Elektrotehnički fakultet
Univerzitet u Sarajevu

Akademska 2018/2019

Zadaća 3

iz predmeta Osnove operacionih istraživanja

Rijad Pedljak

17276

Zadatak 1:

Potrebno je transportovati određenu količinu robe iz 5 skladišta S1, S2, S3, S4 i S5 u 3 prodavnice P1, P2 i P3. Kapaciteti skladišta iznose 51, 46, 32, 49 i 49 težinskih jedinica respektivno. Potrebe prodavnica iznose 32, 51 i 60 težinskih jedinica respektivno. Jedinične cijene transporta između pojedinih skladišta i prodavnica date su u sljedećoj tabeli:

	P1	P2	P3
S1	9	10	16
S2	7	13	4
S3	16	20	18
S4	16	11	15
S5	5	6	9

Vaš zadatak je da uradite sljedeće:

a. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom metoda sjeverozapadnog ugla; **[0.2 poena]**
b. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom metoda minimalnih jediničnih troškova; **[0.2 poena]**
c. Pronađete dopustivi plan transporta primjenom Vogelovog aproksimativnog metoda; **[0.3 poena]**
d. Pronađete optimalni plan transporta primjenom stepping-stone metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen Vogelovim aproksimativnim metodom; **[0.5 poena]**
e. Pronađete optimalni plan transporta primjenom MODI metoda na polazni dopustivi plan transporta dobijen metodom minimalnih jediničnih troškova; **[0.6 poena]**

Obavezno prodiskutirajte da li će biti neka od prodavnica čije potrebe neće biti zadovoljene, i ako hoće, u kolikom iznosu, kao i da li će u nekom skladištu ostati zaliha, i ako hoće, u kolikom iznosu.

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u `.pdf` formatu.

a.

	P1	P2	P3	Zalihe
S1	9	10	16	51
S2	7	13	4	46
S3	16	20	18	32
S4	16	11	15	49
S5	5	6	9	49
Potrebe	32	51	60	

Nije balansirano, tj potrebe su manje nego što imamo zaliha, dodajemo fiktivnog potrošača pa dobivamo sljedeću tabelu:

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0	51
S2	7	13	4	0	46
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	32	51	60	84	

Uzimamo x(1,1)=min{51,32}=32. Zadovoljavamo potrebe potrošača P1, u skladištu S1 ostaje 51-32=19.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10	16	0	19
S2	7	13	4	0	46
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	0	51	60	84	

Uzimamo x(1,2)=min{19,51}=19. Iscrpili smo skladište S1, a potrebe potrošača P2 se smanjuju na 51-19=32.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10 (19)	16	0	0
S2	7	13	4	0	46
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	0	32	60	84	

Uzimamo x(2,2)=min{46,32}=32. Zadovoljili smo potrebe potrošača P2, u skladištu S2 ostaje 46-32=14.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10 (19)	16	0	0
S2	7	13 (32)	4	0	14
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	0	0	60	84	

Uzimamo x(2,3)=min{14,60}=14. Iscrpili smo skladište S2, a potrebe potrošača P3 smo smanjili na 60-14=46.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10 (19)	16	0	0
S2	7	13 (32)	4 (14)	0	0
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	0	0	46	84	

Uzimamo x(3,3)=min{32,46}=32. Iscrpili smo skladište S3, a potrebe potrošača P3 smanjili na 46-32=14.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10 (19)	16	0	0
S2	7	13 (32)	4 (14)	0	0
S3	16	20	18 (32)	0	0
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	0	0	14	84	

Uzimamo x(4,3)=min{49,14}=14. Zadovoljili smo potrebe potrošača P3, zalihe skladišta S4 su smanjene na 49-14=35.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10 (19)	16	0	0
S2	7	13 (32)	4 (14)	0	0
S3	16	20	18 (32)	0	0
S4	16	11	15 (14)	0	35
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	0	0	0	84	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10 (19)	16	0	0
S2	7	13 (32)	4 (14)	0	0
S3	16	20	18 (32)	0	0
S4	16	11	15 (14)	0 (35)	0
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	0	0	0	49	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9 (32)	10 (19)	16	0	0
S2	7	13 (32)	4 (14)	0	0
S3	16	20	18 (32)	0	0
S4	16	11	15 (14)	0 (35)	0
S5	5	6	9	0 (49)	0
Potrebe	0	0	0	0	

Z=9x32+10x19+13x32+4x14+18x32+15x14+0x35+0x49=1736

b.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0	51
S2	7	13	4	0	46
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	32	51	60	84	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4	0	46
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	32	51	60	33	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4	0 (33)	13
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	32	51	60	0	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4 (13)	0 (33)	0
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	32	51	47	0	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4 (13)	0 (33)	0
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5 (32)	6	9	0	17
Potrebe	0	51	47	0	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4 (13)	0 (33)	0
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	0
Potrebe	0	34	47	0	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4 (13)	0 (33)	0
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11 (34)	15	0	15
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	0
Potrebe	0	0	47	0	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4 (13)	0 (33)	0
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11 (34)	15 (15)	0	0
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	0
Potrebe	0	0	32	0	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0 (51)	0
S2	7	13	4 (13)	0 (33)	0
S3	16	20	18 (32)	0	0
S4	16	11 (34)	15 (15)	0	0
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	0
Potrebe	0	0	0	0	

Z=0x51+0x33+4x13+5x32+6x17+11x34+15x15+18x32=1489

c.

	P1	P2	P3	P4	Zalihe
S1	9	10	16	0	51
S2	7	13	4	0	46
S3	16	20	18	0	32
S4	16	11	15	0	49
S5	5	6	9	0	49
Potrebe	32	51	60	84	

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10	16	0	51	9
S2	7	13	4	0	46	4
S3	16	20	18	0	32	16
S4	16	11	15	0	49	11
S5	5	6	9	0	49	5
Potrebe	32	51	60	84		
Žaljenje	2	4	5	0		

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10	16	0	51	9
S2	7	13	4	0	46	4
S3	16	20	18	0 (32)	0	
S4	16	11	15	0	49	11
S5	5	6	9	0	49	5
Potrebe	32	51	60	52		
Žaljenje	2	4	5	0		

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10	16	0	51	9
S2	7	13	4	0	46	4
S3	16	20	18	0 (32)	0	
S4	16	11	15	0 (49)	0	
S5	5	6	9	0	49	5
Potrebe	32	51	60	3		
Žaljenje	2	4	5	0		

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10	16	0 (3)	48	1
S2	7	13	4	0	46	3
S3	16	20	18	0 (32)	0	
S4	16	11	15	0 (49)	0	
S5	5	6	9	0	49	1
Potrebe	32	51	60	0		
Žaljenje	2	4	5			

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10	16	0 (3)	48	1
S2	7	13	4 (46)	0	0	
S3	16	20	18	0 (32)	0	
S4	16	11	15	0 (49)	0	
S5	5	6	9	0	49	1
Potrebe	32	51	14	0		
Žaljenje	4	4	7			

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10	16	0 (3)	48	1
S2	7	13	4 (46)	0	0	
S3	16	20	18	0 (32)	0	
S4	16	11	15	0 (49)	0	
S5	5	6	9 (14)	0	35	1
Potrebe	32	51	0	0		
Žaljenje	4	4				

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10	16	0 (3)	48	10
S2	7	13	4 (46)	0	0	
S3	16	20	18	0 (32)	0	
S4	16	11	15	0 (49)	0	
S5	5 (32)	6	9 (14)	0	3	6
Potrebe	0	51	0	0		
Žaljenje		4				

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	Žaljenje
S1	9	10 (48)	16	0 (3)	0	
S2	7	13	4 (46)	0	0	
S3	16	20	18	0 (32)	0	
S4	16	11	15	0 (49)	0	
S5	5 (32)	6	9 (14)	0	3	6
Potrebe	0	3	0	0		
Žaljenje		6				

	P1	P2	P3	P4
S1	9	10 (48)	16	0 (3)
S2	7	13	4 (46)	0
S3	16	20	18	0 (32)
S4	16	11	15	0 (49)
S5	5 (32)	6 (3)	9 (14)	0

Z=10x48+0x3+4x46+0x32+0x49+5x32+6x3+9x14=968

d.
Početno dobijeno Vogelom:

	P1	P2	P3	P4
S1	9	10 (48)	16	0 (3)
S2	7	13	4 (46)	0
S3	16	20	18	0 (32)
S4	16	11	15	0 (49)
S5	5 (32)	6 (3)	9 (14)	0

Pravimo cikluse za prazna polja:

$d_{1,1}=c_{1,1}-c_{1,2}+c_{5,2}-c_{5,1}=9-10+6-5=0$
$d_{1,3}=c_{1,3}-c_{1,2}+c_{5,2}-c_{5,3}=16-10+6-9=3$
$d_{2,1}=c_{2,1}-c_{2,3}+c_{5,3}-c_{5,1}=7-4+9-5=7$
$d_{2,2}=c_{2,2}-c_{2,3}+c_{5,3}-c_{5,2}=13-4+9-6=12$
$d_{2,4}=c_{2,4}-c_{2,3}+c_{5,3}-c_{5,2}+c_{1,2}-c_{1,4}=0-4+9-6+10-0=9$
$d_{3,1}=c_{3,1}-c_{3,4}+c_{1,4}-c_{1,2}+c_{5,2}-c_{5,1}=16-0+0-10+6-5=7$
$d_{3,2}=c_{3,2}-c_{3,4}+c_{1,4}-c_{1,2}=20-0+0-10=10$
$d_{3,3}=c_{3,3}-c_{3,4}+c_{1,4}-c_{1,2}+c_{5,2}-c_{5,1}=18-0+0-10+6-9=5$
$d_{4,1}=c_{4,1}-c_{4,4}+c_{1,4}-c_{1,2}+c_{5,2}-c_{5,1}=16-0+0-10+6-5=7$
$d_{4,2}=c_{4,2}-c_{4,4}+c_{1,4}-c_{1,2}=11-0+0-10=1$
$d_{4,3}=c_{4,3}-c_{4,4}+c_{1,4}-c_{1,2}+c_{5,2}-c_{5,3}=15-0+0-10+6-9=2$
$d_{5,4}=c_{5,4}-c_{5,2}+c_{1,2}-c_{1,4}=0-6+10-0=4$

Kako su svi >= 0 optimalno rješenje je postignuto i jednako je 968.

e.

	P1	P2	P3	P4
S1	9	10	16	0 (51)
S2	7	13	4 (13)	0 (33)
S3	16	20	18 (32)	0
S4	16	11 (34)	15 (15)	0
S5	5 (32)	6 (17)	9	0

Imamo:

$c_{2,3}=u_2+v_3$
$c_{2,4}=u_2+v_4$
$c_{1,4}=u_1+v_4$
$c_{3,3}=u_3+v_3$
$c_{4,3}=u_4+v_3$
$c_{4,2}=u_4+v_2$
$c_{5,2}=u_5+v_2$
$c_{5,1}=u_5+v_1$

Uzmemo da je $v_3=0$ jer je pojavljuje u najviše jednačina, pa imamo

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9	10	16	0 (51)	51	4
S2	7	13	4 (13)	0 (33)	46	4
S3	16	20	18 (32)	0	32	18
S4	16	11 (34)	15 (15)	0	49	15
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	49	10
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	-5	-4	0	-4		

Sada tražimo $d_{i,j}$ za prazna polja:

$d_{1,1}=c_{1,1}-u_1-v_1=9-4+5=10$
$d_{1,2}=10$
$d_{1,3}=12$
$d_{2,1}=8$
$d_{2,2}=13$
$d_{3,1}=3$
$d_{3,2}=6$
$d_{3,4}=-14$
$d_{4,1}=6$
$d_{4,4}=-11$
$d_{5,3}=-1$
$d_{5,4}=-6$

Dobivamo sljedeću tabelu

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9 (10)	10 (10)	16 (12)	0 (51)	51	4
S2	7 (8)	13 (13)	4 (13)	0 (33)	46	4
S3	16 (3)	20 (6)	18 (32)	0 (-14)	32	18
S4	16 (6)	11 (34)	15 (15)	0 (-11)	49	15
S5	5 (32)	6 (17)	9 (-1)	0 (-6)	49	10
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	-5	-4	0	-4		

Najmanja negativna vrijednost je $d_{3,4}=-14$, njen odgovarajući ciklus je

$d_{3,4}=c_{3,4}-c_{3,3}+c_{2,3}-c_{2,4}$

Uvećavaju se transporti $x_{3,4}$ i $x_{2,3}$, a umanjuju se transporti $x_{3,3}$ i $x_{2,4}$. Da bi nakon preraspodjele transporta rješenje ostalo dopušteno, polja koja se umanjuju moraju ostati nenegativna, tj mora vrijediti $32-t>=0$ i $33-t>=0$, odnostno $t<=32$ i $t<=33$, tj $t_{max}=\min\{32,33\}=32$. Preraspodjelom t_{max} količnskih jednica transporta nove vrijednosti transporta u poljima koja se mijenjaju iznose $x_{3,4}=t_{max}=32$, $x_{3,3}=32-32=0$, $x_{2,3}=32+13=45$ i $x_{2,4}=33-32=1$. Novo dopustivo rješenje je

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9	10	16	0 (51)	51	4
S2	7	13	4 (45)	0 (1)	46	4
S3	16	20	18	0 (32)	32	18
S4	16	11 (34)	15 (15)	0	49	15
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	49	10
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	-5	-4	0	-4		

Sada prelazimo na drugu iteraciju

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9	10	16	0 (51)	51	0
S2	7	13	4 (45)	0 (1)	46	0
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11 (34)	15 (15)	0	49	11
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	49	6
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	-1	0	4	0		

Sada je

$d_{1,1}=10$
$d_{1,2}=10$
$d_{1,3}=12$
$d_{2,1}=8$
$d_{2,2}=13$
$d_{3,1}=17$
$d_{3,2}=20$
$d_{3,3}=14$
$d_{4,1}=6$
$d_{4,4}=-11$
$d_{5,3}=-1$
$d_{5,4}=-6$

Najmanja negativna vrijednost je $d_{4,4}=-11$, a njen ciklus je $d_{4,4}=c_{4,4}-c_{4,3}+c_{2,3}-c_{2,4}$
$t_{max}=\min\{15,1\}=1$

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9	10	16	0 (51)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	0
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11 (34)	15 (14)	0 (1)	49	11
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	49	6
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	-1	0	4	0		

Prelazimo na treću iteraciju

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9	10	16	0 (51)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	-11
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11 (34)	15 (14)	0 (1)	49	0
S5	5 (32)	6 (17)	9	0	49	-5
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	10	11	15	0		

Sada imamo
d1,1=-1
d1,2=-1
d1,3=1
d2,1=8
d2,2=13
d2,4=11
d3,1=6
d3,2=9
d3,3=3
d4,1=6
d5,3=-1
d5,4=5

Najmanja negativna vrijednost je d1,1=-1, njen ciklus je d1,1=c1,1-c1,4+c4,4-c4,2+c5,2-c5,1
tmax=min{34,32,51}=32

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9 (32)	10	16	0 (19)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	-11
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11 (2)	15 (14)	0 (33)	49	0
S5	5	6 (49)	9	0	49	-5
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	10	11	15	0		

Četvrta iteracija

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9 (32)	10	16	0 (19)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	-11
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11 (2)	15 (14)	0 (33)	49	0
S5	5	6 (49)	9	0	49	-5
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	9	11	15	0		

Sada imamo
d1,2=-1
d1,3=1
d2,1=9
d2,2=13
d2,4=11
d3,1=7
d3,2=9
d3,3=3
d4,1=7
d5,1=1
d5,3=-1
d5,4=5

Najmanja negativna vrijednost je d1,2=-1, njen ciklus je d1,2=c1,2-c1,4+c4,4-c4,2
tmax=min{19,2}=2

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9 (32)	10 (2)	16	0 (17)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	-11
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11	15 (14)	0 (35)	49	0
S5	5	6 (49)	9	0	49	-5
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	9	11	15	0		

Peta iteracija

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9 (32)	10 (2)	16	0 (17)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	-11
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11	15 (14)	0 (35)	49	0
S5	5	6 (49)	9	0	49	-4
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	9	10	15	0		

Sada imamo
$d_{1,3}=1$
$d_{2,1}=9$
$d_{2,2}=14$
$d_{2,4}=11$
$d_{3,1}=7$
$d_{3,2}=10$
$d_{3,3}=3$
$d_{4,1}=7$
$d_{4,2}=1$
$d_{5,1}=0$
$d_{5,3}=-2$
$d_{5,4}=4$

Najmanja negativna vrijednost je $d_{5,3}=-2$, njen ciklus je $d_{5,3}=c_{5,3}-c_{5,2}+c_{1,2}-c_{1,4}+c_{4,4}-c_{4,3}$
$t_{max}=\min\{17,49,14\}=14$

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9 (32)	10 (15)	16	0 (3)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	-11
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11	15	0 (35)	49	0
S5	5	6 (35)	9 (14)	0	49	-4
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	9	10	15	0		

Šesta iteracija

	P1	P2	P3	P4	Zalihe	u(i)
S1	9 (32)	10 (15)	16	0 (3)	51	0
S2	7	13	4 (46)	0	46	-9
S3	16	20	18	0 (32)	32	0
S4	16	11	15	0 (35)	49	0
S5	5	6 (35)	9 (14)	0	49	-4
Potrebe	32	51	60	84		
v(j)	9	10	13	0		

Sada imamo
$d_{1,3}=3$
$d_{2,1}=7$
$d_{2,2}=12$
$d_{2,4}=9$
$d_{3,1}=7$
$d_{3,2}=10$
$d_{3,3}=5$
$d_{4,1}=7$
$d_{4,2}=1$
$d_{4,3}=2$
$d_{5,1}=0$
$d_{5,4}=4$.

Kako su svi $d_{i,j} >= 0$ optimalno rješenje je postignuto i ono je

Z=9x32+10x16+0x3+4x46+0x32+0x49+6x35+9x14=968.

Zadatak 2.

Neka fabrika je nabavila 5 različitih mašina M_1, M_2, M_3, M_4 i M_5 za proizvodnju pojedinih dijelova jednog proizvoda. Pošto jednom mašinom može da jednovremeno rukuje samo jedan radnik, potrebno je zaposliti 5 radnika. Od prijavljenih 5 radnika R_1, R_2, R_3, R_4 i R_5, svi su zadovoljili opće uvjete konkursa, pa je izvršena provjera njihove stručne sposobnosti. Za proizvodnju svakog od dijelova proizvoda na pojedinačnim mašinama, radnicima je bilo potrebno vrijeme prikazano u sljedećoj tabeli (vrijeme je izraženo u minutama):

	M_1	M_2	M_3	M_4	M_5
R_1	11	29	8	29	28
R_2	26	27	9	35	22
R_3	22	19	28	10	23
R_4	31	21	26	35	24
R_5	27	8	11	15	18

Vaš zadatak je da primjenom mađarskog algoritma raspoređivanja pronađete optimalni raspored radnika na mašine koji će garantirati minimalni ukupni utrošak vremena na mašinama potreban za proizvodnju jednog proizvoda. Rješenje nađite na više različitih načina:

a. Redukcijom matrice **C** prvo po redovima, a zatim po kolonama prije ulaska u glavni ciklus algoritma; **[0.3 poena]**

b. Redukcijom matrice **C** prvo po kolonama, a zatim po redovima prije ulaska u glavni ciklus algoritma; **[0.3 poena]**

c. Redukcijom matrice **C** samo po redovima (bez redukcije po kolonama) prije ulaska u glavni ciklus algoritma (ovo će kasnije tražiti više iteracija nego što je uobičajeno); **[0.4 poena]**

d. Varijantom mađarskog algoritma prilagođenom za izvedbu za računaru. Ukoliko pri rješavanju na način a) niste dobili optimalno rješenje odmah nakon redukcije, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenljive u_i a zatim v_j (pandan redukcije prvo po redovima). U suprotnom, ukoliko pri rješavanju na način b) niste dobili optimalno rješenje odmah nakon redukcije, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenljive v_j a zatim u_i (pandan redukcije prvo po kolonama). Ukoliko ste bili te sreće da ste dobili problem kod kojeg i pod a) i pod b) dobijate optimalno rješenje odmah nakon obavljenih redukcija, obavite ovaj dio zadatka tako što ćete prvo odrediti dualne promjenjive u_i, a zatim uzeti da su sve dualne promjenljive v_j jednake nuli (pandan redukcije samo po redovima). **[0.8 poena]**

Potrebno je da predate izvještaj koji sadrži postavku problema i kompletan tok rješavanja problema (ne samo krajnje rješenje) u `.pdf` formatu.

a.

Redukcija po redovima

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	21	0	21	20
R2	17	18	0	26	13
R3	12	9	18	0	13
R4	10	0	5	14	3
R5	19	0	3	7	10

Zatim po kolonama

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	0	21	0	21	17
R2	14	18	0	26	10
R3	9	9	18	0	10
R4	7	0	5	14	0
R5	16	0	3	7	7

Kada odredimo zavisne i nezavisne nule (Z-zavisne, NZ-nezavisne)

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	NZ	21	Z	21	17
R2	14	18	NZ	26	10
R3	9	9	18	NZ	10
R4	7	Z	5	14	NZ
R5	16	NZ	3	7	7

Kako imamo 5 nezavisnih nula rješenje je optimalno i ono glasi
c1,1+c2,3+c3,4+c4,5+c5,2=11+9+10+24+8=62

b.
Redukcija po kolonama

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	0	21	0	19	10
R2	15	19	1	25	4
R3	11	11	20	0	5
R4	20	13	18	25	6
R5	16	0	3	5	0

Zatim redukcija po redovima

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	0	21	0	19	10
R2	14	18	0	24	3
R3	11	11	20	0	5
R4	14	7	12	19	0
R5	16	0	3	5	0

Odredimo zavisne i nezavisne nule

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	NZ	21	Z	19	10
R2	14	18	NZ	24	3
R3	11	11	20	NZ	5
R4	14	7	12	19	NZ
R5	16	NZ	3	5	Z

Kako opet imamo 5 nezavisnih nula rješenje je optimalno i isto kao u slučaju pod **a.** i iznosi 62.

c.

Redukcija po redovima

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	21	0	21	20
R2	17	18	0	26	13
R3	12	9	18	0	13
R4	10	0	5	14	3
R5	19	0	3	7	10

Kada odredimo zavisne i nezavisne nule

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	21	NZ	21	20
R2	17	18	Z	26	13
R3	12	9	18	NZ	13
R4	10	NZ	5	14	3
R5	19	Z	3	7	10

Kako imamo samo 3 nezavisne nule, rješenje nije optimalno, za optimalno rješenje je potrebno 5 nezavisnih nula. Kada izvršimo precrtavanje

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	21	NZ	21	20
R2	17	18	Z	26	13
R3	12	9	18	NZ	13
R4	10	NZ	5	14	3
R5	19	Z	3	7	10

Najmanji neprecrtani element iznosi 3 na poziciji 1,1, njega oduzimamo od svih neprecrtanih a dodajemo na dvostruko precrtane elemente.

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	0	21	0	21	17
R2	17	21	0	29	13
R3	9	9	18	0	10
R4	7	0	5	14	0
R5	19	0	6	10	10

Ponovo razvrstamo nule

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	NZ	21	Z	21	17
R2	17	21	NZ	29	13
R3	9	9	18	NZ	10
R4	7	Z	5	14	NZ
R5	19	NZ	6	10	10

Kako sada imamo 5 nezavisnih nula rješenje je optimalno i glasi $c_{1,1}+c_{2,3}+c_{3,4}+c_{4,5}+c_{5,2}=62$.

d.

$u_1=\min\{11,29,8,29,28\}=8$
$u_2=9$
$u_3=10$
$u_4=21$
$u_5=8$

$v_1=v_2=v_3=v_4=v_5=0$

Nakon redukcije (ne izračunava se pri računarskoj implementaciji)

	M1	M2	M3	M4	M5
R1	3	21	0	21	20
R2	17	18	0	26	13
R3	12	9	18	0	13
R4	10	0	5	14	3
R5	19	0	3	7	10