# Procesos Estocásticos (66.75): Trabajo Práctico n.1

Cáceres, Julieta (#)

Rozanec, Matias (#97404)
rozanecm@gmail.com

8.mayo.2018

# Índice

# Parte I
# Resolución

## 1. Ejercicio 1: Cálculo de ganancia de los repetidores analógicos

$$\varepsilon_{X_i} = Var(X_i) = E(X_i^2) + E(X_i)^2 \tag{1}$$

$$E[X_r^2] = (A^2 p(A) + (-A)^2 p(-A)) = (A^2\frac{1}{2} + A^2\frac{1}{2}) = A^2 = A^2 \tag{2}$$

$$E[X_r]^2 = (Ap(A) + (-A)p(-A))^2 = (A\frac{1}{2} - A\frac{1}{2})^2 = 0^2 = 0 \tag{3}$$

Por lo tanto,

$$\varepsilon_{X_i} = A^2 \Leftrightarrow A = \sqrt{\varepsilon_{X_i}} \tag{4}$$

Como $X_n = G_i X_{i-1} h + G_i W_{i-1}$, entonces:

$$\varepsilon_n = Var(X_n) = (G_i h)^2 Var(X_{i-1}) + G_i^2 \sigma^2 \tag{5}$$

Por enunciado vale que $\varepsilon_i = \varepsilon_{i-1}$, por lo tanto

$$\varepsilon_n = (G_i h)^2 \varepsilon_i + G_i^2 \sigma^2 \Leftrightarrow \frac{\varepsilon_n}{h^2 \varepsilon_i + \sigma^2} = G_i^2 \Leftrightarrow G_i = \sqrt{\frac{\varepsilon_n}{h^2 \varepsilon_i + \sigma^2}} \tag{6}$$

Por lo tanto, se tiene que

$$G_i = \frac{1}{h}\sqrt{\frac{SNR}{SNR+1}} \tag{7}$$

# 2. Ejercicio 2: Probabilidad de error del sistema analógico

## 2.1. Cálculo de $Y_n$

Por definición tenemos que $Y_i = X_i h + W_i$ y que $X_1$ es la señal original. Se escribirán primero las expresiones de los primeros términos de Y, para que sirvan de ayuda en la deducción de la fórmula general de $Y_n$.

$$Y_1 = X_1 h + W_1 \rightarrow X_2 = G_2(X_1 h + W_1) = G_2 h X_1 + G_2 W_1$$

$$Y_2 = X_2 h + W_2 = (G_2 h X_1 + G_2 W_1)h + W_2 = G_2 h^2 X_1 + G_2 W_1 h + W_2$$

$$\rightarrow X_3 = G_3 Y_2 = G_3(G_2 h^2 X_1 + G_2 W_1 h + W_2) = G_3 G_2 h^2 X_1 + G_3 G_2 W_1 h + G_3 W_2$$

$$Y_3 = X_3 h + W_3 = G_3 G_2 h^3 X_1 + G_3 G_2 W_1 h^2 + G_3 h W_2 + W_3$$

Se puede ver que la fórmula general toma la siguiente forma:

$$Y_n = X_1 h^n \prod_{i=2}^{n} G_i + \sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j$$

Como se puede observar, el primer término contiene la variable $X_1$, y el resto de los términos se relacionan con los ruidos que se van agregando en cada etapa.

## 2.2. SNR

$$SNR = \frac{Var(senal\ de\ interes)}{ruido} = \frac{Var(X_1 h^n \prod_{i=2}^{n} G_i)}{Var(\sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j)}$$

$$= \frac{E((X_1 h^n \prod_{i=2}^{n} G_i))^2) + E(X_1 h^n \prod_{i=2}^{n} G_i)^2}{E((\sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j)^2) + E(\sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j)^2}$$

Como $E(X_1 h^n \prod_{i=2}^{n} G_i) = cteE(X_1) = cte * 0 = 0$ y $E(\sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j) = 0$, entonces:

$$SNR = \frac{E((X_1 h^n \prod_{i=2}^{n} G_i))^2)}{E((\sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j)^2)}$$

Se llama $\widetilde{W} = \sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j$. Se muestra a continuación el cálculo de su varianza.

$$Var(\widetilde{W}) = Var(\sum_{i=1}^{n} h^{n-i} W_i \prod_{j=i+1}^{n} G_j) = \sum_{i=1}^{n} h^{(n-i)^2} \sigma^2 (\prod_{j=i+1}^{n} G_j)^2 = \sum_{i=1}^{n} ((hG)^{n-i})^2 \sigma^2$$

Volviendo al cálculo de la SNR:

$$SNR = \frac{E(X_1) h^{2n} \prod_{i=2}^{n} G_i^2}{\sum_{i=1}^{n} ((hG)^{n-i})^2 \sigma^2}$$

## 3. Ejercicio 3: Probabilidad de error del sistema digital

## 4. Ejercicio 4: Simulación Monte Carlo de las probabilidades de error