

4. From lecture notes 2.3.3:

$$\|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_{\infty}$$

$$\|x\|_2 \leq \|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\|x\|_1 \leq \sqrt{n} \|x\|_2$$

$$\frac{\|x\|_1}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_2, \quad n > 0$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\|x\|_1}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \\ \|x\|_{\infty} \leq \|x\|_1 \\ \frac{\|x\|_{\infty}}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_2 \leq \|x\|_1 \\ \|x\|_1 \leq n \cdot \|x\|_{\infty} \end{array} \right\}$$
$$\frac{\|x\|_{\infty}}{\sqrt{n}} \leq \|x\|_2 \leq n \cdot \|x\|_{\infty}$$

Two vector norms  $\|x\|_a$  and  $\|x\|_b$  are called equivalent if there exist real numbers  $c, d > 0$  such that

$$c\|x\|_a \leq \|x\|_b \leq d\|x\|_a$$

$\therefore \|x\|_2$  and  $\|x\|_{\infty}$  are equivalent