Dans les 2 parties de ce TD/cours, vous trouverez un exemple de démonstration (à lire attentivement!) dont vous pouvez vous inspirer pour répondre aux questions suivantes.

I Preuve d'équation de récurrence

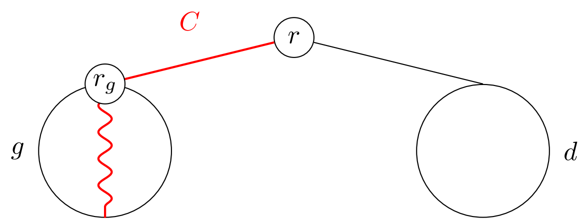
I.1 Exemple : récurrence sur la hauteur

Théorème: Hauteur

Soit a un arbre binaire non vide, de sous-arbre gauche g et sous-arbre droit d.
On note h_a la hauteur de a, définie comme la longueur maximum (en nombre d'arêtes) d'un chemin de la racine de a à une feuille. Alors :

$$h_a = 1 + \max(h_g, h_d)$$

Preuve : Soit C un chemin de longueur maximum de la racine de a à une feuille.
C passe soit dans g, soit dans d (et pas dans les deux). Supposons que C passe dans g, l'autre cas étant symétrique.

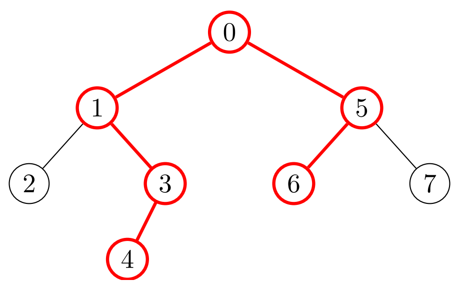


Soit C_g la partie de C qui est incluse dans g.
Supposons que C_g ne soit pas un chemin de longueur maximum de la racine à une feuille dans g. Il existe alors un chemin C'_g plus long que C_g dans g. Mais alors la concaténation de l'arête de r à r_g (racine de g) et du C'_q est plus long que C, ce qui est une contradiction.
Donc C_g est un plus long chemin de r_g à une feuille de g : sa longueur est donc h_g par définition. D'où $h_a = h_g + 1$.
Si C passe par d, on a, par un raisonnement similaire : $h_a = h_d + 1$.
Comme la hauteur est le maximum sur tous les chemins possibles :

$$\boxed{h_a = 1 + \max(h_g, h_d)}$$

I.2 Exercice : Diamètre

Le **diamètre** d_a d'un arbre a est la longueur maximum d'un chemin entre 2 noeuds quelconques de cet arbre. Par exemple, le diamètre de l'arbre ci-dessous est 5, correspondant au chemin $4 \to 3 \to 1 \to 0 \to 5 \to 7$.



1. Soit a un arbre binaire composé d'une racine, d'un sous-arbre gauche g et d'un sous-arbre d. Donner, en la démontrant, une relation permettant de calculer $d(a)$ en utilisant g et d. On pourra utiliser la $h(g)$ et $h(d)$.

2. En déduire une fonction permettant de calculer le diamètre d'un arbre binaire. Quelle est sa complexité ?

3. Améliorer la fonction précédente pour calculer le diamètre en complexité linéaire.

II Preuve de formule sur les arbres

II.1 Exemple : nombre d'arêtes d'un arbre binaire

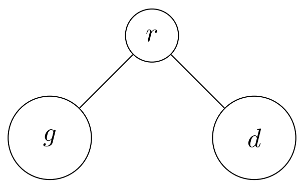
Théorème: Nombre d'arêtes

Soit a un arbre binaire à $n \geq 1$ noeuds.
Alors a possède $n-1$ arêtes.

Preuve : Démontrons, par récurrence forte :

$$H_n : \text{« un arbre binaire à } n \geq 1 \text{ noeuds possède } n-1 \text{ arêtes »}$$

1. H_1 est clairement vraie : un arbre à 1 sommet possède 0 arête.
2. Supposons H_n vraie et soit a un arbre binaire à $n+1$ noeuds.
   a se décompose comme une racine r, un sous-arbre gauche g et un sous-arbre droit d :



- Si $g = \emptyset$, alors d a n noeuds donc $n-1$ arêtes d'après H_n. Avec l'arête de r vers la racine de d, il y a donc bien $\boxed{n \text{ arêtes}}$ au total.
- De même si $d = \emptyset$.
- Sinon, soit k le nombre de noeuds de g. d possède alors $n+1-k$ noeuds. D'après H_k, g possède $k-1$ arêtes. D'après H_{n-k}, d possède $n-k-1$ arêtes. Donc a possède :

$$\underbrace{2}_{r} + \underbrace{k-1}_{g} + \underbrace{n-k-1}_{d} = \boxed{n \text{ arêtes}}$$

II.2 Exercice : Nombre de feuilles

1. Démontrer que, si a est un arbre binaire avec f_a feuilles et de hauteur h_a :

$$f_a \leq 2^{h_a+1}$$

On rappelle qu'une feuille est un noeud sans fils (dont les deux sous-arbres sont vides) et qu'un noeud interne est un noeud qui n'est pas une feuille. Un arbre est **binaire strict** si ses noeuds ont 0 ou 2 fils.

2. Soit a un arbre binaire strict. Conjecturer une formule reliant le nombre f_a de feuilles de a avec son nombre n_a de noeuds internes, puis la prouver par récurrence.

II.3 Exercice : Nombre d'arbres binaires

Dans cet exercice, on veut compter le nombre a_n d'arbres binaires à n noeuds.

1. Que vaut a_1, a_2, a_3, a_4 ? Dessiner les arbres correspondants.
2. Montrer que :

$$a_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$$

L'équation de récurrence ci-dessus permet de montrer (en utilisant, par exemple, des séries entières que vous allez voir plus tard en mathématiques) que a_n est égal au **nombre de Catalan** :

$$\boxed{a_n = \frac{1}{n}\binom{n}{2n}}$$