פרוייקט מחשב בשדות אלקטרומגנטיים

רועי מילשטיין ועידן מאיר

1. בשאלה זו אנו מחשבים את המטען הכולל של הדיסקה באופן ישיר ובשיטת המומנטים.
   א. ראשית, נחשב את מטען הדיסקה באופן ישיר:
   נתון בשאלה כי צפיפות המטען המשטחית על הדיסקה היא:
$$\eta(r)=\frac{4\varepsilon_0 v}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}$$
   נסכום את צפיפות המטען המשטחית על כל שטח הדיסקה (אינטגרציה):
$$Q=\int_0^R\int_0^{2\pi}\frac{4\varepsilon_0 V}{\pi}\frac{1}{\sqrt{R^2-r^2}}r\,dr\,d\varphi=\frac{4\varepsilon_0 V}{\pi}\cdot 2\pi\int_0^R\frac{r}{\sqrt{R^2-r^2}}dr=8\varepsilon_0 V\left[-\sqrt{R^2-r^2}\right]_0^R$$
$$=8\varepsilon_0 VR\approx 7.08\cdot 10^{-13}[C]$$

   ב. כעת נתון $V=1v$. ננסח משוואה אינטגרלית עבור המטען על פני הדיסקה. לצורך כך, נעבוד באופן דומה לאופן שהוצג בדף ההנחיות, אך ניתן התייחסות מיוחדת לכך שמדובר במערכת עגולה ולא ריבועית.

(1) נגדיר את הבעיה על ריבוע עם צלע *2R* (כך שהריבוע חוסם מעגל ברדיוס *R*) ונקבע שהפוטנציאל מחוץ למעגל הוא 0, וגם המטען הוא 0. בתוך המעגל לפי הנתונים.
ניצור וקטור המכיל את הקואורדינטות של כל הריבועים הקטנים (שצלעם *d*) שנכנסים בריבוע הגדול.
נעבור על כל האיברים בווקטור, והריבועים שמרכזם מחוץ למעגל ($x_m^2+y_m^2>R^2$) יוזנחו משום שהם לא מייצגים חלק של הדיסקה. כלומר, נגדיר וקטור חדש המכיל רק את הריבועים שמרכזם בתוך המעגל.
כעת נוכל לבנות מערכת משוואות מטריצית מהצורה הבאה:
$$\bar{\bar{l}}\bar{x}=\bar{V}$$
$\bar{V}$ הוא וקטור המתח על כל אלמנט שמרכזו נמצא במעגל. נציב 1 בכל ערכיו (מתח קבוע על הדיסקה כפי שנתון בשאלה).
מהפוטנציאל על כל אלמנט נשים לב שמתקיים:
$$\phi(x_m,y_m)=\frac{d^2\sigma_m}{4\pi\varepsilon_0}\frac{1}{\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}}=x_j\cdot l_{mn}$$
כעת נוכל לחשב את הערכים הרלוונטיים ולמלא את המטריצה l. מטריצה זו דומה למטריצה מדף ההנחיות, אך עלינו לבצע בה מספר שינויים משום שהיא מייצגת את הגיאומטריה של הבעיה.

- על האלכסון מתקיים:
$$l_{nn}=\frac{d}{\pi\varepsilon_0}\cdot 0.8814\cdot\frac{4\pi\varepsilon_0}{d^2}=\frac{4\cdot 0.8814}{d}$$
כאשר הקירוב $\frac{d}{\pi\varepsilon_0}\cdot 0.8814$ בוצע באופן זהה לזה שבוצע בדף ההנחיות.
- מחוץ לאלכסון:
$$l_{mn}=\frac{1}{\sqrt{(x_n-x_m)^2+(y_n-y_m)^2}}$$

נפתור את המשוואה ונקבל את הווקטור $\bar{x}$, שכל אחד מערכיו מייצג:
$$x_j=\frac{d^2\sigma_j}{4\pi\varepsilon_0}=\frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0}$$
נשים לב כי מכיוון שצפיפות המטען $\eta(r)$ תמיד חיובית, נצפה לקבל כי כל איברי q_j יהיו חיוביים.

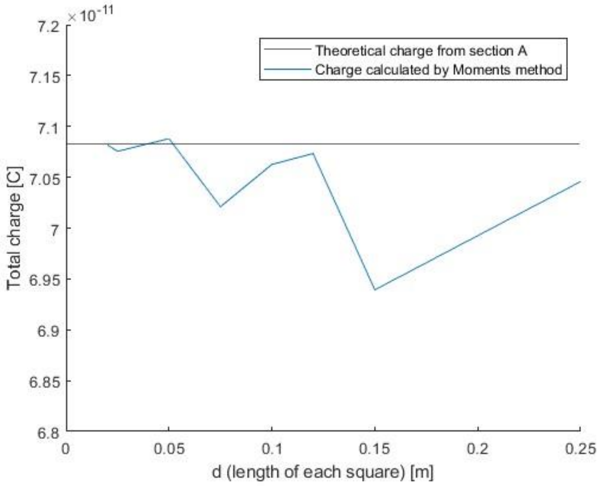
על מנת לקבל את המטען הכולל של של הדיסקה, נוכל לסכום את כל איברי q_j :

$$Q = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \sum_j x_j = 4\pi\varepsilon_0 \cdot \sum_j \frac{q_j}{4\pi\varepsilon_0} = \sum_j q_j$$

(2) כעת ניעזר ב-*Matlab* לחישוב המטען עבור ערכי d שונים. נקבל את הערכים הבאים:

$Q[C]$	$d[m]$
$7.045 \cdot 10^{-11}$	0.25
$6.939 \cdot 10^{-11}$	0.15
$7.073 \cdot 10^{-11}$	0.12
$7.062 \cdot 10^{-11}$	0.10
$7.021 \cdot 10^{-11}$	0.075
$7.087 \cdot 10^{-11}$	0.05
$7.075 \cdot 10^{-11}$	0.025
$7.081 \cdot 10^{-11}$	0.02

(3) נשרטט גרף של *Q(d)*:



נשים לב שהפתרון הנומרי מתכנס לפתרון האנליטי ככל ש-*d* מתקרב לאפס. ככל שהריבועים קטנים יותר, נחשב את מטען הדיסקה בצורה מדוייקת יותר והשגיאה שלנו תקטן.

2. כעת נתון קבל לוחות משני לוחות עגולים העשויים מוליך מושלם. נתון הפוטנציאל על הלוחות:

הפוטנציאל על הלוח העליון: $\frac{V}{2}$

הפוטנציאל על הלוח התחתון: $-\frac{V}{2}$

בנוסף נתון: $V = 1v\,, R = 1\,, d = 0.025$

בעיה זו מתארת מערכת רב גופית, אשר גם אותה נפתור בעזרת שיטת המומנטים.
בנוסף להשפעה של כל דיסקה על עצמה, מתווספת ההשפעה של הדיסקה השנייה עליה, לכן נרחיב את המטריצה $\bar{\bar{l}}$ להיות:

$$\begin{bmatrix} l^{AA} & l^{AB} \\ l^{BA} & l^{BB} \end{bmatrix}$$

וכל איבר במטריצה יחושב כך:

$$l_{mn} = \frac{1}{\sqrt{(x_n - x_m)^2 + (y_n - y_m)^2 + (z_n - z_m)^2}}$$

כעת נוכל לחשב את המטען על כל דיסקה באופן זהה לשאלה 1 בעזרת המערכת המטריצית:

$$\begin{bmatrix} l^{AA} & l^{AB} \\ l^{BA} & l^{BB} \end{bmatrix} [x_j] = [\begin{matrix} V_A \\ V_B \end{matrix}]$$

כאשר V_A הוא וקטור המתאר את הפוטנציאל על גבי הדיסקה העליונה, ובאופן דומה הוקטור V_B מתאר את הפוטנציאל על גבי הדיסקה התחתונה.

א. בסעיף זה נניח $D = \frac{R}{2}$.
נחשב את המטען על כל דיסקה ונקבל:

$$Q_A = -Q_B = \ 9.488 \cdot 10^{-11} \ \ [C]$$

נשים לב שהמטען על שתי הדיסקות שווה ומנוגד בסימן, כך שסך המטען הוא 0.
הערך התיאורטי של הקבל לפי $C = \frac{Q}{V}$ הוא:

$$C = 9.488 \cdot 10^{-11} \ \ [F]$$

והערך לפי קירוב קבל לוחות אינסופיים $C = \frac{\epsilon_0 A}{D}$ הוא:

$$C = 5.563 \cdot 10^{-11} \ \ [F]$$

קיבלנו שגיאה יחסית של 70%. את הפער נסביר בעזרת הקירוב שביצענו. כדי להשתמש בנוסחא של קבל לוחות אינסופיים דרשנו $R \gg D$, כלומר המרחק בין הלוחות קטן משמעותית מרדיוסן. קירוב זה כמובן אינו נכון במקרה שכזה, לכן קיבלנו שגיאה גדולה מאוד.

ב. כעת נניח $D = \frac{R}{5}$ ונחזור על החישוב של סעיף א':
נקבל את המטען:

$$Q_A = -Q_B = \ 1.839 \cdot 10^{-10} \ \ [C]$$

לכן הקיבול התיאורטי הוא:

$$C = 1.839 \cdot 10^{-10} \ \ [F]$$

והקיבול לפי קירוב לוחות אינסופיים הוא:

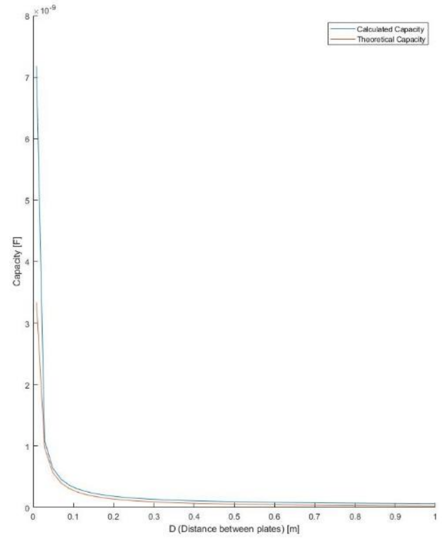
$$C = 1.391 \cdot 10^{-10} \ \ [F]$$

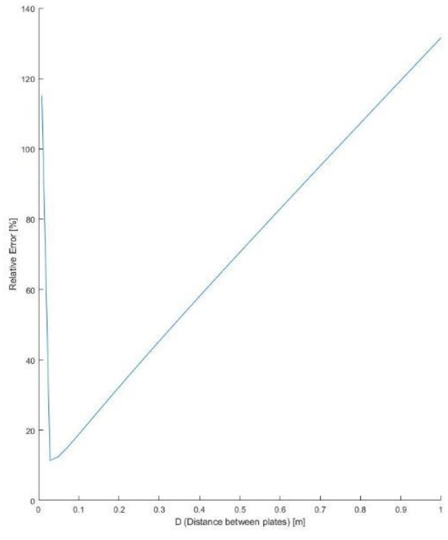
קיבלנו שגיאה יחסית של 32%.
הסטייה עקבית עם ההסבר של סעיף א'. ככל שנקטין את המרחק בין הדיסקות, הקירוב יהיה טוב יותר, כפי שאנו רואים.

ג. כעת נמשיך לבחון את דיוק הקירוב שלנו בטווח ערכים גדול יותר של D:

$$\frac{d}{3} < D < 1$$

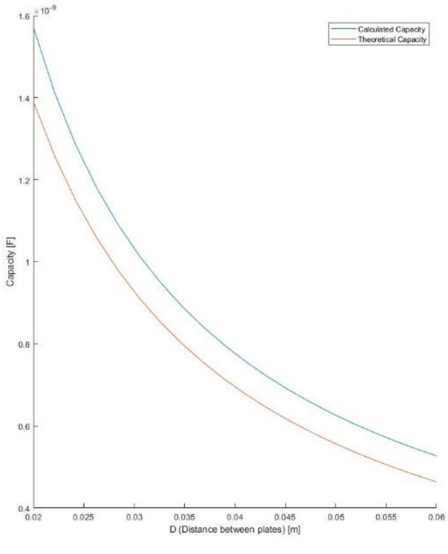
נציג גרף המתאר את הקיבול המחושב למול הערך התיאורטי, יחד עם גרף המתאר את גודל השגיאה כתלות ב-D.

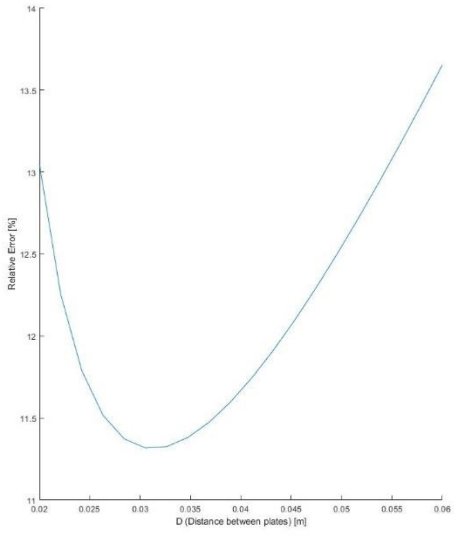




נשים לב למספר תופעות מעניינות בגרפים. ראשית, ככל ש-D, המרחק בין הלוחות גדל, השגיאה היחסית גדלה בין הקיבול שחושב לתיאורטי. בנוסף, עבור ערכי D קטנים מאוד, גם הקיבול התיאורטי וגם הקיבול המחושב עולים בצורה מעריכית והשגיאה היחסית ביניהם גדלה מאוד.

נתמקד תחילה בחישוב עבור ערכי D קטנים מאוד. לצורך כך, נשנה את התוכנית כך שהקיבול יחושב רק עבור ערכי D הנעים בין *0.02* לבין *0.06*. התוצאות מוצגות בגרף להלן:

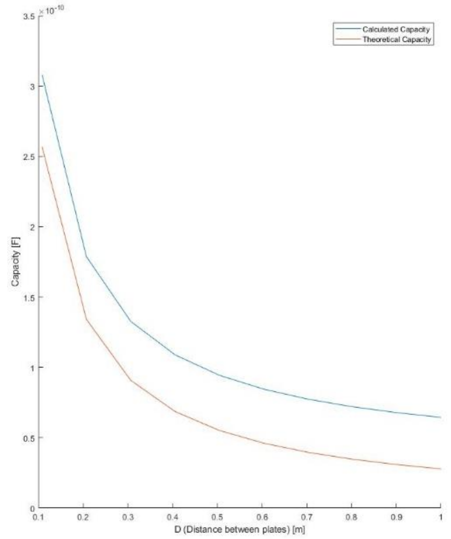


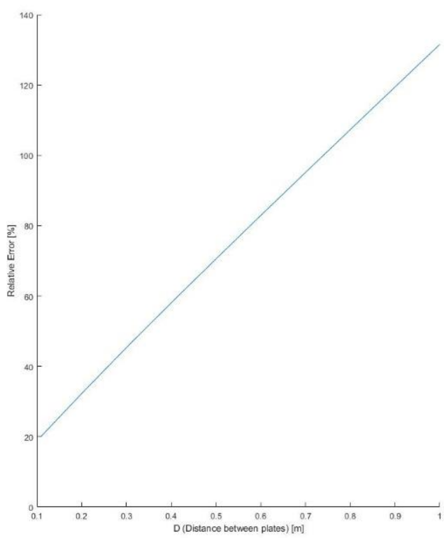


נשים לב כי כאשר $D<0.03$ השגיאה היחסית מתחילה לעלות. הסיבה לכך היא שהמרחק בין הלוחות (D) נהיה קרוב מאוד למימדי של כל אלמנט (d) שבעזרתו מקרבים את האינטגרל. כפי שהוסבר ברקע התיאורטי בנושא הדיסקטריזציה, התנאי לקירוב בעת ביצוע הדיסקרטיזציה הוא שהמרחק בין האלמנטים גדול משמעותית מהגודל של כל אלמנט. עבור $D<0.03$ תנאי זה לא מתקיים, ולכן הקירוב אינו תקף.

לו היינו מעוניינים לשפר את רמת הדיוק עבור ערכי D קטנים, למשל עבור $D=\frac{d}{3}=0.0833$ ניתן להקטין את ערכי ה-d איתם אנו עובדים. במצב זה, הגודל של כל אלמנט יקטן ויאפשר קירוב טוב גם עבור ערכי D קטנים.
בנוסף, נשים לב כי בכל ערכי ה-D ישנה שגיאה יחסית גדולה, שערכה לפחות 11%. כפי שראינו בשאלה 1, בעת ביצוע הקירוב לאינטגרל על ידי הדיסקטריזציה נוצרת שגיאה יחסית, והשגיאה היחסית קטנה ככל שאנחנו מקטינים את מימדי הריבועים (כלומר, מקטינים את d). לכן, על ידי הקטנת הערך של d נוכל להקטין את השגיאה היחסית ולהגיע לתוצאות מדוייקות יותר בעת חישוב הקיבול.

כעת, נסתכל על הגרף ללא החלק שבו ערכי D קטנים מאוד, נסתכל רק עבור ערכי D הנעים בין 0.1 ל-1:





נשים לב כי עבור ערכי D גדולים מאוד (למשל, עבור *D=1*), ישנו הפרש משמעותי בין הערך התיאורטי לערך המחושב. עבור ערכי D גדולים, החישוב של הערך התיאורטי איננו נכון, שכן הערך התיאורטי מניח כי המרחק בין הלוחות קטן משמעותית מרדיוס כל לוח. עבור *D=1* זה כמובן איננו נכון (*D=1=R*). ככל שנקטין את המרחק בין הלוחות (D) הערך התיאורטי יהיה מדוייק יותר.

לסיכום:

- עבור ערכי D גדולים במיוחד, הקיבול התיאורטי איננו מדוייק שכן לא מתקיימת ההנחה *D<<R*.
- עבור ערכי D קטנים במיוחד, הקיבול המחושב איננו מדוייק שכן לא מתקיימת ההנחה *d<<D*.

ד. ראשית נחשב את סה"כ המטען מסעיף א:

$$Q_{total-section-A} = -2.584939 \cdot 10^{-26} \approx 0\ [C]$$

נשים לב כי $Q_{total-section-A}$ הוא מספר שקטן ב-15 סדרי גודל מהמטען איתו אנו מתעסקים, והוא בקירוב 0, כפי שמצופה מלוחות בקבל לוחות.
בסעיף זה, הפוטנציאל על הדיסקה העליונה הוא $1V$ והפוטנציאל על הדיסקה התחתונה הוא $0V$ (מוארקת).

המטען שהתקבל על הדיסקה העליונה:

$$Q_A = 1.1682 \cdot 10^{-10}[C]$$

המטען שהתקבל על הדיסקה התחתונה:

$$Q_B = -7.2946 \cdot 10^{-11}[C]$$

סה"כ המטען:

$$Q_{Total} = 4.3870 \cdot 10^{-11}[C]$$

נשים לב שהמטען אינו מתאפס כמו בסעיף א'. אין לנו כאן את הסימטריה של קבל כאשר המתח על הלוחות זהה בגודלו והפוך בסימנו.

במקרה זה הוספנו פוטנציאל של $\frac{V}{2}$ לכל אחת מהדיסקות, לכן נצפה לתוספת זהה של מטען לכל אחת מהדיסקות למול המטען של סעיף א'. בפועל מתקיים:

$$Q_{A-addition} = 2.1490 \cdot 10^{-11}[C]$$

$$Q_{B-addition} = 2.1434 \cdot 10^{-11}[C]$$

נשים לב שההפרש קטן מאוד בין הערכים והשגיאה היחסית היא:

$$\Delta = 0.027\%$$

ערכים אלו מתיישרים עם ההנחה שלנו לתוספת שווה למטען לכל אחת מהדיסקות.