Arbre binaire de recherche

Quentin Fortier

January 5, 2022

Arbre binaire de recherche (ABR)

Définition

Un **arbre binaire de recherche** (ABR ou BST en anglais) est un arbre binaire tel que, pour chaque noeud d'étiquette r et de sous-arbres g et d, r est supérieur à toutes les étiquettes de g et inférieur à toutes les étiquettes de d.

Il faut que les étiquettes soient comparables (des nombres par exemple).

Arbre binaire de recherche (ABR)

Définition

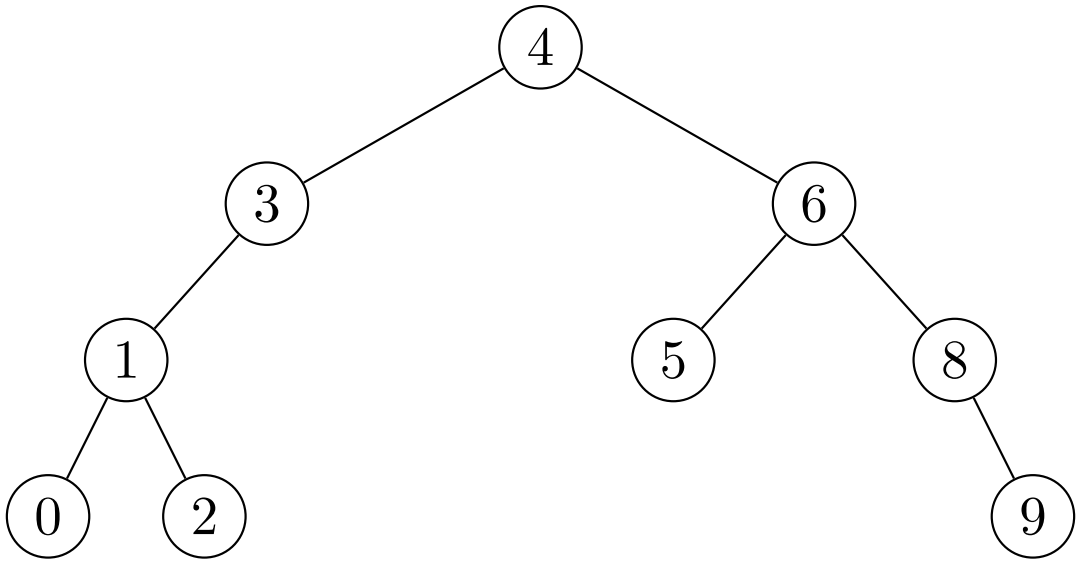
Un **arbre binaire de recherche** (ABR ou BST en anglais) est un arbre binaire tel que, pour chaque noeud d'étiquette r et de sous-arbres g et d, r est supérieur à toutes les étiquettes de g et inférieur à toutes les étiquettes de d.

Il faut que les étiquettes soient comparables (des nombres par exemple).

Un ABR est donc une structure « triée » permettant de généraliser la recherche par dichotomie dans un tableau trié.
Remarque : un sous-arbre d'un ABR est un ABR

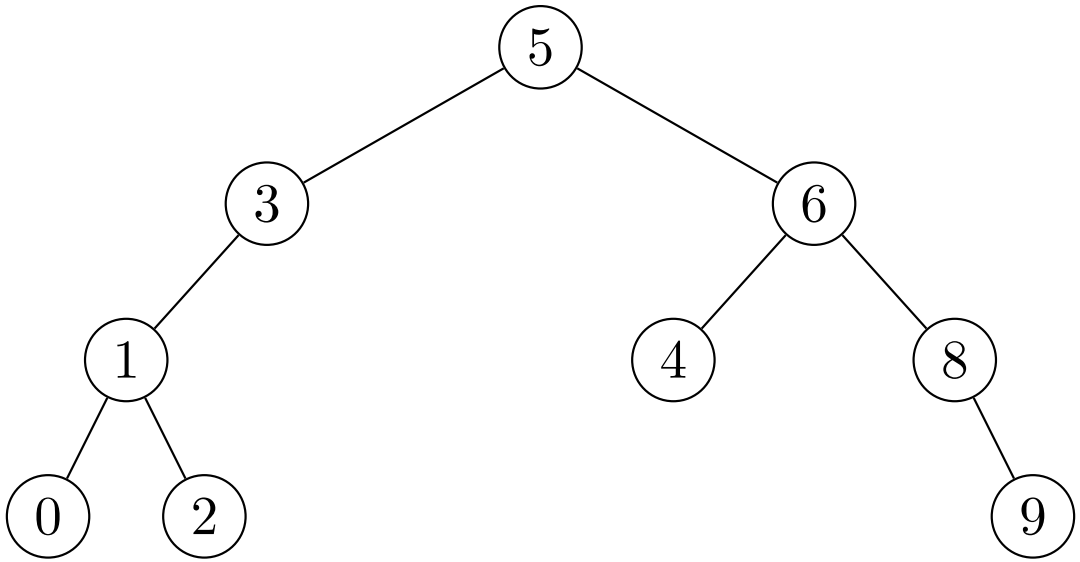
Arbre binaire de recherche (ABR)

Exemple d'ABR :



Arbre binaire de recherche (ABR)

Exemple d'arbre qui n'est pas un ABR :



Opérations sur les ABR

Opérations sur les ABR :

- `has` : test d'appartenance
- `add` : ajout d'un élément
- `del` : supprimer un élément

Opérations sur les ABR

Opérations sur les ABR :

- `has` : test d'appartenance
- `add` : ajout d'un élément
- `del` : supprimer un élément

Ces opérations doivent conserver la structure d'ABR et se feront en $O(h)$, où h est la hauteur.

Opérations sur les ABR

Opérations sur les ABR :

- `has` : test d'appartenance
- `add` : ajout d'un élément
- `del` : supprimer un élément

Ces opérations doivent conserver la structure d'ABR et se feront en $O(h)$, où h est la hauteur.

Dans un arbre binaire (non ABR), `has` demande une complexité linéaire en le nombre n de noeuds.
Dans le meilleur des cas, $h = O(\log(n))$ et `has` est beaucoup plus rapide avec un ABR.

Opérations sur les ABR : Test d'appartenance

```
1  bool has(int e, tree* t) {
2      if(!t)
3          return false;
4      if(t->elem == e)
5          return true;
6      if(e < t->elem)
7          return has(e, t->g);
8      return has(e, t->d);
9  }
```

Complexité :

Opérations sur les ABR : Test d'appartenance

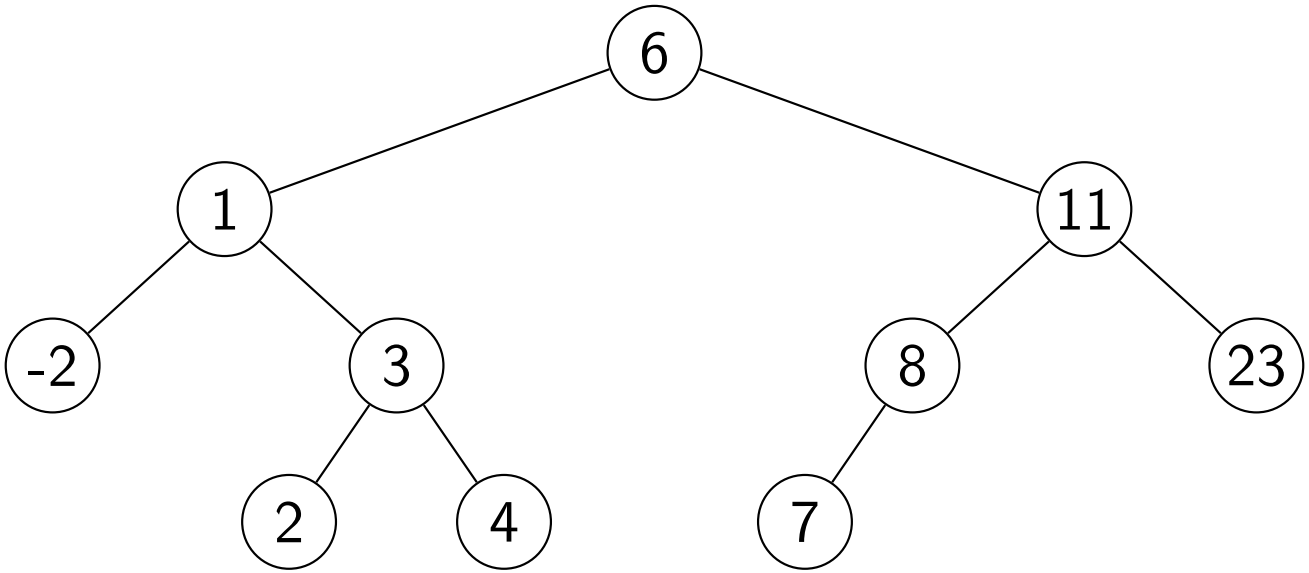
```
1  bool has(int e, tree* t) {
2      if(!t)
3          return false;
4      if(t->elem == e)
5          return true;
6      if(e < t->elem)
7          return has(e, t->g);
8      return has(e, t->d);
9  }
```

Complexité : $O(h)$, où h est la hauteur de t, car il faut parcourir une branche

Opérations sur les ABR : Ajout

```
1  let rec add e = function
2      | E -> N(e, E, E)
3      | N(r, g, d) when e < r -> N(r, add e g, d)
4      | N(r, g, d) -> N(r, g, add e d)
```

Exemple : ajouter 10 dans l'arbre suivant :



Opérations sur les ABR : Ajout

```
1  tree* add(int e, tree* t) {
2      if(!t)
3          return new_node(e);
4      if(e < t-> elem)
5          add(e, t->g);
6      else
7          add(e, t->d);
8      return t;
9  }
```

Opérations sur les ABR : Ajout

```
1  tree* add(int e, tree* t) {
2      if(!t)
3          return new_node(e);
4      if(e < t-> elem)
5          add(e, t->g);
6      else
7          add(e, t->d);
8      return t;
9  }
```

On pourrait aussi ne pas renvoyer de valeur, mais il faudrait alors un double pointeur pour traiter le cas vide (`NULL`) :

```
void add(int e, tree** t)
```

Opérations sur les ABR : Suppression

Fonction utilitaire : calculer et supprimer le maximum d'un ABR.

Opérations sur les ABR : Suppression

Fonction utilitaire : calculer et supprimer le maximum d'un ABR.
Il faut chercher toujours à droite :

```
1  let rec del_max = function
2      | E -> max_int, E
3      | N(r, g, E) -> r, g
4      | N(r, g, d) -> let m, d' = del_max d in
5                      m, N(r, g, d')
```

Opérations sur les ABR : Suppression

Pour supprimer un noeud d'étiquette `e` :

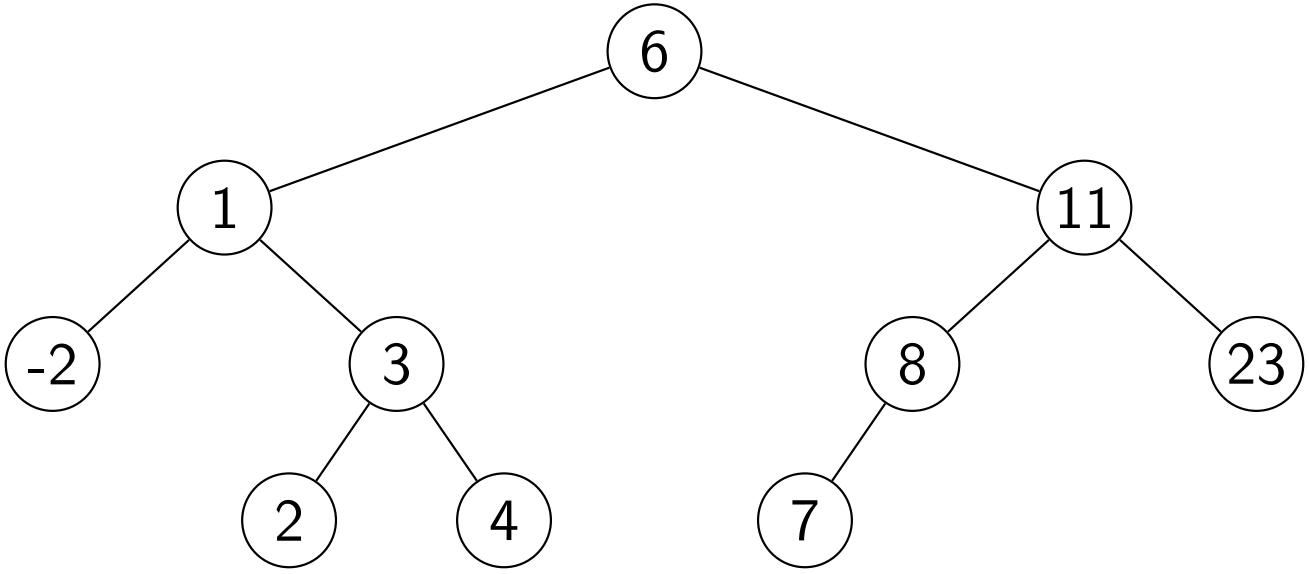
1. Chercher un noeud `N(r, g, d)` (comme pour `has`)
2. Remplacer `r` par la maximum de `g`, pour conserver un ABR.

Opérations sur les ABR : Suppression

Supprimer un élément e (ici 6) dans un ABR :

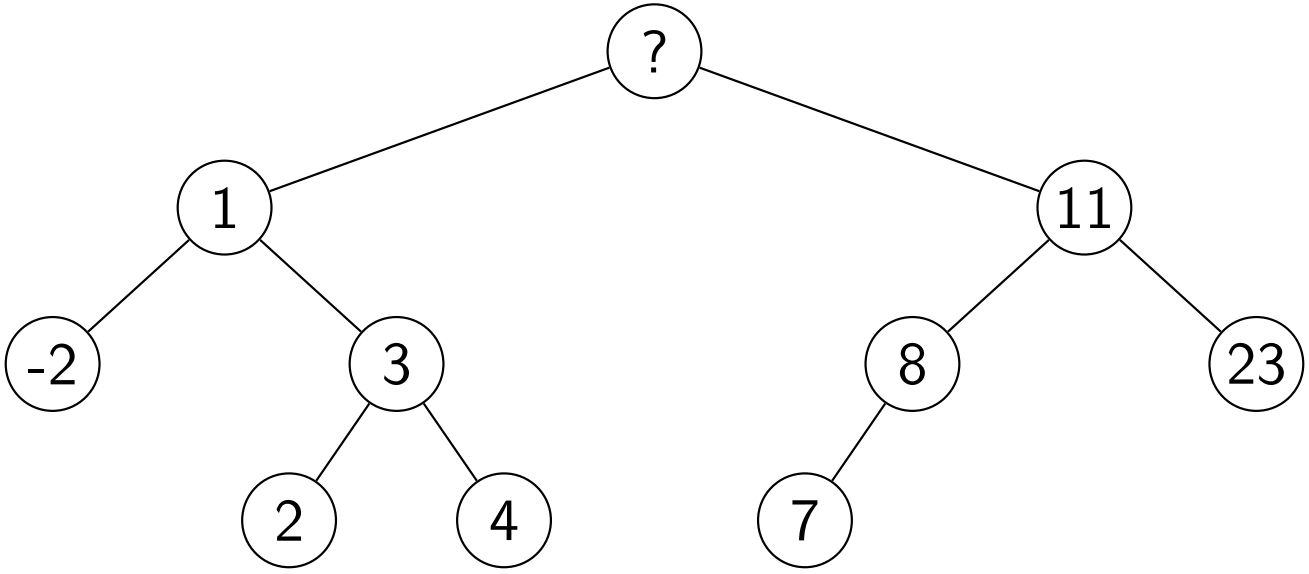
Opérations sur les ABR : Suppression

Supprimer un élément e (ici 6) dans un ABR :



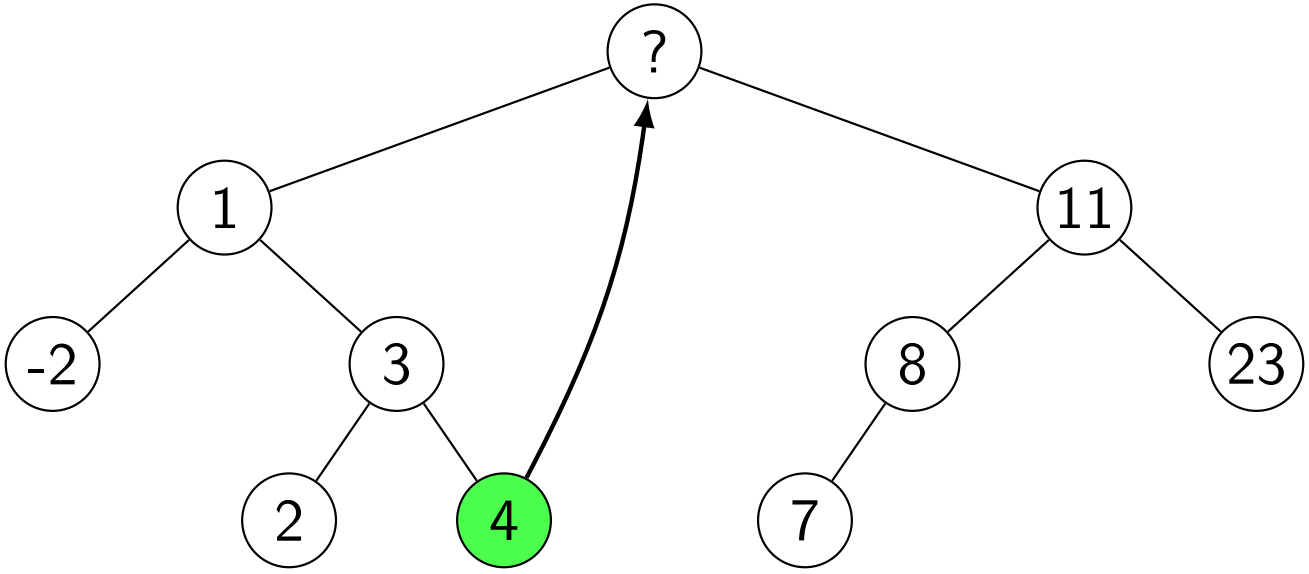
Opérations sur les ABR : Suppression

Supprimer un élément e (ici 6) dans un ABR :



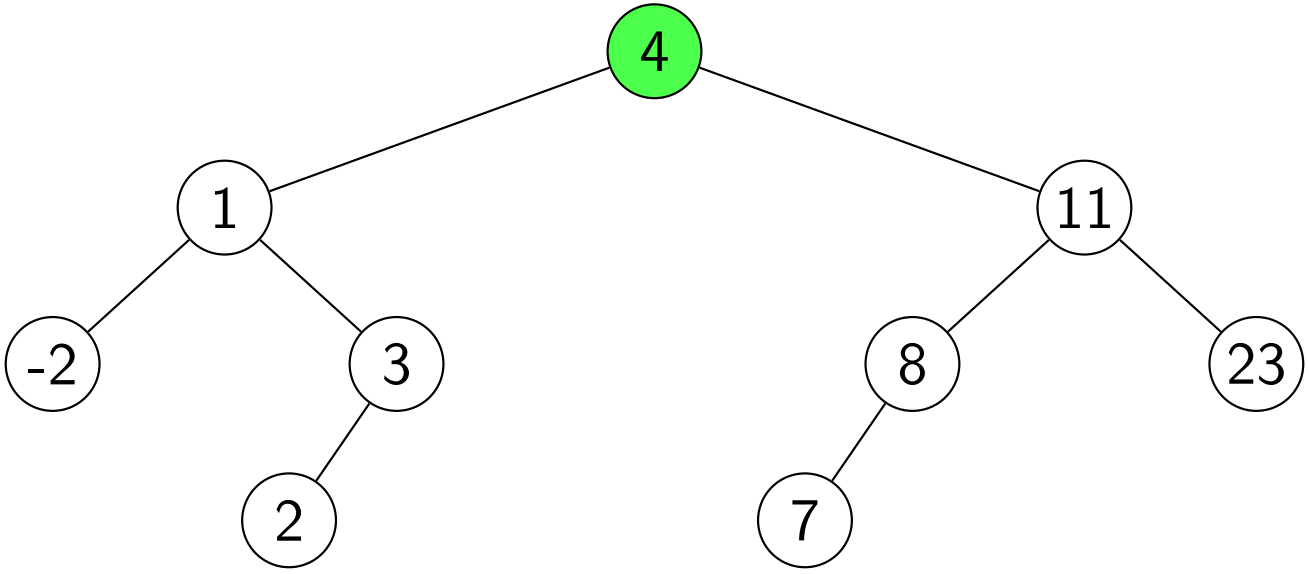
Opérations sur les ABR : Suppression

Supprimer un élément e (ici 6) dans un ABR :



Opérations sur les ABR : Suppression

Supprimer un élément e (ici 6) dans un ABR :



Opérations sur les ABR : Suppression

```
let rec del e = function
    | E -> E
    | N(r, g, d) when e = r -> let m, g' = del_max g in
                               N(m, g', d)
    | N(r, g, d) when e < r -> N(r, del e g, d)
    | N(r, g, d) -> N(r, g, del e d);;
```

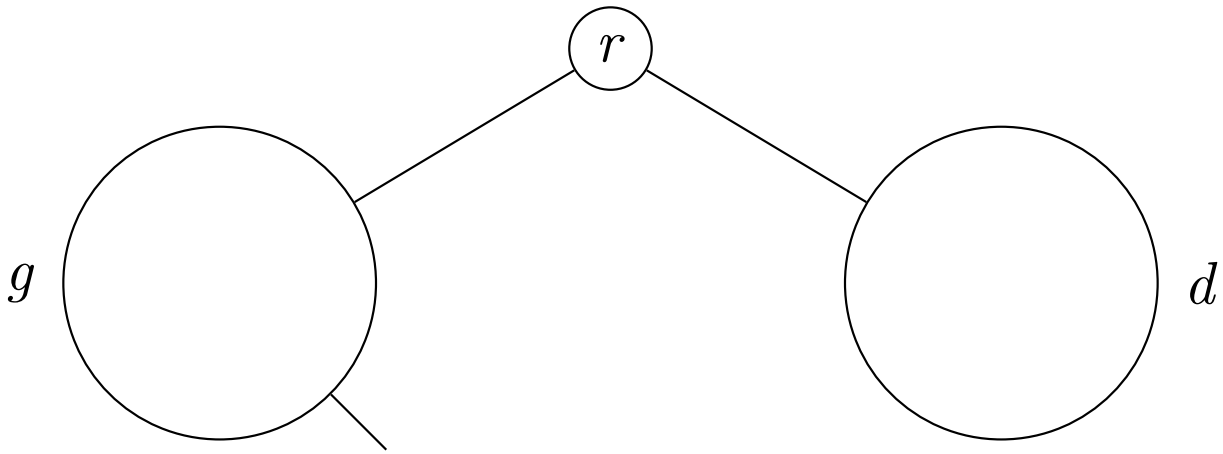
Opérations sur les ABR : Suppression

```
1  let rec del e = function
2      | E -> E
3      | N(r, g, d) when e = r -> let m, g' = del_max g in
4                                 N(m, g', d)
5      | N(r, g, d) when e < r -> N(r, del e g, d)
6      | N(r, g, d) -> N(r, g, del e d);;
```

Complexité : $O(h)$ ()

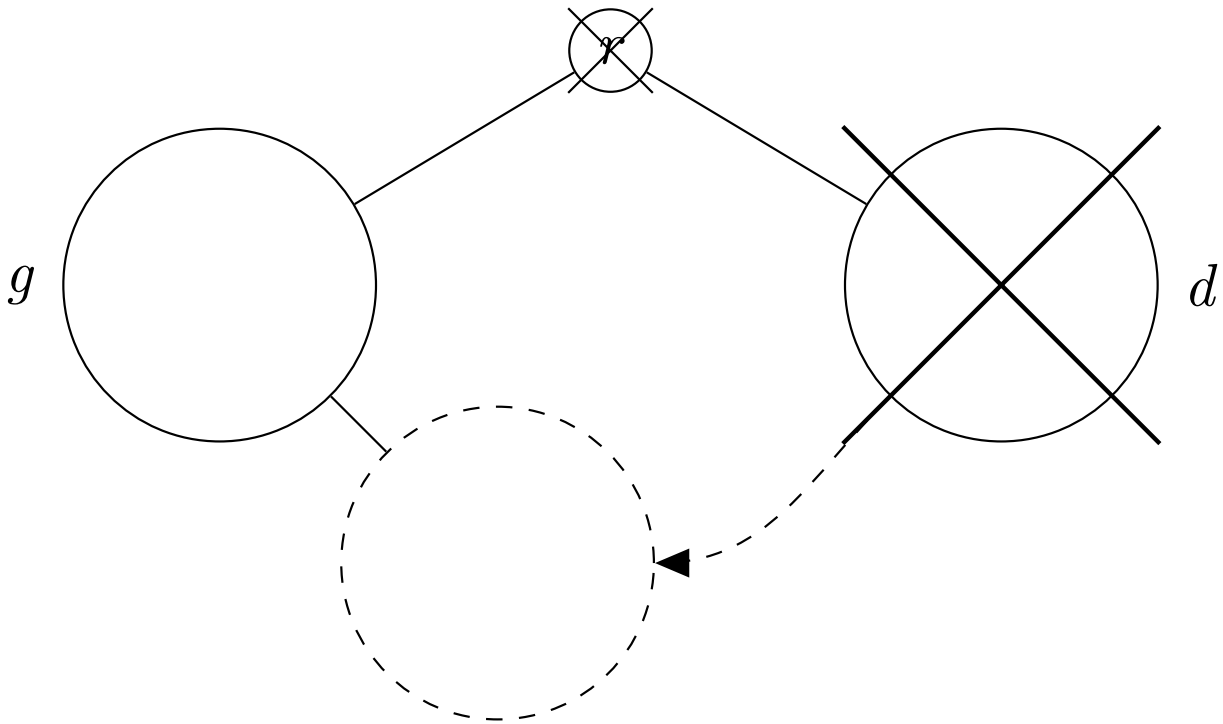
Opérations sur les ABR : Suppression

Autre façon de supprimer un élément : fusionner les deux sous-arbres restants.



Opérations sur les ABR : Suppression

Autre façon de supprimer un élément : fusionner les deux sous-arbres restants.



Opérations sur les ABR : Suppression

```
1  let rec fusion g d = match g with
2    | E -> d
3    | N(gr, gg, gd) -> N(gr, gg, fusion gd d);;
4
5  let rec del e = function
6      | E -> E
7      | N(r, g, d) when e = r -> fusion g d
8      | N(r, g, d) when e < r -> N(r, del e g, d)
9      | N(r, g, d) -> N(r, g, del e d);;
```

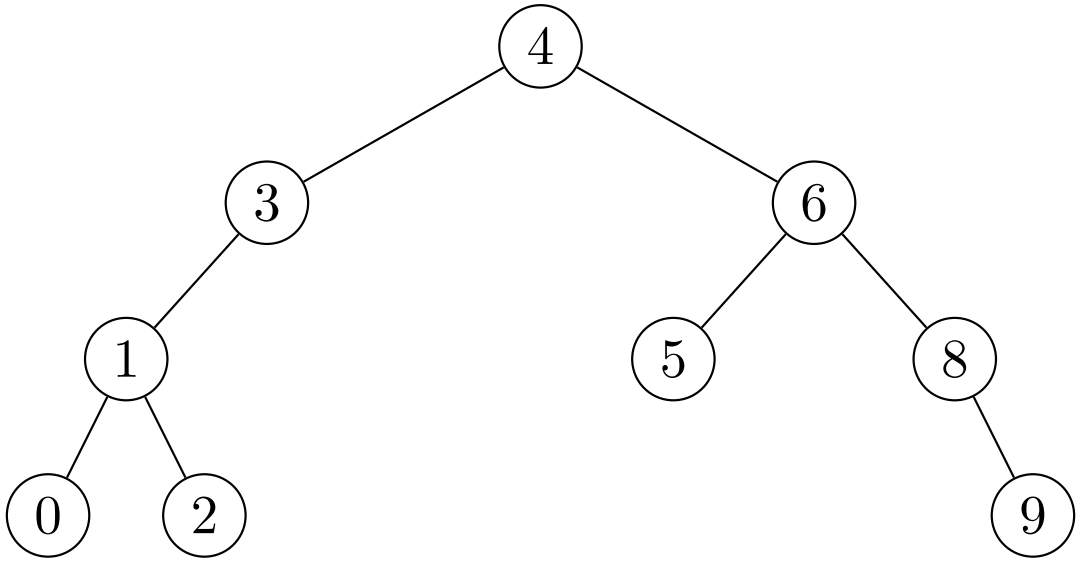
Opérations sur les ABR : Suppression

Exercice

Refaire toutes les fonctions d'ABR en C.

Tri avec un ABR

Le parcours infixe d'un ABR donne un tri :



Parcours infixe : $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9$

Tri avec un ABR

Exercice

Écrire une fonction qui trie une liste en construisant un ABR puis en renvoyant son parcours infixe.

Tri avec un ABR

Exercice

Écrire une fonction qui trie une liste en construisant un ABR puis en renvoyant son parcours infixe.

```
1  let tri_abr l =
2      List.fold_right add E l
3      |> infixe
```