

КРАТЧАЙШИЕ ПУТИ В ГРАФАХ

1. ЦЕЛЬ РАБОТЫ

Изучить и исследовать алгоритмы нахождения кратчайших путей между вершинами графа, получить представление об их использовании при решении практических задач.

2. КРАТКИЕ ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ СВЕДЕНИЯ

2.1. Постановка задачи

Пусть дан граф $G=(X,\Gamma)$ дугам которого приписаны веса (стоимости), задаваемые матрицей $C = [c_{ij}]$. Задача о кратчайшем пути состоит в нахождении кратчайшего пути от заданной начальной вершины $s \in X$ до заданной конечной вершины $t \in X$, при условии, что такой путь существует, т.е. при условии $t \in R(s)$. Здесь $R(s)$ - множество, достижимое из вершины s . Элементы c_{ij} матрицы весов C могут быть положительными, отрицательными или нулями. Единственное ограничение состоит в том, чтобы в G не было циклов с отрицательным суммарным весом. Если такой цикл все же существует и x_i - некоторая его вершина, то, двигаясь от s к x_i , обходя затем цикл достаточно большое число раз и попадая, наконец, в t , мы получим путь со сколь угодно малым весом, означаящим, что кратчайшего пути не существует.

Следующие задачи являются обобщениями сформулированной выше задачи о кратчайшем пути.

1. Для заданной начальной вершины s найти кратчайшие пути между s и всеми другими вершинами $x_i \in X$.
2. Найти кратчайшие пути между всеми парами вершин.

На практике часто требуется найти не только кратчайший путь, но также второй, третий и т.д. кратчайшие пути в графе. Располагая этими результатами, можно решить, какой путь выбрать в качестве наилучшего (указанный подход полезен при использовании таких критериев, которые являются субъективными по своей природе или не могут быть непосредственно включены в алгоритм).

2.2. Алгоритм Дейкстры (случай неотрицательной матрицы весов)

Наиболее эффективный алгоритм решения задачи о кратчайшем $(s-t)$ -пути первоначально дал Дейкстра. Этот метод основан на приписывании вершинам временных пометок, причем пометка вершины дает верхнюю границу длины пути от s к этой вершине. Значения пометок постепенно уменьшаются с помощью некоторой итерационной процедуры, и на каждом шаге итерации одна из временных пометок становится постоянной. Последнее указывает на то, что пометка уже не является верхней границей, а дает точную длину кратчайшего пути от s к рассматриваемой вершине.

Описание алгоритма Дейкстра:

Пусть $l(x_i)$ - пометка вершины x_i .

Шаг 1. Положить $l(s)=0$ и считать эту пометку постоянной. Положить $l(x_i)=\infty$ для всех $x_i \neq s$ и считать эти пометки временными. Положить $p = s$.

Шаг 2. Для всех $x_i \in \Gamma(p)$, пометки которых временные, изменить пометки в соответствии со следующим выражением:

$$l(x_i) = \min[l(x_i), l(p) + c(p, x_i)] \quad (1.1)$$

Шаг 3. Среди всех вершин с временными пометками найти такую, для которой $l(x_i^*) = \min[l(x_i)]$.

Шаг 4. Считать пометку вершины x_i^* постоянной и положить $p = x_i^*$.

Шаг 5.

1. Если $p = t$, то $l(p)$ является длиной кратчайшего пути. Если $p \neq t$, перейти к шагу 2 (для случая поиска пути от s к t).

2. Если все вершины отмечены как постоянные, то эти пометки дают длины кратчайших путей. Если некоторые пометки являются временными перейти к шагу 2 (для случая поиска путей от s ко всем остальным вершинам).

Как только длины кратчайших путей от s будут найдены, то сами пути можно получить при помощи рекурсивной процедуры с использованием соотношения (1.2). Так как вершина x'_i непосредственно предшествует вершине x_i в кратчайшем пути от s к x_i , то для любой вершины x_i соответствующую вершину x'_i можно найти как одну из оставшихся вершин, для которой

$$l(x'_i) + c(x'_i, x_i) = l(x_i). \quad (1.2)$$

Если кратчайший путь от s до любой вершины x_i является единственным, то дуги (x'_i, x_i) этого кратчайшего пути образуют ориентированное дерево с корнем s . Если существует несколько "кратчайших" путей от s к какой-либо другой вершине, то при некоторой фиксированной вершине x'_i соотношение (2) будет выполняться для более чем одной вершины x_i . В этом случае выбор может быть либо произвольным (если нужен какой-то один кратчайший путь между s и x_i), либо таким, что рассматриваются все дуги (x'_i, x_i) , входящие в какой-либо из кратчайших путей, и при этом совокупность всех таких дуг образует не ориентированное дерево, а общий граф, называемый базой относительно s .

Пример

Рассмотрим граф G , изображенный на рис. 1.1, где каждое неориентированное ребро рассматривается как пара противоположно ориентированных дуг равного веса. Матрица весов C приведена ниже.

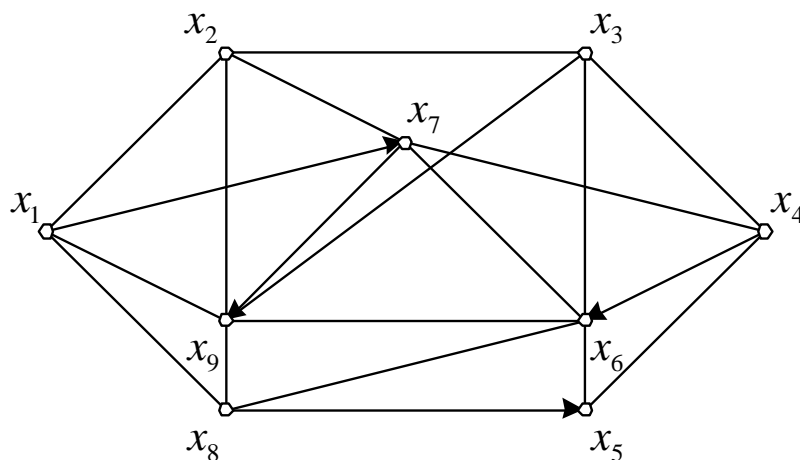


Рис. 1.1. Граф G .

Требуется найти все кратчайшие пути от вершины x_1 ко всем остальным вершинам. Постоянные пометки будем снабжать знаком $+$, остальные пометки рассматриваются как временные.

$$C = \begin{array}{c|cccccccccc} & x_1 & x_2 & x_3 & x_4 & x_5 & x_6 & x_7 & x_8 & x_9 \\ \hline x_1 & 0 & 12 & 0 & 0 & 0 & 0 & 5 & 2 & 10 \\ x_2 & 12 & 0 & 14 & 0 & 0 & 0 & 4 & 0 & 15 \end{array}$$

x_3	0	14	0	20	0	25	0	0	9
x_4	0	0	20	0	2	15	5	0	0
x_5	0	0	0	2	0	8	0	0	0
x_6	0	0	25	0	8	0	12	11	10
x_7	0	4	0	5	0	12	0	0	22
x_8	2	0	0	0	24	11	0	0	7
x_9	10	15	0	0	0	10	22	7	0

Воспользуемся алгоритмом Дейкстры.

Шаг 1. $l(x_1) = 0^+$, $l(x_i) = \infty \forall x_i \neq x_1$, $p = x_1$.

Первая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_1) = \{x_2, x_7, x_8, x_9\}$ - все пометки временные.

Возьмем сначала x_2 . Из (1.1) получаем

$$l(x_2) = \min[\infty, 0^+ + 12] = 12,$$

аналогично $l(x_7) = 5$, $l(x_8) = 2$, $l(x_9) = 10$.

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 12, 5, 2, 10, \infty \\ x_2 \ x_7 \ x_8 \ x_9 \ x_{3,x_4,x_5,x_6} \end{bmatrix} = 2$ соответствует x_8 .

Шаг 4. x_8 получает постоянную пометку $l(x_8) = 2^+$, $p = x_8$.

Шаг 5. Не все вершины имеют постоянные пометки, поэтому переходим к шагу 2. Пометки в начале следующей итерации показаны на рис. 1.2(а).

Вторая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_8) = \{x_5, x_6, x_9\}$ - все пометки временные. Из соотношения (1.1) имеем

$$l(x_5) = \min[\infty, 2^+ + 24] = 26,$$

аналогично $l(x_6) = 13$, $l(x_9) = 9$. Пометки изображены на рис. 1.2(б).

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 12, 26, 13, 5, 9, \infty \\ x_2 \ x_5 \ x_6 \ x_7 \ x_9 \ x_{3,x_4} \end{bmatrix} = 5$ соответствует x_7 .

Шаг 4. x_7 получает постоянную пометку $l(x_7) = 5^+$, $p = x_7$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Третья итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_7) = \{x_2, x_4, x_6, x_9\}$ - из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_2) = \min[12, 5^+ + 4] = 9,$$

и аналогично $l(x_4)=10, l(x_6)=13, l(x_9)=9$.

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 9, 10, 26, 13, 9, \infty \\ x_2 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_9 \quad x_3 \end{bmatrix} = 9$ соответствует x_2 .

Шаг 4. x_2 получает постоянную пометку $l(x_2)=9^+$, $p = x_2$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Четвертая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_2) = \{x_3, x_7, x_9\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_3) = \min[\infty, 9^+ + 14] = 23,$$

и аналогично $l(x_9)=9$.

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 23, 10, 26, 13, 9 \\ x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \quad x_9 \end{bmatrix} = 9$ соответствует x_9 .

Шаг 4. x_9 получает постоянную пометку $l(x_9)=9^+$, $p = x_9$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Пятая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_9) = \{x_2, x_6, x_7, x_8\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_6) = \min[13, 9^+ + 10] = 13.$$

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 23, 10, 26, 13 \\ x_3 \quad x_4 \quad x_5 \quad x_6 \end{bmatrix} = 10$ соответствует x_4 .

Шаг 4. x_4 получает постоянную пометку $l(x_4)=10^+$, $p = x_4$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Шестая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_4) = \{x_3, x_5, x_6\}$ - все пометки временные, из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_3) = \min[23, 10^+ + 20] = 23,$$

и аналогично $l(x_5)=12, l(x_6)=13$.

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 23, 12, 13 \\ x_3 \quad x_5 \quad x_6 \end{bmatrix} = 12$ соответствует x_5 .

Шаг 4. x_5 получает постоянную пометку $l(x_5)=12^+$, $p = x_5$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Седьмая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_5) = \{x_4, x_6\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_6) = \min[13, 12^+ + 8] = 13.$$

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 23, 13 \\ x_3 \quad x_6 \end{bmatrix} = 13$ соответствует x_6 .

Шаг 4. x_6 получает постоянную пометку $l(x_6) = 13^+$, $p = x_6$.

Шаг 5. Перейти к шагу 2.

Восьмая итерация

Шаг 2. $\Gamma(p) = \Gamma(x_6) = \{x_3, x_5, x_8, x_9\}$ - не все пометки временные, поэтому из соотношения (1.1) получаем

$$l(x_3) = \min[23, 13^+ + 25] = 23.$$

Шаг 3. $\min \begin{bmatrix} 23 \\ x_3 \end{bmatrix} = 23$ соответствует x_3 .

Шаг 4. x_3 получает постоянную пометку $l(x_3) = 23^+$, $p = x_3$.

Шаг 5. Все вершины имеют постоянные пометки. Конец работы алгоритма. Пометки полученные в результате работы алгоритма показаны на рис. 1.2(в).

Найдем кратчайший путь между вершиной x_2 и начальной вершиной x_1 , последовательно используя соотношение (1.2). Таким образом, полагая $x_i = x_2$, находим вершину x'_2 , непосредственно предшествующую x_2 в кратчайшем пути от x_1 к x_2 : вершина x'_2 должна удовлетворять соотношению

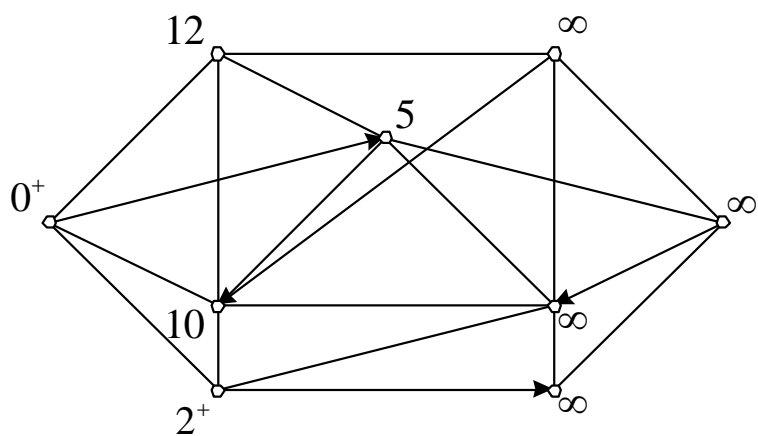
$$l(x'_2) + c(x'_2, x_2) = l(x_2) = 9.$$

Единственной такой вершиной является x_7 . Далее, применяем второй раз соотношение (1.2), беря $x_i = x_7$; получаем вершину x'_7 , непосредственно предшествующую x_7 в кратчайшем пути от x_1 к x_2 . Вершина x'_7 удовлетворяет соотношению

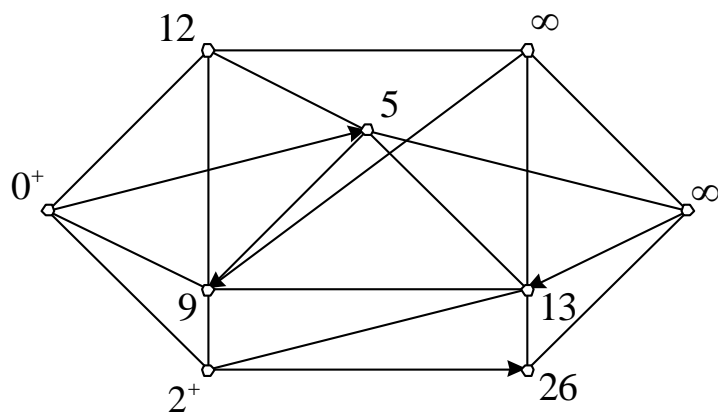
$$l(x'_7) + c(x'_7, x_7) = l(x_7) = 5.$$

Единственной такой вершиной является x_1 и поэтому кратчайший путь от x_1 к x_2 есть (x_1, x_7, x_2) .

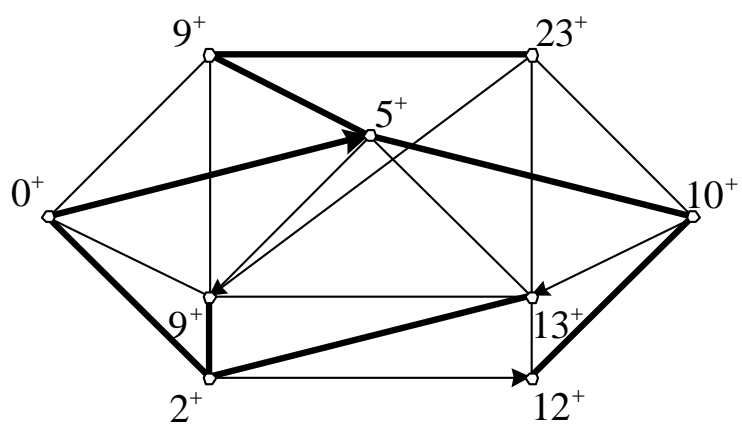
x_1 - база, дающая все кратчайшие пути от x_1 , представляет собой дерево, изображенное жирными линиями на рис. 1.2 (в).



(a)



(б)



(в)

Рис. 1.2. (а) Пометки в конце 1-й итерации. (б) Пометки в конце шага 2 на 2-й итерации. (в) Окончательные пометки вершин и x_1 - база.