Transporte Convectivo

Rafael Passos Domingues • UNIFEI •
d2021101072@unifei.edu.br

Sumário

Transporte Convectivo

Mudança de calor expressa em termos do calor específico

Primeira Lei da Termodinâmica expressa em termos do calor específico

Convecção vista como um processo adiabático

Recapitulando...

Critério para o Transporte Convectivo

Variação de temperatura da bolha ao subir

A variação da Temperatura define o transporte convectivo

Grânulos Solares

Transporte Convectivo

- Não é só radiação que transporta energia na estrela.
- Para entender o transporte convectivo vamos relembrar...

Conservação de energia ou Primeira Lei da Termodinâmica

$$dU = \eth Q - \eth W$$

- Variação de energia = variação de calor + trabalho realizado no meio
    - U $\rightarrow$ função de estado $\rightarrow$ não depende do histórico de mudanças, somente do estado atual.
- $\eth Q$ e $\eth W$ dependem do caminho de integração.

Energia Interna

A energia interna por unidade de massa é dada por:

- U = (energia média/partícula) $\times$ (numero de partículas/massa)

$$U = \bar{K} \times \frac{1}{\bar{m}} = \bar{K} \times \frac{1}{\mu m_H}$$

- Para um gás ideal

$$\bar{K} = \frac{3}{2} k_B T$$

$$\bar{K} = \frac{3}{2} \left(\frac{k_B}{\mu m_H} \right) T = U(\mu, T)$$

Mudança de calor expressa em termos do calor específico

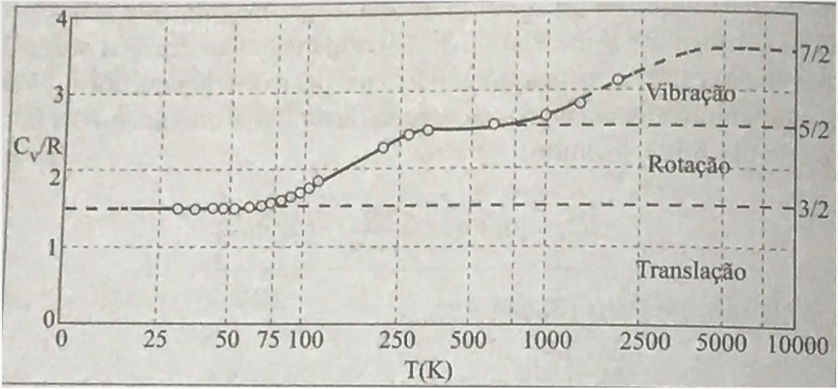


Figura 1: Calores específicos para vários modelos possíveis de gases ideais.

Mudança de calor expressa em termos do calor específico

- Calores Específicos:

$$C_P = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P \qquad C_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V$$

- Considere o trabalho realizado por unidade de massa:

$$\eth W = \frac{F}{m}\,dr \qquad \eth W = \frac{P \cdot A}{m}\,dr \qquad \eth W = P\,dV$$

Onde V é o volume específico:

$$V = \frac{1}{\rho}$$

$$dU = \eth Q - PdV$$

À volume constante, temos

À volume constante, temos:

$$dU = (\eth Q)_V = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_V dT \qquad dU = C_V dT$$

Para o gás monoatômico, teríamos:

$$C_V = \frac{3}{2}\left(\frac{k_B}{\mu m_H}\right) = \frac{3}{2} nR$$

Primeira Lei da Termodinâmica expressa em termos do calor específico

$$dU = \left(\frac{\partial Q}{\partial T}\right)_P dT - P\left(\frac{\partial V}{\partial T}\right)_P dT$$

Usando a lei dos gases ideais,

$$PV = nRT$$

temos,

$$PdV + VdP = RT\ dn + nR\ dT$$

Usando as definições dos calores específicos, temos:

$$C_P = C_V + nR = C_V + \left(\frac{k_B}{\mu m_H}\right)$$

[1]

---

[1] Válido para gases ideais.

Normalmente define-se,

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V}$$

Usando as relações anteriores, pode-se mostrar que para o gás monoatômico,

$$\gamma = \frac{5}{3}$$

Para gases ionizados, o aumento da temperatura é menor pois parte da energia vai para a ionização.

Calores Específicos altos com γ tendendo a 1.

Processos adiabáticos (sem troca de calor)

Como a energia interna independe do processo envolvido, podemos adotar.

$$\eth Q = 0 \qquad dU = -PdV$$

e como,

$$dU = C_V dT \qquad -PdV = C_V dT$$

Mas vimos que:

$$PdV + VdP = RT\ dn + nR\ dT$$

Assumindo n constante, temos:

$$PdV + VdP = nR\ dT$$

Combinando os resultados, temos:

$$PdV + VdP = -\left(\frac{nR}{C_V}\right)\ PdV$$

Reescrevemos como:

$$\gamma\ \frac{dV}{V} = -\frac{dP}{P} \qquad PV^{\gamma} = Cte$$

Convecção vista como um processo adiabático

A convecção é vista como um processo adiabático.

- Considere uma bolha de gás que emerge e expande adiabaticamente (não troca calor com o meio).
  - Usando a lei dos gases ideais podemos descrever como varia a temperatura da bolha.

$$P = \frac{k_B\, \rho\, T}{\mu m_H}$$

$$\frac{dP}{dr} = \left(\frac{\partial P}{\partial \mu}\right)\frac{d\mu}{dr} + \left(\frac{\partial P}{\partial \rho}\right)\frac{d\rho}{dr} + \left(\frac{\partial P}{\partial T}\right)\frac{dT}{dr}$$

$$\frac{dP}{dr} = \left(-\frac{P}{\mu}\right)\frac{d\mu}{dr} + \left(\frac{P}{\rho}\right)\frac{d\rho}{dr} + \left(\frac{P}{T}\right)\frac{dT}{dr}$$

Usando ainda a relação adiabática para pressão e volume, lembrando que $V = 1/\rho$.

$$P = Cte \cdot \rho^{\gamma}$$

$$\frac{dP}{dr} = \gamma \left(\frac{P}{\rho}\right) \frac{d\rho}{dr}$$

Assumindo que μ não varia, temos que:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right) \frac{T}{P} \left(\frac{d\rho}{dr}\right)$$

O gradiente de temperatura adiabático:

- Usando a equação do equilíbrio hidrostático

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\,\rho_r$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{\mu\, m_H}{k_B}\,\left(\frac{GM_r}{r^2}\right)$$

Se esse gradiente for menor (em módulo) que o da vizinhança, chamamos de super adiabático.

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{*} > \left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad}$$

A relação entre esses dois gradientes essencialmente dita se o transporte de energia vai ser convectivo ou não

- Super adiabático $\rightarrow$ Transporte Convectivo

Recapitulando...

Equilíbrio Hidrostático

$$\frac{dP_r}{dr} = -\frac{GM_r}{r^2}\ \rho_r$$

Continuidade de Massa

$$\frac{dM_r}{dr} = 4\pi r^2\ \rho_r$$

Transporte de energia por radiação

$$\frac{dT_r}{dr} = -\frac{3}{4ac}\frac{\kappa_\lambda\ \rho_r}{T_r^3}\ F_{rad}$$

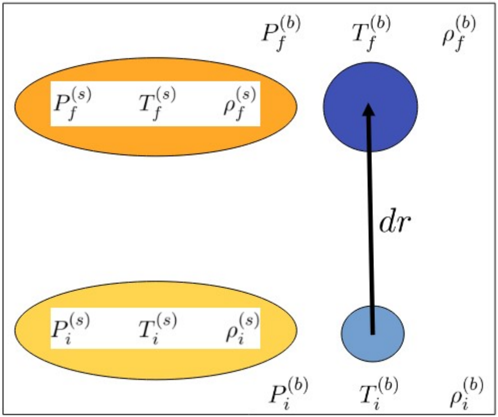
Transporte de energia por convecção

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = -\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\frac{\mu\ m_H}{k_B}\ \left(\frac{GM_r}{r^2}\right)$$

Pressão total (localmente)

$$P = \frac{\rho_r\ k_B\ T_r}{\mu\ m_H} + \frac{1}{3}\ a\ T_r^4$$

Critério para o Transporte Convectivo



Critério para o Transporte Convectivo

Quando uma bolha quente para de subir?
De acordo com o princípio de Arquimedes, a força na bolha por unidade de volume é:

$$f_E = \rho_i^{(s)}\, g$$

Subtraindo a força da gravidade na bolha:

$$f_g = \rho_i^{(b)}\, g$$

Temos a força resultante:

$$f_{res} = (\rho_i^{(b)} - \rho_i^{(s)})\, g$$

Para seguir subindo a bolha deve ter:

$$\rho_i^{(b)} < \rho_i^{(s)}$$

Inicialmente a bolha se encontra em equilíbrio térmico com o entorno.

$$T_i^{(b)} \approx T_i^{(s)} \qquad \rho_i^{(b)} \approx \rho_i^{(s)}$$

Assumimos que a bolha se expande adiabaticamente (sem trocar calor com o entorno), e que:

$$P_f^{(b)} \approx P_f^{(s)}$$

Assumindo um deslocamento infinitesimal da bolha, temos:

$$\rho_f^{(b)} \approx \rho_i^{(b)} + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^{(b)} dr$$

O mesmo vale para o entorno.

$$\rho_f^{(s)} \approx \rho_i^{(s)} + \left(\frac{d\rho}{dr}\right)^{(s)} dr$$

Se...

$$\rho_f^{(b)} < \rho_f^{(s)}$$

Variação de temperatura da bolha ao subir

Como estamos considerando um processo adiabático (ou seja, um processo onde não há trocas de calor), usamos:

$$\frac{dP}{dr} = \gamma\left(\frac{P}{\rho}\right)\frac{d\rho}{dr}$$

Escrevendo em termos do meio (s) e o gradiente de pressão, temos:

$$\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\rho_i^{(b)}}{P_i^{(b)}}\right)\frac{dP}{dr}|_{(b)} < \frac{\rho_i^{(s)}}{P_i^{(s)}}\left[\frac{dP}{dr}|_{(s)} - \left(\frac{P_i^{(s)}}{T_i^{(s)}}\right)\frac{dP}{dr}|_{(s)}\right]$$

Como adotamos:

$$P^f_{(b)} = P^f_{(s)}$$

$$\left(\frac{1}{\gamma} - 1\right)\frac{dP}{dr}\left(\frac{T}{P}\right) > \frac{dT}{dr}$$

Mas como visto anteriormente:

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} = \left(1 - \frac{1}{\gamma}\right)\frac{T}{P}\left(\frac{dP}{dr}\right)$$

$$\left(\frac{dT}{dr}\right)_{ad} > \left(\frac{dT}{dr}\right)_{*}$$

A variação da Temperatura define o transporte convectivo

Como a temperatura diminui com o raio, tomando o módulo, temos:
Condição para a bolha seguir subindo, ou seja, para se ter transporte convectivo.

$$\left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad} < \left|\frac{dT}{dr}\right|_{*}$$

1. **Alta Opacidade:** O gradiente de temperatura do meio entorno seria muito alto, dificultando o transporte somente radiativo.
2. **Ionização:** Baixo $\mu \rightarrow$ Alto $C_P \rightarrow$ Baixo $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{ad}$
3. **Dependência da produção de energia com a temperatura:** Alto fluxo radiativo $\rightarrow$ Alto $\left|\frac{dT}{dr}\right|_{*}$

Grânulos Solares

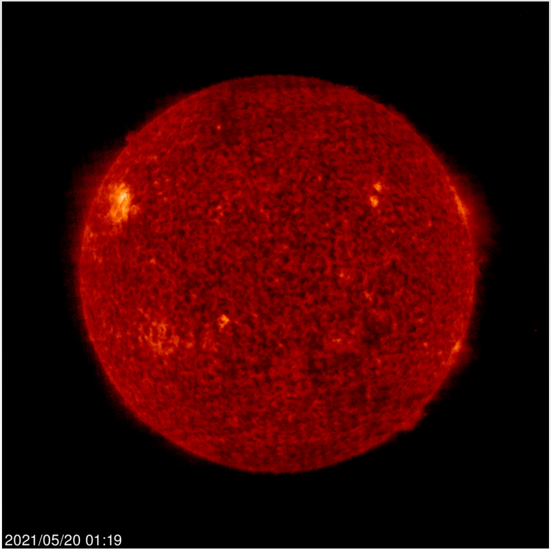


Figura 2: Imagem do Sol no UV extremo (304 Å) - *SOHO*