כללי הסקה של $\vee$

הוכן ע״י דני קוטלר, המכללה האקדמית תל-חי
מבוסס על הספר M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, 2nd Ed.

כללי הוספת ∨ (∨ introduction)

לכל טענה ψ

$$\frac{\phi}{\phi \vee \psi} \; \vee \mathrm{i}_1$$

לכל טענה ψ

$$\frac{\phi}{\psi \vee \phi} \; \vee \mathrm{i}_2$$

כלל הסרת ∨ (∨ elimination)

$$\frac{\phi\vee\psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee e$$

<u>הסבר</u>:

אם נתון $\phi\vee\psi$ אנחנו לא יודעים מי מתוך ϕ ו ψ באמת מתקיים ולא ניתן להסיק את ϕ וגם לא את ψ. לכן, אם רוצים להסיק את χ על סמך $\phi\vee\psi$ אז צריך לתת שתי הוכחות נפרדות: $\phi\vdash\chi$ ו $\psi\vdash\chi$

דוגמה

$$q \to r \vdash p \vee q \to p \vee r$$

1	$q \to r$	נתון
2	$p \vee q$	הנחה
3	p	הנחה
4	$p \vee r$	$\vee i_1$ 3
5	q	הנחה
6	r	MP 1,5
7	$p \vee r$	$\vee i_2$ 6
8	$p \vee r$	$\vee e$ 2, 3-4, 5-7
9	$(p \vee q) \to (p \vee r)$	$\to i$ 2-8

דוגמה

$$(p \lor q) \lor r \vdash p \lor (q \lor r)$$

1	$(p \lor q) \lor r$	נתון
2	$p \lor q$	הנחה
3	p	הנחה
4	$p \lor (q \lor r)$	$\lor i_1$ 3
5	q	הנחה
6	$q \lor r$	$\lor i_1$ 5
7	$p \lor (q \lor r)$	$\lor i_2$ 6
8	$p \lor (q \lor r)$	$\lor e$ 2, 3-4, 5-7
9	r	הנחה
10	$q \lor r$	$\lor i_2$ 9
11	$p \lor (q \lor r)$	$\lor i_2$ 10
12	$p \lor (q \lor r)$	$\lor e$ 1, 2-8, 9-11

דוגמה

$$p \wedge (q \vee r) \vdash (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$$

1	$p \wedge (q \vee r)$	נתון
2	p	$\wedge e_1$ 1
3	$q \vee r$	$\wedge e_2$ 1
4	q	הנחה
5	$p \wedge q$	$\wedge i$ 2,4
6	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_1$ 5
7	r	הנחה
8	$p \wedge r$	$\wedge i$ 2,7
9	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee i_2$ 8
10	$(p \wedge q) \vee (p \wedge r)$	$\vee e$ 3, 4-6, 7-9

<u>תרגיל:</u> בנו הוכחה עבור $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \vdash p \wedge (q \vee r)$

ψ

טרנזיטיביות של הוכחות

<u>טענה</u>: אם $\phi \vdash \psi$ וגם $\psi \vdash \chi$ אז $\phi \vdash \chi$

<u>הוכחה א'</u>: "נדביק" את שתי ההוכחות ביחד:

1	ϕ	נתון
$\vdots$	$\vdots$	
m	ψ	some argument
$\vdots$	$\vdots$	
n	χ	some argument

הוכחה עבור $\phi \vdash \psi$

הוכחה עבור $\psi \vdash \chi$

טרנזיטיביות של הוכחות

<u>הוכחה ב'</u>: בעזרת משפט הדדוקציה:

$$\phi \vdash \psi \Rightarrow \vdash \phi \to \psi$$

$$\psi \vdash \chi \Rightarrow \vdash \psi \to \chi$$

כבר הוכחנו: $\phi \to \psi, \psi \to \chi \vdash \phi \to \chi$

משפט הדדוקציה:

$$\vdash \phi \to \chi \Rightarrow \phi \vdash \chi$$

כללי שלילה

הגדרה:

ביטוי מהצורה $\phi \wedge \neg\phi$ או מהצורה $\neg\phi \wedge \phi$ נקרא סתירה

נוכיח בהמשך שכל הסתירות שקולות לפי הוכחה. למשל,

$$\neg p \wedge p \dashv\vdash (p \to q) \wedge \neg(p \to q)$$

לכן נסמן את כל הסתירות באותו סימן.

סימון לסתירה: $\perp$

כללי שלילה

- כלל הסרת סתירה

$$\frac{\perp}{\phi}\ \perp\mathrm{e}$$

לכל טענה ϕ

- כלל הסרת שלילה

$$\frac{\psi,\ \neg\psi}{\perp}\ \neg\mathrm{e}$$

לכל טענה ψ

הכלל הסרת סתירה ניתן להוכחה על סמך כללים קודמים

נוכיח $\neg\psi,\psi \vdash \phi$

1	ψ	נתון
2	$\neg\psi$	נתון
3	$\psi\rightarrow(\neg\phi\rightarrow\psi)$	(H1)
4	$\neg\phi\rightarrow\psi$	MP 1,3
5	$\neg\neg\phi$	MT 2,4
6	ϕ	$\neg\neg$e 5

שקילות כל הסתירות

<u>מסקנה</u>: כל שתי סתירות הן שקולות לפי הוכחה.

<u>הוכחה</u>: נוכיח $\neg\chi \wedge \chi \vdash \neg\psi \wedge \psi$

1	$\neg\psi \wedge \psi$	נתון
2	ψ	$\wedge e_2$ 1
3	$\neg\psi$	$\wedge e_1$ 1
4	$\perp$	$\neg e$ 2,3
5	$\neg\chi \wedge \chi$	$\perp e$ 4

דוגמה

$$\neg p \vee q \vdash p \to q$$

1	$\neg p \vee q$	נתון
2	$\neg p$	הנחה
3	p	הנחה
4	$\perp$	$\neg$e 2,3
5	q	$\perp$e 4
6	$p \to q$	$\to$i 3-5
7	q	הנחה
8	p	הנחה
9	q	copy 7
10	$p \to q$	$\to$i $8-9$
11	$p \to q$	$\vee$e 1, 2-6, 7-10

תרגיל: בנו הוכחה עבור $\neg p \vdash p \to q$

כלל הוספת שלילה

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \bot\end{array}}}{\neg\phi}\ \neg\mathrm{i}$$

<u>הסבר</u>: אם הנחה מסויימת מובילה לסתירה, אז היא לא נכונה (כלומר, השלילה שלה נכונה).

דוגמה

$$p \to q, p \to \neg q \vdash \neg p$$

1	$p \to q$	נתון
2	$p \to \neg q$	נתון
3	$\boxed{p}$	הנחה
4	q	MP 1,3
5	$\neg q$	MP 2,3
6	$\bot$	$\neg$e 4,5
7	$\neg p$	$\neg$i 3-6

דוגמה

$$p \to \neg p \vdash \neg p$$

1	$p \to \neg p$	נתון
2	p	הנחה
3	$\neg p$	MP 1,2
4	$\bot$	$\neg$e 2,3
5	$\neg p$	$\neg$i 2-4

תרגילים

(לפתור באמצעות $\neg i$)

1) $p \to (q \to r), p, \neg r \vdash \neg q$

2) $p \wedge q \to r, p, \neg r \vdash \neg q$

דוגמה

$$\neg p \vee \neg q \vdash \neg(p \wedge q)$$

1	$\neg p \vee \neg q$	נתון
2	$\neg p$	הנחה
3	$p \wedge q$	הנחה
4	p	$\wedge e_1\ 3$
5	$\perp$	$\neg$e 2,4
6	$\neg(p \wedge q)$	$\neg$i 3-5
7	$\neg q$	הנחה
8	$p \wedge q$	הנחה
9	q	$\wedge e_2\ 8$
10	$\perp$	$\neg$e 7,9
11	$\neg(p \wedge q)$	$\neg i\ 8-10$
12	$\neg(p \wedge q)$	$\vee$e 1, 2-6, 7-11

אי-תלות בין כללי ההסקה

כפי שראינו, חלק מהכללים ניתנים להסקה מכללים אחרים. מכאן שלא כל הכללים הם בלתי תלויים זה בזה.

מתמטיקאים, בדרך כלל, שואפים להגדיר מערכת של כללים שהם בלתי תלויים זה בזה.

לשם הנוחות, אנחנו לא נשאף להתבסס על מערכת כללים שאינם תלויים זה בזה.

הכלל reductio ad absurdum

- בעברית: רדוקציה למצב אבסורדי
- שם אחר: הוכחה בדרך השלילה, באנגלית:
  Proof By Contradiction (PBC)

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\neg\phi \\ \vdots \\ \bot\end{array}}}{\phi}\ \mathrm{PBC}$$

- <u>הסבר</u>: אם הנחת השלילה של טענה מובילה לסתירה, אז הטענה נכונה.
- <u>תרגיל</u>: להסיק את הכלל PBC מכללים קודמים

דוגמה

$$p \to q, \neg p \to q \vdash q$$

1	$p \to q$	נתון
2	$\neg p \to q$	נתון
3	$\neg q$	הנחה
4	$\neg\neg p$	MT 2,3
5	p	$\neg\neg$e 4
6	$\neg p$	MT 1,3
7	$\bot$	$\neg$e 5,6
8	q	PBC 3 – 7

הכלל tertium non datur

- בעברית: כלל השלישי הנמנע (אין אפשרות שלישית)
- באנגלית: Law of Excluded Middle (LEM)

$$\vdash \phi \vee \neg \phi \quad \text{LEM} \qquad \text{או} \qquad \frac{}{\phi \vee \neg \phi}\ \text{LEM}$$

- <u>הסבר</u>: או שטענה נתונה היא נכונה או שהיא לא נכונה. אין אפשרות שלישית.
- <u>הערה</u>: אנו משתמשים בכלל זה בכל פעם שאנחנו כותבים הצהרת if-else

הוכחת כלל LEM בעזרת PBC

$$\vdash \phi \vee \neg\phi$$

1	$\neg(\phi \vee \neg\phi)$	הנחה
2	ϕ	הנחה
3	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_1$ 2
4	$\perp$	$\neg e$ 1,3
5	$\neg\phi$	$\neg i$ 2-4
6	$\phi \vee \neg\phi$	$\vee i_2$ 5
7	$\perp$	$\neg e$ 1,6
8	$\phi \vee \neg\phi$	PBC 1-7

דוגמה

$$p \rightarrow q \vdash \neg p \vee q$$

1	$p \rightarrow q$	נתון
2	$p \vee \neg p$	LEM
3	p	הנחה
4	q	MP 1,3
5	$\neg p \vee q$	$\vee i_2$ 4
6	$\neg p$	הנחה
7	$\neg p \vee q$	$\vee i_1$ 6
8	$\neg p \vee q$	$\vee e$ 1, 3–5, 6–7

נוסח אחר לכלל LEM

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}\ \boxed{\begin{array}{c}\neg\phi\\ \vdots\\ \psi\end{array}}}{\psi}\ \mathrm{LEM}$$

זהו למעשה שילוב של שני הכללים:

$$\frac{\phi\vee\psi \qquad \boxed{\begin{array}{c}\phi\\ \vdots\\ \chi\end{array}} \qquad \boxed{\begin{array}{c}\psi\\ \vdots\\ \chi\end{array}}}{\chi}\ \vee\mathrm{e} \qquad\qquad \frac{}{\phi\vee\neg\phi}\ \mathrm{LEM}$$

האינטואיסטים

- אינטואיסטים (מלשון "אינטואיציה") הם מתמטיקאים שלא מקבלים את עיקרון ההוכחה בדרך השלילה. מבחינתם, אם רוצים להוכיח את ϕ לא מספיק להראות ש $\neg\phi$ מוביל לסתירה, אלא צריך להוכיח את ϕ ישירות.
- האינטואיסטים גם לא מקבלים גם את LEM. מבחינתם צריך להוכיח את ϕ או להוכיח את $\neg\phi$.
- כנ"ל לגבי $\neg\neg e$.

דוגמה לשימוש ב LEM בהוכחה מתמטית

מספר ממשי נקרא אי-רציונלי אם לא ניתן לכתוב אותו בצורה $\frac{m}{n}$ כאשר m ו n מספרים שלמים.

דוגמאות: $\sqrt{2}, \sqrt{3}, \pi, e$

<u>טענה</u>: קיימים שני מספרים אי-רציונליים a ו b כך ש a^b הוא מספר רציונלי.

<u>הוכחה</u>: לפי LEM, או ש $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ הוא מספר רציונלי, או שהוא אי-רציונלי.

אם $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ רציונלי ניקח $a=\sqrt{2}, b=\sqrt{2}$ וסיימנו.

אם $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ אי-רציונלי ניקח $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}}, b=\sqrt{2}$, ואז

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{2} = 2$$

שקילויות ידועות

<u>תרגיל</u>: להוכיח את השקילויות הבאות (את חלקן כבר הוכחנו)

$$\neg(p \wedge q) \dashv\vdash \neg p \vee \neg q$$

$$\neg(p \vee q) \dashv\vdash \neg p \wedge \neg q$$

כללי דה-מורגן

$$(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \dashv\vdash p \wedge (q \vee r)$$

$$(p \vee q) \wedge (p \vee r) \dashv\vdash p \vee (q \wedge r)$$

חוקי פילוג

שקילויות ידועות (המשך)

<u>תרגיל</u>: להוכיח את השקילויות הבאות (את חלקן כבר הוכחנו)

$$p \to q \dashv\vdash \neg p \lor q$$

$$p \to q \dashv\vdash \neg(p \land \neg q)$$

$$p \lor q \dashv\vdash \neg p \to q$$

$$p \land q \dashv\vdash \neg(p \to \neg q)$$

כללי המרה
בין קשרים