סמנטיקה בתחשיב היחסים

סמנטיקה מול סינטקס

- כמו בתחשיב הפסוקים גם בתחשיב היחסים יש שתי מערכות מקבילות:
  - סינטקס - מערכת של הוכחות
  - סמנטיקה - מערכת של משמעויות
- גם בתחשיב היחסים יש שקילות בין שתי המערכות:
  - משפט הנאותות
  - משפט השלמות
- הוכחת שני המשפטים מורכבת יותר מבתחשיב הפסוקים ולא נוכיח אותם כאן

סינטקס בתחשיב היחסים

- תהי Γ (גאמה) קבוצת נוסחאות ותהי ψ נוסחה. הביטוי $\Gamma \vdash \psi$ אומר שקיימת הוכחה של ψ שכוללת נוסחאות מתוך Γ.
- אם מצאנו הוכחה כזאת אנו יודעים בוודאות ש $\Gamma \vdash \psi$
- אם עבדנו קשה ולא מצאנו, זה עדין לא אומר ש $\Gamma \nvdash \psi$
- מסקנה: יותר קל להראות ש $\Gamma \vdash \psi$ מאשר ש $\Gamma \nvdash \psi$

מודל - הגדרה

יהי $(\mathcal{P},\mathcal{F})$ מילון. מודל $\mathcal{M}$ מורכב מ-

1. קבוצה לא ריקה $A^{\mathcal{M}}$ - עולם הערכים או קבוצת התחום
2. לכל פונקציה ללא פרמטרים $f^{(0)} \in \mathcal{F}$ מתאים אבר $f^{\mathcal{M}} \in A$
3. לכל פונקציה n-ארית $f^{(n)} \in \mathcal{F}$ כך ש n>0 מתאימה פונקציה $f^{\mathcal{M}} : A^n \to A$
4. לכל יחס n-ארי $P^{(n)} \in \mathcal{P}$ כך ש n>0 מתאים יחס $P^{\mathcal{M}} \subseteq A^n$

דוגמה 1: מצבי תוכנית מחשב

יהיו $\mathcal{F}=\{i^{(0)}\}$ ו $\mathcal{P}=\{P^{(1)},R^{(2)}\}$. נגדיר מודל $\mathcal{M}$ כך:

$A^{\mathcal{M}}=\{a,b,c\}$ קבוצת המצבים של תוכנית מחשב

$i^{\mathcal{M}}=\{a\}$ - המצב ההתחלתי

$R^{\mathcal{M}}=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,c)\}$ - מעברים חוקיים

$P^{\mathcal{M}}=\{b,c\}$ - מצבים סופיים חוקיים

נבדוק את ערך האמת של כמה נוסחאות:

$\exists xR(i,x)$	true	$\forall x\forall y\forall z(R(x,y)\wedge R(y,z)\rightarrow x=z)$	false
$\exists xR(x,i)$	true	$\forall x\forall y\forall z\left(R(x,y)\wedge R(y,z)\rightarrow R(x,z)\right)$	true
$\forall xP(x)$	false	$\forall x\exists yR(x,y)$	true

דוגמה 1: מצבי תוכנית מחשב

יהיו $\mathcal{F}=\{i^{(0)}\}$ ו $\mathcal{P}=\{P^{(1)},R^{(2)}\}$. נגדיר מודל $\mathcal{M}$ כך:

$A^{\mathcal{M}}=\{a,b,c\}$ קבוצת המצבים של תוכנית מחשב

$i^{\mathcal{M}}=\{a\}$ - המצב ההתחלתי

$R^{\mathcal{M}}=\{(a,a),(a,b),(a,c),(b,c),(c,c)\}$ - מעברים חוקיים

$P^{\mathcal{M}}=\{b,c\}$ - מצבים סופיים חוקיים

נבדוק את ערך האמת של כמה נוסחאות:

$\exists y\forall xR(x,y)$ *true*

$\exists x\forall yR(x,y)$ *true*

$\forall yR(y,y)$ *false*

$\forall x\forall y(R(x,y)\vee R(y,x))$ *false*

דוגמה 2: מחרוזות בינאריות

יהיו $\mathcal{F}=\{e^{(0)},\cdot^{(2)}\}$ ו $\mathcal{P}=\{\leq^{(2)}\}$. עבור $\cdot$ וְ $\leq$ נשתמש ב "infix notation", כלומר, הסימן ממוקם בין שני הארגומנטים.

נגדיר מודל $\mathcal{M}$ כך:

$A^{\mathcal{M}}$ - כל המחרוזות מעל {0,1}.

$e^{\mathcal{M}}=\epsilon$ - המחרוזת הריקה

$\cdot^{\mathcal{M}}$ - שרשור מחרוזות

$\leq^{\mathcal{M}}$ - כל הזוגות (x,y) כך ש x התחלה (prefix) של y (בעברית זה נקרא "רישא").

נבדוק את ערך האמת של כמה נוסחאות:

דוגמה 2: מחרוזות בינאריות

$\forall x(x \leq x)$	*true*
$\forall x \forall y(x \cdot y \leq x \rightarrow y = \epsilon)$	*true*
$\forall x \forall y \forall z(x \cdot y \leq x \cdot z \rightarrow y \leq z)$	*true*
$\exists y \forall x(x \leq y)$	*false*
$\exists y \forall x(y \leq x)$	*true*
$\forall y \exists x(x \leq y)$	*true*
$\forall y \exists x(y \leq x)$	*true*
$\forall y \exists x \exists z(!(x = e) \wedge !(z = e) \wedge x \cdot z = y)$	*false*

עקרונות בניית מודל

- ניתן להגדיר כמעט כל מודל שרוצים.
- מודל צריך לשקף בצורה מדויקת ככל האפשר את המציאות שאותה רוצים לתאר.
- אין טעם לכלול במודל היבטים לא רלוונטיים.

בדיקת ערך האמת של נוסחה

- ערך האמת של נוסחה בתחשיב היחסים תלוי בדרך כלל במודל.
- למשל, נניח שרוצים לברר את ערך האמת של $\forall x \phi$ במודל $\mathcal{M}$ המוגדר על מילון $(\mathcal{P}, \mathcal{F})$
  - יש לבדוק האם הנוסחה ϕ מתקיימת לכל ערך *a* שנציב בכל מקום שבו *x* חופשי
  - בעצם מתכוונים לבדוק את ההצבה $\phi[a / x]$ לכל ערך *a* בקבוצת התחום של $\mathcal{M}$
  - הכתיב $\phi[a / x]$ אינו נכון, כי *a* אינו עצם אלא ערך בקבוצת התחום של $\mathcal{M}$
  - יש צורך במושג של הצבה שמתאים למודלים

הגדרה: טבלת חיפוש

טבלת חיפוש (look-up table) או **סביבה** (environment) עבור קבוצת תחום $A^{\mathcal{M}}$ של מודל $\mathcal{M}$ היא פונקציה

$$\ell : \mathrm{var} \to A$$

המשתנים

יהי $a \in A^{\mathcal{M}}$ ותהי ℓ טבלת חיפוש. נגדיר טבלת חיפוש חדשה $\ell[x \mapsto a]$ שמעתיקה את x ל a ולכל משתנה אחר y היא מעתיקה את y ל $\ell(y)$.

כלומר, ההבדל בין ℓ ל $\ell[x \mapsto a]$ הוא רק בערך שמקבל x.

הגדרה: ערך אמת של נוסחה

נתונה נוסחה ϕ במילון $(\mathcal{P},\mathcal{F})$. נתון מודל $\mathcal{M}$ המוגדר על המילון $(\mathcal{P},\mathcal{F})$ ונתונה טבלת חיפוש ℓ. נגדיר ש ϕ מחושבת ל T במודל $\mathcal{M}$ ביחס לסביבה ℓ, ונסמן זאת $\mathcal{M}\vDash_{\ell}\phi$, באופן אינדוקטיבי לפי הכללים הבאים:

כלל P: אם ϕ מהצורה $P(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ (נוסחה אטומית), מציבים את הערכים של ℓ בכל המשתנים ב $t_1,t_2,\ldots,t_n$ ומקבלים $a_1,a_2,\ldots,a_n\in A$. ואז $\mathcal{M}\vDash_{\ell}P(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ אם ורק אם $(a_1,a_2,\ldots,a_n)\in P^{\mathcal{M}}$

הגדרה: ערך אמת של נוסחה (המשך)

כלל $\forall x$: מתקיים $\mathcal{M} \models_{\ell} \forall x \psi$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models_{\ell[x \mapsto a]} \psi$ מתקיים לכל $a \in A$

כלל $\exists x$: מתקיים $\mathcal{M} \models_{\ell} \exists x \psi$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models_{\ell[x \mapsto a]} \psi$ מתקיים עבור איזה שהוא $a \in A$

כלל $\neg$: מתקיים $\mathcal{M} \models_{\ell} \neg \psi$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi$ לא מתקיים.

כלל $\vee$: מתקיים $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_1 \vee \psi_2$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_1$ או $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_2$.

כלל $\wedge$: מתקיים $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_1 \wedge \psi_2$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_1$ וגם $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_2$.

כלל $\rightarrow$: מתקיים $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_1 \rightarrow \psi_2$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_2$ מתקיים בכל פעם ש $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi_1$ מתקיים.

הערות

- משמעות ההגדרה היא ש ϕ "נכונה" אם מציבים לתוך המשתנים החופשיים ערכים לפי מה שמוגדר ב ℓ
- אם לא מתקיים $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$ נסמן זאת כך: $\mathcal{M} \not\models_{\ell} \phi$
- אם ℓ ו ℓ' נותנים ערכים זהים על המשתנים החופשיים ב ϕ אז $\mathcal{M} \models_{\ell} \phi$ אם ורק אם $\mathcal{M} \models_{\ell'} \phi$

ערך אמת שאינו תלוי בטבלת חיפוש

נתונה נוסחה ϕ במילון $(\mathcal{P},\mathcal{F})$. נתון מודל $\mathcal{M}$ המוגדר על המילון $(\mathcal{P},\mathcal{F})$. אם $\mathcal{M} \vDash_{\ell} \phi$ לכל טבלת חיפוש ℓ נאמר ש ϕ מחושב ל T במודל $\mathcal{M}$ ונסמן זאת $\mathcal{M} \vDash \phi$.

למשל, אם ב ϕ אין משתנים חופשיים, אז לא מתבצעות הצבות ולכן $\mathcal{M} \vDash_{\ell} \phi$ לכל ℓ או ש $\mathcal{M} \nvDash_{\ell} \phi$ לכל ℓ.

גרירה סמנטית בתחשיב היחסים

<u>הגדרה:</u>

תהי Γ קבוצת נוסחאות ותהי ψ נוסחה. מתקיימת **גרירה סמנטית** $\Gamma \vDash \psi$ אם ורק אם לכל מודל $\mathcal{M}$ ולכל טבלת חיפוש ℓ כך ש $\mathcal{M} \vDash_{\ell} \phi$ לכל $\phi \in \Gamma$ מתקיים $\mathcal{M} \vDash_{\ell} \psi$.

במקרה כזה אומרים ש Γ **גוררת סמנטית** את ψ.

בדיקת קיום גרירה סמנטית

- בתחשיב הפסוקים, במקרה ש Γ קבוצה סופית, בדיקת קיום $\Gamma \vDash \psi$ היא תהליך סופי הכרוך בבניית טבלאות האמת של כל הפסוקים המעורבים.
- בתחשיב היחסים בדיקת זהויות כמו $\mathcal{M} \vDash_{\ell} \phi$ וְ $\Gamma \vDash \psi$ היא תהליך אינסופי, כי יש אינסוף מודלים, ולכן לא אפשרי מבחינה חישובית.
- לפעמים אפשר להוכיח קיום גרירה סמנטית באמצעות טיעון לוגי כללי.

מושגים סמנטיים בתחשיב היחסים

הגדרה:

נוסחה ψ נקראת ספיקה אם קיימים מודל $\mathcal{M}$ וטבלת חיפוש ℓ המוגדרת על $\mathcal{M}$ כך ש $\psi \mathcal{M}\vDash_\ell$.

קבוצת נוסחאות Γ נקראת ספיקה אם קיימים מודל $\mathcal{M}$ וטבלת חיפוש ℓ המוגדרת על $\mathcal{M}$ כך ש $\phi \mathcal{M}\vDash_\ell$ לכל $\phi\in\Gamma$

נוסחה ψ נקראת תקפה אם לכל מודל $\mathcal{M}$ שרלוונטי ל ψ ולכל טבלת חיפוש ℓ המוגדרת על $\mathcal{M}$ מתקיים $\psi \mathcal{M}\vDash_\ell$

דוגמה לקיום גרירה סמנטית

$$\forall x\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)\vDash \forall xP(x)\rightarrow \forall xQ(x)$$

נניח שעבור מודל $\mathcal{M}$ וסביבה ℓ מתקיים

$$\mathcal{M}\vDash_{\ell} \forall x\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)$$

צריך להראות ש $\mathcal{M}\vDash_{\ell} \forall xP(x)\rightarrow \forall xQ(x)$

נניח בשלילה ש $\mathcal{M}\nvDash_{\ell} \forall xP(x)\rightarrow \forall xQ(x)$

לפי כלל $\rightarrow$ מתקיים $\mathcal{M}\vDash_{\ell} \forall xP(x)$ ו $\mathcal{M}\nvDash_{\ell} \forall xQ(x)$.

כלומר, לכל ערך a בקבוצת התחום של $\mathcal{M}$ מתקיים $a\in P^{\mathcal{M}}$

וקיים ערך b בקבוצת התחום של $\mathcal{M}$ כך ש $b\notin Q^{\mathcal{M}}$.

עבור אותו b מתקיים $\mathcal{M}\nvDash_{\ell[x\mapsto b]} P(x)\rightarrow Q(x)$

ולכן $\mathcal{M}\nvDash_{\ell} \forall x\big(P(x)\rightarrow Q(x)\big)$. **סתירה!**

דוגמה נוספת

$$\exists x\left(P(x) \rightarrow \forall y P(y)\right)$$

הסבר: יהי $\mathcal{M}$ מודל כלשהו

א. אם $\mathcal{M} \models \forall y P(y)$

אז $\mathcal{M} \models P(x) \rightarrow \forall y P(y)$ ללא תלות בערך של x, ובפרט

$$\mathcal{M} \models \exists x\left(P(x) \rightarrow \forall y P(y)\right)$$

ב. אם $\mathcal{M} \not\models \forall y P(y)$

אז קיים x שעבורו P(x) לא נכון, כלומר, הערך של P(x) הוא F
עבור אותו ערך של x. ולכן ל $P(x) \rightarrow \forall y P(y)$ יש ערך אמת T
עבור אותו ערך של x. ומכאן, שוב

$$\mathcal{M} \models \exists x\left(P(x) \rightarrow \forall y P(y)\right)$$

דוגמה לאי-גרירה סמנטית

האם מתקיים גם $\forall x P(x) \to \forall x Q(x) \vDash \forall x \big(P(x) \to Q(x) \big)$?

תשובה: קל לחשוב על דוגמה שבה $\mathcal{M} \nvDash_{\ell} \forall x P(x)$

ולכן $\mathcal{M} \vDash_{\ell} \forall x P(x) \to \forall x Q(x)$

ומצד שני קיימים ערכים b בקבוצת התחום של $\mathcal{M}$ שעבורם

$$\mathcal{M} \nvDash_{\ell[x \mapsto b]} P(x) \to Q(x)$$

דוגמה: קבוצת התחום: המספרים הטבעיים.

$P^{\mathcal{M}}$ - המספרים הזוגיים

$Q^{\mathcal{M}}$ - המספרים האי-זוגיים

סיכום: גרירה סמנטית בתחשיב היחסים

- באופן כללי, קשה מאוד לקבוע ערך אמת של טענה מהסוג $\Gamma \vDash \psi$, כיוון שיש לבדוק אותה על כל המודלים האפשריים, כולל מודלים שאין להם שום משמעות נראית לעין.
- עבור מילון $(\mathcal{P},\mathcal{F})$ ניתן להגדיר את קבוצת התחום, היחסים והפונקציות בכל דרך אפשרית, כולל כאלה שאין להן איזו שהיא משמעות מעניינת.
- רק ליחס = יש תמיד אותה הגדרה:

$$(=^{\mathcal{M}}) := \{(a,a) \mid a \in A\}$$

דוגמאות נוספות

- מתקיימת גרירה סמנטית $x = y, y = z \models x = z$
- האם מתקיימת גרירה סמנטית?

$$R(x, y), R(y, z) \models R(x, z)$$

$$\forall x\big(P(x) \to Q(x)\big), P(y) \models Q(y)$$

$$\forall x\big(P(x) \land Q(x)\big) \models \forall x\big(P(x) \to Q(x)\big)$$

$$\forall x \forall y\big(P(y) \to Q(x)\big) \models \exists y P(y) \to \forall x Q(x)$$

$$\forall x \exists y\big(P(y) \to Q(x)\big) \models \exists y P(y) \to \forall x Q(x)$$

משפטי הנאותות והשלמות

משפט הנאותות לתחשיב היחסים

לכל קבוצת נוסחאות Γ ולכל נוסחה ψ,

אם $\Gamma \vdash \psi$ אז $\Gamma \vDash \psi$

משפט השלמות לתחשיב היחסים

לכל קבוצת נוסחאות Γ ולכל נוסחה ψ,

אם $\Gamma \vDash \psi$ אז $\Gamma \vdash \psi$

לא נוכיח משפטים אלה בקורס.

קבוצה ספיקה

תזכורת: אם בנוסחה אין משתנים חופשיים היא נקראת **פסוק**

תזכורת: קבוצת נוסחאות Γ היא **ספיקה** אם קיימים מודל $\mathcal{M}$ וסביבה ℓ כך ש $\mathcal{M} \models_{\ell} \psi$ לכל $\psi \in \Gamma$.

הגדרה:

קבוצת פסוקים Γ היא **ספיקה** אם קיים מודל $\mathcal{M}$ כך ש $\mathcal{M} \models \psi$ לכל $\psi \in \Gamma$

משפט הקומפקטיות

משפט הקומפקטיות

תהי Γ קבוצת פסוקים בתחשיב היחסים.

Γ ספיקה אם ורק אם כל תת-קבוצה סופית של Γ היא ספיקה.

הוכחת משפט הקומפקטיות

- נניח בשלילה ש Γ לא ספיקה, אבל כל תת-קבוצה סופית שלה ספיקה.
- מכיוון ש Γ לא ספיקה מתקיים $\Gamma \models \perp$ (אין ל Γ מודל ולכן $\Gamma \models \perp$ מתקיים באופן ריק).
- לפי משפט השלמות מתקיים $\Gamma \vdash \perp$
- מכיוון שהוכחה היא סופית, רק תת-קבוצה סופית מתוך Γ משתתפת בהוכחה של $\Gamma \vdash \perp$. נקרא לתת-קבוצה זו Δ
- מתקיים $\Delta \vdash \perp$ ולפי משפט הנאותות $\Delta \models \perp$. לכן Δ לא ספיקה.
- סתירה לכך שכל תת-הקבוצות הסופיות של Γ הן ספיקות.