לוגיקה של פסוקים

כללי גזירה והוכחות - שלב 1

הוכן ע״י דני קוטלר, המכללה האקדמית תל-חי
מבוסס על הספר M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, 2nd Ed.

טענות (פסוקים)

- לוגיקה עוסקת בטענות
- טענה (פסוק) היא הצהרה שאפשר לומר עליה אם היא נכונה או לא.
- דוגמאות לטענות:
  - סכום המספרים 1 ו 2 הוא 3
  - סכום המספרים 1 ו 2 הוא 4
  - היום איחרתי להרצאה
  - שלג שחור יורד בחוץ
  - סוקרטס הוא אדם

- לא טענות:
  - Is this the real life?
  - מתישהו יהיה שלום
  - אולי יירד מחר גשם

טענות מורכבות

- הלוגיקה היא מתמטיקה שעוסקת בבניית טענות.
- דוגמה 1:

  - נתונה הטענה:

    אם הרכבת תאחר ולא יהיו מוניות בתחנה אז אאחר לפגישה

  - הטענה מורכבת משלוש טענות קטנות יותר:
    - הרכבת תאחר
    - לא יהיו מוניות בתחנה
    - אאחר לפגישה
  - ידוע שהרכבת אחרה, אבל אני לא איחרתי לפגישה. מה המסקנה?
  - תשובה: היו מוניות בתחנה

טענות מורכבות

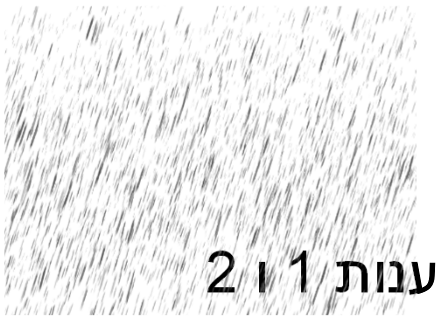
- <u>דוגמה 2:</u>
  - נתונה הטענה:

אם יירד גשם ולא יהיה לי מעיל אז אירטב

  - הטענה מורכבת מ-3 טענות קטנות:
    - יירד גשם
    - לא יהיה לי מעיל
    - אני ארטב
  - נניח שירד גשם ולא נרטבתי. מה המסקנה?
  - תשובה: היה לי מעיל

סינטקס

- אנו מבחינים בין שתי דרכים להסתכל על טענות בלוגיקה:
  - מבחינת הצורה – סינטקס
  - מבחינת התוכן או המשמעות – סמנטיקה
- סינטקס: הצורה הפורמלית שבה הטענות כתובות.
- <u>דוגמה 3:</u>
  - מבחינת הסינטקס הטענה 4 = 1+2 היא נכונה (כי היא כתובה בצורה נכונה)
  - מבחינת הסינטקס הטענות 1+2=3 ו 2+1=3 הן שונות.
- <u>דוגמה 4:</u>
  - טענה 1: אם יורד גשם בחוץ אז 3 = 1+1
  - טענה 2: יורד גשם בחוץ
  - טענה 3: 3 = 1+1

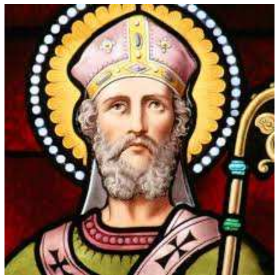


מבחינת הסינטקס טענה 3 היא מסקנה של טענות 1 ו 2

סינטקס (המשך)

- דוגמה 5:
  - פו הדב: "אם ינשוף אינו הכי חכם ביער, אז שמי אינו פו הדב"
  - שמו של פו הוא פו הדב
  - מסקנה: ינשוף הוא הכי חכם ביער

- דוגמה 6: (עפ"י אנסלם מקנטרברי)
  - טענה 1: אלוהים הוא מושלם
  - טענה 2: אי-קיום הוא פגם
  - מסקנה: אלוהים קיים



מסקנות לא נכונות

- <u>דוגמה 7:</u>
  - מי שלא עובר את הבחינה לא מקבל תעודה
  - יוסי לא קיבל תעודה
  - מסקנה: יוסי לא עבר את הבחינה

WRONG!

- <u>דוגמה 8:</u>
  - אם ה Chicago Bulls לא ינצחו אז ברק אובמה אינו נשיא ארה"ב
  - ברק אובמה אינו נשיא ארה"ב
  - מסקנה: ה Chicago Bulls לא ניצחו

WRONG!

- <u>דוגמה 9:</u>
  - מחר יירד גשם או שלג (נאמר אתמול)
  - היום ירד גשם
  - מסקנה: היום לא ירד שלג

WRONG!

הערה אודות "או"

- מכאן והלאה לכל אורך הקורס המשמעות של "או" באנגלית: or), הן בשפה והן בסימון מתמטי היא שלפחות אחת מהטענות אמת (כלומר, יתכן ששתיהן אמת).
- אם נרצה לציין מצב שרק אחת מהטענות אמת (exclusive or) אז נציין זאת במפורש. למשל, p או q אך לא שניהם.

סמנטיקה

- מתייחסת למשמעות של טענה במובן המתמטי או בעולם האמיתי.
- המשמעות של טענה לוגית תהיה בדרך כלל אמת או שקר (T או F)
- דוגמאות:
  - 1+2 ו 2+1 זהים מבחינה סמנטית
  - הטענות 1+2=4 ו 1+2=3 הן שונות מבחינה סמנטית

סימונים לוגיים

- שני סוגים בסיסיים של סימנים לוגיים
  - טענות אטומיות
  - קַשָּׁרים
- בנוסף, נשתמש גם בסוגריים: ( )
- אותיות לטיניות קטנות מסמנות **טענות**: $p,q,r,\ldots p_1, p_2,$
  ייקראו גם **טענות אטומיות**

  דוגמאות:

  p – יורד גשם

  q – ברק אובמה הוא נשיא ארה"ב

  r – ינשוף הוא היצור החכם ביער

קַשָּׁרִים

$\neg$ **שלילה** (negation)

p – יש מוניות בתחנה

$\neg p$ – אין מוניות בתחנה

$\wedge$ **וגם** (and) (קרוי גם **קוֹנִיוּנקְצִיה**)

p - הרכבת אחרה

q – היו מוניות בתחנה

$p \wedge q$ – הרכבת אחרה והיו מוניות בתחנה

קַשָּׁרים (המשך)

$\vee$ **או** (or) (קרוי גם **דיסיונקציה**)

p - הרכבת אחרה

q – היו מוניות בתחנה

$q\vee p$ – הרכבת אחרה או היו מוניות בתחנה

$\rightarrow$ **גרירה** ("אז", implies)

p - הרכבת אחרה

q – היו מוניות בתחנה

$p\rightarrow q$ – אם הרכבת אחרה אז היו מוניות בתחנה

הקשר $\rightarrow$ לא בהכרח מבטא סיבתיות. הוא מבטא **שימור ערך אמת** (נדון בכך בהמשך).

הקשרים $\vee$, $\wedge$, ו $\rightarrow$ נקראים **קשרים בינאריים** כי הם מקשרים שתי טענות. הקשר $\neg$ הוא **קשר אונארי**

טענות מורכבות

- בעזרת טענות אטומיות וקשרים ניתן להרכיב טענות מורכבות
- דוגמה: $(p \wedge q) \rightarrow ((\neg r) \vee q)$
- מוגדרים סדרי העדיפות הבאים:
  1) $(\ )$
  2) $\neg$
  3) $\wedge \ \vee$ (משמאל לימין)
  4) $\rightarrow$ (מימין לשמאל)
- הקשר $\rightarrow$ מחושב מימין לשמאל:

  $p \rightarrow q \rightarrow r$ שקול ל $\left(p \rightarrow \left(q \rightarrow r\right)\right)$
- כל ביטוי חוקי המורכב מטענות אטומיות, קשרים ו () ייקרא פסוק או טענה. (נראה בהמשך מה פרוש "חוקי")

רצפים והוכחות

הסקה טבעית (natural deduction)

- בהסקה טבעית יש אוסף של כללי הסקה המאפשרים להסיק פסוקים חדשים מתוך פסוקים נתונים.
- $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n$ נתונים (premises)
- אם ע"י הפעלת כללי גזירה שוב ושוב על הנתונים נקבל בסופו של דבר את הפסוק ψ , נסמן זאת כך:

$$\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi \quad \text{או} \quad \{\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n\} \vdash \psi$$

- הפסוק ψ נקרא מסקנה
- הביטוי $\phi_1, \phi_2, \ldots, \phi_n \vdash \psi$ נקרא רצף (sequent)
- רצף נקרא תקף (valid) אם קיימת עבורו הוכחה

הוכחה

- **הוכחה** היא סידרה של הפעלות של **כללי הסקה** שתחילתה בנתונים ובסיומה מקבלים את המסקנה.
- דוגמה 1:

אם הרכבת תאחר ולא יהיו מוניות בתחנה אז אאחר לפגישה

- p - הרכבת תאחר
- q - היו מוניות בתחנה
- r - איחרתי לפגישה

- נתונים: הרכבת אחרה, לא איחרתי לפגישה.
- מסקנה: היו מוניות בתחנה
- זה נותן את הרצף הבא: $p \wedge \neg q \to r, p, \neg r \vdash q$

הוכחות

- בניית הוכחה עשויה להיות תהליך ארוך וקשה.
- יש להיזהר בניסוח כללי הסקה, כדי שלא נקבל תוצאות אבסורדיות. למשל, לא היינו רוצים שהרצף הבא יהיה חוקי:

$$p \vdash \neg p$$

כללי הסקה

(כללי גזירה)

כללי הסקה

- כללי הסקה מגדירים כיצד ניתן לקבל (להסיק) פסוק חדש (מסקנה) מפסוק או פסוקים קיימים (נתונים).
- כללי ההסקה הם האקסיומות של מערכת ההסקה, לכן הם צריכים להיות "מובנים מאליהם".
- צורת הרישום של כלל הסקה:

נתון או נתונים

שם הכלל

$$\frac{premises}{conclusion}\ (rule\ name)$$

מסקנה

כלל הוספת $\wedge$ ($\wedge$ introduction)

$$\frac{\phi, \psi}{\phi \wedge \psi} \wedge \mathrm{i}$$

- ϕ, ψ - נתונים
- $\phi \wedge \psi$ - מסקנה (לאו דוקא המסקנה הסופית)
- $\wedge\mathrm{i}$ – שם הכלל (introduction = i)

כלל הסרת $\wedge$ הראשון ($\wedge$ elimination)

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\phi} \wedge e_1$$

- $\phi \wedge \psi$ - נתון
- ϕ - מסקנה
- $\wedge e_1$ – שם הכלל (elimination = e)

כלל הסרת $\wedge$ השני ($\wedge$ elimination)

$$\frac{\phi \wedge \psi}{\psi}\ \wedge e_2$$

- $\phi \wedge \psi$ - נתון
- ψ - מסקנה
- $\wedge e_2$ – שם הכלל (elimination = e)

דוגמה

$$p \wedge q, r \vdash q \wedge r$$

1	$p \wedge q$	נתון
2	r	נתון
3	q	$\wedge e_2$ 1
4	$q \wedge r$	$\wedge i$ 2, 3

שם הכלל ועל איזה
שורה או שורות הוא
מופעל

הערות

- יכולות להיות כמה הוכחות שונות לאותו רצף.
- כל הוכחה ניתנת לבדיקה בצורה שיטתית, גם באמצעות מחשב.
- תרגיל: בנו הוכחה עבור הרצף הבא:

$$(p \wedge q) \wedge r, s \wedge t \vdash q \wedge s$$

כללי שלילה כפולה

- כלל הסרת שלילה כפולה

$$\frac{\neg\neg\phi}{\phi}\ \neg\neg\mathrm{e}$$

- כלל הוספת שלילה כפולה

$$\frac{\phi}{\neg\neg\phi}\ \neg\neg\mathrm{i}$$

דוגמה

$$p, \neg\neg(q \wedge r) \vdash \neg\neg p \wedge r$$

1	p	נתון
2	$\neg\neg(q \wedge r)$	נתון
3	$q \wedge r$	$\neg\neg$e 2
4	r	$\wedge$e$_2$ 3
5	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 1
6	$\neg\neg p \wedge r$	$\wedge$i 4,5

כלל הסרת גרירה
(כלל הניתוק, Modus Ponens, MP)

$$\frac{\phi, \phi \rightarrow \psi}{\psi} \rightarrow \mathrm{e} \ \ (\mathrm{MP})$$

דוגמה:

נתון:

- $p \rightarrow q$: אם יורד גשם אז יש עננים
- p - יורד גשם

מסקנה: q - יש עננים

הערה: רק מ $p \rightarrow q$ לא ניתן להסיק את q.

דוגמה

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p \rightarrow q, p \vdash r$$

1	p	נתון
2	$p \rightarrow (q \rightarrow r)$	נתון
3	$q \rightarrow r$	MP 1,2
4	$p \rightarrow q$	נתון
5	q	MP 1,4
6	r	MP 3,5

הכלל Modus Tollens (MT)

$$\frac{\phi \to \psi, \neg\psi}{\neg\phi}\ \mathrm{MT}$$

דוגמה:

נתון:

- $p \to q$: אם יורד גשם אז יש עננים
- $\neg q$ – אין עננים

מסקנה: $\neg p$ – אין גשם

דוגמה

$$p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$$

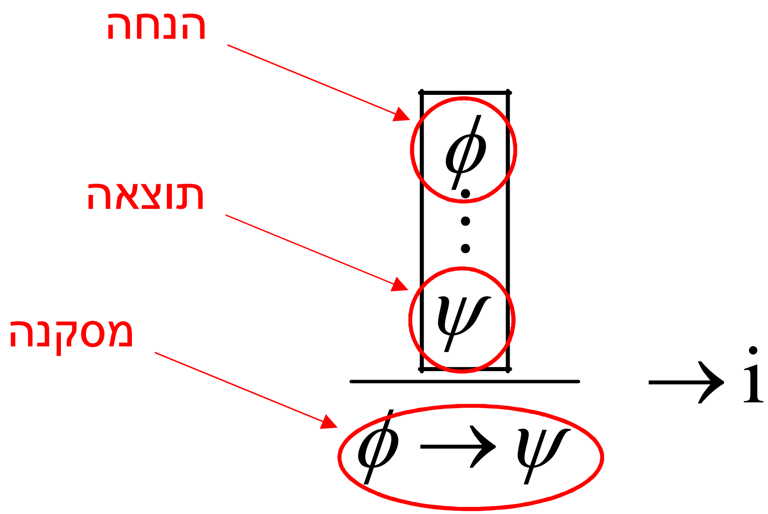
1	p	נתון
2	$p \to (q \to r)$	נתון
3	$q \to r$	MP 1,2
4	$\neg r$	נתון
5	$\neg q$	MT 3,4

תרגילים

$$\neg p \to q, \neg q \vdash p$$

$$p \to \neg q, q \vdash \neg p$$

כלל הוספת גרירה ($\rightarrow$ introduction)



הסבר:

אם כאשר מניחים ϕ מקבלים הוכחה ל ψ, אז ניתן להסיק את $\phi \rightarrow \psi$.

דוגמה

$$\vdash (p \wedge q) \to p$$

הנחה

תוצאה

מסקנה

1	$p \wedge q$	הנחה
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	$(p \wedge q) \to p$	$\to i$ 1-2

<u>הערות:</u>

1. התיבה מקיפה את קטע ההוכחה שמתחיל בהנחה ומסתיים בתוצאה,
2. מיד אחרי התיבה תבוא המסקנה מהתיבה

משפטים

- רצף מהצורה $\vdash \phi$ הוא רצף ללא נתונים. כלומר, ניתן להוכיח את ϕ בלי להסתמך על נתונים כלשהם.
- טענה שהיא מסקנה בהוכחה בלי נתונים נקראת **משפט**

דוגמה

$$p \vdash q \rightarrow (p \wedge q)$$

	1	p	נתון
הנחה	2	q	הנחה
תוצאה	3	$p \wedge q$	$\wedge$i 1,2
מסקנה	4	$q \rightarrow (p \wedge q)$	$\rightarrow$i 2-3

דוגמה דומה

$$\vdash p \to \left(q \to (p \wedge q)\right)$$

1	p	הנחה
2	q	הנחה
3	$p \wedge q$	$\wedge$i 1,2
4	$q \to (p \wedge q)$	$\to$i 2-3
5	$p \to \left(q \to (p \wedge q)\right)$	$\to$i 1-4

הערה על הסברים למסקנות

- עבור מסקנה מתיבה נכתוב את שורת התחלת התיבה ואת שורת סיום התיבה עם "–" ביניהם:

$$\rightarrow i\ 2–5$$

התחלת התיבה   סיום התיבה

הערה כללית על סימונים

- אותיות לטיניות כגון p, q, r יסמנו טענות אטומיות
- אותיות יווניות כגון ϕ, ψ, φ יסמנו טענות כלשהן (אטומיות או מורכבות)

הכלל copy

$$\frac{\phi}{\phi}\ \text{copy}$$

- הסבר: ניתן להעתיק פסוק שכבר הופיע, אלא אם כן הוא תלוי בהנחה זמנית שהמסגרת שלה כבר נסגרה
- דוגמה: $\vdash p \to p$

1	p	הנחה
2	p	copy 1
3	$p \to p$	$\to$i 1-2

דוגמה רעה

$$\cancel{\vdash p \rightarrow (p \wedge q)}$$

1	p	הנחה
2	q	הנחה
3	$p \wedge q$	$\wedge$i 1,2
4	$q \rightarrow p \wedge q$	$\rightarrow$i 2-3
5	$p \wedge q$	copy 3
6	$p \rightarrow (p \wedge q)$	$\rightarrow$i 1-5

Wrong!!!

דוגמה מסכמת

$$\vdash (q \to r) \to ((\neg q \to \neg p) \to (p \to r))$$

1	$q \to r$	הנחה
2	$\neg q \to \neg p$	הנחה
3	p	הנחה
4	$\neg\neg p$	$\neg\neg$i 3
5	$\neg\neg q$	MT 2,4
6	q	$\neg\neg$e 5
7	r	MP 1,6
8	$p \to r$	$\to$i 3-7
9	$(\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to$i 2-8
10	$(q \to r) \to (\neg q \to \neg p) \to (p \to r)$	$\to$i 1-9

האקסיומות של הילברט

(H1) $\vdash \phi \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

(H2) $\vdash (\phi \rightarrow (\psi \rightarrow \chi)) \rightarrow ((\phi \rightarrow \psi) \rightarrow (\phi \rightarrow \chi))$

(H3) $\vdash (\neg\phi \rightarrow \neg\psi) \rightarrow (\psi \rightarrow \phi)$

לכל שלושה פסוקים ϕ, ψ ו χ.
הילברט הציע את המשפטים האלה בתור מערכת אקסיומות לתחשיב הפסוקים.

תרגיל: הוכיחו את האקסיומות של הילברט בעזרת כלי ההסקה שלמדנו

תרגילים נוספים

(H3.1) $\vdash (p \to q) \to (\neg q \to \neg p)$

(H3.2) $\vdash (\neg p \to q) \to (\neg q \to p)$

(H3.3) $\vdash (p \to \neg q) \to (q \to \neg p)$