

1

1.1

固定负载，加速比： $S_n = \frac{T_1}{T_n} = \frac{cN^3}{\frac{cN^3}{n} + \frac{bN^2}{\sqrt{n}}} = \frac{n}{1 + \frac{b\sqrt{n}}{cN}}$

可以看到当问题规模较小时，加速比近似与 \sqrt{n} 成线性正比；当问题规模较大时， $\frac{b\sqrt{n}}{cN} \rightarrow 0$ ，加速比近似与 n 成线性正比。

1.2

固定时间，由gustafson定律： $S' = \frac{f+p(1-f)}{1+\frac{W_o}{W}} = \frac{n}{1+\frac{b}{cN\sqrt{n}}}$

可以看到在固定时间的情况下，加速比与 n 近似成线性比例，且问题规模与并行处理器数量越多，加速比逐渐减小进而趋于线性。

2

$$\frac{p}{1 + f(p-1)} = p - 1$$
$$f = \frac{1}{(p-1)^2}$$

3

使用 n^2 个处理器。

1. 首先将题述数组A复制到数组B。O(1)

2. 使用 n 个处理器分别检查数组A的 n 个元素，若为true，则对每个从处理器用最多 $n-1$ 个处理器将B中当前元素之后的元素置为false。O(1)

3. 最后再检查数组B中为true的元素下标返回即可。O(1)

所以在PRAM-CRCW下总时间复杂度为O(1)

在PRAM-CREW下第2步中不能同时写入数组B中的相同元素，需要O(n)的时间，所以时间复杂度为O(n)

4

正确性证明:

对任意一个节点*i*和它的后继节点*i*+1, 假设

$$c'(i) = c'(i + 1)$$

$$2x + c(i)_x = 2y + c(i + 1)_y$$

若 $x = y$, 则 $c(i)_x \neq c(i + 1)_y$, 上述等式不成立。若 $x \neq y$, 则 $2|x - y| \geq 2$, 而 $|c(i)_x - c(i + 1)_y| < 2$, 等式也必然不成立。

综上, 对任意节点*i*和它的后继节点*i*+1, $c'(i) \neq c'(i + 1)$ 。

时间复杂度为 $O(1)$, 可以先复制得到两份相同初始着色信息A、B, 然后大致分两次执行, 第一次对节点(1,2),(3,4)...操作, 第二次对节点(2,3),(4,5)...操作, 每次操作时间复杂度为。

由上面流程可知工作量为 $O(n)$ 。