תחשיב היחסים

לוגיקה מסדר ראשון

המגבלות של תחשיב הפסוקים

- לתחשיב הפסוקים יש מגבלות בתיאור מצבים "מהחיים". לשפות טבעיות יש היבטים הרבה יותר עשירים
- מצבים שניתנים לתיאור ע"י תחשיב הפסוקים: "לא", "וגם", "או", "אם...אז".
- מצבים שלא ניתנים לתיאור ע"י תחשיב הפסוקים: "לכל", "קיים", "מתוך", "רק" וכו'.

המגבלות של תחשיב הפסוקים

נתבונן במשפט הבא:

כל חתול יותר קטן מאיזשהו כלב

איך אפשר לתאר את המשפט הזה באמצעות תחשיב הפסוקים?

אולי כך...

p = "every cat is smaller than some dog"

המגבלות של תחשיב הפסוקים

p = "every cat is smaller than some dog"

נניח שבנוסף לכך נתון המשפט:

פיסטוק הוא חתול

אז נוכל להסיק ש...

קיים כלב שגדול יותר מפיסטוק

אבל לא נוכל לבטא זאת באמצעות תחשיב הפסוקים.

(כי אם נסמן

q = "Fistuk is a cat"

r = "There is a dog that is bigger than Fistuk"

האם ניתן להסיק את המסקנה מהפסוק $(p \wedge q) \rightarrow r$?)

תכונות ויחסים

נתבונן במשפט הבא:

כל חתול יותר קטן מאיזשהו כלב

במשפט הזה יש שתי תכונות:

"להיות חתול", "להיות כלב"

ויחס אחד:

"קטן מ..."

אנחנו צריכים כלים כדי לתאר תכונות ויחסים

תכונות ויחסים

- אם נסמן ב C את התכונה "להיות חתול", אז הביטוי C(Fistuk) יבטא את העובדה שפיסטוק הוא חתול והביטוי $\neg$C(Rex) יבטא את העובדה שרֶקס אינו חתול.
- אם נסמן ב D את התכונה "להיות כלב", אז הביטוי D(Rex) יבטא את העובדה שְרֶקס הוא כלב.
- אם נסמן ב S את היחס "להיות קטן מ...", אז הביטוי S(Fistuk, Rex) יבטא את העובדה שפיסטוק קטן מִרֶקס.

משתנים

- כדי שנוכל להשתמש בתכונות ויחסים באופן כללי אנחנו זקוקים למשתנים שלתוכם נוכל "להציב" ערכים ספציפיים (כמו Fistuk ו Rex). לשם כך נשתמש באותיות x,y,z,... כלומר,
- $C(x)$ - "x הוא חתול"
- $\neg C(x)$ - "x אינו חתול"
- $D(y)$ - "y הוא כלב"
- $S(x,y)$ - "x קטן מ y"

כַּמָּתִים

- כדי שנוכל לנסח משפטים מורכבים כמו המשפט הנ"ל אנו זקוקים גם ל**כַּמָּתִים**: **לְכל** ו**קיים**.
- $\forall$ - לכל (for all)
- $\exists$ - קיים (there exists)

עכשיו אנחנו יכולים לנסח את המשפט "כל חתול קטן מאיזשהו כלב" בצורה סימבולית:

$$\forall x(C(x) \rightarrow (\exists y(D(y) \wedge S(x, y))))$$

יחס אונארי (תכונה)

יחס בינארי

מי לא אוהב קרואסון?

נתבונן במשפט הבא:

לא כל הצרפתים אוהבים לאכול קרואסון

F(x) - x צרפתי.

C(x) - x אוהב לאכול קרואסון.

$$\neg\left(\forall x\left(F(x)\rightarrow C(x)\right)\right)$$

אפשרות אחרת:

$$\exists x\left(F(x)\wedge\neg C(x)\right)$$

תחשיב היחסים

המטרה שלנו היא

1) לבנות מערכת של הוכחות כמו בתחשיב הפסוקים
2) להכליל את המושגים הסמנטיים כמו מודל וגרירה סמנטית לתחשיב היחסים

- במלים אחרות אנחנו רוצים לבנות מערכת דומה לזאת שבנינו בתחשיב הפסוקים עבור המערכת החדשה שיש בה מושגים חדשים:
  - יחסים ותכונות
  - משתנים
  - כמתים
- המערכת החדשה קרויה תחשיב היחסים או תחשיב הפרדיקטים (predicate calculus)

האם עטלפים מטילים ביצים?

- נתבונן בהצהרות הבאות:
  - אין יונק שמטיל ביצים*
  - עטלף הוא יונק
  - אין עטלף שמטיל ביצים
- נגדיר:

M(x) - x הוא יונק

E(x) - x מטיל ביצים

B(x) - x הוא עטלף

ברווזן platypus

*האמת היא שקיים יונק שמטיל ביצים, אבל זה לא משנה לענייננו

האם עטלפים מטילים ביצים?

M(x) - x הוא יונק

E(x) - x מטיל ביצים

B(x) - x הוא עטלף

נוכל עכשיו לייצג את ההצהרות הנ"ל:

- אין יונק שמטיל ביצים $\neg\exists x(M(x)\wedge E(x))$
- עטלף הוא יונק $\forall x(B(x)\rightarrow M(x))$
- אין עטלף שמטיל ביצים $\neg\exists x(B(x)\wedge E(x))$

האם עטלפים מטילים ביצים?

M(x) - x הוא יונק

E(x) - x מטיל ביצים

B(x) - x הוא עטלף

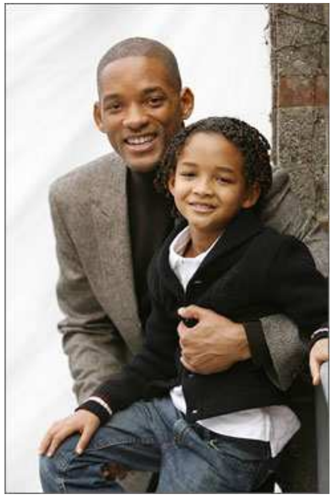
עלינו לבנות מערכת הוכחות ומערכת סמנטית שבה הביטויים הבאים יהיו נכונים:

$$\neg\exists x(M(x)\wedge E(x)), \forall x(B(x)\rightarrow M(x)) \vdash \neg\exists x(B(x)\wedge E(x))$$

$$\neg\exists x(M(x)\wedge E(x)), \forall x(B(x)\rightarrow M(x)) \vDash \neg\exists x(B(x)\wedge E(x))$$

בלי קשר למשמעות שאנו מייחסים ל M(x), B(x), E(x)

פונקציות



- נתבונן בהצהרה הבאה:

כל ילד צעיר יותר מאביו

נבטא את ההצהרה בצורה פורמלית:

F(x,y) - x הוא אבא של y

G(x,y) - x צעיר יותר מ y.

ואז נקבל את הביטוי:

$$\forall x \forall y (F(y,x) \rightarrow G(x,y))$$

פונקציות

כל ילד צעיר יותר מאביו

$$\forall x \forall y (F(y,x) \rightarrow G(x,y))$$

אין טעם לומר "כל y שהוא האבא של x", כיוון שלכל אדם יש רק אבא אחד.

במקום זה נגדיר **פונקציה**:

f(x) - האבא של x.

נקבל ביטוי יותר פשוט:

$$\forall x \big(G(x, f(x)) \big)$$

פונקציות

- נתבונן בהצהרה הבאה:

לא לכל שני אחים יש את אותו אבא

B(x,y) - x הוא אח של y

f(x) - האבא של x.

ואז נקבל את הביטוי:

$$\neg\forall x\forall y\big(B(x,y)\rightarrow\left(f(x)=f(y)\right)\big)$$

פונקציות

לא לכל שני אחים יש את אותו אבא

$$\neg\forall x\forall y\Big(B(x,y)\rightarrow\big(f(x)=f(y)\big)\Big)$$

שאלה: האם יכולנו להגדיר פונקציה b(x) עבור "אח של x"?

$$\neg\forall x\forall y\Big(\big(x=b(y)\big)\rightarrow\big(f(x)=f(y)\big)\Big)$$

תשובה: לא.

- הערך של b(x) לא תמיד קיים.
- אם b(x) קיים הוא לא בהכרח יחיד.

כלומר, הפונקציה b(x) **אינה מוגדרת היטב**.

פונקציות

דרישות מפונקציה:

i) הפונקציה מחזירה ערך יחיד עבור כל ארגומנט

ii) הפונקציה מוגדרת על כל התחום

iii) טווח הפונקציה מוכל בתחום

בנייה פורמלית של תחשיב היחסים

הא"ב של תחשיב היחסים

הא"ב של תחשיב היחסים מורכב מכמה קבוצות של סימנים:

1) משתנים: $x,y,z,\ldots$ וגם $x_1, x_2, x_3,\ldots$
2) הקַּשָּׁרִים מתחשיב הפסוקים: $\neg,\wedge,\vee,\rightarrow$
3) סוגריים
4) הכַּמָּתִים $\forall$, $\exists$
5) הסימן $=$
6) סימני יחס: יסומנו באותיות לטיניות גדולות $R, P, Q, S,\ldots$
7) סימני פונקציה: יסומנו באותיות לטיניות קטנות $f, g, h,\ldots$

מילון

הגדרה: מילון M בתחשיב היחסים מכיל שתי קבוצות:

1) קבוצה $\mathcal{P}$ של יחסים

2) קבוצה $\mathcal{F}$ של פונקציות

נסמן $M = (\mathcal{P}, \mathcal{F})$

לכל יחס ולכל פונקציה מוגדרת אריוּת – מספר הארגומנטים. למשל פונקציה אונרית, או פונקציה בינארית, פונקציה n–ארית.

נשתמש בסימון $f^{(n)}$ כדי לבטא את העובדה שהפונקציה f היא n-ארית.

נשתמש בסימון $P^{(n)}$ כדי לבטא את העובדה שהיחס P הוא n-ארי.

פונקציה 0-ארית נקראת נוּלארית והיא פונקציה קבועה.

עצמים

הגדרה: נתון מילון $M=\left(\mathcal{P},\mathcal{F}\right)$ נגדיר עצם ב M באופן אינדוקטיבי כך:

- כל משתנה הוא עצם
- כל קבוע (פונקציה קבועה) הוא עצם
- לכל פונקציה $f^{(n)}\in\mathcal{F}$ ולכל n עצמים $t_1,t_2,\ldots,t_n$ גם $f\left(t_1,t_2,\ldots,t_n\right)$ הוא עצם
- אלה כל העצמים ב M

דוגמאות לעצמים

נניח ש $c^{(0)}, f^{(1)}, g^{(2)} \in \mathcal{F}$. הבאים הם עצמים:

- המשתנים $x, y, z, \ldots, x_1, x_2, \ldots$ והקבוע c
- הצבה ראשונה בתוך פונקציות

$$f(x), f(y), g(x,z), g(x_1,x_2), f(c)$$

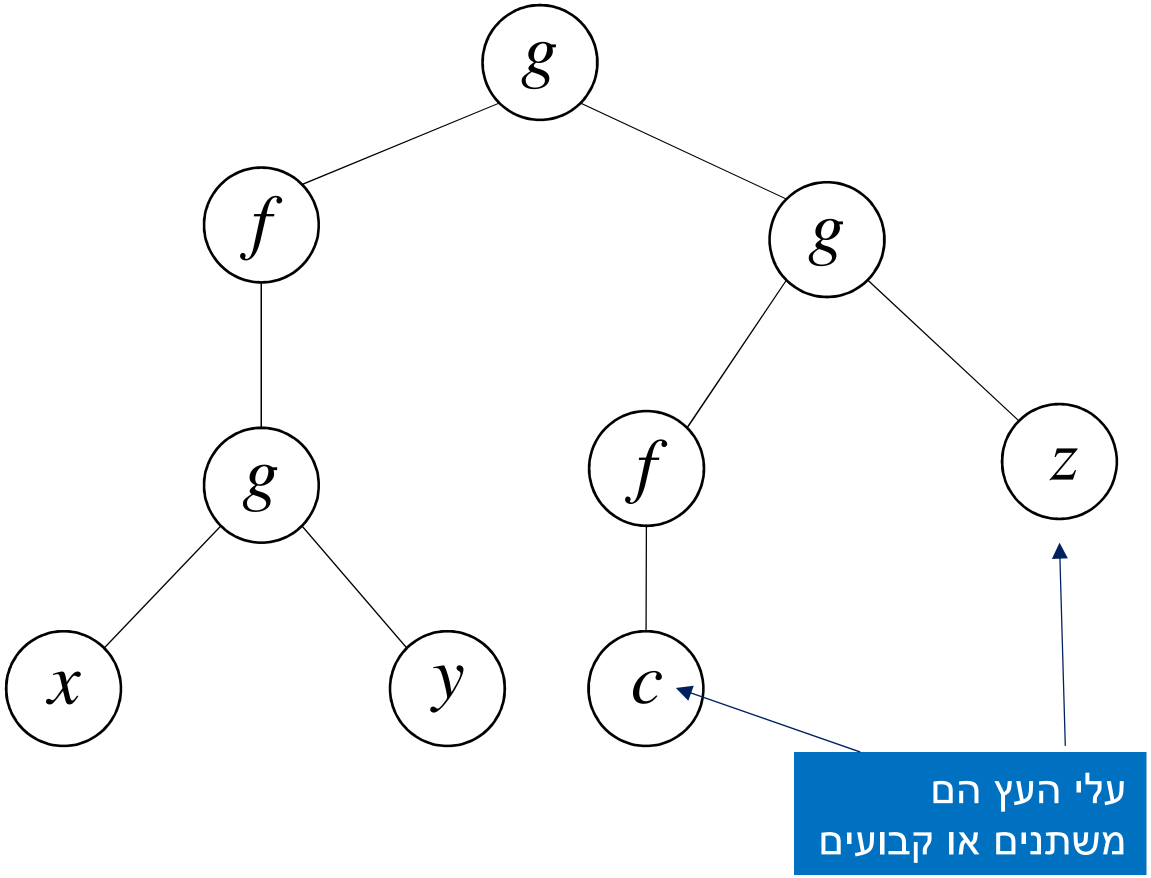
- המשך הצבה בתוך פונקציות:

$$f\left(f(x)\right), g\left(f(y), z\right), f\left(g(x,z)\right), g(f(x_1), c)$$

$$g\left(f\left(f(x)\right), g\left(f(y), z\right)\right), f\left(g\left(f(x), g(f(x_1), c)\right)\right)$$

תיאור עצמים באמצעות עץ מבנה

$$g\left(f\left(g(x,y)\right),g\left(f(c),z\right)\right)$$



דוגמה: בסיס נתונים

נניח שאנו עובדים עם בסיס נתונים של עצי משפחה

נגדיר $M=\left(\mathcal{P},\mathcal{F}\right)$ כך:

$$\mathcal{P}=\left\{M^{(1)},F^{(1)},S^{(2)},D^{(2)}\right\}$$

$$\mathcal{F}=\left\{m^{(1)},f^{(1)}\right\}$$

$M(x)$ x הוא זכר

$F(x)$ x היא נקבה

$S(x,y)$ x בן של y

$D(x,y)$ x בת של y

$m(x)$ אמא של x

$f(x)$ אבא של x

נוסחאות

הגדרה: בהינתן מילון $M=(\mathcal{P},\mathcal{F})$ נגדיר נוסחה ב M באופן אינדוקטיבי כך:

- אם $P^{(n)}\in\mathcal{P}$ ואם $t_1,t_2,\ldots,t_n$ עצמים אז $P(t_1,t_2,\ldots,t_n)$ היא נוסחה (נוסחה אטומית)
- אם t_1 ו t_2 עצמים אז $t_1=t_2$ היא נוסחה אטומית
- אם ϕ היא נוסחה, אז גם $(\neg\phi)$ היא נוסחה
- אם ϕ ו ψ נוסחאות, אז גם $(\phi\wedge\psi),(\phi\vee\psi),(\phi\to\psi)$ נוסחאות
- אם ϕ נוסחה ו x משתנה, אז גם $(\forall x\phi)$ ו $(\exists x\phi)$ נוסחאות
- אלה כל הנוסחאות.

הערות

- הארגומנטים של יחסים ופונקציות הם תמיד עצמים
- נוסחה חייבת להכיל לפחות סימן יחס אחד

סדר העדיפויות בהפעלת כמתים וקשרים

1) סוגריים
2) $\forall, \exists, \neg$
3) $\wedge$
4) $\vee$
5) $\rightarrow$ (מימין לשמאל)

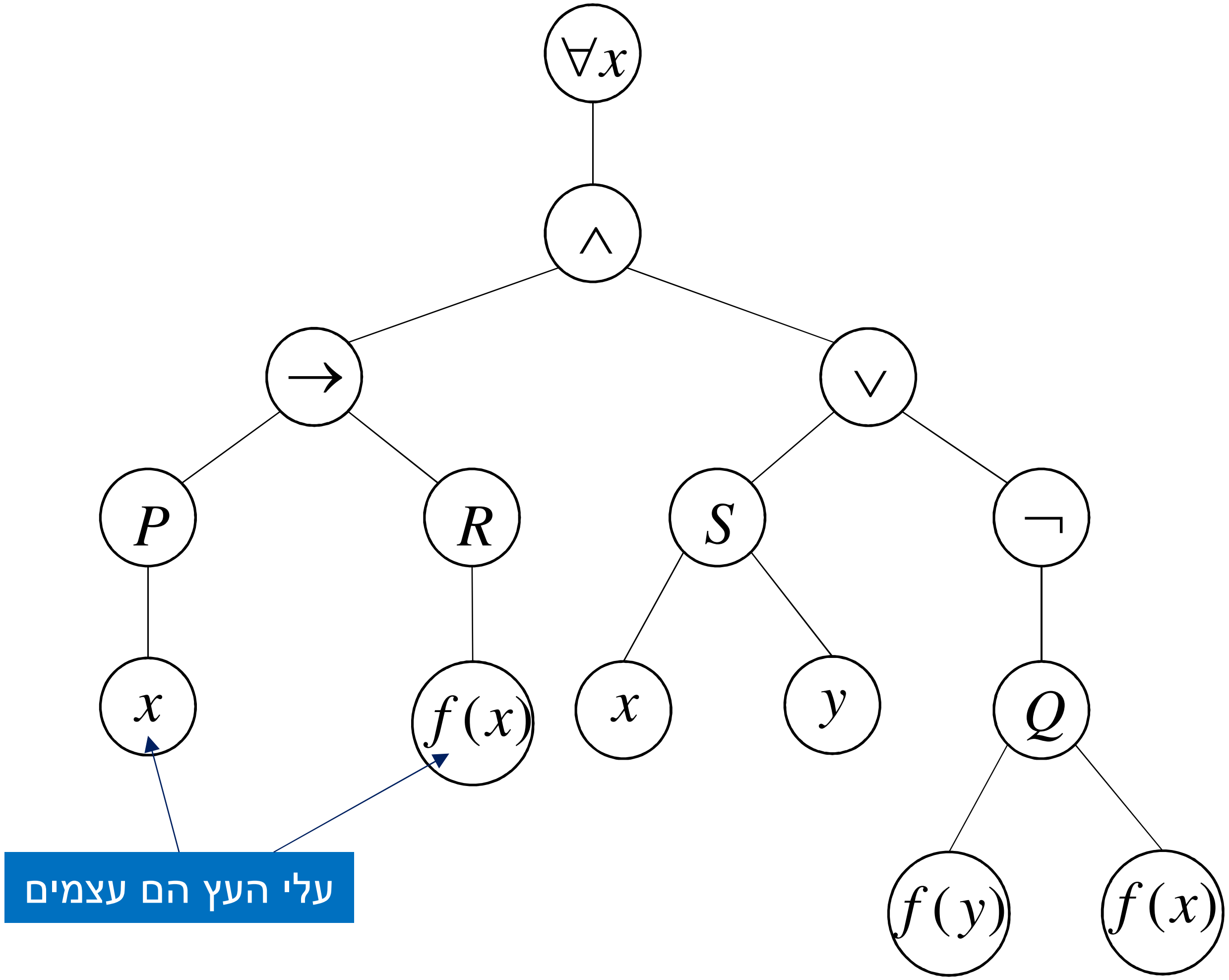
דוגמה:

$$\forall x P(x) \rightarrow Q(x) \wedge \exists y S(x, y) \vee R(x, y)$$

שקול ל- $\left(\forall x P(x)\right) \rightarrow \left(\left(Q(x) \wedge \left(\exists y S(x, y)\right)\right) \vee R(x, y)\right)$

הצגת מבנה נוסחה באמצעות עץ

$$\forall x\Big(\big(P(x)\rightarrow R(f(x))\big)\wedge\big(S(x,y)\vee\neg Q(f(y),f(x))\big)\Big)$$



דוגמה: יחסי משפחה

$$\mathcal{F}=\left\{c^{(0)}\right\} \qquad \mathcal{P}=\left\{D^{(2)},M^{(2)},S^{(2)}\right\} \quad M=(\mathcal{P},\mathcal{F})$$

$D(x,y)$ x בת של y

$M(x,y)$ x אמא של y

$S(x,y)$ x אחות של y

c קבוע המייצג את הדובר

נבטא את ההצהרה כל בת של אמי היא אחותי

$$\forall x\forall y(M(x,c)\wedge D(y,x)\rightarrow S(y,c))$$

דוגמה: יחסי משפחה

הוספנו פונקציה

$$\mathcal{F}=\left\{c^{(0)},m^{(1)}\right\}\quad \mathcal{P}=\left\{D^{(2)},M^{(2)},S^{(2)}\right\}\quad M=\left(\mathcal{P},\mathcal{F}\right)$$

$D(x,y)$ x בת של y

$M(x,y)$ x אמא של y

$S(x,y)$ x אחות של y

c קבוע המייצג את הדובר

$m(x)$ אמא של x

ניתן לקצר את ההצהרה **כל בת של אמי היא אחותי**

$$\forall x(D(x,m(c))\rightarrow S(x,c))$$

יש בעיה במקרה ש $x=c$. ננסה לשפר:

$$\forall x(D(x,m(c))\wedge\neg(x=c)\rightarrow S(x,c))$$