

Revisión de Supuestos Estadísticos e Introducción a Análisis Espacial

Métodos Cuantitativos en Estudios Urbanos II - MEU UTDT

Ricardo Pasquini

11 de julio de 2025

Repaso

- ▶ Estadístico T es la base del Test de Hipótesis

$$t = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{SE(\hat{\beta})} = \frac{\hat{\beta} - \beta_0}{\sqrt{\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}}}$$

Donde:

- ▶ $\hat{\beta}$ es el coeficiente estimado
 - ▶ β_0 es el valor bajo la hipótesis nula
 - ▶ $SE(\hat{\beta})$ es el error estándar del coeficiente
 - ▶ $\hat{\sigma}^2$ es la varianza estimada de los errores
- ▶ Este estadístico tiene una distribución T-student. Sin embargo, este resultado se construye sobre varios supuestos:
 - ▶ Los errores tienen una varianza constante
 - ▶ Los errores son independientes
 - ▶ Los errores tienen una distribución Normal

Heteroscedasticidad

- ▶ Varianza no constante en los errores del modelo

En el modelo homoscedástico (ideal):

$$Var(\epsilon_i) = \sigma^2 \text{ para todo } i$$

En presencia de heteroscedasticidad:

$$Var(\epsilon_i) = \sigma_i^2 \text{ varía con } i$$

- ▶ La dispersión de los residuos varía según los valores de X o Y
- ▶ Puede surgir por:
 - ▶ Datos agrupados con diferentes niveles de variabilidad
 - ▶ Relaciones no lineales subyacentes
 - ▶ Errores de medición que varían con la magnitud de las variables

Heteroscedasticidad - Visualización

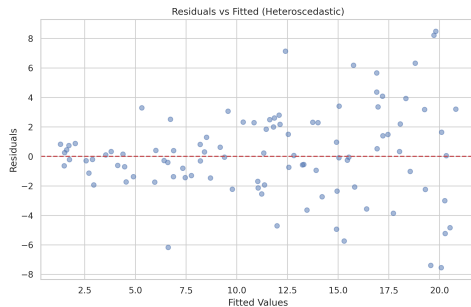
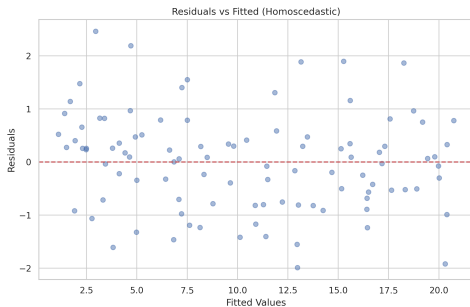


Figura: Residuos vs. Valores Ajustados: Homoscedástico (izq.) vs. Heteroscedástico (der.)

Consecuencias de la Heteroscedasticidad

- ▶ Estimadores OLS siguen siendo insesgados
- ▶ Errores estándar incorrectos
- ▶ Intuición del problema:
 - ▶ En OLS, asumimos que cada observación tiene la misma varianza (σ^2)
 - ▶ Cuando hay heteroscedasticidad, algunas observaciones son más ruidosas que otras
 - ▶ La fórmula tradicional del error estándar:

$$SE(\hat{\beta}) = \sqrt{\hat{\sigma}^2(X'X)^{-1}}$$

asume incorrectamente que todas las observaciones tienen el mismo peso

- ▶ En realidad, deberíamos dar:
 - ▶ Menor peso a observaciones con alta varianza
 - ▶ Mayor peso a observaciones con baja varianza

Soluciones para la Heteroscedasticidad

- ▶ Uso de errores estándar robustos (HC0 - White)
 - ▶ En Python (statsmodels):

```
import statsmodels.formula.api as smf
model = smf.ols('precio ~ superficie + habitaciones', data=df)
results = model.fit(cov_type='HC0')
```
 - ▶ En R:

```
coeftest(model, vcov = vcovHC(model, type = "HC0"))
```
- ▶ Otras correcciones de errores estándar robustos:
 - ▶ HC1: Corrección adicional para muestras pequeñas
 - ▶ HC2: Considera el leverage de las observaciones (el leverage es una medida de la importancia de la observación particular en el fit del modelo)
 - ▶ HC3: Más conservador, mejor para muestras muy pequeñas

Soluciones para la Heteroscedasticidad (cont.)

- ▶ Transformación de variables:
 - ▶ Transformación logarítmica cuando la varianza aumenta con el nivel
- ▶ Modelado explícito de la varianza:
 - ▶ Mínimos Cuadrados Ponderados (WLS)
 - ▶ Se asignan pesos inversamente proporcionales a la varianza estimada
 - ▶ Requiere conocer o poder modelar la estructura de la varianza

Normalidad de los Residuos

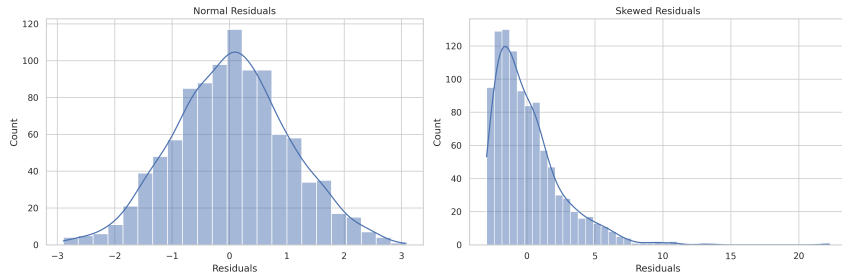


Figura: Distribución de Residuos: Normal vs. Sesgada

Normalidad de los Residuos - Q-Q Plot

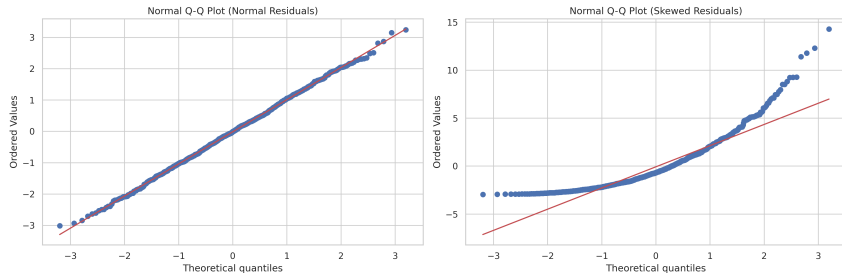


Figura: Q-Q Plots: Residuos Normales vs. Sesgados

Consecuencias e Importancia de la No-Normalidad

- ▶ Menos crucial cuando n es grande (Teorema asintótica)
- ▶ Las pruebas t y F son robustas con muestras grandes
- ▶ Mayor preocupación en muestras pequeñas
- ▶ Soluciones:
 - ▶ Transformaciones de la variable dependiente
 - ▶ Logarítmica
 - ▶ Raíz cuadrada
 - ▶ Identificar y tratar valores atípicos

Independencia de las Observaciones

- ▶ Tipos de Autocorrelación:

- ▶ Temporal

- ▶ Común en series de tiempo
 - ▶ Patrones sistemáticos en el tiempo
 - ▶ Observaciones cercanas en el tiempo están relacionadas

- ▶ Espacial

- ▶ Frecuente en estudios urbanos
 - ▶ "Todo está relacionado con todo, pero las cosas cercanas están más relacionadas entre sí"
 - ▶ Dependencia basada en la ubicación geográfica

Autocorrelación Temporal

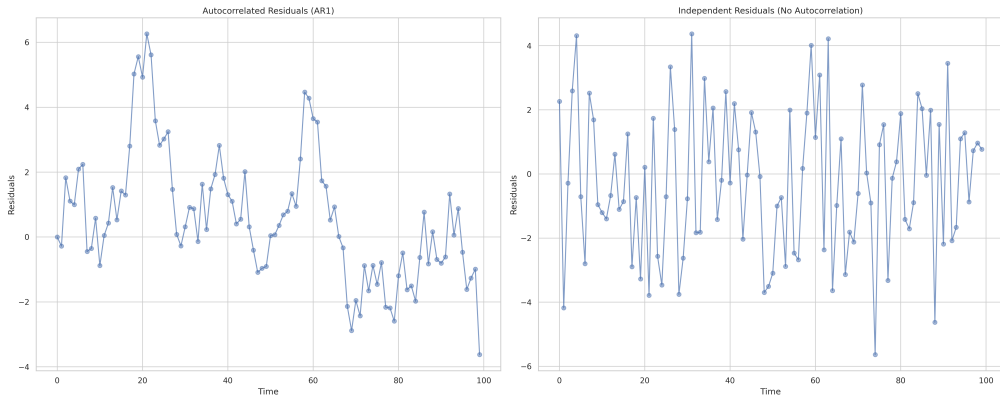


Figura: Comparación: Residuos con Autocorrelación Temporal (izq.) vs. Residuos Independientes (der.)

Autocorrelación Espacial

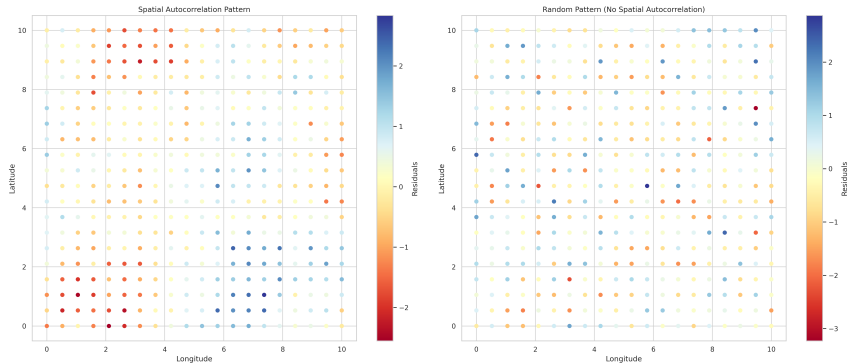


Figura: Residuos con Autocorrelación Espacial vs. Aleatorios

Análisis de Autocorrelación Espacial

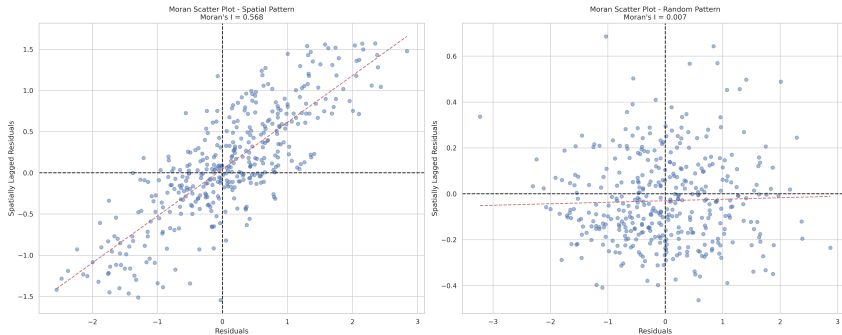


Figura: Diagramas de Moran: Patrón Espacial vs. Aleatorio

Consecuencias de la Autocorrelación

- ▶ Estimadores OLS ineficientes
- ▶ Errores estándar sesgados: cuando hay autocorrelación positiva, los errores estándar son menores que los reales (llevando a sobre-detectar significancia). Cuando hay autocorrelación negativa, los errores estándar son mayores que los reales (llevando a que no se detecte la significancia).
- ▶ Inferencia estadística no válida
- ▶ Predicciones subóptimas
- ▶ Soluciones:
 - ▶ Modelos con rezagos temporales (AR, MA, ARIMA)
 - ▶ Modelos espaciales
 - ▶ Rezago espacial (Spatial Lag)
 - ▶ Error espacial (Spatial Error)
 - ▶ Modelos mixtos espaciales
 - ▶ Corrección de errores estándar por clusters

Análisis Espacial

- ▶ ¿Qué hace que un análisis sea espacial?
 - ▶ Tanto la ubicación como los atributos importan
 - ▶ Los resultados cambian cuando cambia la disposición espacial
 - ▶ Contrasta con el análisis no espacial donde la ubicación es irrelevante
- ▶ Dimensiones de la econometría espacial:
 - ▶ Especificar la estructura de la dependencia espacial
 - ▶ Testear su presencia
 - ▶ Estimar modelos con efectos espaciales
 - ▶ Precaución: Los efectos espaciales podrían no cambiar las conclusiones

Desafíos Clave en el Análisis Espacial

- ▶ Falacia Ecológica
 - ▶ No se puede inferir comportamiento individual de datos agregados
 - ▶ Se debe mantener el nivel apropiado de interpretación
- ▶ Problema de la Unidad de Área Modificable (MAUP)
 - ▶ Los resultados dependen de la escala de agregación
 - ▶ Los resultados dependen de la zonificación/agrupación de unidades
 - ▶ Ejemplo: Distritos electorales y gerrymandering
- ▶ Problema de Cambio de Soporte
 - ▶ Mezcla de datos de diferentes escalas espaciales
 - ▶ Ejemplo: Datos puntuales vs. datos de área
 - ▶ Soluciones: agregar a una escala común, interpolar

Matriz de Pesos Espaciales (W)

- ▶ Propósito: Formaliza las relaciones espaciales entre observaciones
- ▶ Características:
 - ▶ Matriz $N \times N$ (N = número de observaciones)
- ▶ Mayormente dispersa
(99 %cerostípicamente)*Elementos diagonales = 0(sin auto – vecinos)*
- ▶ Tipos Comunes:
 - ▶ Basados en Contigüidad
 - ▶ Rook (bordes comunes)
 - ▶ Queen (bordes + esquinas)
 - ▶ Bishop (solo esquinas)
 - ▶ Basados en Distancia
 - ▶ Bandas de distancia
 - ▶ K vecinos más cercanos
 - ▶ Funciones de distancia

Estadístico I de Moran

- ▶ Fórmula:

$$I = \frac{N}{W} \frac{\sum_i \sum_j z_i z_j \cdot w_{i,j}}{\sum_i z_i^2}$$

donde:

- ▶ $z_i = y_i - \bar{y}$ (desviación de la media)
 - ▶ N es el número de unidades espaciales
 - ▶ W es la suma de pesos
- ▶ Limitaciones:
 - ▶ Funciona como estadístico de mala especificación
 - ▶ Detecta correlación espacial, pero también:
 - ▶ Heteroscedasticidad
 - ▶ No linealidad

Introducción a la Regresión Espacial

- ▶ Desafío clave:
 - ▶ No se pueden modelar todas las interacciones con datos de corte transversal
 - ▶ N observaciones pero N^2 interacciones potenciales
 - ▶ Solución: Simplificar usando matriz de pesos espaciales

Variables Espacialmente Rezagadas

- ▶ Concepto básico: Promedio ponderado de observaciones vecinas
- ▶ Características:
 - ▶ Similar al rezago distribuido en series de tiempo
 - ▶ Suaviza la variabilidad (menor varianza)
 - ▶ Excluye auto-vecinos (diagonal de W es cero)

Modelo de Rezago Espacial

- ▶ Incluye la variable dependiente espacialmente rezagada (Wy)
- ▶ Forma básica:

$$y = \rho Wy + X\beta + \epsilon$$

donde:

- ▶ ρ es el coeficiente de autocorrelación espacial
 - ▶ Wy es el rezago espacial de la variable dependiente
 - ▶ $X\beta$ son las variables explicativas y sus coeficientes
- ▶ Características:
 - ▶ Modela interacción espacial directa
 - ▶ Tiene efectos multiplicadores (bucles de retroalimentación)
 - ▶ Su omisión lleva a sesgo e ineficiencia