Annexe de l'article : Filtrer sans s'appauvrir : inférer les paramètres constants de modèles réactifs probabilistes

Dans cette annexe, nous présentons tout d'abord les éléments de la sémantique de ProbZelus qui nous permettent ensuite de démontrer le Théorème 1 page 21.

A Sémantique de ProbZelus

La sémantique de ProbZelus est tirée de [2, Appendix A] avec les adaptations suivantes.

Variables globales. La définition d'une variable globale `let` x `=` e associe à la variable x la valeur obtenue en exécutant la fonction de transition de l'expression sur l'état initial. L'état d'arrivée n'a pas d'importance, seule la première valeur est retenue.

Expressions dans les équations `init`. La sémantique d'un ensemble d'équations mutuellement récursives est proche de la sémantique originale. La première partie de l'état stocke des mémoires qui contiennent la valeur calculée à l'instant précédent pour toutes les variables déclarées avec un `init`. Le reste de l'état correspond aux états de toutes les sous-expressions. À la différence de la sémantique originale, ici l'état des mémoires est représenté par un type option *None*/*Some*. La fonction de transition commence par récupérer la valeur des mémoires. Si c'est *None*, les mémoires ne sont pas encore initialisées. Comme pour les variables globales, on exécute alors un pas de chaque fonction de transition pour calculer les premières valeurs $c_1, \ldots, c_k$. Sinon, on récupère simplement $c_1, \ldots, c_k$. Comme dans la sémantique originale, on peut ensuite peupler l'environnement courant avec (1) des variables spéciales x_i`_last` qui permettent d'accéder à la valeur des x_i à l'instant précédent via l'opérateur `last`, et (2) la définition des y_i en exécutant chacune des sous-expressions. On peut enfin calculer l'expression principale dans l'environnement obtenu.

Symétriquement dans la sémantique probabiliste, les définitions locales sont interprétées en intégrant successivement les mesures des sous-expressions pour explorer toutes les executions possibles. Comme dans le cas déterministe, on commence par récupérer la valeur des mémoires avant de peupler l'environnement avec les valeur de x_i`_last` et y_i pour enfin évaluer l'expression principale. On note $\int \mu(dv, ds) f(v, s)$ l'intégrale de f le long de la mesure μ, et $\delta(v)$ la mesure de Dirac ($\delta(v)(U) = 1$ si $v \in U$ et 0 sinon).

$$
\begin{array}{lcl}
\llbracket x \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma} & = & () \\
\llbracket x \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma} & = & \lambda s.\ (\gamma(x), s) \\[4pt]
\llbracket \texttt{last}\ x \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma} & = & () \\
\llbracket \texttt{last}\ x \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma} & = & \lambda s.\ (\gamma(x\texttt{\_last}), s) \\[4pt]
\llbracket (e_1, e_2) \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma} & = & (\llbracket e_1 \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma}, \llbracket e_2 \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma}) \\
\llbracket (e_1, e_2) \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma} & = & \lambda (s_1, s_2).\ \mathit{let}\ v_1, s'_1 = \llbracket e_1 \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma}(s_1)\ \mathit{in} \\
& & \qquad\qquad\quad \mathit{let}\ v_2, s'_2 = \llbracket e_2 \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma}(s_2)\ \mathit{in}\ ((v_1, v_2), (s'_1, s'_2))
\end{array}
$$

$$
\left\llbracket \begin{array}{l} e\ \texttt{where rec init}\ x_1\ \texttt{=}\ e_1\ \texttt{...}\ \texttt{and init}\ x_k\ \texttt{=}\ e_k \\ \qquad \texttt{and}\ y_1\ \texttt{=}\ e'_1\ \texttt{...}\ \texttt{and}\ y_n\ \texttt{=}\ e'_n \end{array} \right\rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma} = (\mathit{None}, (\llbracket e'_1 \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma}, \dots, \llbracket e'_n \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma}), \llbracket e \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma})
$$

$$
\left\llbracket \begin{array}{l} e\ \texttt{where rec init}\ x_1\ \texttt{=}\ e_1\ \texttt{...}\ \texttt{and init}\ x_k\ \texttt{=}\ e_k \\ \qquad\quad \texttt{and}\ y_1\ \texttt{=}\ e'_1\ \texttt{...}\ \texttt{and}\ y_n\ \texttt{=}\ e'_n \end{array} \right\rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma}
$$

$$
\begin{array}{ll}
= \lambda (m, (s_1, \dots, s_n), s). & \\
\quad \left.\begin{array}{l}
\mathit{let}\ c_1, \dots, c_k = \\
\quad \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
\quad \mid \mathit{Some}(c_1, \dots, c_k) \to (c_1, \dots, c_k) \\
\quad \mid \mathit{None} \to \mathit{let}\ s_1 = \llbracket e_1 \rrbracket^{i}_{\gamma}\ \mathit{in}\ \mathit{let}\ v_1, \_ = \llbracket e_1 \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma}(s_1)\ \mathit{in}\ \dots \\
\qquad\qquad\quad \mathit{let}\ s_k = \llbracket e_k \rrbracket^{i}_{\gamma}\ \mathit{in}\ \mathit{let}\ v_k, \_ = \llbracket e_k \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma}(s_k)\ \mathit{in} \\
\qquad\qquad\quad (v_1, \dots, v_k)
\end{array}\right] & \textit{évaluer les inits} \\
\quad \mathit{in} & \\
\quad \left.\begin{array}{l}
\mathit{let}\ \gamma_1 = \gamma\,[x_1\texttt{\_last} \leftarrow c_1]\ \ \mathit{in}\ \dots \\
\mathit{let}\ \gamma_k = \gamma_{k-1}\,[x_k\texttt{\_last} \leftarrow c_k]\ \ \mathit{in} \\
\mathit{let}\ v_1, s'_1 = \llbracket e'_1 \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma_k}(s_1)\ \mathit{in}\ \mathit{let}\ \gamma'_1 = \gamma_k\,[y_1 \leftarrow v_1]\ \ \mathit{in}\ \dots \\
\mathit{let}\ v_n, s'_n = \llbracket e'_n \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma'_{n-1}}(s_n)\ \mathit{in}\ \mathit{let}\ \gamma'_n = \gamma'_{n-1}\,[y_n \leftarrow v_n]\ \ \mathit{in} \\
\mathit{let}\ v, s' = \llbracket e \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma'_n}(s)\ \mathit{in}
\end{array}\right] & \textit{peupler l'environnement} \\
\quad \left.(v, (\mathit{Some}(\gamma'_n(x_1), \dots, \gamma'_n(x_k)), (s'_1, \dots, s'_n), s'))\right] & \textit{résultat}
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lcl}
\llbracket \texttt{infer}(e) \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma} & = & \delta(\llbracket e \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma}) \\
\llbracket \texttt{infer}(e) \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma} & = & \lambda \sigma. \\
& & \mathit{let}\ \mu = \lambda U.\ \int \sigma(ds) \{\!\!\llbracket e \rrbracket\!\!\}^{\mathrm{step}}_{\gamma}(s)(U)\ \mathit{in} \\
& & \mathit{let}\ \nu = \lambda U.\ \mu(U)/\mu(\top)\ \mathit{in} \\
& & (\pi_{1*}(\nu), \pi_{2*}(\nu)) \\
\llbracket \texttt{let}\ x\ \texttt{=}\ e \rrbracket_{\gamma} & = & \gamma\left[(x, \_) \leftarrow \llbracket e \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma}(\llbracket e \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma})\right] \\
\llbracket \texttt{let node}\ f\ \texttt{x}\ \texttt{=}\ e \rrbracket_{\gamma} & = & \gamma\left[f\texttt{\_init} \leftarrow \llbracket e \rrbracket^{\mathrm{init}}_{\gamma}\right]\left[f\texttt{\_step} \leftarrow \lambda v.\ \lambda s.\ \llbracket e \rrbracket^{\mathrm{step}}_{\gamma[\mathsf{x} \leftarrow v]}\right] \\
\llbracket \texttt{let proba}\ f\ \texttt{x}\ \texttt{=}\ e \rrbracket_{\gamma} & = & \gamma\left[f\texttt{\_init} \leftarrow \{\!\!\llbracket e \rrbracket\!\!\}^{\mathrm{init}}_{\gamma}\right]\left[f\texttt{\_step} \leftarrow \lambda v.\ \lambda s.\ \{\!\!\llbracket e \rrbracket\!\!\}^{\mathrm{step}}_{\gamma[\mathsf{x} \leftarrow v]}\right] \\
\llbracket d_1\ d_2 \rrbracket_{\gamma} & = & \mathit{let}\ \gamma_1 = \llbracket d_1 \rrbracket_{\gamma}\ \mathit{in}\ \llbracket d_2 \rrbracket_{\gamma_1}
\end{array}
$$

FIGURE 9 – Définitions de la sémantique des constructions déterministes de ProbZelus et des déclarations utilisées dans la preuve.

$$
\begin{aligned}
\{\!\![e]\!\!\}^{\text{init}}_{\gamma} &= [\![e]\!]^{\text{init}}_{\gamma} \qquad \textit{if } \textit{kindOf}(e) = \mathtt{D}\\
\{\!\![e]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma} &= \lambda s.\ \lambda U.\ \delta([\![e]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s))(U) \qquad \textit{if } \textit{kindOf}(e) = \mathtt{D}\\
&= \lambda s.\ \lambda U.\ \begin{cases} 1 \textit{ if } [\![e]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s) \in U \\ 0 \textit{ otherwise} \end{cases}\\[1ex]
\{\!\![f(e)]\!\!\}^{\text{init}}_{\gamma} &= ([\![e]\!]^{\text{init}}_{\gamma}, \gamma(f\mathtt{\_init}))\\
\{\!\![f(e)]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma} &= \lambda(s_1, s_2).\ \lambda U.\\
&\quad\ \textit{let } v_1, s'_1 = [\![e]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s_1) \textit{ in}\\
&\quad\ \textit{let } \mu_2 = \gamma(f\mathtt{\_step})(v_1)(s_2) \textit{ in}\\
&\quad\ \textstyle\int \mu_2(dv_2, ds'_2)\ \delta(v_2, (s'_1, s'_2))(U)\\
\{\!\![\mathtt{sample}(e)]\!\!\}^{\text{init}}_{\gamma} &= [\![e]\!]^{\text{init}}_{\gamma}\\
\{\!\![\mathtt{sample}(e)]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma} &= \lambda s.\ \lambda U.\ \textit{let } \mu, s' = [\![e]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s) \textit{ in } \textstyle\int \mu(dv)\ \delta(v, s')(U)
\end{aligned}
$$

$$
\left\{\!\!\left[\begin{array}{l} e\ \mathtt{where\ rec\ init}\ x_1\ \mathtt{=}\ e_1\ \ldots\ \mathtt{and\ init}\ x_k\ \mathtt{=}\ e_k \\ \qquad\qquad \mathtt{and}\ y_1\ \mathtt{=}\ e'_1\ \ldots\ \mathtt{and}\ y_n\ \mathtt{=}\ e'_n \end{array}\right]\!\!\right\}^{\text{init}}_{\gamma} = (\textit{None}, ([\![e'_1]\!]^{\text{init}}_{\gamma}, \ldots, [\![e'_n]\!]^{\text{init}}_{\gamma}), [\![e]\!]^{\text{init}}_{\gamma})
$$

$$
\left\{\!\!\left[\begin{array}{l} e\ \mathtt{where\ rec\ init}\ x_1\ \mathtt{=}\ e_1\ \ldots\ \mathtt{and\ init}\ x_k\ \mathtt{=}\ e_k \\ \qquad\qquad \mathtt{and}\ y_1\ \mathtt{=}\ e'_1\ \ldots\ \mathtt{and}\ y_n\ \mathtt{=}\ e'_n \end{array}\right]\!\!\right\}^{\text{step}}_{\gamma}
$$

$$
\begin{aligned}
&= \lambda(m, (s_1, \ldots, s_n), s).\ \lambda U. &\\
&\quad \textit{let } \mu_c = &\\
&\qquad \textit{match } m \textit{ with} &\\
&\qquad \mid \textit{Some}(c_1, \ldots, c_k) \to \delta(c_1, \ldots, c_k) &\\
&\qquad \mid \textit{None} \to \lambda U. &\\
&\qquad\qquad\qquad \textit{let } \mu_1 = \{\!\![e_1]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma}([\![e_1]\!]^{\text{init}}_{\gamma}) \textit{ in} & \textit{évaluer les inits}\\
&\qquad\qquad\qquad \textstyle\int \mu_1(dv_1, ds_1)\ \ldots &\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \textit{let } \mu_k = \{\!\![e_k]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma}([\![e_k]\!]^{\text{init}}_{\gamma}) \textit{ in} &\\
&\qquad\qquad\qquad\quad \textstyle\int \mu_k(dv_k, ds_k)\delta(v_1, \ldots, v_k)(U) &\\
&\quad \textit{in} &\\
&\quad \textstyle\int \mu_c(dc_1, \ldots, dc_k) &\\
&\qquad \textit{let } \gamma_1 = \gamma\,[x_1\mathtt{\_last} \leftarrow c_1]\ \textit{ in } \ldots &\\
&\qquad \textit{let } \gamma_k = \gamma_{k-1}\,[x_k\mathtt{\_last} \leftarrow c_k]\ \textit{ in} &\\
&\qquad \textit{let } \mu_1 = \{\!\![e'_1]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma_k}(s_1) \textit{ in} &\\
&\qquad \textstyle\int \mu_1(dv_1, ds'_1)\ \textit{let } \gamma'_1 = \gamma_k\,[y_1 \leftarrow v_1]\ \textit{ in } \ldots & \textit{peupler l'environnement}\\
&\qquad\quad \textit{let } \mu_n = \{\!\![e'_n]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma'_{n-1}}(s_n) \textit{ in} &\\
&\qquad\quad \textstyle\int \mu_n(dv_n, ds'_n)\ \textit{let } \gamma'_n = \gamma'_{n-1}\,[y_n \leftarrow v_n]\ \textit{ in} &\\
&\qquad\qquad \textit{let } \mu = \{\!\![e]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma'_n}(s) \textit{ in} &\\
&\qquad\qquad \textstyle\int \mu(dv, ds') & \textit{résultat}\\
&\qquad\qquad\quad \delta(v, (\textit{Some}(\gamma'_n(x_1), \ldots, \gamma'_n(x_k)), (s'_1, \ldots, s'_n), s'))(U) &
\end{aligned}
$$

Figure 10 – Définitions de la sémantique des constructions probabilistes de ProbZelus utilisées dans la preuve.

B Détails de la preuve du Théorème 1

Théorème 1. *Pour tout programme prog tel que* $\emptyset, \emptyset \vdash prog : H, C$*, pour tout modèle probabiliste* m *de prog sous la forme* $\texttt{proba}\ m\ x\ \texttt{=}\ e\ \texttt{where rec init}\ \theta\ \texttt{=}\ \texttt{sample}(d)\ \texttt{and}\ \theta\ \texttt{=}\ \texttt{last}\ \theta$*, avec* $H(m) = \{\theta \leftarrow d\}$*, et* e *ne contient pas d'appel de nœud, alors* $[\![\texttt{infer}(m(obs))]\!] \equiv [\![\texttt{APF.infer}(m\texttt{\_prior}, m\texttt{\_model}, obs)]\!]$.

Démonstration.

Hypothèses et notations.

Soit un programme *prog* tel que $\emptyset, \emptyset \vdash prog : H, C$, et m un modèle probabiliste de *prog* sous la forme $\texttt{proba}\ m\ x\ \texttt{=}\ e\ \texttt{where rec init}\ \theta\ \texttt{=}\ \texttt{sample}(d)\ \texttt{and}\ \theta\ \texttt{=}\ \texttt{last}\ \theta$, avec $H(m) = \{\theta \leftarrow d\}$, et e sans d'appel de nœud. On suppose également que e n'utilise pas $\texttt{last}\ \theta$ (ce n'est pas restrictif car θ est constant donc $\texttt{last}\ \theta = \theta$).

On pose :

$$
\begin{aligned}
e_m &= e\ \texttt{where rec init}\ \theta\ \texttt{=}\ \texttt{sample}(d)\ \texttt{and}\ \theta\ \texttt{=}\ \texttt{last}\ \theta \\
e_{apf} &= m\texttt{\_model}(\alpha, obs)\ \texttt{where rec init}\ \alpha\ \texttt{=}\ \texttt{sample}(m\texttt{\_prior})\ \texttt{and}\ \alpha\ \texttt{=}\ \texttt{last}\ \alpha
\end{aligned}
$$

Par hypothèse, la distribution *a priori* d est constante et $C \vdash e : \emptyset$ car le seul paramètre constant, θ, est défini à l'extérieur de e et donc $\mathcal{C}_\emptyset(e) = e$.

Soient $\gamma_1 \equiv \gamma_2$, d'après la Définition 1, pour toute variable $x \in dom(\gamma_1) \cap dom(\gamma_2)$, $\gamma_1(x) = \gamma_2(x)$ et si on note $\xi = \{\theta \leftarrow d\}$:

$$
\begin{cases}
\gamma_1(m\texttt{\_init}) = \{\![e_m]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1} \\
\gamma_1(m\texttt{\_step}) = \lambda v.\ \{\![e_m]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x \leftarrow v]}
\end{cases}
\quad \text{et} \quad
\begin{cases}
\gamma_2(m\texttt{\_model\_init}) = \{\![\mathcal{C}_\xi(e_m)]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2} \\
\gamma_2(m\texttt{\_model\_step}) = \lambda(\theta, v). \\
\qquad\qquad \{\![\mathcal{C}_\xi(e_m)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2[dom(\xi) \leftarrow \theta][x \leftarrow v]} \\
\gamma_2(m\texttt{\_prior}) = img(\xi)
\end{cases}
$$

Enfin, on a :

$$
\begin{aligned}
\gamma_2(m\texttt{\_model\_init}) &= \{\![\mathcal{C}_\xi(e_m)]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2} = \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1} \text{ car } e \text{ ne contient pas d'appel de nœud,} \\
\gamma_2(m\texttt{\_model\_step}) &= \lambda(\theta, v).\ \{\![\mathcal{C}_\xi(e_m)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2[dom(\xi) \leftarrow \theta][x \leftarrow v]} = \lambda\theta, v.\ \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x \leftarrow v][dom(\xi) \leftarrow \theta]}, \text{ et} \\
dom(\xi) &= \theta.
\end{aligned}
$$

Bisimulation.

Il faut maintenant montrer qu'il existe une bisimulation $\mathcal{P}$ telle que :

$$\{\![m(obs)]\!\} \equiv_{\mathcal{P}} \{\![m\texttt{\_model}(\alpha, obs)\ \texttt{where rec init}\ \alpha\ \texttt{=}\ \texttt{sample}(m\texttt{\_prior})\ \texttt{and}\ \alpha\ \texttt{=}\ \texttt{last}\ \alpha]\!\}.$$

On pose :

$$
\mathcal{P}\ \sigma_1\ \sigma_2 \iff \exists \sigma
\begin{cases}
\sigma_1 = \lambda U.\ \int \sigma(dm, ds) \delta((), (m, (), s))(U) \\
\sigma_2 = \lambda U.\ \int \sigma(dm, ds) \delta(m, (), (((), ()), s))(U).
\end{cases}
$$

État initiaux.

On vérifie d'abord que $\mathcal{P}$ relie les états initiaux.

$$\begin{array}{rcl}
\{\![m\texttt{(}obs\texttt{)}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1} & = & (\{\![obs]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1}, \gamma_1(m\texttt{_init})) \\
& = & ((), \{\![e \texttt{ where rec init } \theta \texttt{ = sample(}d\texttt{) and } \theta \texttt{ = last } \theta]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1}) \\
& = & ((), (\mathit{None}, \{\![\texttt{last } \theta]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1}, \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1})) \\
& = & ((), (\mathit{None}, (), \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1}))
\end{array}$$

$$\begin{aligned}
\{\![e_{apf}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2} &= \{\![m\texttt{_model(}\alpha, obs\texttt{) where rec init } \alpha \texttt{ = sample(}m\texttt{_prior) and } \alpha \texttt{ = last } \alpha]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2} \\
&= (\mathit{None}, \{\![\texttt{last } \alpha]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2}, \{\![m\texttt{_model(}\alpha, obs\texttt{)}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2}) \\
&= (\mathit{None}, (), (\{\![\texttt{(}\alpha\texttt{,} obs\texttt{)}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2}, \gamma_2(m\texttt{_model_init}))) \\
&= (\mathit{None}, (), (((), ()), \{\![\mathcal{C}_\xi(e_m)]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2})) \\
&= (\mathit{None}, (), (((), ()), \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1}))
\end{aligned}$$

On montre $\mathcal{P}\ \delta(\{\![m\texttt{(}obs\texttt{)}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1})\ \delta(\{\![e_{apf}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2})$ avec $\sigma = \delta(\mathit{None}, \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1})$, pour tout U

$$\begin{array}{rcl}
\int \delta(\mathit{None}, \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1})(dm, ds)\delta((), (m, (), s))(U) & = & \delta((), (\mathit{None}, (), \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1}))(U) \\
& = & \delta(\{\![m\texttt{(}obs\texttt{)}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1})(U) \\
\int \delta(\mathit{None}, \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1})(dm, ds)\delta(m, (), (((), ()), s))(U) & = & \delta(\mathit{None}, (), (((), ()), \{\![e]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_1}))(U) \\
& = & \delta(\{\![e_{apf}]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2})(U)
\end{array}$$

Transition.

On vérifie maintenant que $\mathcal{P}$ se propage à travers les fonctions de transitions. On veut montrer que pour tout $\gamma_1 \equiv \gamma_2$, si $\mathcal{P}\ \sigma_1\ \sigma_2$ et :

$$\begin{array}{rcll}
\mu_1 & = & \lambda U.\ \int \sigma_1(ds)\{\![m\texttt{(}obs\texttt{)}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1}(s)(U) & \\
\nu_1 & = & \lambda U.\ \mu_1(U)/\mu_1(\top) & \text{(normalisation)} \\
o_1, \sigma_1' & = & \pi_{1*}(\nu_1), \pi_{2*}(\nu_1) & \text{(marginalisation)}
\end{array}$$

$$\begin{array}{rcll}
\mu_2 & = & \lambda U.\ \int \sigma_2(ds)\{\![e_{apf}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}(s)(U) & \\
\nu_2 & = & \lambda U.\ \mu_2(U)/\mu_2(\top) & \text{(normalisation)} \\
o_2, \sigma_2' & = & \pi_{1*}(\nu_2), \pi_{2*}(\nu_2) & \text{(marginalisation)}
\end{array}$$

Alors $o_1 = o_2$ (égalité des distributions de sorties), et $\mathcal{P}\ \sigma_1'\ \sigma_2'$ (bisimulation des états suivants).

Calcul de μ_1.

Pour calculer $\mu_1 = \lambda U.\ \int \sigma_1(ds)\{\![m\texttt{(}obs\texttt{)}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1}(s)(U)$:

1. On commence par calculer le corps de m : $\{\![e_m]\!\}^{\text{step}}$.
2. On peut ensuite calculer la sémantique de l'appel de nœud : $\{\![m\texttt{(}obs\texttt{)}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1}$.
3. On intègre enfin le long de σ_1 pour obtenir μ_1.

1. Calcul de $\{\![e_m]\!\}^{\text{step}}$.
Par typage, on sait que l'état de e_m est de la forme $(m, (), s)$. On a pour tout environnement γ et ensemble mesurable U :

$$
\begin{array}{l}
\{\![e_m]\!\}^{\text{step}}_{\gamma}(m,(),s)(U) = \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{None} \to \mathit{let}\ \nu_d = \lambda U.\ \mathit{let}\ s_d = [\![\texttt{sample}(d)]\!]^{\text{init}}_{\gamma}\ \mathit{in} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \mathit{let}\ \mu_d = \{\![\texttt{sample}(d)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma}(s_d)\ \mathit{in} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \int \mu_d(dv_d, ds'_d)\delta(v_d)(U) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \mathit{in} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad \nu_d \\
\qquad\qquad \mathit{in} \\
\qquad\qquad \int \mu_c(dc)\ \mathit{let}\ \gamma' = \gamma\,[\theta \leftarrow c]\,[\theta\texttt{\_last} \leftarrow c]\ \ \mathit{in} \\
\qquad\qquad\qquad \mathit{let}\ \mu = \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma'}(s)\ \mathit{in} \\
\qquad\qquad\qquad \int \mu(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), s'))(U)
\end{array}
$$

On calcule :

$$
\begin{array}{rcl}
\nu_d(U) & = & \mathit{let}\ s_d = [\![\texttt{sample}(d)]\!]^{\text{init}}_{\gamma}\ \mathit{in} \\
& & \mathit{let}\ \mu_d = \{\![\texttt{sample}(d)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma}(s_d)\ \mathit{in} \\
& & \int \mu_d(dv_d, ds'_d)\delta(v_d)(U) \\
\text{(définition de } \texttt{sample}\text{)} & = & \mathit{let}\ s_d = [\![d]\!]^{\text{init}}_{\gamma}\ \mathit{in} \\
& & \mathit{let}\ \mu_d = \lambda U. \\
& & \qquad \mathit{let}\ \mu, s' = [\![d]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s_d)\ \mathit{in} \\
& & \qquad \int \mu(dv)\delta(v, s')(U) \\
& & \mathit{in} \\
& & \int \mu_d(dv_d, ds'_d)\delta(v_d)(U) \\
\text{(simplification)} & = & \mathit{let}\ s_d = [\![d]\!]^{\text{init}}_{\gamma}\ \mathit{in} \\
& & \int (\lambda U.\ \mathit{let}\ \mu, s' = [\![d]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s_d)\ \mathit{in} \\
& & \qquad \int \mu(dv)\delta(v, s')(U))(dv_d, ds'_d)\delta(v_d)(U) \\
& = & \mathit{let}\ s_d = [\![d]\!]^{\text{init}}_{\gamma}\ \mathit{in} \\
& & \mathit{let}\ \mu, s' = [\![d]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s_d)\ \mathit{in}\ \int \mu(dv)\delta(v)(U) \\
& = & \mathit{let}\ s_d = [\![d]\!]^{\text{init}}_{\gamma}\ \mathit{in} \\
& & \mathit{let}\ \mu, s' = [\![d]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(s_d)\ \mathit{in}\ \mu(U) \\
& = & d(U)
\end{array}
$$

On en déduit que :

$$
\begin{array}{l}
\{\![e_m]\!\}^{\text{step}}_{\gamma}(m,(),s)(U) = \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{None} \to d \\
\qquad\qquad \mathit{in} \\
\qquad\qquad \int \mu_c(dc)\ \mathit{let}\ \gamma' = \gamma\,[\theta \leftarrow c]\,[\theta\texttt{\_last} \leftarrow c]\ \ \mathit{in} \\
\qquad\qquad\qquad \mathit{let}\ \mu = \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma'}(s)\ \mathit{in} \\
\qquad\qquad\qquad \int \mu(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), s'))(U)
\end{array}
$$

2. Calcul de l'appel de nœud $\{\![m(obs)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1}$.
Par typage, on sait que l'état de $m(obs)$ est de la forme $((), (m, (), s))$. On a pour tout ensemble mesurable U :

$$
\begin{array}{rcl}
\{\![m(obs)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1}((), (m, (), s))(U) & = & \displaystyle\int \{\![e_m]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x\leftarrow\gamma_1(obs)]}(m, (), s)(dv, ds')\delta(v, ((), s'))(U) \\
& = & \int (\lambda U. \\
& & \quad let\ \mu_c = match\ m\ with \\
& & \qquad\qquad \mid Some(c) \to \delta(c) \\
& & \qquad\qquad \mid None \to d \\
& & \quad in \\
& & \quad \int \mu_c(dc) \\
& & \qquad let\ \gamma_1' = \gamma_1\,[x \leftarrow \gamma_1(obs)]\,[\theta \leftarrow c]\,[\theta\texttt{\_last} \leftarrow c]\ \ in \\
& & \qquad let\ \mu = \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1'}(s)\ in \\
& & \qquad \int \mu(dv_e, ds_e')\delta(v_e, (Some(c), (), s_e'))(U))(dv, ds') \\
& & \quad \delta(v, ((), s'))(U) \\
\text{(simplification)} & = & let\ \mu_c = match\ m\ with \\
& & \qquad\qquad \mid Some(c) \to \delta(c) \\
& & \qquad\qquad \mid None \to d \\
& & in \\
& & \int \mu_c(dc) \\
& & \quad let\ \gamma_1' = \gamma_1\,[x \leftarrow \gamma_1(obs)]\,[\theta \leftarrow c]\,[\theta\texttt{\_last} \leftarrow c]\ \ in \\
& & \quad let\ \mu = \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1'}(s)\ in \\
& & \quad \int \mu(dv_e, ds_e')\delta(v_e, ((), (Some(c), (), s_e')))(U) \\
(\texttt{last}\ \theta \text{ n'apparait pas dans } e) & = & let\ \mu_c = match\ m\ with \\
& & \qquad\qquad \mid Some(c) \to \delta(c) \\
& & \qquad\qquad \mid None \to d \\
& & in \\
& & \int \mu_c(dc) \\
& & \quad \int \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x\leftarrow\gamma_1(obs)][\theta\leftarrow c]}(s)(dv_e, ds_e') \\
& & \qquad \delta(v_e, ((), (Some(c), (), s_e')))(U)
\end{array}
$$

3. Intégration pour obtenir μ_1.
On a pour tout ensemble mesurable U :

$$
\begin{array}{rcl}
\mu_1(U) & = & \displaystyle\int \sigma_1((), (dm, (), ds))\{\![m(obs)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1}((), (m, (), s))(U) \\
& = & \displaystyle\int \sigma_1((), (dm, (), ds)) \\
& & let\ \mu_c = match\ m\ with \\
& & \qquad\qquad \mid Some(c) \to \delta(c) \\
& & \qquad\qquad \mid None \to d \\
& & in \\
& & \int \mu_c(dc) \int \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x\leftarrow\gamma_1(obs)][\theta\leftarrow c]}(s)(dv_e, ds_e') \\
& & \qquad\qquad \delta(v_e, ((), (Some(c), (), s_e')))(U)
\end{array}
$$

Calcul de μ_2.

Le calcul de $\mu_2 = \lambda U.\ \int \sigma_2(ds) \{\![e_{apf}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}(s)(U)$ suit la même structure que pour μ_1.

1. On commence par calculer $\{\![m\_\texttt{model}(\alpha, obs)]\!\}^{\text{step}}$.
2. On peut ensuite calculer la sémantique du corps de `APF.infer` : $\{\![e_{apf}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}$.
3. On intègre enfin le long de σ_2 pour obtenir μ_2.

1. Calcul de $\{\![m\_\texttt{model}(\alpha, obs)]\!\}^{\text{step}}$.
Par typage, on sait que l'état de $m\_\texttt{model}(\alpha, obs)$ est de la forme $(((), ()), s)$. On a pour tout environnement γ et ensemble mesurable U :

$$
\begin{array}{rcl}
\{\![m\_\texttt{model}(\alpha, obs)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma}(((), ()), s)(U) & = & \mathit{let}\ v_a, s'_a = [\![(\alpha, obs)]\!]^{\text{step}}_{\gamma}((), ())\ \mathit{in} \\
& & \int \gamma(m\_\texttt{model\_step})(v_a)(s)(dv, ds') \\
& & \quad \delta(v, (s'_a, s'))(U) \\
& = & \mathit{let}\ v_\alpha, s'_\alpha = [\![\alpha]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(())\ \mathit{in} \\
& & \mathit{let}\ v_{obs}, s'_{obs} = [\![obs]\!]^{\text{step}}_{\gamma}(())\ \mathit{in} \\
& & \mathit{let}\ v_a, s'_a = (v_\alpha, v_{obs}), (s'_\alpha, s'_{obs})\ \mathit{in} \\
& & \int \gamma(m\_\texttt{model\_step})(v_a)(s)(dv, ds') \\
& & \quad \delta(v, (s'_a, s'))(U) \\
& = & \mathit{let}\ v_a, s'_a = (\gamma(\alpha), \gamma(obs)), ((), ())\ \mathit{in} \\
& & \int \gamma(m\_\texttt{model\_step})(v_a)(s)(dv, ds') \\
& & \quad \delta(v, (s'_a, s'))(U) \\
& = & \int \gamma(m\_\texttt{model\_step})(\gamma(\alpha), \gamma(obs))(s)(dv, ds') \\
& & \quad \delta(v, (((), ()), s'))(U)
\end{array}
$$

2. Calcul du corps de `APF.infer` $\{\![e_{apf}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}$.
Rappelons que $e_{apf} = m\_\texttt{model}(\alpha, obs)$ `where rec init` α `=` `sample`$(m\_\texttt{prior})$ `and` α `=` `last` α.
On a $\{\![\texttt{sample}(m\_\texttt{prior})]\!\}^{\text{init}}_{\gamma_2} = [\![m\_\texttt{prior}]\!]^{\text{init}}_{\gamma_2} = ()$ et

$$
\begin{array}{rcl}
\{\![\texttt{sample}(m\_\texttt{prior})]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}(()) & = & \lambda U.\ \mathit{let}\ \mu, s' = (\gamma_2(m\_\texttt{prior}), ())\ \mathit{in} \displaystyle\int \mu(dv)\delta(v, s')(U) \\
& = & \lambda U.\ \displaystyle\int d(dv)\delta(v, ())(U)
\end{array}
$$

Par typage, on sait que l'état de e_{apf} est de la forme $(m, (), (((), ()), s))$. On a pour tout ensemble mesurable U :

$$
\begin{array}{rcl}
\{\![e_{apf}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}(m, (), (((), ()), s))(U) & = & \mathit{let}\ \mu_c = \\
& & \quad \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
& & \quad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
& & \quad \mid \mathit{None} \to \lambda U. \\
& & \qquad\qquad \mathit{let}\ s_d = [\![\texttt{sample}(m\_\texttt{prior})]\!]^{\text{init}}_{\gamma_2}\ \mathit{in} \\
& & \qquad\qquad \mathit{let}\ \mu_d = \{\![\texttt{sample}(m\_\texttt{prior})]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}(s_d)\ \mathit{in} \\
& & \qquad\qquad \int \mu_d(dv_d, ds'_d)\delta(v_d)(U) \\
& & \mathit{in} \\
& & \int \mu_c(dc)\ \mathit{let}\ \gamma'_2 = \gamma_2\,[\alpha \leftarrow c]\,[\alpha\_\texttt{last} \leftarrow c]\ \mathit{in} \\
& & \qquad \mathit{let}\ \mu = \{\![m\_\texttt{model}(\alpha, obs)]\!\}^{\text{step}}_{\gamma'_2}(((), ()), s)\ \mathit{in} \\
& & \qquad \int \mu(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), s'))(U)
\end{array}
$$

$$
\begin{array}{lll}
\text{(cf. calcul de } \nu_d \text{ pour } \mu_1) & = & \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{None} \to d \\
 & & \mathit{in} \\
 & & \int \mu_c(dc)\ \mathit{let}\ \gamma_2' = \gamma_2\,[\alpha \leftarrow c]\,[\alpha\texttt{\_last} \leftarrow c]\ \ \mathit{in} \\
 & & \qquad\qquad \mathit{let}\ \mu = \{\![m\texttt{\_model}(\alpha, \mathit{obs})]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2'}(((),()), s)\ \mathit{in} \\
 & & \qquad\qquad \int \mu(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), s'))(U) \\
\text{(simplification)} & = & \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{None} \to d \\
 & & \mathit{in} \\
 & & \int \mu_c(dc) \\
 & & \quad \mathit{let}\ \gamma_2' = \gamma_2\,[\alpha \leftarrow c]\,[\alpha\texttt{\_last} \leftarrow c]\ \ \mathit{in} \\
 & & \quad \mathit{let}\ \mu = \lambda U. \\
 & & \qquad\qquad \int \gamma_2'(m\texttt{\_model\_step})(\gamma_2'(\alpha), \gamma_2'(\mathit{obs}))(s)(dv, ds') \\
 & & \qquad\qquad\quad \delta(v, (((),()), s'))(U) \\
 & & \quad \mathit{in} \\
 & & \quad \int \mu(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), s'))(U) \\
 & = & \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{None} \to d \\
 & & \mathit{in} \\
 & & \int \mu_c(dc) \\
 & & \quad \mathit{let}\ \mu = \lambda U. \\
 & & \qquad\qquad \int \gamma_2(m\texttt{\_model\_step})(c, \gamma_2(\mathit{obs}))(s)(dv, ds') \\
 & & \qquad\qquad\quad \delta(v, (((),()), s'))(U) \\
 & & \quad \mathit{in} \\
 & & \quad \int \mu(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), s'))(U) \\
\text{(cf. hypothèse)} & = & \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{None} \to d \\
 & & \mathit{in} \\
 & & \int \mu_c(dc)\ \mathit{let}\ \mu = \lambda U. \\
 & & \qquad\qquad\qquad \int \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x \leftarrow \gamma_1(\mathit{obs})][\mathit{dom}(\xi) \leftarrow c]}(s)(dv, ds') \\
 & & \qquad\qquad\qquad\quad \delta(v, (((),()), s'))(U) \\
 & & \qquad\qquad \mathit{in} \\
 & & \qquad\qquad \int \mu(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), s'))(U) \\
\text{(simplification, } \mathit{dom}(\xi) = \theta) & = & \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
 & & \qquad\quad \mid \mathit{None} \to d \\
 & & \mathit{in} \\
 & & \int \mu_c(dc) \\
 & & \quad \int \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x \leftarrow \gamma_1(\mathit{obs})][\theta \leftarrow c]}(s)(dv, ds') \\
 & & \qquad \delta(v, (\mathit{Some}(c), (), (((),()), s')))(U)
\end{array}
$$

3. Intégration pour obtenir μ_2.
On a pour tout ensemble mesurable U :

$$
\begin{array}{rcl}
\mu_2(U) & = & \displaystyle\int \sigma_2(dm, (), (((), ()), ds)) \{\![e_{apf}]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_2}(m, (), (((), ()), s))(U) \\
& = & \displaystyle\int \begin{array}[t]{l} \sigma_2(dm, (), (((), ()), ds)) \\ \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\ \qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\ \qquad\qquad \mid \mathit{None} \to d \\ \mathit{in} \\ \int \mu_c(dc) \int \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x\leftarrow\gamma_1(obs)][\theta\leftarrow c]}(s)(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), (((), ()), s')))(U) \end{array}
\end{array}
$$

Conclusion.

On peut maintenant vérifier que $o_1 = o_2$ et que la bisimulation s'applique bien aux nouveaux états $\mathcal{P}\ \sigma'_1\ \sigma'_2$. Comme $\mathcal{P}\ \sigma_1\ \sigma_2$, il existe σ tel que

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma_1 & = & \lambda U. \displaystyle\int \sigma(dm, ds)\delta((), (m, (), s))(U) \\
\sigma_2 & = & \lambda U. \displaystyle\int \sigma(dm, ds)\delta(m, (), (((), ()), s))(U).
\end{array}
$$

On a donc

$$
\begin{array}{rcl}
\mu_1(U) & = & \begin{array}[t]{l} \int \sigma(dm, ds) \\ \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\ \qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\ \qquad\qquad \mid \mathit{None} \to d \\ \mathit{in} \\ \int \mu_c(dc) \int \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x\leftarrow\gamma_1(obs)][\theta\leftarrow c]}(s)(dv_e, ds'_e)\delta(v_e, ((), (\mathit{Some}(c), (), s'_e)))(U) \end{array} \\
\mu_2(U) & = & \begin{array}[t]{l} \int \sigma(dm, ds) \\ \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\ \qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\ \qquad\qquad \mid \mathit{None} \to d \\ \mathit{in} \\ \int \mu_c(dc) \int \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x\leftarrow\gamma_1(obs)][\theta\leftarrow c]}(s)(dv, ds')\delta(v, (\mathit{Some}(c), (), (((), ()), s')))(U) \end{array}
\end{array}
$$

On peut alors calculer les constantes de normalisation :

$$
\mu_1(\top) = \mu_2(\top) \quad = \quad \int \sigma(dm, ds)\ \begin{array}[t]{l} \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\ \qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\ \qquad\qquad \mid \mathit{None} \to d \\ \mathit{in} \\ \int \mu_c(dc)\ \{\![e]\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x\leftarrow\gamma_1(obs)][\theta\leftarrow c]}(s)(\top) \end{array}
$$

On peut maintenant montrer que les sorties sont égales :

$$
\begin{array}{rcl}
o_1(U) = o_2(U) & = & 1/\mu_1(\top) \\
& & \displaystyle\int \sigma(dm, ds) \ \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{None} \to d \\
& & \qquad\qquad \mathit{in} \\
& & \qquad\qquad \int \mu_c(dc) \int \{\!\![e]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x \leftarrow \gamma_1(obs)][\theta \leftarrow c]}(s)(dv, ds')\delta(v)(U)
\end{array}
$$

Finalement on a bien $\mathcal{P}\ \sigma'_1\ \sigma'_2$ avec :

$$
\begin{array}{rcl}
\sigma'(U) & = & 1/\mu_1(\top) \\
& & \displaystyle\int \sigma(dm, ds) \ \mathit{let}\ \mu_c = \mathit{match}\ m\ \mathit{with} \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{Some}(c) \to \delta(c) \\
& & \qquad\qquad\qquad\qquad \mid \mathit{None} \to d \\
& & \qquad\qquad \mathit{in} \\
& & \qquad\qquad \int \mu_c(dc) \int \{\!\![e]\!\!\}^{\text{step}}_{\gamma_1[x \leftarrow \gamma_1(obs)][\theta \leftarrow c]}(s)(dv, ds')\delta(\mathit{Some}(c), s')(U)
\end{array}
$$

$\square$