Dowód postulatu Bertranda

xD

3 stycznia 2021

Streszczenie

Dokument przedstawia krótką notę o postulacie Bertranda oraz dowód zaproponowany przez autora dokumentu.

1 Joseph Louis Bertrand i jego słynny postulat

Historia Postulatu

2 Treść Postulatu

Twierdzenie 1 (Bertrand)**.** *Postulat Bertranda jest hipotezą, która zakłada, że w przedziale liczb naturalnych od* n *do* $2n$ *znajduje się przynajmniej jedna liczba pierwsza. Najkrócej można napisać* $\pi(2n) > \pi(n), n \in N$*, gdzie* $\pi(k)$ *to funkcja zwracająca ilość liczb pierwszych w przedziale* $\{1, 2, \dots, k-1, k\}$

Definicja (Funkcja Entier)**.** *Przez* $Ent(x)$ *oznaczmy możliwie najlwiększa liczbę naturalną, nie większą niż* x*.*

Lemat (O dzielnikach liczby złożonej)**.** *Jeśli liczba naturalna* n *jest liczbą złożoną, to przynajmniej jeden z jej czynników pierwszych jest mniejszy lub równy* $Ent(\sqrt{n})$*.*

Dowód lematu jest następujący. Załóżmy, że n jest kwadratem liczby pierwszej k, wtedy mamy równość $k^2 = n$. Jeśli jednak n nie jest kwadratem, a jest iloczynem liczb l i m, $(l, m \neq 1)$, to zakładając, że $l > k$ to $m < k$. m może być liczbą pierwszą lub złożoną.

Z powyższego lematu mamy kolejny:

Lemat (O zbiorze testującym)**.** *Mając dany przedział (zbiór) liczb naturalnych* $A = \{l, l+1, \cdots, m-1, m\}$ *stwórzmy zbiór testowy* $Q = \{2, 3, \cdots, k\}$*, gdzie* $k = Ent(m)$*. Zbiór* Q *jest wystarczającym zbiorem do przestestowania, czy dana liczba ze zbioru* A *jest liczbą pierwszą.*

Dowód wynika z poprzedniego lematu: dla m mamy przypadek tego lematu, dla $i < m$ zbiór Q jest na wyrost.

3 Dowód

Oznaczmy:

$L = \{n, n+1, \cdots, 2n-1, 2n\}$,

$k_{2n} = Ent(\sqrt{2n})$

Utwórzmy zbiór testujący:

$Q_{2n} = \{2, 3, \cdots, k_{2n}\}$

Załóżmy na niekorzyść rozważań (na ten moment), że każda liczba ze zbioru Q jest liczbą pierwszą.

Ze zbioru L usuńmy liczby podzielne przez j i odnotujmy ilość pozostałych liczb.

Ponieważ będzie trudno operować na zagnieżdżonej funkcji Ent(x), dopiszmy nierówność:

$$L_{\nmid k} = Ent(\frac{\mid L \mid \cdot (k-1)}{k}) \geqslant \frac{\mid L \mid \cdot (k-1)}{k} - \frac{k-1}{k}$$

Prawą stronę nierówności oznaczmy $F_{(N,j)}$

$$L_{\nmid 2} = Ent(\frac{\mid L \mid \cdot 1}{2}) \geqslant F_{(N,j)} = \frac{\mid L \mid \cdot 1}{2} - \frac{1}{2}$$

$$L_{\nmid 2,3} = Ent(\frac{\mid L \mid \cdot 1 \cdot 2}{2 \cdot 3}) \geqslant \frac{\mid L \mid \cdot 1}{2} - \frac{1}{2}$$

Definicja (Funkcja przesiewająca)**.** *Funkcję rekurencyjną* $F_{(n,k)}$ *definiujemy następująco:*

$$F_{(N,2)} = \frac{N \cdot 1}{2} - \frac{1}{2},$$
$$F_{(N,k)} = \frac{F_{(N,k)\cdot(k-1)}}{k} - \frac{k-1}{k}, \tag{1}$$

Możemy zapisać:

$$L_{\nmid\{k,k-1,\cdots,3,2\}} = Ent(\mid L_{\nmid\{k,k-1,\cdots,3,2\}} \mid \cdot \frac{k-1}{k})$$

$$\geqslant F_{(N,j)} = \mid L_{\nmid\{k-1,\cdots,3,2\}} \mid \cdot \frac{k-1}{k} - \frac{k-1}{k}$$

Dla $k = 2$ mamy:

$$F_{(N,2)} = \frac{N}{2} - \frac{1}{2}$$

Dla $k = 3$ mamy:

$$F_{(N,3)} = N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} - \frac{2}{3} = \frac{N}{3} - \frac{1}{3} - \frac{2}{3}$$

Dla $k = 4$ mamy:

$$F_{(N,4)} = N \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \frac{2}{3} \cdot \frac{3}{4} - \cdot \frac{3}{4} = \frac{N}{4} - \frac{1}{4} - \frac{2}{4} - \frac{3}{4}$$

Dla dowolnego k mamy zatem:

$$F_{(N,k)} = \frac{N}{k} - \frac{k}{2}$$

Ponieważ k przyjmuje wartości ze zbioru Q, którego największym elementem jest $k = Ent(\sqrt{2n})$, zaś N to moc zbioru L_n, mamy:

$$F_{(N,k)} = \frac{n+1}{Ent(\sqrt{2n})} - \frac{Ent(\sqrt{2n})}{2}$$

Dalej można dopisać nierówność, prawdziwą dla $n > TODO$ (w celu pominięcia Ent):

$$F_{(N,k)} = \frac{n+1}{Ent(\sqrt{2n})} - \frac{Ent(\sqrt{2n})}{2} \geqslant \frac{n+1}{\sqrt{2n}} - \frac{\sqrt{2n}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{n}{\sqrt{2n}} - \frac{\sqrt{2n}}{2} =$$

Dalej:

$$\frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{n}{\sqrt{2n}} - \frac{\sqrt{2n}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2n}} + \frac{\sqrt{2n}}{2} - \frac{\sqrt{2n}}{2} > 0$$

Co (pozornie) nie jest zadowalającym wynikiem gdyż $\frac{1}{\sqrt{2n}}$ przyjmuje wartości ułamkowe (dla $n \in \mathbb{N}$)

Podsumowując dotychchzasowy tok dowodu, mamy:

$$L_{\not\{k,k-1,\cdots,3,2\}} \geqslant F_{(N,k)} \geqslant \frac{1}{\sqrt{2n}} \geqslant 0$$

Wobec pozornego niepowodzenia, załóżmy, że któraś z liczb z przedziału testowego nie jest pierwsza, więc nie brała udziału w powyższym szacowaniu.

Definicja (Funkcja z wykluczeniem)**.** *Zakładamy, że $m < k$, oznaczmy przez $G_{(N,k,\cancel{m})}$ funkcję podobną do $F_{(N,k)}$, jednak w której nie zaszła m-ta operacja.*

Mamy zatem:

$$\begin{aligned} G_{(N,k,\cancel{m})} = \frac{N}{m-1} \cdot \frac{m}{k} - \Bigg[& \frac{1}{2} \cdot \frac{2}{3} \cdots \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{k-1}{k} + \\ & + \frac{2}{3} \cdots \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{k-1}{k} + \\ & + \cdots + \frac{m-2}{m-1} \cdot \frac{m}{m+1} \cdots \frac{k-1}{k} \Bigg] - \\ - \Bigg[\frac{m}{m+1} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} + \frac{m+1}{m+2} \times \cdots \times \frac{k-1}{k} + \cdots + \frac{k-1}{k} \Bigg] & \end{aligned}$$

Generalizując sumy, mamy:

$$G_{(N,k,\cancel{m})} = \frac{N}{k} \cdot \frac{m}{m-1} - \sum_{i=2}^{m-1} \left[\prod_{j=i}^{k} \frac{j-1}{j} \right] \cdot \frac{m}{m-1} - \sum_{i=m+1}^{k} \left[\prod_{j=i}^{k} \frac{j-1}{j} \right]$$

$$G_{(N,k,\cancel{m})} = \frac{N}{k} \cdot \frac{m}{m-1} - \frac{m}{m-1} \cdot \sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k} - \sum_{i=m+1}^{k} \frac{i-1}{k}$$

Dodajemy i odejmujemy m/k

$$
\begin{aligned}
G_{(N,k,\cancel{m})} = \frac{N}{k} \cdot \frac{m}{m-1} + \frac{m}{k} - \frac{m}{m-1} \cdot \sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k} - \frac{m}{k} - \sum_{i=m+1}^{k} \frac{i-1}{k} = \\
= \frac{N}{k} \cdot \frac{m}{m-1} + \frac{m}{k} - \frac{m}{m-1} \cdot \sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k} - \sum_{i=m}^{k} \frac{i-1}{k} = \\
= \frac{N}{k} \cdot \frac{m}{m-1} + \frac{m}{k} - \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k}}{m-1} - \frac{m-1}{m-1} \cdot \sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k} - \sum_{i=m}^{k} \frac{j-1}{k} = \\
= \frac{N}{k} \cdot \frac{m}{m-1} + \frac{m}{k} - \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k}}{m-1} - \sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k} - \sum_{i=m}^{k} \frac{j-1}{k} = \\
= \frac{N}{k} \cdot \frac{m}{m-1} + \frac{m}{k} - \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k}}{m-1} - \sum_{i=2}^{k} \frac{i-1}{k} \\
= \frac{N}{k} \cdot \frac{m-1+1}{m-1} + \frac{m}{k} - \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k}}{m-1} - \sum_{i=2}^{k} \frac{i-1}{k}
\end{aligned}
$$

$$
= \frac{N}{k} - \sum_{i=2}^{k} \frac{i-1}{k} + \frac{1}{m-1} \cdot \frac{N}{k} + \frac{m}{k} - \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k}}{m-1} \tag{2}
$$

Ponieważ $\frac{N}{k} - \sum_{i=2}^{k} \frac{i-1}{k}$ to $F_{(N,k)}$, otrzymujemy:

$$
G_{(N,k,\cancel{m})} = F_{(N,k)} + \frac{1}{m-1} \cdot \frac{N}{k} + \frac{m}{k} - \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k}}{m-1} \tag{3}
$$

Dalej pokażemy, że dla dostatecznie dużego k spełniona będzie nierówność $G_{(N,k,\cancel{m})} - F_{(N,k)} \geqslant 1$.

Napiszmy:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{m-1} \cdot \frac{N}{k} + \frac{m}{k} - \frac{\sum_{i=2}^{m-1} \frac{i-1}{k}}{m-1} \geqslant 1 \\
\frac{1}{m-1} \cdot \frac{N}{k} + \frac{m}{k} - \frac{m^2-3m+2}{(m-1)2k} \geqslant 1 \qquad / \cdot k \\
\frac{N}{m-1} + m - m + 2 \geqslant k
\end{aligned}
\tag{4}
$$

Dajmy $m = 4$:

$$
\begin{aligned}
\frac{N}{3} + 2 \geqslant k = Ent(\sqrt{2n}) &\geqslant \sqrt{2n} - 1 \\
\frac{N}{3} + 2 &\geqslant \sqrt{2n} - 1 \\
\frac{n+1}{3} + 2 &\geqslant \sqrt{2n} - 1 \\
\frac{n+1}{3} + 3 \geqslant \sqrt{2n} \qquad &/ \cdot 3 \\
n + 10 \geqslant 3\sqrt{2n} \qquad &/ \uparrow^2 \\
n^2 + 20n + 100 &\geqslant 18n \\
n^2 + 2n + 100 &\geqslant 0 \qquad (5)
\end{aligned}
$$

Jak widać, nierówność spełniona jest dla każdego n, co udowadnia, że $G_{(N,k,\cancel{m})} - F_{(N,k)} \geqslant 1$.