TP 10

Décembre 2021

Dans ces exercices, on laisse le libre choix du langage de programmation, parmi C, OCamL et Python.

Exercice 1 : Sous-ensembles de phrases

On se donne un ensemble de n phrases $\{p_i | i \in [1; n]\}$ où chaque phrase est une chaîne de caractères, que l'on supposera de taille majorée par $t = 100$.

On fixe une lettre c. On aimerait connaître la taille du plus grand sous-ensemble de phrases, ayant les lettres c aux mêmes position. Par exemple, dans l'ensemble E={p_0="bonjour, madame", p_1="ordinateur qui calcule", p_2="boulon"}, alors pour la lettre c ='o', cette taille est 2 car p_0 et p_2 ont les 'o' aux mêmes positions.

Partie 1

Une première idée est de définir une liste de positions pour chaque phrase, puis de trouver un sous-ensemble de listes identiques.

1. Écrire une fonction get_positions(str s, char c) renvoyant la liste des positions de la chaîne s où le caractère est égal à c
2. Écrire un algorithme permettant d'effectuer la tâche demandée
3. Quelle est sa complexité en fonction de n et t?

Partie 2

Afin de réduire la complexité, on propose de définir une signature pour chaque phrase. On définit alors $s(p) = \sum_{i=0}^{len(p)} 2^i \times \delta_{p[i],c}$

1. Comment interprétez-vous s ? Écrire la fonction signature(str s) qui pour une chaîne de caractères p renvoie sa signature $s(p)$. Quelle est sa complexité ?
2. Étant données deux signatures, quelle est la complexité de la comparaison entre les deux ?
3. En déduire un algorithme de complexité $O(nt + n^2)$ permettant de répondre au problème en utilisant les signatures. Justifier la complexité
4. (Optionnel) En utilisant une structure de dictionnaire, comment peut-on abaisser la complexité à $O(nt)$? Pourquoi cette complexité peut-elle être intéressante par rapport à celle de la question précédente ?

Exercice 2 : Nombres de Catalan

On définit les nombres de Catalan $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ par $C_0 = 1$ et $C_n = \sum_{i+j=n-1} C_i C_j$.

1. Écrire une version itérative de la fonction `catalan` qui à tout entier n associe le n^{eme} nombre de Catalan C_n
2. Prouver ce programme
3. Donner une version récursive

4. On peut montrer (mais on ne le demande pas) que $C_n = \dfrac{2(2n-1)}{n+1} C_{n-1}$ pour $n \geq 1$
   En utilisant cette remarque, donner une version itérative de la fonction Catalan

5. Donner une version récursive