

Econometria

Modelo de Regresión Lineal Simple

Pasquini, Ricardo

IAE Business School
Universidad Austral

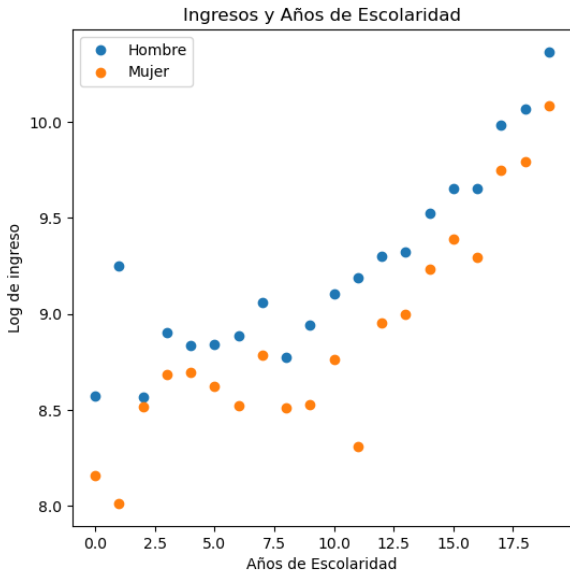
August 20, 2025

Objetivos de Aprendizaje

- ▶ Definir un modelo de regresión con una variable explicativa.
- ▶ Comprender los componentes del modelo de regresión.
- ▶ Aprender a estimar el modelo de regresión.
- ▶ Interpretar los coeficientes de regresión.
- ▶ Evaluar la bondad de ajuste del modelo.

Funcion de Esperanza Condicional

Aplicacion: Ingresos y Años de Escolaridad



Modelo de regresión simple

$$\underbrace{Y_i}_{\substack{\text{Variable} \\ \text{a} \\ \text{explicar} \\ \text{o} \\ \text{Dependiente}}} = \underbrace{\beta_0}_{\substack{\text{Constante} \\ \text{o inter-} \\ \text{cepto}}} + \beta_1 \cdot \underbrace{X_i}_{\substack{\text{Variable} \\ \text{explicativa} \\ 1 \\ \text{(independiente)}}} + \underbrace{\varepsilon_i}_{\text{Error}}$$

- ▶ β_0, β_1 son los coeficientes a ser estimados.
- ▶ Una vez estimados los denotamos con $\hat{\beta}_0, \hat{\beta}_1$.
- ▶ $\hat{\beta}_0$ es el intercepto y $\hat{\beta}_1$ es la pendiente.

Estimación del Modelo de Regresión

- ▶ Método: Mínimos Cuadrados Ordinarios (MCO).
- ▶ Explicación de MCO.
- ▶ Minimización de la suma de residuos cuadrados.

Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

- ▶ El estimador OLS es utilizado para estimar los coeficientes de un modelo de regresión lineal simple.
- ▶ Minimiza la suma de los cuadrados de los residuos (RSS), que es la diferencia entre los valores observados de Y y los valores predichos por el modelo.

Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Paso 1: Definir la función de pérdida (RSS):

$$RSS = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

Paso 2: Minimizar la función de pérdida en términos de β_0 y β_1 .

Paso 3: Resolver las ecuaciones resultantes para β_0 y β_1 .

Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Derivadas Parciales:

Derivamos la función de pérdida (RSS) respecto a β_0 y β_1 y las igualamos a cero para minimizar RSS:

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_0} = -2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0$$

$$\frac{\partial RSS}{\partial \beta_1} = -2 \sum_{i=1}^n X_i (Y_i - \beta_0 - \beta_1 X_i) = 0$$

Estas ecuaciones conducen a las soluciones para $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$.

Estimador de Mínimos Cuadrados Ordinarios (OLS)

Las ecuaciones resultantes para β_0 y β_1 son:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \bar{X}$$

Donde \bar{X} y \bar{Y} son las medias muestrales de X y Y respectivamente.

Estos son los estimadores de mínimos cuadrados ordinarios (OLS) para el modelo de regresión lineal simple.

Interpretación de los Coeficientes de Regresión

- ▶ Interpretación de β_0 y β_1 .
- ▶ Cómo interpretar el coeficiente de pendiente (β_1) en el contexto del modelo.

Bondad de Ajuste

- ▶ Medidas de bondad de ajuste: R^2 , R^2 ajustado, estadístico F.
- ▶ Explicación de cada medida y su significado.
- ▶ Interpretación de R^2 .

Bondad de Ajuste - R^2

- ▶ El coeficiente R^2 se define como la proporción de la varianza de la variable dependiente Y que es explicable por la variable X .
- ▶ Paso 1: Calcular los valores predichos de Y utilizando la ecuación de regresión:

$$\hat{Y}_i = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 X_i$$

Donde \hat{Y}_i es el valor predicho de Y para la i -ésima observación, y $\hat{\beta}_0$ y $\hat{\beta}_1$ son los coeficientes estimados obtenidos del análisis de regresión.

- ▶ Paso 2: Calcular la suma total de cuadrados (TSS), que mide la variabilidad total en la variable dependiente:

$$TSS = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2$$

Donde \bar{Y} es la media de los valores observados de Y .

Bondad de Ajuste - R^2

- Paso 3: Calcular la suma de cuadrados residual (RSS), que mide la variabilidad que no es explicada por el modelo de regresión:

$$RSS = \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

- Paso 4: Calcular la suma de cuadrados explicada (ESS), que mide la variabilidad explicada por el modelo de regresión:

$$ESS = \sum_{i=1}^n (\hat{Y}_i - \bar{Y})^2$$

- Paso 5: Calcular R^2 utilizando la fórmula:

$$R^2 = \frac{ESS}{TSS} = 1 - \frac{RSS}{TSS}$$

Esta fórmula representa la proporción de la variabilidad total en Y que es explicada por el modelo de regresión.

Error Cuadrático Medio (MSE)

- ▶ El MSE es una medida de la calidad de un modelo de regresión.
- ▶ Indica el promedio de los cuadrados de los errores, es decir, la diferencia entre los valores predichos por el modelo y los valores reales de la variable dependiente.

Error Cuadrático Medio (MSE)

Fórmula

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

- ▶ Donde Y_i es el valor real de la variable dependiente para la i -ésima observación.
- ▶ \hat{Y}_i es el valor predicho por el modelo de regresión para la i -ésima observación.
- ▶ n es el número total de observaciones.

Error Cuadrático Medio (MSE)

- **Paso 1:** Calcular los residuos para cada observación:

$$\hat{\varepsilon}_i = Y_i - \hat{Y}_i$$

- **Paso 2:** Elevar al cuadrado cada error:

$$\hat{\varepsilon}_i^2 = (Y_i - \hat{Y}_i)^2$$

- **Paso 3:** Calcular el promedio de los residuos al cuadrado:

$$\text{MSE} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \hat{\varepsilon}_i^2$$

Ejemplo

- ▶ Conjunto de datos de ejemplo: ingresos y años de educación.
- ▶ Gráfico de dispersión de los datos.
- ▶ Ecuación de regresión: $Ingresos = \beta_0 + \beta_1 \times Educacion$
- ▶ Interpretación de los coeficientes en el contexto del ejemplo.

Referencias

- ▶ Wooldridge ch. 2