Metody rozwiązywania problemów

Beata Laszkiewicz

METODA ZACHŁANNA

Wprowadzenie

- Algorytmy służące do rozwiązywania problemów optymalizacyjnych polegają na podejmowaniu ciągu decyzji – w każdym kroku wybieramy jedną z wielu możliwości.
- Zwykle pierwszym zamierzeniem jest osiągnięcie wyznaczonego celu w jakikolwiek sposób.
- Gdy już potrafimy rozwiązać problem, zastanawiamy się, jak można byłoby go rozwiązać mniejszym wysiłkiem, szybciej, z największym zyskiem lub z najmniejszymi stratami.

Przykład

- W przypadku gry jak szachy można wygrać tylko dzięki myśleniu zawczasu: gracza, który koncentruje się tylko na natychmiastowych korzyściach, można łatwo pokonać.
- W grze takiej jak Scrabble, można grać całkiem dobrze, wykonując ruchy, które wydają się aktualnie najlepsze i nie martwić się o przyszłe konsekwencje.

Cechy zachłanności

Jeśli zadanie polega na osiągnięciu celu w kilku etapach, to często przeradza się ono w strategię, którą stosujemy do każdego etapu. Wtedy w każdym kroku staramy się:

- postępować jak najszybciej,
- zyskać jak najwięcej,
- stracić jak najmniej.

Metoda zachłanna

- Algorytm zachłanny wykonuje zawsze działanie, które wydaje się w danej chwili najkorzystniejsze.
- Wybiera się lokalnie optymalną możliwość, licząc na to, że doprowadzi ona do globalnie optymalnego rozwiązania.
- Zachowanie zachłanne jest krótkowzroczne, łatwe, wygodne i daje atrakcyjne strategie algorytmiczne.

Algorytmy zachłanne

- budują rozwiązanie krok po kroku, zawsze wybierając jako kolejny krok ten, który jest najbardziej oczywisty, który oferuje natychmiastowe korzyści,
- nie zawsze prowadzą do optymalnych rozwiązań, choć dla wielu problemów są wystarczające,
- są dość skuteczne i dają dobre rezultaty dla szerokiej gamy problemów.

Problem wydawania reszty

Dla danej kwoty r pieniędzy oraz nominałów banknotów i monet $c_k, c_{k-1}, \dots, c_2, c_1$ spełniających nierówności

$$c_k > c_{k-1} > \cdots > c_2 > c_1 = 1$$

należy określić najmniejszą liczbę banknotów i monet , którymi kwota r może być wydana jako reszta.

Podejście zachłanne

Na każdym kroku minimalizowana jest liczba wszystkich banknotów lub monet największego mieszczącego się w niej nominału.

$$96 = 50 + 2 \cdot 20 + 5 + 1$$

Algorytm

Dane: r – reszta do wydania

N – zestaw nominałów, którymi dysponujemy, posortowane malejąco

Wynik: zestaw nominałów, które wydajemy

```
i ← 1
while (r>0)
    while (r-N[i]>=0)
        wypisz N[i]
        r ← r-N[i]
    i ← i + 1
```

Złożoność: Gdyby nominały nie były posortowane, należałoby je najpierw posortować, co daje złożoność $O\ (n \log_2 n)$

Pytania:

1. Czy obecność nominału 1 jest niezbędna?
2. Załóżmy, że w kasie brakło nominałów 5 oraz 10. Podaj przykłady kwot, dla których metoda zachłanna nie da najmniejszej możliwej liczby nominałów.
3. Załóżmy, że dysponujemy dodatkowym nominałem o wartości 21. Czy algorytm zachłanny da najmniejszą możliwą liczbę monet?

Problem plecakowy

http://backpackers.ovh.org/przyg.html

Problem plecakowy

Mamy danych n przedmiotów:

- każdy o ustalonej wartości $p_i > 0, i = 1, \dots, n$
- oraz o ustalonej masie $w_i > 0, i = 1, \dots, n$,

oraz plecak, który może pomieścić W kilogramów, $W > 0$.

Naszym zadaniem jest wybrać pewną liczbę przedmiotów

tak, by w plecaku pozostało jak najmniej wolnego miejsca

oraz by jego wartość była jak największa.

Zadanie optymalizacyjne

Inaczej mówiąc, chcemy znaleźć wartości

$q_1, q_2, \dots, q_n \geq 0, q_i \in C, i = 1, \dots, n$, dla których

wartość plecaka

$$P = p_1 \cdot q_1 + p_2 \cdot q_2 + \cdots + p_n \cdot q_n$$

będzie największa oraz nie przekroczymy

maksymalnej masy plecaka:

$$w_1 \cdot q_1 + w_2 \cdot q_2 + \cdots + w_n \cdot q_n \leq W.$$

Dwie wersje problemu

- Możemy założyć, że dysponujemy nieograniczoną liczbą każdej z rzeczy, wtedy mówimy o ogólnym problemie plecakowym.
- Jeżeli każdy przedmiot występuje jeden raz, to mówimy o decyzyjnym problemie plecakowym.

Strategie

W życiu codziennym podczas pakowania plecaka stosujemy najczęściej jedną z trzech strategii:

- Strategia I: wybieramy najcenniejsze przedmioty (czyli w kolejności nierosnących wartości p_i),
- Strategia II: wybieramy rzeczy zajmujące najmniej miejsca (czyli w kolejności niemalejących mas w_i),
- Strategia III: wybieramy rzeczy najcenniejsze w stosunku do swojej masy, czyli w kolejności nierosnących ilorazów $\frac{p_i}{w_i}$.

Wszystkie opisane strategie opierają się na działaniu zachłannym, jednak takie podejście nie zawsze gwarantuje otrzymanie optymalnego rozwiązania.

Przykład:

Niech $W = 23, n = 4$, wartości i masy przedmiotów przedstawiono w tabeli:

i	**1**	**2**	**3**	**4**
p_i	2	5	7	10
w_i	1	3	2	3
$\frac{p_i}{w_i}$	2	$1\frac{2}{3}$	$3\frac{1}{2}$	$3\frac{1}{3}$

- Strategia I:
  - 7 przedmiotów nr 4 (7 * 3 = 21 kg)
  - 1 przedmiot nr 3 (2 kg),
  - Wartość plecaka ***P*=77**.
- Strategia II:
  - 23 przedmioty nr 1 (23 *1 = 23 kg),
  - Wartość plecaka ***P*=46**.
- Strategia III:
  - 11 przedmiotów nr 3 (11 * 2 = 22 kg)
  - przedmiot nr 1 (1 kg).
  - Wartość plecaka w tym przypadku jest równa ***P*=79**.

Czy strategie dają optymalne rozwiązanie?

Patrząc na przykład można zauważyć, że zastosowanie strategii III nie daje optymalnego rozwiązania - można zapakować plecak tak, aby jego wartość była równa **80**.