ערכי אמת בתחשיב היחסים

הצבות בנוסחאות

דוגמה: יחסי משפחה

נחזור לדוגמה האחרונה

$$M = (\mathcal{P}, \mathcal{F}) \quad \mathcal{P} = \left\{D^{(2)}, M^{(2)}, S^{(2)}\right\} \quad \mathcal{F} = \left\{c^{(0)}, m^{(1)}\right\}$$

$D(x,y)$ x בת של y

$M(x,y)$ x אמא של y

$S(x,y)$ x אחות של y

c קבוע המייצג את הדובר

$m(x)$ אמא של x

$$\phi := \forall x(D(x,m(c)) \wedge \neg(x=c) \rightarrow S(x,c))$$

ב"עולם" המתואר כאן הנוסחה ϕ היא אמת

תרגיל: לתת משמעות ליחסים והפונקציות ב M כך ש ϕ לא תהיה אמת.

הסימון =:

- כפי שראינו, הסימן = הוא חלק מהא"ב של תחשיב היחסים. לכן, הוא עשוי להופיע בתוך נוסחה.
- אם נרצה לכתוב ש ϕ היא הנוסחה
  $$\forall x(D(x,m(c)) \wedge \neg(x=c) \rightarrow S(x,c))$$
  אז הכתיבה
  $$\phi = \forall x(D(x,m(c)) \wedge \neg(x=c) \rightarrow S(x,c))$$
  עלולה להיות מבלבלת, כי לשני הַ = יש משמעויות שונות
- לכן, נשתמש בסימן =: במקום = מחוץ לנוסחאות.
- הסימן =: משמש במתמטיקה במובן של "מוגדר כְּ".
  למשל, ϕ מוגדר כַּנוסחה $\forall x(D(x,m(c)) \wedge \neg(x=c) \rightarrow S(x,c))$

ערך האמת של נוסחה

- ערך האמת של נוסחה עשוי להיות תלוי במשמעות שנייחס ליחסים והפונקציות במילון.

דוגמה: $\phi := \forall x(D(x,m(c)) \wedge \neg(x=c) \to S(x,c))$

לפעמים הוא גם תלוי בערך של המשתנים:

דוגמה: $\phi := D(x,y) \to S(x,y)$

- לפעמים ערך האמת הוא תכונה של הנוסחה ולא תלוי במשמעות שניתן ליחסים והפונקציות במילון

דוגמאות: במילון $M = (\mathcal{P},\mathcal{F})$ שבו $P^{(1)}, Q^{(1)} \in \mathcal{P}$ ו $c^{(0)} \in \mathcal{F}$

$$P(x) \to (Q(x) \to P(x))$$
$$\forall x P(x) \to \exists x P(x)$$
$$P(c) \wedge \forall y(P(y) \to Q(y)) \to Q(c)$$

ערך האמת תלוי רק בצורה של הנוסחה

קביעת ערך האמת של נוסחה

- כאשר ערך האמת של נוסחה אינו תלוי במשמעות שמייחסים לאברים במילון, אז קל יחסית לקבוע מהו (נראה בהמשך)
- כאשר ערך האמת של נוסחה תלוי במשמעות שמייחסים לאברים במילון, אז קביעת ערך האמת עשויה להיות מאוד קשה

דוגמה מתורת המספרים

נתון המילון $M=(\mathcal{P},\mathcal{F})$ שבו $P^{(2)}\in\mathcal{P}$ ו $f^{(2)},g^{(2)}\in\mathcal{F}$

נניח שה"עולם" שלנו הוא המספרים השלמים החיוביים.

$f(x,y)$ הסכום של x ו y $\quad$ $P(x,y)$ x קטן מ y

$g(x,y)$ x בחזקת y $\quad$ c הקבוע 3

נתונה הנוסחה:

$$\forall x\forall y\forall z\forall t\Big(\big(f(g(x,t),g(y,t))=g(z,t)\big)\rightarrow P(t,c)\Big)$$

מהו ערך האמת שלה בעולם שלנו?

הנוסחה מבטאת את ההשערה של פֶּרמָה מ 1637, שכדי להוכיח אותה נדרשו 358 שנים (ההוכחה ע״י אנדרו וַוילְס ב 1995).

מופעים של משתנים

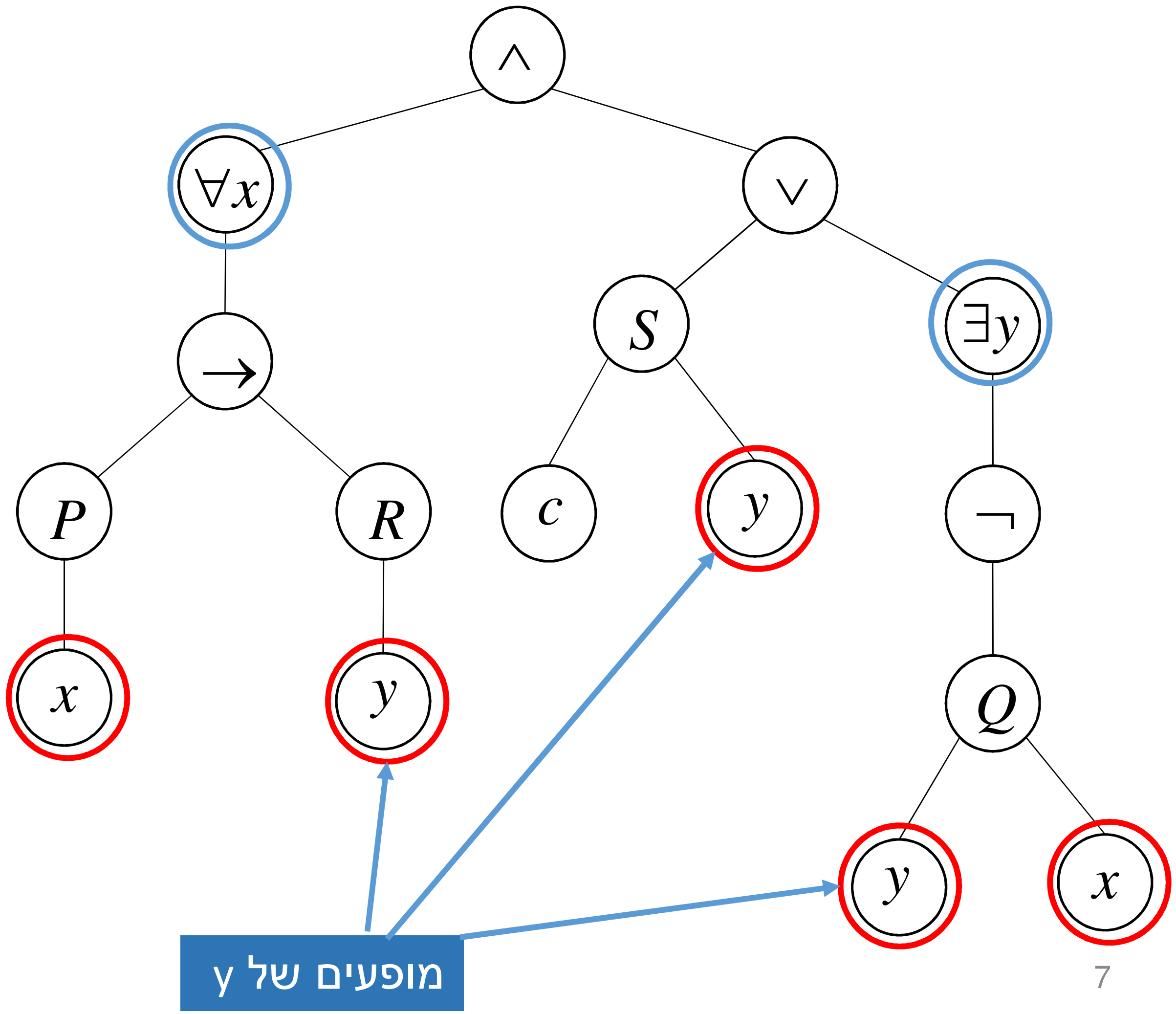
$$\forall x\Big(\big(P(x)\rightarrow R(y)\big)\Big)\wedge\big(S(c,y)\vee\exists y\neg Q(y,x)\big)$$

בעץ מבנה של נוסחה יש משתנים בשני מקומות:

1) צמוד לכמת
2) בעלים של העץ

<u>הגדרה:</u>

מופע של משתנה x בנוסחה ϕ היא כל הופעה של x בעלֶה של עץ המבנה של ϕ



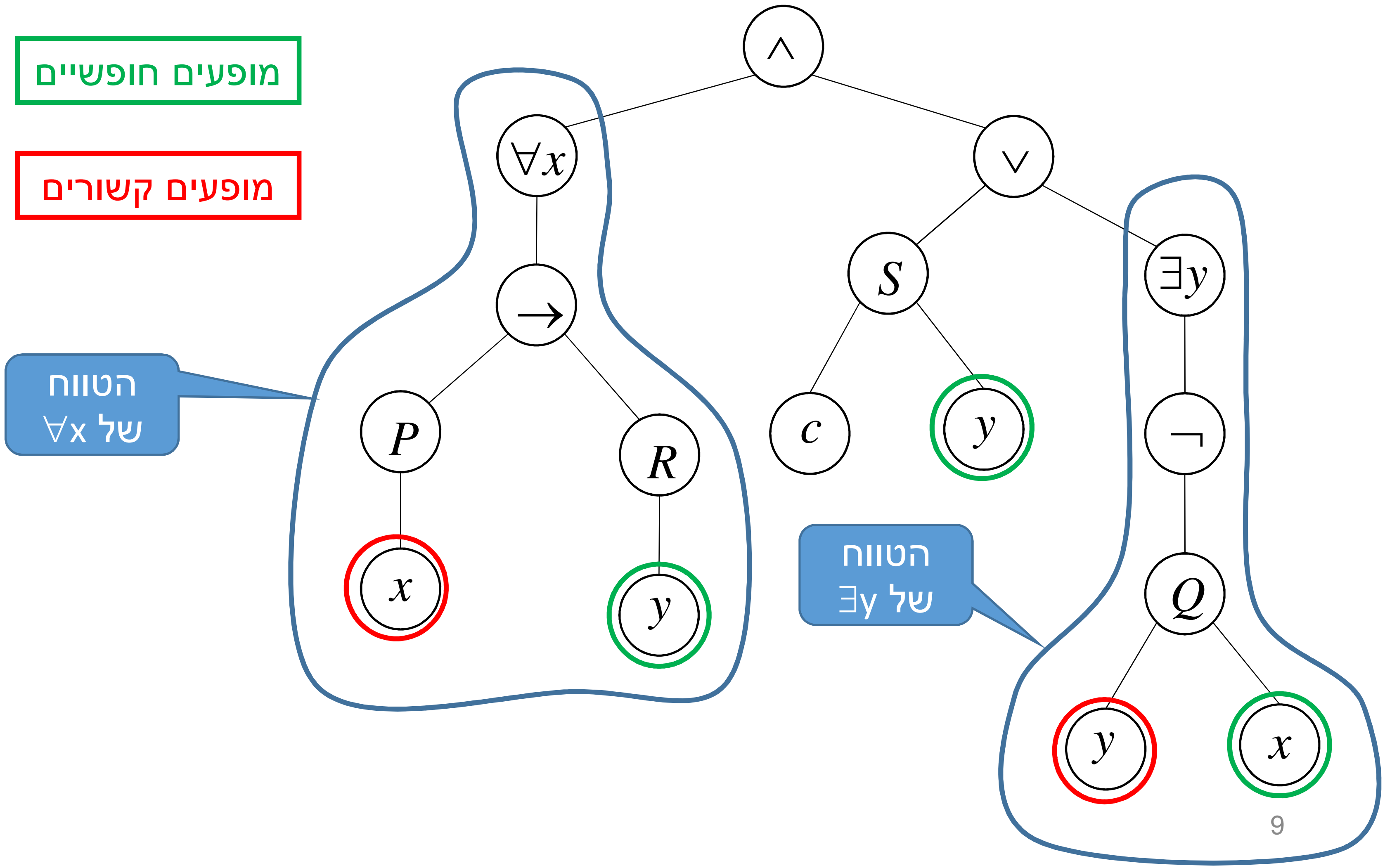
משתנים חופשיים ומשתנים קשורים, טווחים של כמתים

הגדרה:

- מופע של משתנה x בנוסחה ϕ נקרא חופשי אם במסלול מהעלה שלו עד למעלה לא מופיע $\forall x$ או $\exists x$
- מופע שאינו חופשי נקרא קשור
- הטווח של כמת $\forall x$ או $\exists x$ הוא כל תת-העץ שמתחתיו ללא תת-העצים של כמתים $\forall x$ או $\exists x$ חדשים.

מופעים וטווחים

$$\forall x\Big(\big(P(x)\rightarrow R(y)\big)\Big)\wedge\big(S(c,y)\vee\exists y\neg Q(y,x)\big)$$



תרגילים

עבור הנוסחאות הבאות בנו את העץ שלהן וסמנו את הטווחים של כל הכמתים. לכל מופע של משתנה קבעו אם הוא חופשי או קשור.

$$\forall x(P(x) \rightarrow \exists x Q(x))$$

$$\big(\forall x(P(x) \land Q(x))\big) \rightarrow \big(\neg P(x) \lor Q(y)\big)$$

הצבות

- משתנים הם מקום בו אנו יכולים להציב ערכים:
  - ערכים מתוך התחום שבו מדובר
  - עצמים אחרים.
- כלומר, בעלה שיש בו משתנה אנו יכולים להציב את עץ המבנה של עצם.
- הצבות נעשות רק במופעים חופשיים
- כדי שנוסחה תישאר חוקית, במשתנה חופשי ניתן להציב רק עצמים.

הצבה של עצם במשתנה חופשי

הגדרה:

בהינתן מילון M, נניח ש ϕ נוסחה, x משתנה וְ t עצם.
נגדיר את ההצבה ϕ[t/x] בתוך הנוסחה המתקבלת
מהחלפת כל מופע חופשי של x ב t

דוגמה: $M = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$ $\quad P^{(2)}, R^{(2)} \in \mathcal{P}$ $\quad f^{(2)} \in \mathcal{F}$

$$\phi := P(x, y) \rightarrow \exists x R(y, x)$$

x חופשי

x קשור

$$\phi[f(x, y)/x] := P(f(x, y), y) \rightarrow \exists x R(y, x)$$

דוגמאות נוספות

$$g^{(1)} \in \mathcal{F} \qquad P^{(1)}, Q^{(1)} \in \mathcal{P} \qquad M = \left(\mathcal{P}, \mathcal{F}\right)$$

$$\phi := \left(\forall x (P(x) \wedge Q(x))\right) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(y))$$

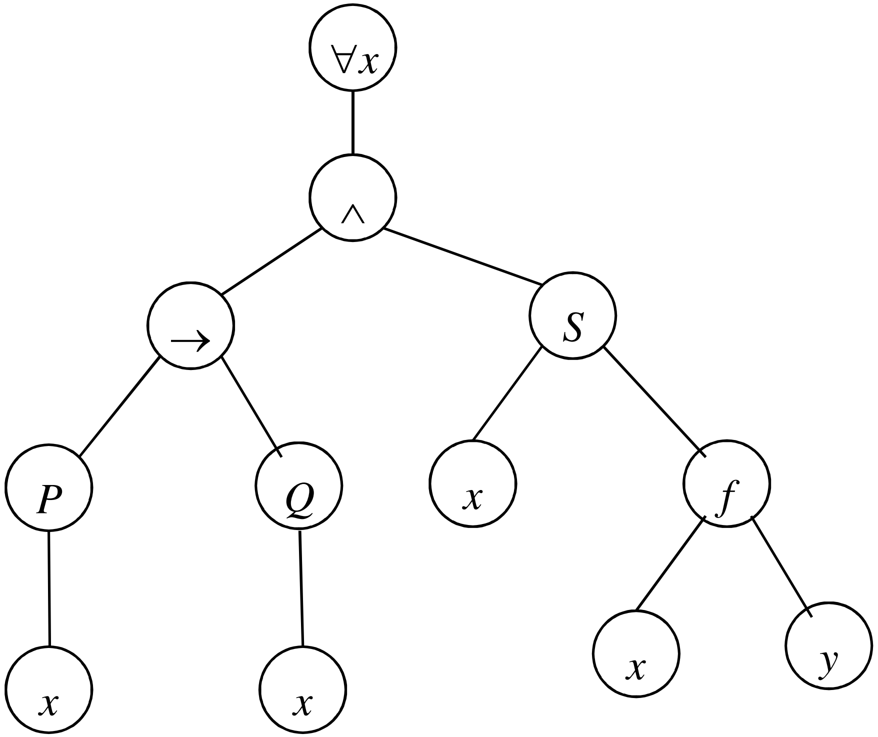
$$\phi[g(z)/x] := \left(\forall x (P(x) \wedge Q(x))\right) \rightarrow (\neg P(g(z)) \vee Q(y))$$

$$\phi[g(z)/y] := \left(\forall x (P(x) \wedge Q(x))\right) \rightarrow (\neg P(x) \vee Q(g(z)))$$

$$f^{(2)} \in \mathcal{F} \quad P^{(1)}, Q^{(1)}, S^{(2)} \in \mathcal{P} \quad M = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$$

$$\phi := \forall x((P(x) \to Q(x)) \wedge (S(x, y))$$

עץ המבנה של $\phi[f(x, y) / y]$:



האם בכל הצבה יש היגיון?

$$f^{(1)} \in \mathcal{F} \quad R^{(2)} \in \mathcal{P} \quad M = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$$

$$\phi := \exists y R(x, y)$$

$$\phi[f(y)/x] := \exists y R(f(y), y)$$

נניח שמדובר במספרים הטבעיים. המשמעות של R(x,y) היא "x קטן או שווה ל y" ו f(y)=y+1

- האם הפסוק ϕ הוא פסוק אמת (לכל x שנבחר)?
- האם הפסוק $\phi[f(y)/x]$ הוא פסוק אמת?

<u>הבעיה</u>: האובייקט שהצבנו מכיל משתנה קשור, לכן משמעות הנוסחה השתנתה כתוצאה מההצבה.

אובייקט חופשי

הגדרה:

בהינתן מילון M, נניח ש ϕ נוסחה, x משתנה וְ t עצם.
נאמר ש t חופשי עבור x ב ϕ אם אם t לא מכיל משתנים שהם קשורים במקום שבו x חופשי.

דוגמה: $M=(\mathcal{P},\mathcal{F})$ $P^{(1)},Q^{(1)},S^{(2)}\in\mathcal{P}$ $f^{(2)}\in\mathcal{F}$

$$\phi := S(x,y)\wedge\forall y(P(x)\to Q(y))$$

$f(x,x)$ חופשי עבור x ב ϕ

$f(x,y)$ לא חופשי עבור x ב ϕ

הצבה מותרת

הגדרה:

אם האובייקט t חופשי עבור x ב ϕ נאמר שההצבה $\phi[t/x]$ היא **הצבה מותרת**.

כדי שנוסחאות לא ישנו את ערך האמת שלהם כתוצאה מהצבה, נבצע רק הצבות מותרות.

דוגמה: $M=(\mathcal{P},\mathcal{F})$ $\quad P^{(1)},Q^{(1)},S^{(2)}\in\mathcal{P}$ $\quad f^{(2)}\in\mathcal{F}$

$$\phi := S(x,y)\wedge\forall y(P(x)\to Q(y))$$

$\phi[f(x,x)/x]$ היא הצבה מותרת

$\phi[f(x,y)/x]$ אינה הצבה מותרת