

Lista nr 1 z matematyki dyskretnej

1. Udowodnij przez indukcję, że liczba funkcji różnowartościowych z m -elementowego zbioru A w n -elementowy zbiór B wynosi $\frac{n!}{(n-m)!}$.
2. Czy wśród liczb $1, 2, \dots, 10^{10}$ zapisanych w systemie dziesiętnym jest więcej tych zawierających cyfrę 9, czy tych, które jej nie zawierają?
3. (D) Ile jest podzbiorów n -elementowego zbioru A o nieparzystej ilości elementów? A o parzystej?
4. Mieszkańcy osady X mogą się zapisywać na dwie jednodniowe wycieczki, jedną do kanionu K , drugą nad wodospad W . Ile jest możliwości uformowania się wycieczek, jeśli w osadzie X mieszka n osób? Można brać udział w obu wycieczkach. Wycieczki są w różnych terminach.
5. (-) Na ile sposobów można posadzić w rzędzie 3 kobiety i 3 mężczyzn? A jeśli mężczyźni i kobiety muszą siedzieć na przemian?
6. Chcemy wybrać parę liczb naturalnych (a, b) , taką że (i) liczby a, b są z przedziału $[1, n]$ oraz (ii) suma $a + b$ jest parzysta. Na ile sposobów możemy to zrobić?
7. (-) Ile jest możliwych rejestracji samochodowych złożonych z 3 liter, po których następują 4 cyfry?
8. (-) Pokaż, że dla dowolnej liczby rzeczywistej x i dowolnej liczby całkowitej n zachodzi $\lceil x + n \rceil = \lceil x \rceil + n$.
9. Podaj warunek konieczny i dostateczny na to, aby $\lfloor nx \rfloor = n\lfloor x \rfloor$, gdzie n jest liczbą naturalną. *Podpowiedź:* Warunek powinien zawierać funkcję część ułamkową $\{x\}$.
10. Niech $x \in \mathbb{R}, x \geq 0$. Czy prawdziwe jest stwierdzenie:
 $\lfloor \sqrt{\lfloor x \rfloor} \rfloor = \lfloor \sqrt{x} \rfloor$?
11. Ile jest n -elementowych permutacji, które w rozkładzie na cykle mają tylko jeden cykl?
12. Dwoje dzieci zebrało 10 rumianków, 16 bławatków i 14 niezapominajek. Na ile sposobów mogą się podzielić kwiatkami?

13. Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek (w wielu kopiach) do zaoferowania. Na ile sposobów profesor Ksawery może wysłać widokówki w ciągu tego tygodniowego rejsu?
14. Chcemy rozmieścić n krążków, każdy o innej średnicy, na trzech (różnych) palach. Krążka większego nie można umieszczać na mniejszym. Ile jest poprawnych rozłożeń?
15. (-) Niech n będzie liczbą naturalną. Udowodnij indukcyjnie, że liczba podzbiorów zbioru n -elementowego wynosi 2^n .
16. Dla $k \geq 1$ wykaż tożsamość absorbcyjną:

$$\binom{n}{k} = \frac{n}{k} \binom{n-1}{k-1}.$$

Czy potrafisz udowodnić ją kombinatorycznie?