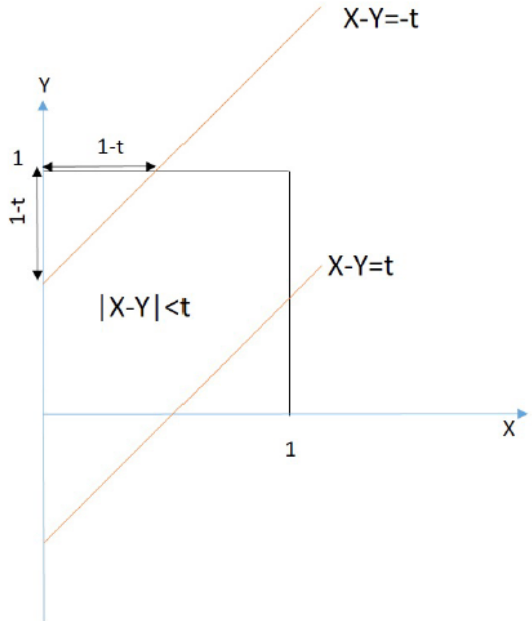
פתרון:

Z יכול לקבל ערכים בקטע $(0,1)$.

דרך א: ראשית נמצא את פונקצית ההתפלגות המצטברת שלו. עבור $t\in(0,1)$ מתקיים:

$$F_Z(t)=P(Z\le t)=P(|X-Y|\le t)=P(-t\le X-Y\le t)$$

בשלב הזה כדאי לשרטט את התחום (במישור XY) שמגדיר אי השוויון $-t\le X-Y\le t$:



קל יותר לחשב את ההסתברות של המאורע המשלים המוגדר על ידי שני המשולשים החופפים.

$$F_Z(t)=P(Z\le t)=P(|X-Y|\le t)=P(-t\le X-Y\le t)=$$
$$1-2\times\frac{(1-t)^2}{2}=1-(1-t)^2$$

הערה: באופן כללי, השלב של מציאת ההסתברות של מאורע דורש לחשב אינטגרל כפול של פונקצית הצפיפות המשותפת מעל התחום המוגדר על ידי המשולשים. אבל במקרה שלנו פונקצית הצפיפות היא מכפלת הצפיפויות השוליות (בגלל האי-תלות של המשתנים), וכל אחת מהצפיפויות השוליות קבועה ושווה ל 1. לכן האינטגרל שווה לשטח התחום.

פונקצית ההתפלגות:

$$F_Z(t)=\begin{cases}0 & t\le 0\\ 1-(1-t)^2 & 0<t\le 1\\ 1 & 1<t\end{cases}$$

ופונקצית הצפיפות:

$$f_Z(t)=\begin{cases}2\cdot(1-t) & 0<t\le 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

דרך ב: נעבור על כל הצירופים האפשריים של X ו-Y כך ש $Z=t$ (כאשר $0<t\le 1$):

אנו יודעים שאם $X=x$ אז חייב להתקיים אחד מבין השניים: $Y=x+t$ או $Y=x-t$. נעבור על כל הערכים האפשריים ש-X יכול לקבל, באמצעות אינטגרל.

$$f_Z(t)=\int_t^1 f_{X,Y}(x,x-t)dx+\int_0^{1-t} f_{X,Y}(x,x+t)dx$$

הסבר לגבולות האינטגרציה: באינטגרל הראשון, אם נציב $x<t$, נקבל של-Y ערך שלילי, דבר שאינו אפשרי כיוון ש Y מתפלג אחיד בין 0 ל-1. באינטגרל השני, אם נציב $x>1-t$, נקבל שלY ערך גדול מ-1, שגם כן בלתי אפשרי. נמשיך:

$$=\int_t^1 f_X(x)f_Y(x-t)dx+\int_0^{1-t} f_X(x)f_Y(x+t)dx=\int_t^1 1dx+\int_0^{1-t}1dx=1-t+1-t=2-2t$$

ובסך הכל:

$$.f_Z(t)=\begin{cases}2\cdot(1-t) & 0<t\le 1\\ 0 & \text{otherwise}\end{cases}$$

התפלגות המינימום של משתנים מקריים מעריכיים:

נניח $X\sim \exp(\lambda)\,,Y\sim\exp(\mu)$. כל א חד מהם יכול לקבל כל ערך אי-שלילי. נגדיר $Z=\min\{X,Y\}$. כיצד מתפלג Z?

- ✓ עבור z שלילי, התוצאה היא 0. מהי ההסתברות המצטברת עבור $z>0$?
- ✓ נוח לעבור למשלים: $P(Z\le z)=1-P(Z>z)=1-P(X>z,Y>z)=1-P(X>z)\cdot P(Y>z)$
- ✓ נשים לב כי $P(X\le z)=1-e^{-\lambda z}\Rightarrow P(X>z)=e^{-\lambda z}$.
- ✓ לכן: $P(Z\le z)=1-e^{-\lambda z}\cdot e^{-\lambda\mu}=1-e^{-(\lambda+\mu)z}$. כלומר ההתפלגות היא $\exp(\lambda+\mu)$.

באותה צורה אם הייתה קבוצה $\{X_i\}$ שכל משתנה בה מתפלג עם λ_i, נגדיר $Z=\min\{X_i\}$. נקבל $Z\sim\exp\left(\sum\lambda_i\right)$.

התפלגות משותפת של זוג משתנים מקריים מעריכיים:

נניח $X\sim\exp(\lambda)\,,Y\sim\exp(\mu)$. נרצה לחשב את $P(Y>X)$.

- ✓ מדובר באינטגרל על הצפיפות המשותפת בתחום שבו $Y>X$. מכיוון שהם ב"ת הצפיפות המשותפת שווה למכפלת הצפיפויות (הוצאה של רכיב שלא תלוי ב-y):

$$P(Y>X)=\int_0^\infty\int_x^\infty f_{X,Y}(x,y)dydx=\int_0^\infty\int_x^\infty \lambda e^{-\lambda x}\cdot\mu e^{-\mu y}dydx=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\cdot\int_x^\infty \mu e^{-\mu y}dydx=$$

- ✓ נחשב את האינטגרל הפנימי באמצעות המשלים להסתברות המצטברת בנקודה x. כלומר מתקיים $P(Y>x)=1-P(Y\le x)$:

$$=\int_0^\infty \lambda e^{-\lambda x}\cdot e^{-\mu x}dx=\int_0^\infty \lambda e^{-(\lambda+\mu)x}\,dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\int_0^\infty(\lambda+\mu)\cdot e^{-(\lambda+\mu)x}dx=\frac{\lambda}{\lambda+\mu}\cdot 1$$

ובגישה שונה: נחשב בעזרת הסתברות שלמה $P(Y>X)=\sum P(X=x)\cdot P(Y>x)=\int_0^\infty f_X(x)\cdot P(Y>x)dx$.

פונקציית הסתברות מצטברת של משתנה דו-מימדי שאינו בדיד ואינו רציף (סרטון):

נתונים X,Y המתפלגים באופן הבא. נתון ריבוע שצלעותיו מקבילות לצירים. נקודה נבחרת בתוך הריבוע, או באחד מבין קודקודיו. בסיכוי חצי נבחרת בין הקודקודים (כל אחד בסיכוי שווה), כלומר כל קודקוד בסיכוי $\frac{1}{8}$. בסיכוי חצי, מתפלגת אחיד בתוך הריבוע. אנו רוצים למצוא את $F_{X,Y}(x,y)=P(X\le x,Y\le y)$.

- ✓ בקודקוד השמאלי בתחתון הפונקציה מטפסת ל-$\frac{1}{8}$.
- ✓ כאשר אנו מתקרבים לריבוע בקצה הימני העליון, השטח שמשמאל ולמטה הוא שטח שכולל 3 קודקודים, ואנו מתקרבים ל-$\frac{3}{4}$. אי אפשר להגיע לערך זה, כי כל נקודה שהיא לא הקודקוד הימני העליון (שבו ההסתברות המצטברת היא 1), ההסתברות המצטברת היא מתקרבת ל-$\frac{3}{4}$.
- ✓ סה"כ נקבל $1\,,\left[\frac{1}{8},\frac{3}{4}\right),0$. למה זה קורה? נניח שנסתכל על $F_{X,Y}(5,0.99)$, זה עדיין לא כולל את הקודקודים העליונים, יש רצועה כלשהי שתמיד קיימת והיא קטנה מאוד.

1. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א' נוסף, פברואר 2007 .
יהיו X ו - Y שני מ"מ ב"ת ושווי התפלגות. נניח שמתקיים:

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x < -1 \\ 0.3 & -1 \leq x < 6 \\ \frac{x}{20} & 6 \leq x < 10 \\ 1 & x \geq 10 \end{cases}$$

מהו $P(X+Y>0)$? סמנו את התשובה הנכונה.

(א) 0.91

(ב) 0.25

(ג) 0.29

(ד) 0.7

(ה) אף לא אחד מהנ"ל

פתרון:
תשובה א' נכונה.
ראשית נשים לב שפונקצית ההתפלגות של X אינה רציפה: יש לה נק' אי רציפות ב $x=-1$ וגם ב $x=10$.
לכן X אינו מ"מ רציף. בנוסף, X אינו מ"מ בדיד משום שבקטע $[6,10)$ פונקצית ההתפלגות שלו אינה פונקצית מדרגות.
הערך -1 מתקבל בהסתברות 0.3, הקטע $(-1,6)$מתקבל בהסתברות 0, הקטע $[6,10)$ מתקבל בהסתברות 0.2, והערך 10 מתקבל בהסתברות 0.5.
כעת נביט במאורע **המשלים** למאורע שלגביו נשאלנו: כדי שיתקיים $X+Y\leq 0$ צריך להתקיים $X=Y=-1$ משום שאם אחד המ"מ אי שלילי אז ערכו לפחות 6 ומכיוון שהמ"מ האחר חסום מלמטה על ידי -1, סכומם חסום מלמטה על ידי 5. מכאן:

$$P(X+Y\leq 0) = P(X=-1, Y=-1) = P(X=-1)\cdot P(Y=-1) = 0.3\cdot 0.3 = 0.09$$

כאשר המעבר השני נובע מאי תלות (אחרת הסתברות החיתוך אינה שווה למכפלת ההסתברויות!).
אנחנו מעוניינים במאורע המשלים ולכן:

$$P(X+Y>0) = 1-P(X+Y\leq 0) = 1-0.09 = 0.91$$

תוחלת

תוחלת משתנים מקריים בדידים

תוחלת - עבור משתנה מקרי X, התוחלת של X תהיה $\boldsymbol{E(X)=\sum_k P(X=k)\cdot k}$. זה ממוצע על פני ההתפלגות, הממוצע התיאורטי המבוסס על שקלול של כל הערכים האפשריים.

דוגמאות:

- משתנה קוביה. $E(X)=\sum_k P(X=k)\cdot k=\frac{1}{6}\cdot 1+\frac{1}{6}\cdot 2+\cdots+\frac{1}{6}\cdot 6=3.5$.
- עבור **משתנה מנוון**, התוחלת שלו היא הערך היחיד שיכול להתקבל. $P(X=a)=1\Rightarrow E(X)=1\cdot a=a$.

תוחלות מוכרות:

סוג המשתנה	תוחלת	הערות
אחיד $U[a,b]$	$E(X)=\frac{a+b}{2}$	$E(X)=\sum_k P(X=k)\cdot k=\sum_{k=a}^{b}\frac{1}{b-a+1}\cdot k=\frac{1}{b-a+1}\cdot\sum_{k=a}^{b}k$ $=\frac{1}{b-a+1}\cdot\frac{(a+b)(b-a+1)}{2}=\frac{a+b}{2}$
אינדיקטור $B(p)$	$E(X)=p$	$(1-p)\cdot 0+p\cdot 1=p$

דוגמאות:

- תוחלת של אינדיקטור $B(0.5)$? 0.5.
- עכשיו ננסה לחשב את $E(X)$ כאשר $X\sim Bin(3{,}0.5)$.
  - $P(X=0)=P(X=3)=0.5^3=\frac{1}{8}$.
  - $P(X=1)=P(X=2)=3\cdot 0.5^3=\frac{3}{8}$.
  - נקבל: $E(X)=\frac{1}{8}\cdot 0+\frac{3}{8}\cdot 1+\frac{3}{8}\cdot 2+\frac{1}{8}\cdot 3=\frac{12}{8}=1.5$.
- זה הגיוני כי אנו עושים 3 ניסיונות, כאשר כל אחד תורם בממוצע 0.5 הצלחות, אז בסה"כ תוחלת מספר ההצלחות היא 1.5. כעת נראה את המשפט שמסביר את זה.

תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות (שיעור 7): מתקיים $E(X+Y)=E(X)+E(Y)$. באופן כללי: $\boldsymbol{E(\Sigma X_i)=\Sigma(E(X_i))}$.

ראינו כי עבור $X\sim Bin(3{,}0.5)$ מתקיים $E(X)=1.5$. כי בינומי זה סכום של 3 אינדיקטורים, שלכל אחד מהם יש תוחלת 0.5.

סוג המשתנה	תוחלת	הערות
בינומי $Bin(n,p)$	$E(X)=np$	הוא סכום של n אינדיקטורים שלכל אחד מהם תוחלת p.
היפרגאומטרי $HG(n;a,b)$	$E(X)=\frac{na}{a+b}$	משתנה זה הוא סכום של n אינדיקטורים שלכל אחד מהם יש הסתברות ותוחלת של $\frac{a}{a+b}$. **האינדיקטורים תלויים במקרה זה אבל זה לא משנה**. **נקבל:** $\boldsymbol{\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1}+\frac{b}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b-1}=\frac{a}{a+b}}$, **התוחלת זהה בכל שלב.** אז מתקיים $E(X)=n\cdot\frac{a}{a+b}$.

בעיית המזכירה: מזכירה צריכה לשלוח n מכתבים שכל אחד מהם מיועד לאדם אחר. היא התבלבלה ושולחת באקראי לחלוטין. X – מספר האנשים שיקבלו מכתב מתאים. מהו $E(X)$?

- ✓ מתקיים $X=\sum_{i=1}^{n}X_i$ כאשר X_i הוא אינדיקטור שאדם i קיבל מכתב נכון.
- ✓ מתקיים: $E(X)=E(\Sigma X_i)=\sum_{i=1}^{n}E(X_i)=\sum_{i=1}^{n}\frac{1}{n}=1$.

סוגיה דומה: נניח שלדן מיועדים 2 מכתבים, וליתר 8 האנשים מיועד מכתב אחד לכל אחד. המזכירה התבלבלה. מהי תוחלת מספר המכתבים שיגיעו ליעדם נכון?

- ✓ יש לנו 10 אינדיקטורים, X_i – מכתב i יגיע לייעדו. X_9, X_{10} – אינדיקטורים לכך שהמכתבים של דן יגיעו לדן. כל השאר הם אינדיקטורים של המכתבים האחרים.
- ✓ מתקיים: $E(X_i) = \frac{1}{10}$ לכל $1 \le i \le 8$. מתקיים: $E(X_9) = E(X_{10}) = \frac{2}{10}$.
- ✓ סה"כ נקבל: $E(X) = 8 \cdot \frac{1}{10} + 2 \cdot \frac{2}{10} = \frac{8}{10} + \frac{4}{10} = 1.2$.

סוגיות:

1) מטילים n פעמים מטבע הוגן של שני צדדיו מופיעים עץ ופלי, ההטלות ב"ת. מהי תוחלת מספר הפאות שנראה?
X – מספר הצורות שנראה לפחות פעם אחת.

- ✓ דרך א: $\mathrm{P(X = 1) = 0.5^n + 0.5^n = 2 \cdot 0.5^n = 0.5^{n-1}}$ או שנראה כל הזמן פלי או כל הזמן עץ.
נחשב: $P(X = 2) = 1 - P(X = 1) = 1 - 0.5^{n-1}$.
לפי הגדרה: $E(X) = P(X = 1) \cdot 1 + P(X = 2) \cdot 2 = 0.5^{n-1} + (1 - 0.5^{n-1}) \cdot 2 = 2 - 0.5^{n-1}$. כלומר כאשר מספר ההטלות מאוד גדול התוחלת מתקרבת ל-2.
- ✓ דרך ב: X_1, X_2 – אינדיקטורים שנראה לפחות פעם אחת "עץ", ולפחות פעם אחת "פלי" בהתאמה. $X = X_1 + X_2$.
כעת: $E(X) = E(X_1 + X_2) = E(X_1) + E(X_2) = (1 - 0.5^n) + (1 - 0.5^n) = 2 - 0.5^{n-1}$. כאשר התוחלת של כל אינדיקטור בנפרד (לראות לפחות פעם אחת) חושבה באמצעות המשלים (1 פחות שלא נראה אף פעם את התוצאה המבוקשת).

2) מטילים n פעמים קוביה תקינה, הטלות ב"ת. מהי תוחלת מספר הפאות שנראה?

- ✓ לא נוח לעבוד בדרך א' עם התפלגות. נעבוד בדרך ב' עם אינדיקטורים. X – מספר הפאות שנראה.
X_i – אינדיקטור לכך שנראה את התוצאה i כאשר $1 \le i \le 6$. מתקיים $X = \Sigma X_i$.
- ✓ נחשב: $P(X_i = 0) = \left(\frac{5}{6}\right)^n$ – לא נראה את התוצאה. $P(X_i = 1) = 1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n$ – כן נראה את התוצאה.
- ✓ כעת: $E(X) = E(\Sigma X_i) = \Sigma\big(E(X_i)\big) = 6 \cdot \left(1 - \left(\frac{5}{6}\right)^n\right)$.

3) יהי $E(X)$ תוחלת של X. יהיו z, y שני ממשיים. נניח $|y - E(X)| > |z - E(X)|$. האם בהכרח $P(X = y) > P(X = z)$?

- ✓ לא. בקוביה, $E(X) = 3.5$ אבל 3.5 לא יכול להתקבל. 6 כן יכול להתקבל.

לינאריות התוחלת (שיעור 7): יהי X משתנה מקרי אז $\boldsymbol{E(aX + b) = aE(X) + b}$.

1) נניח שמבצעים ניסיון שתוצאתו היא משתנה $X \sim Bin(7,0.5)$. על כל הצלחה אני מקבל 8 שקלים, ובנוסף אני משלם 9 שקלים על השתתפות במשחק. Y – מה שאני מקבל.

- ✓ מתקיים $Y = 8X - 9$.
- ✓ $E(Y) = E(8X - 9) = 8E(X) - 9 = 8 \cdot 7 \cdot 0.5 - 9 = 28 - 9 = 19$. כך חישבנו את התוחלת של Y מבלי להתייחס להתפלגותו.

2) אני משתתף במבחן אמריקאי. יש 20 שאלות, לכל שאלה יש 4 אפשרויות. על כל תשובה נכונה מקבלים 5 נקודות. על כל שגיאה יורדות 3 נקודות. מהי תוחלת הציון של מי שמנחש באקראי לחלוטין את התשובות?

- ✓ דרך א (לינאריות התוחלת): X – מספר התשובות הנכונות. Y – הציון (מותר גם ציון שלילי). אז $X \sim Bin(20, \frac{1}{4})$.
נקשר ביניהם: $Y = 5X - 3(20 - X) = 8X - 60$. לכן $E(Y) = 8E(X) - 60 = 8 \cdot 20 \cdot \frac{1}{4} - 60 = -20$.
- ✓ דרך ב (תוחלת הסכום): Y – הציון הכללי. Y_i – הציון בשאלה i. יש לנו 20 אינדיקטורים כאלו: $Y = \sum_{i=1}^{20} Y_i$.
נשים לב כי האינדיקטורים האלה מקבלים את הערך 5 או 3-: $E(Y_i) = \frac{1}{4} \cdot 5 + \frac{3}{4} \cdot (-3) = -1$.
אז נקבל: $E(Y) = E\left(\sum_{i=1}^{20} Y_i\right) = \Sigma\big(E(Y_i)\big) = \Sigma(-1) = -20$.

2ב) נניח שאני יודע את הפתרון של 11 שאלות, ואין לי כל מושג על היתר. מה צריך לעשות כדי להביא למקסימום את תוחלת הציון?

- ✓ לא כדאי בכלל לנחש, כי **תוחלת ניחוש היא שלילית**.

ג2) בעת נניח שאני רוצה למקסם את הסיכוי שלי לעבור. מה עלי לעשות?

✓ כדאי לנחש כי לא אפסיד מזה. בלי זה אני אבוד, ועם ניחוש יש סיכוי. אבל **כדאי לנחש מעט כי התוחלת שלילית**. אם ננחש הרבה פעמים אז תהיה התייצבות של הממוצע סביב התוחלת – בהפסד!

סוג המשתנה	תוחלת	הערות
פואסוני $P(\lambda)$	$E(X)=\lambda$	לפי הגדרה: $E(X)=\sum_{k=0}^{\infty}P(X=k)\cdot k=\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}k=$ $\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{(k-1)!}=\lambda\sum_{k=1}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}$ נעשה הצבה $t=k-1$. נקבל $\lambda\sum_{t=0}^{\infty}e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^t}{t!}=\lambda\cdot 1=\lambda$.
גיאומטרי $G(p)$	$E(X)=\frac{1}{p}$ כש-p גדול (קרוב ל-1) נקבל את ההצלחה מהר, וכש-p קטן (קרוב ל-0) ההצלחה נדחית, יש סיכוי קטן יותר.	ניעזר בנוסחת הזנב לחישוב תוחלת של משתנה שמקבל רק ערכים שלמים אי-שליליים. היא תקפה גם למשתנה רציף. נוסחה זו אומרת שלגבי משתנה כזה מתקיים: $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)$. נחשב: $P(X\geq k)=(1-p)^{k-1}=q^{k-1}$ $E(X)=\sum_{k=1}^{\infty}P(X\geq k)=\sum_{k=1}^{\infty}q^{k-1}=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$ יש גם דרך נוספת (אחרי ניסיון אחד, עדיין התוחלת היא של X ניסיונות, בגלל תכונת חוסר הזיכרון): $E(X)=p\cdot 1+q\big(1+E(X)\big)=p+q+qE(x)=1+qE(X)$ $E(X)=\frac{1}{1-q}=\frac{1}{p}$
בינומי שלילי $NB(n,p)$	$E(x)=\frac{n}{p}$	סכום של n משתנים $G(p)$. לכל אחד תוחלת $\frac{1}{p}$.

1. מסדרים חפיסת קלפים סטנדרטית בשורה, יהי Y מספר הזוגות הצמודים של לבבות. חשבו $\mathbb{E}Y$.

פתרון:

השאלה הזו היא דוגמא לכך, שלעיתים עשוי להיות קשה מאוד לחשב את ההתפלגות של משתנה מקרי, אבל קל לחשב את התוחלת שלו. בשאלות מהסוג הזה נציג את המשתנה המקרי שמעניין אותנו כסכום של אינדיקטורים. שימו לב שהאינדקטורים יכולים להיות תלויים, ועובדה זו לא תפריע לנו להשתמש במשפט לפיו תוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות.

נגדיר משתנה אינדיקטור Y_i- האם הקלפים במקומות $i,i+1$ הם לבבות. Y_i תלויים **ושווי התפלגות**. כעת:

$$Y=\sum_{i=1}^{51}Y_i$$

ולכן:

$$\mathbb{E}Y=\mathbb{E}\left(\sum_{i=1}^{51}Y_i\right)=\sum_{i=1}^{51}\mathbb{E}Y_i=51\times\mathbb{E}Y_1$$

כאשר המעבר האחרון נובע מכך שהאינדיקטורים שווי התפלגות: אין סיבה לחשוב ההסיכוי ששני הקלפים הראשונים יהיו לבבות, שונה מהסיכוי ששני קלפים אחרים, נניח הקלפים במקומות ה - 40 וה 41, יהיו לבבות. התלות בין המשתנים לא אומרת שהם מתפלגים באופן שונה!

כזכור, עבור משתנה אינדיקטור מתקיים:

$$\mathbb{E}X=P(X=1)$$

ההסתברות ששני הקלפים הראשונים הם לבבות היא:

$$P(Y_1=1)=\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}=\frac{\binom{13}{2}}{\binom{52}{2}}$$

לכן:

$$\mathbb{E}Y=51\times P(Y_1=1)=51\times\frac{13}{52}\times\frac{12}{51}=3$$

2. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א' ינואר 2007
יהי $X \sim Pois(\lambda)$ משתנה מקרי. נגדיר: $Y = |X-1|$. מצאו את $\mathbb{E}Y$.
פתרון:

Xמקבל את הערכים $0,1,2,\ldots$ וכך גם Y.
אם $X=0$, Y מקבל את הערך 1. בכל מקרה אחר, אם $X=k$, Yמקבל את הערך $k-1$ (זה נכון לכל $k=1,2\ldots$). לכן:

$$\mathbb{E}Y = P(X=0)\cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot(k-1) = 2P(X=0) + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot(k-1)$$
$$2P(X=0) + E(X-1) = 2e^{-\lambda} + \lambda - 1$$

3. n זוגות מגיעים למלון. לכל זוג חדר שמור, ולכל חדר שני מפתחות. הפקיד מבולבל, ולכן מחלק את המפתחות באקראי. נסמן ב Y את מספר הזוגות שיכולים להכנס לחדרם (מספיק שאחד מבני הזוג יחזיק מפתח מתאים כדי להיכנס לחדר). מהי התוחלת של Y?
פתרון:
נגדיר משתנה אינדיקטור Y_i שמציין האם הזוג הi יכול להכנס לחדרו. כעת:

$$Y = \sum_{i=1}^{n} Y_i$$

לכן:

$$\mathbb{E}[Y] = nE[Y_1] = n \times P(Y_1 = 1)$$

המשתנה Y_1 מקבל את הערך 1 אם לפחות אחד מהמפתחות של החדר נמצא אצל בני הזוג. נחשב דרך המשלים:

$$P(Y_1=1) = 1 - P(Y_1=0) = 1 - \frac{2n-2}{2n}\times\frac{2n-3}{2n-1} = 1 - \frac{2(n-1)(2n-3)}{2n(2n-1)} = 1 - \frac{(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)}$$
$$= \frac{n(2n-1)-(n-1)(2n-3)}{n(2n-1)} = \frac{4n-3}{n(2n-1)}$$

ולכן:

$$\mathbb{E}[Y] = nP(Y_1=1) = \frac{4n-3}{2n-1}$$

4. שולפים בזה אחר זה באקראי קלפים מחפיסת קלפים סטנדרטית, עם החזרה. נגדיר מ"מ X הסופר את מספר הקלפים שנשלוף עד שנראה לראשונה את כל 4 הצורות (לב, יהלום, עלה, תלתן). מהי התוחלת של X?

פתרון:

צורת הפתרון תהיה דומה לאופן שבו חישבתם בשיעור את התוחלת של מ"מ בינומי-שלילי בתור סכום של מ"מ גיאומטריים. גם במקרה זה נביע את X בתור סכום של גיאומטריים, אולם כעת לכל משתנה גיאומטרי יהיה פרמטר שונה.

נגדיר:

X_1- מספר הקלפים שנשלוף עד אשר נראה את הצורה הראשונה.

X_2- מספר הקלפים שנשלוף מהרגע שראינו את הצורה הראשונה ועד שנראה לראשונה את הצורה השנייה.

X_3- מספר הקלפים שנשלוף מהרגע שראינו את הצורה השנייה ועד שנראה לראשונה את הצורה השלישית.

X_4- מספר הקלפים שנשלוף מהרגע שראינו את הצורה השלישית ועד שנראה לראשונה את הצורה הרביעית.

נשים לב שמתקיים $X = X_1 + X_2 + X_3 + X_4$, ולכן $E(X) = \sum_{i=1}^{4} E(X_i)$.

X_1הוא מ"מ מנוון שתמיד שווה ל-1 (תמיד נראה את הצורה הראשונה בקלף הראשון שנפתח). אפשר גם להסתכל עליו בתור מ"מ גיאומטרי עם פרמטר $p = 1$.

X_2מתפלג גיאומטרי עם הסתברות להצלחה 0.75. הסבר: לאחר שכבר צפינו בצורה כלשהי, כעת יש לנו בכל שליפה של קלף הסתברות של 0.75 לצפות בצורה שעוד לא צפינו בה, והסתברות של 0.25 להוציא קלף עם אותה צורה שכבר צפינו בה.

באופן דומה: $X_3 \sim geom(0.5)$, $X_4 \sim geom(0.25)$. אנו יודעים שאם $Y \sim geom(p)$ אז $E(Y) = 1/p$, ולכן בסה"כ: $E(X) = 1 + 4/3 + 2 + 4 = 8\frac{1}{3}$.

<u>משתנה סימטרי:</u> אם מתקיים $\boldsymbol{P(X = a + x) = P(X = a - x)}$ לכל x, אז נגיד שהמשתנה X סימטרי סביב a. עבור משתנה כזה, נקבל $\boldsymbol{E(X) = a}$. הוכחה בשיעור 8 תשפ"ב: הראנו תחילה עבור משתנה סימטרי סביב 0: $P(X = x) = P(X = -x)$. לאחר מכן הראנו עבור משתנה סימטרי סביב a כלשהו. למשל, **משתנה קוביה הוא סימטרי סביב 3.5 (1 מתקבל כמו 6, 2 כמו 5...)**.

אילו משפחות סימטריות? אחיד, בינומי (רק אם זה פרמטר 0.5).

<u>סוגיה:</u> חברה מקיימת הגרלה. בהגרלה משתתפים 100 אנשים. כל משתתף משלם 1 ₪ עבור השתתפותו. הוא בוחר מספר בין 1 ל-100. אחר כך, החברה מגרילה מספר בין 1 ל-100 באופן אקראי לחלוטין. מי שהגריל את המספר הזה זוכה בקופה של מה ששילמו המשתתפים. אם כמה בחרו בו, אז הם מתחלקים בשלל. אם אף אחד לא בחר, אז הסכום נשאר בידי החברה. למי המשחק רווחי?

- ✓ החברה לא יכולה להפסיד, והיא יכולה רק להרוויח. לכן הוא רווחי עבורה.
- ✓ X – הרווח של החברה בהנחה שיש אי תלות בין בחירת המספרים ע"י המשתתפים.
- ✓ החברה תרוויח 100, אם כל אחד ינחש לא נכון (המשלים של ניחוש נכון 1 מתוך 100), עבור כל אחד מ-100 המשתתפים:

$$P(X = 100) = \left(1 - \frac{1}{100}\right)^{100}$$

- ✓ התוחלת היא $P(X = 100) \cdot 100 \approx \frac{e}{100}$.
- ✓ בזה יש פוטנציאל על ידי כך שבמכונות החברה תיצור קצת יותר חזרות על מספרים.

<u>תוחלת מותנה:</u> בהינתן מאורע כלשהו A נגדיר: $\boldsymbol{E(X|A) = \sum P(X = x|A) \cdot x = \sum \frac{P(A,X=x)}{P(A)} \cdot x}$.

ואז למשל: $E(X|X > b) = \sum P(X = x|X > b) \cdot x = \sum \frac{P(X>b,X=x)}{P(X>b)} \cdot x$.

דוגמה: נניח ש-$X \sim U[1,6]$, מהו $E(X|X > 3)$?

- ✓ $P(X = 6|X > 3) = \frac{P(X=6,X>3)}{P(X>3)} = \frac{\frac{1}{6}}{\frac{3}{6}} = \frac{1}{3}$.
- ✓ באותה צורה $P(X = 5|X > 3) = \frac{1}{3}$.
- ✓ סה"כ $X|_{X>3} \sim U[4,6]$ ולכן תוחלתו המותנה היא $5 = \frac{4+6}{2}$.

תוחלת שלמה:

1) יש לי קוביה שעליה כתובים הערכים 1 עד 6, ומטבע עם הערכים 1, 2. אני בוחר באחד מהם בסיכוי שווה ומטיל אותו. מהי תוחלת הערך X שאקבל?

- ✓ אפשר לחשב באופן ישיר את ההתפלגות של כל ערך, ולחשב את התוחלת.
- ✓ במקום זה, נגדיר A – בחרתי בקוביה. כעת: $E(X|A)=3.5$, $E(X|A^C)=1.5$.
- ✓ נחשב: $\boldsymbol{E(X)=P(A)\cdot E(X|A)+P\left(A^C\right)\cdot E\left(X\middle|A^C\right)}=0.5\cdot 3.5+0.5\cdot 1.5=2.5$.

2) יש 4 מטבעות. הראשון נופל על "עץ" בסיכוי $\frac{1}{4}$, השני $\frac{2}{4}$, השלישי $\frac{3}{4}$ והרביעי 1. בוחרים בסיכוי שווה באחד המטבעות ומבצעים 8 הטלות. מהי תוחלת מספר העצים X?

- ✓ נחשב: $E(X)=\frac{1}{4}\cdot 8\cdot\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\cdot 8\cdot\frac{2}{4}+\frac{1}{4}\cdot 8\cdot\frac{3}{4}+\frac{1}{4}\cdot 8\cdot 1$. נראה שבאן כל תוחלת בנפרד היא של בינומי - np.

נוסחת התוחלת השלמה: יהיו X,Y משתנים מקריים. עבור כל ערך אפשרי של Y קיימת תוחלת מותנה של X. התוחלת של X היא השקלול של תוחלות אלה. מתקיים $\boldsymbol{E(X)=E(E(X|Y))}$.

דוגמה: למבחן ניגשים 100 אנשים. כל אחד עובר אותו בסיכוי 0.8 באופן ב"ת באחרים. כל מי שעובר ניגש למבחן נוסף שאותו כל אחד עובר בסיכוי 0.9. מהי תוחלת מספר העוברים?

- ✓ נגדיר Y – מספר העוברים בשלב הראשון. X – מספר העוברים את שני המבחנים.
- ✓ נשים לב כי $Y\sim Bin(100,0.8)$, $X|_{Y=y}\sim Bin(y,0.9)$.
- ✓ כעת: $E(X|Y)=0.9Y$. לכן $E(X)=E\big(E(X|Y)\big)=E(0.9Y)=0.9E(Y)=0.9\cdot(100\cdot 0.8)=72$.

תוחלת של טרנספורמציה של משתנה: $\boldsymbol{E\big(g(x)\big)=\sum P(X=k)\cdot g(k)}$.

דוגמה: עבור $X\sim U[1,4]$, $g(x)=x^3$. נחשב:

$$E\big(g(x)\big)=P(X=1)\cdot 1^3+P(X=2)\cdot 2^3+P(X=3)\cdot 3^3+P(X=4)\cdot 4^3$$

1. ממבחנים שונים של ד"ר שלומי רובינשטיין
יהיו X ו Y שני מ"מ רציפים וב"ת המתפלגים אחיד על הקטע $(0,1)$

(א) חשבו את תוחלת שטחו של הריבוע שאורך הצלע שלו היא X

(ב) חשבו את התוחלת המותנית: $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid Y=y)$

(ג) האם התוחלת: $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid X+Y<0.2)$ סופית?

פתרון:

(א) יהי $S=X^2$ שטח הריבוע. התבקשנו לחשב את $\mathbb{E}S$. מדובר בתוחלת של פונקציה של מ"מ שאת התפלגותו אנחנו יודעים:

$$\mathbb{E}S=\mathbb{E}X^2=\int_0^1 t^2\cdot f_X(t)\mathrm{d}t=\int_0^1 t^2\cdot 1\mathrm{d}t=\frac{1}{3}$$

(ב)

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid Y=y)=\int_0^1\frac{1}{t+y}\cdot f_X(t)\mathrm{d}t=\int_0^1\frac{1}{t+y}\cdot 1dt=ln(1+y)-ln(y)$$

(ג) מכיוון שחישבנו את התוחלת המותנית, נוכל להעזר בה כדי לחשב (בעזרת נוסחת התוחלת השלמה) את התוחלת הלא מותנית הבאה:

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y})=\int_0^1\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid Y=y)\cdot f_Y(y)\mathrm{d}y=\int_0^1\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid Y=y)\cdot 1dy=\int_0^1 ln(1+y)-ln(y)dy<\infty$$

כעת, לאחר שידוע לנו ש $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y})<\infty$ נוכל לקבוע שגם $\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid X+Y<0.2)<\infty$.
הסבר: אילו התוחלת המותנית היתה אינסופית, ומכיוון שהמאורע שמתנים בו הוא בעל הסתברות חיובית, אז התוחלת השלמה שהיא "ממוצע משוקלל" של התוחלות המותנות היתה אינסופית גם היא. כלומר:

$$\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y})=\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid X+Y<0.2)\cdot Pr(X+Y<0.2)+\mathbb{E}(\frac{1}{X+Y}\mid X+Y\geq 0.2)\cdot Pr(X+Y\geq 0.2)<\infty$$

המחובר הימני סופי (תוחלת של מ"מ חסום היא סופית), לכן אילו המחובר השמאלי היה אינסוף, גם הסכום היה אינסופי, וזאת בניגוד למה שהראינו.

תוחלת משתנים מקריים רציפים

עבור משתנה מקרי רציף בהחלט נגדיר: $\boldsymbol{E(X)=\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\cdot x\,dx}$.

תוחלת של משתנה מקרי אחיד:

נחשב את $E(X)$ עבור $X\sim U(a,b)$. נקבל: $E(X)=\int_a^b \frac{1}{b-a}\cdot x\,dx=\frac{1}{b-a}\int_a^b x\,dx=\frac{1}{b-a}\cdot\frac{1}{2}x^2\,\Big|_a^b=\boldsymbol{\frac{a+b}{2}}$.
התוצאה הזו סבירה כי המשתנה סימטרי סביב $\frac{a+b}{2}$.

דוגמה אחרת: X – משתנה מקרי המקיים $f_X(x)=\begin{cases}cx & 0\le x\le 1\\ 0 & else\end{cases}$. מצאו את c ואת $E(X)$.

- ✓ באינטואיציה המשתנה אינו סימטרי סביב 0.5. נצפה שהתוצאה תהיה גדולה מ-0.5.
- ✓ $\int_{-\infty}^{\infty} f_X(x)\,dx=\int_0^1 cx\,dx=1$ ומכאן נקבל $c=2$.
- ✓ כעת $E(X)=\int_0^1 2x\cdot x\,dx=\frac{2}{3}$.

תוחלת של משתנה מעריכי:

יהי $X\sim\exp(\lambda)$. הראנו שמתקיים $E(X)=\frac{1}{\lambda}$.

הגדרת תוחלת כללית של משתנה שמקבל רק ערכים אי-שליליים: $\boldsymbol{E(X)=\int_0^{\infty} 1-F_X(x)\,dx}$. זה מזכיר לנו את נוסחת הזנב. זה תופס לכל משתנה מכל סוג. נחשב תוחלת של $X\sim\exp(\lambda)$ לפי הגדרה זו:

$$E(X)=\int_0^{\infty} 1-F_X(x)\,dx=\int_0^{\infty} 1-(1-e^{-\lambda x})dx=\int_0^{\infty} e^{-\lambda x}\,dx=\frac{1}{\lambda}$$

טענה: עבור X,Y משתנים רציפים מתקיים **שתוחלת הסכום שווה לסכום התוחלות** (בדיוק כמו בבדיד).

שאלה: יש לי 5 כוסות. אורך החיים של כל אחת מהן מתפלג $\exp(\lambda)$. אורכי החיים ב"ת. מהי תוחלת הזמן עד שאחת מהן תישבר?

- ✓ ניזכר בטענה על התפלגות מינימום של מעריכיים. הזמן עד שכוס אחת תישבר מתפלג מעריכית עם **פרמטר ששווה לסכום הפרמטרים**.
- ✓ לכן כאן נקבל $\exp(5\lambda)$. יש לו תוחלת של $\frac{1}{5\lambda}$.

שונות

שונות של משתנים מקריים

התוחלת נתנה לנו ערך מרכזי. אבל יש משמעות לפיזור. תוחלת נותנת רק נתון מסוים של הערך הממוצע, ולא מידע על כל ההתפלגות.

שונות: נאמוד פיזור באמצעות ממוצע ריבועי הסטיות מהתוחלת. יהי X משתנה מקרי שתוחלתו $E(X)$. השונות של X מסומנת $Var(X)$ או $V(X)$.

- מוגדרת על ידי: $\boldsymbol{Var(X) = E\left(\left(X - E(X)\right)^2\right) = \sum P(X = k)\left(k - E(X)\right)^2}$ (זו הגדרת השונות, מכפילים את ההסתברות של כל ערך במרחק שלו מהתוחלת, **שונות לא יכולה להיות שלילית. שונות היא 0 רק במשתנה מנוון**).
- לאחר פיתוח הנוסחה מתקיים: $\boldsymbol{Var(X) = E\left(X^2\right) - E^2(X)}$ (זו הנוסחה לחישוב שונות).

שונות של משתנה מנוון: נתון $P(X = a) = 1$. התוחלת היא a.
מתקיים $V(X) = \Sigma P(X = k) \cdot (k - a)^2 = P(X = a) \cdot (a - a)^2 = 0$.
אין סטיות מהתוחלת ולכן נצפה שהשונות אכן תהיה 0.

שונות של משתנה אינדיקטורי: אנו יודעים כי $E(X) = p$.
מתקיים: $V(X) = (1 - p) \cdot (0 - p)^2 + p(1 - p)^2 = (1 - p) \cdot p^2 + p(1 - p)^2 = p(1 - p)(p + 1 - p) = p(1 - p)$.

שונות של משתנה אחיד: עבור $X \sim U[a, b]$, מתקיים:

$$V(X) = E(X^2) - E^2(X) = \sum_{k=a}^{b} P(X = k) \cdot k^2 - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \sum_{k=a}^{b} \frac{1}{b - a + 1} \cdot k^2 - \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 = \boldsymbol{\frac{(b - a + 1)^2 - 1}{12}}$$

למשל עבור קוביה $X \sim U[1,6]$ מתקיים $V(X) = \frac{35}{12} \approx 3$.

שונות של פונקציה לינארית: במקרה של התוחלת ראינו כי $E(aX + b) = aE(X) + b$. כאן זה לא יתקיים. נחשב:

$$\boldsymbol{V(aX + b)} = E\left(aX + b - E(aX + b)\right)^2 = E\left(aX - E(aX)\right)^2 = a^2 E\left(X - E(X)\right)^2 = \boldsymbol{a^2 V(X)}$$

שונות משותפת של משתנים מקריים

למדנו שתוחלת סכום שווה לסכום התוחלות. האם זה נכון גם לגבי שונות? לא. שונות סכום שווה לסכום השונויות ועוד גורם חדש. לגורם החדש נקרא שונות משותפת – שונות של שילוב שני המשתנים: $\boldsymbol{V(X + Y) = V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y)}$. בהכללה:

$$\boldsymbol{Var\left(\sum X_i\right) = \sum Var(X_i) + 2 \sum_{i} \sum_{i<j} Cov(X_i, X_j)}$$

למשל עבור 3 משתנים: $V(X + Y + Z) = V(X) + V(Y) + V(Z) + 2Cov(X, Y) + 2Cov(X, Z) + 2Cov(Y, Z)$.

שונות משותפת: נגדיר $Cov(X, Y) = E\left(\left(X - E(X)\right) \cdot \left(Y - E(Y)\right)\right)$.

דוגמה לחישוב שונות משותפת מתוך טבלה:

X\Y	1	2	5	
0	0.1	0	0.2	0.3
2	0.15	0.25	0.3	0.7
	0.25	0.25	0.5	

נעבור על כל הערכים בטבלה, נחשב את המכפלה לכל ערך של המרחק מהתוחלת, ונסכום:

- $E(X) = 0.3 \cdot 0 + 0.7 \cdot 2 = 1.4, \;\; E(Y) = 0.25 \cdot 1 + 0.25 \cdot 2 + 0.5 \cdot 5 = 3.25$
- $Cov(X, Y) = 0.1 \cdot \left(0 - E(X)\right)\left(1 - E(Y)\right) + 0.2 \cdot \left(0 - E(X)\right)\left(5 - E(Y)\right) + \cdots$

נוסחה לחישוב שונות משותפת: $\boldsymbol{Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)}$.

דוגמה לחישוב $Cov(X,Y)$: נתונה התפלגות משותפת:

X\Y	0	1	5	
1	0.1	0	0.2	0.3
4	0	0.3	0.4	0.7
	0.1	0.3	0.6	

- מתקיים: $E(X) = 3.1, E(Y) = 3.3$.
- לפי ההגדרה: $Cov(X,Y) = E\big(X - E(X)\big)\big(Y - E(Y)\big) = 0.1(1-3.1)(0-3.3) + 0.2(1-3.1)(5-3.3) + 0.3(4-3.1)(1-3.3) + 0.4(4-3.1)(5-3.3)$

או לפי הנוסחה:

- לפי הנוסחה: $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)\cdot E(Y)$
- נחשב: $E(XY) = 0.1\cdot 1\cdot 0 + 0.2\cdot 1\cdot 5 + 0.3\cdot 4\cdot 1 + 0.4\cdot 4\cdot 5$.

תכונות נוספות של שונות משותפת:

1. מתקיים: $Cov(X,X) = Var(X)$.
2. **אם X,Y הם ב"ת אז $Cov(X,Y) = 0$.**
   a. כי עבור זוג משתנים ב"ת מתקיים $E(XY) = E(X)\cdot E(Y)$.
   b. אמנם זהו תנאי מספיק ולא הכרחי, אם $Cov(X,Y) = 0$ הם לא בהכרח ב"ת.
3. $Var(\sum_{i=1}^{n} X_i) = \sum_{i=1}^{n} Var(X_i) + 2\cdot\sum_{i<j} Cov(X_j, X_j)$.
4. $Cov(\sum_{i=1}^{n} X_i, \sum_{i=1}^{n} Y_i) = \sum_i \sum_j Cov(X_i, X_j)$.
5. $Cov(aX+b, cY+d) = ac\cdot Cov(X,Y)$.
6. $Cov(X,Y) = Cov(Y,X)$.
7. $Cov(X,Y) < 0$ – המשתנים מרסנים אחד את השני. $Cov(X,Y) > 0$ – המשתנים מלבים אחד את השני.

דוגמה למה הכיוון ההפוך לא עובד ב-2: למשל עבור $P(X=1, Y=1) = \frac{1}{3}, P(X=-1, Y=1) = \frac{1}{3}, P(X=0, Y=0) = \frac{1}{3}$.

- המשתנים תלויים כי: $P(Y=0|X=0) = 1 \neq P(Y=0)$.
- $E(XY) = \frac{1}{3}\cdot 0\cdot 0 + \frac{1}{3}\cdot(-1)\cdot 1 + \frac{1}{3}\cdot 1\cdot 1 = 0$.
- $E(X) = 0$ כי הוא סימטרי סביב 0.
- לכן קיבלנו כי $Cov(X,Y) = 0$ אבל המשתנים תלויים!

דוגמה: מטילים 8 מטבעות הוגנים. X מספר העצים, Y מספר הפלי. המשתנים אינם קבועים, ולכן השונות שלהם חיובית. מתקיים $V(X), V(Y) > 0$. מתקיים: $V(X+Y) = 0$ כי הסכום קבוע – הוא תמיד יהיה 8! לכן לפי הגדרת השונות: $V(X) + V(Y) + 2Cov(X,Y) = 0$ ולכן נסיק כי מתקיים $Cov(X,Y) < 0$, הוא מרסן את הפיזור של X ו-Y.

סימונים:

- אם $Cov(X,Y) = 0$ אז אומרים ש-X ו-Y **בלתי מתואמים**.
- תוחלת של X מסומנת גם ב-$\boldsymbol{\mu_X}$.
- שונות של X מסומנת גם ב-$\boldsymbol{\sigma_X^2}$. כאשר σ זה השורש של השונות: $\sigma_X = \sqrt{V(X)}$ וזו סטיית התקן.

שונות של משתנים מקריים בדידים

שונות של משתנה בינומי - $Bin(n,p)$:

X הוא סכום של n משתנים ב"ת שווי התפלגות אינדיקטורים. לכל אינדיקטור יש שונות pq. מכיוון שה-Cov בין האינדיקטורים הם אפסים (ב"ת), אז שונות הסכום שלהם שווה לסכום השונויות: $\boldsymbol{Var(X) = npq}$.

שונות של משתנה היפרגאומטרי – $HG(n;a,b)$:

X הוא סכום של n אינדיקטורים. לכל אחד הסתברות $\frac{a}{a+b}$, וכאן הם תלויים. מתקיים: $Var(X) = \sum Var(X_i) +$ $2\sum_i\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$. לכל i מתקיים $Var(X_i) = \frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b} = pq$.
נחשב: $Cov(X_1\cdot X_2) = E(X_1X_2) - E(X_1)E(X_2) = P(X_1=1,X_2=1) - P(X_1=1)P(X_2=1) =$
$$\frac{a}{a+b}\cdot\frac{a-1}{a+b-1} - \frac{a}{a+b}\cdot\frac{a}{a+b}$$
מקבלים בסופו של דבר: $\boldsymbol{Var(X) = n\cdot\frac{a}{a+b}\cdot\frac{b}{a+b}\left(1-\frac{n-1}{a+b-1}\right)} = npq\left(1-\frac{n-1}{a+b-1}\right)$. יש כאן שונות של בינומי עם פקטור שמרסן אותו קצת. השונות 0 כאשר $n = a+b$, כי אנחנו מוציאים את כל הכדורים.

1) <u>בעיית המזכירה הרשלנית:</u> n מכתבים באקראי ל-n אנשים. X – מספר האנשים שמקבלים את המכתב המתאים. בעבר חישבנו את התוחלת וקיבלנו $E(X) = 1$.

- מה השונות אם מתקיים $n=2$? הסטייה מהתוחלת היא במקסימום 1 (או ש-1 יקבל או ש-2 יקבל), ולכן גם ריבוע הסטיה הוא 1 והשונות היא 1. $P(X=0)\cdot(0-1)^2 + P(X=2)(2-1)^2 = 1^2 = 1$.
- מה השונות אם יש n אנשים? $X = \sum_{i=1}^n X_i$. $V(X) = V(\sum X_i) = \sum V(X_i) + 2\sum_i\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$.
  כל משתנה הוא אינדיקטור ולכן $V(X_i) = pq = \frac{1}{n}\cdot\frac{n-1}{n}$. סכום השונויות הוא $n\cdot V(X_i) = \frac{n-1}{n}$.
  עכשיו נחשב את השונות המשותפת:
  $$Cov(X_i,X_j) = E(X_iX_j) - E(X_i)E(X_j) = P(X_i=1,X_j=1) = \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\cdot\frac{1}{n} = \frac{1}{n^2(n-1)}$$
  סה"כ קיבלנו: $V(X) = \frac{n-1}{n} + 2\binom{n}{2}\cdot\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + n(n-1)\cdot\frac{1}{n^2(n-1)} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1$.

2) מטילים 10 פעמים מטבע הוגן, בעל התוצאות h, t. מהי שונות מספר הרצפים של hh? X – מספר הרצפים.

- מתקיים $X = \sum_{i=1}^9 X_i$, יש 9 מקומות אפשריים לרצפים. מתקיים: $V(X_i) = \left(\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\right)\cdot\left(1-\frac{3}{4}\right) = \frac{3}{16}$.
- נרצה לחשב $V(X) = V(\sum X_i) = \sum_{i=1}^9 V(X_i) + 2\sum_i\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$.
- כל שני רצפים מגדירים שלשה. יש 8 שלשות.
  - $Cov(X_i,X_j) \neq 0$ רק אם יש חפיפה בין i ל-j. אחרת יש אי תלות וזה יוצא 0. לכן:
  $$Cov(X_i,X_{i+1}) = E(X_i\cdot X_{i+1}) - E(X_i)\cdot E(X_{i+1}) = \frac{1}{8} - \frac{1}{4}\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{16}$$
- סה"כ: $V(X) = 9\cdot\frac{3}{16} + 2\cdot 8\cdot\frac{1}{16}$.

3) מבצעים 10 הטלות ב"ת של קוביה תקינה. מהי שונות מספר הרצפים 6,5,6? X – מספר הרצפים.

- מתקיים $X = \sum_{i=1}^8 X_i$, יש 8 מקומות אפשריים לרצפים. מתקיים: $V(X_i) = \left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^3\right)$
- נרצה לחשב $V(X) = V(\sum X_i) = \sum_{i=1}^8 V(X_i) + 2\sum_i\sum_{i<j} Cov(X_i,X_j)$.
- 1 - כל שתי שלשות סמוכות מגדירות רביעייה. יש **7 רביעיות**.
  - $Cov(X_i,X_{i+1}) = E(X_i\cdot X_{i+1}) - E(X_i)\cdot E(X_{i+1}) = 0 - \frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6^3} < 0$
- 2 - יש שלשות שיש להם שני חופפים, ומוגדרת חמישייה. יש **6 חמישיות**.
  - $Cov(X_i,X_{i+2}) = E(X_i\cdot X_{i+2}) - E(X_i)\cdot E(X_{i+2}) = \frac{1}{6^5} - \frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6^3} > 0$
- סה"כ: $V(X) = 8\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^3\left(1-\left(\frac{1}{6}\right)^3\right) + 2\cdot 7\cdot\left(-\frac{1}{6^6}\right) + 2\cdot 6\left(\frac{1}{6^5} - \frac{1}{6^3}\cdot\frac{1}{6^3}\right)$

4) יהיו X,Y זוג משתנים ב"ת בעלי שונות סופית, שווי התפלגות. $V(X)=\sigma^2$.

- מהו $E(2X)$? $2E(X)$. מהו $E(X+Y)$? גם $2E(X)$.
- מהו $V(X+Y)$? $V(X)+V(Y)+2Cov(X,Y)=2V(X)+0=2V(X)$.
- אמנם $V(2X)=2^2V(X)=4V(X)\neq 2V(X)$ (פונקציה לינארית). ההבדל נובע מכך ש-$2X=X+X$. **אבל X כן תלוי ומתואם עם X (מתאם חיובי זה שונות משותפת חיובית). לעומת זאת, X לא מתואם עם Y.**
- בעצם מתקיים $V(2X)=V(X+X)=V(X)+V(X)+2Cov(X,X)=V(X)+V(X)+2V(X)=4V(X)$.

5) למה שואפת שונות של ממוצע משתנים שווי התפלגות ב"ת בעלי שונות סופית? אם שואלים אנשים שונים היא שואפת ל-0!

$$V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i)=\frac{1}{n^2}\cdot n\cdot V(X_1)=\frac{V(X_1)}{n}$$

אם נחזור ונשאל את אותו בן אדם הרבה פעמים, אז $\sum_{i=1}^n X_i=nX_1$ והשונות נשארת השונות המקורית:

$$V\left(\frac{\sum_{i=1}^n X_i}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V\left(\sum_{i=1}^n X_i\right)=\frac{1}{n^2}V(nX_1)=\frac{1}{n^2}\cdot n^2\cdot V(X_1)=V(X_1)$$

<u>שונות של משתנה גיאומטרי - $G(p)$:</u>
על ידי חישוב של $E(X^2)=P(X=1)\cdot 1^2+P(X>1)\cdot E(X+1)^2$ מגיעים לנוסחה $V(X)=\frac{\boldsymbol{q}}{\boldsymbol{p^2}}$.

נשים לב כי אם $p\to 1$ אז $q\to 0$. אם מצליחים בפעם הראשונה הפיזור הוא קטן. אם $p\to 0$, מספר הניסיונות עד ההצלחה ה-X יוכל לקבל ערכים גדולים מאוד ולכן הפיזור גדול.

<u>שונות של משתנה בינומי שלילי - $NP(n,p)$:</u> זהו סכום של n גיאומטריים ב"ת. שונות הסכום שווה (הודות לאי-תלות) לסכום השונויות שזה $\frac{\boldsymbol{nq}}{\boldsymbol{p^2}}$.

<u>שונות של משתנה פואסוני - $P(\lambda)$:</u> אנו יודעים כי $E^2(X)=\lambda^2$.
נחשב: $E(X^2)=\Sigma P(X=k)\cdot k^2=\sum_{k=0}^{\infty}\left(e^{-\lambda}\cdot\frac{\lambda^k}{k!}\cdot k^2\right)=\cdots=\lambda^2+\lambda$. לכן סה"כ נקבל $V(X)=\boldsymbol{\lambda}$.

שונות של משתנים מקריים רציפים

מתקיים $E\big(g(X)\big)=\int f_X(x)\cdot g(x)\,dx$ לפי תוחלת טרנספורמציה של משתנה. לכן: $E(X^2)=\int f_X(x)\cdot X^2\,dx$.

<u>שונות של משתנה $U(a,b)$:</u>

אנו יודעים כי עבור $a\le x\le b$ מתקיים $f_X(x)=\frac{1}{b-a}$. מתקיים $E^2(X)=\left(\frac{a+b}{2}\right)^2$. נחשב:
$E(X^2)=\int_a^b\frac{1}{b-a}\cdot X^2\,dx=\frac{a^2+ab+b^2}{3}$ ואז נקבל $Var(X)=\frac{a^2+ab+b^2}{3}-\left(\frac{a+b}{2}\right)^2=\frac{\boldsymbol{(b-a)^2}}{\boldsymbol{12}}$.

<u>שונות של משתנה $\exp(\lambda)$:</u> מתקיים $Var(X)=\frac{1}{\lambda^2}$.

<u>סוגיה:</u> מטילים 5 פעמים קוביה תקינה, הטלות ב"ת. X_i – מספר הפעמים שנקבל תוצאה i. מהו $Var(X_1\cdot X_2\cdot\ldots\cdot X_6)$? השונות כאן היא 0, כיוון שהמכפלה הזאת תמיד יוצאת 0. אי אפשר לקבל 6 תוצאות שונות ב-5 הטלות. לא חייבים שההטלות יהיו ב"ת.

חישוב שונות משותפת בכמה דרכים

1) מבצעים 8 הטלות ב"ת של קוביה תקינה. יהי X_i – מספר הפעמים שמקבלים תוצאה i. מהו $Cov(X_1,X_6)$?

- ✓ דרך א: $V(X_1)=V(X_6)=8\cdot\frac{1}{6}\cdot\frac{5}{6}$ כי מדובר במשתנה $Bin(8,\frac{1}{6})$. $V(X_1+X_6)=8\cdot\frac{2}{6}\cdot\frac{4}{6}$ כי מדובר ב-$Bin(8,\frac{2}{6})$ (הסיכוי לקבל 1 או 6 בכל הטלה הוא $\frac{2}{6}$).
מתקיים $V(X_1+X_6)=V(X_1)+V(X_6)+2\cdot Cov(X_1,X_6)$ ולכן **נוכל לחלץ את** $\boldsymbol{Cov(X_1,X_6)=-\frac{2}{9}}$.
- ✓ דרך ב (לפי תכונת הלינאריות):
  - מתקיים $Cov(X_6,8-X_6)=Cov(X_6,8)-Cov(X_6,X_6)=-Cov(X_6,X_6)=-V(X_6)$.
  - מתקיים $Cov(X_6,X_1+X_2+\cdots+X_5)=Cov(X_6,8-X_6)=-V(X_6)$.
  - מתקיים $Cov(X_6,X_1+\cdots+X_5)=Cov(X_6,X_1)+\cdots+Cov(X_6,X_5)$.
  - נטען כי $Cov(X_6,X_i)=Cov(X_6,X_j)$ לכל $i\neq j\neq 6$. נקבל $5\cdot Cov(X_6,X_1)=-V(X_6)$ וכך נקבל $\boldsymbol{Cov(X_1,X_6)=-\frac{2}{9}}$.
- ✓ דרך ג:
  - יהי $X_{i,j}$ – אינדיקטור לכך שבהטלה ה-j קיבלנו תוצאה של i.
  - מתקיים $Cov(X_1,X_6)=Cov\left(\sum_{j=1}^{8}X_{1,j},\sum_{k=1}^{8}X_{6,k}\right)=\sum_{j=1}^{8}\sum_{k=1}^{8}Cov\left(X_{1,j},X_{6,k}\right)=\sum_{j=1}^{8}Cov\left(X_{1,j},X_{6,j}\right)=8\cdot-\frac{1}{36}=-\frac{2}{9}$
  - נחשב $Cov\left(X_{1,j},X_{6,j}\right)=E\left(X_{1,j}\cdot X_{6,j}\right)-E\left(X_{1,j}\right)\cdot E\left(X_{6,j}\right)=-\frac{1}{36}$.

<u>תרגול 9</u>: נשים לב כי עבור X,Y ב"ת מתקיים: $\boldsymbol{V(X-Y)=V(X)+V(-Y)=V(X)+V(Y)}$.

1. מתוך מבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א' ינואר 2016
נתונים שני מקלות באורך 3. שוברים כל אחד מהמקלות בנקודה אחת הנבחרת לפי התפלגות אחידה רציפה לאורך המקל, ובאופן ב"ת בבחירת הנקודה במקל האחר. כך נוצרים שני שברים מכל מקל. נסמן:
X אורך שבר אחד של המקל הראשון (נבחר אקראית מבין שני השברים).
Y אורך השבר האחר של המקל הראשון.
Z אורך אחד השברים של המקל השני (נבחר אקראית מבין שני השברים).

(א) מצאו את $\mathbb{E}(XY)$.
(ב) מצאו את $\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor)$.
(ג) מצאו את $\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor)$
(ד) מצאו את $Cov(X,X^2)$.

פתרון:

(א) ראשית נשים לב שמתקיים $Y=3-X$. לכן מבקשים מאיתנו לחשב $\mathbb{E}\left(X\left(3-X\right)\right)=\mathbb{E}\left(3X-X^2\right)$.
לכן:

$$\mathbb{E}(XY)=\mathbb{E}\left(3X-X^2\right)=3\mathbb{E}X-\mathbb{E}X^2=3\mathbb{E}X-\left(Var(X)+(\mathbb{E}X)^2\right)$$

כאשר המעבר השני נובע מלינאריות התוחלת והמעבר האחרון מהנוסחא העיקרית לחישוב שונות. נעזר בכך שאנו יודעים למצוא את התוחלת והשונות של X:

$$\mathbb{E}(XY)=3\mathbb{E}X-\left(Var(X)+(\mathbb{E}X)^2\right)=3\cdot\frac{3}{2}-\left(\frac{3^2}{12}+\left(\frac{3}{2}\right)^2\right)=\frac{3}{2}$$

(ב) פונקציית הערך השלם מעבירה אותנו מטיפול במ"מ רציף X לטיפול במ"מ אחיד $\lfloor X\rfloor$. $\lfloor X\rfloor$ יכול לקבל את הערכים 0, 1 או 2 וכך גם $\lfloor Y\rfloor$. נבדוק אילו זוגות $(\lfloor X\rfloor,\lfloor Y\rfloor)$ אפשריים (שימו לב שהערך שמקבל $\lfloor X\rfloor$ קובע באופן חד ערכי את הערך שמקבל $\lfloor Y\rfloor$:

$\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor$	$\lfloor Y\rfloor$	$\lfloor X\rfloor$
0	2	0
1	1	1
0	0	2

כלומר המשתנה $\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor$ הוא אינדיקטור המקבל את הערך 1 כאשר X מקבל את הערך 1 - כלומר

בהסתברות $\frac{1}{3}$. ולכן:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Y\rfloor)=\mathbb{E}(\mathbb{I}_{\lfloor X\rfloor=1})=P(1\le X<2)=\frac{1}{3}$$

(ג) בניגוד לסעיפים הקודמים בהם המשתנים היו תלויים (שני שברים של אותו מקל), כאן המשתנים הם ב"ת. העובדה ש X ב"ת ב - Z גוררת ש $\lfloor X\rfloor$ ב"ת ב - $\lfloor Z\rfloor$. משתנים ב"ת הם גם בלתי מתואמים (אבל לא להפך!). כלומר מתקיים:

$$Cov\left(\lfloor X\rfloor,\lfloor Z\rfloor\right)=\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor)-\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor)\mathbb{E}(\lfloor Z\rfloor)=0$$

נעביר אגפים ונקבל:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor)=\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor)\mathbb{E}(\lfloor Z\rfloor)=(\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor)^2$$

המעבר האחרון נובע מכך שמדובר במ"מ שווי התפלגות.
נותר למצוא את התוחלת של $\lfloor X\rfloor$. זאת משימה פשוטה משום ש $\lfloor X\rfloor$מתפלג אחיד **בדיד** בקטע $[0,2]$.
ולכן תוחלתו היא:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor=\frac{1}{3}\cdot 0+\frac{1}{3}\cdot 1+\frac{1}{3}\cdot 2=1$$

נציב זאת ונקבל:

$$\mathbb{E}(\lfloor X\rfloor\lfloor Z\rfloor)=1^2=1$$

(ד) לפי הגדרת השונות המשותפת:

$$Cov(X,X^2)=\mathbb{E}\left(X\cdot X^2\right)-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X^2=\mathbb{E}X^3-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X^2$$

ראינו בסעיף הראשון ש $\mathbb{E}X=\frac{3}{2}$ וש - $\mathbb{E}X^2=Var(X)+(\mathbb{E}X)^2=3$.
נותר לחשב את $\mathbb{E}X^3$. כלומר אנחנו מתבקשים לחשב תוחלת של מ"מ שהוא פונקציה של מ"מ אחר שהתפלגותו ידועה לנו - X. כלומר עלינו לחשב:

$$\mathbb{E}X^3=\int_0^3 t^3\cdot f_X(t)\mathrm{d}t=\int_0^3 t^3\cdot\frac{1}{3}dt=\frac{27}{4}$$

נציב זאת ונקבל:

$$Cov(X,X^2)=\mathbb{E}X^3-\mathbb{E}X\cdot\mathbb{E}X^2=\frac{27}{4}-\frac{3}{2}\cdot 3=\frac{9}{4}$$

2. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, פברואר 2007
X ו - Y הם מ"מ שווי התפלגות וידוע ש $X\sim U(0,1)$ (אחיד רציף). סמנו את התשובה הנכונה

(א) בהכרח $Var(X+Y)<\frac{1}{6}$.
(ב) בהכרח $Var(X+Y)\le\frac{1}{6}$ אבל א' לא נכון.
(ג) בהכרח $Var(X+Y)>0$.
(ד) בהכרח $Var(X+Y)>\frac{1}{12}$.
(ה) אף תשובה אינה נכונה.

פתרון:
השאלה לא מפרטת את מבנה התלות של המשתנים. כלומר לא ידוע אם הם תלויים ואם כן באיזה אופן.
לכן, כדי להפריך טענה, אנו חפשיים לבחור כל מבנה תלות שנרצה.
ראשית נחשב את השונות של המשתנים: $Var(X) = Var(Y) = \frac{1}{12}$.
בשלב השני נכתוב את הנוסחא לשונות הסכום:

$$Var(X+Y) = Var(X) + Var(Y) + 2Cov(X,Y) = \frac{1}{12} + \frac{1}{12} + 2Cov(X,Y) = \frac{1}{6} + 2Cov(X,Y)$$

אם אכן המשתנים ב"ת (למעשה מספיק בלתי מתואמים) אז שונות הסכום היא אכן $\frac{1}{6}$. עובדה זו מספיקה כדי לשלול את תשובה א'.
אם המשתנים מתואמים חיובית, כלומר $Cov(X,Y) > 0$ אז שונות הסכום גדולה מ - $\frac{1}{6}$. עובדה זו מספיקה כדי לשלול את ב'.
כעת, כדי לסתור את ג', צריך למצוא דוגמא שבה סכום המשתנים הוא משתנה מקרי מנוון (כלומר משתנה המקבל ערך בודד). אם נקח $Y = 1 - X$ עבור $X \sim U(0,1)$, אז סכום המשתנים מקבל ערך יחיד בהסתברות 1 וגם מתקיים ש - $Y \sim U(0,1)$.
החלק הראשון של הטענה טריויאלי. נוכיח את החלק השני של הטענה:

$$\forall t \in (0,1): \; P(Y \le t) = P(1 - X \le t) = P(X \ge 1 - t) = 1 - P(X < 1 - t) = 1 - (1 - t) = t$$

וקיבלנו את פונקצית ההתפלגות המצטברת של מ"מ אחיד על $(0,1)$.
טענה זו סותרת את ג' ו - ד' ולכן תשובה ה' נכונה.

תוחלת ושונות סופיים ואין סופיים

הגדרנו את התוחלת של X כ-$\Sigma P(X=k)\cdot k$. למעשה מתקיים: $E(X) = \sum_{k<0} P(X=k)\cdot k + \sum_{k>0} P(X=k)\cdot k$.

1. אם שני הסכומים הם סופיים, אז נגיד שיש **תוחלת סופית שהיא הסכום שלהם**.
2. אם הסכום השני הוא ∞ והראשון סופי, נגיד שהתוחלת היא **∞**.
3. אם הסכום הראשון הוא סופי והשני הוא ∞, נגיד שהתוחלת היא $-\infty$.
4. אם שני הסכומים הם ∞ אז נגיד שהתוחלת **לא מוגדרת**.

<u>דוגמאות:</u>

1) נתון $P(X=-1) = 0.5$. עבור $k \ge 1$ מתקיים $P(X=k) = -\frac{c}{k^2}$ כך ש-c הוא קבוע כזה שגורם לכך ש-$\Sigma\frac{c}{k^2} = 0.5$. נשים לב כי $\sum_{k<0} P(X=k)\cdot k$ סופי כי יש רק את $k=-1$. $\sum_{k>0} P(X=k)\cdot k = \sum_{k>0}\frac{c}{k^2}\cdot k = \sum_{k>0}\frac{c}{k} = \infty$.
לכן התוחלת היא ∞.

2) נניח שעבור כל k שלם שונה מאפס, מתקיים $P(X=k) = \frac{c}{k^2}$ כך ש-$\Sigma\frac{c}{k^2} = 1$ (c הוא קבוע מנרמל). $\sum_{k<0} P(X=k)\cdot k = \sum_{k<0}\frac{c}{k^2}\cdot k = -\infty$ ובהתאם עבור $k > 0 = \infty$. כאן התוחלת לא מוגדרת.

3) נתון משתנה מקרי X המקיים $P(X=k) = \frac{c}{k^3}$ עבור $k \ge 1$ כאשר c הוא קבוע מנרמל. האם למשתנה זה יש תוחלת סופית? האם יש לו שונות סופית?

- ✓ מתקיים $\Sigma\frac{c}{k^2} < \infty$ $E(X) = \Sigma P(X=k)\cdot k =$. יש לו תוחלת סופית.
- ✓ מתקיים $V(X) = E(X^2) - E^2(X)$ כאשר $\Sigma\frac{c}{k} = \infty$ $E(X^2) = \Sigma P(X=k)\cdot k =$. אין שונות סופית.

סוגיה: $X_n \sim Bin(2n, 0.5)$. מהו הערך הסביר ביותר שנוכל לקבל? נראה שזהו n.

- ✓ מתקיים $P(X=k) = \binom{2n}{k} \cdot 0.5^k \cdot 0.5^{2n-k} = \binom{2n}{k} \cdot 0.5^{2n}$. ה-k הסביר ביותר הוא זה שמביא למקסימום את $\binom{2n}{k}$. אז נקבל את ההסתברות הכי גבוהה.
- ✓ נסתכל על $a_k = \binom{2n}{k}$ ונראה שהמקסימום הוא n על ידי כך שהערכים עולים עד n ויורדים אחריו.
- ✓ נרצה לחשב את $\lim_{n\to\infty} P(X_n = n)$ וניעזר **בנוסחת סטרלינג**: $n! \sim \sqrt{2\pi n} \cdot \left(\frac{n}{e}\right)^n$. קיבלנו כך כי ההסתברות היא $\frac{1}{\sqrt{n}}$ והגבול הוא 0.

4. הוכיחו או הפריכו: יהיו X, Y שני מ"מ עם התפלגות משותפת. אם ידוע שהתוחלת המותנית $E(X|Y)$ תמיד סופית (בכל הערכים בהם היא מוגדרת), אז בהכרח $E(X)$ סופית.

פתרון:

הטענה אינה נכונה. ניזכר כי הטור $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x^2}$ מתכנס, בעוד שהטור $\sum_{x=1}^{\infty} \frac{1}{x}$ מתבדר לאינסוף. נגדיר: $X|Y \sim U(Y-1, Y+1)$. כמו כן, נגדיר את ההתפלגות של Y באופן הבא: $P(Y=y) = \frac{c}{y^2}$ עבור $y = 1, 2, \ldots$ (ו-0 עבור y שאינו שלם חיובי). מאחר והטור מתכנס נוכל למצוא קבוע c שייתן התפלגות תקינה שסכום ההסתברויות שווה ל-1.

כעת, $E(X|Y=y) = y$, וזהו ערך סופי עבור כל y. עם זאת,

$$E(X) = EE(X|Y) = E(Y) = \sum_{y=1}^{\infty} y\frac{c}{y^2} = c\sum_{y=1}^{\infty} \frac{1}{y} = \infty$$

2. ממבחן של ד"ר שלומי רובינשטיין, מועד א', ינואר 2007

יהי X מ"מ המקבל תשעה ערכים שונים בהסתברות $\frac{1}{9}$ כל אחד. ידוע ש $\mathbb{E}X = 0.5$ ו - $Var(X) = 1$. מי מבין הבאים **אינו** אפשרי:

(א) $P(X=0.5) = \frac{1}{9}$.

(ב) $P(X=3.5) = \frac{1}{9}$.

(ג) $\mathbb{E}(X^{2007}) < 0$.

(ד) $P(X > 0.5) = \frac{7}{9}$.

(ה) אף אחד מהנ"ל.

פתרון:

תשובה: טענה ב' אינה אפשרית, כלומר לא יתכן ש 3.5 הוא אחד הערכים ש - X מקבל. הסיבה: הערך 3.5 רחוק מדי מהתוחלת ו"מנפח" את השונות אל מעבר לערך שהיא אמורה לקבל לפי נתוני השאלה.

נראה זאת: יהיו $\{x_i\}_{i=1}^{9}$ הערכים שמקבל X אז מתקיים

$$Var(X) = \mathbb{E}\left((X - \mathbb{E}X)^2\right) = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{9} \cdot (x_i - 0.5)^2 = 1$$

ולכן:

$$\sum_{i=1}^{9} (x_i - 0.5)^2 = 9$$

כדי להראות שטענה ב' בלתי אפשרית, נניח בה"כ ש $x_1 = 3.5$. כעת המחובר הראשון בסכום תורם:

$$(x_1 - 0.5)^2 = (3.5 - 0.5)^2 = 3^2 = 9$$

כלומר המחובר הראשון לבדו תורם 9 ולכן הסכום גדול בהכרח מ - 9. הסבר: מדובר בסכום של 9 מחוברים שלפחות 8 מהם אי שליליים (משום ש X מקבל 9 ערכים שונים ולכן גם אחד מהם הוא 0.5, מה שגורר שאחד המחוברים הוא אפס, עדיין ישנם 8מחוברים אחרים חיוביים ממש).
נראה דרך שקולה להראות שטענה ב' אינה אפשרית. ידוע לנו ש $\mathbb{E}X = 0.5$ ו - $Var(X) = 1$ לכן על פי הנוסחא לשונות:

$$\mathbb{E}X^2 = Var(X) + (\mathbb{E}X)^2 = 1 + 0.5^2 = 1.25$$

בניגוד למ"מ X, המ"מ X^2 מקבל רק ערכים אי שליליים (ולפחות 8 מהם חיוביים ממש). אם נניח ש $x_1 = 3.5$ נקבל:

$$\mathbb{E}X^2 = \sum_{i=1}^{9} \frac{1}{9} \cdot x_i^2 = \frac{1}{9} \cdot 3.5^2 + \sum_{i=2}^{9} \frac{1}{9} \cdot x_i^2 = \frac{49}{36} + positive > 1.25$$

וזאת בסתירה לנתוני השאלה.

3. יהיו X, Y שני מ"מ עם פונקציית צפיפות משותפת:

$$f_{X,Y}(x,y) = \begin{cases} c(1 + x^2 - 2xy) & 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1 \\ 0 & otherwise \end{cases}$$

(א) מצאו את c.
(ב) מצאו את $f_X(x), f_Y(y)$. האם X, Y ב"ת?
(ג) מצאו את $Cov(X,Y)$.
(ד) מצאו את $P(X \le Y \le \frac{1}{2})$

פתרון:

(א) נחשב את האינטגרל הכפול:

$$\int_0^1 \int_0^1 (1 + x^2 - 2xy)dxdy = \int_0^1 (1 + \frac{1}{3} - y)dy = \frac{4}{3} - \frac{1}{2} = \frac{5}{6}$$

לכן, על מנת שהאינטגרל הכפול יסתכם ל-1, נדרוש $c = \frac{6}{5}$.

(ב) אנו יודעים ש $f_X(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_{X,Y}(x,y)dy$ (ובאופן דומה לגבי $f_Y(y)$), ולכן כאשר $0 \le y \le 1$, $0 \le x \le 1$:

$$f_X(x) = \int_0^1 \frac{6}{5}(1 + x^2 - 2xy)dy = \frac{6}{5}(x^2 - x + 1)$$
$$f_Y(y) = \int_0^1 \frac{6}{5}(1 + x^2 - 2xy)dx = \frac{6}{5}(\frac{4}{3} - y)$$

ו - 0 אחרת.
ניתן לראות ש $f_X(x)f_Y(y) \neq f_{X,Y}(x,y)$ ולכן הם תלויים.

(ג) ניתן לראות שפונקציית הצפיפות $f_X(x)$ סימטרית סביב 0.5 בקטע $0 \leq x \leq 1$, ולכן $E(X) = 0.5$.
אפשר גם להגיע לכך בחישוב ישיר:

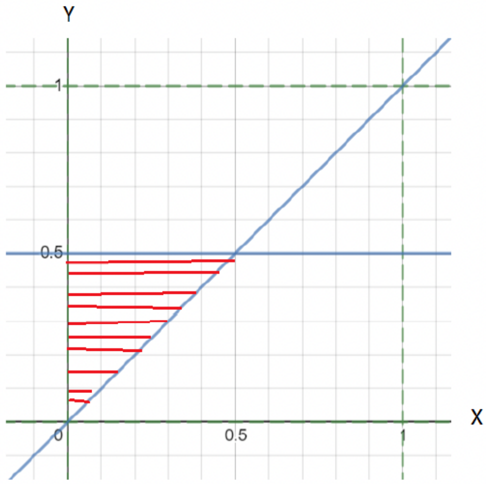
$$E(X) = \int_0^1 \frac{6}{5}(x^3 - x^2 + x)dx = \frac{6}{5}(\frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{2}) = \frac{1}{2}.$$

בנוסף:

$$E(Y) = \int_0^1 \frac{6y}{5}(\frac{4}{3} - y)dy = \frac{6}{5}(\frac{4}{6} - \frac{1}{3}) = \frac{2}{5},$$
$$E(XY) = \int_0^1 \int_0^1 \frac{6}{5}xy(1 + x^2 - 2xy)dxdy = \frac{11}{60}.$$

ולכן $Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = -\frac{1}{60}$

(ד) אנו מעוניינים לחשב את האינטגרל מעל התחום המסומן באדום:



$$\int_0^{0.5} \int_x^{0.5} \frac{6}{5}(1 + x^2 - 2xy)dydx = \frac{6}{5}\int_0^{0.5} 0.5x^2 - 1.25x + 0.5dx = \frac{11}{80}$$

4. יהיו $Y \sim U[1,10]$, ו- $X|Y \sim U[0,Y]$, מצאו את $Cov(X,Y)$.

$$E(Y) = 0.5(1 + 10) = 5.5.$$
$$E(X) = EE(X|Y) = E(0.5(0 + Y)) = 0.5E(Y) = 2.75.$$
$$E(XY) = EE(XY|Y) = E(YE(X|Y)) = E(0.5Y^2) = 0.5[V(Y) + E^2(Y)]$$
$$= 0.5[\frac{(10 - 1 + 1)^2 - 1}{12} + 5.5^2] = 19.25$$
$$Cov(X,Y) = E(XY) - E(X)E(Y) = 19.25 - 2.75 \times 5.5 = 4.125.$$

3 – נושאים נוספים

חסמים

אי שוויונות מרקוב וצ'בישב

נניח ש-$E(X)=10$ ומתקיים $P(X\geq 0)=1$. האם ייתכן ש-$P(X\geq 20)=\frac{2}{3}$? לא! זה מנפח מידי את התוחלת. התרומה של זה תיצור תוחלת גדולה מידי.

אי שוויון מרקוב (שיעור 10 תשפ"ב): נניח ש-$P(X\geq 0)=1$ כלומר X מקבל רק ערכים אי-שליליים, ו-$E(X)=\mu$ סופי. אז עבור כל $a>0$ מתקיים $\boldsymbol{P(X\geq a)\leq\frac{\mu}{a}}$.

המחשה: נניח ש-$E(X)=7$. איך נוכל לחסום את $P(X\geq 8)$? מתקיים $P(X\geq 8)\leq\frac{E(X)}{8}=\frac{7}{8}$.

1) אני צריך לטפס 500 מדרגות. בכל שלב אני מטיל קוביה ולפי תוצאות הקוביה אני מתקדם. קיבלתי בקוביה i אז אעלה i מדרגות. מצאו חסם עליון על ההסתברות שב-100 הטלות אשלים 500 מדרגות.

- ✓ נגדיר X_i – תוצאת ההטלה ה-i. אני צריך ש-$\sum_{i=1}^{100}X_i\geq 500$. מתקיים $E\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)=100\cdot 3.5=350$.
- ✓ לפי אי שוויון מרקוב מתקיים: $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\geq 500\right)\leq\frac{E\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)}{500}=\frac{350}{500}=0.7$.

יהיו מקרים שהחסם יהיה הדוק, ומקרים שהוא לא. גם אם הוא לא הדוק, יש לו תוצאות תאורטיות נכונות.

2) X משתנה מקרי: $E(X)=0.7\cdot 20=14$, $P(X\geq 0)=1$, $P(X=20)=0.7$, $P(X=0)=0.3$. מהו החסם לפי אי שוויון מרקוב על $X\geq 20$?

- ✓ $P(X\geq 20)\leq\frac{E(X)}{20}=\frac{14}{20}=0.7$ **והחסם הדוק.**

אי שוויון צ'בישב (שיעור 10 תשפ"ב): יהי X משתנה מקרי בעל תוחלת μ ובעל שונות σ^2. אז עבור כל $a>0$ מתקיים: $P(|X-\mu|\geq a)\leq\frac{\sigma^2}{a^2}$ או לחילופין: $P(|X-E(X)|\geq a)\leq\frac{V(X)}{a^2}$.

הרעיון – אם הערכים סביב התוחלת מתקבלים בסיכוי גבוה מידי (יש שונות גדולה), זה תורם יותר מידי לשונות ממה שהיא שווה. אי שוויון צ'בישב עדיף על אי שוויון מרקוב **עבור ערכי n גדולים**.

1) נחזור לבעיית המדרגות. נרצה לחסום מלמעלה את $P\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\geq 500\right)$.

- ✓ מתקיים: $\sum_{i=1}^{100}X_i\geq 500\Rightarrow\left|\sum_{i=1}^{100}X_i-350\right|\geq 150$. לכן:
- ✓ מתקיים: $P\left(\left|\sum_{i=1}^{100}X_i-350\right|\geq 150\right)\leq\frac{V\left(\sum_{i=1}^{100}X_i\right)}{150^2}=\frac{\sum_{i=1}^{100}V(X_i)}{150^2}=\frac{100\cdot\left(\frac{(6-1+1)^2-1}{12}\right)}{150^2}=\frac{100\cdot\frac{35}{12}}{150^2}<\frac{100\cdot 3}{150^2}=\frac{3}{15^2}$.
- ✓ שיקולי סימטריה (לא קשור כבר לאי שוויון צ'בישב): האם זה החסם הטוב ביותר שאנחנו יכולים למצוא? אמרנו שההטלות ב"ת. אז הסכום סימטרי סביב 350. לכן מתקיים: $P(X\leq 200)=P(X\geq 500)$. ולכן $P(|X-350|\geq 150)=P(X\leq 200)+P(X\geq 500)$. מכיוון שכאן יש לנו סימטריה, אז ניתן לחלק את החסם ב-2.

2) בעיית המזכירה הרשלנית: n מכתבים באקראי ל-n אנשים. X – מספר האנשים שקיבלנו מכתב מתאים.

- ✓ חסם ל-$P(X\geq 2)$: לפי מרקוב $P(X\geq 2)\leq\frac{E(X)}{2}=\frac{1}{2}$.
  לפי צ'בישב $P(X\geq 2)\leq P(|X-1|\geq 1)\leq\frac{Var(X)}{(2-1)^2}=\frac{1}{1}=1$. דווקא מרקוב נתן לנו חסם הדוק יותר כאן.
- ✓ חסם ל-$P(X\geq 3)$: לפי מרקוב $P(X\geq 3)\leq\frac{1}{3}$. לפי צ'בישב $P(X\geq 3)\leq P(|X-1|\geq 2)\leq\frac{V(X)}{2^2}=\frac{1}{4}$.
- ✓ חסם ל-$P(X\geq n-1)$: לפי מרקוב $P(X\geq n-1)\leq\frac{1}{n-1}$.
  לפי צ'בישב $P(X\geq n-1)\leq P(|X-1|\geq n-2)\leq\frac{1}{(n-2)^2}$. עבור n-ים גדולים תשובה יותר טובה.

הלמה של בורל קנטלי

נרצה לענות לשאלות כמו: מבצעים בכל שלב הטלה של מטבע. האם נקבל אינסוף פעמים 1? אם בכל שלב יש הסתברות 0.5 לקבל 1, ואם בכל שלב יש הסתברות $\frac{1}{n^2}$ (n הוא השלב) לקבל 1, ואם בכל שלב יש הסתברות $\frac{1}{n}$. הלמה תענה לנו על השאלות הללו.

<u>הלמה של בורל קנטלי (שיעור 10 תשפ"ב):</u> יהיו $\{A_i\}_{i=1}^{\infty}$ סדרה של מאורעות.
א) אם $\Sigma P(A_i) < \infty$ אז **בהסתברות 1** נקבל רק **מספר סופי** של הצלחות מבין המאורעות.
ב) אם $\Sigma P(A_i) = \infty$ ונתון **שהמאורעות ב"ת**, אז **בהסתברות 1** נקבל **מספר אינסופי** של הצלחות.

<u>הערות:</u>

- לגבי **סעיף א'**: יש מאורע לא ריק, בעל הסתברות 0, שבו נקבל אינסוף הצלחות. אבל בהסתברות 1 אנחנו מקבלים מספר סופי של הצלחות.
- נשים לב כי **תנאי האי-תלות הוא חיוני בסעיף ב'**. אם המאורעות תלויים לא בהכרח נקבל מספר אינסופי של הצלחות.

<u>דוגמאות:</u>

1) יש כד שבו 8 כדורים כחולים ו-5 כדורים ירוקים. יש כד שבו 7 כדורים ירוקים בלבד. אני בוחר בסיכוי שווה באחד הכדים ומבצע בו סדרה אינסופית של הוצאות (עם החזרה). מהי ההסתברות שאקבל אינסוף כחולים?

- ✓ נגדיר A_n – המאורע שבשלב ה-n קיבלנו כחול. $P(A_n) = 0.5 \cdot \frac{8}{8+5} + 0.5 \cdot 0 = \frac{4}{13}$. מתקיים $\Sigma P(A_n) = \infty$.
- ✓ אמנם, לא בהכרח נקבל אינסוף כחולים כי יש תלות בין התוצאות. אם קיבלתי כחול (אנחנו בכד הראשון) זה מגדיל את הסיכויים בפעם הבאה לקבל כחול. אנו לא עומדים בסעיף ב' של הלמה.
- ✓ ההסתברות היא 0.5 (אם יבחר הכד הראשון יהיו אינסוף כדורים כחולים, ואם יבחר השני בוודאות לא יהיה אף כחול).

2) תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים $\exp(1)$ ב"ת. האם נקבל ∞ פעמים $X_n \geq cln(n)$ עבור c קבוע נתון?

- ✓ יותר קשה לקבל תוצאה כזו על הזמן כי c גדל ו-$\ln(n)$ גדל בקצב קטן יותר.
- ✓ נגדיר מאורעות $A_n = (X_n > cln(n))$. מכיוון ש-X_n ב"ת אז גם A_n ב"ת. נבדוק האם $\Sigma P(A_n) = \infty$.
- ✓ מתקיים $P(A_n) = P\big(X_n > cln(n)\big) = 1 - \left(1 - e^{-cln(n)}\right) = e^{-cln(n)} = n^{-c} = \left(\frac{1}{n}\right)^c$.
- ✓ לכן עבור $c > 1$ הטור מתכנס, ועבור $c \leq 1$ הטור מתבדר. נקבל ש-∞ פעמים מתקיים $X_n > cln(n)$ אבל עבור $c > 1$ זה לא יתקיים (נקבל רק מספר סופי של מאורעות).

3) מעמידים קוף מול מקלדת, ואומרים לו להקליד מעתה ועד עולם באופן אקראי על המקלדת. האם הוא יקליד לפחות פעם אחת ברצף את התנ"ך? כל תו נבחר מבין מספר סופי A של תווים. אורך התנ"ך הוא M.

- ✓ בכל רצף של M הקשות יש סיכוי של $\left(\frac{1}{A}\right)^M$ שהתנ"ך יוקלד. נשים לב כי $\Sigma \left(\frac{1}{A}\right)^M = \infty$. סכום אינסופי של מספר קבוע הוא אינסוף. זה לא מוכיח שהתנ"ך יוקלד אינסוף פעמים כי יש תלויות בין מקומות שונים.
- ✓ נסתכל על אוסף של מאורעות שבהם יש אי-תלות. אם באוסף זה התנ"ך יוקלד אינסוף פעמים, אז בוודאי באוסף כולו הוא גם יוקלד אינסוף. ניקח קטעים: מ-1 עד M, מ-$M+1$ עד 2M וכו'. הסיכוי בכל קטע כזה הוא $\left(\frac{1}{A}\right)^M$ ויש לנו אינסוף קטעים כאלו. גם כאן הסכום יהיה ∞. לכן התנ"ך יוקלד אינסוף פעמים.

4) יש ∞ כדים. בכד ה-n יש $n-1$ כדורים שחורים וכדור אחד לבן. מכל כד מוציאים כדור אחד באופן ב"ת בכדים האחרים.
א) האם נקבל אינסוף כדורים לבנים?

- ✓ נגדיר A_n – בכד ה-n קיבלנו כדור לבן. מתקיים $P(A_n) = \frac{1}{1+n-1} = \frac{1}{n}$ ולכן $\Sigma P(A_n) = \infty$. הניסיונות ב"ת ולכן בהסתברות 1 נקבל אינסוף כדורים לבנים.

ב) האם בהסתברות 1 נקבל רצף של שני כדורים לבנים לפחות פעם אחת?

- ✓ הסיכוי לרצף החל ממקום n הוא $\frac{1}{n(n+1)}$. נחשב: $\sum \frac{1}{n(n+1)} = \sum \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = 1$.
- ✓ נטען כי יש הסתברות חיובית שעד הפעם ה-x לא נקבל אף רצף. אם נגיע ולא היה אף רצף, אז הסיכוי לרצף החל מ-x הוא כבר קטן מ-1. ואז **לא בטוח שאצליח לקבל רצף**.
- ✓ הלמה כאן לא רלוונטית כי היא מדברת על קבלת אינסוף מאורעות.

5) הילוך מקרי על הישר (הקלטה 2375) – שיכור מתחיל בנקודה 0 ומטייל על פני הישר, הולך בסיכוי של p ימינה צעד אחד, ובסיכוי $1-p$ שמאלה. כל שלב באופן ב"ת בשלבים האחרים. האם נחזור לנקודה 0 אינסוף פעמים?

- ✓ נגדיר A_n – המאורע שבשלב ה-n חזרנו לאפס.
- ✓ לכל n אי-זוגי $P(A_n)=0$, לכן נותר לבדוק אם $\Sigma\left(P(A_{2n})\right)=\infty$ - סכום ההסתברויות על המקומות הזוגיים. הצעדים ב"ת אבל המיקומים כן תלויים.
- ✓ נשים לב כי אנחנו יכולים לבחור את n הצעדים ימינה: $P(A_{2n})=\binom{2n}{n}p^n\cdot q^n=\binom{2n}{n}(pq)^n=\frac{2n!}{(n!)^2}(pq)^n$.
- ✓ לפי נוסחת סטרלינג נקבל בקירוב: $P(A_n)=\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\cdot(4pq)^n$ ונשאל האם הסכום קטן מאינסוף?
- ✓ הפונקציה $p(1-p)$ מקבלת את הערך המקסימלי בנקודה 0.5. אם $p\neq q$ אז $pq<\frac{1}{4}$ ולכן $4pq<1$ ונקבל טור מהצורה Σa^n כאשר $a<1$ ולכן הטור מתכנס.
- ✓ אם $p\neq q$ יהיו בהסתברות 1 רק מספר סופי של ביקורים בנקודה 0.
- ✓ אם $p=q=\frac{1}{2}$ הטור הוא $\Sigma\left(\frac{1}{\sqrt{\pi n}}\right)=\infty$

התכנסויות

התכנסויות של משתנים מקריים

התכנסות בהתפלגות: תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים, בעלי פונקציית הסתברות מצטברת $\{F_{X_n}\}_{n=1}^{\infty}$ בהתאמה. אנו אומרים שסדרת המשתנים **שואפת בהתפלגות למשתנה X** בעל פונקציית הסתברות מצטברת F_X, אם $\lim\limits_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)$ בכל נקודה חוץ מאולי נקודות אי הרציפות של F_X.

אנו רוצים שההסתברות של המשתנה הגבולי, תהיה דומה להסתברות של המשתנה X. כלומר, **החוקיות של X_n מתקרבת לחוקיות של X, אבל לא בהכרח מתקבלים אותם הערכים.**

דוגמה פשוטה: $\{X_n\}$ שווי התפלגות, וגם ל-X אותה התפלגות. למשל, כולם קוביה תקינה, או כולם $U(0,1)$.

1) $\{X_n\}$ סדרת משתנים מקריים. $X_n\sim U(0,\frac{1}{n})$. האם הסדרה שואפת בהתפלגות למשתנה מנוון $P(X=0)=1$? **כן**.

- ✓ נמצא את הפה"מ של המשתנה המנוון: $F_X(x)=\begin{cases}0 & x<0\\ 1 & x\geq 0\end{cases}$.
- ✓ נמצא את הפה"מ של X_n: $F_{X_n}(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ \frac{x-0}{\frac{1}{n}-0}=nx & 0<x\leq\frac{1}{n}\\ 1 & x>\frac{1}{n}\end{cases}$.
- ✓ נבדוק את הגבול: עבור $n>\frac{1}{x}$ יתקבלו רק **ערכים קטנים מ-x**. ברגע ש-$x>\frac{1}{n}$ הגבול הוא 1. $\lim\limits_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=\begin{cases}0 & x\leq 0\\ 1 & x>0\end{cases}$. מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=F_X(x)$ **חוץ מבנקודה 0**. אבל **מותר שבנקודת אי-רציפות של F_X לא תהיה התכנסות**, ולכן סה"כ יש התכנסות בהתפלגות.

2) $\{X_n\}$ סדרת משתנים מקריים. $X_n\sim U(n,n+1)$. האם קיים משתנה מקרי שאליו הסדרה שואפת בהתפלגות? **לא**.

- ✓ נמצא את הפה"מ של X_n: $F_{X_n}(x)=\begin{cases}0 & x<n\\ \frac{x-n}{n+1-n}=x-n & n<x<n+1\\ 1 & x>n+1\end{cases}$.
- ✓ נשים לב **שעבור $x<n$** כל המשתנים שבסדרה **מקבלים רק ערכים גדולים מ-x**: $\boldsymbol{F_{X_n}(x)=P(X_n\leq x)=0}$. X_n מקבל ערכים בין n ל-$n+1$, הוא תמיד גדול מ-n. אם מתקיים $x<n$ אז לא יכולים להתקבל ערכים קטנים מ-x. אז מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}P(X_n\leq x)=0$.
- ✓ לגבי כל משתנה תקין מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}F_X(x)=1$. בסדרה הזאת לכל x מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty}F_{X_n}(x)=0$. גבול של אפסים לא יכול להיות שווה ל-1. זה לא פה"מ של משתנה תקין.

יהיו $X_1, X_2, \dots, X_n$ מ"מ בלתי תלויים, שווי התפלגות $exp(1)$. נגדיר $Y_n = max\{X_i\}_{i=1}^n - \ln(n)$. האם Y_nמתכנס בהתפלגות למ"מ כלשהו? אם כן, למה מתכנס?

פתרון:

$$\begin{aligned} F_n(t) &= \Pr(Y_n \le t) = \Pr(max\{X_i\}_{i=1}^n - \ln(n) \le t) \\ &= \Pr(max\{X_i\}_{i=1}^n \le t + \ln(n)) \\ &= \Pr(X_1 \le t + \ln(n), \dots, X_n \le t + \ln(n)) \\ &= \Pr(X_1 \le t + \ln(n)) \cdots \Pr(X_n \le t + \ln(n)) \\ &= \Pr(X_1 \le t + \ln(n))^n \\ &= \begin{cases} (1 - exp(-t - \ln(n))^n & t + \ln(n) > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \\ &= \begin{cases} (1 - \frac{exp(-t)}{n})^n & t + \ln(n) > 0 \\ 0 & otherwise \end{cases} \end{aligned}$$

כעת, אם ניקח גבול:

$$\lim_{n\to\infty} F_n(t) = \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{exp(-t)}{n})^n = exp(-exp(-t)) := F(t)$$

וזה מתקיים לכל t מאחר שהתנאי $t + \ln(n) > 0$ מתקיים לכל תמיד כאשר n שואף לאינסוף. כעת עלינו לוודא שאכן קיבלנו ש$F(t)$ פונקציית התפלגות מצטברת תקינה:

$$\lim_{t\to-\infty} F(t) = exp(-exp(\infty)) = 0$$
$$\lim_{t\to\infty} F(t) = exp(-exp(-\infty)) = exp(0) = 1$$

וכמו כן:

$$F'(t) = e^{-e^{-t}}(-e^{-t})(-1) > 0$$

כלומר הפונקציה אכן מונוטונית עולה. קיבלנו שהפה"מ תקנית ולכן Y_n אכן מתכנס בהתפלגות למ"מ עם פה"מ F.

<u>התכנסות בהסתברות:</u> תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים. נאמר שהיא **שואפת בהסתברות** למשתנה X אם מתקיים: $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| > \varepsilon) = 0$ לכל $\varepsilon > 0$. כמובן באותו אופן, $\lim_{n\to\infty} P(|X_n - X| \le \varepsilon) = 1$. כלומר, החל ממקום מסוים, **הסיכוי** של ערכי הסדרה להיות **קרובים למשתנה X שואף ל-1**. **הערכים** של X_n ו-X **קרובים זה לזה עד כדי ε**.

<u>הערה:</u> ייתכן שסדרת משתנים מקריים תתכנס **בהתפלגות** למשתנה מקרי X, אך לא תתכנס למשתנה X **בהסתברות**. למשל עבור $X_n \sim U[1,8]$ ו-$X \sim U[1,8]$. יש התכנסות בהתפלגות אבל לא התכנסות בהסתברות (יכול להיות שהערכים המתקבלים שונים).

<u>דוגמה:</u> תהי X_n סדרת משתנים מקריים. נניח כי $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ ו-$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$. הסדרה שואפת בהסתברות למשתנה $P(X = 0) = 1$. **הסיכוי** שהמשתנה ה-n-י שבסדרה יהיה בכלל **שונה ממנו** (כלומר שונה מ-0 ושווה ל-1), הוא $\frac{1}{n}$ ואז **שואף ל-0**.

<u>התכנסות בהסתברות 1 (Almost Sure):</u> תהי $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ סדרת משתנים מקריים. נאמר שהיא **שואפת בהסתברות 1** למשתנה X אם מתקיים בהסתברות 1 **שהחל ממקום מסוים, תמיד** המשתנים לא רחוקים מהמשתנה X ביותר מ-$\varepsilon > 0$.

<u>דוגמה:</u>

- **(בורל קנטלי – סעיף א')** $P(X = 0) = 1$, $P(X_n = 1) = \frac{1}{n^2}$, $P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n^2}$. מכיוון ש: $\Sigma\left(\frac{1}{n^2}\right) < \infty$ אז רק מספר סופי של משתנים מקריים מהסדרה יקבלו ערך שונה מאפס (יתרחשו רק מספר סופי של מאורעות $X_n = 1$). לכן, החל ממקום מסוים, תמיד $X_n = X$. יש כאן התכנסות בהסתברות 1.
- **(בורל קנטלי – סעיף ב')** אם היינו רושמים $P(X_n = 1) = \frac{1}{n}$ ו-$P(X_n = 0) = 1 - \frac{1}{n}$ (כאשר המאורעות ב"ת) אז לפי הלמה של בורל קנטלי, היו **מתרחשים ∞ מאורעות** ($X_n = 1$) ולא הייתה התכנסות בהסתברות 1 למשתנה המנון. אבל הייתה התכנסות בהסתברות כי ממקום מסוים, ההסתברות שהם שונים היא שואפת לאפס.

יהיו $X_1, X_2, \ldots, X_n$ מ"מ בלתי תלויים, שווי התפלגות $U(0,1)$. נגדיר $U_n = max\{X_i\}_{i=1}^n$. הראו כי U_n מתכנס בהסתברות ל- 1.

פתרון:

בשביל להוכיח התכנסות בהסתברות ל-1, יש להראות כי לכל $\epsilon > 0$:

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(|U_n - 1| \geq \epsilon) = 0$$

נסתכל על המ"מ $Z_n = |U_n - 1|$: נשים לב שמאחר ש $U_n \leq 1$ מתקבל ש $Z_n = 1 - U_n \geq 0$. מאי-שיוויון מרקוב:

$$\Pr(Z_n \geq \epsilon) \leq \frac{E(Z_n)}{\epsilon} = \frac{1 - E(U_n)}{\epsilon}$$

נמצא את $E(U_n)$:

$$\Pr(U_n \leq t) = \Pr(X_1 \leq t)^n = \begin{cases} 0 & t < 0 \\ t^n & 0 \leq t < 1 \\ 1 & t \geq 1 \end{cases}$$

מנוסחת הזנב (מאחר שU_n אי-שלילי), נקבל:

$$E(U_n) = \int_0^\infty [1 - F_{U_n}(t)]dt = \int_0^1 (1 - t^n)dt = \frac{n}{n+1}$$

ולכן:

$$\frac{1 - E(U_n)}{\epsilon} = \frac{1 - \frac{n}{n+1}}{\epsilon} = \frac{1}{(n+1)\epsilon}$$

$$\lim_{n\to\infty} \Pr(Z_n \geq \epsilon) \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(n+1)\epsilon} = 0$$

יהיו $X_1, X_2, \ldots$ מ"מ ב"ת וש"ה. נתון ש $E(|X_1|) < 1$ הוכיחו כי $Y_n = X_1 X_2 \cdots X_n$ מתכנס בהסתברות 1 ל-0.

פתרון: ניעזר בלמה של בורל-קנטלי, ונראה שבהסתברות 1 יש רק מספר סופי של פעמים שהסטייה של Y_n מ-0 גדולה מ ϵ. כלומר, נראה להראות:

$$\Pr\left(\sum_{n=1}^{\infty} I(|Y_n| \geq \epsilon) < \infty\right) = 1$$

נגדיר: $A_n = \{|Y_n| \geq \epsilon\}$

$$\begin{aligned}\Pr(A_n) &= \Pr(|X_1 X_2 \cdots X_n| \geq \epsilon) \\ &\leq \frac{E(|X_1 X_2 \cdots X_n|)}{\epsilon} = \frac{E(|X_1||X_2| \cdots |X_n|)}{\epsilon}\end{aligned}$$

כאשר השתמשנו באי-שיוויון מרקוב. כעת, מכך שהמ"מ בלתי תלויים ושווי התפלגות נקבל:

$$\Pr(A_n) \leq \frac{E(|X_1|) \cdots E(|X_n|)}{\epsilon} = \frac{E(|X_1|)^n}{\epsilon}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \Pr(A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{E(|X_1|)^n}{\epsilon} < \infty$$

כאשר האי-שיוויון האחרון נובע מכך ש$E(|X_1|) < 1$ ולכן הטור בצד ימין הוא טור הנדסי מתכנס. מכאן, שלפי הלמה של בורל קנטלי, בהסתברות 1 יהיה רק מספר סופי של פעמים שהמכפלות יסטו מ-0 ביותר מϵ, כלומר בהסתברות 1 קיים N שממנו והלאה לא יהיו יותר סטיות של יותר מϵ, כנדרש מהגדרת התכנסות בהסתברות 1:

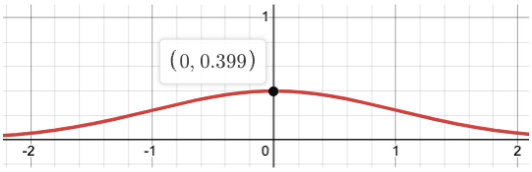
$$\Pr(\cup_{n=1}^{\infty} \cap_{m=n}^{\infty} |Y_n| \leq \epsilon) = 1$$

משפט הגבול המרכזי

משתנים נורמליים:

למשתנה נורמלי עם פרמטרים μ, σ^2 שאותו מסמנים ב-$X \sim N(\mu, \sigma^2)$ יש פונקציית צפיפות חיובית על כל הישר.
$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$. פונקציית ההסתברות המצטברת של משתנה זה היא: $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} f_X(t)dt$. אין לה ביטוי נוח.

נתעסק במקרה פרטי של משתנים כאלו - $X \sim N(0,1)$: **משתנה נורמלי סטנדרטי**.
כך, פונקציית הצפיפות היא $f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{x^2}{2}}$. הפה"מ היא $F_X(x) = \int_{-\infty}^{x} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \cdot e^{-\frac{t^2}{2}}dt$.



מכיוון שפונקציית הצפיפות סימטרית סביב 0 אז מתקיים: $P(X > x) = P(X < -x)$, ולכן גם $P(X \le x) = P(X \ge -x)$.

נסמן ב-$\Phi(x)$ את ההסתברות המצטברת בנקודה x. אז: $\boldsymbol{\Phi(-x) = 1 - \Phi(x)}$. אם נקבל רשימה של ערכי $\Phi(x)$ עבור $x > 0$ אז נוכל לדעת את $\Phi(x)$ לכל x. הנקודה הכי קלה לחישוב: $\Phi(0) = \frac{1}{2}$ כי זה סימטרי.

משפט הגבול המרכזי: תהי $\{X_i\}_{i=1}^{n}$ **סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות** בעלי תוחלת μ **ושונות סופית** σ^2. אז סדרת המשתנים המקריים שמהווה את הממוצעים של המשתנים: $\frac{\frac{\sum_{i=1}^{n} x_i}{n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$ מתכנסת בהתפלגות למשתנה נורמלי סטנדרטי $N(0,1)$. אפשר גם לרשום את הסדרה בתור $\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}$. המשמעות היא שלכל a קבוע מתקיים: $\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \le a\right) = \Phi(a)$. ההסתברות המצטברת של הסדרה בנקודה a שואפת להסתברות המצטברת של משתנה נורמלי סטנדרטי בנקודה a. הרבה פעמים מתעניינים מהו בקירוב הסיכוי שהממוצע של המשתנים קטן מאיזשהו גודל, כלומר $P\left(\frac{S_n}{n} \le a\right)$. ניתן לחלק את שני האגפים ונקבל: $P\left(\frac{\frac{S_n}{n} - \mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}} \le \frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$.

אם מתקיימים התנאים: **המשתנים ב"ת** ושווי התפלגות, ו-$n \to \infty$ אז קיבלנו סה"כ: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty} P\left(\frac{S_n}{n} \le a\right) = \Phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)}$

הערות:

- להבדיל מאי שוויונות מרקוב וצ'בישב שנותנים חסם, **זה נותן קירוב**.
- כאשר n גדל נקבל קירוב טוב יותר.
- תנאי אי-התלות חיוני כאן.

דוגמה: מטילים 100 פעמים מטבע הוגן, הטלות ב"ת. מהו בקירוב הסיכוי שנקבל פחות מ-30 עצים?

✓ נסמן $S_n = \sum_{i=1}^{100} X_i$ כאשר X_i הם אינדיקטורים. מתקיים $E(X_i) = 0.5$ ובנוסף $V(X_i) = 0.5 \cdot 0.5 = 0.25$.
✓ מתקיים: $(S_n < 30) \Leftrightarrow \left(\frac{S_n}{n} < \frac{30}{100}\right)$, כלומר הסיכוי שהסכום קטן מ-30 שקול לסיכוי שהממוצע קטן מ-0.3.
✓ לפי משפט הגבול המרכזי: $P\left(\frac{S_n}{n} < 0.3\right) \approx \Phi\left(\frac{0.3-0.5}{\sqrt{\frac{0.25}{100}}}\right) = \Phi\left(-\frac{0.2}{\frac{1}{20}}\right) = \Phi(-4) = 1 - \Phi(4) \approx 0$.

סוגיה: מבצעים 100 הטלות ב"ת של מטבע הוגן, שעל צד אחד שלו כתוב 5, ועל הצד השני כתוב 4. מכפילים את כל התוצאות. מהו בקירוב ההסתברות שיהיו יותר גורמי 5 מגורמי 2 במכפלה?

✓ כל הטלה היא בסיכוי 0.5 של 5. אנו צריכים שלפחות $\frac{67}{100}$ יהיו של גורמי 5 (לפחות $\frac{2}{3}$ מהפעמים כי רק ככה נקבל יותר גורמי 5 מגורמי 2, כל תוצאה 4 מהווה שני גורמי 2). יש כאן סכום של 100 אינדיקטורים ב"ת שבל אחד מהם בעל הסתברות 0.5. רוצים שממוצע האינדיקטורים יהיה לפחות $\frac{67}{100}$.

✓ כאן מתקיים - $a=\frac{2}{3},\mu=p=0.5,\sigma^2=0.5\cdot 0.5=0.25$.

✓ נחשב: $P\left(\frac{S_n}{n}\geq\frac{67}{100}\right)=1-P\left(\frac{S_n}{n}\leq\frac{2}{3}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{2}{3}-\frac{1}{2}}{\sqrt{\frac{0.25}{100}}}\right)=1-\Phi\left(\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{20}}\right)=1-\Phi\left(\frac{10}{3}\right)\approx 1-1=0$.

<u>הסתכלות אחרת על משפט הגבול המרכזי:</u>

- אמרנו כי: $P\left(\frac{S_n}{n}\leq a\right)\approx\Phi\left(\frac{a-\mu}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{n}}}\right)$. כלומר דיברנו על סדרת הממוצעים של המשתנים.
- אפשר לומר גם כי: $P(S_n\leq na)\approx\Phi\left(\frac{a-n\mu}{\sqrt{n\sigma^2}}\right)$, כלומר להסתכל על הסכום ולא על הממוצע.

החוק החלש והחוק החזק

יהיו X_i משתנים מקריים שווי התפלגות וב"ת בעלי שונות סופית. נסתכל על $V\left(\frac{S_n}{n}\right)$ כאשר $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.
מתקיים: $V\left(\frac{S_n}{n}\right)=\frac{1}{n^2}V(S_n)=\frac{1}{n^2}V(\sum_{i=1}^n X_i)=\frac{1}{n^2}\sum_{i=1}^n V(X_i)=\frac{1}{n^2}nV(X_1)=\frac{V(X_1)}{n}\xrightarrow[n\to\infty]{}0$. לממוצע יש שונות ששואפת לאפס – למשתנה מנוון, הפיזור של הממוצע נעשה אפסי. יש כאן תכונה שמקיימים משתנים שווי התפלגות ב"ת בעלי שונות סופית. זה לא חייב לקרות דווקא במקרה הזה.

<u>החוק החלש (התכנסות בהסתברות):</u> תהי X_i סדרת משתנים מקריים כאשר $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$.

- התכונה: $\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)=0}$ כאשר μ זו התוחלת וזה נכון לכל $\varepsilon>0$.
- בצורה הכללית ביותר כשהמשתנים לא בהכרח שווי התפלגות ולא בהכרח שווי תוחלת, צורת החוק החלש היא:

$$\boldsymbol{\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\frac{\sum_{i=1}^n\mu_i}{n}\right|>\varepsilon\right)=0}$$

<u>הערות:</u>

- **החוק החלש הוא תכונה כללית** - תכונה שלפעמים חלה על סדרת משתנים ולפעמים לא חלה עליה.
- משמעות החוק היא שאם נעשה סדרת ניסיונות חוזרים, ונעצור במקום מסוים, הממוצע יהיה קרוב לתוחלת.
- על סדרה של משתנים שווי התפלגות בעלי שונות סופית **חל החוק החלש**.

<u>דוגמאות:</u>

1) <u>משפט (מקרה פרטי):</u> על סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות בעלי שונות סופית וב"ת **חל החוק החלש**.
למשל כאשר $\{X_i\}$ הסדרה, $S_n=\sum_{i=1}^n X_i$ כאשר $E(X_1)=\mu$. נרצה להראות $\lim_{n\to\infty}P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)=0$ כאשר $\varepsilon>0$ נתון.

✓ לפי אי שוויון צ'בישב: $P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)\leq\frac{V\left(\frac{S_n}{n}\right)}{\varepsilon^2}=\frac{\frac{1}{n^2}V(S_n)}{\varepsilon^2}=\frac{V(\Sigma X_i)}{n^2\varepsilon^2}=\frac{nV(X_1)}{n^2\varepsilon^2}=\frac{V(X_1)}{n\varepsilon^2}$ וזה עבור כל $\varepsilon>0$ נתון שואף לאפס כאשר $n\to\infty$. לכן החסם העליון שואף לאפס כאשר $n\to\infty$.

2) יש מטבע שנופל על 1 בסיכוי $\frac{1}{3}$ בכל הטלה שלו, באופן ב"ת בהטלות האחרות שלו. יש מטבע אחר שנופל על 1 בסיכוי $\frac{2}{3}$ בכל הטלה באופן ב"ת בהטלות האחרות שלו. תחילה אני בוחר באחד מהם, ומבצע בו סדרה אינסופית של הטלות. האם על סדרת ההטלות חל החוק החלש?

✓ לפי המשפט שהוכחנו קודם, במקרה הראשון ההסתברות שפרופורציית ההצלחות תסטה מ-$\frac{1}{3}$ ביותר מ-$\varepsilon>0$ נתון תשאף ל-0 כשמספר הניסיונות ישאף לאינסוף. במקרה השני, ההסתברות לסטייה ביותר מ-$\varepsilon>0$ מ-$\frac{2}{3}$ תשאף ל-0. כלומר בשני המקרים הממוצע יתקרב לתוחלת.

✓ **מדובר בשני קבועים שונים**. אז, **אין שאיפה לקבוע מסוים ידוע מראש**, ולכן החוק החלש לא חל.

3) <u>סדרת משתנים תלויה שהחוק החלש חל עליה:</u> אני בוחר בסיכוי שווה בין שני מטבעות. במטבע הנבחר אני מבצע אינסוף הטלות ב"ת בהינתן המטבע. המטבע הראשון תמיד נופל על 0. המטבע השני נופל על 1 ועל 1- בסיכוי שווה בכל הטלה.

- ✓ נראה שהממוצע שואף בהסתברות ל-0, ולכן החוק החלש חל על הסדרה.
- ✓ בכל בחירה של מטבע הממוצע שואף ל-0: אם בחרתי במטבע הראשון אז הממוצע הוא תמיד 0. אם בחרתי במטבע השני אז לפי המשפט על סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי שונות סופית שעליה חל החוק החלש, אז במקרה השני הממוצע שואף בהסתברות ל-0 (זו התוחלת שלו).

החוק החזק (התכנסות בהסתברות 1): התכונה היא: $\lim\limits_{n\to\infty} \boldsymbol{P}\left(\cap_{m=1}^{\infty}\cup_{n=m}^{\infty}\left|\frac{\boldsymbol{S_n}}{\boldsymbol{n}}-\frac{\sum_{i=1}^{n}\boldsymbol{\mu_i}}{\boldsymbol{n}}\right|>\boldsymbol{\varepsilon}\right)=\boldsymbol{0}$

הערות:

- המשמעות היא **שמספר סופי של פעמים**, **הממוצע קרוב מאוד לתוחלת**. יש שלב שאחריו, ההפרש בין הממוצע לתוחלת כבר לא יהיה גדול מ-ε אף פעם (אפשר להראות שקיים שלב כזה, בעזרת הלמה של בורל קנטלי (סעיף א) שיש רק מספר סופי של מאורעות, שאחריהם הממוצע שואף לתוחלת - סוגיה על החוק החזק - YouTube).
- הראנו שלגבי סדרת משתנים ב"ת שווי התפלגות בעלי שונות סופית, אז הסיכוי לסטייה ביותר מ-ε מתנהג כמו $\frac{1}{n}$ ושואף לאפס. אבל $\Sigma\left(\frac{1}{n}\right)=\infty$. אנחנו לא יודעים אם אינסוף פעמים תהיה סטייה או לא. **כאן הדרישה היא שונה**.

משפט: על סדרת משתנים מקריים ב"ת שווי התפלגות בעלי תוחלת μ ומומנט רביעי סופי, **חל החוק החזק**. כאשר, מומנט k של משתנה הוא $E(X^k)$ או $\Sigma P(X=k)\cdot k^k$.

הערה: במשפט על החוק החלש דרשנו שונות סופית (כלומר מומנט שני הוא סופי, כי $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$). כאן הדרישה היא חזקה יותר.

דוגמאות:

1) סדרת משתנים תלויה שהחוק החזק חל עליה: בסיכוי חצי כל $X_i=0$ ובסיכוי חצי מתקיים $P(X_i=1)=P(X_i=-1)=0.5$ באופן ב"ת בין משתנים שונים.

- ✓ המומנט הרביעי חסום על ידי 1^4, לכן יש להם מומנט רביעי סופי.
- ✓ בסיכוי חצי הממוצע הוא תמיד 0. בסיכוי חצי הוא לא תמיד אפס אבל לפי הגרסה של המשפט החזק שהוכחנו, **מספר הפעמים שהממוצע יסטה מהתוחלת** ביותר מ-ε נתון **יהיה סופי** בהסתברות 1 גם במקרה השני.

2) נתונה סדרת משתנים מקריים $\{X_i\}$. נניח כי $P(X_1=0)=1$. עבור כל $i\ge 1$ מתקיים $X_i=-\left(\sum_{j<i}X_j\right)+Y_i$, כאשר מתקיים $\{Y_i\}$ ב"ת ומקיימים $P(Y_i=-i)=P(Y_i=i)=\frac{1}{2i}$ וגם $P(Y_i=0)=1-\frac{1}{i}$.

טענה: החוק החלש חל על הסדרה X_i, החוק החזק לא חל על X_i.

- ✓ התוחלת של כל X_i היא 0. התוחלת של הראשון היא 0 ובאינדוקציה אפשר להוכיח שהתוחלת של כל אחד אחר היא 0 (כי התוחלת של כל Y_i היא גם 0).
- ✓ כדי להראות שהחוק החלש חל צריך להראות שעבור כל ε מתקיים $\lim\limits_{n\to\infty} P\left(\left|\frac{S_n}{n}-\mu\right|>\varepsilon\right)=0$. מתקיים $S_n=Y_n$. לכן במקום ה-n הסכום שונה מ-0 רק בסיכוי $\frac{1}{n}=\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}$. לכן הממוצע שונה מ-0 רק בסיכוי $\frac{1}{n}$ ולכן החוק החלש חל על הסדרה.
- ✓ מתקיים: $P(S_n=n)=P(Y_n=n)=\frac{1}{2n}$ ו-$\Sigma\left(\frac{1}{2n}\right)=\infty$. כאשר $S_n=n$ אז $\frac{S_n}{n}=1$. זה קורה אינסוף פעמים. למשל עבור $\varepsilon=0.5$ אינסוף פעמים הממוצע יסטה מהתוחלת ביותר מ-0.5 (כי התוחלת היא 0).

שאלות חזרה

תשפ"ב

שאלה 1: מבצעים סדרת הטלות ב"ת של קוביה תקינה. יהי X – הפעם הראשונה שבה צברנו שתי תוצאות 6. יהי Y – הפעם הראשונה שבה צברנו גם תוצאה 6 וגם תוצאה 5. יהי Z – הפעם הראשונה שבה קיבלנו 5 לאחר שכבר הופיע 6.
א) מהי התוחלת של כל אחד מהמשתנים?
ב) מהי $E(|Z-X|)$?

פתרון:
א) מתקיים $X \sim NB(2,\frac{1}{6})$, לכן $E(X)=\frac{2}{\frac{1}{6}}=12$. עבור Z, גם מדובר בסכום של שני משתנים גאומטריים. לכן $Z \sim NB\left(2,\frac{1}{6}\right)$.
עבור Y אנו צריכים 5 ואז 6, או 6 ואז 5. עד קבלת הראשון אנו מתפלגים $G(\frac{2}{6})$. לאחר מכן אנו צריכים רק מספר אחד, ולכן מתפלגים $G(\frac{1}{6})$. לכן התוחלת של Y היא (תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות): $E(Y)=\frac{1}{\frac{2}{6}}+\frac{1}{\frac{1}{6}}=3+6=9$.
ב) כיוון שמדובר בערך המוחלט, אנחנו לא יודעים מי קורה קודם. אנו נתחיל לבדוק מה קורה לאחר שנקבל פעם ראשונה 6. אחרי שנקבל 5 או 6, יתחיל הזמן שייצבר לנו ההפרש ביניהם.
- אם נקבל 5 (Z קרה), אנו מחכים לקבל 6 (X קרה).
- אם נקבל 6 (X קרה), אנו מחכים לקבל 5 (Z קרה).

הזמן עד התוצאה הרצויה מתפלג $G(\frac{1}{6})$ בשני המקרים. בכל מקרה התוחלת היא $6=\frac{1}{\frac{1}{6}}$.

שאלה 2: נתון $X \sim U(-1,1)$. מהי $E(|X|)$?

פתרון: בסיכוי חצי נתפלג $U(-1,0)$ ובסיכוי חצי נתפלג $U(0,1)$. בשתי ההתפלגויות תוחלת הערך המוחלט היא 0.5.
בדרך נוספת: אפשר לעשות תוחלת שלמה, בעזרת אינטגרל על פונקציית הצפיפות:
$$\int_{-1}^{0} 0.5(0-x)dx+\int_{0}^{1} 0.5(x-0)dx=-\frac{1}{4}x^2\Big|_{-1}^{0}+\frac{1}{4}x^2\Big|_{0}^{1}=\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=\frac{1}{2}$$

שאלה 3: נתון $X \sim P(3)$. מהי $E(X^2)$?

פתרון: אנו יודעים כי $V(X)=E(X^2)-E^2(X)$ ולכן $E(X^2)=V(X)+E^2(X)=3+3^3=12$.
או באופן כללי: $E(X^2)=\lambda+\lambda^2$.

שאלה 4 (קנס על ריבוע השגיאה): יהי X – משתנה מקרי, בהגרלה כלשהי. אנחנו רוצים לנחש את התוצאה של ההגרלה, ואנחנו נקבל קנס השווה לריבוע הסטייה מהתוצאה. איזה ערך כדאי לנו לנחש? ומהי תוחלת הקנס במקרה שזהו הניחוש הנכון? נרצה להביא למינימום את ממוצע ריבועי הסטיות מהתוצאה הנכונה.

פתרון: יהי a הערך שאנו מנחשים. למשתנה תוחלת $E(X)$ לכן תוחלת הקנס היא $E[(X-a)^2]$. מתקיים (תוחלת מכפלת קבוע במשתנה שווה למכפלת הקבועה בתוחלת המשתנה):
$$E(X-a)^2=E\left(\left(X-E(X)\right)+\left(E(X)-a\right)\right)^2=E\left[\left(X-E(X)\right)^2+\left(E(X)-a\right)^2+2\left(\left(E(X)-a\right)\left(X-E(X)\right)\right)\right]$$
$$=E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]+E[(E(X)-a)^2]+2(E(X)-a)\cdot E[X-E(X)]=V(X)+(E(X)-a)^2$$

- נשים לב כי מתקיים מלינאריות התוחלת: $E[X-E(X)]=E(X)-E(X)=0$ ולכן החלק השלישי מתאפס.
- נשים לב כי מתקיים לפי הגדרת השונות: $E\left[\left(X-E(X)\right)^2\right]=V(X)$.
- בחלק השני ניתן להוריד את התוחלת כי מדובר בערך קבוע $(E(X)-a)^2$.
- התוחלת הנמוכה ביותר מתקבלת כאשר $a=E(X)$ וכך נביא את הביטוי למינימום. במקרה זה **תוחלת הקנס היא $V(X)$**.

שאלה 5: למהמר יש שקל 1. הוא רוצה להגיע ל-64 שקלים. בכל שלב כל עוד הוא לא התרושש, הוא מהמר על כל קופתו. בכל הימור יש לו סיכוי p להכפיל את הונו וסיכוי $q=1-p$ להפסיד את כל הונו.
א) מהי ההסתברות שהוא יגיע ל-64 שקלים?
ב) נניח שהוא זכה פעמיים בהימור, מה כעת סיכוייו לנצח?
ב) נניח שהוא לא הגיע ל-64 שקלים, מהי ההסתברות שהוא שיחק לכל היותר 3 משחקים (3 ניצחונות)?

פתרון:

א) p^6 – הוא צריך 6 זכיות, אחרת הוא יפסיד.

ב) צריך עוד 4 ניצחונות, ויש כאן חוסר זיכרון, הסיכוי ממשיך להיות p. לכן הסיכוי הוא p^4.

ג) A – לא הגיע ל-64 שקלים, B – לא שיחק יותר מ-3 משחקים (לא ניצח אחרי 3 משחקים). מתקיים כי $P(A \cap B) = P(B)$, אם הוא לא שיחק יותר מ-3 סיבובים הוא בהכרח לא הגיע ל-64 שקלים. נחשב הסתברות מותנה: $P(B|A) = \frac{P(A\cap B)}{P(A)} = \frac{P(B)}{P(A)} = \frac{1-p^3}{1-p^6}$

שאלה 6: נתון $X \sim U(0,1)$. בוחרים ריבוע שאורך צלעו היא X.

א) מהי תוחלת שטח הריבוע?

ב) מהי ההסתברות ששטח הריבוע קטן מ-0.5?

ג) מהי תוחלת היקף הריבוע?

ד) מהי ההסתברות שהשטח של הריבוע הוא בין $\frac{1}{4}$ ל-$\frac{1}{3}$?

ה) מצאו את הפה"מ של S.

פתרון:

א) השטח של הריבוע הוא X^2. נחשב לפי אינטגרל על פונקציית הצפיפות:

$$E(X^2) = \int_0^1 f_X(x) \cdot x^2 dx = \int_0^1 1 \cdot x^2 dx = \frac{x^3}{3} \Big|_0^1 = \frac{1}{3}$$

ב) המשתנה לא יכול לקבל ערכים שליליים, ולפי חישוב עבור משתנה אחיד:

$$P(X^2 < 0.5) = P\left(X < \sqrt{0.5}\right) = \frac{\sqrt{0.5} - 0}{1 - 0} = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

ג) היקף הריבוע הוא $4X$ ולכן:

$$E(4X) = 4E(X) = 4 \cdot \frac{0+1}{2} = 2$$

ד) נחשב:

$$P\left(\frac{1}{4} \le S \le \frac{1}{3}\right) = P\left(\frac{1}{4} \le X^2 \le \frac{1}{3}\right) = P\left(-\frac{1}{\sqrt{3}} \le X \le -\frac{1}{\sqrt{4}}\right) + P\left(\frac{1}{\sqrt{4}} \le X \le \frac{1}{\sqrt{3}}\right)$$

$$= 0 + P\left(X \le \frac{1}{\sqrt{3}}\right) - P\left(X \le \frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} - 0}{1-0} - \frac{\frac{1}{2} - 0}{1-0} = \boldsymbol{\frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{2}}$$

ה) מתקיים: $F_S(s) = P(S \le s) = P\left(X \le \sqrt{s}\right) = \frac{\sqrt{s}-0}{1-0} = \sqrt{s}$. לכן:

$$F_S(s) = \begin{cases} 0 & s < 0 \\ \sqrt{s} & 0 \le s \le 1 \\ 1 & s \ge 1 \end{cases}$$

שאלה 7: בכיתה יש 30 ילדים. כל ילד משחק נגד כל ילד אחר פעם אחת. בכל משחק מנצח אחד.

א) מהי תוחלת מספר הניצחונות הכולל של ילדי הכיתה?

ב) נניח שכל משחק מסתיים בתיקו בסיכוי $\frac{1}{3}$, מהי תוחלת מספר משחקי התיקו?

פתרון:

א) יש $\binom{30}{2}$ משחקים ובכל משחק יש בדיוק מנצח אחד. מספר הניצחונות הוא משתנה מנוון – יש בדיוק $\binom{30}{2}$ ניצחונות.

ב) יש $\binom{30}{2}$ אינדיקטורים, שכל אחד מהם הוא הצלחה בסיכוי $\frac{1}{3}$, לכן התוחלת היא $\binom{30}{2}\frac{1}{3}$. **אי אפשר להגיד שמספר משחקי התיקו מתפלג בינומית, כי לא נתון שיש אי-תלות בין משחקים.** $E(X) = E\left(\Sigma(X_i)\right) = \Sigma\left(E(X_i)\right) = \binom{30}{2} \cdot \frac{1}{3}$.

שאלה 8: בחפיסת קלפים יש 52 קלפים (4 סדרות של 13 קלפים) שמתוכם 4 הם אסים. מערבבים את הקלפים, מתקבל סדר אקראי. מהי ההסתברות שהאס השני מופיע מיד אחרי הראשון?

פתרון:

דרך א – מרחב המדגם של סידור 52 הקלפים בשורה $|\Omega| = 52!$. המאורע A – שני האסים הם סמוכים. נניח שהאס הראשון מופיע במקום ה-i: עד אז צריך לקבל רק קלפים אחרים מתוך 48 קלפים שאינם אסים: $\binom{48}{i-1}$, צריך לסדר אותם ולכן נכפיל ב-$(i-1)!$. נבחר אס ראשון מתוך 4 אפשרויות, ואז אס שני מתוך 3: $\binom{4}{1} \cdot \binom{3}{1}$. לבסוף, עלינו לסדר את הקלפים שאחרי האסים הראשונים: $\left(52-(i+1)\right)!$. נסכום את זה לכל i.

דרך ב – נבחר את האס שיהיה שני (יש 4 אפשרויות). נסדר את יתר הקלפים. נשים את האס שנבחר בהתחלה מיד לאחר האס הראשון. סה"כ נקבל כי $|A| = \mathbf{4 \cdot 51!}$, $|\Omega| = \mathbf{52!}$ ונחשב: $\frac{1}{13} = \frac{4}{52} = \frac{4\cdot 51!}{52!}$.

דרך ג – ניתן לבחור באיזה מרחב מדגם שאנחנו רוצים, רק שיהיה סימטרי. במקרה הזה נדבר על ארבעת המקומות שאנחנו מייחסים לאסים. נגדיר בהתאם $|\Omega| = \binom{52}{4}$. נבחר את שלושת המקומות, כאשר יש מקום אחד שמיועד לשני האסים הראשונים והוא כפול (ימוקמו בו שני אסים). נחשב: $p = \frac{\binom{51}{3}}{\binom{52}{4}} = \frac{1}{13}$.

<u>שאלה 9 (ניסיון למציאת חסמים על $Cov(X,Y)$):</u> יהיו X,Y משתנים מקריים בעלי שונויות $V(X), V(Y)$. נסתכל על $V(X-Y)$. שונות של משתנה היא תמיד אי-שלילית. מתקיים:

$$0 \le V(X-Y) = V(X) + V(Y) - 2Cov(X,Y) \Leftrightarrow Cov(X,Y) \le \frac{V(X)+V(Y)}{2}$$

נסתכל על $V(X+Y)$. כעת מתקיים $Cov(X,Y) \ge -\frac{V(X)+V(Y)}{2}$. כעת נסתכל על $\{X_i\}$ סדרת משתנים מקריים שווי התפלגות, ושווי התפלגות משותפת.

א) האם ייתכן $Cov(X_i,X_j) = V(X_i)$ לכל i,j?

ב) האם בנתונים אלה ייתכן שקיימים i,j כך ש-$Cov(X_i,X_j) < 0$?

<u>פתרון:</u>

א) כן. יתכן שכל המשתנים הם **העתק אחד של השני** וכך כולם שווים. $\boldsymbol{Cov(X_i,X_j) = Cov(X_i,X_i) = V(X_i)}$.

ב) לא. זה לא ייתכן כאשר הם שווי התפלגות ושווי התפלגות משותפת. נסמן $V(X_i) = V(X_1) = \sigma^2$, וגם לכל i,j מתקיים $Cov(X_i,X_j) = Cov(X_1,X_2)$.

מתקיים: $V(\sum_{i=1}^n X_i) = \sum_{i=1}^n V(X_i) + 2\sum_{i<j}^n Cov(X_i,X_j) = n\sigma^2 + 2\binom{n}{2}\cdot Cov(X_1,X_2)$. כיוון ששונות היא אי-שלילית נקבל כי כל הביטוי הזה אי-שלילי: $n\sigma^2 + n(n-1)\cdot Cov(X_1,X_2) \ge 0$ ולכן $Cov(X_1,X_2) \ge -\frac{\sigma^2}{n-1}$, זה נכון לכל n טבעי ולכן נסיק כי $Cov(X_1,X_2) \ge 0$. נגדיל את n ונקבל כי $Cov(X_1,X_2)$ גדול או שווה מכל קבוע שלילי, לכן הוא לא יכול להיות שלילי.

<u>שאלה 10:</u> יהי $X \sim P(1)$. מצאו את $E[|X-1|]$.

<u>פתרון:</u> נחשב לפי הגדרת התוחלת:

$$\begin{aligned}
E[|X-1|] &= \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot|k-1| = P(X=0)\cdot|0-1| + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot(k-1) \\
&= e^{-1}\cdot 1 + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot k + \sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot(-1) \\
&= e^{-1} + \sum_{k=0}^{\infty} P(X=k)\cdot k - P(X=0)\cdot 0 - \big(1-P(X=0)\big) = e^{-1} + E(X) - \big(1-P(X=0)\big) \\
&= e^{-1} + 1 - (1-e^{-1}) = 2e^{-1}
\end{aligned}$$

- נשים לב כי $\sum_{k=1}^{\infty} P(X=k)\cdot(-1)$ זה ההסתברות לקבל כל ערך שהוא פרט ל-0. לכן תרגמנו ל-$-\big(1-P(X=0)\big)$.

<u>שאלה 11:</u> מטילים קוביה תקינה 3 הטלות ב"ת.

א) מהי ההסתברות שמכפלת התוצאות תהיה כפולה של 5?

ב) אם נרצה שהמכפלה תהיה בדיוק 5?

<u>פתרון:</u>

א) ניעזר במשלים. המשלים – הסיכוי שאף מכפלה לא תהיה כפולה של 5, 3 פעמים התקבלה שונה מ-5, כי רק ע"י קבלת 5 אפשר להגיע לכפולה של 5. לכן התשובה היא $1-\left(\frac{5}{6}\right)^3$.

ב) כאן נרצה לקבל פעמיים 1 ופעם אחת לקבל 5, אז נבחר את 2 ההטלות שבהן נקבל 1. סה"כ $\binom{3}{2}\cdot\left(\frac{1}{6}\right)^2\cdot\frac{1}{6}$.

שאלה 12 (הילוך מקרי): שיכור מבצע הילוך מקרי על הישר. הוא מתחיל בראשית ובכל שלב הוא עושה צעד אחד ימינה בסיכוי 0.5, או צעד אחד שמאלה בסיכוי 0.5 באופן ב"ת בשלבים האחרים. מהי ההסתברות שעד שלב 9 הוא יגיע לפחות פעם אחת לנקודה 5?

פתרון: נשים לב שבנקודה 5 הוא יכול להיות רק בשלבים אי-זוגיים: 5, 7, 9. ניעזר בעקרון ההכלה וההפרדה. נגדיר את המאורעות הבאים: A_5, A_7, A_9 שבשלב 5, 7, 9 הוא בנקודה 5. נחשב:

- $P(A_5) = 0.5^5$, $P(A_7) = \binom{7}{6} \cdot 0.5^6 \cdot 0.5$ (שישה צעדים ימינה ואחד שמאלה), $P(A_9) = \binom{9}{7} \cdot 0.5^7 \cdot 0.5^2$ (שבעה צעדים ימינה ו-2 שמאלה).
- עבור החיתוך של 5 ו-7, נגיע לנקודה 5 בחמישה צעדים ואז נעשה צעד ימינה וצעד שמאלה: $P(A_5 \cap A_7) = 0.5^5 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2$. עבור החיתוך של 5 ו-9, נגיע לנקודה 5 בחמישה צעדים ואז נעשה שניים ימינה ושניים שמאלה: $P(A_5 \cap A_9) = 0.5^5 \cdot \binom{4}{2} \cdot 0.5^2 \cdot 0.5^2$. עבור החיתוך של 7 ו-9, 6 צעדים ימינה וצעד שמאלה (להגיע ב-7 צעדים), ואז צעד ימינה וצעד שמאלה: $P(A_7 \cap A_9) = \binom{7}{6} \cdot 0.5^6 \cdot 0.5 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5$.
- חיתוך של כולם... $P(A_5 \cap A_7 \cap A_9) = 0.5^5 \binom{2}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5 \cdot \binom{2}{1} \cdot 0.5 \cdot 0.5$.

נציב הכול בחישוב של הכלה והפרדה: $P(A_5 \cup A_7 \cup A_9) = P(A_5) + P(A_7) + P(A_9) - P(A_5 \cap A_7) - \cdots + P(\ldots)$.

שאלה 13: נתונים $X \sim Y \sim G(p)$ כאשר הם ב"ת, בנוסף $W = \min\{X, Y\}$. מהי תוחלת מספר המשתנים מבין X, Y, W שקטנים מ-3?

פתרון: תוחלת סכום שווה לסכום התוחלות! נגדיר אינדיקטורים לכך שהמשתנה קטן מ-3 בהתאמה: X_1, Y_1, W_1. מספר המשתנים שקטנים מ-3 הוא $X_1 + Y_1 + W_1$. נקבל: $E(X_1 + Y_1 + W_1) = E(X_1) + E(Y_1) + E(W_1)$. נשים לב כי אם היו לנו 2 כישלונות, כבר עשינו 3 ניסויים. לכן נחשב על ידי המשלים – **לא היו לנו 2 כישלונות**: $E(Y_1) = E(X_1) = P(X < 3) = 1 - q^2$.
נחשב: $E(W_1) = P(W < 3) = 1 - P(X \geq 3, Y \geq 3) = 1 - P(X \geq 3) \cdot P(Y \geq 3) = 1 - q^2 \cdot q^2 = 1 - q^4$.

שאלה 14: מבצעים סדרה של הטלות ב"ת של מטבע שנופל על עץ בסיכוי $\frac{1}{3}$ ועל פלי בסיכוי $\frac{2}{3}$. יהי W – הפעם שבה זכינו לראשונה לראות את שתי התוצאות. כאשר X – מספר ההטלות עד קבלת עץ, Y – מספר ההטלות עד פלי, אז $W = \max\{X, Y\}$.
א) חשבו את $E(W)$.
ב) מהו $P(W > 5)$?
ג) נניח שהמטבע הוגן, נופל על עץ ופלי בסיכוי 0.5 כל אחד. מהו $V(W)$?
ד) המטבע לא הוגן, מהו, נגדיר Z – מספר ההטלות עד שקיבלנו עץ וגם פלי. מהו $V(Z)$?

פתרון:
א) דרך א – מבצעים הטלה ראשונה ולאחריה יש בסיכוי $\frac{1}{3}$ זמן המתנה לפלי, ובסיכוי $\frac{2}{3}$ זמן המתנה לעץ. לכן לאחר ההטלה הראשונה יש בסיכוי $\frac{1}{3}$ זמן המתנה $G(\frac{2}{3})$ ובסיכוי $\frac{2}{3}$ זמן המתנה המתפלג $G(\frac{1}{3})$. לפי תוחלת שלמה (ותוחלת של גיאומטרי):

$$E(W) = 1 + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{\frac{2}{3}} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{\frac{1}{3}}$$

דרך ב – יהי $Z = \min\{X, Y\}$ נשים לב כי $X + Y = \min\{X, Y\} + \max\{X, Y\}$. מתקיים $Z + W = X + Y$.
לכן $E(Z + W) = E(X + Y) \Rightarrow E(Z) + E(W) = E(X) + E(Y)$. ידוע כי $E(X) = \frac{1}{\frac{1}{3}} = 3, E(Y) = \frac{1}{\frac{2}{3}} = 1.5$. המינימום חייב לקבל את הערך 1, כי בהטלה הראשונה מקבלים איזושהי תוצאה: $E(W) = E(X) + E(Y) - 1 = 3 + 1.5 - 1 = 3.5$.
ב) דרושים או 5 עצים רצופים או 5 פלי רצופים ולכן $\left(\frac{1}{3}\right)^5 + \left(\frac{2}{3}\right)^5$. כך לא ראינו את שניהם אחרי 5 הטלות.
ג) מבצעים הטלה ואחריה יש בכל מקרה סדרת הטלות שמתפלגת $G(0.5)$ עד קבלת התוצאה הנוספת. יהי T – מספר ההטלות אחרי ההטלה הראשונה, מתקיים $W = T + 1$. לכן $V(W) = V(T + 1) = V(T) = \frac{0.5}{0.5^2} = 2$.
ד) קודם כל נרשום: $P(Z = k) = \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{2}{3} + \left(\frac{2}{3}\right)^{k-1} \cdot \frac{1}{3}$. נרצה לחשב את $V(Z) = E(Z^2) - E^2(Z)$.

- נחשב: $E(Z) = \sum_{k=2}^{\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^{k-1} \cdot \left(\frac{2}{3}\right) \cdot k$ ונוכל לשנות את הסכימה כך שזה יתחיל מ-$k = 1$. אם נחסר את האיבר הראשון נקבל תוחלת של משתנה גיאומטרי עם פרמטר $\frac{2}{3}$.

- איך נחלץ את $E(Z^2)$? $E(Z^2) = \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)\cdot k^2 + \sum_{k=2}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}\cdot\left(\frac{1}{3}\right)\cdot k^2$ אם נשנה את הסכימה ונחסר את האיבר הראשון, נקבל את $E(T^2), T \sim G(\frac{2}{3})$, כאשר $E(T^2) = V(T) + E^2(T)$.

דרך נוספת נמצאת כאן.

שאלה 15 (אינדיקציות שונות לפיזור): השונות היא מדד לפיזור. אבל אף מדד הוא לא מושלם וכל מדד נותן רק תמונה חלקית. ניתן כאן דוגמה שבה למשתנה אחיד יש פיזור גדול יותר אם המדד הוא **ממוצע ריבועי הסטייה מהתוחלת (השונות)**, ולמשתנה אחר יש פיזור גדול יותר אם המדד הוא **ממוצע הערכים המוחלטים של הסטיות מהתוחלת**.

יהי X משתנה המקיים $P(X = 10) = P(X = -10) = 0.5$. יהי Y משתנה המקיים $P(Y = 1) = P(Y = -1) = 0.49$, ובנוסף גם $P(Y = 100) = P(Y = -100) = 0.01$. התוחלות שלהם: $E(X) = 0, E(Y) = 0$. שניהם סימטריים סביב 0.

פתרון:

נחשב את השונות לפי הגדרה (ל-Y שונות גדולה יותר מאשר X):

- $V(X) = E\big(X - E(X)\big)^2 = 0.5\cdot 10^2 + 0.5\cdot(-10)^2 = 100$
- $V(Y) = E\big(Y - E(Y)\big)^2 = 0.49\cdot 1^2 + 0.49\cdot(-1)^2 + 0.01\cdot 100^2 + 0.01\cdot(-100)^2 = 200.98$.

נחשב את הערכים המוחלטים (ל-X יש ממוצע סטיות מהתוחלת גדול יותר מ-Y):

- $E(|X - E(X)|) = 0.5\cdot 10 + 0.5\cdot 10 = 10$
- $E(|Y - E(Y)|) = 0.49\cdot 1 + 0.49\cdot 1 + 0.01\cdot 100 + 0.01\cdot 100 = 2.98$

שאלה 16: מבצעים אינסוף הטלות ב"ת של מטבע הוגן. X_i – אינדיקטור לקבלת תוצאת 1 בהטלה ה-i. $Y_i = X_i \cdot X_{i+1}$. נשים לב כי אין תלות בין X_i, X_{i+1} אבל יש תלות בין Y_i, Y_{i+1}: $P(Y_5 = 1) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} \neq \frac{1}{2} = P(Y_5 = 1|Y_4 = 1)$. מה ניתן לומר על $V(X_i), V(Y_i)$? מתקיים $V(Y_i) = \frac{1}{4}\cdot\frac{3}{4} < V(X_i)$, $V(X_i) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}$.

א) האם החוק החלש חל על הסדרה $\{X_i\}$?

ב) האם החוק החלש חל על הסדרה $\{Y_i\}$?

ג) האם החוק החזק חל על הסדרה $\{Y_i\}$?

פתרון:

א) כן. מדובר בסדרת משתנים ב"ת, שווי התפלגות. הממוצע היה קרוב לתוחלת שהיא $\frac{1}{2}$.

ב) כן. בסדרה זו המשתנים תלויים, זה לא אומר שבהכרח החוק החלש לא חל. נסתכל על שתי תתי-סדרות: $Y_1, Y_3, Y_5, \ldots$ והסדרה $Y_2, Y_4, Y_6, \ldots$. כל סדרה כזו בנפרד היא של משתנים ב"ת (אין רצף משותף של X_i כלשהם), וגם שווי התפלגות.

ג) כן. המומנט הרביעי הוא סופי: $\frac{1}{4}\cdot 1^4 + \frac{3}{4}\cdot 0^4 = \frac{1}{4}$. אנחנו נפריד שוב לשתי תתי-סדרות. על כל אחת מהן חל החוק החזק ולכן גם על הסדרה כולה.

שאלה 17: $X_n \sim N(0,1)$. מספר רציונלי a יקרא נורמלי אם עבור כל $\varepsilon > 0$ קיים משתנה בסדרה X_n שלא רחוק ממנו ביותר מ-ε. מהי ההסתברות שיהיו אינסוף רציונליים לא נורמליים?

פתרון: כדי שמספר יהיה לא נורמלי, נגיד 2, צריך שיהיה קטע בין $(2 - \frac{1}{n}, 2 + \frac{1}{n})$ שאף משתנה לא יקבל שם ערך.

נשים לב כי מתקיים: $F_X\left(2 + \frac{1}{n}\right) - F_X\left(2 - \frac{1}{n}\right) > 0$, מכיוון שיש צפיפות חיובית תמיד בהתפלגות נורמלית, הפה"מ עולה. בהסתברות 1 לפי הלמה של בורל קנטלי יתקבלו אינסוף ערכים בקטע הזה. המאורע ש-2 לא נורמלי הוא איחוד בין מניה של מאורעות בעלי הסתברות 0. לכן 2 הוא לא נורמלי בסיכוי 0.

תשפ"ג

שאלה 18: תהי $\{X_i\}$ סדרת משתנים מקריים בעלי תוחלת 0 שעליה חל החוק החזק. האם יתכן שבהכרח לפחות פעמיים הממוצע המצטבר יסטה מהתוחלת בלפחות 5?

פתרון: ניתן דוגמה. $P(X_1 = 18) = P(X_1 = -18) = 0.5, P(X_2 = 1) = P(X_2 = -1) = 0.5$. לכל $i \geq 2$ מתקיים $P(X_i = 0) = 1$. בהתחלה הממוצע הוא 18 או 18-, ובשלב השני הממוצע יהיה יותר מ-5, כלומר כבר מצאנו פעמיים שבהן הממוצע סוטה מהתוחלת בלפחות 5. לאחר מכן, הממוצע ילך ויתייצב סביב 0.

שאלה 19: מבצעים סדרה ב"ת של הטלות של מטבע הוגן.
א) מהי תוחלת מספר ההטלות עד שנקבל ht ברצף?
ב) עכשיו נשאל מהי התוחלת עד שנקבל hh.
ג) מה הסיכוי שנקבל ht לפני tt?

פתרון:
א) קודם כל צריך לקבל h. אחרי שקיבלתי h מחכים ל-t הראשון. התוחלת היא $\frac{1}{0.5} + \frac{1}{0.5} = 4$. יש כאן $G(0.5)$ פעמיים.
ב) נסמן ב-e את התוחלת המבוקשת. $e = 0.5 \cdot 0.5 \cdot 2 + 0.5(1 + 3) + 0.5 \cdot 0.5(2 + e)$. אם מקבלים hh סיימנו, אם נקבל t חוזרים למצב ההתחלתי, ואם נקבל ht נחזור להתחלתי אחרי שביזבזנו 2.

$$e = 0.5 + 0.5 + 0.5e + 0.5 + 0.25e \Leftrightarrow e = 1.5 + 0.75e \Leftrightarrow e = 6$$

ג) אם הראשון יהיה h אז זה בטוח (בסיכוי 0.5). אם הראשון t אז אם הבא אחריו הוא t (בסיכוי 0.5) אז קודם tt. אם לא (בסיכוי 0.5) אז קודם ht וניצחנו. סה"כ מתקיים $0.5 + 0.5 \cdot 0.5 = \frac{3}{4}$.