Data Structures – Project #2 Oded Neeman – odedneeman – 207110479 Roy Mayan – roymayan – 206483554

# חלק מעשי

# המחלקה HeapNode

<u>תיאור:</u> HeapNode מייצגת צומת בודד בערימת פיבונאצ'י של מספרים שלמים FibonacciHeap. <u>שדות:</u>

תפקיד	שדה
מפתח הצומת	key
דרגת הצומת – כמות הילדים הישירים שלו	rank
האם הצומת מסומן או לא	mark
מצביע לילד	child
מצביע לצומת הבא	next
מצביע לצומת הקודם	prev
מצביע להורה	parent
(ראו בהמשך) kMin מצביע ייעודי עבור פונקצית	original

### <u>מתודות:</u>

סיבוביות		מתודה
0(1)	בנאי המחלקה. כל השדות מאותחלים לערכים דיפולטיים, פרק ל-next ו-	HeapNode(int key)
מתבצעות השמות בזמן קבוע.	prev שמצביעים ל-node החדש שכעת נוצר (זה המצב בברירת המחדל).	
0(1)	key/rank/mark/ באשר X הוא :X באשר מחזירות את שדה	getX()
0(1)	key/rank/mark/ הוא X באשר X באשר אשר מבצעות השמה לשדה	setX()
	הערה: ()setChild מבצעת הגדלה של ה-rank ב-1.	
0(1)	מבצעת שיוך מצביעים דו-כיווני בין שני צמתים (עבור מצביעי next-prev).	setNextPrev(HeapNode next)
מתבצעות השמות בזמן קבוע.		
0(1)	child- מבצעת שיוך מצביעים דו-כיווני בין שני צמתים (עבור מצביעי	setParentChild(HeapNode
מתבצעות השמות בזמן קבוע.	.(parent	parent)
0(1)	O(1) את כל שדות הצומת פרט למצביע הילד שלו. (null-) את כל שדות הצומת פרט מאפס	
מתבצעות השמות בזמן קבוע.		
0(1)	O(1) מחזירה האם הצומת הנוכחי הוא שורש (בדיקת המצביע של ההורה – אם	
אין הורה מדובר בשורש).		
0(1)	מחברת את הצומת הנוכחי לצומת other (מבצעת link). מתבצעת	link(HeapNode other)
	השוואת גדלים בין המפתחות של הצמתים, על מנת לבצע את החיבור תוך	
	שמירת כלל הערימה. בחיבור אנו מתקנים מצביעים ונעזרים בפונקציות	
	.setNextPrev, setParentChild	
	כל link כזה גם מגדיל ב-1 את ה-counter הסטטי במחלקה	
.totalLinks של FibonacciHeap		
0(1)	חותכת את הצומת הנוכחי מאביו.	cut()
	אם לצומת אין אחים (ילד יחידי של אביו) ננתק אותו מההורה שלו.	
	אם יש לו אחים, נתקן את מצביע child של ההורה שלו במידת הצורך. כל	
	cut מגדיל את ה-counter הסטטי המתאים במחלקה FibonacciHeap.	

# המחלקה FibonacciHeap

. מייצגת ערימת פיבונאצ'י של מספרים שלמים FibonacciHeap

<u>שדות:</u>

תפקיד	שדה
מצביע לאיבר הרשימה בערימה	first
מצביע לאיבר האחרון בערימה	last
כמות האיברים הכללית בערימה	nodesCount
כמות העצים בערימה	treesCount
כמות הצמתים המסומנים בערימה	markedCount
מספר החיתוכים שבוצעו עד כה (שדה סטטי)	totalCuts
מספר החיבורים שבוצעו עד כה (שדה סטטי)	totalLinks
יחס הזהב (קבוע)	GOLDEN

## <u>מתודות:</u>

סיבוכיות	תיאור	מתודה
0(1)	בנאי המחלקה. שדות המצביעים מאופסים ל-null ושדות	FibonacciHeap()
מתבצעות השמות בזמן קבוע.	הספירה ל-0.	
0(1)	מחזירה את הצומת (מסוג HeapNode) הראשון בערימה.	getFirst()
יש מצביע על צומת זה.		
0(1)	מחזירה את הצומת (מסוג HeapNode) האחרון בערימה.	getLast()
יש מצביע לראשון, והשדה prev שלו הוא האחרון.		
0(1)	מחזירה TRUE אם ורק אם הרשימה ריקה.	isEmpty()
בדיקת האיבר הראשון בזמן קבוע.		
0(1)	מתודה זו מבצעת לצומת הכנסה "עצלה": ממקמת אותה	insertNode(HeapNode
הבנסה עצלה- הבנסת צומת למקום הראשון, על	במקום הראשון בערימה, ובודקת אם יש לעדכן את המינימום	node, boolean
ידי שינוי מצביעים ועידכון שדות, כל אלה בכמות	של הערימה או לא. כמו כן שדות הספירה של מספר העצים	consolidate)
קבועה.	ומספר הצמתים מועלים ב-1. עם קבלת ערך בוליאני true, לא	
	נעלה את ספירת הצמתים, משום שנשתמש במתודה זו ב-	
	consolidte, שבה אנו מכניסים צמתים אך לא באמת מעלים	
	את ספירתם.	
0(1)	יוצרת צומת מסוג HeapNode בעל מפתח key, מכניסה אותו	insert(int key)
יצירת הצומת בזמן קבוע ואז קריאה לפונקציה	לערימה, ומחזירה אותו. אנו יוצרים את הצומת בעזרת הבנאי	
שרצה בזמן קבוע.	של HeapNode ואז קוראים למתודה insertNode על הצומת	
	.false ועל ערך	
O(n)	מחיקת צומת שהמפתח שלו מינימלי מבין המפתחות בערימה.	deleteMin()
מחיקת הצומת עצמו נעשית בזמן קבוע. על	יש לנו מצביע על צומת זה ולכן הגישה אליו מיידית. אנו בודקים	
consolidate-הסיבוכיות אחראית הקריאה ל	מקרי קצה כדי שלא נשנה מצביעים לדברים לא חוקיים,	
(ניתוח להלן).	ומתקנים את המצביעים בהתאם, כך שהצומת המינימלי כבר	
	לא יהיה בערימה. אנו מעדכנים את ספירת הצמתים (תמיד	
	מורידים 1) והעצים (תלוי במספר הילדים של הצומת שמחקנו).	
	בסוף הפונקציה אנו קוראים לconsolidate.	
O(n)	גיבוש של העץ אחרי מחיקת מינימום. המתודה מבצעת פעולת	consolidate()
n במקרה הגרוע יש לנו ערימה שהיא אוסף של	to-buckets ואחריה from-buckets כפי שראינו בכיתה:	
עצים שהם צומת בודד. המעבר על כולם לצורך	תחילה מאתחלים מערך (ה"דליים") של HeapNode, באורך לוג	
ההכנסה לדליים ידרוש זמן $O(n)$ (לא יותר כי	בבסיס יחס הזהב של מספר הצמתים, ועוד 1. זה מייצג את	
מספר החיבורים יהיה לוגריתמי). הפעולה	מספר הרמות השונות שיכולות להיות בערימה עם מספר	
מתבצעת באותו אופן שראינו בהרצאה ולכן	האיברים שיש לנו. אנחנו מבצעים איטרציה על רמת השורשים	
. $\log{(n)}$ היא אכן Amortized הסיבוכיות	בערימה, עוברים על העצים (כאשר השורש מתפקד כמצביע	

הגרוע.		
הילד שלו, ולכן יהיה מסומן), וכך יתקבל המצב		
שיישאר בשרשרת לא יהיה שורש כשנמחק את		
שלב ביניים בו מוסיפים צמתים כך שהצומת החדש		
נדרש שינוי קטן ואפשרי (בכל פעם הוספת עוד		
מסומנים, כדי שהם יהיו מסומנים לכל האורך,		
בתרגול 9, שאלה 3. בתרגול הצמתים היו לא		
שרשרת" כלומר בעומק לינארי ב-n- ראינו זאת"		
הכנסות ומחיקות מינימום לקבל עץ שהוא		
כלומר סיבוכיות כעומק העץ. ניתן לאחר שילוב של		
ומצא בו. x-להתקדם, עד שנגיע לשורש העץ ש	.לא מסומן ואז עוצרים	
ביותר, הוא המקרה בו נבצע חיתוכים ונמשיך	 ההורה מסומן, חותכים גם אותו ומטפסים, עד שמגיעים להורה	
גם פעולת חיתוך נעשית בזמן קבוע. המקרה הגרוע	ומבטלים את הסימון שלה אם צריך), ואז כל עוד x הצומת	
בכל צומת שאנו בו אנו מבצעים פעולות בזמן קבוע-	השינויים הנדרשים לאחר פעולה זו. השינויים: אנו חותכים את	x)
O(n)	בדי לבצע את decreaseKey פונקציה שנקרא לה מתוך	cascadingCuts(HeapNode
deleteMin. לכן הן קובעות את הסיבוכיות.	י. ואז מוחקים את המינימום (כלומר את x).	
יש קריאה אחת לפונקציה decreaseKey ואחת ל-	decreaseKey כך שיהיה בוודאות המינימום החדש בערימה,	, , , , , ,
O(n)	מחיקת הצומת x מהרשימה. אנחנו מבצעים לצומת x	delete(HeapNode x)
	השורש עליו אנחנו עוברים. השורש עליו אנחנו עוברים.	
	ולפיזו מאומולים אול זומטון בגוול זוורדוט (ידן). באיטוביזו השנייה, אנחנו מוסיפים 1 לאיבר המתאים במערך לדרגת	
	בו אשונדו אנו נווצאים מודדודו לגוד המקטינולית של עץ שיש, ולפיה מאתחלים את המערך בגודל הדרוש (+1). באיטרציה	
ווגווע, כל וואיבוים וום טוו ט ם.	ריק. אנו נובצעים שוני איטו ציוול על דשינות השוו שים. בראשונה אנו מוצאים מה הדרגה המקסימלית של עץ שיש,	
ווסיבוניות לינאו יות במספר חישוו שים. במקרוז הגרוע, כל האיברים הם שורשים.	בערימה שהסדר שלהם הוא ה. עבור ערימה היקה מוחוד מעון ריק. אנו מבצעים שתי איטרציות על רשימת השורשים.	
O(n)הסיבוכיות לינארית במספר השורשים. במקרה	מחוידה מעוך מונים כך שבאינדקס רמופיע מספר העצים בערימה שהסדר שלהם הוא i. עבור ערימה ריקה מוחזר מערך	counterskep()
שוה שאנו וואגים לונוווק. $O(n)$	מחזירה מערך מונים כך שבאינדקס i מופיע מספר העצים	countersRep()
O(1) שדה שאנו דואגים לתחזק.	הפונקציה מחזירה את מספר האיברים בערימה.	size()
0(1)	במו בן, שדות הספירה יהיו סבום שני השדות של שתי הערימות.	sizo()
	יותר מבין 2 הערימות להיות המינימום של הערימה המאוחדת.	
	דרוש לשנות 4 מצביעים לכל היותר, ולבחור את המינימום הקטן	
	את heap2 לסוף רשימת השורשים של הערימה שלנו. לשם כך	
עדכון מספר קבוע של שדות ומצביעים.	על ערימות כרשימה מקושרת של השורשים- אנחנו משרשרים	heap2)
0(1)	מיזוג ערימה נוספת heap2 עם הערימה הנוכחית. אם חושבים	meld(FibonacciHeap
יש לנו מצביע לאיבר המינימלי	מבין המפתחות בערימה, מערימה ריקה יוחזר null.	11/=11
0(1)	החזרת הצומת (מטיפוס HeapNode) שהמפתח שלו מינימלי 	findMin()
	.(true	
	על שורש העץ, עם ערך insertNode שבו לערימה (בעזרת	
	סדר דרגות יורד), ובכל תא - אם הוא לא ריק - מכניסים את העץ (	
	insertNode. כעת עוברים על מערך הדליים מהסוף להתחלה	
	ההכנסות שנעשה תדאג לתחזק אותם בעזרת פונקציית	
	את שדות הfirst והמינימום, ואת ספירת העצים- סדרת	
	ממשיכים באותו אופן. לאחר סיום האיטרציה אנחנו מאפסים	
	וושני מוזמעון,, מבצעים ביניזם אוווו, זאול וועץ שנוצו מכניסים למקום המתאים לדרגה החדשה. אם המקום החדש גם תפוס,	
	במקום המוגאים לדרגה שלדעץ, אנדונד מוציאים. אונ העץ השני מהמערך, מבצעים ביניהם link, ואת העץ שנוצר מכניסים	
	הצורך (כי הוא שורש כעת). לאחר מכן, אם במערך הדליים יש במקום המתאים לדרגה שלו עץ, אנחנו "מוציאים" את העץ	
	הם לא רלוונטיים, וכן הופכים את הסימון ל-0 (false) במקרה	
	לעץ), ועבור כל עץ: מאפסים את המצביעים לעץ הבא והקודם כי	

decreasekey(HeapNode x, rain and rain			
המינימום החדש. אם הצומת פנימי: אם המפתח שלו עדיין גדול (מ-cascadingCuts) משל החורה שלו, גלל הערימה ושכה ואפשר לסיים. אם כלל מערימה הופר- קראים לצל מביר הוצרים שאינם שהאוברם שאינם שהאוברם שאינם שהאוברם שהיונים שהיונים שהאוברם שהיונים שהיו	O(n)	ערכו של המפתח של הצומת x יופחת בערך delta>=0. אם	decreaseKey(HeapNode
משל ההורה שלו, כלל הערימה נשמר ואפשר לסיים. אם כלל הפונקציה מחזירה את כמות האיברים שאינם brain (0(1)  מחשל מחזירה את מספר האיברים הכללי, לכן נחזיר את ההפרש בערימה. אנחנו מתחזקים שדה שסופר את מספר האיברים הכללי, לכן נחזיר את ההפרש בערימה. אנחנו מתחזקים שדה שסופר את מספר האיברים הכללי, לכן נחזיר את ההפרש בשנים שדות. (10)  potential = #trees + 2 *#marked  potenti			x, int delta)
מרוימה הופרי קוראים לascadingCuts שאינם harked ()  מרוימה הופרי הוריה את מת מתחלים שדה שסופר את מספר האיברים בללי, לכן נחזיר את ההפרש ביניהם. מרוימה ()		·	
חומר הפונקציה מחזירה את כמות האיברים שאינם marked שימוש בשני שדות. (100 ביניהם. הוא אומר מפר האיברים שהינם (מוזירה את מפר האיברים שהינם (מוזירה את מפר האיברים שהינם (מוזירה את ערך הפוטנציאל, כפי שהוגדר בשיעור, הינו:  (מונקציה סטטית זו מחזירה את מספר כל פעולות החיבור של שו שו מחיירים של או שני שדות שאנו שומרים. (מוזיר את הפרש של שומרים. (מוזיר את הפרש של מוזירה את מספר כל פעולות החיבור של השבצעו מתחילת ריצת התוכנית. פעולת חיבור היא הפעולה של שמקבלת עיר עצים מאותו סדר ומחברת אותם. או נתחון (מוזיר מוזיר) שביפוע מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי של זוה, שבל פעולות אום מחיירה מערך ממוין של מוזיפים ריערימה ומספר חייב (אודים של אוטרים ב-H. (אודים המקורית בער מת עוד לתוך הפלט, ונוסיף את ביל של באלגוריתם חתך של אוטרציות, וברל פעול של ערימת עוד, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של עוד בער מת העוד לתוך הפלט, ונוסיף את בינו (מהערימה המקורית העד בינו (מהערימה המקורית העד בינו (מהערימה המקורית בער מת העוד לתוך הפלט, ונוסיף את בינו (מהערימה המקורית בער מת העוד לתוך הפלט, ונוסיף את בינו (מהערימה המקורית H בדי את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל של הביבות העורים המקורים ב-H. (מהערימה המקורית H בדי המון המקורים ב-H. (מהערימה המקורית H בדי המון המקורים בר און אל ערימת העוד לתוך הפלט, ונוסיף את הילדים מתר מערים. המקורי בערימה המקורית H בדי המון אל ה-abolog עוד המקורית H בדי המקורית בערימה המקורים בערימה העוד לעריםה המקורית בערימה המקורית בערימה החידשים אנחנו שומרים מצביע בכל של המקורים בערימה המקורית העוד העדים המקורית בערימה החידשים אנחנו שומרים מצביע בכל שמקד העיקרית הפעולות תרוץ הלהם המקורית בערימה המקורית העדים המקורית העדים המקורית העדים המקורית בערימה המקורית העדים המקורית העדים המקורית העדים המקורית העדים המקורים העדים המקורית העדים המקורים העדים	.cascadingCuts-מ		
בערימה. אנחנו מתחזקים שדה שסופר את מספר האיברים ביניהם.  (0(1) מוכנקציה מחזירה את ערך הפוטנציאל הנובחי של הערימה (10) מוכנקציה סטית זו מחזירה את מספר כל פעולות החיבור (10) שלו שני שדות שאנו שומרים. (10(1) אלו שני שדות שאנו שומרים. (10(1) אלו שני שדות שאנו שומרים. (10(1) אלו שני שדות שאנו שומרים. (10(1) שלו שני שדות שאנו שומרים. (10(1) שלו שנו שלו שלו שלו שלו שלו שלו מחזיך את מספר כל פעולות החיותן (11) שלו שנו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה מטיט של זחו, שבכל פעול מת חיותן. שלו שנו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה טטיי של זחו, שבכל פעול הו שה אעץ בודד שדרגתו (11) שלו מוספר חיובי (11) אלו שני שלו שלו ביח או אלו בירו שדרגתו (11) אלו שלו שלו בירו או בירו שלו בירו או הבנים שלו בירו אן. והאיבר השלישי שלו בירו אן האיבר השלישי בעולות החיות הערילות הפלטי של זחו, שבכל שלב בצא'ו אות האיבר השלישי שלו בירו אן. האיבר המינימלי באו אחד מהבנים שלו בירו אן. האיבר המינימלי באו אחד מהבנים שלו בירו אן. האיבר המינימלי באורו אות בל שלו בירו אן. האיבר השלישי מערימת תור, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של שלו ערימת תור, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של שלו ערימת העור לתוך הפלט, ונוסיף את הבירו שלו שלו בירו אן האיבר המינימלי באורה מערימת העור לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית א בדי של בערים או שומרים מצביע בל שלום שלו מוחץ אלו הבריח אחד מהבנים שלו שלו בירו אן. האיבר השלישי מערימת העור לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית א בדי של ערימת העור. שלו ערימת העור לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית א בדי שלו בירו אל בירו מהתור להיותר המיקורית של א או אחד בירו שלו אלו היידים החדשים אנחנו שומרים מצביע בל שלום אלו בירו אורה: על מנת לגשת מערימת העור לעורים המקורית בעדים הארים אלו אלו היידים החדשים אנחו שומרים מצביע בל שלום אלו בירו אלו המקורי בעריםה או אלו היידים החדשים אנחו שלו שלו בירו אלו שלו שלו בעריםה או אלו היידים החדשים אנחו שלו אלו היידים החדשים אנחו שלו בעריםה או אלו היידים החדשים אנחו שלו אורים מוחל שלו בעריםה או אלו היידים החדשים אנחו שלו בעריםה או שלו בערים האלו התרימה המקורית הלו התור שלו אלו היידים המקורים בעריםה או שלו בערים החדש שלו אלו בערים החדש של אור שלו בערים החדש של אורים בעדים החדש של אורי		.x על הצומת cascadingCuts	
המסומנים, ואת מספר האיברים הכללי, לכן נחזיר את ההפרש (פונקציה מחזירה את ערך הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:    Potential = #trees + 2*#marke הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:   Potential = #trees + 2*#marke הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:   Potential = #trees + 2*#marke הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:   Potential = #trees + 2*#marke הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:   Potential = #trees + 2*#marke הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:   Potential = #trees + 2*#marke הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:   Potential = #trees + 2*#marke הפוטנציאל, בפי שהוגדר בשיעור, היפ:   Potential = #trees + 2*#marke הפוטניא הומחייה אומנים.   Potential = #trees + 2*#marke הפוטניא הומחייה אומנים.   Potential = #trees + 2*#marke הפוטלה הפוסנים יש מחייב השומרים.   Potential = #trees + 2*#marke הפוטלה השות היב של הומחיים הומחיים היובר שומרים.   Potential = #trees + 2*#marke הפוטלה השות ביש מות מחיים הומות ביש מות מחיים הומות ביש מות מות סיטר של חות מות מות היובר השומרים הושב (Potential = #trees + 2*#marke הבוטלה השות ביש מות מות היובר הומינים לי בו בוסנים הומות העוד להעור הפלט בבאלגוריתם חתך של השות ביש לי בו בל של ביש את השבר השומרים הושברים של ציא ואחד מהבנים של נכיח ע, והאיבר השלישי האות השות ביש לי עובן בל של ביש לי עובן בל של ביש לי עובן בל של ביש את השבר השלישי העורה המקורית של עי ובן בל של ביש את השבר השלישי העורה המקורית של עי ובק של ביש בשל ביש את השבר השלישי העורה המקורית של עי ובן בל של ביש את השבר השלישי העורה השל של עי ובן בל של ביש את השבר השלישי העורה העורה של עי ובן בל של ביש את השבר השלישי העורה העורה של אים אומנים השברים בל של ביש את השבר השלישי העורה של עי ובן בל של ביש את השבר השלישי העורה של עי ובק של ביש מת העור לתוך הפלט, וכוסיף את בינו (מהערימה המקורית של בי של מנות לגשת מערימת העור לערימה המקורית של בי בל אוחר השבר בים בים אומנים מערימת העור לערים התקורים של א אורים בים בים הייבילי העורה של אוחרים בים בים הייבילים של הייבילים העורה של של בים בל אוחרים בים בים הייבילים העורה של הייבילים	0(1)	marked הפונקציה מחזירה את כמות האיברים שאינם	nonMarked()
סנימור (10) הפונקציה מחזירה את ערך הפוטנציאל הנוכחי של הערימה הפונקציה מחזירה את ערך הפוטנציאל הנוכחי של הערימה החיבור (10) אלו שני שדות שאנו שומרים. Potential = #trees + 2 *#marked    סנוכקציה סטטית זו מחזירה את מספר כל פעולות החיבור שמקבלת של שיבי שצים מאותו סדר ומחברת אותם. אנו נתחזק שביד סטטיי של זוח, שבכל פעולת אחוֹ נוסיף לו 1.    שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי (10)    שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי (10)    שבוצעו מתחילת התכנית גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי (10)    של פונקציה מסטיית זו מחזיקה את מספר כל פעולת החייתן (10)    של פונקציה מסטיית זו מחזיקה את מספר בל פעולת החיתוך (10)    א המפתחות הקטנים $k < k$ או הוועד מהבנים של נניח ע, והאיבר השלישי אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים של נניח ע, והאיבר השלישי אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של x או אחד מהבנים לערוכת עדה בל שלב נוציא את האיבר המינימלי של עובר מתחל מת עורימת עדה, שבה ברות אחדים של x או אחד מהבנים לערימת עדה, שבה בהווערים של x או אחד מהבנים לערימת עדה, שבה בלולו הוא בהכרח אחד מהבנים באוריתם חתך של אוא ערימה המקורית. בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי אוא ערימה המקורית בבל שלב נוציא את האיבר המינימלי אוא ערימה המקורית בבל שלב נוציא את האיבר המינימלי אוא ערימה המקורית בבל שלב נוציא את האיבר המינימלי אוא ערימה המקורית בל שלב נוצים שומרים מצביע בכל 10 של צובר האיברים וחדים של אוד שומרים מצביע בכל שחול מורח של אודית נובטף עוד לבדי החושים אנחנו שומרים מצביע בכל שחומר של אוא החיבוניות היילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל שחומר של אול היילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל שחומר בוכן (בונוסף עוד הפעולות תרוץ מדי החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל במום שומרים ערים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל במום שומרים בערים הורות השל הדידים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל שחומר ברון בחומר החדשים אומר של של ברום ברום ברום ברום החדשים אנחם שומרים מצביע בכל שחומר ברום ברום אומר המקורים בערים החדשים אנחם שומרים מצביע בכל שחומר ברום החדשים אנחם שברום בערים החדשים אנחם שלבדים בערים החדשים אנחם שלבים בתום שברום בתום שלבים בערים החדשים שלבים בתום החדשים ב	שימוש בשני שדות.	בערימה. אנחנו מתחזקים שדה שסופר את מספר האיברים	
() () הפונקציה מחזירה את ערך הפוטנציאל הנוכחי של הערימה הפוטנציאל, כפי שהוגדר בשיעור, הינו:  () () () () () () () () () () () () () (		המסומנים, ואת מספר האיברים הכללי, לכן נחזיר את ההפרש	
Potential = #trees + 2*#marked  Potential = #trees + 2*#marked  Add שני שדות שאנו שומרים.  (0(1)  שמקבלת שני עצים מאותו סדר ומחברת אותם. אנו נתחזק שמבועת מתחילת רצור היא הפעולה שביצעו מתחילת התבנית. בעלות היותר היא הפעולה שביצעו מתחילת התבנית. בעלורן זה, נתחזק שדה סטטי של הוא מבצעים חיתוך.  (1)  שביצעו מתחילת התבנית. בעלורן זה, נתחזק שדה סטטי של השרבלת ערימת העדר בל פעולות החיתוך שביצעו מתחילת התבנית. בערימה או מבצעים חיתוך.  (1)  שביצעו מתחילת המבנים של צודך זה, נתחזק שדה סטטי של השרב באלגוריתם התבלת ערימת העדר לתוך מבערים אוד מהבנים שלו נניח ע, והאיבר השלישי הארבר השלישי של בן בל היותר, סה"ב הסיבוכיות תהיה (מהערימת העדר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימת העדר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית. בכל שלב באלגוריתם חתך של של ואל מנת לצשת מערימת העדר לתרימה המקורית א בניו (מהערימה המקורית בל שלב נוציא את האיבר המינימלי של עובר ל של מנת לצשת מערימת העדר לערימה המקורית א בניו (מהערימר שומרים מצביע בכל Bote באלגוריתם וחתך של הואל השלה של אורים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל שלב באלגוריתם חתך של הואל הישר להוסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל Aberr הישריקרית נובעת אור השלה אורים שומרים מצביע בכל Aberr הישריקרית נובעת אור השלה אורים שומרים מצביע בכל בחומר העורית נובעת אור הערים התקורית אור בכל היותר הסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל בחומר העורך וברל של הישר המקורית בל של בוציח המקורית בל של אורים שומרים מצביע בכל בחומר העורך של הישר אורים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל בחומר העורת נובעת אור השלוים שומרים מצביע בכל בחומר של אורים הואלוית בערימה אורים שומרים מצביע בכל בחומר בוציות העור בערימה המקורית הואל ערימה המקורית אורים בחומר העורה של האורים שומרים מצביע בכל שלם בומון שומרים מצביע בכל שלה בומון העורת העורה של האורים של אורים בחומר של אורים העורה של השלוים העורה של השלוים העורה בל השתבים העורה של השלוים העורה בל שלוים העורה של השלוים העורה של העורם העורה של העורם העורה של העורם העורה של השלוים העורה של העורם העורם העורם העורם העורה של העורם העורה של העורם העורה של העורה העורם העורם העורם העורם העורם העורם העורה		ביניהם.	
אלו שני שדות שאנו שומרים.  (10)  (10)  (10)  (11)  (11)  (11)  (11)  (12)  (12)  (13)  (14)  (15)  (15)  (16)  (1	0(1)	הפונקציה מחזירה את ערך הפוטנציאל הנוכחי של הערימה	potential()
אלו שני שדות שאנו שומרים. $O(1)$	שימוש בשני שדות.	הפוטנציאל, כפי שהוגדר בשיעור, הינו:	
פונקציה סטטית זו מחזירה את מספר כל פעולות החיבור (עדים מאות) שבוצעו מתחילת ריצת התוכנית. פעולת חיבור היא הפעולה (עדים מאות) שביצעו מתחילת התכנית. בעל פעולת אוח! נוסף לו 1.  (מון ליינים של אוח, שבכל פעולת אוח! נוסף לו 1.  (מון ליינים של אוח, שבכל פעולת אוח! נוסף לו 1.  (מון ליינים של אוח, שבכל פעולת אוח! נוסף לו 1.  (מון ליינים של של אוחיים מצביעים חתיתן. (מון של הישרים של ערימת העזר בכל מתוחילת התכנית בל של ב באלגוריתם חתך של (מון של פערימת העזר בערימה אוחיים המקורית בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי באוחיים המקורית בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי באוחיים המקורית בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי באוחיים המקורית מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית של 1 של ערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית של 1 של פערים (מנאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באל ה-100 מערימת העזר לוש שומרים מצביע בכל שלב באלגוריתם חתף של מנת לגשת מערימת העזר לוש מערימת העזר לוש שומרים מצביע בכל אוח מון במון מון מון מון מון מון שומרים מצביע בכל אוח המקורית אל ה-100 מיבורים עדים מתוחיים מערימת העזר לוש שומרים מצביע בכל אוח המקורית אל ה-100 מיבורים על היותר, סדורם לבן, ובנוסף עוד אלה ברוח את היולדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל אוח היונון בערימה אורים התוחיים של אל ה-100 מיבורים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל אורית בון ווויים אורים שומרים מצביע בכל אורים בון מון מון מון מון שומרים מצביע בכל אורים בון מון אלה ברון בערימה אור שומרים מצביע בכל אורים בון		Potential = #trees + 2*#marked	
שבוצעו מתחילת ריצת התוכנית. פעולת חיבור היא הפעולה שמקבלת שני עצים מאותו סדר ומחברת אותם. אנו נתחזק שדה סטטי של זחו, שבכל פעולת אחוֹ נוסיף לו 1.  (10)  (10)  (10)  (10)  (10)  (10)  (10)  (11)  (10)  (11)  (11)  (12)  (11)  (12)  (12)  (13)  (13)  (14)  (14)  (15)  (15)  (16		אלו שני שדות שאנו שומרים.	
שמקבלת שני עצים מאותו סדר ומחברת אותם. אנו נתחזק שדה סטטי של inth, שבכל פעולת אחוו נוסיף לו $O(1)$ בונקציה סטטית זו מחזיקה את מספר כל פעולות החיתוך שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי של ologin במינים ל שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי של ologin במינים ל משבעים חיתוך.    Moger חיובי ( $O(k \cdot degH)$ הפונקציה מחזירה מערך ממוין של הפתחות הקטנים ב-H. הפתחות הקטנים ב-H. האבר המינימלי אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים של ג או אחד מהבנים אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים של ג או אחד מהבנים של y וכך הלאה.    Aurian הערימת העזר ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של של ערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית $Aurian + aurian + auri$	0(1)	פונקציה סטטית זו מחזירה את מספר כל פעולות החיבור	totalLinks()
שדה סטטי של Ini, שבכל פעולת אחוֹ נוסיף לו 1.  (מוכן אייני שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי שיספור כל פעם בה אנו מבצעים חיתוך.  (מוכן אייני של אחוֹ בל לפעם בה אנו מבצעים חיתוך.  (מור (לפעם בה אנו מובן שהיא עץ בודד שדרגתו (לפעם הילדים שאנו מוסיפים לערימת העזר בכל אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים שלו נניח ע, והאיבר השלישי של אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים שלו נניח ע, והאיבר השלישי של אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים שלו נניח ע, והאיבר השלישי של או אחד מהבנים שלו נניח ע, והאיבר השלישי של אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים שלו נניח ע, והאיבר השלישי של אחריו מתך של של או אחד מהבנים שלו בנולים או אחד מהבנים לפעם (לפעם (לפעם באלגוריתם חתך של הערימה המקורית. בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי הערימה המקורית בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי של ערימת העזר (לפעם (נוסיף את בניו (מהערימה המקורית של בל לפיותר מערימת העזר לערימה המקורית של אורים של החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל שחחול של הידים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל שחחול של ניסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל במום עוד (מכאן העיכות העורית העור הערור הערימה המקורית של אל ה-מסח המקורי בערימה המקורית של אל ה-מסח המקורי בערימה המקורי בערימה המקורי בערימה המקורית של אל ה-מסח המקורי בערימה המקורי בערים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל של ביומן בומיף בערימה המקורי בערים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל של ביומן בערימה או	גישה לשדה.		
$O(1)$ פונקציה סטטית זו מחזיקה את מספר כל פעולות החיתוך שיש שבוצעו מתחילת התבנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי מיספור כל פעם בה אנו מבצעים חיתוך. $O(k \cdot degH)$ הפונקציה מקבלת ערימה H שהיא עץ בודד שדרגתו $k \in Size(H)$ המיפרחות הקטנים ב-H. $Aughtarrow aughtarrow $			
שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי שבוצעו מתחילת התכנית. גם לצורך זה, נתחזק שדה סטטי שיספור כל פעם בה אנו מבצעים חיתוך. $O(k \cdot degH)$ ( $deg(H)$ ( $de$		·	
שיספור כל פעם בה אנו מבצעים חיתוך. $O(k \cdot degH)$ הפונקציה מקבלת ערימה H שהיא עץ בודד שדרגתו $(deg(H))$ ומספר חיובי $k < size(H)$ ומספר חיובי $k < $			totalCuts()
$O(k \cdot degH)$ הפונקציה מקבלת ערימה H שהיא עץ בודד שדרגתו (deg(H) ומספר חיובי (heg(H) ומספר חיובי $k < size(H)$ וומספר חיובי $heg(H)$ וווספר חיובי $heg(H)$ וווחספר חיוב	גישה לשדה.		
int k) ומספר חיובי $k < size(H)$ . הפונקציה מחזירה מערך ממוין של פעם, חסומה על ידי $k < size(H)$ מוער הקטנים ב- $k < size(H)$ מפתחות הקטנים ב- $k < size(H)$ האיבר המינימלי ב- $k < size(H)$ האיבר המהבנים ב- $k < size(H)$ האיבר המינימלי ב- $k < size(H)$ האיבר פיון שאנו שאנו ב- $k < size(H)$ האיבר המינימלי ב- $k < size(H)$ האיבר המינימלי ב- $k < size(H)$ האיבר המינימלי ב- $k < size(H)$ האיטר ב- $k < size(H)$ האיבר הער. ב- $k < size(H)$ האובר הער. ב- $k < size(H)$ האיבר הער. ב- $k < size(H)$ האובר הער. ב- $k < size(H)$ האובר הער.		שיספור כל פעם בה אנו מבצעים חיתוך.	
א המפתחות הקטנים ב-H.  שבעם, חסומה על ידי $H$ שבעם, האיבר המינימלי ב-H הוא במובן השורש $A$ , האיבר המינימלי שארוי הוא בהכרח אחד מהבנים שלו נניח $A$ , והאיבר השלישי של $A$ או אחד מהבנים בעלו $A$ שלו $A$ ובגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $A$ או אחד מהבנים בגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $A$ או אחד מהבנים נעד $A$ ובגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $A$ או אחד מהבנים נעד $A$ ובגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $A$ או אחד מהבנים נעד $A$ ובגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $A$ או אחד מהבנים האחרים של $A$ או אחד מהבנים נעד עדימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של בערים $A$ של ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של בערים $A$ של ערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית $A$ של ערימת העזר לערימה המקורית $A$ בדי ונספים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באשר $A$ של $A$ הישלדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $A$ ובנום עוברו בערימת $A$ בדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $A$ בדים ווספים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באשר $A$ הישלדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $A$ בדים ווספים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באשר $A$ בדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $A$ בדים ווספים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באשר $A$ בדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $A$ בדים ווספים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באשר $A$ בדים ווספר ברימה המקורית $A$ בדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $A$ בדים ווספר ברימה העיקרית נובעת). באשר בדים ווספר ברימה המקורית $A$ בדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל בערים החדשים אנחנו שומרים ברים ברים שבערים החדשים אנחנו שומרים ברים ברים שברים ברים ברים שבערים החדשים אנחנו שומרים ברים ברים שבערים ברים שבערים החדשים אנחנו שומרים ברים ברים שבערים ברים אותרים ברים שבערים ברים שבערים ברים	. 9 .	,deg $(H)$ שהיא עץ בודד שדרגתו H הפונקציה מקבלת ערימה	kMin(FibonacciHeap H,
האיבר המינימלי ב-H הוא במברח אחד מהבנים של ו שכן במות הילדים של השורש היא הגדולה ביותר, אחריו הוא במברח אחד מהבנים שלו נניח $(degH)$ או אחד מהבנים בגודלו הוא במברח אחד מהבנים האחרים של $(degH)$ של $(degH)$ של $(degH)$ של $(degH)$ של $(degH)$ שבו המינימלי באתחל ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של הערימה המקורית. בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (ממערימה המקורית $(degH)$ ) של ערימת העזר. בכל שלב נוציא את בניו (ממערימה המקורית $(degH)$ ) של ערימת העזר לערימה המקורית $(degH)$ ) של ערימת העזר לערימה המקורית $(degH)$ במתים $(degH)$ של $(degH)$ במתים $(degH)$ במחים שעברו בבר $(degH)$ במחים $(degH)$ שומרים מצביע בכל $(degH)$ בזמן: $(degH)$ מרולים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $(degH)$ בזמן: $(degH)$ ברחים בערימה $(degH)$ במור בערימה	כמות הילדים שאנו מוסיפים לערימת העזר בכל	ומספר חיובי $k < size(H)$ . הפונקציה מחזירה מערך ממוין של	int k)
אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים שלו נניח $y$ , והאיבר השלישי מבעים $y$ אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $y$ או אחד מהבנים $y$ או אחד מהבנים האחרים של $y$ או אחד מהבנים $y$ של $y$ וכך הלאה. של $y$ וכך הלאה. $y$ וכך הלאה. $y$ של $y$ וכך הלאה. $y$ בגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $y$ או אחד מהבנים $y$ של $y$ וכך הלאה. $y$ בגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של $y$ או אחד מהבנים $y$ עבודה $y$ של $y$ (כל היותר, סה"כ הסיבוכיות תהיה $y$ ( $y$ ובודה $y$ ( $y$	degH פעם, חסומה על ידי	k המפתחות הקטנים ב-H.	
בגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים של x או אחד מהבנים של x או אחד מהבנים של y וכך הלאה. של y וכך הלאה. של y וכך הלאה. נאתחל ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של נאתחל ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של נשים לב כי בנוסף להוספת הילדים, אנו גם מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית $t$ בכי של $t$ בנוסף ערימת העזר לערימה המקורית $t$ ברי בנוסף עוד $t$ בערימת העזר לערימה המקורית $t$ בדמן ומפים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באשר $t$ באונדלו האם בהכרח אחד מהבנים האחרים של $t$ או אחד מהבנים $t$ או או אחד מהבנים $t$ או	שבן כמות הילדים של השורש היא הגדולה ביותר,	האיבר המינימלי ב-H הוא כמובן השורש x, האיבר המינימלי	
של y ובך הלאה. ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של הערימה המקורית. בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית של ברי בנוסף להוספת הילדים, אנו גם מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית H איטרציה ו יש לכל היותר (Bete Min בערימת העזר לערימה המקורית H איטרציה ו יש לכל היותר הערה: על מנת לגשת מערימת העזר לערימה המקורית H כדי הספים (מבאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). באשר החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל האיטרציות, סדרת הפעולות תרוץ אל ה-node המקורי בערימה $A$	ודרגה זו יורדת ככל שמתקדמים בעץ. כיוון שאנו	אחריו הוא בהכרח אחד מהבנים שלו נניח y, והאיבר השלישי	
נאתחל ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של הערימה המקורית. בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית $k$ בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית $k$ של בערימת העזר לערימת העזר לערימה המקורית $k$ בדון $k$ בדון $k$ בנוסף עוד $k$ בערימת שעברו בבר $k$ בערימת העזר לערימה המקורית $k$ בדון $k$ בדון $k$ בערימת ווערוע $k$ בדון $k$ בערימת ווערוע $k$ בי בנוסף להוסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $k$ בי בנוסף להוסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $k$ בי בנוסף להוסיף את הילדים החדשים $k$ בערימה $k$ בדון:	עבודה $O(degH)$ איטרציות, ובכל פעם איטרציות k	בגודלו הוא בהכרח אחד מהבנים האחרים של x או אחד מהבנים	
הערימה המקורית. בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי נשים לב כי בנוסף להוספת הילדים, אנו גם מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית H איטרציה i יש לכל היותר אל ערימת העזר. $\log (i*degH)$ איטרציה i יש לכל היותר $\log (i*degH)$ איטרציה וועד מערימת העזר לערימה המקורית H כדי $\log (i*degH)$ במתים $\log (i*degH)$ במתים $\log (i*degH)$ במתים $\log (i*degH)$ במתים $\log (i*degH)$ במחים אל ה- $\log (i*degH)$ בישרים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log (i*degH)$ בישרים המקורית נובעת). באשר $\log (i*degH)$ בישרים החלשים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log (i*degH)$ בישרים אומרים החלשים אנחנו שומרים מצביע בכל בישרים הודשים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log (i*degH)$ בישרים הודשים אנחנו שומרים הודשים אומרים הודשים אומרים הודשים אומרים הודשים אומרים הודשים	$O(k \cdot degH)$ לכל היותר, סה"כ הסיבוכיות תהיה	של y ובך הלאה.	
מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית אל ערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית און אל ערימת העזר לערימה המקורית און בנוסף עוד $degH$ צמתים שעברו בבר consolidate הערה: על מנת לגשת מערימת העזר לערימה המקורית און בנוסף עוד $degH$ צמתים אל ה- $degH$ מנחלים חדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $degH$ נסכום על פני כל האיטרציות, סדרת הפעולות תרוץ אל ה- $degH$ מערימה און בערימה $degH$ מצביע בכל $degH$ מוסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $degH$ מוסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $degH$ בזמן:		נאתחל ערימת עזר, שבה נחזיק בכל שלב באלגוריתם חתך של	
איטרציה i יש לכל היותר $\log (i*degH)$ איטרציה i יש לכל היותר $\log (i*degH)$ איטרציה שעברו כבר הערה: על מנת לגשת מערימת העזר לערימה המקורית $\log (i*degH)$ במתים מעביע בכל $\log (i*degH)$ במחים אל ה- $\log (i*degH)$ בזמן: $\log (i*degH)$ איטרציות העזר לערימה המקורי בערימה $\log (i*degH)$ בזמן: $\log (i*degH)$ איטרציות, סדרת הפעולות תרוץ $\log (i*degH)$ בזמן:	נשים לב כי בנוסף להוספת הילדים, אנו גם	הערימה המקורית. בכל שלב נוציא את האיבר המינימלי	
אמתים שעברו כבר $\log\left(i*degH\right)$ צמתים שעברו כבר $\log(i*degH)$ את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log(i*degH)$ בדי אנחנו שומרים מצביע בכל $\log(i*degH)$ בדי את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log(i*degH)$ בדי ווחדים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log(i*degH)$ בדים ווחדים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log(i*degH)$ בדים ווחדים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log(i*degH)$ בדים ווחדים אנחנו שומרים אנחנו שומרים מצביע בכל $\log(i*degH)$ בדים ווחדים אנחנו שעברו כבר $\log(i*degH)$ בדים ווחדים אנחנו שעברו כבר $\log(i*degH)$ בדים ווחדים אנחנו שעברו כבר $\log(i*degH)$ בדים ווחדים שעברו כבר $\log(i*degH)$ בדים ווחדים אנחנים שעברו כבר $\log(i*degH)$ בדים ווחדים שעברו כבר $\log(i*degH)$ בי ווחדים אנחנים שעברו כבר $\log(i*degH)$ בדים ווחדים שעברו בערימת העזר לערימה המקורית אודים ווחדים שומרים ווחדים שומרים ווחדים שומרים ווחדים	מבצעים k פעמים deleteMin בערימת העזר. בכל	מערימת העזר לתוך הפלט, ונוסיף את בניו (מהערימה המקורית	
הערה: על מנת לגשת מערימת העזר לערימה המקורית H כדי לוספים (מכאן הבנוסף עוד degH צמתים להוסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל node נוספים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). כאשר אל ה-node המקורי בערימה H. בזמן:	איטרציה i יש לכל היותר	אל ערימת העזר. (H	
את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל node נוספים (מבאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). כאשר נסכום על פני כל האיטרציות, סדרת הפעולות תרוץ באל ה-node המקורי בערימה H. בזמן:	צמתים שעברו כבר $\log\left(i*degH ight)$		
אל ה-node המקורי בערימה H. בזמן:	צמתים $degH$ אודם לכן, ובנוסף עוד consolidate	הערה: על מנת לגשת מערימת העזר לערימה המקורית H כדי	
בזמן:	נוספים (מכאן הסיבוכיות העיקרית נובעת). כאשר	node להוסיף את הילדים החדשים אנחנו שומרים מצביע בכל	
	נסבום על פני כל האיטרציות, סדרת הפעולות תרוץ	אל ה-node המקורי בערימה H.	
$O(k \cdot degH)$	בזמן:		
	$O(k \cdot degH)$		

### חלק תיאורטי

### שאלה 1

#### <u>סעיף א:</u>

ננתח את זמן הריצה של סדרת הפעולות:

- O(m) הכנסה: כל הכנסה בזמן קבוע, מבצעים m+1 הכנסה: כל הכנסה ב
  - O(m) מחיקה: פעולה אחת שתעלה לנו
- אמנ cut אלא cascading cuts אלא נמחק לאף צומת יותר מבן אחד (לכן לא נבצע 20(1) ביוון שלא נמחק לאף צומת יותר מבן אחד (לכן לא נבצע logm פעולות באלו, סה"ב logm

 $oldsymbol{o}(oldsymbol{m})$  סה"כ סיבוכיות סדרת הפעולות היא

### <u>סעיף ב:</u>

m	Run-Time (ms)	totalLinks	totalCuts	Potential
2 <sup>5</sup>	0.299	31	5	14
2 <sup>10</sup>	1.525	1023	10	29
2 <sup>15</sup>	13.886	32767	15	44
2 <sup>20</sup>	82.182	1048575	20	59

### <u>סעיפים ג-ו:</u>

case	totalLinks	totalCuts	Potential	decreaseKey max cost
(c) original	m - 1	logm	3logm-1	
(d) decKey	m-1	0	1	
(e) remove line #2	0	0	m+1	
(f) added line #4	m-1	2logm-1	2logm	logm-1

## <u>הסברים:</u>

## :totalLinks •

בכל המקרים, סדרת ההכנסות העצלות מביאה אותנו לערימה שמכילה m+1 צמתים יחידים. לאחר ביצוע המקרים, נישאר עם m צמתים, ונבצע consolidate. בכל שלב אנו מחברים את העצים בזוגות, ומצמצמים את מספר העצים בחצי. להלן חישוב כמות החיבורים שנבצע:

$$\sum_{i=1}^{logm} \frac{m}{2^i} = m \sum_{i=1}^{logm} \frac{1}{2^i} = m \cdot \left(1 - \frac{1}{m}\right) = m - 1$$

- . סה"כ נקבל m-1 כאלו.
- .links א נבצע כלל deleteMin באשר לא מבצעים e באשר לכ בי בגרסה 🧄

### :totalCuts

- אנו חותכים צומת אחד בלבד. כיוון שלכל צומת אנחנו חותכים לכל היותר decreaseKey בגרסה c בכל איטרציה של decrease בן אחד, לא נבצע cascading cuts.
  - בגרסה בגרסה של השורש, ואז לבנו השמאלי, וכן לפנרסה decreaseKey בגרסה לבנו השורש, ואז לבנו השמאלי, וכן הלאה בלולאה. כיוון שאנו מפחיתים את ערך המפתח ב-m+1 כל פעם (תחילה לאבא ואז לבנו) לא נצטרך לבצע חיתוכים. כלל הערימה נשמר לכל אורך סדרת הפעולות.
    - e בגרסה e במקרה זה, יש לנו אך ורק צמתים יחידים, ואין שום צורך לבצע חיתוכים. ⊙

בגרסה f בגרסה בגרסה גרמנו לשדרה השמאלית של העץ להיות כולה מסומנת (פרט לשורש ולעלה השמאלי ביותר). לכן, m-2 מפתח למפתח למפתח משר לשרשרת של חיתוכים (cascading cuts) להיכנס לפעולה. נוסף על logm-1 החיתוכים שבוצעו קודם (בגרסה logm-1), כעת נבצע logm-1 חיתוכים נוספים, עבור כל צומת מסומן בשדרה השמאלית (כי השורש אינו מסומן). סה"כ נקבל logm-1 חיתוכים.

### (נסמנו q): Potential •

את מסמנים את בגרסה – c תחילה יש לנו עץ אחד לאחר ההכנסות וdeleteMin (p=1). לאחר מכן בכל חיתוך אנו מסמנים את – c בגרסה – c ההורה של הצומת שנחתך (p+=2), והצומת שנחתך יוצר עץ חדש (p+=1), סה"ב תוספת של 3 לפוטנציאל בכל חיתוך. נשים לב כי את השורש לא נסמן ולכן במקרה שלו הפוטנציאל יעלה רק ב-1 ולא ב-3. סה"ב נקבל:

$$p = 1 + 3logm - 2 = 3logm - 1$$

- .1 אין חיתוכים. לכן נישאר עם הפוטנציאל ההתחלתי שהוא 1 d בגרסה
- m+1 אין חיתובים לכן אין צמתים מסומנים, לכן הפוטנציאל הוא מספר העצים שהוא e בגרסה -
- חדש (p-=2), ויוצרת עץ חדש f בגרסה שרשרת החיתוכים שמתבצעת מורידה את סימון ההורים בשדרה השמאלית (p+=2), ויוצרת עץ חדש בכל חיתוך (p+=1). נשים לב כי גם כאן השורש לא לוקח חלק, ולכן בהינתן הפוטנציאל הקודם (גרסה c) נקבל:

$$p = 3logm - 1 - (logm - 1) = 2logm$$

### :decreaseKey max cost •

. בפי שתיארנו בגרסה f של הפוטנציאל, שרשרת החיתוכים הייתה באורך של logm-1 צמתים  $\odot$ 

#### שאלה 2

#### :סעיף א

m	Run-Time (ms)	totalLinks	totalCuts	Potential
728	2.643	723	0	6
6560	6.008	6555	0	6
59048	32.135	59040	0	9
531440	161.236	531431	0	10
4782968	1370.725	4782955	0	14

#### :סעיף ב

ננתח את זמן הריצה של סדרת הפעולות:

- O(m) הכנסה: כל הכנסה בזמן קבוע, מבצעים m+1 הכנסה בזמן סה"כ •
- O(mlogm) באמורטייזד, ויש  $rac{3m}{4}$  באלו, אז סה"ב פאלו, אז סה"ב מחיקת מינימום עולה מחיקת מינימום עולה פאלו, אז סה"ב פאלו, אז סה"ב O(mlogm)

. $m{O}(m{mlogm})$  סה"ב סיבוביות סדרת הפעולות היא

### :סעיף ג

- :totalLinks •
- כשים לב כי ההכנסה מתבצעת בסדר עולה, כיוון שאנחנו שומרים על סדר בהכנסה (צומת חדש משמאל לצמתים ותיקים יותר) נקבל את הצמתים החדשים ביותר משמאל. לאחר מכן, אנחנו מבצעים consolidate לפי סדר הרשימה, ולכן נטפל תחילה במפתחות הגדולים יותר (החדשים יותר) ומשם בסדר יורד עד שנגיע למפתחות הקטנים ביותר (הותיקים ביותר).
- העצים הגדולים ביותר ברשימה הסופית הם העצים שנוצרו ראשונים (אחרת הם היו מתאחדים עם העצים הקטנים יותר מבילים את האיברים יותר). באופן זה, לאחר ביצוע deleteMin ראשון, נקבל יער של עצים שבו העצים הקטנים יותר מבילים את האיברים הקטנים ביותר.
- כל פעולת deleteMin נוספת, תמחק איברים מהעץ הקטן ביותר. כתוצאה מכך ייווצרו עצים קטנים יותר, והם לא יתאחדו עם העצים הגדולים יותר (העצים לא מספיק גדולים עבור זה). כלומר לא יתרחשו יותר Blinks משלב זה.
   מספר החיבורים הסופי יהיה מספר החיבורים לאחר המחיקה הראשונה בערימה. בכל עץ מספר החיבורים הוא מספר הצמתים פחות הצמתים פחות 1 (כל צומת מחובר להורה שלו פרט לשורש). לכן מספר החיבורים הכללי הוא מספר הצמתים פחות מספר העצים.
  - o מספר הצמתים: לאחר המחיקה הראשונה הוא **m**.
  - .m מספר העצים: מספר החזקות של 2 שמרכיבות את m, ניתן לחשוב על כך כ**כמות האחדות בייצוג הבינארי של** 
    - .decreaseKey בבירור מספר החיתוכים הוא **0**, כיוון שבשום שלב לא ביצענו: totalCuts
- Potential: כיוון שלא ביצענו חיתוכים, הפוטנציאל יהיה מספר העצים שנותרו לאחר כלל המחיקות. כפי שתיארנו קודם, מספר העצים הוא ביצענו חיתוכים, הפוטנציאל יהיה מספר העצים שנותרו:  $m+1-\frac{3m}{4}=\frac{m}{4}+1$ .