Series de Tiempo

Herramientas Econométricas - UCA

Ricardo Pasquini

Octubre 2022

Series de Tiempo

- Una serie de tiempo es un proceso observado en una secuencia del tiempo $t = 1, 2, ..., T$
- Denotamos y_t a la observación en t.
- No hay indepedencia entre y_t e y_{t-1}.

Estacionariedad y Ergodicidad

- Para modelar los procesos estocásticos en el tiempo, sera necesario apelar a propiedades como la existencia de estacionariedad y ergodicidad.
  - Definición: Estacionariedad (*débil*): Si la serie cumple

    $$E(y_t) = \mu$$

    independientemente de t, y además si

    $$\mathrm{cov}(y_t, y_{t-k}) = \gamma(k)$$

    independientemente de t, para todo k.
  - $\rho(k) = \gamma(k)/\gamma(0) = \mathrm{corr}(y_t, y_{t-k})$ es la función de autocorrelación
- Una serie es ergódica si $\gamma(k) \to 0$ as $k \to \infty$.

Estacionariedad de los procesos AR

- Que los modelos autoregresivos modelados cumplan las propiedades de estacionariedad garantiza a su vez que se cumplan otras propiedades, como la estimación insesgada asintótica (i.e., convergencia en probabilidad al valor verdadero)
- Tomando como ejemplo el caso de un modelo AR(1):

$$y_t = \alpha y_{t-1} + e_t$$

- Por sustitución para atrás...

$$\begin{aligned} y_t &= e_t + \alpha e_{t-1} + \alpha^2 e_{t-2} + ... \\ &= \sum_{k=0}^{k} \alpha^k e_{t-k} \end{aligned}$$

- Converge si $|\alpha| < 1$

Estimación

- Definiendo

$$x_t = (1 \quad y_{t-1} \quad y_{t-2} \quad \cdots \quad y_{t-k})'$$
$$\beta = (\alpha_0 \quad \alpha_1 \quad \alpha_2 \quad \cdots \quad \alpha_k)'$$

Escribimos el modelo como:

$$y_t = x_t'\beta + e_t$$

El estimador de OLS es

$$\hat{\beta} = (X'X)^{-1}X'Y$$

- Se puede demostrar que si un proceso AR(k) es estacionario y ergódico, entonces el estimador de OLS es asintóticamente insesgado cuando $T \to \infty$

Distribución asintótica

- A los fines de testear hipótesis, una opción con muestras grandes es utilizar el siguiente resultado asintótico:
  - Teorema: Si el proceso AR(k) para y_t es estrictamente estacionario y ergódico, entonces cuando $T \to \infty$
  - $$\sqrt{T}(\hat{\beta} - \beta) \to N(0, Q^{-1}\Omega Q^{-1})$$

    Recordemos que podemos utilizar los estimadores de momentos:

$$\hat{\Omega} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i x_i' \hat{e}_i^2$$

$$\hat{Q} = \sum_{i=1}^{n} x_i x_i'$$

Bootstrap

- Método 1: Bootstrap Paramétrico basado en el modelo

  1. Estimar β y los residuos $\hat{e}_t$
  2. Fijar una condición inicial $y_{-k+1}, y_{-k+2}, ..., y_0$ (n.b. desde un $t = -k + 1$ hasta el primer valor)
  3. Seleccionar aleatoriamente iid valores de e_i^* de la distribución de residuos $e_1, ..e_T$

     $$y_t^* = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1}^* + \alpha_2 y_{t-2}^* + ... + \alpha_k y_{t-k}^* + e_t^*$$

     Crear series de manera recursiva (tomando los valores de y de la condición inicial, aplicando los k rezagos del modelo AR(k), y sumando el error.
  4. Reestimar beta.

Bootstrap

- Método 2: Block Resampling
  1. Dividir la muestra en T/m bloques de largo m.
  2. Muestrear los bloques completos. Para cada muestra simulada, muestrear T/m bloques.
  3. Juntar los bloques para crear una serie de tiempo boostrapeada.
  4. Esto permite la correlación serial arbitraria, y heterocedasticidad.
  5. Podría no funcionar bien en muestras pequeñas.