Matematyka dyskretna (L)

Katarzyna Paluch

Instytut Informatyki, Uniwersytet Wrocławski

2023

Wariacje

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów?

Wariacje

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów?

13^7

Liczba funkcji

Liczba wariacji z powtórzeniami

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach.
Wówczas liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m.
Innymi słowy: $|\{f : A \to B\}| = n^m$.

Liczba funkcji

Liczba wariacji z powtórzeniami

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Wówczas liczba funkcji ze zbioru A w B wynosi n^m.
Innymi słowy: $|\{f : A \to B\}| = n^m$.

Dowód 1: przez indukcję.
Dowód 2: pokazujemy równoliczność zbiorów: (i) $\{f : A \to B\}$ oraz (ii) iloczynu kartezjańskiego $B \times B \times \ldots \times B$.

Iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański

Niech $A_1, A_2, \ldots A_n$ będą skończonymi zbiorami. Wówczas $|A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n| = |A_1| \times |A_2| \times \ldots \times |A_n|$.

Liczba podzbiorów

Niech A będzie skończonym zbiorem o n elementach - $|A| = n$.
Ile podzbiorów ma A?
$|\{B : B \subseteq A\}| = ???$

Liczba podzbiorów

Niech A będzie skończonym zbiorem o n elementach. Wtedy $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$.

Dowód 1: przez indukcję.

Dowód 2:

Liczba podzbiorów

Liczba podzbiorów

Niech A będzie skończonym zbiorem o n elementach. Wtedy $|\{B : B \subseteq A\}| = 2^n$.

Dowód 1: przez indukcję.
Dowód 2: przez pokazanie równoliczności zbiorów: $\{B : B \subseteq A\}$ i $\{f : A \to \{0,1\}\}$.

Para podzbiorów

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy wybrać dwa jego podzbiory A i B takie, że $A \subseteq B$?

$|\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = ???$

Para podzbiorów

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy wybrać dwa jego podzbiory A i B takie, że $A \subseteq B$?

$$|\{(A, B) : A \subseteq B \subseteq U\}| = |\{f : U \to \{0, 1, 2\}| = 3^n$$

Wariacje cd

Profesor Ksawery Ksenofiliński wybiera się na tygodniowy rejs po Cykladach. Każdego dnia chciałby wysłać po jednej widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Okazuje się, że każdego dnia na każdej z odwiedzonych 7 (różnych) wysp sprzedawca ma 13 rodzajów widokówek do zaoferowania. Na ile sposobów profesor może wysłać widokówki?

Wariacje bez powtórzeń

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów, ale straganiarz wyprzedał prawie wszystkie widokówki i z każdego rodzaju została tylko jedna ?

Wariacje bez powtórzeń

Profesor Ksawery Ksenofiliński chciałby wysłać po widokówce do każdego z 7 swoich przyjaciół. Na ile sposobów może to zrobić, jeśli widokówek na ulicznym straganie jest 13 rodzajów, ale straganiarz wyprzedał prawie wszystkie widokówki i z każdego rodzaju została tylko jedna?

$13 \cdot 12 \cdot 11 \cdot \ldots \cdot 7$

Liczba funkcji różnowartościowych

Liczba wariacji bez powtórzeń

Niech A i B będą skończonymi zbiorami o odpowiednio m i n elementach. Wówczas liczba funkcji *różnowartościowych* ze zbioru A w B wynosi $n(n-1)\ldots(n-m+1) = \frac{n!}{(n-m)!}$.

Sekwencje

Ile jest k-elementowych ciągów cyfr, w których nigdzie dwie takie same cyfry nie występują obok siebie?

Sekwencje

Ile jest k-elementowych ciągów cyfr takich, że cyfra miejscu $i \geq 3$ jest inna od cyfry na miejscu $i-1$ oraz inna od cyfry na miejscu $i-2$?

Iloczyn

Suma rozłącznych równolicznych zbiorów

Niech każdy z n skończonych parami rozłącznych zbiorów $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ma m-elementów. Wtedy
$|\sum_{i=1}^{n} A_i| = nm$

Operacja k-krokowa

Iloczyn możliwości

Jeśli pewna operacja składa się z k kroków oraz

pierwszy krok można wykonać na n_1 sposobów,
drugi krok na n_2 sposobów (niezależnie od tego jak wykonano krok pierwszy),
$\ldots$,
k-ty krok można wykonać na n_k sposobów (niezależnie od tego jak wykonano poprzednie kroki), to

całą operację można wykonać na $n_1 n_2 \ldots n_k$ sposobów.

Załoga

Ania, Basia, Cyryl i Daniel zamierzają popłynąć w rejs. Muszą wybrać kto jest kapitanem, kto sternikiem i kto kucharzem. Nikt nie może pełnić dwóch funkcji. Ania nie może być kapitanem, a kucharzem musi być Cyryl lub Daniel.

Na ile sposobów mogą się podzielić funkcjami?

Permutacje

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy ustawić w rząd jego elementy?

Permutacje

Niech U będzie zbiorem n-elementowym. Na ile sposobów możemy ustawić w rząd jego elementy?

Na tyle, ile jest funkcji różnowartościowych $f : U \to \{1, 2, \ldots, n\}$.

$|\{f : U \to \{1, 2, \ldots, n\}, 1-1\}| = \frac{n!}{(n-n)!} = n!$.

Sufit i podłoga

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
$\lfloor x \rfloor = n \Leftrightarrow n \leq x < n + 1$ podłoga z x
$\lceil x \rceil = n \Leftrightarrow n - 1 < x \leq n$ sufit z x
$\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ część ułamkowa x

Sufit i podłoga - własności

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
$\lfloor x + n \rfloor = n + \lfloor x \rfloor$, bo
$\lfloor x \rfloor + n \leq x + n < \lfloor x \rfloor + n + 1$

$\lceil x + n \rceil = n + \lceil x \rceil$

Sufit i podłoga - własności

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
Czy zachodzi: $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$?

Jak zamienić podłogę na sufit?

Sufit i podłoga - własności

Niech $x \in R$ i $n \in Z$.
Czy zachodzi: $\lfloor nx \rfloor = n \lfloor x \rfloor$?

Jak zamienić podłogę na sufit?
$\lfloor -x \rfloor = -\lceil x \rceil$

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

$|U| = \{1, 2, \ldots, n\}$
$P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$

Porównajmy P_n^k z wariacjami k-elementowymi bez powtórzeń.
$|D| = \{1, 2 \ldots, k\}$
$F_{k,n}^{1-1} = \{f : D \to U : f \ \text{ różnowartościowa } \}$

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

$|U| = \{1, 2 \ldots, n\}$
$P_n^k = \{A \subseteq U : |A| = k\}$

Porównajmy P_n^k z wariacjami k-elementowymi bez powtórzeń.
$|D| = \{1, 2 \ldots, k\}$
$F_{k,n}^{1-1} = \{f : D \rightarrow U : f \ \text{ różnowartościowa } \}$
Dla $k = 1$ zachodzi: $|F_{k,n}^{1-1}| = |P_n^k|$
Dla $k > 1$ zachodzi: $|F_{k,n}^{1-1}| > |P_n^k|$

Podzbiory k-elementowe

Ile jest k-elementowych podzbiorów zbioru n-elementowego?

- Elementy k-elementowego podzbioru U możemy ustawić na $k!$ sposobów.
- Każdemu k-elem. podzbiorowi A odpowiada $k!$ funkcji różnowartościowych $\{1, 2, \ldots k\} \to A$.
- Każdemu k-elem. podzbiorowi A odpowiada $k!$-elem zbiór Z_A.
- Zauważmy, że $A \neq B \Rightarrow Z_A \cap Z_B = \emptyset$.
- $F^{1-1}_{k,n} = \bigcup_{A \subseteq U, |A|=k} Z_A$
- $|F^{1-1}_{k,n}| = k!|P^k_n|$
- $\frac{n!}{(n-k)!} = k!|P^k_n|$
- $|P^k_n| = \frac{n!}{(n-k)!k!} = \binom{n}{k}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k \leq n$.
Wówczas $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k \leq n$.
Wówczas $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: budujemy bijekcję $\mathcal{F}$ między P_n^k i P_n^{n-k}.
$P_n^k = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = k\}$
$P_n^{n-k} = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = n - k\}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k \leq n$.
Wówczas $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: budujemy bijekcję $\mathcal{F}$ między P_n^k i P_n^{n-k}.
$P_n^k = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = k\}$
$P_n^{n-k} = \{A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} : |A| = n - k\}$

$\mathcal{F} : P_n^k \to P_n^{n-k}$
$\mathcal{F}(A) = \{1, 2, \ldots, n\} \setminus A = \bar{A}$ (A przyporządkowujemy dopełnienie A)

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny:

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: dzielimy P_{n+1}^{k+1} na dwa rozłączne zbiory:

$U = \{1, 2, \ldots, n+1\}$
Z_{+}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U zawierających $n+1$
Z_{-}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U niezawierających $n+1$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: dzielimy P_{n+1}^{k+1} na dwa rozłączne zbiory:

$U = \{1, 2, \ldots, n+1\}$
Z_{+}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U zawierających $n+1$
Z_{-}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U niezawierających $n+1$

$|P_{n+1}^{k+1}| = |Z_{+}^{k+1}| + |Z_{-}^{k+1}|$
$|Z_{-}^{k+1}| = |P_{n}^{k+1}| = \binom{n}{k+1}$

Symbol Newtona - własności

Niech $k, n \in N$ takie, że $0 \leq k < n$.
Wówczas $\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$

Dowód 1: algebraiczny.
Dowód 2 kombinatoryczny: dzielimy P_{n+1}^{k+1} na dwa rozłączne zbiory:

$U = \{1, 2, \ldots, n+1\}$
Z_{+}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U zawierających $n+1$
Z_{-}^{k+1} - zbiór $(k+1)$-elem. podzbiorów U niezawierających $n+1$

$|P_{n+1}^{k+1}| = |Z_{+}^{k+1}| + |Z_{-}^{k+1}|$
$|Z_{-}^{k+1}| = |P_{n}^{k+1}| = \binom{n}{k+1}$
$|Z_{+}^{k+1}| = |P_{n}^{k}| = \binom{n}{k}$

Trójkąt Pascala

$$\begin{array}{ccccccc} & & & 1 & & & \\ & & 1 & & 1 & & \\ & 1 & & 2 & & 1 & \\ 1 & & 3 & & 3 & & 1 \end{array}$$