

# Graphes : définitions

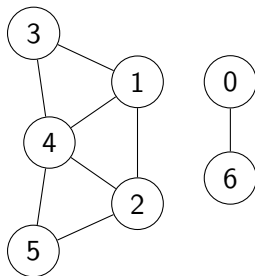
Quentin Fortier

January 27, 2022

# Graphe = dessin?

Un graphe est constitué :

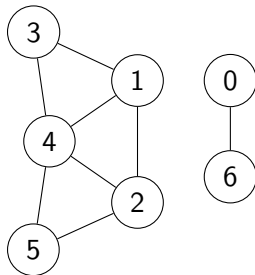
- ❶ de **sommets** (**vertices** en anglais), représentés par des points
- ❷ d'**arêtes** (**edges** en anglais), représentés par des traits entre les points



# Définition formelle

Un **graphe (non orienté)** est un couple  $G = (V, E)$  où :

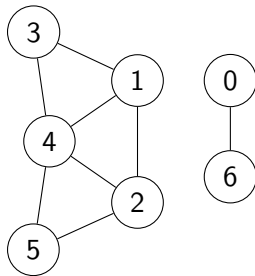
- 1  $V$  est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2  $E$  est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets



# Définition formelle

Un **graphe (non orienté)** est un couple  $G = (V, E)$  où :

- 1  $V$  est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2  $E$  est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets

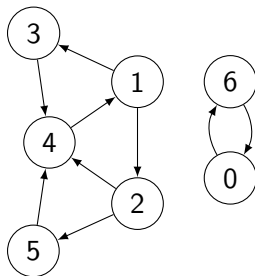


Ici  $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  
 $E = \{\{0, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}.$

# Définition formelle

Un **graphe orienté** est un couple  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  où :

- 1  $V$  est un ensemble fini (de **sommets**)
- 2  $\vec{E} \subseteq V \times V$  est un ensemble de **couples** de sommets (appelés **arcs**)



Ici  $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$  et  
 $\vec{E} = \{(0, 6), (6, 0), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (5, 4)\}$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté.

- Si  $e = \{u, v\} \in E$  on dit que  $u$  et  $v$  sont les **extrémités** de  $e$  et que  $u$  et  $v$  sont **voisins** (ou **adjacents**).

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté.

- Si  $e = \{u, v\} \in E$  on dit que  $u$  et  $v$  sont les **extrémités** de  $e$  et que  $u$  et  $v$  sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet  $v \in V$ , noté  $\deg(v)$ , est son nombre de voisins. Si  $\deg(v) = 1$ ,  $v$  est une **feuille**.  
Pour un graphe orienté, on note  $\deg^-(v)$  et  $\deg^+(v)$  les degrés entrants et sortants de  $v$ .

Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté.

- Si  $e = \{u, v\} \in E$  on dit que  $u$  et  $v$  sont les **extrémités** de  $e$  et que  $u$  et  $v$  sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet  $v \in V$ , noté  $\deg(v)$ , est son nombre de voisins. Si  $\deg(v) = 1$ ,  $v$  est une **feuille**.  
Pour un graphe orienté, on note  $\deg^-(v)$  et  $\deg^+(v)$  les degrés entrants et sortants de  $v$ .
- Si  $e \in E$ , on note  $G - e$  le graphe obtenu en supprimant  $e$  :  
 $G - e = (V, E - \{e\})$ .



Soit  $G = (V, E)$  un graphe non orienté.

- Si  $e = \{u, v\} \in E$  on dit que  $u$  et  $v$  sont les **extrémités** de  $e$  et que  $u$  et  $v$  sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet  $v \in V$ , noté  $\deg(v)$ , est son nombre de voisins. Si  $\deg(v) = 1$ ,  $v$  est une **feuille**.  
Pour un graphe orienté, on note  $\deg^-(v)$  et  $\deg^+(v)$  les degrés entrants et sortants de  $v$ .
- Si  $e \in E$ , on note  $G - e$  le graphe obtenu en supprimant  $e$  :  
 $G - e = (V, E - \{e\})$ .
- Si  $v \in V$ , on note  $G - v$  le graphe obtenu en supprimant  $v$  :  
 $G - v = (V - \{v\}, E')$ , où  $E'$  est l'ensemble des arêtes de  $E$  n'ayant pas  $v$  comme extrémité.

# Formule des degrés

## Formule des degrés

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

# Formule des degrés

## Formule des degrés

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

- ①  $2|E|$  car chaque arête a 2 extrémités.
- ②  $\sum_{v \in V} \deg(v)$  car chaque sommet  $v$  est extrémité de  $\deg(v)$  arêtes.

# Formule des degrés

## Formule des degrés

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

- ❶  $2|E|$  car chaque arête a 2 extrémités.
- ❷  $\sum_{v \in V} \deg(v)$  car chaque sommet  $v$  est extrémité de  $\deg(v)$  arêtes.

Pour un graphe orienté :  $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$

# Formule des degrés

## Formule des degrés

Soit  $G = (V, E)$  un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

- ①  $2|E|$  car chaque arête a 2 extrémités.
- ②  $\sum_{v \in V} \deg(v)$  car chaque sommet  $v$  est extrémité de  $\deg(v)$  arêtes.

Pour un graphe orienté :  $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$

Autre preuve : récurrence sur le nombre d'arêtes.

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

## Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v) \text{ pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v) \text{ impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

## Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Preuve :

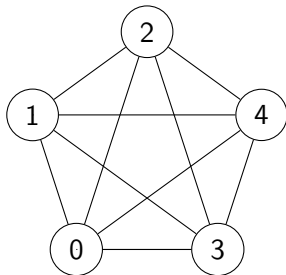
$$\underbrace{\sum_{\deg(v) \text{ pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v) \text{ impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Application : existe t-il un graphe dont les sommets ont pour degrés 1, 2, 2, 3, 5 ?



# Graphe complet

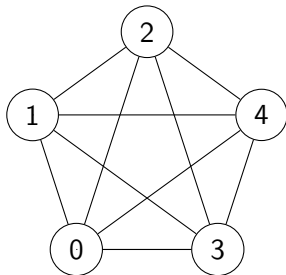
Un **graphe complet** est un graphe non orienté possédant toutes les arêtes possibles.



Un graphe complet avec  $n$  sommets a                      arêtes

# Graphe complet

Un **graphe complet** est un graphe non orienté possédant toutes les arêtes possibles.

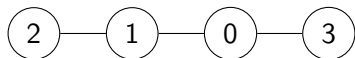


Un graphe complet avec  $n$  sommets a  $\binom{n}{2}$  arêtes : c'est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à  $n$  sommets.

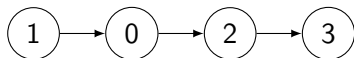
De façon générale, tout graphe à  $n$  sommets et  $m$  arêtes vérifie  $m = O(n^2)$ .

Chaque sommet a degré  $n - 1$ .

Un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives différentes.



Chemin (non orienté) entre 2 et 3



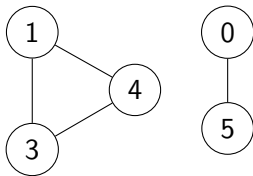
Chemin (orienté) de 1 à 3

La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arêtes.

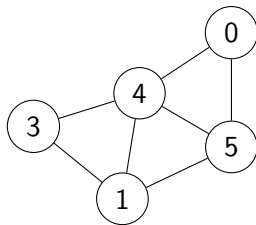
La **distance** de  $u$  à  $v$  est la plus petite longueur d'un chemin de  $u$  à  $v$  ( $\infty$  si il n'y a pas de chemin) : c'est une distance au sens mathématique.

# Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



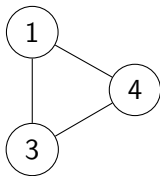
Graphe non connexe



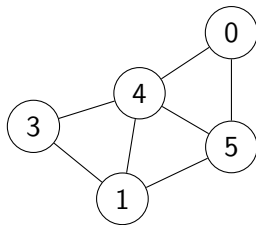
Graphe connexe

# Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



Graphe non connexe



Graphe connexe

Quel est le nombre minimum d'arêtes d'un graphe connexe à  $n$  sommets?

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe connexe à  $n$  sommets possède au moins  $n - 1$  arêtes ».

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe connexe à  $n$  sommets possède au moins  $n - 1$  arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe connexe à  $n$  sommets possède au moins  $n - 1$  arêtes ».

- 1 Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
- 2 Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe à  $n + 1$  sommets.



Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe connexe à  $n$  sommets possède au moins  $n - 1$  arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
- ② Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe à  $n + 1$  sommets.
  - Si  $G$  a un sommet  $v$  de degré 1 alors

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe connexe à  $n$  sommets possède au moins  $n - 1$  arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
- ② Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe à  $n + 1$  sommets.
  - Si  $G$  a un sommet  $v$  de degré 1 alors  $G - v$  est un graphe *connexe* à  $n$  sommets donc, par  $\mathcal{H}(n)$ ,  $G - v$  a au moins  $n - 1$  arêtes.

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe connexe à  $n$  sommets possède au moins  $n - 1$  arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
- ② Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe à  $n + 1$  sommets.
  - Si  $G$  a un sommet  $v$  de degré 1 alors  $G - v$  est un graphe *connexe* à  $n$  sommets donc, par  $\mathcal{H}(n)$ ,  $G - v$  a au moins  $n - 1$  arêtes. Donc  $G$  a au moins  $n$  arêtes.
  - Sinon,

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe connexe à  $n$  sommets possède au moins  $n - 1$  arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
- ② Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . Soit  $G = (V, E)$  un graphe connexe à  $n + 1$  sommets.
  - Si  $G$  a un sommet  $v$  de degré 1 alors  $G - v$  est un graphe *connexe* à  $n$  sommets donc, par  $\mathcal{H}(n)$ ,  $G - v$  a au moins  $n - 1$  arêtes. Donc  $G$  a au moins  $n$  arêtes.
  - Sinon, tous les sommets de  $G$  sont de degré  $\geq 2$ .  
Alors  $2|E| = \sum_{v \in V} \deg(v) \geq 2(n + 1) \geq 2n$ .  
Donc  $|E| \geq n$ , ce qui montre  $\mathcal{H}(n + 1)$ .

# Composantes connexes

Considérons la relation d'équivalence sur les sommets d'un graphe non orienté  $G = (V, E)$  :

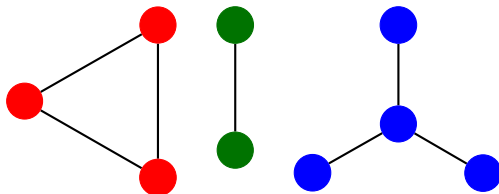
$$u \sim v \iff \text{il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

# Composantes connexes

Considérons la relation d'équivalence sur les sommets d'un graphe non orienté  $G = (V, E)$  :

$$u \sim v \iff \text{il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

Les classes d'équivalences  $V / \sim$  sont les sous-graphes connexes maximaux (au sens de  $\subseteq$ ) de  $G$ , ils sont appelés **composantes connexes**.



Un graphe avec 3 composantes connexes.

## Composantes fortement connexes

Si  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  est orienté, «  $u \rightsquigarrow v \iff$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  »  
**n'est pas** une relation d'équivalence.

# Composantes fortement connexes

Si  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  est orienté, «  $u \rightsquigarrow v \iff$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  »  
**n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \longleftrightarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$



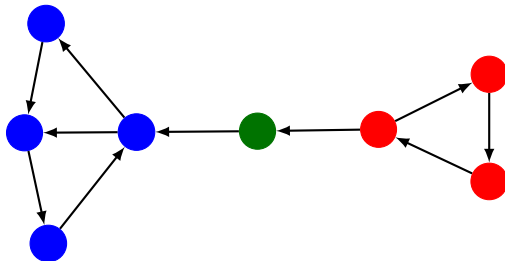
# Composantes fortement connexes

Si  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  est orienté, «  $u \rightsquigarrow v \iff$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  »  
**n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \rightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

Les classes d'équivalences  $V / \rightsquigarrow$  sont appelées **composantes fortement connexes**.



Un graphe orienté avec 3 composantes fortement connexes.

# Composantes fortement connexes

Si  $\vec{G} = (V, \vec{E})$  est orienté, «  $u \rightsquigarrow v \iff$  il existe un chemin de  $u$  à  $v$  »  
**n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \longleftrightarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

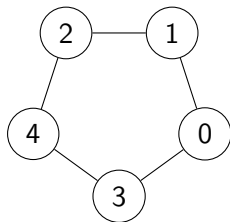
Les classes d'équivalences  $V / \longleftrightarrow$  sont appelées **composantes fortement connexes**.



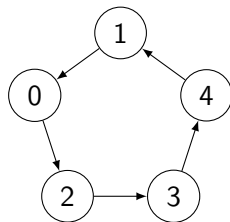
Le graphe des composantes fortement connexes est acyclique.

# Cycle

Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.



Cycle non orienté

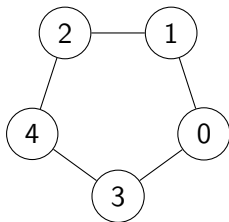


Cycle orienté

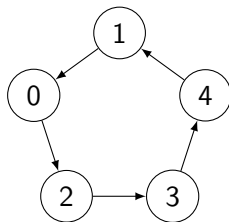
Un cycle avec  $n$  sommets a

# Cycle

Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.



Cycle non orienté



Cycle orienté

Un cycle avec  $n$  sommets a  $n$  arêtes.  
Le degré de chaque sommet est 2.

# Exemples

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{0, \dots, n-1\}$ .

On peut lui associer un graphe orienté  $(V, \vec{E})$  où :

- ❶  $V = \{0, \dots, n-1\}$
- ❷  $\vec{E} = \{(v, \sigma(v)), \forall v \in V\}$

# Exemples

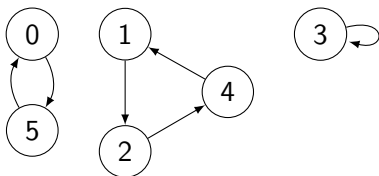
Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{0, \dots, n-1\}$ .

On peut lui associer un graphe orienté  $(V, \vec{E})$  où :

❶  $V = \{0, \dots, n-1\}$

❷  $\vec{E} = \{(v, \sigma(v)), \forall v \in V\}$

Si  $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$  :



Les cycles d'une permutation sont celles de son graphe.

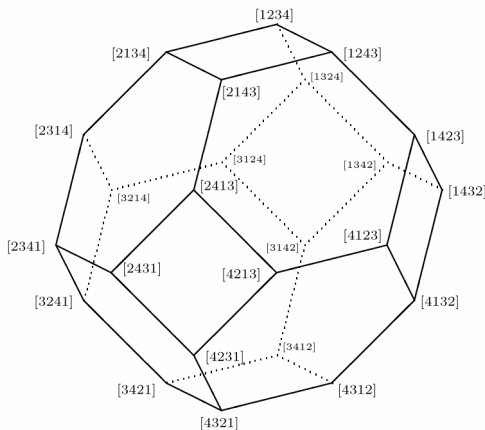
# Exemples

Le permutoèdre d'ordre  $n$  a pour sommets les permutations de  $\{0, \dots, n-1\}$  et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets :

Degré de chaque sommet :

Nombre d'arêtes :



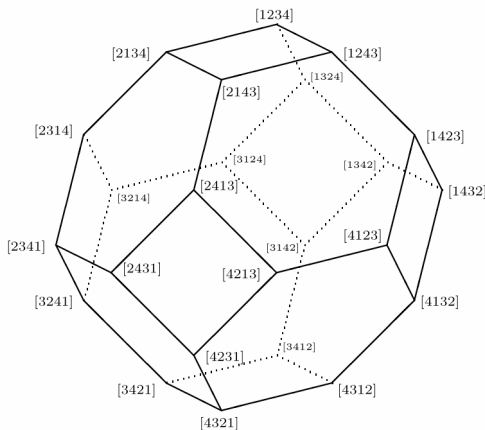
# Exemples

Le permutoèdre d'ordre  $n$  a pour sommets les permutations de  $\{0, \dots, n-1\}$  et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets :  $n!$

Degré de chaque sommet :

Nombre d'arêtes :





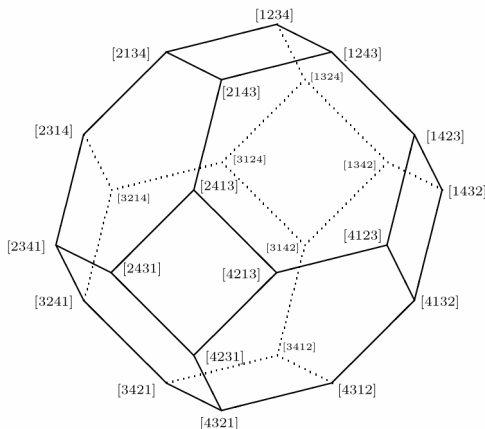
# Exemples

Le permutoèdre d'ordre  $n$  a pour sommets les permutations de  $\{0, \dots, n-1\}$  et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets :  $n!$

Degré de chaque sommet :  $\binom{n}{2}$

Nombre d'arêtes :



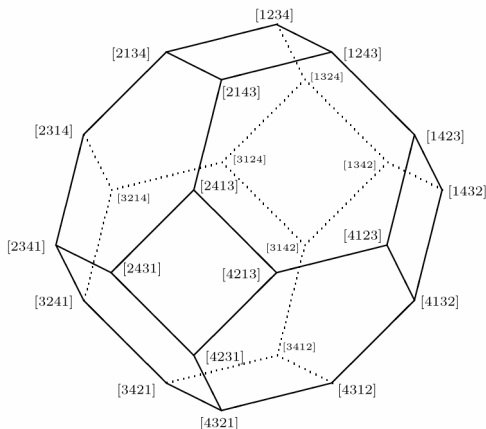
# Exemples

Le permutoèdre d'ordre  $n$  a pour sommets les permutations de  $\{0, \dots, n-1\}$  et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets :  $n!$

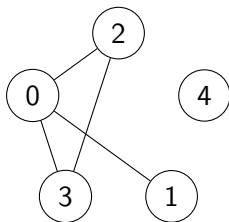
Degré de chaque sommet :  $\binom{n}{2}$

Nombre d'arêtes :  $\frac{n!}{2} \binom{n}{2}$

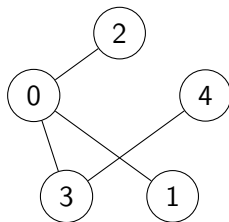


# Graphe acyclique

Un graphe est **acyclique** (ou : sans cycle) s'il ne contient pas de cycle.



Graphe contenant un cycle



Graphe acyclique

Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe acyclique à  $n$  sommets?

# Graphe acyclique

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré  $\leq 1$ .

# Graphe acyclique

Montrons d'abord :

## Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré  $\leq 1$ .

Preuve : Supposons que tous les sommets soient de degrés  $\geq 2$ .

Faisons partir un chemin depuis un sommet quelconque en visitant à chaque étape le sommet adjacent différent du prédécesseur (possible car les degrés sont  $\geq 2$ ).

Comme le nombre de sommets est fini, ce chemin revient nécessairement sur un sommet déjà visité, ce qui donne un cycle.

# Graphe acyclique

Montrons d'abord :

## Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré  $\leq 1$ .

Preuve : Supposons que tous les sommets soient de degrés  $\geq 2$ .

Faisons partir un chemin depuis un sommet quelconque en visitant à chaque étape le sommet adjacent différent du prédécesseur (possible car les degrés sont  $\geq 2$ ).

Comme le nombre de sommets est fini, ce chemin revient nécessairement sur un sommet déjà visité, ce qui donne un cycle.

Remarque : tout graphe acyclique avec au moins 2 sommets contient 2 sommets de degré  $\leq 1$ .

# Graphe acyclique

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe acyclique à  $n$  sommets a au plus  $n - 1$  arêtes ».

# Graphe acyclique

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe acyclique à  $n$  sommets a au plus  $n - 1$  arêtes ».

- 1 Un graphe à 1 sommet a 0 arête.
- 2 Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . D'après le lemme, un graphe  $G$  acyclique à  $n + 1$  sommets possède un sommet  $v$  de degré  $\leq 1$ .



# Graphe acyclique

Montrons par récurrence  $\mathcal{H}(n)$  : « un graphe acyclique à  $n$  sommets a au plus  $n - 1$  arêtes ».

- ① Un graphe à 1 sommet a 0 arête.
- ② Supposons  $\mathcal{H}(n)$ . D'après le lemme, un graphe  $G$  acyclique à  $n + 1$  sommets possède un sommet  $v$  de degré  $\leq 1$ .  
Comme  $G$  est acyclique,  $G - v$  l'est aussi et a au plus  $n - 1$  arêtes, par  $\mathcal{H}(n)$ .  
Donc  $G$  a au plus  $n - 1 + \deg(v) \leq n$  arêtes, ce qui montre  $\mathcal{H}(n + 1)$ .

## Théorème / définition

Un graphe  $T$  à  $n$  sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- $T$  est **connexe acyclique**.
- $T$  est connexe et a  $n - 1$  arêtes.
- $T$  est acyclique et a  $n - 1$  arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de  $T$ .

Preuve : au tableau.

## Théorème / définition

Un graphe  $T$  à  $n$  sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- $T$  est **connexe acyclique**.
- $T$  est connexe et a  $n - 1$  arêtes.
- $T$  est acyclique et a  $n - 1$  arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de  $T$ .

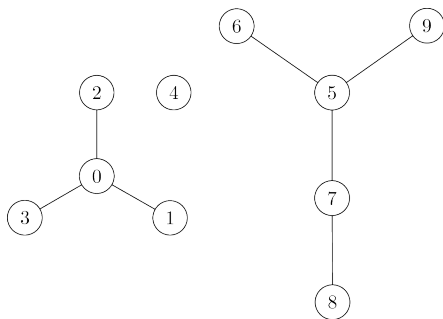
Preuve : au tableau.

Un arbre est **couvrant** s'il contient tous les sommets.

Les « arbres » que l'on a vu avant étaient enracinés. Ici il n'y a pas de racine.

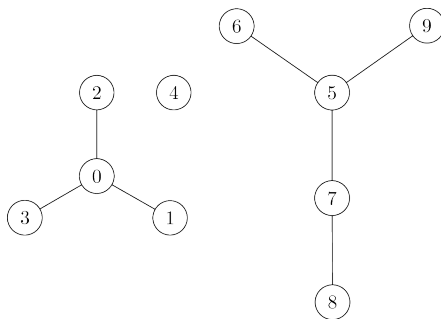
# Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :



# Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :

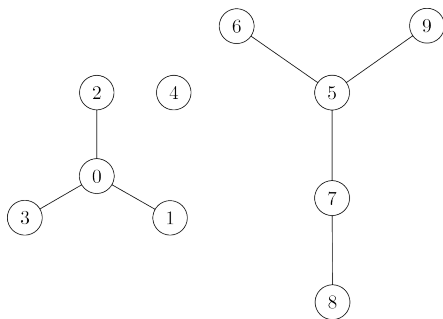


## Lemme

Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

# Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :



## Lemme

Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

## Exercice

Quel est le nombre d'arêtes d'une forêt à  $n$  sommets, composée de  $k$  arbres ?