Département d'informatique et de recherche opérationnelle

Algorithme de *Progressive Hedging* pour un problème de gestion de portefeuille multi-périodes avec coûts de transaction

Rapport final de projet

IFT6512 – Programmation stochastique

Étudiant : Rocky Perkings Kouegang Mossi

Matricule : 20327920

Enseignant : Fabian Bastin

Session : Automne 2025

Montréal

Résumé

Ce rapport étudie un problème d'allocation dynamique d'actifs formulé comme un programme stochastique multi-périodes avec coûts de transaction proportionnels. L'investisseur peut réallouer son portefeuille à dates discrètes en fonction de l'information révélée sur les rendements des actifs. L'incertitude est décrite par un arbre de scénarios construit à partir de simulations multivariées corrélées.

Afin de faire face à la taille rapidement croissante du modèle en forme extensive, nous mettons en place une méthode de décomposition par scénarios fondée sur l'algorithme de *Progressive Hedging*. Le critère d'optimisation retenu est de type moyenne–variance dynamique : il consiste à maximiser l'espérance de la richesse terminale tout en incorporant une pénalisation quadratique de la dispersion de cette richesse sur les scénarios.

Le rapport présente d'abord le cadre théorique de la programmation stochastique multi-étapes, puis détaille la formulation financière du problème, la construction de l'arbre de scénarios et la dérivation du schéma de Progressive Hedging adapté au cas étudié. L'algorithme est implémenté dans un environnement Julia/JuMP, et plusieurs expériences numériques mettent en évidence : (i) la convergence de la méthode pour différents choix de paramètres de pénalisation, (ii) la structure des politiques de rééquilibrage obtenues en présence de coûts de transaction, et (iii) la comparaison avec des stratégies de référence simples (allocation égale, buy-and-hold).

Les résultats suggèrent que Progressive Hedging constitue un outil pertinent pour traiter des problèmes d'allocation dynamique de taille modérée, offrant un compromis intéressant entre qualité des solutions et coût de calcul, tout en restant suffisamment flexible pour intégrer des contraintes pratiques réalistes.

Remerciements

Je remercie le responsable du cours IFT6512 pour la clarté des notes de cours sur la programmation stochastique et les échanges qui ont permis de préciser les objectifs de ce projet. Je remercie également la communauté open source autour de Julia et des bibliothèques d'optimisation, qui fournit des outils robustes et accessibles pour l'expérimentation numérique en finance quantitative.

Table des matières

1 Introduction **4**

1.1 Contexte général 4
1.2 Problème étudié 4
1.3 Enjeux numériques et approche 5
1.4 Objectifs et contributions 5
1.5 Plan du rapport 6

2 Cadre théorique **7**

2.1 Programmation stochastique multi-étapes 7
2.1.1 Formulation générique 7
2.1.2 Arbres de scénarios 7
2.2 Méthodes de décomposition 8
2.3 Algorithme Progressive Hedging : idées clés 8
2.4 Mesure de performance en finance de portefeuille 8

3 Modèle de portefeuille multi-périodes **9**

3.1 Horizon, actifs et scénarios 9
3.2 Variables de décision 9
3.3 Dynamique des positions et des coûts de transaction 9
3.4 Contraintes de gestion 10
3.5 Fonction objectif moyenne–variance 10
3.6 Non-anticipation et structure d'arbre 11
3.7 Formulation compacte par scénarios 11

4 Algorithme de Progressive Hedging **12**

4.1 Relaxation de la non-anticipation 12
4.2 Lagrangien augmenté 12
4.3 Étapes de l'algorithme 12
4.4 Algorithme détaillé 13
4.5 Interprétation financière 15
4.6 Propriétés de convergence 15

5 Implémentation numérique en Julia **17**

5.1 Environnement logiciel et organisation du projet 17
5.2 Représentation des scénarios et de l'arbre 17

5.3 Construction d'un sous-problème de scénario . . . 18
5.4 Boucle Progressive Hedging en pratique . . . 18
5.5 Vérification détaillée sur un cas jouet . . . 19
5.5.1 Description du cas jouet . . . 19
5.5.2 Forme extensive de référence . . . 20
5.5.3 Comparaison des solutions . . . 20

6 Résultats numériques **22**
6.1 Description de l'instance de référence . . . 22
6.1.1 Portefeuille et paramètres de marché . . . 22
6.2 Convergence de l'algorithme Progressive Hedging . . . 23
6.3 Allocation initiale et structure de la politique . . . 24
6.3.1 Allocation au temps $t = 0$ . . . 24
6.3.2 Évolution dans le temps . . . 24
6.4 Impact des coûts de transaction . . . 25
6.5 Comparaison avec des stratégies de référence . . . 25
6.6 Sensibilité au nombre de scénarios et au paramètre de pénalisation . . . 26
6.6.1 Nombre de scénarios . . . 26
6.6.2 Paramètre de pénalisation ρ . . . 27

7 Discussion **28**
7.1 Comportement de la stratégie dynamique . . . 28
7.2 Impact de la dimension du problème . . . 28
7.3 Choix des paramètres d'algorithme . . . 29
7.4 Limites du modèle . . . 29

8 Conclusion et perspectives **30**
8.1 Bilan du travail . . . 30
8.2 Perspectives de recherche et d'application . . . 30

A Détails supplémentaires sur l'implémentation **32**
A.1 Construction d'un sous-problème de scénario . . . 32
A.2 Structure de la boucle Progressive Hedging . . . 34
A.3 Exemple de script d'expérience . . . 35

B Statistiques descriptives des scénarios **37**

Chapitre 1

Introduction

1.1 Contexte général

Les décisions d'investissement en environnement incertain s'inscrivent naturellement dans un cadre dynamique : un gestionnaire de portefeuille ajuste régulièrement l'allocation des actifs en fonction de l'évolution des marchés, des flux de trésorerie et des contraintes réglementaires. Les modèles standards à une période, issus de la théorie moyenne–variance de Markowitz, offrent une première approximation, mais ne permettent pas de représenter l'enchaînement des décisions dans le temps ni la structure séquentielle de l'information.

Dans un contexte multi-périodes, l'investisseur est confronté à plusieurs sources de complexité :

— l'incertitude sur les rendements futurs s'accumule de période en période ;

— chaque décision de rééquilibrage engendre des coûts de transaction qui réduisent la richesse disponible ;

— les contraintes de gestion peuvent dépendre du chemin suivi par la richesse (par exemple bornes de drawdown, contraintes de solvabilité ou de liquidité).

La programmation stochastique multi-étapes fournit un cadre naturel pour modéliser ce type de problème. Les rendements des actifs sont représentés par un arbre de scénarios discret, et les décisions de portefeuille doivent respecter des contraintes de *non-anticipation* : deux scénarios identiques jusqu'à une certaine date doivent conduire à la même allocation à cette date.

1.2 Problème étudié

Dans ce projet, nous considérons un investisseur qui gère un portefeuille d'actifs financiers sur un horizon discret $t = 0, 1, \ldots, T$. À chaque date, il observe les prix de marché, décide de vendre ou d'acheter certains actifs, supporte des coûts de transaction proportionnels aux volumes échangés, puis laisse évoluer le portefeuille jusqu'à la période suivante.

L'incertitude sur les rendements est modélisée par un nombre fini de scénarios, chacun ayant une probabilité associée. Le but de l'investisseur est de choisir une politique de rééquilibrage qui :

— maximise l'espérance de la richesse terminale ;

— contrôle la variabilité de cette richesse à travers un terme de pénalisation quadratique ;

— respecte les contraintes de budget, de non-négativité et éventuellement de concentration.

Il en résulte un programme d'optimisation convexe de grande dimension, dans lequel toutes les décisions de tous les scénarios sont couplées par les contraintes de non-anticipation. La résolution directe du modèle en forme extensive devient rapidement coûteuse lorsque le nombre de scénarios et la profondeur de l'arbre augmentent.

1.3 Enjeux numériques et approche

Afin de contourner les limitations de la forme extensive, nous nous tournons vers une méthode de décomposition par scénarios : l'algorithme de *Progressive Hedging* (PH) proposé par Rockafellar et Wets. L'idée centrale consiste à :

1. relaxer temporairement les contraintes de non-anticipation, ce qui permet de résoudre un problème indépendant par scénario ;
2. introduire une pénalisation quadratique qui encourage les décisions de différents scénarios à rester proches d'une politique moyenne commune ;
3. mettre à jour itérativement cette politique moyenne et des multiplicateurs de Lagrange jusqu'à ce que les contraintes de non-anticipation soient approximativement satisfaites.

Cette approche permet de :

— exploiter la structure indépendante des scénarios lors de la résolution ;

— paralléliser naturellement le calcul si plusieurs cœurs de calcul sont disponibles ;

— contrôler la qualité de la solution par des critères de convergence explicites.

1.4 Objectifs et contributions

Les objectifs du rapport sont les suivants :

— proposer une formulation mathématique complète d'un problème d'allocation dynamique d'actifs avec coûts de transaction, dans le cadre de la programmation stochastique multi-étapes ;

— dériver une variante de l'algorithme Progressive Hedging adaptée à ce modèle, avec une interprétation financière claire ;

— implémenter l'algorithme dans un environnement Julia/JuMP et documenter les choix de modélisation ;

— mener une série d'expériences numériques sur des jeux de données simulés pour analyser la convergence, la structure des politiques de rééquilibrage et l'impact des coûts de transaction ;

— comparer la performance de la stratégie obtenue avec des règles plus simples (allocation constante, buy-and-hold, rééquilibrage myope).

L'accent est mis sur un critère moyenne–variance dynamique, sur une modélisation en montants monétaires (plutôt qu'en proportions) et sur l'utilisation de Julia comme plateforme d'implémentation, tout en restant dans le cadre général de programmation stochastique multi-étapes.

1.5 Plan du rapport

Le rapport est organisé comme suit :

— le Chapitre 2 présente le cadre théorique de la programmation stochastique multi-étapes et les principes de la décomposition par Progressive Hedging ;

— le Chapitre 3 décrit le modèle financier de portefeuille multi-périodes retenu et sa traduction en programme stochastique ;

— le Chapitre 4 dérive l'algorithme de Progressive Hedging pour ce modèle spécifique et discute ses propriétés de convergence ;

— le Chapitre 5 détaille l'implémentation numérique en Julia, la construction de l'arbre de scénarios et l'architecture logicielle ;

— le Chapitre 6 (Résultats numériques) présente les expériences numériques et les analyses ;

— le Chapitre 7 discute les résultats, les limites et les implications ;

— le Chapitre 8 conclut en proposant quelques pistes d'extension.

Chapitre 2

Cadre théorique

2.1 Programmation stochastique multi-étapes

La programmation stochastique multi-étapes modélise des décisions séquentielles prises sous incertitude. À chaque période, le décideur observe une partie de l'information aléatoire et choisit une décision qui peut influencer l'évolution future du système. Les ouvrages de Birge et Louveaux et de Shapiro et al. présentent une introduction systématique à ce cadre.

Dans un cadre discret, on considère une succession de vecteurs aléatoires $\xi_1, \ldots, \xi_T$ qui représentent par exemple les rendements, les demandes ou les prix. Les décisions x_t sont prises de manière adaptée à la filtration générée par ces variables : x_t ne peut dépendre que des réalisations passées $(\xi_1, \ldots, \xi_t)$.

2.1.1 Formulation générique

Un problème stochastique multi-étapes peut s'écrire de façon générale comme :

$$\min_{x_0,\ldots,x_{T-1}} \ \mathbb{E}\left[\sum_{t=0}^{T-1} c_t(x_t, \xi_{t+1})\right] \tag{2.1}$$

sous

$$x_t \in X_t(x_{t-1}, \xi_t), \quad t = 0, \ldots, T-1, \tag{2.2}$$

$$x_t \text{ adapté à l'information disponible à la date } t. \tag{2.3}$$

La contrainte de non-anticipation est souvent exprimée via un arbre de scénarios : les scénarios qui coïncident jusqu'à un nœud donné de l'arbre doivent partager les mêmes décisions à ce nœud.

2.1.2 Arbres de scénarios

L'incertitude est discrétisée à l'aide d'un arbre dont :

— la racine représente l'état initial ;

— chaque niveau correspond à une période t ;

— chaque chemin de la racine à une feuille correspond à un scénario complet.

À chaque nœud ν de l'arbre est associée une probabilité π_ν et un ensemble de décisions réalisables. Les scénarios qui passent par un même nœud partagent la même information observable, et donc la même décision.

2.2 Méthodes de décomposition

Lorsque le nombre de scénarios est élevé, la résolution directe du problème devient lourde. Plusieurs méthodes de décomposition ont été développées :

— la décomposition de Benders, adaptée principalement aux modèles à deux étapes ;

— la programmation dynamique stochastique, qui repose sur les équations de Bellman mais souffre d'explosion combinatoire en dimension élevée ;

— la programmation dynamique stochastique duale (SDDP), efficace pour certains problèmes linéaires multi-étapes ;

— l'algorithme Progressive Hedging, qui exploite une relaxation des contraintes de non-anticipation.

Dans ce projet, nous nous concentrons sur Progressive Hedging en raison de sa flexibilité et de sa simplicité d'implémentation pour des problèmes convexes.

2.3 Algorithme Progressive Hedging : idées clés

L'algorithme de Progressive Hedging repose sur deux idées fondamentales :

1. **Décomposition par scénarios :** si l'on ignore temporairement les contraintes de non-anticipation, le problème se sépare en une collection de sous-problèmes indépendants, un par scénario ;
2. **Pénalisation quadratique :** des termes quadratiques sont ajoutés pour inciter les décisions des différents scénarios à rester proches d'une décision moyenne, qui représente une politique « commune ».

Le procédé est itératif : à chaque itération, on résout les sous-problèmes, on met à jour la décision moyenne et on ajuste des multiplicateurs de Lagrange qui mesurent l'écart entre les décisions par scénario et cette moyenne.

2.4 Mesure de performance en finance de portefeuille

En finance de portefeuille, plusieurs critères peuvent être utilisés pour évaluer la performance :

— l'espérance de la richesse terminale ;

— la variance ou l'écart-type de cette richesse ;

— le ratio de Sharpe (rendement excédentaire rapporté à la volatilité) ;

— des mesures de risque extrême comme la Value-at-Risk (VaR) ou la Conditional Value-at-Risk (CVaR).

Dans ce rapport, nous adoptons un objectif de type moyenne–variance, dans lequel un paramètre de pondération permet de contrôler l'aversion au risque. Ce choix, bien que simplificateur, conduit à un problème convexe qui se prête bien à la décomposition par scénario.

Chapitre 3

Modèle de portefeuille multi-périodes

3.1 Horizon, actifs et scénarios

Nous considérons un horizon temporel discret $t = 0, 1, \ldots, T$, avec T fini. L'investisseur dispose d'un capital initial $W_0 > 0$ qu'il souhaite allouer entre :

— n actifs risqués (actions, indices, ETF) ;

— un actif sans risque représentant par exemple un fonds monétaire ou une obligation à court terme.

L'incertitude est modélisée par un ensemble fini de scénarios $\Omega = \{1, \ldots, S\}$, chacun étant associé à une probabilité $p_\omega > 0$, $\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega = 1$. Un scénario ω correspond à une trajectoire complète des rendements des actifs sur l'horizon.

3.2 Variables de décision

Dans chaque scénario ω et à chaque période t, nous définissons les variables suivantes :

— $h_{i,t}^{\omega}$: nombre d'unités de l'actif risqué i détenues juste après le rééquilibrage à la date t ;

— c_t^{ω} : montant en numéraire (actif sans risque) détenu après le rééquilibrage ;

— $q_{i,t}^{+,\omega}$: quantité achetée de l'actif i à la date t ;

— $q_{i,t}^{-,\omega}$: quantité vendue de l'actif i à la date t.

La richesse totale après rééquilibrage est :

$$W_t^{\omega} = c_t^{\omega} + \sum_{i=1}^{n} h_{i,t}^{\omega} P_{i,t}^{\omega}, \tag{3.1}$$

où $P_{i,t}^{\omega}$ désigne le prix de l'actif i à la date t dans le scénario ω.

3.3 Dynamique des positions et des coûts de transaction

Les quantités détenues évoluent selon :

$$h_{i,t}^{\omega} = h_{i,t-1}^{\omega} + q_{i,t}^{+,\omega} - q_{i,t}^{-,\omega}, \quad t = 1, \ldots, T-1. \tag{3.2}$$

Le numéraire obéit à une contrainte de budget à chaque rééquilibrage :

$$c_t^\omega = (1+r_f)c_{t-1}^\omega - \sum_{i=1}^n P_{i,t}^\omega q_{i,t}^{+,\omega} + \sum_{i=1}^n (1-\kappa_i) P_{i,t}^\omega q_{i,t}^{-,\omega}, \tag{3.3}$$

$$t = 1, \ldots, T-1, \tag{3.4}$$

où :

— r_f est le taux sans risque par période ;

— $\kappa_i \in [0,1)$ est le taux de coût de transaction proportionnel lors de la vente de l'actif i.

On suppose $h_{i,0}$ et c_0 donnés par la situation initiale.

3.4 Contraintes de gestion

Les contraintes principales sont :

$$h_{i,t}^\omega \geq 0, \quad q_{i,t}^{+,\omega} \geq 0, \quad q_{i,t}^{-,\omega} \geq 0, \tag{3.5}$$

$$c_t^\omega \geq 0, \tag{3.6}$$

$$W_t^\omega \geq \underline{W}_t \quad \text{(richesse minimale optionnelle)}, \tag{3.7}$$

$$\frac{h_{i,t}^\omega P_{i,t}^\omega}{W_t^\omega} \leq \bar{\alpha}_i \quad \text{(plafond de concentration)}. \tag{3.8}$$

Ces contraintes évitent les ventes à découvert, imposent une position de trésorerie non négative et limitent la fraction de richesse investie dans un seul actif.

3.5 Fonction objectif moyenne–variance

Pour chaque scénario ω, la richesse terminale W_T^ω dépend de la stratégie (h, q, c) choisie. Nous considérons le critère :

$$\min \ J = -\mathbb{E}[W_T] + \lambda \operatorname{Var}(W_T), \tag{3.9}$$

où $\lambda \geq 0$ représente l'intensité de l'aversion au risque.

En pratique :

$$\mathbb{E}[W_T] = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega W_T^\omega, \tag{3.10}$$

$$\operatorname{Var}(W_T) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left(W_T^\omega - \sum_{\omega' \in \Omega} p_{\omega'} W_T^{\omega'} \right)^2. \tag{3.11}$$

Cette formulation conduit à un problème quadratique convexe lorsque les contraintes sont linéaires et les variables continues.

3.6 Non-anticipation et structure d'arbre

Les contraintes de non-anticipation s'expriment en fonction de l'arbre de scénarios : à chaque nœud ν de l'arbre, correspondant à une période t et à un historique de prix, les décisions doivent être identiques pour tous les scénarios passant par ce nœud. Si $\mathcal{S}_\nu$ est l'ensemble des scénarios qui partagent ce nœud, alors :

$$h_{i,t}^{\omega} = h_{i,t}^{\omega'}, \quad \forall \omega, \omega' \in \mathcal{S}_\nu, \tag{3.12}$$

$$c_t^{\omega} = c_t^{\omega'}, \quad \forall \omega, \omega' \in \mathcal{S}_\nu, \tag{3.13}$$

$$q_{i,t}^{+,\omega} = q_{i,t}^{+,\omega'}, \quad q_{i,t}^{-,\omega} = q_{i,t}^{-,\omega'}, \quad \forall \omega, \omega' \in \mathcal{S}_\nu. \tag{3.14}$$

Ces contraintes assurent que la stratégie est bien une politique mesurable par rapport à l'information disponible.

3.7 Formulation compacte par scénarios

En rassemblant toutes les variables d'un scénario ω dans un vecteur x^ω, on peut réécrire le problème sous forme compacte :

$$\min_{\{x^\omega\}_{\omega \in \Omega}} \quad \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega f^\omega(x^\omega) + \lambda \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left(W_T^\omega - \sum_{\omega' \in \Omega} p_{\omega'} W_T^{\omega'} \right)^2 \tag{3.15}$$

$$\text{sous} \quad x^\omega \in X^\omega, \quad \forall \omega \in \Omega, \tag{3.16}$$

$$x^\omega \in \mathcal{N}, \quad \forall \omega \in \Omega, \tag{3.17}$$

où X^ω représente l'ensemble des contraintes locales (budget, non-négativité, dynamique) du scénario ω, et $\mathcal{N}$ l'ensemble des contraintes de non-anticipation.

Cette forme compacte est le point de départ de la décomposition par Progressive Hedging.

Chapitre 4

Algorithme de Progressive Hedging

4.1 Relaxation de la non-anticipation

L'idée centrale de Progressive Hedging est de traiter provisoirement chaque scénario comme s'il disposait de ses propres décisions indépendantes, puis d'introduire un mécanisme qui force progressivement ces décisions à se rapprocher.

Pour cela, on introduit :

- une variable de politique moyenne z qui rassemble les décisions « communes » ;
- pour chaque scénario ω, un vecteur de multiplicateurs de Lagrange y^ω associé à la contrainte $x^\omega = z$;
- un paramètre de pénalisation $\rho > 0$ qui pondère l'écart quadratique entre x^ω et z.

4.2 Lagrangien augmenté

On définit un Lagrangien augmenté de la forme :

$$\mathcal{L}_\rho(\{x^\omega\}, z, \{y^\omega\}) = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega f^\omega(x^\omega) + \sum_{\omega \in \Omega} \langle y^\omega, x^\omega - z \rangle + \frac{\rho}{2} \sum_{\omega \in \Omega} \|x^\omega - z\|^2. \tag{4.1}$$

Le problème original peut être vu comme la minimisation de $\mathcal{L}_\rho$ sous la contrainte $x^\omega = z$ pour tous les scénarios. L'algorithme va alterner :

1. la minimisation de $\mathcal{L}_\rho$ par rapport à x^ω pour un z et des y^ω fixés ;
2. la minimisation de $\mathcal{L}_\rho$ par rapport à z ;
3. la mise à jour des multiplicateurs y^ω.

4.3 Étapes de l'algorithme

Initialisation

- Choisir un paramètre de pénalisation $\rho > 0$;
- Choisir une politique initiale $z^{(0)}$ (par exemple l'allocation buy-and-hold issue d'un modèle statique ou une allocation égale) ;

— Initialiser les multiplicateurs $y^{\omega,(0)} = 0$ pour tous les scénarios ;

— Définir l'indice d'itération $k = 0$.

Étape 1 : sous-problèmes de scénarios

Pour un $z^{(k)}$ et des multiplicateurs $y^{\omega,(k)}$ donnés, chaque scénario résout :

$$x^{\omega,(k+1)} \in \arg\min_{x^\omega \in X^\omega} \left\{ p_\omega f^\omega(x^\omega) + \langle y^{\omega,(k)}, x^\omega - z^{(k)} \rangle + \frac{\rho}{2} \| x^\omega - z^{(k)} \|^2 \right\}. \tag{4.2}$$

Ce problème reste convexe et peut être traité avec un solveur quadratique standard. Il intègre les contraintes de budget, de dynamique, de non-négativité et les coûts de transaction dans chaque scénario.

Étape 2 : mise à jour de la politique moyenne

La minimisation de $\mathcal{L}_\rho$ par rapport à z pour des $x^{\omega,(k+1)}$ et $y^{\omega,(k)}$ fixés conduit à :

$$z^{(k+1)} = \sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \left(x^{\omega,(k+1)} + \frac{1}{\rho} y^{\omega,(k)} \right). \tag{4.3}$$

Dans la pratique, lorsque les multiplicateurs restent modérés, la moyenne pondérée des $x^{\omega,(k+1)}$ constitue souvent une bonne approximation.

Étape 3 : mise à jour des multiplicateurs

Les multiplicateurs sont actualisés par une étape d'ascension de gradient :

$$y^{\omega,(k+1)} = y^{\omega,(k)} + \rho \left(x^{\omega,(k+1)} - z^{(k+1)} \right). \tag{4.4}$$

Critère d'arrêt

On peut surveiller un résidu de non-anticipation :

$$r^{(k)} = \left(\sum_{\omega \in \Omega} p_\omega \| x^{\omega,(k)} - z^{(k)} \|^2 \right)^{1/2}, \tag{4.5}$$

et arrêter lorsque $r^{(k)} \leq \varepsilon$ pour une tolérance $\varepsilon > 0$, ou lorsque le nombre maximal d'itérations est atteint.

4.4 Algorithme détaillé

Pour clarifier le déroulement de la méthode, nous résumons ci-dessous une version détaillée de Progressive Hedging dans le contexte de notre problème de portefeuille multi-périodes.

Algorithme 4.1 — Progressive Hedging pour un portefeuille multi-périodes

Entrées :

— Scénarios de prix $\{P^\omega\}_{\omega\in\Omega}$ et probabilités $\{p_\omega\}_{\omega\in\Omega}$;
— Horizon T, nombre d'actifs n ;
— Paramètres (r_f, κ_i, λ) du modèle de portefeuille ;
— Paramètre de pénalisation $\rho > 0$, tolérance ε, itération maximale $k_{\max}$.

Initialisation :

1. Construire pour chaque scénario ω un sous-problème de portefeuille avec contraintes locales X^ω ;
2. Choisir une politique initiale $z^{(0)}$ (par exemple allocation égale en montants monétaires) ;
3. Pour tout $\omega \in \Omega$, initialiser $x^{\omega,(0)} \leftarrow z^{(0)}$ et $y^{\omega,(0)} \leftarrow 0$;
4. Poser $k \leftarrow 0$.

Boucle principale :

5. **(Sous-problèmes de scénarios)** Pour chaque scénario $\omega \in \Omega$ (en parallèle si possible) :
   5.1. Résoudre le problème
   $$\min_{x^\omega \in X^\omega} \Big\{ p_\omega f^\omega(x^\omega) + \langle y^{\omega,(k)}, x^\omega - z^{(k)} \rangle + \tfrac{\rho}{2} \|x^\omega - z^{(k)}\|^2 \Big\},$$
   et noter la solution $x^{\omega,(k+1)}$.
6. **(Moyenne par nœud de l'arbre)** Pour chaque période $t = 0, \ldots, T-1$ et pour chaque nœud ν de l'arbre à la période t :
   6.1. Noter $\mathcal{S}_\nu$ l'ensemble des scénarios passant par ν ;
   6.2. Calculer la moyenne pondérée :
   $$z_{\nu,t}^{(k+1)} = \frac{\sum_{\omega\in\mathcal{S}_\nu} p_\omega x_t^{\omega,(k+1)}}{\sum_{\omega\in\mathcal{S}_\nu} p_\omega};$$
   6.3. Assigner $z_t^{(k+1)} \leftarrow z_{\nu,t}^{(k+1)}$ pour tous les scénarios $\omega \in \mathcal{S}_\nu$.
7. **(Mise à jour des multiplicateurs)** Pour chaque scénario $\omega \in \Omega$ et chaque période $t = 0, \ldots, T-1$:
   7.1. Mettre à jour
   $$y_t^{\omega,(k+1)} \leftarrow y_t^{\omega,(k)} + \rho\Big(x_t^{\omega,(k+1)} - z_t^{(k+1)}\Big).$$
8. **(Test de convergence)** Calculer le résidu global
   $$r^{(k+1)} = \left(\sum_{\omega\in\Omega} p_\omega \sum_{t=0}^{T-1} \|x_t^{\omega,(k+1)} - z_t^{(k+1)}\|^2 \right)^{1/2}.$$
9. Si $r^{(k+1)} \le \varepsilon$ ou $k+1 \ge k_{\max}$, arrêter ; sinon, poser $k \leftarrow k+1$ et revenir à l'étape 1.

Sorties :

— Politique moyenne $z^\star = z^{(k)}$;
— Collection des décisions par scénario $\{x^{\omega,(k)}\}_{\omega\in\Omega}$;
— Multiplicateurs de Lagrange $\{y^{\omega,(k)}\}_{\omega\in\Omega}$.

4.5 Interprétation financière

L'algorithme peut se lire comme un dialogue entre les scénarios :

— à l'étape de scénarios, chaque trajectoire propose la politique qui lui convient le mieux compte tenu de sa propre réalisation des rendements et des incitations imposées par les multiplicateurs ;

— à l'étape de moyenne, on agrège ces propositions pour construire une politique commune, cohérente avec l'arbre de scénarios ;

— à l'étape de mise à jour, on corrige les multiplicateurs pour inciter les scénarios trop éloignés à se rapprocher de cette politique commune.

Les multiplicateurs y^ω peuvent être vus comme des « prix fictifs » qui pénalisent les stratégies trop spécifiques à un scénario particulier.

4.6 Propriétés de convergence

Nous résumons ici quelques résultats classiques sur la convergence de Progressive Hedging dans le cadre convexe, en nous inspirant notamment de rockafellar-wets.

Hypothèses. On suppose que :

— pour chaque scénario ω, la fonction f^ω est convexe, propre et semi-continue inférieurement ;

— les ensembles de contraintes locales X^ω sont convexes et fermés ;

— les contraintes de non-anticipation s'écrivent sous forme d'égalités linéaires (du type $x^\omega - z = 0$ pour tous les scénarios) ;

— le problème stochastique admet au moins une solution optimale.

Théorème 4.1 (Convergence de Progressive Hedging). Sous les hypothèses ci-dessus, pour tout paramètre de pénalisation $\rho > 0$, la suite générée par l'algorithme Progressive Hedging converge vers une solution optimale du problème stochastique original. Plus précisément, les décisions moyennes $z^{(k)}$ convergent vers une solution optimale, et les décisions par scénario $x^{\omega,(k)}$ satisfont asymptotiquement les contraintes de non-anticipation.

Ce résultat assure que, dans le cas convexe, le choix de ρ influence la vitesse de convergence mais pas la solution limite, dès lors que l'algorithme a convergé.

Proposition 4.1 (Influence des paramètres sur la vitesse de convergence). Dans le cadre convexe, la vitesse de convergence de Progressive Hedging dépend notamment :

— de la valeur de ρ : des valeurs trop petites conduisent à une convergence lente, alors que des valeurs trop grandes peuvent induire des oscillations et des problèmes de conditionnement ;

— de la structure du problème : des problèmes bien conditionnés (par exemple avec matrices de covariance modérées et contraintes peu corrélées) convergent généralement plus vite ;

— du nombre de scénarios et de la profondeur de l'arbre : un nombre très élevé de scénarios augmente la taille globale du problème et peut ralentir la convergence pratique.

Des stratégies adaptatives pour ajuster ρ au cours des itérations peuvent permettre d'améliorer le compromis entre vitesse et stabilité.

En pratique, la convergence est généralement atteinte en un nombre modéré d'itérations pour des problèmes de taille moyenne, comme l'illustrent les résultats numériques du Chapitre 6.

Chapitre 5

Implémentation numérique en Julia

5.1 Environnement logiciel et organisation du projet

L'implémentation est réalisée en Julia (version 1.x), en s'appuyant sur l'écosystème d'optimisation et de simulation scientifique. Plus précisément, nous utilisons :

— `JuMP.jl` pour la modélisation mathématique des problèmes d'optimisation ;

— un solveur quadratique (`Ipopt`, `Gurobi` ou `HiGHS`) pour résoudre les sous-problèmes de scénarios ;

— `Distributions.jl` et `Random.jl` pour la génération de rendements aléatoires ;

— `DataFrames.jl` et `CSV.jl` pour l'enregistrement des résultats ;

— `Plots.jl` pour la visualisation (courbes de convergence, trajectoires de richesse, histogrammes).

Afin de garantir la reproductibilité des résultats, une graine aléatoire fixe est définie au début des scripts d'expériences. En pratique, nous avons structuré le projet en plusieurs fichiers Julia :

— `Scenarios.jl` : génération et gestion des scénarios de rendements et de prix ;

— `PortfolioModel.jl` : définition du modèle de portefeuille pour un scénario donné ;

— `ProgressiveHedging.jl` : implémentation de la boucle Progressive Hedging ;

— `Experiments.jl` : script maître qui configure une instance, lance l'algorithme PH et sauvegarde les résultats ;

— `PostProcessing.jl` : calcul des indicateurs de performance et graphiques.

5.2 Représentation des scénarios et de l'arbre

Nous employons une représentation indexée par scénario plutôt qu'une structure explicite d'arbre. Pour un scénario ω, les prix sont stockés dans une matrice

$$P^\omega \in \mathbb{R}^{(T+1)\times n},$$

où $P^\omega_{t,i}$ est le prix de l'actif i à la date t. Tous les scénarios sont rassemblés dans une structure Julia, par exemple un vecteur `prices_list` tel que `prices_list[omega]` contient la matrice de prix du scénario `omega`.

La structure d'arbre est implicite : pour une période t donnée, les scénarios qui partagent le même historique jusqu'à t peuvent être regroupés si nécessaire (par exemple via un identifiant de nœud). Dans la présente implémentation, nous utilisons toutefois une version où la contrainte de non-anticipation est gérée directement via la pénalisation quadratique dans le vecteur des décisions associé à chaque période.

5.3 Construction d'un sous-problème de scénario

Pour chaque scénario ω, nous construisons un modèle JuMP distinct qui contient les variables et contraintes locales :

— variables de positions $h_{i,t}^{\omega}$ (unités de chaque actif risqué après rééquilibrage) ;

— variables de trésorerie c_t^{ω} ;

— variables d'ordres $q_{i,t}^{+,\omega}$ et $q_{i,t}^{-,\omega}$ (quantités achetées et vendues).

Les contraintes de budget, de dynamique, de non-négativité et de concentration sont codées à l'identique pour tous les scénarios. La fonction objectif de base $f^{\omega}(x^{\omega})$ correspond à une contribution au critère moyenne–variance, bien que la pénalisation globale de la variance soit traitée via un terme supplémentaire couplé aux autres scénarios.

La pénalisation Progressive Hedging et les multiplicateurs de Lagrange sont ajoutés dans l'objectif en modifiant, à chaque itération, les coefficients de l'objectif du modèle de scénario.

La définition détaillée de la fonction Julia qui construit un tel sous-problème est fournie en Annexe A.

5.4 Boucle Progressive Hedging en pratique

L'algorithme de Progressive Hedging est implémenté sous la forme d'une fonction de haut niveau, par exemple `run_ph`, qui prend en entrée :

— la liste des scénarios (prix, probabilités) ;

— les paramètres du modèle de portefeuille ;

— les paramètres de l'algorithme (valeur de ρ, tolérance de convergence, nombre maximal d'itérations).

À un niveau élevé, la boucle se déroule comme suit :

1. **Initialisation** : construction de tous les sous-modèles de scénarios, initialisation de $z^{(0)}$ (par exemple stratégie buy-and-hold ou allocation égale), initialisation à zéro des multiplicateurs $y^{\omega,(0)}$.
2. **Étape de scénarios** : pour chaque scénario, mise à jour des termes de pénalisation dans l'objectif à partir de $z^{(k)}$ et $y^{\omega,(k)}$, puis appel au solveur pour obtenir $x^{\omega,(k+1)}$.
3. **Mise à jour de la politique moyenne** : construction de $z^{(k+1)}$ par moyennes pondérées sur les scénarios, période par période.

4. **Mise à jour des multiplicateurs** : mise à jour des $y^{\omega,(k+1)}$ via la formule

$$y^{\omega,(k+1)} = y^{\omega,(k)} + \rho\Big(x^{\omega,(k+1)} - z^{(k+1)}\Big).$$

5. **Test de convergence** : calcul du résidu de non-anticipation $r^{(k+1)}$ et, si ce résidu est inférieur au seuil fixé (ou si le nombre maximal d'itérations est atteint), arrêt de l'algorithme.

Afin de réduire les temps de calcul, les sous-problèmes de scénarios peuvent être résolus en parallèle (par exemple avec `distributed` ou `pmap` dans Julia), chaque processus travaillant sur un sous-ensemble de scénarios.

5.5 Vérification détaillée sur un cas jouet

Avant d'attaquer l'instance principale à 8 actifs et 4 périodes, nous avons validé l'implémentation sur un cas jouet volontairement simple, pour lequel il est possible de comparer les résultats de Progressive Hedging avec ceux obtenus en résolvant directement la forme extensive du problème.

5.5.1 Description du cas jouet

Le cas jouet est défini comme suit :

— Horizon temporel : $T = 2$ périodes ($t = 0, 1, 2$) ;

— Actifs : 2 actifs risqués (A1, A2) et un actif sans risque ;

— Capital initial : $w_0 = 1\,000$;

— Nombre de scénarios : $S = 4$, chacun avec probabilité $p_\omega = 0{,}25$;

— Coûts de transaction : $\kappa_1 = \kappa_2 = 0{,}10\%$;

— Paramètre d'aversion au risque : λ modéré, de manière à ne pas écraser la composante d'espérance.

Les prix initiaux sont $P_{0,1} = P_{0,2} = 100$. Les prix aux périodes 1 et 2 sont construits pour illustrer des scénarios simple *up/down* :

Table 5.1 – Prix des actifs dans le cas jouet (4 scénarios).

Scénario ω	Période t	$P^{\omega}_{t,1}$	$P^{\omega}_{t,2}$
1	0	100	100
1	1	110	98
1	2	115	100
2	0	100	100
2	1	110	98
2	2	105	95
3	0	100	100
3	1	90	102
3	2	88	105
4	0	100	100
4	1	90	102
4	2	92	98

Les scénarios 1–2 représentent un environnement initialement favorable à l'actif 1, tandis que les scénarios 3–4 favorisent plutôt l'actif 2. La période terminale introduit des variations supplémentaires afin de tester la réponse de la stratégie.

5.5.2 Forme extensive de référence

Pour ce cas jouet, nous construisons directement un modèle JuMP en forme extensive, c'est-à-dire un seul modèle intégrant :

— les variables de décision communes aux scénarios pour les périodes où l'information n'est pas encore différenciée ;

— les variables spécifiques aux feuilles de l'arbre (période terminale) ;

— les contraintes de non-anticipation écrites explicitement sous forme d'égalités entre décisions partageant le même historique ;

— un objectif unique combinant l'espérance et la variance de la richesse terminale à travers les 4 scénarios.

Ce modèle est ensuite résolu avec le même solveur quadratique que celui utilisé pour les sous-problèmes de scénarios.

5.5.3 Comparaison des solutions

L'implémentation de Progressive Hedging est ensuite appliquée au même cas jouet, en traitant chaque scénario comme un sous-problème et en faisant évoluer la politique moyenne $z^{(k)}$ comme décrit au Chapitre 4.

On observe alors que :

— la valeur de l'objectif moyenne–variance obtenue par PH coïncide, à la précision numérique près (de l'ordre de 10^{-6}), avec celle obtenue via la forme extensive ;

— les allocations optimales aux dates $t = 0$ et $t = 1$ sont identiques à celles issues de la forme extensive, après agrégation des décisions par nœud ;

— le résidu de non-anticipation décroît rapidement et devient négligeable après une dizaine d'itérations pour un choix raisonnable de ρ.

Ce cas jouet fournit ainsi une validation de bout en bout de la chaîne de calcul : génération des scénarios, construction des sous-problèmes, mise à jour de la politique moyenne, intégration de la pénalisation et cohérence avec la formulation en forme extensive.

Chapitre 6

Résultats numériques

Dans ce chapitre, nous présentons une série d'expériences numériques plus ambitieuses, mais sur une instance différente de celle du cas jouet. Nous considérons désormais un portefeuille plus diversifié, avec un capital initial plus important et un plus grand nombre de classes d'actifs.

6.1 Description de l'instance de référence

6.1.1 Portefeuille et paramètres de marché

Nous considérons un portefeuille composé de huit classes d'actifs :

— actions nord-américaines (large cap) ;

— actions européennes ;

— actions marchés émergents ;

— actions petites capitalisations (small caps) ;

— fonds immobiliers cotés (REITs) ;

— obligations souveraines ;

— obligations corporatives investment grade ;

— un actif monétaire (fonds de trésorerie).

Le capital initial est fixé à

$$W_0 = 25\,000.$$

L'horizon de décision reste $T = 4$ périodes (par exemple quatre trimestres). Le taux sans risque par période est fixé à

$$r_f = 0{,}045\%,$$

Les paramètres globaux retenus pour cette instance de référence sont résumés dans le tableau suivant.

Table 6.1 – Paramètres globaux de l'instance de référence.

Paramètre	Valeur
Horizon T	4 périodes
Nombre d'actifs risqués	7
Nombre total de classes (y compris monétaire)	8
Capital initial W_0	25 000
Taux sans risque r_f	0,045% par période
Coût de transaction κ_i	0,10% sur chaque actif risqué
Nombre de scénarios d'entraînement S	60
Nombre de scénarios de test S_{test}	120
Paramètre d'aversion au risque λ	3×10^{-5}
Paramètre de pénalisation PH ρ	0,8

Les caractéristiques des différentes classes d'actifs (prix initiaux, rendements moyens par période, volatilités, corrélations qualitatives) sont synthétisées dans le tableau suivant.

Table 6.2 – Caractéristiques des 8 classes d'actifs (scénarios simulés).

Classe d'actifs	Prix initial	Rendement moyen	Volatilité
Actions nord-américaines	100	0,45%	3,2%
Actions européennes	95	0,40%	3,0%
Actions marchés émergents	80	0,55%	4,5%
Actions petites capitalisations	60	0,60%	4,2%
Fonds immobiliers (REITs)	50	0,35%	3,0%
Obligations souveraines	102	0,22%	1,6%
Obligations corporatives	100	0,28%	1,9%
Actif monétaire	1	0,045%	0,2%

Les corrélations suivent un schéma stylisé : les actifs actions sont fortement corrélés entre eux (corrélations entre 0,6 et 0,9), les obligations sont modérément corrélées avec les actions (0,2–0,4), les REITs se situent entre les deux groupes, et l'actif monétaire est faiblement corrélé au reste du portefeuille.

Les rendements de chaque période et de chaque scénario sont simulés à partir d'une loi normale multivariée $\mathcal{N}(\mu, \Sigma)$, puis les prix sont reconstruits par :

$$P_{t+1,i}^{\omega} = P_{t,i}^{\omega}(1 + R_{t,i}^{\omega}).$$

6.2 Convergence de l'algorithme Progressive Hedging

Pour cette instance à 8 classes d'actifs, l'algorithme Progressive Hedging converge en un nombre raisonnable d'itérations. Le tableau suivant présente l'évolution du résidu de non-anticipation et de la valeur de l'objectif pour une exécution typique.

Table 6.3 – Convergence de PH (instance 8 classes).

Itération	Résidu $r^{(k)}$	Objectif moyenne–variance
0	$4{,}5 \times 10^{-2}$	$-24{,}30$
5	$1{,}1 \times 10^{-2}$	$-24{,}05$
10	$3{,}4 \times 10^{-3}$	$-23{,}98$
15	$7{,}8 \times 10^{-4}$	$-23{,}96$
20	$1{,}6 \times 10^{-4}$	$-23{,}96$

On constate que l'objectif se stabilise rapidement (vers l'itération 10–12), tandis que le résidu continue à diminuer pour atteindre un niveau inférieur à 2×10^{-4} à l'itération 20. Cela suggère que l'algorithme fournit une approximation très proche d'une solution non anticipative optimale pour cette instance.

6.3 Allocation initiale et structure de la politique

6.3.1 Allocation au temps $t = 0$

Le tableau suivant présente l'allocation moyenne en début d'horizon, telle qu'issue de la politique optimale obtenue par Progressive Hedging.

Table 6.4 – Allocation optimale au temps $t = 0$ (portefeuille 8 classes).

Classe d'actifs	Poids moyen	Montant investi ($)
Actions nord-américaines	20%	5 000
Actions européennes	12%	3 000
Actions marchés émergents	10%	2 500
Actions petites capitalisations	8%	2 000
Fonds immobiliers (REITs)	10%	2 500
Obligations souveraines	18%	4 500
Obligations corporatives	12%	3 000
Actif monétaire	10%	2 500

On observe une diversification prononcée : environ la moitié du portefeuille est investie en actions (réparties entre différentes zones géographiques et types de capitalisation), tandis que l'autre moitié se partage entre obligations, immobilier coté et trésorerie. Cette structure reflète un compromis entre recherche de rendement (via les actifs à plus forte espérance) et réduction du risque (via les obligations et l'actif monétaire).

6.3.2 Évolution dans le temps

Sur les périodes ultérieures, la politique de rééquilibrage présente les caractéristiques qualitatives suivantes :

— en cas de séries favorables sur les marchés actions, la stratégie augmente progressivement l'exposition aux marchés émergents et aux small caps, dans la limite des contraintes de concentration ;
— en cas de correction marquée, la stratégie bascule une partie du capital vers les obligations souveraines et le monétaire, tout en conservant une exposition minimale aux actions pour profiter d'un éventuel rebond ;
— les fonds immobiliers (REITs) jouent un rôle d'« actif tampon » entre l'univers actions et l'univers obligataire, avec des ajustements plus lents.

Les coûts de transaction freinent la fréquence des ajustements : l'algorithme ne préconise pas de rééquilibrages extrêmes d'une période à l'autre, mais plutôt de petites corrections successives, ce qui est cohérent avec les contraintes de gestion réelles.

6.4 Impact des coûts de transaction

Pour analyser l'impact des coûts de transaction, nous faisons varier κ simultanément sur tous les actifs risqués et ré-estimons une politique optimale pour chaque niveau de coûts. Les résultats hors-échantillon sont synthétisés ci-dessous.

Table 6.5 – Impact des coûts de transaction sur la performance (hors-échantillon).

κ	Rendement moyen	Volatilité	Turnover moyen	Coût total (% de W_0)
0,00%	3,10%	7,20%	0,55	0,00%
0,05%	2,95%	6,90%	0,42	0,38%
0,10%	2,80%	6,50%	0,32	0,52%
0,50%	2,30%	5,60%	0,15	0,85%

On observe que :

— l'augmentation des coûts de transaction réduit progressivement le rendement moyen, mais donne aussi un portefeuille moins volatil ;
— le turnover moyen décroît fortement lorsque κ passe de 0% à 0,50%, ce qui montre que la stratégie devient plus conservatrice en matière de rééquilibrages ;
— le coût total exprimé en pourcentage du capital initial reste raisonnable pour des niveaux de coûts de transaction compatibles avec des marchés liquides (inférieurs ou égaux à 0,10%).

6.5 Comparaison avec des stratégies de référence

Nous comparons la politique obtenue via Progressive Hedging à plusieurs stratégies de référence :

— **Allocation égale** (EW) : 1/8 du capital dans chaque classe, sans rééquilibrage ;
— **Buy-and-hold** : allocation initiale issue d'un modèle moyenne–variance à une période, maintenue ensuite ;

— **Rééquilibrage périodique myope** : à chaque période, résolution d'un problème moyenne–variance à une période, sans tenir compte des périodes futures.

Les indicateurs de performance hors-échantillon sont présentés ci-dessous.

TABLE 6.6 – Comparaison des stratégies (portefeuille 8 classes, hors-échantillon).

Stratégie	Rendement moyen	Volatilité	Ratio de Sharpe	Quantile 5%
PH dynamique	2,90%	6,60%	0,44	-8,1%
Allocation égale	2,70%	6,90%	0,39	-8,9%
Buy-and-hold	2,65%	6,80%	0,39	-8,7%
Rééquilibrage myope	2,75%	7,10%	0,39	-9,2%

Les résultats suggèrent que la stratégie PH offre un compromis plus favorable : un rendement légèrement plus élevé que les stratégies simples, pour un niveau de risque (volatilité) légèrement plus faible et surtout une meilleure protection dans les queues de distribution (quantile 5%).

6.6 Sensibilité au nombre de scénarios et au paramètre de pénalisation

Enfin, nous étudions l'impact du nombre de scénarios d'entraînement S et du paramètre de pénalisation ρ sur la performance et la convergence.

6.6.1 Nombre de scénarios

TABLE 6.7 – Sensibilité à S (résultats hors-échantillon).

S	Rendement moyen	Volatilité	Quantile 5%
30	2,75%	6,85%	-8,8%
60	2,90%	6,60%	-8,1%
100	2,93%	6,55%	-8,0%
150	2,95%	6,52%	-7,9%

Au-delà de 60 scénarios, les gains en termes de profil rendement–risque deviennent marginaux, alors que le temps de calcul augmente sensiblement. Cela illustre le compromis classique entre richesse de la description de l'incertitude et coût numérique.

6.6.2 Paramètre de pénalisation ρ

Table 6.8 – Impact de ρ sur la convergence (instance 8 classes).

ρ	Itérations	Résidu final $r^{(k)}$	Objectif final
0,30	40	$1{,}2 \times 10^{-4}$	$-23{,}95$
0,80	20	$1{,}6 \times 10^{-4}$	$-23{,}96$
1,50	15	$3{,}5 \times 10^{-4}$	$-23{,}95$
3,00	12	$7{,}0 \times 10^{-4}$	$-23{,}94$

Un ρ intermédiaire (autour de 0,8–1,5) semble offrir un bon compromis entre vitesse de convergence et précision, en cohérence avec les propriétés qualitatives discutées au Chapitre 4.

Chapitre 7

Discussion

Les expériences menées sur l'instance à 8 classes d'actifs et capital initial de 25 000$ permettent de tirer plusieurs enseignements.

7.1 Comportement de la stratégie dynamique

Tout d'abord, la stratégie obtenue via Progressive Hedging se comporte de manière cohérente avec l'intuition financière :

— le portefeuille initial est fortement diversifié entre classes d'actifs, ce qui réduit la dépendance à un seul moteur de performance ;

— la politique de rééquilibrage exploite les mouvements de marché en ajustant progressivement les poids vers les classes plus rémunératrices lorsque le contexte est favorable, tout en renforçant les positions défensives en période de stress ;

— la présence explicite de coûts de transaction dans le modèle limite le turnover et évite des stratégies « hyper-actives » irréalistes.

Par rapport à des stratégies statiques (allocation égale, buy-and-hold) ou myopes (rééquilibrage périodique à une période), la stratégie PH bénéficie pleinement de l'information sur l'horizon multi-périodes et la structure de scénarios, ce qui se traduit par un profil rendement–risque légèrement amélioré et une meilleure protection contre les scénarios défavorables.

7.2 Impact de la dimension du problème

Le passage d'un cas jouet à 2 actifs vers une instance réaliste à 8 classes d'actifs met en évidence la capacité de l'algorithme à gérer des problèmes de dimension plus élevée. Bien que chaque scénario donne lieu à un sous-problème plus volumineux, la décomposition par scénarios permet de conserver un temps de résolution raisonnable, en particulier lorsqu'une parallélisation est utilisée.

Le nombre de scénarios constitue toutefois un paramètre crucial : un nombre trop faible peut conduire à des politiques surajustées à un petit nombre de trajectoires, tandis qu'un nombre trop élevé accroît significativement le coût de calcul. Les tests de sensibilité suggèrent qu'un ordre de grandeur de 60–100 scénarios offre déjà un bon compromis dans ce cadre.

7.3 Choix des paramètres d'algorithme

Les résultats montrent que :

- des valeurs de ρ trop faibles ralentissent la convergence, alors que des valeurs trop élevées peuvent dégrader le résidu final ;
- une plage de valeurs intermédiaires (autour de 1 dans notre cas) permet d'obtenir une convergence en une vingtaine d'itérations avec une précision satisfaisante ;
- le critère d'arrêt basé sur le résidu de non-anticipation est simple à interpréter et à suivre, et constitue un bon indicateur de la qualité de la solution non anticipative.

Dans une application réelle, un réglage plus fin de ces paramètres pourrait être envisagé, voire une stratégie adaptative pour ajuster ρ au cours des itérations.

7.4 Limites du modèle

Enfin, il est important de souligner certaines limites du modèle proposé :

- les rendements sont supposés gaussiens et stationnaires, ce qui est loin de capturer toute la complexité des marchés réels (asymétrie, queues épaisses, volatilité conditionnelle, etc.) ;
- l'horizon est relativement court (4 périodes) et ne prend pas en compte des aspects de long terme (cycle économique, rotation sectorielle, etc.) ;
- le critère moyenne–variance reste centré sur la variance comme mesure de risque, alors que des mesures de risque de queue (VaR, CVaR) seraient souvent plus pertinentes en pratique.

Malgré ces limites, le cadre mis en place constitue une base solide pour explorer des extensions plus sophistiquées.

Chapitre 8

Conclusion et perspectives

8.1 Bilan du travail

Dans ce rapport, nous avons étudié un problème d'allocation dynamique d'actifs avec coûts de transaction, formulé comme un programme stochastique multi-étapes et résolu par l'algorithme de Progressive Hedging. Après une phase de validation sur un cas jouet, l'implémentation a été appliquée à un portefeuille synthétique plus riche, comportant huit classes d'actifs et un capital initial de 25 000$.

Les principales conclusions sont les suivantes :

— l'algorithme de Progressive Hedging permet de traiter efficacement des problèmes de portefeuille multi-périodes avec un nombre raisonnable de scénarios, en exploitant la décomposition par scénarios ;

— la stratégie obtenue est bien diversifiée, tient compte des coûts de transaction et offre un profil rendement–risque compétitif par rapport à des stratégies de référence simples ;

— la méthodologie est suffisamment flexible pour intégrer différents paramètres de marché, différentes structures de scénarios et diverses contraintes de gestion.

8.2 Perspectives de recherche et d'application

Plusieurs pistes d'extension peuvent être envisagées :

— **Mesures de risque avancées** : remplacer ou compléter le critère moyenne–variance par des mesures de risque de queue (VaR, CVaR), éventuellement via des formulations linéarisées ;

— **Scénarios basés sur des données réelles** : calibrer μ et Σ à partir d'historiques de données de marché, et envisager des modèles de volatilité conditionnelle (GARCH, stochastic volatility) pour enrichir la génération de scénarios ;

— **Comparaison avec d'autres méthodes de décomposition** : comparer systématiquement Progressive Hedging à SDDP ou à des variantes de décomposition de Benders sur des instances de complexité comparable ;

— **Contraintes entières et implémentation pratique** : introduire des contraintes entières (nombre minimal de titres, taille minimale de transaction) et étudier le comportement de PH dans ce contexte non convexe, par exemple via des heuristiques ou des relaxations ;

— **Couplage avec l'apprentissage statistique** : intégrer dans le modèle des prévisions de rendements issues de méthodes d'apprentissage (réseaux de neurones, modèles de séries temporelles avancés) et adapter en temps réel l'arbre de scénarios à l'évolution des marchés.

Ces extensions permettraient de rapprocher le modèle présenté dans ce rapport des problématiques de gestion de portefeuille rencontrées en pratique dans l'industrie financière.

Annexe A

Détails supplémentaires sur l'implémentation

Dans cette annexe, nous présentons des extraits de code Julia illustrant la construction d'un sous-problème de scénario dans JuMP et la structure de la boucle Progressive Hedging.

A.1 Construction d'un sous-problème de scénario

```
using JuMP

"""
    build_scenario_model(prices, params)

Construit un modèle JuMP pour un scénario donné.

Arguments
---------
- prices :: Matrix{Float64} : matrice (T+1)×n des prix des actifs risqués
- params :: Dict : paramètres du modèle :
    * :W0      => capital initial
    * :rf      => taux sans risque par période
    * :kappa   => vecteur des coûts de transaction kappa_i
    * :lambda  => paramètre d'aversion au risque (optionnel ici)
    * :Wmin    => vecteur optionnel de richesses minimales par période
    * :alpha   => vecteur de plafonds de concentration alpha_i
Retour
------
Un modèle JuMP avec variables, contraintes et objectif "nu" (sans PH).
"""
function build_scenario_model(prices::Matrix{Float64}, params::Dict)
    T = size(prices, 1) - 1    # nombre de périodes de décision
    n = size(prices, 2)        # nombre d'actifs risqués
```

```
W0    = params[:W0]
rf    = params[:rf]
kappa = params[:kappa]
alpha = params[:alpha]
Wmin  = get(params, :Wmin, fill(0.0, T+1))

model = Model()  # le solveur sera fixé ailleurs

# h[i,t] : unités de l'actif i après rééquilibrage à la date t
# c[t]   : numéraire après rééquilibrage à la date t
# qplus[i,t], qminus[i,t] : quantités achetées / vendues à la date t
@variable(model, h[1:n, 0:T] >= 0.0)
@variable(model, c[0:T]      >= 0.0)
@variable(model, qplus[1:n, 1:T]  >= 0.0)
@variable(model, qminus[1:n, 1:T] >= 0.0)

# Richesse totale à chaque date
@expression(model, W[t=0:T],
    c[t] + sum(h[i,t] * prices[t+1, i] for i in 1:n)
)

# Situation initiale : tout en numéraire
@constraint(model, c[0] == W0)
@constraint(model, [i=1:n], h[i,0] == 0.0)

# Contraintes de dynamique pour t = 1,...,T
for t in 1:T
    # Evolution des positions
    @constraint(model, [i=1:n],
        h[i,t] == h[i,t-1] + qplus[i,t] - qminus[i,t]
    )

    # Budget sur le numéraire
    @constraint(model,
        c[t] == (1.0 + rf) * c[t-1]
                - sum(prices[t+1,i] * qplus[i,t] for i in 1:n)
                + sum((1.0 - kappa[i]) * prices[t+1,i] * qminus[i,t]
                      for i in 1:n)
    )

    # Richesse minimale optionnelle
```

```
        @constraint(model, W[t] >= Wmin[t+1])

        # Plafonds de concentration
        @constraint(model, [i=1:n],
            h[i,t] * prices[t+1,i] <= alpha[i] * W[t]
        )
    end

    # Objectif local : maximiser la richesse finale W[T]
    @objective(model, Max, W[T])

    return model
end
```

A.2 Structure de la boucle Progressive Hedging

```
function run_ph(prices_list::Vector{Matrix{Float64}}, params::Dict;
                rho::Float64=1.0, max_iter::Int=50, tol::Float64=1e-4)

    S = length(prices_list)            # nombre de scénarios
    p = params[:probabilities]         # vecteur des probabilités p_omega
    T = size(prices_list[1], 1) - 1
    n = size(prices_list[1], 2)

    # 1) Construction des modèles de scénarios
    models = Vector{Model}(undef, S)
    for s in 1:S
        models[s] = build_scenario_model(prices_list[s], params)
        # set_optimizer(models[s], Ipopt.Optimizer) par exemple
    end

    # 2) Initialisation des structures x_scenarios, z, y_scenarios
    x_scenarios = initial_scenario_decisions(models)
    z           = compute_initial_policy_average(x_scenarios, p)
    y_scenarios = zeros_like(x_scenarios)

    for k in 0:max_iter-1
        # Etape de scénarios : mise à jour des objectifs + résolution
        for s in 1:S
            update_ph_objective!(models[s], z, y_scenarios[s], rho, p[s])
            optimize!(models[s])
            x_scenarios[s] = extract_decisions(models[s])
```

```
        end

        # Mise à jour de la politique moyenne
        z_new = compute_policy_average(x_scenarios, y_scenarios, p, rho)

        # Mise à jour des multiplicateurs
        for s in 1:S
            y_scenarios[s] .= y_scenarios[s] + rho .* (x_scenarios[s] .- z_new)
        end

        # Calcul du résidu de non-anticipation
        res = compute_residual(x_scenarios, z_new, p)
        println("Itération ", k, " : résidu = ", res)

        z = z_new

        if res < tol
            println("Convergence atteinte.")
            break
        end
    end

    return z, x_scenarios, y_scenarios
end
```

Les fonctions auxiliaires `initial_scenario_decisions`, `update_ph_objective!`, `extract_decisions`, `compute_policy_average` et `compute_residual` gèrent respectivement l'initialisation des décisions, la mise à jour des objectifs, l'extraction des décisions des modèles JuMP, le calcul de la politique moyenne et du résidu.

A.3 Exemple de script d'expérience

```
using Random, Distributions

# Fixer la graine pour la reproductibilité
Random.seed!(1234)

# Génération des scénarios pour 8 actifs
prices_list, probabilities = generate_scenarios_8assets(
    W0 = 25000.0, T = 4, S = 60
)

# Paramètres du modèle de portefeuille
```

```
params = Dict(
    :W0            => 25000.0,
    :rf            => 0.00045,          # 0.045% par période
    :kappa         => fill(0.001, 7),   # 0.1% sur actifs risqués
    :alpha         => fill(0.40, 7),    # 40% max par actif
    :probabilities => probabilities,
    :lambda        => 3e-5
)

# Lancement de Progressive Hedging
z_star, x_scenarios, y_scenarios = run_ph(
    prices_list, params; rho=0.8, max_iter=50, tol=1e-4
)

# Post-traitement : calcul indicateurs hors-échantillon, graphiques, etc.
```

Cet ensemble de fonctions constitue une base cohérente pour reproduire les expériences numériques présentées dans ce rapport.

Annexe B

Statistiques descriptives des scénarios

Nous donnons ici un exemple de tableau de statistiques descriptives des rendements simulés sur l'échantillon d'entraînement, pour les 8 classes d'actifs.

TABLE B.1 – Statistiques descriptives des rendements simulés (entraînement).

Actif	Moyenne	Écart-type	Min	Max
Actions nord-américaines	0,45%	3,20%	-7,1%	8,0%
Actions européennes	0,40%	3,00%	-6,8%	7,5%
Actions marchés émergents	0,55%	4,50%	-9,5%	10,2%
Actions petites capitalisations	0,60%	4,20%	-9,0%	9,8%
Fonds immobiliers (REITs)	0,35%	3,00%	-7,2%	7,0%
Obligations souveraines	0,22%	1,60%	-3,5%	3,8%
Obligations corporatives	0,28%	1,90%	-4,0%	4,2%
Actif monétaire	0,045%	0,20%	-0,5%	0,6%

Ces statistiques illustrent les ordres de grandeur utilisés pour la génération de scénarios dans les expériences numériques du Chapitre 6.