הוכחות בתחשיב היחסים

כללי הגזירה בתחשיב היחסים

- כללי הגזירה של תחשיב הפסוקים עדין תקפים בתחשיב היחסים.
- מכיוון שבתחשיב היחסים נוספו לנו שני הכמתים $\forall$ ו $\exists$ וסימן השוויון "=", נוסיף כללי גזירה שעוסקים בסימנים אלה.
- כמו בתחשיב הפסוקים יש שני סוגי כללים: הוספה ואלימינציה (מחיקה).
- בכל הכללים אנו מניחים קיומו של מילון $M = \left(\mathcal{P}, \mathcal{F}\right)$

כללי הוספה = (= introduction)

לכל עצם t

$$\frac{}{t = t} = \mathrm{i}$$

- המשמעות: כל עצם שווה לעצמו
- מכיוון שאין כאן הנחות, הכלל i= הוא אקסיומה.
- הכלל תופס רק עבור עצמים, לא נוסחאות
- הכלל i= לא שימושי לכשעצמו. אנו צריכים כלל שמאפשר להציב עצם אחד במקום עצם אחר ששווה לו

תזכורת: הצבה מותרת

<u>הגדרה:</u>

בהינתן מילון M, נניח ש ϕ נוסחה, x משתנה ו t עצם.
נאמר ש t חופשי עבור x ב ϕ אם אם t לא מכיל משתנים שהם קשורים במקום שבו x חופשי. במקרה כזה ההצבה ϕ[t/x] נקראת הצבה מותרת.

<u>דוגמה:</u> $M=(\mathcal{P},\mathcal{F}) \quad P^{(1)},Q^{(1)},S^{(2)}\in\mathcal{P} \quad f^{(2)}\in\mathcal{F}$

$$\phi := S(x,y)\wedge\forall y(P(x)\to Q(y))$$

$\phi[f(x,x),x]$ הצבה מותרת

$\phi[f(x,y),x]$ הצבה לא מותרת

כלל הסרת = (= elimination)

לכל שני עצמים t_1 ו t_2 ונוסחה ϕ

$$\frac{t_1 = t_2 \qquad \phi[t_1 / x]}{\phi[t_2 / x]} \; = \mathrm{e}$$

בתנאי ש t_1 וְ t_2 חופשיים עבור x ב ϕ

דוגמה

לכל שני עצמים t_1 ו t_2 מתקיים $t_1 = t_2 \vdash t_2 = t_1$

ניקח $\phi := (x = t_1)$

1	$t_1 = t_2$		נתון
2	$t_1 = t_1$	$\leftarrow \phi[t_1 / x]$	=i
3	$t_2 = t_1$		=e 1,2

דוגמה

לכל שלושה עצמים t_1 , t_2 ו t_3 מתקיים

$$t_1 = t_2, t_2 = t_3 \vdash t_1 = t_3$$

ניקח $\phi := (t_1 = x)$

1	$t_2 = t_3$	נתון
2	$t_1 = t_2 \leftarrow \phi[t_2 / x]$	נתון
3	$t_1 = t_3$	=e 1,2

הערה: קיבלנו שהסימן = הוא רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי

infix notation

- לפעמים, המשמעות של פונקציה או יחס היא אופרטור שמוכר לנו מאריתמטיקה או מתכנות ומסומן ע"י סימן הממוקם בין שני הארגומנטים.
- דוגמאות:
  - הפונקציה $f(x,y)$, בתחום המספרים השלמים, המשמעות: $x+y$
  - הפונקציה $f(x,y)$, בתחום תורת הקבוצות, המשמעות: $x \cap y$
  - היחס $R(x,y)$, בתחום המספרים השלמים, משמעות $x<y$
  - היחס $R(x,y)$, בתחום תורת הקבוצות, המשמעות: $x \subseteq y$
- במקרים כאלה נוח יהיה לרשום בנוסחה את האופרטור המוכר במקום הרישום הסתמי $f(x,y)$ או $R(x,y)$
- למשל, במקום $R(x,y) \to R(f(x,z), f(y,z))$ נרשום $\left(x<y\right) \to \left(x+z<y+z\right)$

דוגמה

נניח ש 1 ו 0 הם קבועים, + היא פונקציה בינארית ו > הוא יחס בינארי. נוכיח

$$y+1=1+y, (y+1>1)\to(y+1>0) \vdash (1+y>1)\to(1+y>0)$$

1	$(y+1)=(1+y)$	נתון
2	$(y+1>1)\to(y+1>0)$	נתון
3	$(1+y>1)\to(1+y>0)$	=e 1,2

שאלה: מיהם t_1,t_2 ו ϕ?

תשובה: $\phi := (x>1)\to(x>0)$ $\quad t_1 := y+1$ $\quad t_2 := 1+y$

כלל הסרת ∀ (∀x elimination)

לכל עצם t ונוסחה ϕ

$$\frac{\forall x \phi}{\phi[t/x]} \ \forall x \text{ e}$$

בתנאי ש t חופשי עבור x ב ϕ

<u>המשמעות:</u>
אם ϕ נכון עבור x כללי, אז הוא בטח נכון עבור ערך ספציפי t.

דוגמה

נניח ש $P^{(1)}$ ו $Q^{(1)}$ הם יחסים ן t הוא עצם במילון נתון.

נוכיח: $P(t), \forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x)) \vdash \neg Q(t)$

1	$P(t)$	נתון
2	$\forall x(P(x) \rightarrow \neg Q(x))$	נתון
3	$P(t) \rightarrow \neg Q(t)$	$\forall$x e 2
4	$\neg Q(t)$	MP 1,3

כלל הוספת ∀ (∀x introduction)

לכל עצם t ונוסחה ϕ

ההצבה מותרת
כי x_0 משתנה
חדש.

$$\frac{\boxed{\begin{array}{c} x_0 \\ \vdots \\ \phi[x_0 / x] \end{array}}}{\forall x \phi} \; \forall x \, \mathrm{i}$$

<u>הסבר:</u>

אם כאשר מתחילים עם משתנה חדש x_0 כלשהו ניתן להוכיח את הנוסחה $\phi[x_0/x]$, אז, מכיוון ש x_0 הוא "חדש", כלומר, לא מופיע בשום מקום אחר, ניתן להסיק ש ϕ נכון לכל x.

דוגמה

נניח ש $P^{(1)}$ ו $Q^{(1)}$ הם יחסים במילון נתון. נוכיח:

$$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x)), \forall x P(x) \vdash \forall x Q(x)$$

1		$\forall x(P(x) \rightarrow Q(x))$	נתון
2		$\forall x P(x)$	נתון
3	x_0	$P(x_0) \rightarrow Q(x_0)$	∀x e 1
4		$P(x_0)$	∀x e 2
5		$Q(x_0)$	MP 3,4
6		$\forall x Q(x)$	∀x i 3-5

כלל הוספת ∃ (∃x introduction)

לכל עצם t ונוסחה ϕ

$$\frac{\phi[t / x]}{\exists x\phi}\exists x\ \mathrm{i}$$

בתנאי ש t חופשי עבור x ב ϕ

<u>המשמעות:</u>

אם ϕ נכון עבור עצם t, זה אומר שקיים ערך שעבורו ϕ נכון.

דוגמה

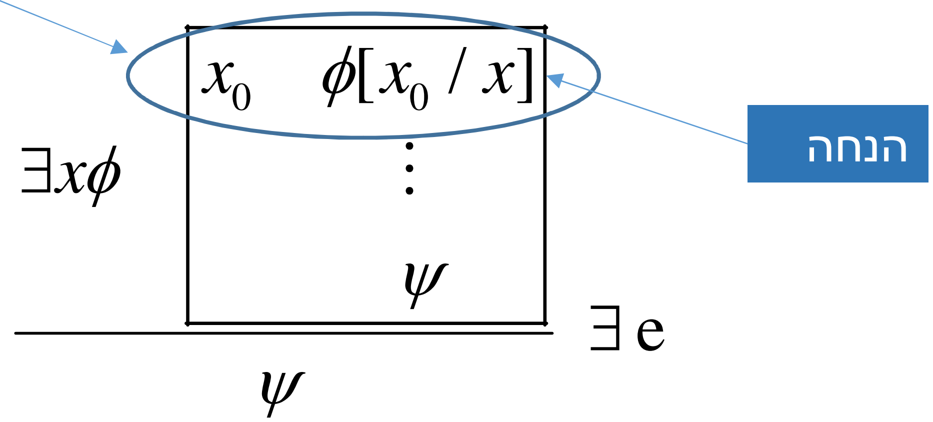
נניח ש ϕ נוסחה המוגדרת במילון מסויים, אז

$$\forall x\phi \vdash \exists x\phi$$

1	$\forall x\phi$	נתון
2	$\phi[x / x]$	$\forall$x e 1
3	$\exists x\phi$	$\exists$x i 2

כלל הסרת $\exists$ ($\exists$x elimination)

יהיו x ו x_0 משתנים, ϕ ו ψ נוסחאות, כך ש x_0 אינו מופיע ב ψ והוא חופשי עבור x ב ϕ



<u>הסבר:</u> ידוע ש $\exists x\phi$ נכון. אם לכל x_0 שעבורו $\phi[x_0/x]$ נכון ושאינו מופיע ב ψ, מקבלים את ψ, אז נובע ש ψ נכון.
(אפשר לראות זאת כהכללה של הכלל $\vee$e)

דוגמה

נניח ש $P^{(1)}$ ו $Q^{(1)}$ הם יחסים במילון נתון. נוכיח:

$$\forall x(P(x) \to Q(x)),\ \exists x P(x) \vdash \exists x Q(x)$$

1		$\forall x(P(x) \to Q(x))$	נתון
2		$\exists x P(x)$	נתון
3	x_0	$P(x_0)$	הנחה
4		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall$x e 1
5		$Q(x_0)$	MP 3,4
6		$\exists x Q(x)$	$\exists$x i 5
7		$\exists x Q(x)$	$\exists$x e 2,3-6

זה חלק מ ψ. לא קשור לכלל ∃e

מה לא בסדר בהוכחה?

נניח ש $P^{(1)}$ ו $Q^{(1)}$ הם יחסים במילון נתון. נוכיח שוב:

$$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x)),\ \exists xP(x)\ \vdash \exists xQ(x)$$

1		$\forall x(P(x)\rightarrow Q(x))$	נתון
2		$\exists xP(x)$	נתון
3	x_0	$P(x_0)$	הנחה
4		$P(x_0)\rightarrow Q(x_0)$	$\forall$x e 1
5		$Q(x_0)$	MP 3,4
6		$Q(x_0)$	$\exists$x e 2,3-6
7		$\exists xQ(x)$	$\exists$x i 6

<u>תשובה</u>: x_0 מופיע בנוסחה $\psi := Q(x_0)$

דוגמה נוספת

נניח ש $P^{(1)}$, $Q^{(1)}$ ו $R^{(1)}$ הם יחסים במילון נתון. נוכיח:

$$\forall x(Q(x) \to R(x)),\ \exists x(P(x) \wedge Q(x)) \vdash \exists x(P(x) \wedge R(x))$$

1		$\forall x(Q(x) \to R(x))$	נתון
2		$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$	נתון
3	x_0	$P(x_0) \wedge Q(x_0)$	הנחה
4		$Q(x_0) \to R(x_0)$	$\forall$x e 1
5		$Q(x_0)$	$\wedge e_2$ 3
6		$R(x_0)$	MP 4,5
7		$P(x_0)$	$\wedge e_1$ 3
8		$P(x_0) \wedge R(x_0)$	$\wedge$i 6,7
9		$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$x i 8
10		$\exists x(P(x) \wedge R(x))$	$\exists$e 2, 3-9

ועוד דוגמה

נניח ש $P^{(1)}$ ו $Q^{(1)}$ הם יחסים במילון נתון. נוכיח:

$$\exists x P(x),\ \forall x \forall y (P(x) \to Q(y)) \vdash \forall y Q(y)$$

1		$\exists x P(x)$	נתון
2		$\forall x \forall y (P(x) \to Q(y))$	נתון
3	y_0		
4	x_0	$P(x_0)$	הנחה
5		$\forall y (P(x_0) \to Q(y))$	∀x e 2
6		$P(x_0) \to Q(y_0)$	∀y e 5
7		$Q(y_0)$	MP 4,6
8		$Q(y_0)$	∃x e 1, 4-7
9		$\forall y Q(y)$	∀y i 3-8

מה לא נכון בהוכחה?

נניח ש $P^{(1)}$ ו $Q^{(1)}$ הם יחסים במילון נתון. נוכיח:

$$\exists x P(x),\ \forall x (P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$$

1		$\exists x P(x)$	נתון
2		$\forall x (P(x) \to Q(x))$	נתון
3	x_0		
4	x_0	$P(x_0)$	הנחה
5		$P(x_0) \to Q(x_0)$	$\forall$x e 2
6		$Q(x_0)$	MP 4,5
7		$Q(x_0)$	$\exists$x e 1, 4-6
8		$\forall x Q(x)$	$\forall$x i 3-7

<u>תשובה</u>: x_0 מופיע בנוסחה $\psi := Q(x_0)$ ולכן לא ניתן להסיק את 7

תרגיל

הראו שאם הטענה

$$\exists x P(x),\ \forall x(P(x) \to Q(x)) \vdash \forall x Q(x)$$

הייתה נכונה, אז היינו יכולים להוכיח את

$$\exists x P(x) \vdash \forall x P(x)$$

שקילויות עם כמתים

משפט: יהיו ϕ ו ψ נוסחאות במילון מסויים. אז...

1) (א) $\neg\forall x\phi \dashv\vdash \exists x\neg\phi$

(ב) $\neg\exists x\phi \dashv\vdash \forall x\neg\phi$

2) בהנחה ש x לא חופשי ב ψ

(א) $\forall x\phi \wedge \psi \dashv\vdash \forall x(\phi \wedge \psi)$

(ב) $\forall x\phi \vee \psi \dashv\vdash \forall x(\phi \vee \psi)$

(ג) $\exists x\phi \wedge \psi \dashv\vdash \exists x(\phi \wedge \psi)$

(ד) $\exists x\phi \vee \psi \dashv\vdash \exists x(\phi \vee \psi)$

(ה) $\psi \to \forall x\phi \dashv\vdash \forall x(\psi \to \phi)$

(ו) $\forall x(\phi \to \psi) \dashv\vdash \exists x\phi \to \psi$

(ז) $\exists x(\phi \to \psi) \dashv\vdash \forall x\phi \to \psi$

(ח) $\exists x(\psi \to \phi) \dashv\vdash \psi \to \exists x\phi$

3) (א) $\forall x\phi \wedge \forall x\psi \dashv\vdash \forall x(\phi \wedge \psi)$

(ב) $\exists x\phi \vee \exists x\psi \dashv\vdash \exists x(\phi \vee \psi)$

4) (א) $\forall x\forall y\phi \dashv\vdash \forall y\forall x\phi$

(ב) $\exists x\exists y\phi \dashv\vdash \exists y\exists x\phi$