

עבודה 1 א"א

שם: אביב רוזיה

שם: משה מלכה

1.

א. *המאורעות A ו B חופפים.

נציב $x=1, y=0$ ונקבל כי שתי הפסוקיות יסתפקו ולכן $\Pr[A \cap B] > 0$

*המאורעות A ו B תלויים.

נשים לב שבכל פסוקית ישנם 2 ליטרלים שונים ומספיק שלפחות אחד מהליטרלים מסתפק על מנת שכל הפסוקית תסתפק, נחשב את ההסתברות לכך שפסוקית תסתפק:

$$\Pr[A] = \Pr[B] = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}$$

לפי נוסחת ההחלה וההדחה.

כעת נחשב את $\Pr[A \cap B]$

A מתקיים עבור $x=1, y=1$

B מתקיים עבור $x=0, y=0$

ולכן ניתן לראות כי האיחוד יתקיים בהסתברות:

$$\Pr[A \cap B] = \frac{1}{2} * \frac{1}{2} + \frac{1}{2} * \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

$$\Pr[A] * \Pr[B] = \frac{9}{16} \neq \frac{1}{2} = \Pr[A \cap B] \text{ כי}$$

ניתן לראות כי $\Pr[A \cap B]$ ולכן המאורעות תלויים.

ב. *המאורעות A ו D חופפים.

נציב $x=1, w=1$ ונראה כי שתי הפסוקיות יסתפקו ולכן $\Pr[A \cap D] > 0$

*המאורעות A ו D הם בלתי תלויים.

ניתן לראות כי בשתי הפסוקיות ישנם משתנים שונים זה מזה, Ax, By, Dz, w ולכן הגרלה של אחת לא תשפיע על השניה.

ג. *המאורעות B ו C חופפים.

נציב $x=0$ וניתן לראות כי 2 הפסוקיות יסתפקו ולכן $\Pr[A \cap B] > 0$

המאורעות B ו C תלויים.

$$\Pr[B] = \Pr[C] = 1 - \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4} \text{ כי:}$$

כעת נחשב את $\Pr[B \cap C]$

B מתקיים עבור $x=0, y=0$

C מתקיים עבור $x=0, z=1$

ולכן ניתן לראות כי האיחוד יתקיים בהסתברות:

$$\Pr[B] * \Pr[C] = \frac{9}{16} \neq \frac{3}{4} = \Pr[B \cap C]$$

ולכן המאורעות תלויים.

2. א. נשים לב כי בגרף מלא ישנן $\frac{n(n-1)}{2}$ קודקודים, ולכן בגרף k -clique מלא ישנן $\frac{k(k-1)}{2}$, ההסתברות לקבל כל צלע היא 0.5 ולכן ההסתברות לקבל גרף k -clique מלא הינה

$$p[x = k] = \frac{1}{2}^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

על מנת לחשבת את התוחלת נשתמש בנוסחא: $E[X] = \sum_{i=1}^n k * p[x = k]$

$$E[X] = \sum_{i=1}^n \frac{1}{2}^{\frac{k(k-1)}{2}} = \binom{n}{k} * \frac{1}{2}^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

ולכן נקבל כי:

ב. 1. בשאלה זו מבקשים לפחות k -clique 1, שאלה זו שקולה להגדרת נוסחת ההחלה וההדחה ולכן:

$$\Pr\left[\bigcup_{i=1}^n X_i\right] \leq \sum_{i=1}^n \Pr[X_i] = \binom{n}{k} * \frac{1}{2}^{\frac{k(k-1)}{2}}$$

הסבר: עבור n גדול נוסחת ההחלה וההדחה לא שימושית ולכן משתמש בחסם האיחוד

ב. 2. בשאלה זו מבקשים $\binom{n}{k}$ קליקים, נחשב הסתברות זו בעזרת מה שמצאנו בסעיף א' ולכן:

$$\begin{aligned} \text{ההסתברות לא קליק היינה } p[x = k] &= \frac{1}{2}^{\frac{k(k-1)}{2}}, \text{ עבור } \binom{n}{k} \text{ קליקים נקבל:} \\ \left(\frac{1}{2}^{\frac{k(k-1)}{2}}\right)^{\binom{n}{k}} &= \frac{1}{2}^{\binom{n}{k} * \frac{k(k-1)}{2}} \end{aligned}$$

3. א.

לכל פסוקית i נגדיר אינדיקטור X_i למאורע שבו הפסוקית ה- i מסתפקת על ידי ההשמה שהגרלנו.

בכל פסוקית ישנם 3 ליטרלים של משתנים שונים. פסוקית מסתפקת אמ"ם שלושת הליטרלים שבה מסתפקים. ליטרל בלי שלילה מסתפק אמ"ם הוא מקבל 1, ליטרל עם שלילה מסתפק אם הוא מקבל 0. לכן ניתן להסיק מכך שכל ליטרל מסתפק בהסתברות $\frac{1}{2}$. כמו שהזכרנו לעיל על מנת שהפסוקית תסתפק שלושת הליטרלים שבה צריכים להסתפק לכן ההסתברות לכך היא: $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8}$.

$$E[X] = E\left[\sum_{i=1}^m X_i\right] = \sum_{i=1}^m E[X_i] = \sum_{i=1}^m \frac{1}{8} = m \cdot \frac{1}{8}$$

לכן לכל פסוקית i מתקיים:

ב.

על מנת שהנוסחא תסתפק, צריכה להסתפק לפחות פסוקית אחת מכיוון שבין כל פסוקית יש "או" לכן מדובר באיחוד של מאורעות תלויים (תלויים מכיוון שבכל פסוקית יש את אותם ליטרלים). אנו יודעים שאיחוד של מאורעות תלויים שווה לסכום ההסתברויות. מסעיף קודם ידוע כי פסוקית מסתפקת בהסתברות של $\frac{1}{8}$ לכן סכום ההסתברויות הוא: $m \cdot \frac{1}{8}$

ג.

לא יכול להיות מצב בו כל הפסוקיות מסתפקות ע"י השמה אקראית מכיוון שכל הפסוקיות מורכבות מאותם ליטרלים אך עם שינוי קטן של ליטרל ושלילתו לכן כאשר ליטרל מסוים יקבל 1 בפסוקית מסוימת הוא יקבל 0 בפסוקית אחרת לכן מצב בו כל הפסוקיות מסתפקות הוא בלתי אפשרי.

4. א.נחשב גבול:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{g(n)}{f(n)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 \cdot 3^n}{n^3 \cdot 2^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^n = \infty$$

לכן מכך נובע כי :

$$g(n) \gg f(n)$$

ב.

$$f(n) = \sqrt{\log n}^n = (\log n)^{\frac{n}{2}}$$

$$g(n) = \sqrt{n}^{\log n} = n^{\frac{\log n}{2}}$$

ב- $f(n)$ יש n במעריך לעומת $\log n$ במעריך ב- $g(n)$ לכן הפונקצייה $f(n)$ תגדל הרבה יותר מהר.

לכן $f(n) \gg g(n)$

ג. נפשט:

$$f(n) = (e^{-n})^2 = \left(\frac{1}{e^n}\right)^2 = \frac{1}{e^{2n}}$$

$$g(n) = e^{-n^2} = \frac{1}{e^{n^2}}$$

לכן: $f(n) \gg g(n)$

ד.

$$f(n) = n!$$

$$g(n) = n^n$$

נוסיף \log לשני הפונקציות ונקבל:

$$f(n) = \log n! = n \cdot \log n$$

$$g(n) = \log n^n = n \cdot \log n$$

ולכן:

$$f(n) = \theta(g(n))$$