1 非线性滞后

1.1 交叉基展开

$$f(x, \tau) = \sum_{v,\ell} \beta_{v\ell}\, s_v(x) h_{\ell(\tau)} \tag{1}$$

- basisvar: $[n, v_x]$， basislag: $[L, v_\ell]$
- v_x: 非线性影响基函数个数； v_ℓ: 滞后基函数个数。

> 如果是 bspline，需要指定 knots 节点，以及基函数的个数。

bspline 为何能实现压缩模型参数个数？类似于曲线拟合，只需要简单的几个节点，便可描述非线性过程。

1.2 考虑滞后时间

$$\begin{aligned} \eta_t &= \sum_{\tau=0}^{L} f(x_{t-\tau}, \tau), \tau \in [0, 1, ..., L] \\ \eta_t &= \sum_{\tau=0}^{L} \sum_{v=0}^{v_x} \sum_{\ell=0}^{v_\ell} \beta_{v_\ell} s_v(x_{t-\tau}) h_\ell(\tau) \end{aligned} \tag{2}$$

```R
x = basisvar[, v] # 第i个基函数
mat <- as.matrix(Lag(basisvar[, v], seqlag(lag), group = group))
# mat: {X[n, t], X[n, t-1], ..., X[n, t-L]}, [n, L+1]

for (l in seq(length = vl)) {
  ck <- basislag[, l] # [L+1]
  crossbasis[, vl * (v - 1) + l] <- mat %*% ck # [n, L+1] %*% [L+1, 1] = [n]
}
```

2 矩阵形式

上式写成，矩阵形式

$$S(x) = [s_1(x), ..., s_{vx}(x)]^T, \in \mathbb{R}^{n, v_x} \tag{3}$$

$$H(\tau) = [h_1(\tau), ..., h_{v\ell}] \in \mathbb{R}^{v_\ell}, \tau \in [0, ..., L] \tag{4}$$

$$B \in R^{v_x, v_\ell}, \beta = \mathrm{vec}(B) \in \mathbb{R}^{v_x \times v_\ell} \tag{5}$$

$$f(x, \tau) = S(x)^T B H(\tau) = [H(\tau) \otimes S(x)]^T \beta \tag{6}$$

$$\eta_t = \sum_{\tau=0}^{L} [H(\tau) \otimes S(x)]^T \beta \tag{7}$$

3 B 样条滞后基的构造（log 间距结点）

- 选择滞后变换 $u = g(\tau)$（常用 $g(\tau) = \log(\tau + \tau_0), \tau_0 > 0$）。
- 在 u 轴给定结点序列 $\kappa = \kappa_0, ..., \kappa_K$（对数间距），样条次数 q（如 q = 3）。
- 定义 $h_{\ell(\tau)} = N_{\ell,q}(g(\tau); \kappa),\quad \ell = 1, ..., v_\ell = K + q$， 其中 $N_{\ell,q}$ 为对应结点与次数的 B 样条基。

$$f(x,\tau) = \sum_{\ell=1}^{v_\ell} \beta_\ell \, x \, h_{\ell(\tau)} \tag{8}$$

$$\eta_t = \sum_{\tau=0}^{L} f(x_{t-\tau}, \tau), \tau \in [0, 1, ..., L] \tag{9}$$

$$\eta_t = \sum_{\tau=0}^{L} \sum_{\ell=0}^{\ell} \beta_\ell x_{t-\tau} h_\ell(\tau) = \sum_{\ell=1}^{v_\ell} \beta_\ell \sum_{\tau=0}^{L} h_{\ell(\tau)} \, x_{t-\tau} \tag{10}$$

另一种写法

$$s_j(t) = \sum_{\tau=0}^{L} x_{t-\tau} h_j(\tau), \quad \eta_t = \sum_{j=1}^{v\ell} \beta_j s_j(t) \tag{11}$$

$$X = [x_t, ..., x_{t-l}, ..., x_{t-L}] \in \mathbb{R}^{n,L+1}, \tag{12}$$

$$H_j = [h_j(0), ..., h_j(l), ..., h_j(L)]^T \in \mathbb{R}^{L+1,1}, H = [H_1, ..., H_{v\ell}] \in \mathbb{R}^{L+1,v_\ell} \tag{13}$$

$$S = XH \in \mathbb{R}^{n,v_\ell}, \quad \eta = S\beta \in \mathbb{R}^n, \beta = [\beta_1, ..., \beta_{v\ell}]^T \tag{14}$$

其中H_j为 bspline 生成的以 logknots 为输入的基函数。

5 从时域核到频域传递函数

先定义时域加载核 $\rho(\tau) := \sum_{\ell=1}^{v_\ell} \beta_\ell \, h_{\ell(\tau)}$。

其离散傅里叶变换给出传递函数 $R(\omega) = \sum_{\tau=0}^{L_b} \rho(\tau) e^{-i\omega\tau}$。

- 幅值：$|R(\omega)|$（频率依赖幅值比）
- 相位：$\arg R(\omega)$
- 步响应（近似静态 BE）：$S(T) = \sum_{\tau=0}^{T} \rho(\tau)$