כללי הסקה של ע

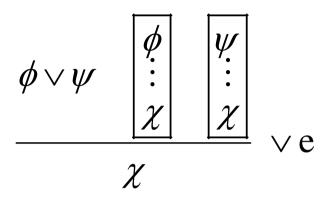
הוכן עייי דני קוטלר, המכללה האקדמית תל-חי M. Huth, M. Ryan, Logic in Computer Science, $2^{\rm nd}$ Ed. מבוסס על הספר

(<introduction) </i>

$$\psi$$
 לכל טענה ψ לכל ψ ψ לכל טענה ψ

$$\psi$$
 לכל טענה ψ לכל $\psi \lor \dot{\phi}$ לכל

(velimination) עלל הסרת י



<u>הסבר</u>:

אם נתון $\phi \lor \psi$ אנחנו לא יודעים מי מתוך ϕ ו ψ באמת מתקיים ולא ניתן להסיק את ϕ וגם לא את ψ . לכן, אם רוצים להסיק את χ על סמך $\phi \lor \psi$ אז צריך לתת שתי הוכחות נפרדות: $\phi \vdash \chi$ ו $\phi \vdash \chi$

$$q \rightarrow r \vdash p \lor q \rightarrow p \lor r$$

1
$$q \rightarrow r$$
 pina
2 $p \lor q$ anna
3 p anna
4 $p \lor r$ $\lor i_1 3$
5 q anna
6 r MP 1,5
7 $p \lor r$ $\lor i_2 6$
8 $p \lor r$ $\lor e 2, 3-4, 5-7$
9 $(p \lor q) \rightarrow (p \lor r)$ $\rightarrow i 2-8$

$(p \lor q) \lor r \vdash p \lor (q \lor r)$

1	$(p \lor q) \lor r$	נתון
2	$p \lor q$	הנחה
3	p	הנחה
4	$p \lor (q \lor r)$	∨i ₁ 3
5	q	הנחה
6	$q \vee r$	∨i ₁ 5
7	$p \lor (q \lor r)$	√i ₂ 6
8	$p \lor (q \lor r)$	∨e 2, 3-4, 5-7
9	r	הנחה
10	$q \vee r$	√i ₂ 9
11	$p \lor (q \lor r)$	∨i ₂ 10
12	$p \lor (q \lor r)$	∨e 1, 2-8, 9-11

$$p \land (q \lor r) \vdash (p \land q) \lor (p \land r)$$

1
$$p \wedge (q \vee r)$$
 $p \wedge (q \vee r)$ $p \wedge e_1 1$
2 $p \wedge e_2 1$
3 $q \vee r \wedge e_2 1$
4 $q \wedge e_2 1$
5 $p \wedge q \wedge e_2 1$
6 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \wedge e_1 5$
7 $q \wedge e_2 1$
8 $p \wedge r \wedge e_2 1$
9 $(p \wedge q) \vee (p \wedge r) \wedge e_2 1$

$$(p \land q) \lor (p \land r) \vdash p \land (q \lor r)$$
 בנו הוכחה עבור

 $(p \land q) \lor (p \land r)$

∨e 3, 4-6, 7-9

טרנזיטיביות של הוכחות

$$\phi dash \chi$$
 אז $\psi dash \chi$ טענה: אם $\phi dash \psi$ וגם $\phi dash \psi$

<u>הוכחה א'</u>: "נדביק" את שתי ההוכחות ביחד:

נתון
$$\phi$$
 נתון $\phi \vdash \psi$ בור $\phi \vdash \psi$ הוכחה עבור ψ some argument $\psi \vdash \chi$ הוכחה עבור $\psi \vdash \chi$ some argument

טרנזיטיביות של הוכחות

 ψ

<u>הוכחה ב'</u>: בעזרת משפט הדדוקציה:

$$\phi \vdash \psi \Rightarrow \vdash \phi \rightarrow \psi$$

$$\psi \vdash \chi \Rightarrow \vdash \psi \rightarrow \chi$$

$$\phi \rightarrow \psi, \psi \rightarrow \chi \vdash \phi \rightarrow \chi$$
 :כבר הוכחנו:

משפט הדדוקציה:

$$\vdash \phi \rightarrow \chi \Rightarrow \phi \vdash \chi$$

כללי שלילה

הגדרה:

ביטוי מהצורה $\phi \wedge \neg \phi$ או מהצורה $\phi \wedge \neg \phi$ נקרא סתירה

נוכיח בהמשך שכל הסתירות שקולות לפי הוכחה. למשל,

$$\neg p \land p \dashv \vdash (p \rightarrow q) \land \neg (p \rightarrow q)$$

לכן נסמן את כל הסתירות באותו סימן.

סימון לסתירה: ⊥

כללי שלילה

• כלל הסרת סתירה

$$\phi$$
 לכל טענה $\frac{\perp}{\phi} \perp \mathrm{e}$

• כלל הסרת שלילה

$$\psi$$
 לכל טענה $\frac{\psi, \neg \psi}{\perp} \neg e$

הכלל הסרת סתירה ניתן להוכחה על סמך כללים קודמים

 $eg \psi, \psi \vdash \phi$ נוכיח

שקילות כל הסתירות

מסקנה: כל שתי סתירות הן שקולות לפי הוכחה.

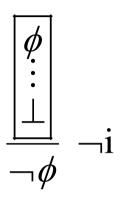
$$\neg \psi \land \psi \vdash \neg \chi \land \chi$$
 הוכחה: נוכיח

1	$\neg \psi \land \psi$	נתון
2	ψ	$\wedge e_2 1$
3	$\neg \psi$	$\wedge e_1 1$
4		⊸e 2,3
5	$\neg \chi \wedge \chi$	⊥e 4

$\neg p \lor q \vdash p \rightarrow q$

1	$\neg p \lor q$	נתון
2	$\neg p$	הנחה
3	p	הנחה
4		¬e 2,3
5	q	⊥e 4
6	$p \rightarrow q$	→i 3-5
7	q	הנחה
8	p	הנחה
9	q	сору 7
10	$p \rightarrow q$	→i 8 – 9
11	$p \rightarrow q$	∨e 1, 2-6, 7-10
		$\neg p \vdash p$

כלל הוספת שלילה



<u>הסבר</u>: אם הנחה מסויימת מובילה לסתירה, אז היא לא נכונה (כלומר, השלילה שלה נכונה).

$$p \rightarrow q, p \rightarrow \neg q \vdash \neg p$$

1	$p \rightarrow q$	נתון
2	$p \rightarrow \neg q$	נתון
3	p	הנחה
4	q	MP 1,3
5	$\neg q$	MP 2,3
6		⊸e 4,5
7	$\neg p$	⊸i 3-6

$$p \to \neg p \vdash \neg p$$

1	$p \rightarrow \neg p$	נתון
2	p	הנחה
3	$\neg p$	MP 1,2
4		¬e 2,3
5	$\neg p$	⊸i 2-4

תרגילים

 $(\neg i$ לפתור באמצעות)

$$p \rightarrow (q \rightarrow r), p, \neg r \vdash \neg q$$
 (1

$$p \land q \rightarrow r, p, \neg r \vdash \neg q$$
 (2

)) 	
1	$\neg p \lor \neg q$	נתון ¬ַן	$p \vee \neg q \vdash \neg (p \wedge q)$
2	p	הנחה	
3	$p \wedge q$	הנחה	
4	p	$\wedge e_1 3$	
5	<u></u>	⊸e 2,4	
6	$\neg (p \land q)$	−i 3-5	
7	$\neg q$	הנחה	
8	$p \wedge q$	הנחה	
9	q	$\wedge e_2 8$	
10	上	⊸e 7,9	
11	$\neg (p \land q)$	⊸i 8 − 10	
12	$\neg (p \land q)$	∨e 1, 2-6, 7-11	

אי-תלות בין כללי ההסקה

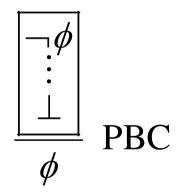
כפי שראינו, חלק מהכללים ניתנים להסקה מכללים אחרים. מכאן שלא כל הכללים הם בלתי תלויים זה בזה.

מתמטיקאים, בדרך כלל, שואפים להגדיר מערכת של כללים שהם בלתי תלויים זה בזה.

לשם הנוחות, אנחנו לא נשאף להתבסס על מערכת כללים שאינם תלויים זה בזה.

reductio ad absurdum הכלל

- בעברית: רדוקציה למצב אבסורדי
- שם אחר: הוכחה בדרך השלילה, באנגלית:
 Proof By Contradiction (PBC)



- <u>הסבר</u>: אם הנחת השלילה של טענה מובילה לסתירה, אז הטענה נכונה.
 - <u>תרגיל</u>: להסיק את הכלל PBC מכללים קודמים

$$p \rightarrow q, \neg p \rightarrow q \vdash q$$

1 $p \rightarrow q$ $p \rightarrow$

tertium non datur הכלל

- בעברית: כלל השלישי הנמנע (אין אפשרות שלישית)
 - Law of Excluded Middle (LEM) באנגלית: •

$$dash \phi ee \neg \phi$$
 LEM או $\dfrac{}{\phi ee \neg \phi}$ LEM

- <u>הסבר</u>: או שטענה נתונה היא נכונה או שהיא לא נכונה. אין אפשרות שלישית.
 - <u>הערה</u>: אנו משתמשים בכלל זה בכל פעם שאנחנו כותבים הצהרת if-else

PBC בעזרת כלל LEM הוכחת כלל

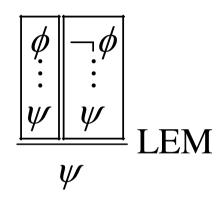
$$\vdash \phi \lor \neg \phi$$

1	$\neg(\phi \lor \neg \phi)$	הנחה
2	ϕ	הנחה
3	$ \phi \lor \neg \phi $	∨i₁ 2
4		⊸e 1,3
5	$\neg \phi$	⊸i 2-4
6	$\phi \lor \neg \phi$	√i ₂ 5
7		⊸e 1,6
8	$\phi\!\vee\!\neg\phi$	PBC 1-7

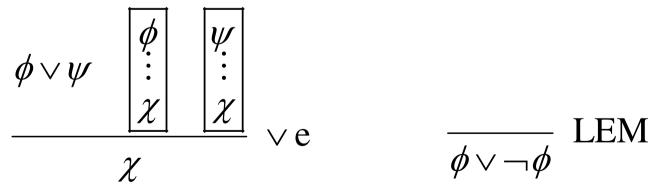
$$p \rightarrow q \vdash \neg p \lor q$$

1	$p \rightarrow q$	נתון
2	$p \vee \neg p$	LEM
3	p	הנחה
4	q	MP 1,3
5	$\neg p \lor q$	√i ₂ 4
6	$\neg p$	הנחה
7	$\neg p \lor q$	∨i ₁ 6
8	$\neg p \lor q$	∨e 1, 3–5, 6–7

נוסח אחר לכלל LEM



זהו למעשה שילוב של שני הכללים:



האינטואיסטים

- אינטואיסטים (מלשון "אינטואיציה") הם מתמטיקאים שלא מקבלים את עיקרון ההוכחה בדרך השלילה.
 מבחינתם, אם רוצים להוכיח את φ לא מספיק להראות ש φ מוביל לסתירה, אלא צריך להוכיח את φ ישירות.
- י האינטואיסטים גם לא מקבלים גם את LEM. מבחינתם פריך להוכיח את ϕ או להוכיח את ϕ .
 - . ¬¬e כנ"ל לגבי •

דוגמה לשימוש ב LEM בהוכחה מתמטית

מספר ממשי נקרא אי-רציונלי אם לא ניתן לכתוב אותו

בצורה $\frac{m}{n}$ כאשר m ן מספרים שלמים.

 $\sqrt{2},\sqrt{3},\pi,e$ דוגמאות:

 a^b טענה: קיימים שני מספרים אי-רציונליים b ו a כך ש

הוא מספר רציונלי, או LEM, או ש $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ הוא מספר רציונלי, או שהוא אי-רציונלי.

אם $a=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$ וסיימנו. $a=\sqrt{2},b=\sqrt{2}$

אם $a=\sqrt{2}^{\sqrt{2}},b=\sqrt{2}$ אי-רציונלי ניקח $\sqrt{2}$ אי-רציונלי מיקח

$$a^b = \left(\sqrt{2}^{\sqrt{2}}\right)^{\sqrt{2}} = \sqrt{2}^{\sqrt{2} \cdot \sqrt{2}} = \sqrt{2}^2 = 2$$

שקילויות ידועות

<u>תרגיל</u>: להוכיח את השקילויות הבאות (את חלקן כבר הוכחנו)

$$abla (p \wedge q) \dashv \vdash \neg p \vee \neg q$$
 כללי דה-מורגן $abla (p \vee q) \dashv \vdash \neg p \wedge \neg q$ $abla (p \wedge q) \vee (p \wedge r) \dashv \vdash p \wedge (q \vee r)$ חוקי פילוג $abla (p \vee q) \wedge (p \vee r) \dashv \vdash p \vee (q \wedge r)$

שקילויות ידועות (המשך)

<u>תרגיל</u>: להוכיח את השקילויות הבאות (את חלקן כבר הוכחנו)

$$p o q op q op q$$
 $p o q op q op q$
 $p o q op q op q$
 $p o q op q op q$
 $p op q op q op q$
 $p op q op q op q$
 $p op q op q op q$