

# 并行计算

# Parallel Computing

主讲 孙经纬  
2024年 春季学期

# 概要

- 第二篇 并行算法的设计
  - 第五章 并行算法与并行计算模型
  - **第六章 并行算法基本设计策略**
  - 第七章 并行算法常用设计技术
  - 第八章 并行算法一般设计过程

# 第六章 并行算法基本设计策略

- **6.1 串行算法的直接并行化**

- 6.1.1 设计方法描述

- 6.1.2 快排序算法的并行化

- 6.2 从问题描述开始设计并行算法

- 6.3 借用已有算法求解新问题

# 设计方法的描述

## ■ 方法描述

发掘和利用现有串行算法中的并行性，直接将串行算法改造为并行算法。

## ■ 评注

- 串行算法直接并行化的方法是并行算法设计的最常用方法之一；
- 不是所有的串行算法都可以直接并行化的；
- 一个好的串行算法并不一定能并行化为一个好的并行算法；
- 许多数值串行算法可以并行化为有效的数值并行算法。

# 快排序算法的并行化

## ■ SISD上的快排序算法6.1

输入：无序序列 ( $A_q \dots A_r$ )

输出：有序序列 ( $A_q \dots A_r$ )

Procedure Quicksort( $A, q, r$ );

Begin

**if**  $q < r$  **then**

    (1)  $x = A_q$

    (2)  $s = q$

    (3) **for**  $i = q + 1$  **to**  $r$  **do**

**if**  $A_i \leq x$  **then**

$s = s + 1$

        swap( $A_s, A_i$ )

**end if**

**endfor**

    (4) swap( $A_q, A_s$ )

    (5) Quicksort( $A, q, s$ )

    (6) Quicksort( $A, s + 1, r$ )

**end if**

**end**

对于长度为 $n$ 的序列，在最坏情况下的划分的两个子序列为 $n-1$ 及 $1$ 的长度、相应的运行时间为 $t(n) = t(n-1) + \Theta(n)$ ，其解为 $t(n) = \Theta(n^2)$ 。

理想的情况是所划分的两个子序列等长，相应的运行时间为 $t(n) = 2t(n/2) + \Theta(n)$ ，其解为 $t(n) = \Theta(n \log n)$ 。

# 快排序算法的并行化

## ■ 快排序的并行化

- 一种自然的并行化方法是并行地调用快排序对两个所划分的子序列进行快排序。这种方法并不改变串行算法本身的属性，很容易改成并行形式。但是，如果用 $n$ 个PE排序 $n$ 个数，若用一个PE将 $(A_1 \dots A_n)$ 划分成 $(A_1 \dots A_s)$ ， $(A_{s+1} \dots A_n)$ 是不会得到成本最优算法的，因为单是划分时就有  $\Omega(n)$ ，所以  $C(n) = p(n) t(n) = \Omega(n^2)$ 。
- 可见，只有将划分步并行化，才可能得到成本最优算法。
- PRAM-CRCW上快排序算法
  - 构造一棵二叉排序树，其中主元是根
  - 小于等于主元的元素处于左子树，大于主元的元素处于右子树
  - 其左、右子树分别也为二叉排序树

# 快排序算法的并行化

## ■ 算法6.2 APRAM-CRCW上的快排序二叉树构造算法

输入：序列 $(A_1, \dots, A_n)$ 和 $n$ 个处理器

输出：供排序用的一棵二叉排序树

Begin

```
(1)for each processor i par-do      (2)repeat for each processor i<>root par-do
  (1.1)root=i                        if  $(A_i < A_{f_i}) \vee (A_i = A_{f_i} \wedge i < f_i)$  then
  (1.2) $f_i = \text{root}$                   (2.1) $LC_{f_i} = i$ 
  (1.3) $LC_i = RC_i = n+1$             (2.2)if  $i = LC_{f_i}$  then exit else  $f_i = LC_{f_i}$  endif
end for                               else
                                      (2.3) $RC_{f_i} = i$ 
                                      (2.4)if  $i = RC_{f_i}$  then exit else  $f_i = RC_{f_i}$  endif
                                      endif
                                      end repeat
End
```

注：(1) $A_i$ ,  $LC_i$ ,  $RC_i$ , **root是SM变量**； $f_i$ 可以是LM变量；

(2)时间为 $O(\log n)$

多处理器并行写入，只有一个值能成功写入

# 第六章 并行算法基本设计策略

- 6.1 串行算法的直接并行化
- **6.2 从问题描述开始设计并行算法**
  - 6.2.1 设计方法描述
  - 6.2.2 有向环 $k$ 着色算法的并行化
- 6.3 借用已有算法求解新问题



# 设计方法的描述

## ■ 方法描述

从问题本身描述出发，不考虑相应的串行算法，设计一个全新的并行算法。

## ■ 评注

- 挖掘问题的固有特性与并行的关系；
- 设计全新的并行算法是一个挑战性和创造性的工作；
- 利用串的周期性的PRAM-CRCW串匹配算法是一个很好的范例（教材6.2.1-6.2.3，略）。

# 有向环k着色算法的并行化

## ■ K着色问题

设有向环 $G=(V,E)$ ， $G$ 的 $k$ 着色问题：构造映射 $c$ :

$V \rightarrow \{0,1,2,\dots,k-1\}$ ，使得如果 $\langle i,j \rangle \in E$ ，则 $c[i] \neq c[j]$

即：环上相邻节点不同色

## ■ 3着色串行算法

从一顶点开始，依次给顶点交替用两种颜色着色，如果顶点数为奇数则需要第3种颜色。

注：该串行算法难以并行化。这时需要将顶点划分为若干类，每类指派相同颜色，最后再将分类数减为3。

# 有向环k着色算法的并行化

## ■ 基本并行着色算法

算法: SIMD-EREW模型

//输入初始点着色 $c(i)$ , 输出最终着色 $c'(i)$

begin

for  $i=1$  to  $n$  par-do

(1)令 $k$ 是 $c(i)$ 和 $c(i)$ 的后继)的最低的不同二进制位

(2) $c'(i) = 2^k + c(i)_k$  //  $c(i)_k$ 为 $c(i)$ 的二进制第 $k$ 位

end for

end

(1)算法的正确性需要证明 (是否保证相邻节点不同色? ) ;

(2)算法的运行时间和工作量?

(3)算法应用的是破对称技术, 算法中打破了顶点的对称性, 并对分类进行了压缩;

(4)在此算法的基础上如何构造3着色算法?

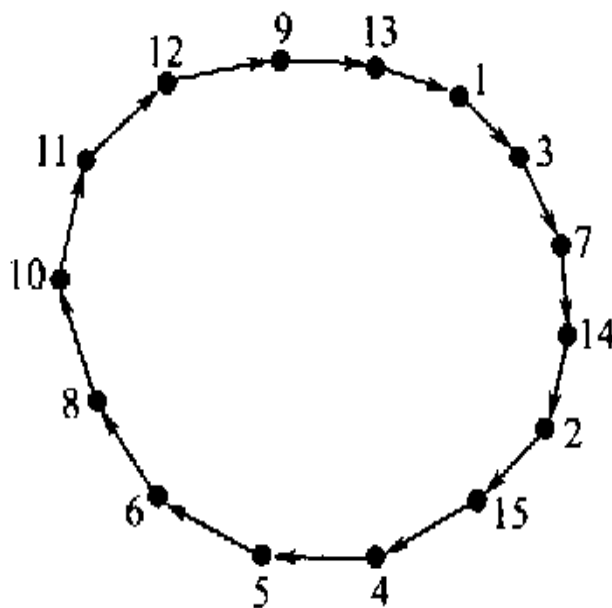
# 有向环k着色算法的并行化

如何构造3着色算法？

1. 反复调用基本着色算法，可以证明在“几乎”常数次（实际上是迭代对数次， $\log^*n$ ）调用后实现不超过6着色
2. 然后可以经过至多3次简单处理降为3着色。

处理方法：

对于大于等于3的颜色，用 $\{0,1,2\}$ 中最小可能颜色代替



(a)

$v$	$c$	$k$	$c'$
1	0001	1	2
3	0011	2	4
7	0111	0	1
14	1110	2	5
2	0010	0	0
15	1111	0	1
4	0100	0	0
5	0101	0	1
6	0110	1	3
8	1000	1	2
10	1010	0	0
11	1011	0	1
12	1100	0	0
9	1001	2	4
13	1101	2	5

(b)

# 第六章 并行算法基本设计策略

- 6.1 串行算法的直接并行化
- 6.2 从问题描述开始设计并行算法
- **6.3 借用已有算法求解新问题**
  - 6.3.1 设计方法描述
  - 6.3.2 利用矩阵乘法求所有点对间最短路径

# 设计方法的描述

## ■ 方法描述

- 找出求解问题和某个已解决问题之间的联系；
- 改造或利用已知算法应用到求解问题上。

## ■ 评注

- 这是一项创造性的工作；
- 使用矩阵乘法算法求解所有点对间最短路径是一个很好的范例。

# “矩阵乘法”求所有点对间最短路径

## ■ 计算原理

有向图 $G=(V,E)$ ，边权矩阵 $W=(w_{ij})_{n \times n}$ ，求最短路径长度矩阵 $D=(d_{ij})_{n \times n}$ ， $d_{ij}$ 为 $v_i$ 到 $v_j$ 的最短路径长度。假定图中无负权有向回路，记 $d^{(k)}_{ij}$ 为 $v_i$ 到 $v_j$ 至多有 $k-1$ 个中间结点的最短路径长， $D^k=(d^{(k)}_{ij})_{n \times n}$ ，则

(1)  $d^{(1)}_{ij}=w_{ij}$  当  $i \neq j$  (如果 $v_i$ 到 $v_j$ 之间无边存在记为 $\infty$ )

$d^{(1)}_{ij}=0$  当  $i=j$

(2) 无负权回路  $\rightarrow d_{ij} = d^{(n-1)}_{ij}$

与基于动态规划的  
Floyd算法有些相似

$$d_{i,j}^k = \begin{cases} w[i,j] & k=0 \\ \min\{d_{i,j}^{k-1}, d_{i,k}^{k-1} + d_{k,j}^{k-1}\} & 1 \leq k \leq n \end{cases}$$

(3) 利用最优性原理： $d^{(k)}_{ij} = \min_{1 \leq l \leq n} \{d^{(k/2)}_{il} + d^{(k/2)}_{lj}\}$

视：“+”  $\rightarrow$  “ $\times$ ”，“min”  $\rightarrow$  “ $\Sigma$ ”，则上式变为

$$d^{(k)}_{ij} = \Sigma_{1 \leq l \leq n} \{d^{(k/2)}_{il} \times d^{(k/2)}_{lj}\}$$

广义矩阵乘法  
形式和普通矩阵  
乘法一致

(4) 应用“矩阵乘法”： $D^1 \rightarrow D^2 \rightarrow D^4 \rightarrow \dots \rightarrow D^{2^{\log n}} (= D^n)$

### 算法 6.5 SIMD-CC 上求所有点对间最短路径算法

输入:  $A(0, j, k) = w_{jk}, 0 \leq j, k \leq n-1$

输出:  $C(0, j, k)$  中是  $v_j$  到  $v_k$  的最短路径长度,  $0 \leq j, k \leq n-1$

Begin

(1) /\* 构筑矩阵  $D^1$ , 并将其存入  $A$  和  $B$  寄存器中 \*/

for  $j=0$  to  $n-1$  par-do

for  $k=0$  to  $n-1$  par-do

(1.1) if  $j \neq k$  &  $A(0, j, k) = 0$  then

$B(0, j, k) = \infty$

endif

else

(1.2)  $B(0, j, k) = A(0, j, k)$

endfor

endfor

(2) /\* 调用算法 9.6 构筑矩阵  $D^2, D^4, \dots, D^{n-1}$  \*/

for  $i=1$  to  $\lceil \log(n-1) \rceil$  do

(2.1) DNS MULTIPLICATION ( $A, B, C$ ) /\* 调用算法 9.6 \*/

(2.2) for  $j=0$  to  $n-1$  par-do

for  $k=0$  to  $n-1$  par-do

(i)  $A(0, j, k) = C(0, j, k)$

(ii)  $B(0, j, k) = C(0, j, k)$

endfor

endfor

endfor

End

#### 广义矩阵乘法

考虑将矩阵乘法公式推广, 即广义矩阵乘法: 对于矩阵  $A_{n \times m}$  和  $B_{m \times r}$ :

有  $C_{ij} = A \times B = \bigoplus_{k=1}^m (A_{ik} \otimes B_{kj})$ , 我们将其称为  $(\otimes, \oplus)$  的矩阵乘法。

当满足以下条件时, 广义矩阵乘法满足结合律:

- $\oplus$  具有交换律;
- $\otimes$  具有结合律和交换律;
- $\otimes$  对  $\oplus$  存在分配律, 即满足  $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \oplus (b \otimes c)$ 。

常见的广义矩阵乘法形式有  $(\pm, \max)$ 、 $(\pm, \min)$ 、 $(\wedge, \vee)$ 。



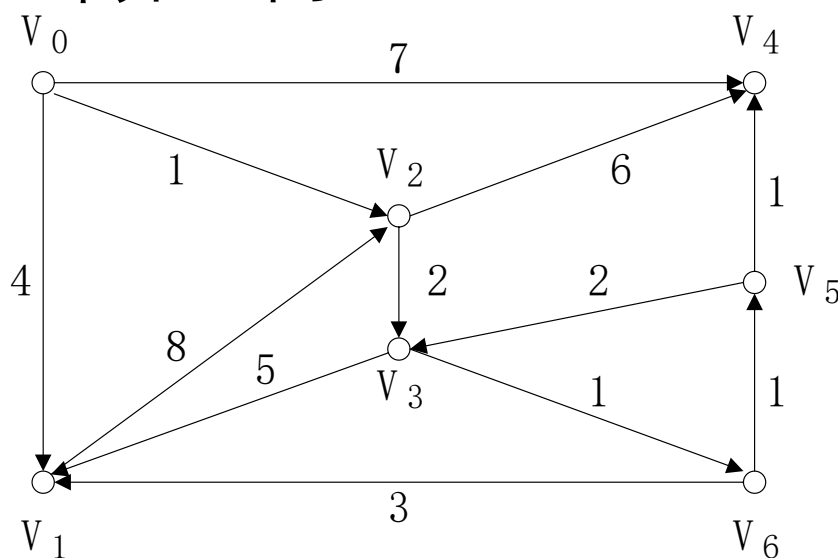
# “矩阵乘法” 求所有点对间最短路径

## ■ 时间分析

每次矩阵乘时间 $O(\log n)$ , 共作 $\lceil \log n \rceil$ 次乘法

$$\Rightarrow t(n)=O(\log^2 n), p(n)=n^3$$

## ■ 计算示例



(a)

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	4	1	0	7	0	0
1	0	0	8	0	0	0	0
2	0	0	0	2	6	0	0
3	0	5	0	0	0	0	1
4	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	2	1	0	0
6	0	3	0	0	0	1	0

(b)

# “矩阵乘法” 求所有点对间最短路径

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	4	1	$\infty$	7	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	0	8	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$
2	$\infty$	$\infty$	0	2	6	$\infty$	$\infty$
3	$\infty$	5	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$	1
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
5	$\infty$	$\infty$	$\infty$	2	1	0	$\infty$
6	$\infty$	3	$\infty$	$\infty$	$\infty$	1	0

(c)

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	4	1	3	7	5	4
1	$\infty$	0	8	10	14	12	11
2	$\infty$	6	0	2	5	4	3
3	$\infty$	4	12	0	3	2	1
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
5	0	6	14	2	1	0	3
6	$\infty$	3	11	3	2	1	0

(e)

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	4	1	3	7	$\infty$	$\infty$
1	$\infty$	0	8	10	14	$\infty$	$\infty$
2	$\infty$	7	0	2	6	$\infty$	3
3	$\infty$	4	13	0	$\infty$	2	1
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
5	$\infty$	7	$\infty$	2	1	0	3
6	$\infty$	3	11	3	2	1	0

(d)

	0	1	2	3	4	5	6
0	0	4	1	3	6	5	4
1	$\infty$	0	8	10	13	12	11
2	$\infty$	6	0	2	5	4	3
3	$\infty$	4	12	0	3	2	1
4	$\infty$	$\infty$	$\infty$	$\infty$	0	$\infty$	$\infty$
5	$\infty$	6	14	2	1	0	3
6	$\infty$	3	11	3	2	1	0

(f)

# 课后作业2

1. 课本第139页4.2①②, 140页 4.11
2.  $A$ 是一个大小为 $n$ 的布尔数组, 欲求出 $A[i]$ 为真的最小的下标 $i$ , 试设计一个常数时间的PRAM-CRCW并行算法。如果使用PRAM-CREW模型, 运行时间如何?
3. 证明有向环基本并行着色算法正确性, 给出该算法在 $n$ 个处理器下的时间复杂度和工作量。

提交截止时间: 2024年3月31日 (周日) 23:59

提交方式: BB系统