Graphes : définitions

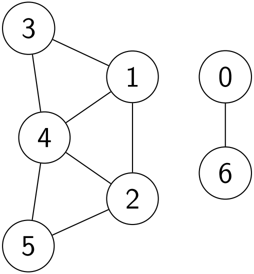
Quentin Fortier

January 27, 2022

Graphe = dessin?

Un graphe est constitué :

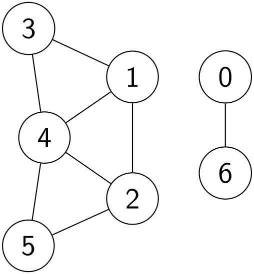
1. de **sommets** (**vertices** en anglais), représentés par des points
2. d'**arêtes** (**edges** en anglais), représentés par des traits entre les points



Définition formelle

Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (V, E)$ où :

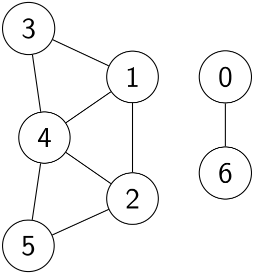
1. V est un ensemble fini (de **sommets**)
2. E est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets



Définition formelle

Un **graphe (non orienté)** est un couple $G = (V, E)$ où :

1. V est un ensemble fini (de **sommets**)
2. E est un ensemble dont chaque élément, appelé **arête**, est un **ensemble** de 2 sommets

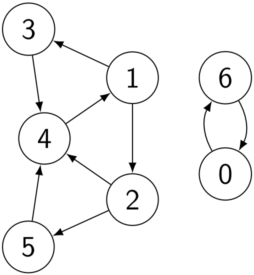


Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et
$E = \{\{0, 6\}, \{1, 2\}, \{1, 3\}, \{1, 4\}, \{2, 4\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{4, 5\}\}$.

Définition formelle

Un **graphe orienté** est un couple $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ où :

1. V est un ensemble fini (de **sommets**)
2. $\overrightarrow{E} \subseteq V \times V$ est un ensemble de **couples** de sommets (appelés **arcs**)



Ici $V = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ et
$\overrightarrow{E} = \{(0, 6), (6, 0), (1, 2), (1, 3), (4, 1), (2, 4), (2, 5), (3, 4), (5, 4)\}$.

Vocabulaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).

Vocabulaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté deg(v), est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
  Pour un graphe orienté, on note $\deg^-(v)$ et $\deg^+(v)$ les degrés entrants et sortants de v.

Vocabulaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté deg(v), est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
  Pour un graphe orienté, on note $\deg^-(v)$ et $\deg^+(v)$ les degrés entrants et sortants de v.
- Si $e \in E$, on note $G - e$ le graphe obtenu en supprimant e :
  $G - e = (V, E - \{e\})$.

Vocabulaire

Soit $G = (V, E)$ un graphe non orienté.

- Si $e = \{u, v\} \in E$ on dit que u et v sont les **extrémités** de e et que u et v sont **voisins** (ou **adjacents**).
- Le **degré** d'un sommet $v \in V$, noté deg(v), est son nombre de voisins. Si $\deg(v) = 1$, v est une **feuille**.
  Pour un graphe orienté, on note $\deg^-(v)$ et $\deg^+(v)$ les degrés entrants et sortants de v.
- Si $e \in E$, on note $G - e$ le graphe obtenu en supprimant e : $G - e = (V, E - \{e\})$.
- Si $v \in V$, on note $G - v$ le graphe obtenu en supprimant v : $G - v = (V - \{v\}, E')$, où E' est l'ensemble des arêtes de E n'ayant pas v comme extrémité.

Formule des degrés

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Formule des degrés

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :
Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

1. 2 $|E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
2. $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Formule des degrés

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :

Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

1. $2\ |E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
2. $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Pour un graphe orienté : $\sum \deg^+(v) = \sum \deg^-(v) = 2|\vec{E}|$

Formule des degrés

Formule des degrés

Soit $G = (V, E)$ un graphe. Alors :

$$\sum_{v \in V} \deg(v) = 2|E|$$

Preuve (par double comptage des extrémités d'arêtes) :
Le nombre d'extrémités d'arêtes est égal à :

1. 2 $|E|$ car chaque arête a 2 extrémités.
2. $\sum_{v \in V} \deg(v)$ car chaque sommet v est extrémité de $\deg(v)$ arêtes.

Pour un graphe orienté : $\sum \deg^{+}(v) = \sum \deg^{-}(v) = 2|\vec{E}|$
Autre preuve : récurrence sur le nombre d'arêtes.

Corollaire

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Corollaire

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v)\ \text{pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v)\ \text{impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Corollaire

Lemme des poignées de main (Handshake lemma)

Tout graphe possède un nombre pair de sommets de degrés impairs.

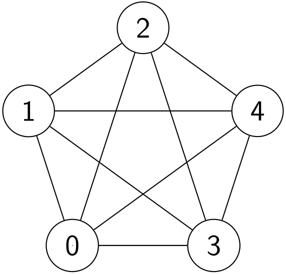
Preuve :

$$\underbrace{\sum_{\deg(v)\ \text{pair}} \deg(v)}_{\text{pair}} + \sum_{\deg(v)\ \text{impair}} \deg(v) = \underbrace{2|E|}_{\text{pair}}$$

Application : existe t-il un graphe dont les sommets ont pour degrés 1, 2, 2, 3, 5 ?

Graphe complet

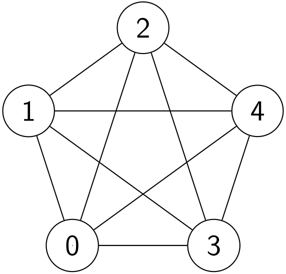
Un **graphe complet** est un graphe non orienté possèdant toutes les arêtes possibles.



Un graphe complet avec n sommets a arêtes

Graphe complet

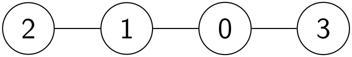
Un **graphe complet** est un graphe non orienté possèdant toutes les arêtes possibles.



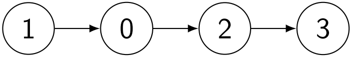
Un graphe complet avec n sommets a $\binom{n}{2}$ arêtes : c'est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe à n sommets.
De façon générale, tout graphe à n sommets et m arêtes vérifie $m = \mathrm{O}(n^2)$.
Chaque sommet a degré $n - 1$.

Chemin

Un **chemin** est une suite d'arêtes consécutives différentes.



Chemin (non orienté) entre 2 et 3

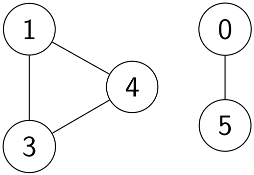


Chemin (orienté) de 1 à 3

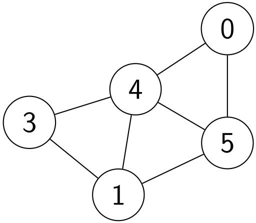
La **longueur** d'un chemin est son nombre d'arêtes.
La **distance** de u à v est la plus petite longueur d'un chemin de u à v (∞ si il n'y a pas de chemin) : c'est une distance au sens mathématique.

Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



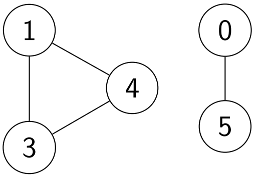
Graphe non connexe



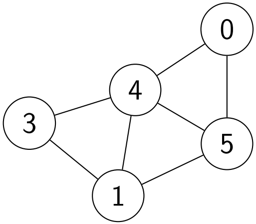
Graphe connexe

Connexité

Un graphe non orienté est **connexe** s'il possède un chemin de n'importe quel sommet à n'importe quel autre.



Graphe non connexe



Graphe connexe

Quel est le nombre minimum d'arêtes d'un graphe connexe à n sommets?

Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.

Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors

Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G = (V, E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors $G - v$ est un graphe *connexe* à n sommets donc, par $\mathcal{H}(n)$, $G - v$ a au moins $n-1$ arêtes.

Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.

2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors $G-v$ est un graphe *connexe* à n sommets donc, par $\mathcal{H}(n)$, $G-v$ a au moins $n-1$ arêtes. Donc G a au moins n arêtes.
   - Sinon,

Connexité

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe connexe à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet possède 0 arête.
2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. Soit $G=(V,E)$ un graphe connexe à $n+1$ sommets.
   - Si G a un sommet v de degré 1 alors $G-v$ est un graphe *connexe* à n sommets donc, par $\mathcal{H}(n)$, $G-v$ a au moins $n-1$ arêtes. Donc G a au moins n arêtes.
   - Sinon, tous les sommets de G sont de degré ≥ 2.
     Alors $2|E| = \sum_{v\in V} \deg(v) \geq 2(n+1) \geq 2n$.
     Donc $|E| \geq n$, ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

Composantes connexes

Considérons la relation d'équivalence sur les sommets d'un graphe non orienté $G = (V, E)$:

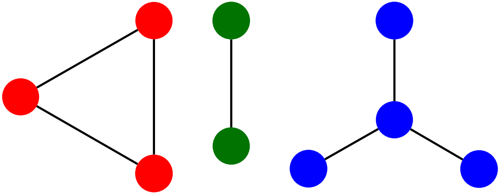
$$u \sim v \iff \text{il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

Composantes connexes

Considérons la relation d'équivalence sur les sommets d'un graphe non orienté $G = (V, E)$:

$$u \sim v \Longleftrightarrow \text{il existe un chemin entre } u \text{ et } v$$

Les classes d'équivalences $V/\sim$ sont les sous-graphes connexes maximaux (au sens de $\subseteq$) de G, ils sont appelés **composantes connexes**.



Un graphe avec 3 composantes connexes.

Composantes fortement connexes

Si $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \Longleftrightarrow$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Composantes fortement connexes

Si $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \Longleftrightarrow$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \leftrightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

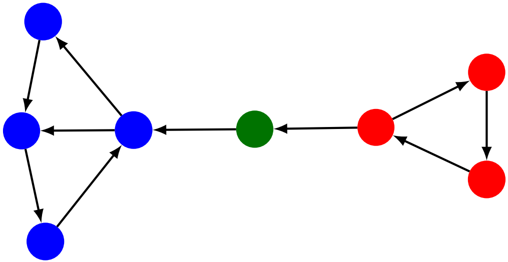
Composantes fortement connexes

Si $\overrightarrow{G} = (V, \overrightarrow{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \Longleftrightarrow$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \leftrightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

Les classes d'équivalences $V/\leftrightsquigarrow$ sont appelées **composantes fortement connexes**.



Un graphe orienté avec 3 composantes fortement connexes.

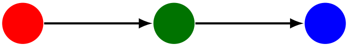
Composantes fortement connexes

Si $\vec{G} = (V, \vec{E})$ est orienté, « $u \rightsquigarrow v \Longleftrightarrow$ il existe un chemin de u à v » **n'est pas** une relation d'équivalence.

Par contre la relation suivante est une relation d'équivalence :

$$u \leftrightsquigarrow v \iff u \rightsquigarrow v \text{ et } v \rightsquigarrow u$$

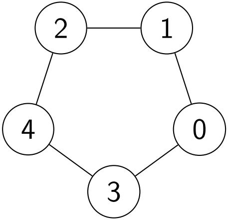
Les classes d'équivalences $V/\leftrightsquigarrow$ sont appelées **composantes fortement connexes**.



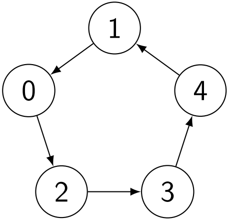
Le graphe des composantes fortement connexes est acyclique.

Cycle

Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.



Cycle non orienté

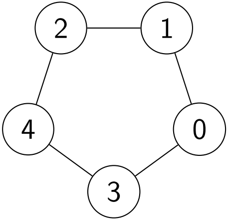


Cycle orienté

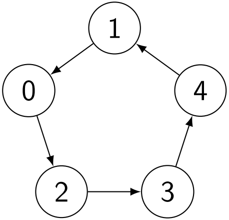
Un cycle avec n sommets a

Cycle

Un **cycle** est un chemin revenant au sommet de départ.



Cycle non orienté



Cycle orienté

Un cycle avec n sommets a n arêtes.
Le degré de chaque sommet est 2.

Exemples

Soit σ une permutation de $\{0, ..., n-1\}$.
On peut lui associer un graphe orienté $(V, \vec{E})$ où :

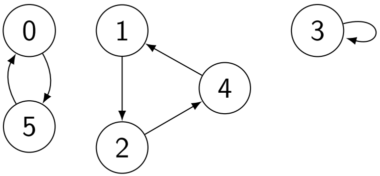
1. $V = \{0, ..., n-1\}$
2. $\vec{E} = \{(v, \sigma(v)),\ \forall v \in V\}$

Exemples

Soit σ une permutation de $\{0, ..., n-1\}$.
On peut lui associer un graphe orienté $(V, \vec{E})$ où :

1. $V = \{0, ..., n-1\}$
2. $\vec{E} = \{(v, \sigma(v)),\ \forall v \in V\}$

Si $\sigma = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 2 & 4 & 3 & 1 & 0 \end{pmatrix}$:



Les cycles d'une permutation sont celles de son graphe.

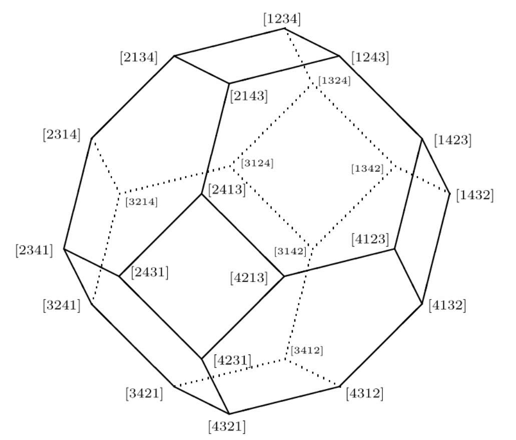
Exemples

Le permutoèdre d'ordre n a pour sommets les permutations de $\{0, ..., n-1\}$ et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets :

Degré de chaque sommet :

Nombre d'arêtes :



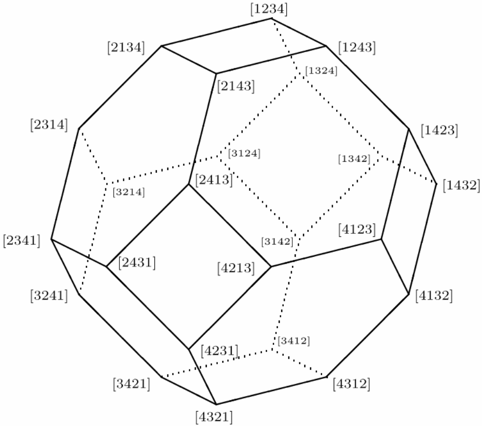
Exemples

Le permutoèdre d'ordre n a pour sommets les permutations de $\{0, ..., n-1\}$ et des arêtes entre deux permutations si elles diffèrent d'une transposition.

Nombre de sommets : $n!$

Degré de chaque sommet :

Nombre d'arêtes :



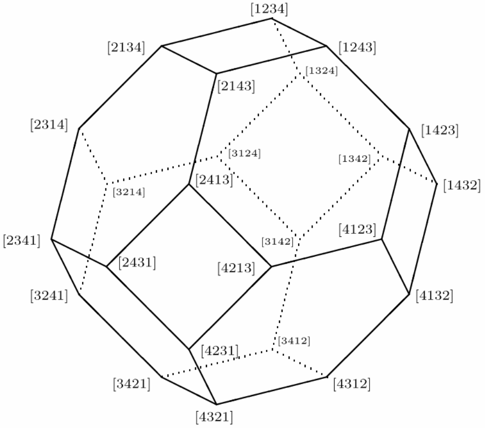
Exemples

Le permutoèdre d'ordre n a pour sommets les permutations de $\{0, ..., n-1\}$ et des arêtes entre deux permutations si elles différent d'une transposition.

Nombre de sommets : $n!$

Degré de chaque sommet : $\binom{n}{2}$

Nombre d'arêtes :



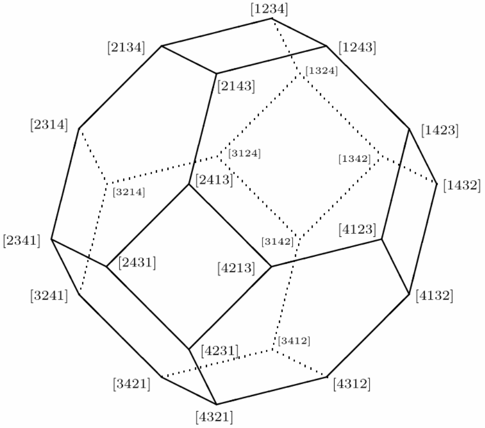
Exemples

Le permutoèdre d'ordre n a pour sommets les permutations de $\{0, ..., n-1\}$ et des arêtes entre deux permutations si elles différent d'une transposition.

Nombre de sommets : $n!$

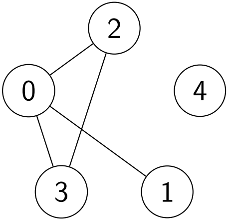
Degré de chaque sommet : $\binom{n}{2}$

Nombre d'arêtes : $\frac{n!}{2}\binom{n}{2}$

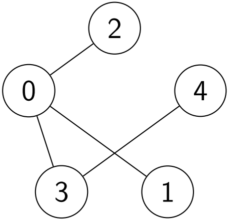


Graphe acyclique

Un graphe est **acyclique** (ou : sans cycle) s'il ne contient pas de cycle.



Graphe contenant un cycle



Graphe acyclique

Quel est le nombre maximum d'arêtes d'un graphe acyclique à n sommets?

Graphe acyclique

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré ≤ 1.

Graphe acyclique

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré ≤ 1.

Preuve : Supposons que tous les sommets soient de degrés ≥ 2.
Faisons partir un chemin depuis un sommet quelconque en visitant à chaque étape le sommet adjacent différent du prédécesseur (possible car les degrés sont ≥ 2).
Comme le nombre de sommets est fini, ce chemin revient nécessairement sur un sommet déjà visité, ce qui donne un cycle.

Graphe acyclique

Montrons d'abord :

Lemme

Tout graphe acyclique contient un sommet de degré ≤ 1.

<u>Preuve</u> : Supposons que tous les sommets soient de degrés ≥ 2.
Faisons partir un chemin depuis un sommet quelconque en visitant à chaque étape le sommet adjacent différent du prédécesseur (possible car les degrés sont ≥ 2).
Comme le nombre de sommets est fini, ce chemin revient nécessairement sur un sommet déjà visité, ce qui donne un cycle.

<u>Remarque</u> : tout graphe acyclique avec au moins 2 sommets contient 2 sommets de degré ≤ 1.

Graphe acyclique

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe acyclique à n sommets a au plus $n-1$ arêtes ».

Graphe acyclique

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe acyclique à n sommets a au plus $n - 1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet a 0 arête.
2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. D'après le lemme, un graphe G acyclique à $n + 1$ sommets possède un sommet v de degré ≤ 1.

Graphe acyclique

Montrons par récurrence $\mathcal{H}(n)$: « un graphe acyclique à n sommets a au plus $n-1$ arêtes ».

1. Un graphe à 1 sommet a 0 arête.
2. Supposons $\mathcal{H}(n)$. D'après le lemme, un graphe G acyclique à $n+1$ sommets possède un sommet v de degré ≤ 1.
   Comme G est acyclique, $G-v$ l'est aussi et a au plus $n-1$ arêtes, par $\mathcal{H}(n)$.
   Donc G a au plus $n-1+\deg(v) \leq n$ arêtes, ce qui montre $\mathcal{H}(n+1)$.

Arbre

Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- T est **connexe acyclique**.
- T est connexe et a $n-1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n-1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T.

Preuve : au tableau.

Arbre

Théorème / définition

Un graphe T à n sommets est un **arbre** s'il vérifie l'une des conditions équivalentes :

- T est **connexe acyclique**.
- T est connexe et a $n-1$ arêtes.
- T est acyclique et a $n-1$ arêtes.
- Il existe un unique chemin entre 2 sommets quelconques de T.

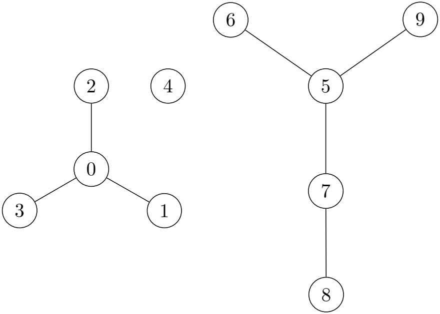
Preuve : au tableau.

Un arbre est **couvrant** s'il contient tous les sommets.

Les « arbres » que l'on a vu avant étaient enracinés. Ici il n'y a pas de racine.

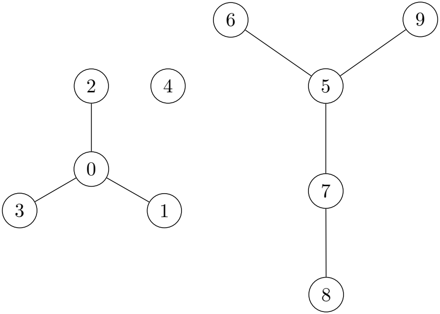
Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :



Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :

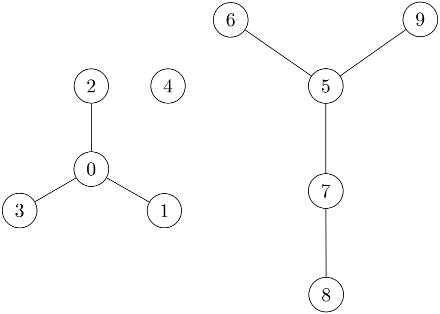


Lemme

Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

Forêt

Une **forêt** est un graphe acyclique :



Lemme

Les composantes connexes d'une forêt sont des arbres.

Exercice

Quel est le nombre d'arêtes d'une forêt à n sommets, composée de k arbres ?